



HAL
open science

Contribution de l'homogénéisation à l'étude de la filtration d'un fluide en milieu poreux fracturé

Pascale Royer, Jean-Louis Auriault, C. Boutin

► **To cite this version:**

Pascale Royer, Jean-Louis Auriault, C. Boutin. Contribution de l'homogénéisation à l'étude de la filtration d'un fluide en milieu poreux fracturé. *Revue de l'Institut Français du Pétrole*, 1995, 50 (3), pp.337 - 352. 10.2516/ogst:1995023 . hal-01713666

HAL Id: hal-01713666

<https://hal.science/hal-01713666>

Submitted on 20 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CONTRIBUTION DE L'HOMOGENÉISATION À L'ÉTUDE DE LA FILTRATION D'UN FLUIDE EN MILIEU POREUX FRACTURÉ

P. ROYER et J.L. AURIAULT

Université Joseph Fourier¹

C. BOUTIN

École Nationale des Travaux Publics de l'État²

Cet article est consacré à la modélisation de l'écoulement d'un fluide dans un massif poreux fracturé. Contrairement aux approches phénoménologiques, nous traitons le problème au moyen de la méthode d'homogénéisation par développements asymptotiques en milieux périodiques. Les comportements macroscopiques sont ainsi déduits de la physique à l'échelle microscopique, sans autre prérequis. Deux cas ont été examinés : l'écoulement d'un gaz dans un massif rigide et l'écoulement d'un fluide incompressible dans une matrice déformable. Dans ces deux situations, on met en évidence le rôle fondamental du rapport entre les deux séparations d'échelles (échelle macroscopique-échelle des fissures et échelle des fissures-échelle des pores). Les descriptions macroscopiques sont conditionnées par la relation entre les séparations d'échelles, le couplage interéchelle étant maximum lorsque les rapports d'échelles sont identiques.

CONTRIBUTION OF THE HOMOGENIZATION PROCESS TO THE SEEPAGE THROUGH FRACTURED POROUS MEDIA

This paper deals with the seepage of a fluid through a fissured porous medium. Conversely to the phenomenological approaches we treat this problem by using the homogenization method of asymptotic developments for periodic structures. Thus the macroscopic behaviours are directly deduced from the physics at the microscopic scale, without any prerequisite. Two cases have been investigated: the flow of a gas through a rigid medium and the flow of an incompressible fluid through a deformable matrix. In both situations, it appears that the ratio between the two scale separations (macroscopic scale-fissure scale and fissure scale-pore scale) plays an essential role. The macroscopic description depends on the scale separations, the interscale coupling being maximum when the scales are equally separated.

CONTRIBUCIÓN DE LA HOMOGENEIZACIÓN PARA EL ESTUDIO DE LA FILTRACIÓN EN MEDIO POROSO FRACTURADO

El presente artículo está dedicado a la modelización del flujo de un fluido en un macizo poroso fracturado. Contrariamente a los enfoques fenomenológicos, el problema se trata aquí por medio del método de la homogeneización por desarrollos asintóticos en medios periódicos. Los comportamientos macroscópicos se deducen así de la física a escala microscópica sin demás intervenciones previas. Se

(1) Laboratoire « Soils, Solides, Structures », INPG, CNRS URA 1511, BP 53X, 38041 Grenoble Cedex, France.

(2) Laboratoire Géomatériaux, DGCB CNRS URA 1652, rue Maurice Audin, 69518 Vaux-en-Velin, France.

han examinado dos casos: el flujo de un gas en un macizo rígido y el flujo de un fluido incompresible en una matriz deformable. En ambas situaciones se hace resaltar el papel fundamental de la relación entre las dos separaciones de escalas (escala microscópica-escala de la fisuras y escala de las fisuras-escala de poros). Las descripciones macroscópicas dependen a su vez de la relación entre las separaciones de escalas, en cuyo caso el acoplamiento interescala alcanza entonces su punto máximo cuando las relaciones de escalas son idénticas.

1 INTRODUCTION

La compréhension du comportement des structures poreuses, dont l'espace interstitiel est saturé par un ou plusieurs fluides, constitue la base de nombreuses disciplines de la Mécanique, telles que l'Hydrogéologie, la Mécanique des sols et des roches et la Géophysique. Des secteurs industriels de grand poids économique, tels que ceux de l'extraction d'hydrocarbures ou du Génie Civil, sont également largement concernés par le sujet, de par leur préoccupation d'effectuer des prévisions fiables. Les premiers concepts concernant la Mécanique des milieux poreux et des écoulements de fluide qui peuvent s'y produire, sont issus d'observations des phénomènes et de règles établies au cas par cas, pour répondre à des situations concrètes. Aujourd'hui, les exigences technologiques imposent aux scientifiques de dépasser ce stade empirique.

La modélisation de tout système hétérogène s'avère une opération délicate. En effet, la prise en compte, une à une, de toutes les hétérogénéités apparaît impossible. La répétition, au sens statistique, du désordre interne confère toutefois au milieu un caractère quasi-homogène à très grande échelle et autorise ainsi une description continue. En d'autres termes, on peut décrire les processus physiques par des équations dont les coefficients de transfert sont indépendants des conditions aux limites du système. Telle est l'idée de base commune à toutes les techniques d'homogénéisation. Plus précisément, si l'échelle macroscopique d'observation est suffisamment grande par rapport à l'échelle microscopique, il est alors possible de déterminer un milieu macroscopiquement équivalent, c'est à dire se comportant «en moyenne» comme le milieu hétérogène initial, sous une sollicitation donnée. L'homogénéisation s'est déjà révélée très efficace pour l'étude de la filtration de fluides en milieu poreux. La méthode d'homogénéisation des structures périodiques (ou méthodes des développements asymptotiques) permet, au prix de l'ajout de l'hypothèse supplémentaire de périodicité, de conduire aux descriptions les plus précises, puisqu'elle n'exige aucun pré-requis macroscopique.

Dans cet article, nous nous intéressons à une classe de matériaux poreux particulièrement délicats à modéliser : les milieux à double porosité. La filtration d'un fluide dans une telle structure est un processus très complexe, étant donné que le milieu est constitué de deux systèmes poreux distincts interagissant, et dont les tailles de pores, et par conséquent les caractéristiques de transfert respectives, sont très différentes. De nombreux gisements naturels correspondent à ce schéma : les gisements poreux fracturés et les gisements à deux couches de perméabilités très différentes. La connaissance du comportement des réservoirs à double porosité concerne donc particulièrement l'exploitation pétrolière et minière. Elle est également requise pour maîtriser les transferts de polluants en nappes souterraines. La notion de milieu à double porosité fut introduite par Barenblatt et Zheltov (Barenblatt et Zheltov, 1960), dans le cadre de l'étude des réservoirs naturels poreux fracturés. Pour la plupart, les études antérieures à celle-ci étaient basées sur une approche discrète, consistant à considérer l'écoulement dans une fracture puis à le généraliser à un réseau de fractures de configuration simple. Une telle approche s'est avérée inappropriée à l'étude de l'écoulement transitoire d'un fluide dans un réservoir fracturé, constitué de blocs poreux de taille et de forme différentes et séparés par des fractures distri-

buées aléatoirement. Citons aussi les approches issues directement de l'ingénierie pétrolière qui tentaient de déterminer les caractéristiques du milieu en analysant les données de variation de pression dans le puits. Bien qu'ayant accru la connaissance des propriétés des milieux poreux fracturés, ces méthodes restent peu fiables quant à la description de leur comportement. L'originalité de la proposition avancée par G.I. Barenblatt et I.P. Zheltov (Barenblatt et Zheltov, 1960) pour modéliser les milieux à double porosité réside dans le fait qu'il s'agit d'une approche continue. En effet, ils introduisent alors le concept d'écoulement d'un fluide dans deux milieux continus, puisqu'ils considèrent le réservoir poreux fracturé comme un composite formé de deux systèmes poreux continus communicants : la matrice poreuse, de grande capacité de stockage et de faible perméabilité d'une part et le réseau de fractures, de faible capacité de stockage et de grande perméabilité d'autre part. La théorie de Barenblatt-Zheltov tient compte séparément de l'écoulement dans chacun des deux systèmes et d'un écoulement de couplage entre les deux appelé «écoulement d'interporosité». L'étude, par une approche continue, fait appel à des quantités moyennes caractérisant l'écoulement dans le milieu considéré. L'écoulement est considéré sur un volume élémentaire représentatif et les lois de base qui gouvernent le processus sont formulées en terme de caractéristiques moyennes. Ainsi, le modèle de Barenblatt-Zheltov décrivant l'écoulement d'un fluide homogène **faiblement compressible** dans un milieu à double porosité s'exprime par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} \frac{k_1}{\mu} \Delta P_1 - q = n_1 c_1 \frac{\partial P_1}{\partial t} \\ \frac{k_2}{\mu} \Delta P_2 + q = n_2 c_2 \frac{\partial P_2}{\partial t} \end{cases}$$

où l'indice 1 se réfère à la matrice poreuse et l'indice 2 aux fractures et où c_i désigne la compressibilité du système i , n_i sa porosité, k_i sa perméabilité, P_i la pression du fluide dans le milieu i et μ la viscosité du fluide. q caractérise l'échange de fluide entre les deux milieux, c'est-à-dire l'écoulement d'interporosité. Pour déterminer ce terme, G.I. Barenblatt et I.P. Zheltov supposent que le régime est quasi-permanent, c'est-à-dire que le processus n'est pas explicitement dépendant du temps. Il est défini par analyse dimensionnelle et s'exprime en fonction de la différence entre les deux pressions :

$$q = \frac{\alpha}{\mu} (P_1 - P_2)$$

où α est une constante qui caractérise l'intensité du transfert de fluide entre les blocs poreux et les fractures.

Peu de temps après la parution du modèle à double porosité, G.I. Barenblatt *et al.* (Barenblatt *et al.*, 1960) proposent un modèle qu'ils appellent «modèle du milieu poreux fracturé». Il s'agit en fait du modèle précédent dans le cas où l'écoulement dans la matrice et la capacité de stockage dans les fractures sont ignorés. En d'autres termes, k_1 et n_2 sont considérés comme négligeables. Enfin, en 1963 Warren et Root (Warren et Root, 1963) proposent un modèle idéalisé de réservoir naturel fracturé en considérant également un écoulement quasi-permanent. La capacité de stockage dans les fractures est prise en compte, mais l'écoulement du fluide dans la matrice poreuse est négligé. Le modèle résultant s'exprime donc par les deux équations du modèle de Barenblatt-Zheltov, mais en prenant $k_1 = 0$. Notons que le modèle de Warren et Root a été adopté par les industries comme fondement pour l'étude des réservoirs fracturés et a engendré un grand nombre de travaux concernant notamment la modélisation des réservoirs à pétrole.

Les approches phénoménologiques ci-dessus présentent deux défauts importants. D'une part elles ne prennent en considération que des fluides peu compressibles. D'autre part les compressibilités du fluide et de la matrice poreuse sont considérées globalement, dans les coefficients c_i .

Un des objets de cet article est de proposer des descriptions macroscopiques valables pour des fluides très compressibles, et où les compressibilités des différentes phases sont correctement différenciées. Pour cela nous appliquons la méthode d'homogénéisation des structures périodiques au problème de la filtration d'un fluide dans un milieu poreux fracturé. Contrairement à l'approche phénoménologique présentée ci-dessus, laquelle traite le problème directement à l'échelle macroscopique, l'homogénéisation définit le comportement macroscopique à partir de la description locale complète, au moyen de développements asymptotiques. Le choix de cette méthode est en outre motivé par la possibilité qu'elle fournit d'exploiter l'existence des trois échelles caractéristiques introduites par la géométrie du milieu. Nous verrons que le comportement macroscopique du milieu dépend de la relation entre les différents rapports d'échelle. D'autre part, le terme d'interporosité, dont l'expression est un sujet de débat

dans les études phénoménologiques, apparaît naturellement dans l'équation de comportement macroscopique obtenue par homogénéisation. La méthode permet de tenir compte de tous les phénomènes aux deux échelles, l'importance relative de chacun d'entre eux étant mesurée par des nombres adimensionnels appropriés. De fait, ni la capacité de stockage dans les fractures, ni l'écoulement dans les pores ne sont négligés. Ici, nous considérons successivement l'écoulement d'un fluide compressible dans une matrice poreuse fracturée rigide, puis l'écoulement d'un fluide incompressible dans une matrice poreuse fracturée déformable. Le but du présent article est de mettre l'accent sur l'aspect physique du problème dictant la mise en œuvre de la méthode et de montrer l'intérêt que présente cette méthode en s'appuyant sur les résultats obtenus. Les résultats présentés ici sont issus de plusieurs études précédentes (Auriault et Boutin, 1992, 1993; Boutin, 1994; Auriault et Royer, 1993; Royer et Auriault, 1992, 1994 et Royer, 1994). Le lecteur est invité à se reporter à ces publications pour le détail du raisonnement et des calculs. On trouvera aussi dans (Arboglast, Douglas et Hornung, 1990), une étude de l'écoulement d'un fluide faiblement compressible dans un milieu poreux fracturé rigide, où les auteurs utilisent la méthode d'homogénéisation des structures périodiques pour effectuer le passage de l'échelle des fractures à l'échelle macroscopique. L'intérêt de la méthode que nous proposons pour étudier les milieux à double porosité et qu'elle prend en compte toutes les interactions possibles entre les différentes échelles.

Après une définition précise du milieu considéré, on présente, en troisième partie, l'étude d'un fluide **très compressible** dans une matrice poreuse fracturée rigide. Nous insistons particulièrement sur le raisonnement physique qui précède l'application du processus d'homogénéisation par lui-même. Les résultats concernant l'écoulement d'un fluide **incompressible** dans une matrice poreuse fracturée **déformable** sont exposés dans la quatrième partie. Une présentation sommaire de la méthode des développements asymptotiques est proposée en annexe.

La comparaison directe de nos résultats avec l'approche classique s'avère impossible puisque dans cette dernière le fluide filtrant est peu compressible et que les compressibilités du fluide et de la matrice poreuse sont prises en compte globalement, donc de façon contestable, dans les coefficients c_i . Toutefois, dans le cas particulier d'une matrice poreuse rigide, il est possible (Royer, 1994) de comparer l'approximation de fluide

peu compressible de nos résultats avec l'approche classique. Il ressort de cette étude que l'approche classique fournit au mieux une description grossière du phénomène.

2 LE MILIEU CONSIDÉRÉ

2.1 Description du milieu

Dans le but d'adapter la méthode des développements asymptotiques à l'étude des milieux poreux fracturés, on suppose que le milieu est doublement périodique. À l'échelle des pores, le milieu est périodique de période Ω , de longueur caractéristique l . Le solide et les pores occupent respectivement les domaines Ω_s et Ω_p et leur frontière commune est Γ (fig. 1). À l'échelle des fractures, il existe une seconde structure poreuse périodique, de période Ω' et de longueur caractéristique l' , telle que $l' \gg l$. La matrice poreuse et les fractures occupent respectivement les domaines Ω'_{sp} et Ω'_f et leur frontière commune est notée Γ' (fig. 2). Pour un réservoir, les longueurs l et l' sont définies. Quant à la longueur caractéristique macroscopique l'' , elle doit être choisie telle que : $l'' \gg l'$. Le milieu considéré présente donc deux séparations d'échelle :

$$\frac{l'}{l''} \ll 1 \text{ entre les fractures et le niveau macroscopique ;}$$

$$\frac{l}{l'} \ll 1 \text{ entre les pores et les fractures.}$$

Si la première condition n'est pas vérifiée, le problème n'est alors pas homogénéisable (voir annexe). Si la seconde n'est pas vérifiée, on a affaire à un milieu à simple porosité, c'est-à-dire uniquement constitué du système poreux lié aux fractures. Nous supposons donc ici que ces deux conditions de séparation d'échelle sont vérifiées, c'est-à-dire que le milieu est à double porosité et le problème homogénéisable. Dans le but de matérialiser ces séparations d'échelle, définissons les petits paramètres suivants :

$$\alpha = \frac{l}{l'} \quad \varepsilon = \frac{l'}{l''} \quad \gamma = \alpha \quad \varepsilon = \frac{l}{l''}$$

Nous allons montrer que le comportement macroscopique équivalent du milieu dépend de la relation entre les deux séparations d'échelle. Pour cela, nous allons considérer trois cas distincts qui correspondent à trois relations entre α et ε . Pour les définir, examinons dans

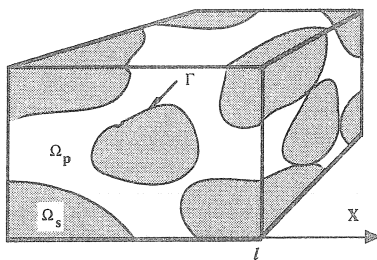


Figure 1
Représentation de la cellule périodique à l'échelle des pores.
The periodic cell at the pore scale.

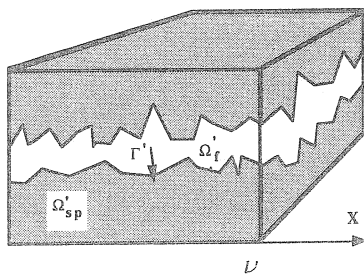


Figure 2
Représentation de la cellule périodique à l'échelle des fractures.
The periodic cell at the fracture scale.

un premier temps les temps caractéristiques de consolidation du milieu.

2.2 Temps caractéristiques de consolidation du milieu

L'écoulement d'un fluide incompressible dans un milieu déformable à simple porosité est décrit par les deux équations suivantes :

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{C}\tilde{\varepsilon} - \tilde{\alpha}P) = 0 \quad (1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\tilde{K}\vec{\nabla}P) = \tilde{\alpha}\tilde{\varepsilon} + \beta\dot{P} \quad (2)$$

où \tilde{C} est le tenseur d'élasticité du matériau, $\tilde{\varepsilon}$ la déformation, \tilde{K} sa perméabilité et P la pression du fluide. On notera la symétrie des équations (1) et (2), assurée par le tenseur $\tilde{\alpha}$. La vitesse de déformation $\tilde{\varepsilon}$ est telle que :

$$|\dot{\tilde{\varepsilon}}| = O\left(\frac{|\tilde{\varepsilon}|}{T_c}\right)$$

où T_c est le temps caractéristique de consolidation. Déterminons l'ordre de grandeur de T_c en fonction des caractéristiques du milieu.

Le tenseur $\tilde{\alpha}$ est tel que $|\tilde{\alpha}| = O(1)$. Alors, d'après l'équation (2) et si L est la longueur caractéristique macroscopique de ce milieu, on a :

$$|\dot{\tilde{\varepsilon}}| = O\left(\frac{|\tilde{\varepsilon}|}{T_c}\right) = O\left(|\tilde{K}| \frac{P}{L^2}\right)$$

Or, d'après l'équation (1), il vient :

$$P = O(|\tilde{C}| |\tilde{\varepsilon}|)$$

d'où

$$T_c = O\left(\frac{L^2}{|\tilde{K}| |\tilde{C}|}\right) \quad (3)$$

L'ordre de grandeur du temps caractéristique de consolidation dépend des caractéristiques physiques et géométriques du matériau. Dans un milieu à double porosité, on peut définir deux temps caractéristiques de consolidation, T_p pour la matrice microporeuse et T_f pour la matrice fracturée :

– Dans les pores :

$$T_p = O\left(\frac{l'^2}{|\tilde{K}_p| |\tilde{C}_p|}\right)$$

– Dans les fractures :

$$T_f = O\left(\frac{l''^2}{|\tilde{K}_f| |\tilde{C}_f|}\right)$$

Compte tenu du fait que :

$$|\tilde{C}_p| = O(|\tilde{C}_f|), \quad |\tilde{K}_p| = O(l^2/\mu) \text{ et } |\tilde{K}_f| = O(l'^2/\mu)$$

on en déduit que :

$$\frac{T_p}{T_f} = O(\varepsilon^2 \alpha^{-2}) \quad (4)$$

À partir de cette relation, on peut isoler trois cas intéressants :

Cas I : Faible séparation entre l'échelle des pores et celle des fractures

$$\alpha = O(\sqrt{\varepsilon})$$

Le petit paramètre ε sert de « mesure » et est tel que $\varepsilon \ll 1$. On a :

$$\frac{T_p}{T_f} = O(\varepsilon)$$

Pour des temps de l'ordre de T_f , la matrice microporeuse consolide instantanément. Le couplage entre les deux systèmes poreux est instantané et le temps caractéristique d'évolution de la matrice microporeuse noyée dans le réseau des fissures est T_f .

Cas II : Séparations d'échelles égales :

$$\alpha = O(\varepsilon)$$

L'ordre de grandeur relatif des temps caractéristiques de consolidation est alors tel que :

$$\frac{T_p}{T_f} = O(1)$$

La consolidation de la matrice est fortement influencée par la consolidation du milieu fracturé. Le couplage entre les deux systèmes poreux est important.

Cas III : Importante séparation entre l'échelle des pores et celle des fractures :

$$\alpha = O(\varepsilon^2)$$

On a alors :

$$\frac{T_p}{T_f} = O(\varepsilon^{-2})$$

La consolidation de la matrice microporeuse n'influence pas celle du milieu fracturé. En effet, durant la consolidation des fractures, la matrice a un comportement de milieu élastique monophasique. Le couplage entre les deux systèmes poreux est alors nul. Le temps caractéristique d'évolution dans la matrice microporeuse est $T_p = O(\varepsilon^{-2})T_f$.

Une analyse identique pourrait être menée pour l'écoulement d'un fluide compressible dans une matrice rigide. La relation (4) reste valable et dans ce cas, les temps T_p et T_f sont les temps caractéristiques d'écoulement dans les pores et les fractures.

Nous allons successivement envisager l'étude de la filtration d'un fluide très compressible dans un milieu poreux fracturé rigide, puis celle de la filtration d'un fluide incompressible dans un milieu poreux fracturé déformable et considérer, à chaque fois, les trois cas que nous venons d'introduire à partir de l'étude l'ordre de grandeur ces temps de consolidation.

3 FILTRATION D'UN GAZ DANS UN MILIEU POREUX FRACTURÉ RIGIDE

3.1 Introduction

Nous considérons ici l'écoulement quasi-statique d'un fluide très compressible dans un milieu poreux fracturé rigide. Nous reprenons les résultats obtenus dans Royer et Auriault, 1992 ; Auriault et Royer, 1993 ; Royer et Auriault, 1994 et Royer, 1994. Nous nous attachons surtout à exposer le formalisme de la méthode et le raisonnement physique précédant la mise en œuvre du processus d'homogénéisation.

Par mesure de simplicité, supposons que le système est au repos à l'instant initial : la vitesse est nulle et la pression et la masse volumique sont constantes et valent respectivement P_0 et ρ_0 . Dans le cas d'un écoulement lent, la perturbation de cet état d'équilibre se traduit par les équations qui suivent, avec $k = p$ dans les pores (Ω_p) et $k = f$ dans les fractures (Ω_f). La pression et la masse volumique du fluide sont respectivement $P_0 + P_k$ et $\rho_0 + \rho_k$, où P_k et ρ_k sont des accroissements.

Principe fondamental

L'étude de l'écoulement d'un fluide compressible dans un milieu poreux déformable à simple porosité (Auriault *et al.*, 1990) a montré que le terme inertiel et transitoire des équations de Navier-Stokes devait être négligeable au premier ordre pour qu'il existe une description macroscopique équivalente. Ce résultat reste valable dans le contexte de la double porosité et donc le principe fondamental s'exprime par :

$$\mu \Delta \vec{v}_k + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k) - \vec{\nabla} P_k = \vec{0} \quad (5)$$

où λ et μ sont des viscosités, \vec{v}_k la vitesse et P_k la pression.

Bilan de masse

Il s'exprime par :

$$\frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_k) \vec{v}_k) = 0 \quad (6)$$

où ρ_0 est la masse volumique initiale et ρ_k l'incrément de masse volumique du fluide.

Équation d'état du gaz

Par mesure de simplicité, on suppose que le fluide est linéaire. Ainsi :

$$\rho_k = \frac{\rho_0}{P_0} P_k, \quad (7)$$

où $\rho_0/P_0 = A$ est une constante.

Conditions aux limites

Sur Γ

La condition d'adhérence est classiquement :

$$\vec{v}_p = \vec{0} \quad (8)$$

Sur Γ'

La continuité du flux normal et de la pression s'écrivent :

$$\vec{v}_f = \langle \vec{v}_p \rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_p} \vec{v}_p \, d\Omega \quad (9)$$

$$P_f = P_p \quad (10)$$

On montre en effet que la moyenne de volume $\langle \vec{v}_p \rangle_\Omega$ est égale à une moyenne de surface (Levy et Sanchez-Palencia, 1975). Cette quantité est donc bien un flux.

Conditions initiales

Nous admettons que le fluide est au repos à l'instant initial :

$$\vec{v}_k(t=0) = \vec{0} \quad (11)$$

$$\rho_k(t=0) = 0 \quad (12)$$

$$P_k(t=0) = 0 \quad (13)$$

3.2 Étude de l'ordre de grandeur relatif des vitesses

Pour mettre en œuvre le processus d'homogénéisation, nous écrivons les grandeurs physiques inconnues sous forme de développements asymptotiques en puissance de ε , le petit paramètre qui nous sert de « mesure ».

Sur la période (Ω') liée aux fractures, la séparation d'échelle avec le niveau macroscopique est matérialisée par le petit paramètre ε . En conséquence, les quantités inconnues liées aux fractures s'écrivent, a priori, sous la forme suivante :

$$\phi_f = \varepsilon^0 \phi_f^0 + \varepsilon^1 \phi_f^1 + \varepsilon^2 \phi_f^2 + \dots \quad \phi = \vec{v}, P, \rho \quad (14)$$

Sur la période liée aux pores (Ω), la séparation avec le niveau macroscopique est mesurée par le petit paramètre γ . On ne peut cependant pas considérer que les développements des quantités inconnues liées aux pores s'écrivent sous forme de développements asymptotiques en puissance de γ . En effet, la présence des fractures, de taille caractéristique intermédiaire entre l'échelle microscopique et le niveau macroscopique, induit une perturbation modifiant les ordres de grandeur. Nous écrivons donc ces quantités sous forme de développements en puissance de $\eta_{\max} = (\alpha, \varepsilon)$. La pression et la masse volumique s'écrivent donc, a priori, sous la forme suivante :

$$\phi_p = \eta^0 \phi_p^0 + \eta^1 \phi_p^1 + \eta^2 \phi_p^2 + \dots \quad \phi = P, \rho \quad (15)$$

L'écriture de la vitesse ne diffère que par l'ordre de grandeur du premier terme du développement. En effet, la vitesse d'écoulement du fluide étant beaucoup plus faible dans les pores que dans les fractures, le développement de la vitesse dans les pores n'est pas de l'ordre de ε^0 mais de ε^h , avec $h > 0$:

$$\vec{v}_p = \varepsilon^h \vec{v}_p^h + \varepsilon^{h+1} \vec{v}_p^{h+1} + \varepsilon^{h+2} \vec{v}_p^{h+2} + \dots \quad (16)$$

Il s'agit là d'une propriété reconnue des milieux à double porosité, justifiant le fait que l'écoulement dans les pores est souvent négligé dans les modèles phénoménologiques. Le but de ce paragraphe est donc de déterminer h , c'est-à-dire d'établir l'ordre de grandeur relatif entre les deux champs de vitesse :

$$\frac{v_p}{v_f} = O(\varepsilon^h), \quad h \text{ entier strictement positif} \quad (17)$$

Pour cela, nous partons des équations (5) et (6) qui sont les deux équations fondamentales régissant le mouvement du fluide. Le principe fondamental (5) montre que l'écoulement du gaz à travers le milieu poreux est forcé par un gradient de pression appliqué aux bornes de l'échantillon macroscopique. Dans le cas présent où les forces inertielles et transitoires sont négligeables, il traduit l'équilibre entre le terme de pression et les termes visqueux :

$$\frac{\delta'' P}{l''} = O\left(\mu \frac{v_p^p}{l^2}\right) = O\left(\mu \frac{v_f^p}{l'^2}\right) \quad (18)$$

où $\delta'' P$ est la différence de pression appliquée aux bornes macroscopiques et v_k^p la vitesse due au gradient macroscopique de pression.

De l'équation (18) découle la relation suivante :

$$\frac{v_p^p}{v_f^p} = O\left(\frac{l^2}{l'^2}\right) = O(\alpha^2) \quad (19)$$

D'autre part, d'après le bilan de masse (6), les variations temporelles de la pression induisent dans le milieu des vitesses notées v_k^t . D'après l'analyse des temps de consolidation menée plus haut, les temps caractéristiques d'évolution dans les deux milieux sont du même ordre de grandeur dans le cas I et II

$$\left(A \frac{\delta P}{\partial t}\right)_f = \left(A \frac{\delta P}{\partial t}\right)_p = O\left(\rho \frac{v_p^t}{l'}\right) = O\left(\rho \frac{v_f^t}{l''}\right) \quad (20)$$

et sont dans un rapport ε^2 dans le cas III :

$$\left(A \frac{\delta P}{\partial t}\right)_p = \varepsilon^2 \left(A \frac{\delta P}{\partial t}\right)_f = O\left(\rho \frac{v_p^t}{l'}\right) = \varepsilon^2 O\left(\rho \frac{v_f^t}{l''}\right) \quad (21)$$

donc :

$$\frac{v_p^t}{v_f^t} = O\left(\frac{l'}{l''}\right) = O(\varepsilon) \text{ pour les cas I et II} \quad (22)$$

$$\frac{v_p^t}{v_f^t} = O(\varepsilon^3) \text{ pour le cas III} \quad (23)$$

Enfin, l'étude de l'écoulement d'un fluide compressible dans un milieu à simple porosité (Auriault *et al.*, 1990) a montré que, pour que le problème soit homogénéisable, la condition suivante devait être vérifiée :

$$v = O(v^p) = O(v^t)$$

c'est-à-dire que l'ordre de grandeur de la vitesse initiée par le gradient macroscopique de pression est identique à celui de la vitesse initiée par la variation temporelle de pression. Ce résultat reste valable dans les fractures, puisqu'il n'y a pas d'échelle intermédiaires entre les fractures et le niveau macroscopique. Ainsi :

$$v_f = O(v_f^p) = O(v_f^t) \quad (24)$$

En conséquence, les équations (19) et (22) se réécrivent respectivement :

$$\frac{v_p^p}{v_f^p} = O(\alpha^2) \quad (25)$$

Cas I et II :

$$\frac{v_p^t}{v_f^t} = O(\varepsilon)$$

Cas III :

$$\frac{v_p^t}{v_f^t} = O(\varepsilon^3)$$

On en déduit :

Cas I et II :

$$\frac{v_p^p}{v_p^t} = O(\alpha^2 \varepsilon^{-1})$$

Cas III :

$$\frac{v_p^p}{v_p^t} = O(\alpha^2 \varepsilon^{-3}) \quad (27)$$

La vitesse dans les pores est la plus grande des deux vitesses v_p^p et v_p^t .

Pour les trois cas considérés, nous obtenons les résultats suivants :

$$\text{Dans le cas I : } \begin{cases} \alpha = \sqrt{\varepsilon} \\ v_p^p = O(v_p^t) \\ v_p = O(\varepsilon) \end{cases}$$

$$\text{Dans le cas II : } \begin{cases} \alpha = \varepsilon \\ v_p^p = O(\varepsilon v_p^t) \\ v_p = O(\varepsilon) \end{cases} \quad (28)$$

$$\text{Dans le cas III : } \begin{cases} \alpha = \varepsilon^2 \\ v_p^p = O(\varepsilon v_p^t) \\ v_p = O(\varepsilon^3) \end{cases}$$

3.3 Variables spatiales

Si nous désignons par \vec{X} la variable d'espace, les trois échelles introduisent les trois variables adimension-

nelles suivantes, respectivement bien adaptées à la description de chaque échelle :

$$\begin{cases} \vec{x} = \frac{\vec{X}}{l} & \text{pour le milieu des pores} \\ \vec{x} = \frac{\vec{X}}{l'} & \text{pour le milieu des fractures} \\ \vec{x}'' = \frac{\vec{X}}{l''} & \text{pour le milieu macroscopique.} \end{cases} \quad (29)$$

Toute quantité est, *a priori*, fonction de ces trois variables.

3.4 Adimensionnalisation des équations locales

Pour évaluer les nombres adimensionnels introduits par les équations, nous devons choisir une longueur caractéristique. Plusieurs choix sont possibles, puisque trois longueurs caractéristiques sont à notre disposition. Nous prenons ici l'' .

Le principe fondamental (5) introduit le nombre adimensionnel suivant :

$$Q_k = \frac{|\vec{\nabla} P_k|}{|\mu \Delta \vec{v}_k|} \quad k = p, f$$

Que ce soit dans les pores ou dans les fractures, la force responsable de l'écoulement est le gradient macroscopique de pression. Quant au Laplacien de vitesse, on l'évalue avec la longueur macroscopique l'' . Donc :

$$Q_k = \frac{\frac{\delta'' P}{l''}}{\mu \frac{v_k}{l''^2}}$$

On déduit de l'équation (18) que, pour les trois cas considérés, on aura :

$$Q = Q_f = Q_p = O(\varepsilon^{-2}) \quad (30)$$

Quant au bilan de masse (6), il introduit le nombre de Strouhal :

$$S_k = \frac{|\frac{\partial \rho_k}{\partial t}|}{|\vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_k) \vec{v}_k)|} \quad k = p, f$$

L'étude de l'écoulement d'un fluide très compressible dans une matrice poreuse à simple porosité (Auriault *et al.*, 1990) a montré que le résultat le plus riche correspondait à un nombre de Strouhal macroscopique

de l'ordre de 1. Ce résultat reste valable dans les fractures. Donc :

$$S_f = O(1) \quad (31)$$

Dans les pores, en tenant compte du fait que le terme source intervenant est :

$$\vec{\nabla}_x \cdot ((\rho_0 + \rho_p) \vec{v}_p)$$

on montre que :

$$S_p = O(\varepsilon^{1-h}) \quad (32)$$

ce qui donne pour les trois cas considérés :

$$\begin{cases} \text{Cas I : } S_p = O(1) \\ \text{Cas II : } S_p = O(1) \\ \text{Cas III : } S_p = O(\varepsilon^{-2}) \end{cases}$$

L'équation (32) montre que, dans les pores, le nombre de Strouhal est conditionné par la séparation entre l'échelle des fractures et le niveau macroscopique ainsi que par l'ordre de grandeur relatif des vitesses.

3.5 Homogénéisation

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire la série d'équations régissant le problème, sous forme adimensionnelle normalisée. $\vec{v}_k, P_k, P_0, \rho_k, \rho_0$ sont maintenant des quantités adimensionnelles (par mesure de clarté nous ne changeons pas de notation). Les équations adimensionnelles sont donc les suivantes :

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \vec{v}_k + \varepsilon^2 (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k) - \vec{\nabla} P_k = \vec{0} \quad \text{dans } \Omega_p \text{ et } \Omega_f' \quad (33)$$

$$\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \varepsilon^{h-1} \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_p) \vec{v}_p) = 0 \quad \text{dans } \Omega_p \quad (34)$$

$$\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot ((\rho_0 + \rho_f) \vec{v}_f) = 0 \quad \text{dans } \Omega_f' \quad (35)$$

$$\rho_k = A P_k \quad (36)$$

$$\vec{v}_p / \Gamma = \vec{0} \quad (37)$$

$$\vec{v}_f / \Gamma = \langle \vec{v}_p \rangle_\Omega \quad (38)$$

$$P_f = P_p \text{ sur } \Gamma' \quad (39)$$

Conformément au choix de grandeur pour l'adimensionnalisation, les dérivées spatiales sont prises par rapport à \vec{x}' . Nous devons maintenant écrire les grandeurs inconnues sous forme de développements appropriés. Les résultats de l'étude préalable des ordres de grandeur des vitesses indiquent que le développement (16) de la vitesse dans les pores doit commencer en ε^h . Les autres quantités relatives aux pores, à savoir la pression et la masse volumique du fluide, sont des développements classiques (15) en puissance de η . Quant aux quantités relatives aux fractures, elles s'écrivent sous forme de développements (14) en puissance de ε , le petit paramètre matérialisant la séparation d'échelle entre les fractures et le niveau macroscopique. Ces développements sont donc les suivants :

$$\begin{cases} \phi_p = \phi_p^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \eta \phi_p^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \dots & \phi = P, \rho \\ \vec{v}_p = \varepsilon^h \vec{v}_p^h(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \eta \vec{v}_p^{h+1}(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ \phi_f = \phi_f^0(\vec{x}, \vec{x}'', t, T) + \varepsilon \phi_f^1(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon^2 \phi_f^2(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \dots & \phi = \vec{v}, P, \rho \end{cases}$$

où les ϕ_p^j et les \vec{v}_p^j sont Ω -périodiques et Ω' -périodiques et les ϕ_f^j sont Ω' -périodiques. La méthode consiste maintenant à introduire ces développements dans la série d'équations (33-39), en tenant compte du fait que toute grandeur inconnue est *a priori* fonction de $\vec{x}'', \vec{x}, \vec{x}, t$ et donc $\vec{\nabla}$ s'écrit :

$$\vec{\nabla}_{x''} + \varepsilon^{-1} \vec{\nabla}_{x'} + \gamma^{-1} \vec{\nabla}_x \quad (40)$$

Il s'agit ensuite de résoudre les différents problèmes aux limites, dans les pores et dans les fractures, apparaissant aux différents ordres de ε . Pour le détail des calculs, le lecteur pourra se reporter aux publications suivantes : (Royer, 1994) et (Royer et Auriault, 1994).

3.6 Les résultats

3.6.1 Comportement macroscopique obtenu dans le cas I

Nous avons défini le cas I par la relation suivante entre les séparations d'échelle :

$$\alpha = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad \varepsilon \ll 1$$

Dans cette configuration, l'observateur est situé à l'échelle macroscopique et voit les pores et les fractures comme étant de « taille voisine ». Pour ce cas nous avons obtenu le comportement macroscopique suivant :

$$(n' + (1 - n')n) \frac{\partial P^0}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x''} \cdot ((P_0 + P^0) \tilde{K}_f \vec{\nabla}_{x''} P^0) = 0 \quad (41)$$

où :

\tilde{K}_f est la perméabilité des fractures,

P_0 est la pression initiale,

$P^0 = P_p^0 = P_f^0$ est indépendant de la variable spatiale locale sur Ω_{sp}' et Ω_f' ,

$n = \Omega_p/\Omega$ et $n' = \Omega_f'/\Omega'$ sont les porosités dans les pores et dans les fractures, avec :

$n_1 = n(1 - n')$ et $n_2 = n'$, $n' + 1 - n'n$: porosité d'ensemble.

Retournant aux grandeurs dimensionnelles (41) s'écrit

$$(n' + (1 - n')n) \frac{\partial P}{\partial t} - \vec{\nabla}_X \cdot (P \tilde{K}_f \vec{\nabla}_X P) = 0$$

Le comportement macroscopique est une équation de bilan de masse non linéaire, avec une loi de Darcy classique dans les fractures. L'écoulement dans les pores est instantané. La matrice poreuse joue le rôle d'un réservoir de fluide, ce que traduit le terme source $(n' + (1 - n')n) \partial P^0/\partial t$. La non-linéarité de (41) est classique. Elle est la conséquence directe de la compressibilité du fluide. La perméabilité \tilde{K}_f peut être obtenue soit par résolution d'un problème aux limites local (Auriault *et al.*, 1990) quand la géométrie des fractures est connue soit dans le cas contraire au moyen des estimations classiques plus ou moins précises de la littérature.

3.6.2 Comportement macroscopique obtenu dans le cas II

Le cas II correspond à la configuration où les séparations d'échelles sont du même ordre de grandeur :

$$\alpha = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \ll 1$$

Il s'agit du cas où nous obtenons le plus fort couplage entre les deux écoulements. Ceci était prévisible, notamment par le résultat de l'étude préalable des ordres de grandeur des temps caractéristiques de consolidation : $T_p = O(T_f)$. Le comportement macroscopique est le suivant :

$$n' \frac{\partial P_f^0}{\partial t} + n \frac{\partial \langle P_p^0 \rangle_{eff}}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x''} \cdot ((P_0 + P_f^0) \tilde{K}_f \vec{\nabla}_{x''} P_f^0) = 0 \quad (42)$$

où nous reprenons les notations introduites dans le cas I, et où :

P_p^0 est défini par le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} n \frac{\partial P_p^0}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x'} \cdot ((P^0 + P_p^0) \tilde{K}_p \vec{\nabla}_{x'} P_p^0) = 0 \\ P_p^0 = P_f^0 \text{ sur } \Gamma' , \\ \text{où } P_p^0 \text{ est } \Omega' \text{-périodique.} \end{cases}$$

$$\langle P_p^0 \rangle_{eff} = \frac{1}{|\Omega'|} \int_{\Omega'_{sp}} P_p^0 d\Omega$$

Il apparaît que : $P_p^0 = \mathcal{F}(P_f^0)$, où \mathcal{F} est une fonctionnelle non linéaire, dépendante du temps et présentant des effets de mémoire. La forme dimensionnelle de la description s'écrit

$$n' \frac{\partial P_f}{\partial t} + n \frac{\partial \langle P_p \rangle_{eff}}{\partial t} - \vec{\nabla}_X \cdot (P_f \tilde{K}_f \vec{\nabla}_X P_f) = 0$$

L'écoulement dans les pores influence fortement le comportement macroscopique. Il impose des effets de mémoire et des non-linéarités importantes supplémentaires apparaissent à l'échelle macroscopique. Il s'agit là du cas le plus intéressant car il reflète combien l'influence des effets locaux peut être importante sur le comportement macroscopique.

3.6.3 Comportement macroscopique obtenu dans le cas III

Nous avons défini le cas III par la relation suivante entre les séparations d'échelle :

$$\alpha = O(\varepsilon^2), \quad \varepsilon \ll 1$$

Dans ce cas, l'observateur placé à l'échelle macroscopique voit les pores et les fractures de « tailles très différentes ». La description macroscopique s'écrit :

$$n' \frac{\partial P_f^0}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x'} \cdot ((P_0 + P_f^0) \tilde{K}_f \vec{\nabla}_{x'} P_f^0) = 0 \quad (43)$$

soit sous forme dimensionnelle :

$$n' \frac{\partial P_f}{\partial t} - \vec{\nabla}_X \cdot (P_f \tilde{K}_f \vec{\nabla}_X P_f) = 0$$

On parvient à la description macroscopique du milieu sans faire appel au comportement dans les pores. Ceci signifie, que dans ce cas, les phénomènes ne sont pas couplés au premier ordre d'approximation. Le résultat est celui d'un écoulement dans un milieu à sim-

ple porosité. L'écoulement dans les pores est complètement ignoré au premier ordre d'approximation.

4 FILTRATION D'UN LIQUIDE INCOMPRESSIBLE DANS UN MILIEU POREUX FRACTURÉ DÉFORMABLE

4.1 Introduction

Nous nous intéressons maintenant à la filtration quasi-statique d'un fluide **incompressible** dans un milieu poreux fracturé **déformable**. Cette étude s'inscrit donc dans le cadre de la théorie générale du mouvement d'un fluide dans un milieu poreux déformable, souvent désignée par consolidation. Nous reprenons ici les résultats obtenus dans (Auriault et Boutin, 1992, 1993; Boutin, 1994) et qui furent les premières études utilisant l'adaptation de la méthode des développements asymptotiques aux milieux poreux fracturé présentée ci-dessus.

La description de la consolidation d'un milieu sous l'action d'un fluide nécessite la connaissance de la déformation du solide et celle de l'écoulement du fluide. Comme précédemment, nous supposons que le système est au repos à l'instant initial : la vitesse est nulle et la pression est constante et vaut P_0 . L'écoulement lent d'un liquide dans une matrice fracturée déformable est décrit par les équations qui suivent. L'indice s se réfère au solide et l'indice k soit aux pores ($k = p$), soit aux fractures ($k = f$).

Équilibre quasi-statique de la matrice solide

On traduit la déformabilité de la matrice par la loi classique de l'élasticité linéaire infinitésimale :

$$\vec{\nabla} \vec{\sigma}_s = \vec{0} \quad (44)$$

avec :

$$\vec{\sigma}_s = \tilde{a} \tilde{e}(\vec{u}_s) \quad (45)$$

où $\vec{\sigma}_s$ est le tenseur des contraintes de la matrice solide, \tilde{e} le tenseur des déformations, \tilde{a} le tenseur élastique et \vec{u}_s le champ de déplacement de la matrice solide.

Principe fondamental pour le fluide

Comme précédemment, il s'écrit :

$$\mu \nabla \vec{v}_k - \vec{\nabla} P_k = \vec{0} \quad (46)$$

ce qui peut aussi s'exprimer par :

$$\vec{\nabla} \vec{\sigma}_k = \vec{0} \quad (47)$$

avec :

$$\tilde{\sigma}_k = P_k \tilde{I} + 2\mu \tilde{D} \quad (48)$$

et où :

$$\tilde{D} = \tilde{\varepsilon}(\vec{v}_k) \quad (49)$$

est le tenseur des taux de déformation du fluide.

Bilan de masse

Dans le cas d'un fluide incompressible, il s'écrit :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k = 0 \quad (50)$$

Conditions aux limites

Sur Γ

La continuité de la contrainte normale et des vitesses s'écrivent :

$$\tilde{\sigma}_s \vec{N} = \tilde{\sigma}_p \vec{N} \quad (51)$$

où \vec{N} est un vecteur unitaire normal à Γ ,

$$\vec{v}_s = \vec{v}_p \quad (52)$$

Sur Γ'

La continuité de la contrainte totale normale s'exprime par :

$$(\langle \tilde{\sigma}_s \rangle_\Omega + \langle \tilde{\sigma}_p \rangle_\Omega) \vec{N}' = \tilde{\sigma}_f \vec{N}' \quad (53)$$

où \vec{N}' est un vecteur unitaire normal à Γ' .

Les continuités de la vitesse du fluide, relativement au solide et des pressions sont données par :

$$\vec{v} - \langle \vec{v}_s \rangle_\Omega = \langle \vec{v}_p \rangle_\Omega \quad (54)$$

$$P_p = P_f \quad (55)$$

Il va de soi que l'étude des ordres de grandeur des vitesses menée plus haut s'applique encore ici.

4.2 Adimensionnalisation

Le seul nombre adimensionnel à considérer ici est Q_k , introduit par le principe fondamental pour le fluide (paragr. 3.4). Son ordre de grandeur (30) n'est pas modifié.

L'équation traduisant l'équilibre quasi-statique de la matrice n'introduit aucun nombre adimensionnel. Nous supposons que sur la frontière Γ' , les trois tenseurs de contraintes apparaissant dans (53) sont du même ordre de grandeur.

Les équations adimensionnelles normalisées régissant le problème considéré sont donc les suivantes (les

quantités considérées sont désormais des quantités sans dimension) :

$$\vec{\nabla} \tilde{\sigma}_s = \vec{0} \text{ dans } \Omega_s \quad (56)$$

$$\tilde{\sigma}_s = \tilde{a} \tilde{\varepsilon}(\vec{u}_s) \text{ dans } \Omega_s \quad (57)$$

$$\varepsilon^2 \mu \Delta \vec{v}_k - \vec{\nabla} P_k = \vec{0} \text{ dans } \Omega_p \text{ et dans } \Omega_f' \quad (58)$$

$$\tilde{\sigma}_k = -P_k \tilde{I} + 2\varepsilon^2 \mu \tilde{D} \text{ dans } \Omega_p \text{ et dans } \Omega_f' \quad (59)$$

$$\tilde{\sigma}_s \vec{N} = \tilde{\sigma}_p \vec{N} \text{ sur } \Gamma \quad (60)$$

$$\vec{v}_s = \vec{v}_p \text{ sur } \Gamma \quad (61)$$

$$(\langle \tilde{\sigma}_s \rangle_\Omega + \langle \tilde{\sigma}_p \rangle_\Omega) \vec{N}' = \tilde{\sigma}_f \vec{N}' \text{ sur } \Gamma' \quad (62)$$

$$\vec{v}_f - \langle \vec{v}_s \rangle_\Omega = \langle \vec{v}_p \rangle_\Omega \text{ sur } \Gamma' \quad (63)$$

$$P_p = P_f \text{ sur } \Gamma' \quad (64)$$

4.3 Les développements

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les développements asymptotiques appropriés des quantités inconnues. Compte tenu des résultats qui précèdent, et qu'en consolidation la contrainte dans le squelette est du même ordre que la pression dans les pores et les fractures, ces développements sont les suivants :

$$\begin{cases} \tilde{\sigma}_s = \tilde{\sigma}_s^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \varepsilon^1 \tilde{\sigma}_s^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ \mu_s = \mu_s^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \varepsilon^1 \mu_s^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ \vec{v}_s = \vec{v}_s^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \varepsilon^1 \vec{v}_s^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ \tilde{\sigma}_p = \tilde{\sigma}_p^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \eta^1 \tilde{\sigma}_p^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \eta^2 \tilde{\sigma}_p^{2r}(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ \vec{v}_p = \vec{v}_p^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \eta^1 \vec{v}_p^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ P_p = P_p^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \eta^1 P_p^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t) + \dots \\ \tilde{\sigma}_f = \tilde{\sigma}_f^0(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon \tilde{\sigma}_f^1(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon^2 \tilde{\sigma}_f^2(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \dots \\ \vec{v}_f = \vec{v}_f^0(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon \vec{v}_f^1(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon^2 \vec{v}_f^2(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \dots \\ P_f = P_f^0(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon P_f^1(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \varepsilon^2 P_f^2(\vec{x}, \vec{x}'', t) + \dots \end{cases}$$

Les quantités indicées s et p sont Ω -périodiques et Ω' -périodiques et les quantités indicées f sont Ω' -périodiques. Rappelons d'autre part que compte tenu des résultats de l'étude de l'ordre de grandeur des vitesses, les termes des développements de \vec{v}_s et \vec{v}_p sont tels que :

$$\vec{v}_s^i = \vec{v}_p^i \text{ pour } 0 \leq i < h.$$

Le gradient garde l'expression (40).

4.4 Les résultats

4.4.1 Comportement macroscopique obtenu dans le cas I

Dans le cas I, c'est-à-dire pour des pores et des fractures de tailles «voisines» quand ils sont vus de l'échelle macroscopique, le comportement macroscopique de la filtration d'un fluide incompressible dans une matrice poreuse déformable s'exprime par les deux équations suivantes :

$$\vec{\nabla}_{x'} \cdot (\tilde{C}'' \tilde{e}_{x'} (\vec{u}_s^0) - \tilde{\alpha}'' P^0) = 0 \quad (65)$$

$$\vec{\nabla}_{x''} \cdot (\tilde{K}_f \vec{\nabla}_{x''} P^0) = \tilde{\gamma}'' \tilde{e}_{x''} \left(\frac{\partial \vec{u}_s^0}{\partial t} \right) + \beta'' \frac{\partial P^0}{\partial t} \quad \tilde{\alpha}'' \neq \tilde{\gamma}'' \quad (66)$$

ou sous forme dimensionnelle :

$$\vec{\nabla}_X (\tilde{C}'' \tilde{e}_X (\vec{u}_s) - \tilde{\alpha}'' P) = 0$$

$$\vec{\nabla}_X \cdot (\tilde{K}_f \vec{\nabla}_X P) = \tilde{\gamma}'' \tilde{e}_X \left(\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} \right) + \beta'' \frac{\partial P}{\partial t} \quad \tilde{\alpha}'' \neq \tilde{\gamma}''$$

Notons qu'en simple porosité le comportement macroscopique se compose de deux équations qui ont rigoureusement la même forme, mais les deux tenseurs de consolidation $\tilde{\alpha}''$ et $\tilde{\gamma}''$ sont égaux. La propriété remarquable du comportement macroscopique du cas I réside donc dans la rupture de cette symétrie : $\tilde{\alpha} \neq \tilde{\gamma}$ (cf. les équations (1-2) pour comparaison). Il s'agit là d'une conséquence directe de la double porosité. Par comparaison avec le milieu fracturé à simple porosité, les pores constituent un réservoir de fluide supplémentaire dont le volume est modifié par la compression du squelette poreux. La prise en compte de ce phénomène modifie la valeur du coefficient de compressibilité $\tilde{\gamma}''$ dans le bilan de masse (66).

4.4.2 Comportement macroscopique obtenu dans le cas II

Dans le cas II, c'est-à-dire pour des séparations d'échelle équivalentes, le comportement macroscopique à pulsation constante est le suivant :

$$\vec{\nabla}_{x''} \cdot (\tilde{C}'' \tilde{e}_{x''} (\vec{u}_s^0) - \tilde{\alpha}'' P_f^0) = 0 \quad (67)$$

$$\vec{\nabla}_{x''} \cdot (\tilde{K}_f \vec{\nabla}_{x''} P_f^0) = \tilde{\gamma}'' \tilde{e}_{x''} \left(\frac{\partial \vec{u}_s^0}{\partial t} \right) + \beta'' \frac{\partial P_f^0}{\partial t} \quad \tilde{\alpha}'' \neq \tilde{\gamma}'' \quad (68)$$

ou sous forme dimensionnelle :

$$\vec{\nabla}_X (\tilde{C}'' \tilde{e}_X (\vec{u}_s) - \tilde{\alpha}'' P_f) = 0$$

$$\vec{\nabla}_X \cdot (\tilde{K}_f \vec{\nabla}_X P_f) = \tilde{\gamma}'' \tilde{e}_X \left(\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} \right) + \beta'' \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad \tilde{\alpha}'' \neq \tilde{\gamma}''$$

Comme dans le cas I, la symétrie des tenseurs de couplage est brisée. Par contre, par opposition avec le cas I, la pression dans les pores n'est pas la même que dans les fractures. D'autre part, dans l'espace de Fourier les tenseurs \tilde{C}'' , $\tilde{\gamma}''$ et $\tilde{\alpha}''$ et le scalaire β'' sont complexes et dépendent de la pulsation. En régime transitoire, ces grandeurs présentent donc des effets de mémoire, c'est-à-dire que les expressions correspondantes comprennent des produits de convolution. La connaissance du comportement du milieu à l'instant t dépend du comportement durant l'intervalle de temps qui précède.

4.4.3 Comportement macroscopique obtenu dans le cas III

Dans le cas III, c'est-à-dire pour des pores et des fractures de tailles très différentes, le comportement macroscopique est le suivant :

$$\vec{\nabla}_{x''} \cdot (\tilde{C}'' \tilde{e}_{x''} (\vec{u}_s^0) - \tilde{\alpha}'' P_f^0) = 0 \quad (69)$$

$$\vec{\nabla}_{x''} \cdot (\tilde{K}_f \vec{\nabla}_{x''} P_f^0) = \tilde{\gamma}'' \tilde{e}_{x''} \left(\frac{\partial \vec{u}_s^0}{\partial t} \right) + \beta'' \frac{\partial P_f^0}{\partial t} \quad \tilde{\alpha}'' \neq \tilde{\gamma}'' \quad (70)$$

ou sous forme dimensionnelle :

$$\vec{\nabla}_X (\tilde{C}'' \tilde{e}_X (\vec{u}_s) - \tilde{\alpha}'' P_f) = 0$$

$$\vec{\nabla}_X \cdot (\tilde{K}_f \vec{\nabla}_X P_f) = \tilde{\gamma}'' \tilde{e}_X \left(\frac{\partial \vec{u}_s}{\partial t} \right) + \beta'' \frac{\partial P_f}{\partial t} \quad \tilde{\alpha}'' \neq \tilde{\gamma}''$$

Ce comportement est celui d'un milieu à simple porosité, avec symétrie de couplage. L'écoulement dans les pores est complètement ignoré au premier ordre d'approximation. La description ne nécessite que le champ de pression des fractures.

5 CONCLUSION

Durant les trois décennies qui ont suivi la parution du premier modèle mathématique décrivant les milieux à double porosité (Barenblatt et Zheltov, 1960). La modélisation des phénomènes se développant dans de tels milieux a suscité un grand nombre d'études théoriques, numériques et expérimentales. La complexité des processus physiques et l'intérêt quant aux applications justifient cette motivation. La méthode phénoménolo-

gique classique consiste à traiter le problème directement à l'échelle macroscopique. Il paraît donc délicat, par ce type d'approche, de pouvoir rendre compte parfaitement de l'influence des hétérogénéités locales dans le modèle macroscopique. D'autre part, les phénomènes considérés comme négligables, à savoir l'écoulement dans les pores ou la capacité de stockage dans les fractures, sont souvent ignorés.

La méthode d'homogénéisation (des développements asymptotiques) permet d'obtenir le comportement macroscopique équivalent du problème à partir de la description microscopique complète. Aucun pré-requis macroscopique n'étant nécessaire, elle garantit la traduction exacte de l'influence des hétérogénéités locales dans le comportement macroscopique. D'autre part, le formalisme utilisé ici (Auriault, 1991) établit des conditions précises d'homogénéisabilité, en exploitant les informations données par la physique du problème.

Suite aux résultats présentés ici, il paraît important de souligner que la notion de modèle unique n'a pas de sens en ce qui concerne l'étude de l'écoulement d'un fluide dans un milieu poreux à double porosité. La relation entre les deux séparations d'échelle conditionne le comportement macroscopique. Pour les deux contextes physiques choisis, les trois configurations de séparation d'échelle envisagées conduisent à trois descriptions complètement différentes et confirment bien les prévisions établies lors de l'examen de l'ordre de grandeur relatif des temps caractéristiques de consolidation. Dans les deux études, le couplage maximum est obtenu pour le cas II, c'est-à-dire pour des séparations d'échelle identiques. La première étude, du fait de la prise en compte de la très forte compressibilité du fluide, fait état de résultats nouveaux. Quant à la seconde étude, elle fait apparaître une caractéristique remarquable concernant la consolidation en milieu à double porosité : la dissymétrie des tenseurs de couplage.

Le cas de la filtration d'un fluide très compressible dans un milieu poreux fracturé déformable a été abordé de façon identique dans une étude récente (Royer, 1994). Les résultats mettent en évidence de forts couplages entre la déformabilité de la matrice et la compressibilité du fluide. Ils prouvent ainsi qu'il est nécessaire de considérer ces deux phénomènes séparément, contrairement aux études phénoménologiques, lesquelles englobent les deux phénomènes sous un seul et unique terme, appelé « compressibilité du système ». Dans une étude antérieure, (Auriault et Royer, 1993) nous avons comparé l'approche phénoménologique de type Warren et Root avec la méthode d'homogénéisation dans le contexte d'un problème de conductivité

thermique à double conductivité. Les limites des méthodes classiques sont alors clairement mises en évidence. En particulier, nous montrons que l'hypothèse de quasi-permanence, qui consiste à supposer que le terme d'échange de chaleur (correspondant au terme d'interporosité en double porosité) n'est pas explicitement dépendant du temps, conduit à une description grossière en régime transitoire. Nous proposons une correction simple de ce terme d'échange. Ces résultats sont adaptables à tout autre domaine diffusif à double diffusivité, et donc en particulier à la double porosité (Royer, 1994).

Les présents résultats ouvrent de nombreuses perspectives. L'exploitation détaillée des conséquences des ordres de grandeur des différentes séparations d'échelle sur le développement de la méthode (comme par exemple l'étude préalable de l'ordre de grandeur des vitesses) devrait faciliter la mise en œuvre de tout autre problème de l'évolution au sein d'un milieu poreux fracturé. En vue de proposer un modèle de réservoir à pétrole, nous envisageons d'utiliser la présente méthode afin de déterminer le comportement macroscopique d'un écoulement diphasique en milieu poreux fracturé.

Annexe

LA MÉTHODE D'HOMOGÉNÉISATION DES STRUCTURES PÉRIODIQUES

A.1 Introduction

La description exacte des phénomènes se développant au sein des milieux hétérogènes n'est envisageable que si le nombre des hétérogénéités reste relativement faible. Lorsque la description exacte s'avère impossible, on recherche un matériau continu et macroscopiquement équivalent. La description obtenue est intrinsèque au matériau et à la sollicitation considérés et indépendante des conditions aux limites macroscopiques. Si la détermination de cette description s'opère par un raisonnement directement macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle du continu recherché, on parle d'approche phénoménologique et le raisonnement théorique est généralement associé à des résultats expérimentaux. Si par contre, le comportement obtenu

résulte du passage de la description microscopique à une description macroscopique, on parle alors de technique de passe micro-macro ou encore de technique d'homogénéisation et le milieu continu équivalent s'appelle milieu homogénéisé. Pour que l'homogénéisation soit applicable, c'est-à-dire pour que le problème considéré soit homogénéisable, la condition fondamentale de séparation des échelles doit être vérifiée. Pour la présentation de la méthode, nous nous limiterons au cas où le milieu présente deux échelles séparées. L'échelle des hétérogénéités est appelée échelle microscopique, par opposition avec l'échelle macroscopique à laquelle doit être défini le milieu continu équivalent. Si l est une dimension caractéristique des hétérogénéités et l' une dimension caractéristique du volume du matériau ou du phénomène étudié, la condition de séparation des échelles se traduit par :

$$\varepsilon = \frac{l}{l'} \ll 1$$

Le petit paramètre ε permet de juger si la séparation des échelles est correctement vérifiée. On estime que l'homogénéisation est performante quand : $\varepsilon < 0,1$. Même si pour certaines méthodes cette condition n'est que sous-jacente, il s'agit là de la condition fondamentale commune à toutes les techniques d'homogénéisation. L'idée induite par ce type de méthodes est que le comportement macroscopique d'un milieu hétérogène est complètement conditionné par ce qui s'y produit à l'échelle locale et que si les échelles sont bien séparées, il est possible de déduire le comportement macroscopique à partir du comportement microscopique. Ceci sous-entend aussi que les conditions aux limites macroscopiques ont alors peu d'influence sur les structures de dimension l .

La notion de longueur caractéristique reste pour le moment imprécise. La façon la plus naturelle de définir ces grandeurs caractéristiques est de se baser sur des considérations géométriques. Cependant, suivant le problème envisagé, elles peuvent aussi être introduites à partir de la sollicitation appliquée au milieu (par exemple la longueur d'onde). Pour que le problème soit homogénéisable, il faut donc veiller à ce que la séparation des échelles soit effective tant du point de vue géométrique que relativement à la sollicitation. Les matériaux à structure périodique sont étudiés au moyen de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques, appelée aussi méthode des développements asymptotiques. Elle a été développée par A. Bensoussan, J.L. Lions et G. Papanicolaou (Bensoussan, Lions

et Papanicolaou, 1978) et E. Sanchez-Palencia (Sanchez-Palencia, 1980). C'est à cette méthode que nous nous intéressons ici. Ci-dessous, nous en présentons les bases dans le cas classique où il existe deux échelles séparées (simple porosité) et avec le formalisme introduit par J.L. Auriault (Auriault, 1991) qui permet, en particulier, de révéler les conditions précises d'homogénéisabilité d'un problème.

A.2 Le principe de la méthode

La séparation des échelles permet de définir deux variables d'espace séparées. En effet, si \vec{X} est la variable d'espace du milieu, les deux longueurs caractéristiques introduisent naturellement deux variables d'espace sans dimension : $\vec{x} = \vec{X}/l$ et $\vec{x}' = \vec{X}/l'$ décrivant respectivement l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Alors, si les échelles sont séparées, toute grandeur physique ϕ relative au problème est, *a priori*, fonction de ces deux variables d'espace :

$$\phi = \phi(\vec{x}, \vec{x}', \dots)$$

A.3 Méthodologie

Nous présentons succinctement ici le formalisme de la méthode d'homogénéisation des structures périodiques proposé par J.L. Auriault (Auriault, 1991). Il s'appuie sur la normalisation des équations permettant ainsi une approche plus physique du problème. Il offre, en outre, la possibilité de discerner précisément les cas homogénéisables de ceux qui ne le sont pas et de définir ainsi les conditions précises d'homogénéisabilité.

Normalisation

La normalisation des équations ainsi que l'évaluation des nombres adimensionnels nécessite le choix d'une longueur caractéristique. On parlera de point de vue microscopique si cette longueur est l et de point de vue macroscopique si l'on s'agit de l' . Nous nous limitons ici au cas où les nombres adimensionnels introduits par les équations peuvent être estimés en puissance de ε . Une quantité Q est de l'ordre de ε^p si :

$$\varepsilon^{p+1} \ll Q \ll \varepsilon^{p-1}$$

Après cette étape importante, qui demande d'exploiter l'aspect physique du problème, les équations apparaissent sous la forme suivante :

$$\sum_i \varepsilon^i A_i = 0$$

où les opérations A_i sont de l'ordre de 1, relativement à ε .

Obtention de la description macroscopique

On recherche alors les champs des grandeurs physiques inconnues sous la forme de développements asymptotiques à échelles multiples (Bensoussan, Lions et Papanicolaou, 1980) :

$$\phi(\vec{x}, \vec{x}') = \phi^0(\vec{x}, \vec{x}') + \varepsilon \phi^1(\vec{x}, \vec{x}') + \varepsilon^2 \phi^2(\vec{x}, \vec{x}') + \dots$$

où les ϕ^i sont \vec{x} -périodiques et de l'ordre de 1.

On introduit les développements asymptotiques dans les équations normalisées. Il s'agit alors de résoudre les problèmes aux limites définis sur la cellule qui se dégagent aux différents ordres de ε . À un ordre donné, l'équation de conservation locale conduit à une expression de la forme suivante :

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{\phi}^{i+1} + \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{\phi}^i = 0 \quad (71)$$

C'est cette équation qui va conduire au comportement macroscopique. En effet, si on raisonne physiquement, l'équation (71) représente le bilan, à l'échelle microscopique, de la quantité ϕ^{i+1} en présence de la source $\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{\phi}^i$. Or comme $\vec{\phi}^i$ a été déterminé lors de la résolution des problèmes précédents, le problème à résoudre est en fait de la forme suivante :

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{\phi}^{i+1} + \text{source} = 0$$

Par intégration sur la période et en tenant compte de la périodicité de $\vec{\phi}^{i+1}$, il est donc nécessaire que :

$$\langle \text{source} \rangle_{\Omega} = 0$$

c'est-à-dire :

$$\langle \vec{\nabla}_{\vec{x}'} \cdot \vec{\phi}^i \rangle_{\Omega} = 0 \quad (72)$$

On montre qu'il s'agit d'une condition suffisante pour l'existence de $\vec{\phi}^i$. L'équation (72) est appelée «condition de compatibilité». Pour $i = 0$, elle donne le comportement macroscopique si $\phi^0 = O(1)$ et la situation est alors dite homogénéisable. Dans le cas contraire, la situation est dite non homogénéisable, comme par exemple quand :

$$\phi^0 = 0$$

En effet, dans ce cas la quantité ϕ n'est alors plus de l'ordre de 1 relativement à ε et l'estimation des nombres adimensionnels correspondants se trouve modifiée. La méthode permet donc de vérifier si la situation est bien homogénéisable, c'est-à-dire si les échelles sont bien séparées.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Arbogast T., Jr. Douglas et U. Hornung (1990), « Derivation of the Double Porosity Model of Single Phase Flow via Homogenization Theory ». *SIAM J. Math. Anal.*, **21**, 823-836.
- Auriault J.L. (1991), « Is an equivalent Macroscopic Description Possible? », *Int. J. Engng. Sci.*, **29** (7), 45-64.
- Auriault J.L. et C. Boutin (1992), « Deformable Porous Media with Double porosity. Quasi-Statics I : Coupling effects ». *Transport in Porous Media*, **7**, 63-82.
- Auriault J.L. et C. Boutin (1993), « Deformable Porous Media with Double porosity. Quasi-Statics II : Memory effects ». *Transport in Porous Media*, **10**, 153-169.
- Auriault J.L. et P. Royer (1993), « Double Conductivity Media : A Comparison between Phenomenological and Homogenization Approaches ». *Int. J. Heat Mass Transfer*, **36** (10), 2613-2621.
- Auriault J.L. et P. Royer (1993), « Écoulement d'un gaz dans un milieu poreux fracturé ». *Compte Rendu à l'Académie des Sciences, Paris, Série II*, **317**, 431-436.
- Auriault J.L., T. Strzelzcki, J. Bauer et S. He (1990), « Porous Deformable Media Saturated by a Very Compressible Fluid ». *Eur. J. Mech. A. Solid*, **9** (4), 373-392.
- Barenblatt G.I. et I.P. Zheltov (1960), « On Fundamental Equations of Flow of Homogenous Liquids in Naturally Fractured Rocks ». *Dokl. Akad. Nauk., USSR*, **132** (3), 545-548.
- Barenblatt G.I., I.P. Zheltov et I.N. Kochina (1960), « Basic Concepts in the Theory of Seepage of Homogeneous Liquids in Fissured Rocks ». *PPM*, **24** (5), 852-864.
- Barenblatt G.I., V.M. Entov et V.M. Ryzhik (1990), *Theory of Fluid Flows through natural Rocks*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London.
- Bensoussan A., J.L. Lions et G. Papanicolaou (1978), *Asymptotic Analysis for periodic Media*. North-Holland Company, Amsterdam.
- Biot M.A. (1941), « General Theory of Three-Dimensional Consolidation ». *J. Appl. Phys.*, **12**, 155-164.
- Boutin C. (1994), *Comportement macroscopique de matériaux hétérogènes*. Thèse d'Habilitation de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Levy T. et E. Sanchez-Palencia (1975), « On Boundary Conditions For Fluid Flow in Porous Media ». *Int. J. Engng. Sci.*, **13**, 923-940.
- Royer P. (1994), *Contribution de l'homogénéisation à l'étude de la filtration d'un gaz en milieu déformable à double porosité. Application à l'étude du système gaz-charbon*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Royer P. et J.L. Auriault (1992), « Very Compressible Fluid Flow through a Porous Rigid Medium with Double Porosity ». *Studia Geotechnica et Mechanica*, **13**, (1-2), 65-77.
- Royer P. et J.L. Auriault (1994), « Transient Quasi-Static Flow through a Rigid Porous medium with Double Porosity ». *Transport in Porous Media*, **17**, 33-57.
- Sanchez-Palencia E. (1980), « Non-Homogeneous Media and Vibration Theory ». *Lecture Notes in Physics*, **127**, Springer-Verlag, Berlin.
- Warren J.R. et P.J. Root (1963), « The Behavior of Naturally Fractured Reservoirs ». *Pet. Eng. J.*, 245-255, Sept. 1963.

Manuscrit définitif reçu en janvier 1995