



**HAL**  
open science

# Application de la réduction de modèle à l'Interaction Fluide Structure

Erwan Liberge, Mustapha Benaouicha, Aziz Hamdouni

► **To cite this version:**

Erwan Liberge, Mustapha Benaouicha, Aziz Hamdouni. Application de la réduction de modèle à l'Interaction Fluide Structure. 18ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2007, Grenoble, France. hal-01716702

**HAL Id: hal-01716702**

**<https://hal.science/hal-01716702v1>**

Submitted on 24 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Application de la réduction de modèle à l'Interaction Fluide Structure

Erwan Liberge<sup>\*,\*\*</sup>, Mustapha Benaouicha <sup>\*,\*\*</sup> & Aziz Hamdouni<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Université de La Rochelle

Laboratoire d'Etude des Phénomènes de Transfert Appliqués au Bâtiment  
Av. M. CREPEAU 17042 La Rochelle Cedex

<sup>\*\*</sup> EIGSI, 26, rue de Vaux de Foletier, 17041 La Rochelle Cedex 1, France  
erwan.liberge@eigsi.fr

### Résumé:

Cet article s'intéresse à la réduction de modèles en Interaction Fluide Structure (IFS) par la méthode décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD). Une difficulté importante dans l'application de cette technique à l'IFS est liée à la déformation du domaine fluide induite par le mouvement de la structure. Nous proposons d'appliquer la POD à un domaine fixe, réunion du domaine du fluide et du domaine du solide et de construire ainsi une base POD relative à ce domaine globale. Nous nous intéressons ici aux cas où la structure est un solide rigide, le problème couplé est alors écrit en formulation eulérienne et utilise une approche de type domaine fictif. On construit ensuite un système dynamique réduit en projetant ces équations sur la base POD globale.

### Abstract :

This paper describes Reduced Order Modeling (ROM) in Fluid Structure Interaction (FSI) using Proper Orthogonal Decomposition method. To use POD in a moving domain, a reference fixed domain is introduced. Next a method to reduce dynamical system in rigid body fluid interaction is developed. This method uses the fictitious domain method approach, which consists in treating the entire fluid-solid domain as a fluid by adding a distributed Lagrange multiplier in the weak formulation on solid domain. The method is tested on a two-dimensional case of rigid body immersed in a fluid

### Mots-clefs :

**Interaction fluide structure, Décomposition orthogonale aux valeurs propres (POD), Réduction de modèle**

## 1 Introduction

Bien que les techniques numériques et la puissance des ordinateurs permettent des modélisations en interaction fluide structure de plus en plus précises, le stockage des données simulées et le temps de calcul reste un handicap. Il est donc nécessaire de pouvoir construire des modèles d'ordre réduit de faible dimension. Différentes méthodes ont été listées par Dowell et al. (2001). Nous avons choisis d'étudier les performances de la POD suite à son développement croissant en turbulence depuis une décennie. Elle y a été introduite en 1967 par Lumley (1967) afin d'extraire les structures cohérentes d'un champ de vitesse et a connue un véritable essor depuis la fin des années 90. En mécanique des structures, la POD est un domaine d'investigation récent s'apparentant à l'analyse modale (Eppureanu et al. (2004)). Son étude dans le cas des domaines mobiles est récente (Liberge et al. (to appear)). La difficulté principale est liée au caractère mobile du domaine fluide, incompatible avec la formulation classique POD.

## 2 La décomposition orthogonale aux valeurs propres

Nous présentons brièvement dans ce paragraphe le principe de la POD. Pour une bibliographie plus complète on pourra se référer à Allery (2002) et Berkooz et al. (1993).

La POD consiste pour un champ de signal  $v(t) \in H$  ( $H$  un espace de Hilbert,  $t$  le temps,  $t \in [0, T]$ ) à chercher  $\Phi \in H$  qui représente au mieux  $v$  sur  $[0, T]$  au sens de la norme de  $H$ . On montre que dans le cas où l'on se situe dans un espace  $H = L^2(\Omega)$ , cela revient à résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\int_{\Omega} \mathcal{R}(x, y) \Phi(y) = \lambda \Phi(x) \quad (1)$$

où  $\mathcal{R}$  est le tenseur de corrélation spatial du champ de vitesse  $\mathcal{R}(x, y) = \langle v(x) \otimes v(y) \rangle$ ,  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  est la moyenne temporelle, ou la moyenne statistique dans le cas d'un signal aléatoire (ces 2 moyennes coïncident pour un processus ergodique).

Sous l'hypothèse de la compacité de l'opérateur associé à (1), on prouve l'existence d'une suite de valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \geq 1}$  positives, réelles, décroissante et convergente vers 0, associée à une suite de vecteurs propres orthogonaux  $(\Phi_i)_{i \geq 1}$  qui forment une base hilbertienne de  $H$ . Les valeurs propres représentent l'énergie respective de chaque mode. En pratique une dizaine de modes suffisent pour capturer plus de 99% de l'énergie, ce qui permet la construction d'une base spatiale réduite et donc d'un système dynamique réduit obtenu par la projection de l'équation de Navier-Stokes sur ces modes. Dans la pratique quand le champ de vitesse provient d'une simulation numérique, la base POD est calculée par la technique des snapshots (Sirovitch (1987)).

Dans le cas de l'interaction fluide structure, le domaine  $\Omega$  serait le domaine fluide, mobile au cours du temps. On obtiendrait donc une base POD qui dépendrait du temps, ce qui est inconsistant.

## 3 Application de la POD dans le cas des domaines mobiles

Pour remédier à cette difficulté on introduit un domaine de référence  $\Omega$  fixe qui contient toutes les évolutions des domaines mobiles ( $\Omega = \Omega_F(t) \cup \overline{\Omega_S}(t)$ ,  $\Omega_F$  désignant le domaine fluide,  $\Omega_S$  désignant le domaine solide). On peut ainsi résoudre les problèmes d'interaction fluide-solide rigide par la méthode des domaines "fictif" (Glowinski et al. (1999); Laure et al. (2005)).

Ces méthodes qui consistent à étendre le problème fluide, défini sur le domaine fluide, au domaine "fictif" fluide solide utilisent une extension des équations de Navier-Stokes au domaine solide. Ce qui permet de passer à une formulation faible ou principe des puissances virtuelles pour le domaine  $\Omega$ .

On cherche  $u$  à divergence nul tel que :  
quelque soit  $\Phi$  un champ de vitesse virtuel à divergence nul, on ait

$$\int_{\Omega} \rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - g \right) \Phi dx + \int_{\Omega} 2\nu \mathbf{tr}(\mathbf{D}[u] \mathbf{D}[\Phi]) dx + \int_{\Omega} \mathbb{I}_{\Omega_S} \mathbf{tr}(\mathbf{D}(\lambda) \mathbf{D}(\Phi)) dx = 0 \quad (2)$$

Avec  $\mathbf{D}$  le tenseur des déformations défini par  $\mathbf{D}(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + {}^t \nabla u)$ ,  $\rho$  et  $\nu$  sont définis sur tout le domaine :

$$\rho = \mathbb{I}_{\Omega_F} \rho_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_F}) \rho_s ; \quad \nu = \mathbb{I}_{\Omega_F} \nu_f + (\mathbb{I} - \mathbb{I}_{\Omega_F}) \nu_s$$

Avec  $\mathbb{I}_{\Omega_S}$ , fonction caractéristique du solide définie comme suit :

$$\mathbb{I}_{\Omega_S}(x, t) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \in \Omega_S(t) \\ 0 & \text{if } x \notin \Omega_S(t) \end{cases} \quad (3)$$

$\nu_S$  est le facteur de pénalisation de la contrainte de rigidité  $\mathbf{D}[u] = 0$  associé à l'hypothèse de solide rigide sur  $\Omega_S$  et le tenseur symétrique  $\mathbf{D}[\lambda]$  est le multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte.

En considérant qu'à chaque instant  $t$  le champ de vitesse obtenue sur le maillage mobile est interpolé vers le maillage du domaine de référence, en tronquant à  $N$  le nombre de fonctions solutions de (1) tel que l'on capture plus de 99%, on écrit  $u$  sur cette base POD à  $N$  éléments :

$$u = \sum_{i=1}^N a_i(t) \Phi_i(x) \quad (4)$$

On introduit cette décomposition de  $u$  dans (2) ce qui nous permet d'obtenir le système dynamique réduit suivant :

Pour  $n = 1..N$  :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \frac{da_i}{dt} A_{in} + \sum_{i=1}^N a_i B_{in} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j C_{ijn} = \sum_{i=1}^N b_i E_{in} \\ \frac{\partial \mathbb{I}_{\Omega_f}}{\partial t} + u \cdot \nabla \mathbb{I}_{\Omega_f} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Avec

$$\begin{aligned} A_{in} &= \int_{\Omega} \rho \Phi_i \Phi_n dx & B_{in} &= \int_{\Omega} 2\mu \text{Tr}(\mathbf{D}[\Phi_i] \mathbf{D}[\Phi_n]) dx \\ C_{ijn} &= \int_{\Omega} \rho \Phi_i \cdot \nabla \Phi_j \Phi_n dx & E_{in} &= - \int_{\Omega_S} \text{Tr}(\mathbf{D}[\Phi_i] \mathbf{D}[\Phi_n]) dx \end{aligned} \quad (6)$$

On est donc amené à résoudre un système d'équations différentielles ordinaires en  $a_i(t)$  de dimension égale au nombre de modes POD retenus. En pratique, comme la méthode POD permet d'obtenir une base qui soit maximale au sens énergétique avec un nombre relativement faible de modes, on obtient un système dynamique faible par rapport au problème initial.

#### 4 Application à un cas bidimensionnel d'interaction fluide structure

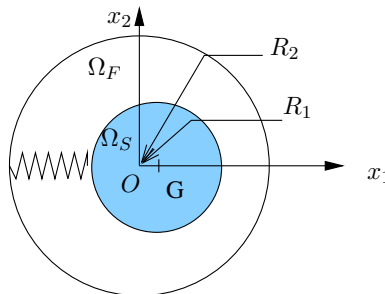


FIG. 1 – Schématisation du domaine d'étude

##### 4.1 Présentation du problème

On considère dans cette section les oscillations d'un cylindre rigide, de rayon  $R_1$ , de centre  $G$  et de masse  $M$  dans un espace fluide annulaire délimité par un cylindre de centre  $O$  et de

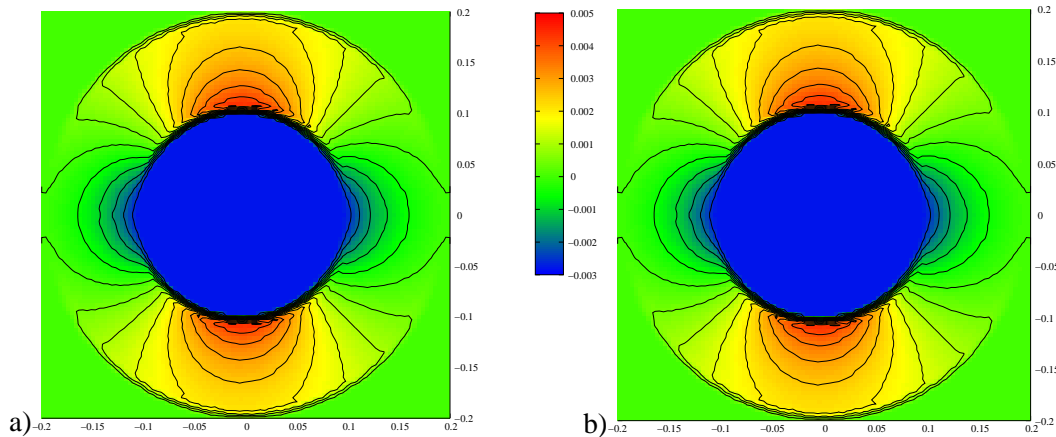


FIG. 2 – Isovaleurs de la première composante du champ de vitesse obtenu a) par Castem b) par reconstruction sur la base POD pour  $t = 3$  s

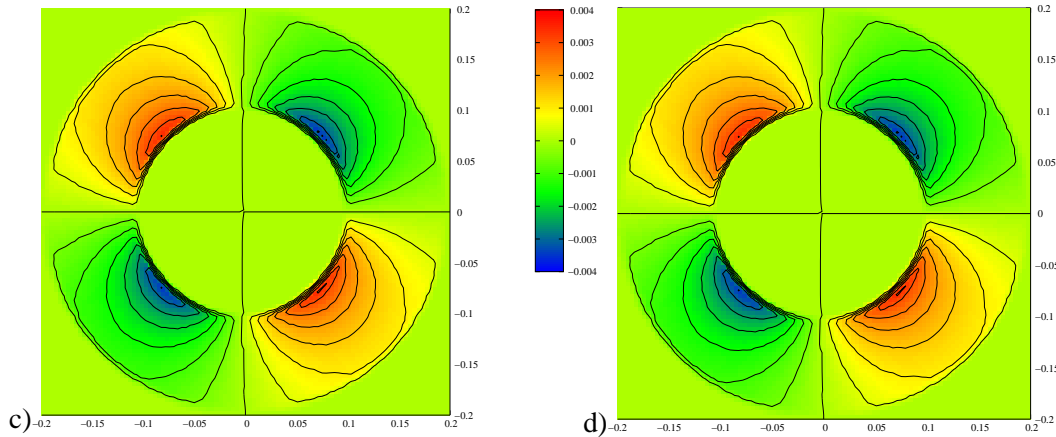


FIG. 3 – Isovaleurs de la deuxième composante du champ de vitesse obtenu c) par Castem d) par reconstruction sur la base POD pour  $t = 3$  s

rayon  $R_2$  (Figure 1). Le fluide est visqueux, de viscosité dynamique  $\mu_f$  et de masse volumique  $\rho_f$ . Le solide est rattaché aux cylindre extérieur par un ressort de raideur  $k$  et de longueur initiale  $l_0$ . On note  $(O, x_1, x_2)$  un repère fixe lié au cylindre extérieur. On considère une configuration initiale où le fluide est au repos et le solide est écarté de sa position de repos. Sous l'effet de l'effort de rappel du ressort, le solide oscille, créant ainsi un écoulement dans le domaine fluide, qui a son tour agit sur le solide.

Pour construire la base POD on détermine numériquement au préalable des Snapshots des configurations de l'écoulement pour une période d'oscillation. L'écoulement du fluide est décrit par les équations de Navier-Stokes en formulation *ALE* (Donea (2004) et Sarrate et al. (2001)).

Le couplage Fluide-Solide rigide est réalisé à l'aide de l'algorithme décrit dans Abouri et al. (2003) avec les données suivantes :  $R_1 = 0.1$  m,  $R_2 = 0.2$  m,  $\rho_f = 1000$  kg.m<sup>-3</sup>,  $M = 1$  kg,  $\mu_f = 0.001$  kg.m.s  $k = 1 \cdot 10^{-04}$  N.m<sup>-2</sup>. A l'instant initial le solide se trouve à la position  $(0, 0.05, 0)$ , et la longueur à vide du ressort est de 0.1 m.

La méthode des éléments finis est utilisée pour la discrétisation spatiale du domaine. Les calculs sont réalisés avec le code éléments finis Castem durant un temps de calcul physique de 6.28 s, ce qui correspond à une période d'oscillation du solide et 100 snapshots ont été effectuées.

## 4.2 Application de la POD

Le système dynamique (5) a été résolu pour cette configuration avec un pas de temps  $\Delta t = 2.09 \cdot 10^{-2}$  s. Au niveau énergétique peu de modes suffisent pour obtenir la quasi to-

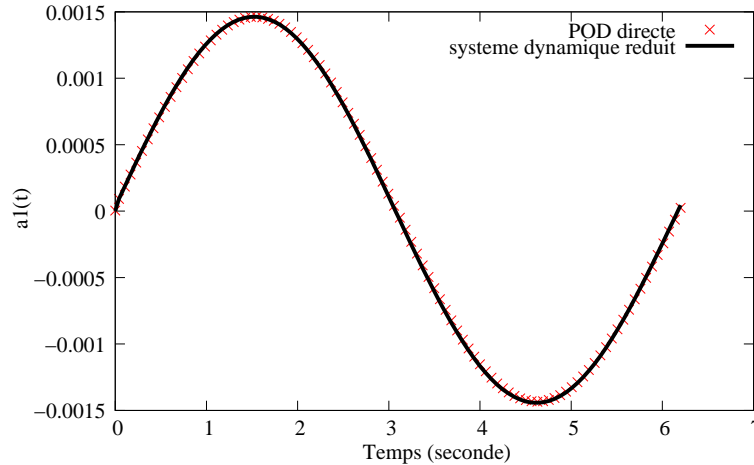


FIG. 4 – Comparaison du premier coefficient temporel  $a_1$  obtenu par projection et par le système dynamique réduit

talité de l'énergie cinétique, puisque le premier mode POD capture déjà à lui seul 99.2% de l'énergie cinétique totale. Sur la figure 4 on compare le premier coefficient  $a_1$  correspondant à ce mode obtenu par projection de la vitesse sur la base POD  $\left( a_1(t) = \int_{\Omega} u(x,t) \cdot \Phi_1(x) dx \right)$  et celui obtenu par le système dynamique réduit à 2 modes.

A partir de la solution obtenue sur cet interval de temps qui correspond à une pseudo période d'oscillation du solide on peut calculer le déplacement du centre de gravité du solide, qui est de la forme  $X_g(t) = X_g(0) \cos(\omega \sqrt{1 - \varepsilon^2}) e^{\varepsilon \omega t}$ ,  $\varepsilon$  se calculant à partir du décrétement logarithmique de la solution obtenue sur cette première période. Ceci nous permet de comparer le comportement du système dynamique pour une durée de simulation plus grande que la durée de snapshot. Sur la figure 5, le système dynamique réduit à été résolu pour une durée de simulation

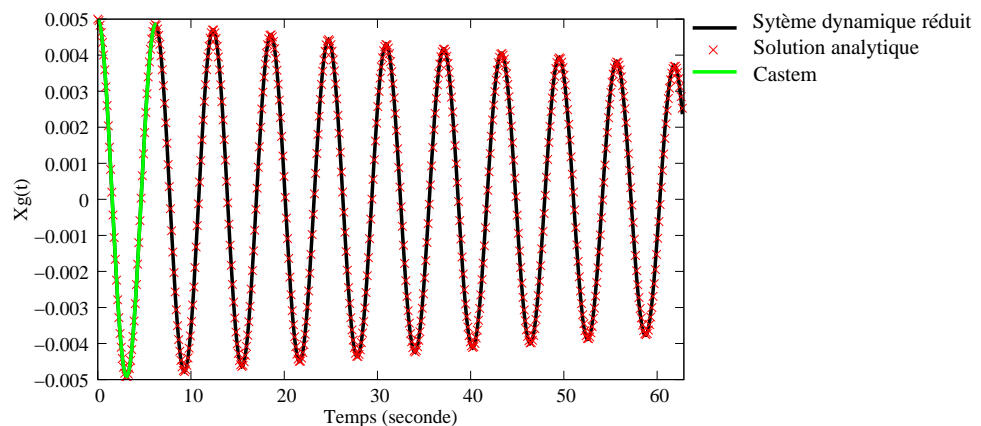


FIG. 5 – Evaluation du centre de gravité par la solution analytique, le système dynamique réduit et la solution obtenue par Castem sur une période d'oscillation

10 fois plus grande que l'intervalle de snapshot. On observe alors que la position du centre de

gravité du solide est très bien prédite.

## 5 Conclusions

Dans ce papier une méthode d'application de la POD à l'IFS a été présentée. La solution proposée utilise la technique des domaines fictifs pour remédier à la difficulté liée au caractère mobile du domaine fluide. La capacité de cette méthode pour reconstruire un champ de vitesse a été testé sur un cas bidimensionnel avec succès, ouvrant ainsi la voie à l'application de la technique de réduction de modèle en Interaction Fluide Structure par la POD par système dynamique d'ordre bas.

## Références

- D. Abouri, A. Parry, and A. Hamdouni. Fluid rigid body interaction in complex industrial ow, advanced in fluid structure interaction ii. *WIT PRESS*, 2003.
- C. Allery. *Contribution à l'identification des bifurcations et à l'étude des écoulements fluides par des systèmes d'ordre faible (POD)*. Thèse, Université de Poitiers, 2002.
- G. Berkooz, P. Holmes, and J. Lumley. The proper orthogonal decomposition in the analysis of turbulent flows. *Annual review of fluid Mechanics*, 25 :539–575, 1993.
- J. Donea. Arbitrary lagrangian-eulerian methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics*, 2004.
- Earl H. Dowell, Hall, and C. Kenneth. Modelling of fluid-structure interaction. *Annals Review of Fluid Mechanics*, 33 :445–90, 2001.
- B. I. Epureanu, L. S. Tang, and M. P. Paidoussis. Coherent structures and their influence on the dynamics of aeroelastic panels. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 17(6) : 977–991, 2004.
- R. Glowinski, T-W. Pan, T.I Hesla, and D.D. Joseph. A distributed lagrange multiplier/fictitious domain method for particulate flows. *International Journal of Multiphase Flows*, 25 :755–794, 1999.
- P. Laure, G. Beaume, O. Basset, L. Silva, and T. Coupez. Les méthodes numériques pour les écoulements de fluides chargés. In *1<sup>er</sup> colloque du GDR interactions fluide-structure*, page 1, Sophia Antipolis, Septembre 2005.
- E. Liberge, M. Benaouicha, and A. Hamdouni. Proper orthogonal decomposition investigation in fluid structure interaction. *European Journal of Computational Fluid Mechanic*, to appear.
- J.L. Lumley. The structure of inhomogeneous turbulent flows. *Atmospheric Turbulence and Radio Wave Propagation*, vol. In A.M. Yaglom and Tararsky :166–178, 1967.
- J. Sarrate, A. Huerta, and J. Donea. Arbitrary lagrangian-eulerian formulation for fluid-rigid body interaction. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190(6) :3171–3188, 2001.
- L. Sirovitch. Turbulence and the dynamics of coherent structures, part i : Coherent structures, part ii : Symmetries and transformations, part iii : Dynamics and scaling. *Quarterly of Applied Mechanics*, 45(3) :561–590, 1987.