



**HAL**  
open science

# Écoulement d'un gaz dans un milieu poreux à double porosité

Jean-Louis Auriault, Pascale Royer

► **To cite this version:**

Jean-Louis Auriault, Pascale Royer. Écoulement d'un gaz dans un milieu poreux à double porosité. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1993, 317, pp.431-436. hal-01713578

**HAL Id: hal-01713578**

**<https://hal.science/hal-01713578>**

Submitted on 20 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Écoulement d'un gaz dans un milieu poreux à double porosité

Jean-Louis AURIAULT et Pascale ROYER

*Résumé* – On étudie par homogénéisation l'écoulement d'un fluide très compressible dans un milieu constitué de trois échelles séparées (des pores, des fractures, de l'échantillon macroscopique). La description macroscopique dépend fortement des séparations entre les différentes échelles et trois cas caractéristiques sont envisagés. Les pores y jouent respectivement, le rôle d'un réservoir compressible instantané, ou introduisent un effet de mémoire, ou sont ignorés.

## Gas flow through a double-porosity porous medium

*Abstract* – The flow of a very compressible fluid through a three-scale medium (pore, fracture, macroscopic sample) is investigated using a homogenization method. The macroscopic description is strongly dependent on the separations between the different scales and three characteristic cases are under consideration. The pores play the role of a compressible fluid reservoir, or introduce a memory effect, or are ignored, respectively.

*Abridged English Version* – The macroscopic behaviour of a compressible fluid flow filtering through a double porosity porous matrix is investigated by using the method of asymptotic developments (Bensoussan, 1978 ; Auriault, 1991). The medium is assumed to be doubly periodic. At the pore scale,  $\Omega$  is the periodicity and  $l$  is the characteristic length.  $\Omega_s$  and  $\Omega_p$  are the domains occupied by the solid and the pores, respectively, and their common boundary is  $\Gamma$  (fig. 1). At the fracture scale there exists a second characteristic length :  $l' \gg l$ , and the medium is periodic with the period  $\Omega'$ .  $\Omega'_{sp}$  and  $\Omega'_f$  are the domains occupied by the porous matrix and the fractures, respectively, and their common boundary is  $\Gamma'$  (fig. 2). The pores and the fractures are assumed to be connected. Finally, the characteristic length of the macroscopic sample is :  $l'' \gg l' \gg l$ . The macroscopic behaviour is strongly dependent on the three separations of scales :

$$\alpha = \frac{l}{l''}, \quad \beta = \frac{l'}{l''}, \quad \gamma = \frac{l}{l'}$$

The following three characteristic cases are investigated :

Case I :  $\beta = O(\alpha^2) = O(\varepsilon^2)$  ;

Case II :  $\alpha = O(\beta) = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$  ;

Case III :  $\alpha = O(\beta^2) = O(\varepsilon^2)$ .

The fluid flow is described by the set of equations (1)-(6) ( $k = p$  in the pores ;  $k = f$  in the fractures). A preliminary study of the order of magnitude of the velocity fields gives the following result :

$$\frac{v_p}{v_f} = O(\varepsilon^q)$$

$\varepsilon^q = \alpha$  if  $\alpha = O_\gamma(1)$  and  $\alpha = \beta^n$  ;

$\varepsilon^q = \varepsilon\alpha$  otherwise

( $q, n$  positive integers).

Three space variables are defined from the three characteristic lengths :

$$\vec{x} = O(\gamma^{-1}) \vec{x}'' \text{ for the micro-porous medium ;}$$

$$\vec{x}' = O(\beta^{-1}) \vec{x}'' \text{ for the fractured medium ;}$$

$$\vec{x}'' \text{ for the macroscopic medium,}$$

and the two time variables due to the separation of scales are :

$$t \text{ for the fractured medium ;}$$

$$T = O(\varepsilon^q) t \text{ for the micro-porous medium.}$$

The two first equations (1)-(2) introduce the two following dimensionless numbers :

$$Q_k = \frac{|\vec{\nabla} P_k|}{|\mu \Delta \vec{v}_k|} = Q_k = O(\beta^{-2}), \quad S_k = \frac{|\partial \rho_k / \partial t|}{|\vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k)|} = S_k = O(1)$$

Finally, the homogenization process is applied : each dimensionless unknown is written in the form of a suitable asymptotic expansion (10) and is introduced in the normalized equations. The results obtained (11)-(13) show the importance of the relative magnitude of the scale separations. In case I, the pore domain plays at the first order the role of a compressible fluid reservoir, and the permeability  $K_f$  is the fracture one. In case II, the pores introduce a memory effect on the macroscopic flow. Lastly, in case III, at the first order of approximation, the pores are ignored in the macroscopic description.

1. INTRODUCTION. – Nous analysons le comportement macroscopique d'un fluide compressible filtrant au travers d'une matrice poreuse à double porosité au moyen de la méthode des développements asymptotiques (Bensoussan, 1978), en utilisant le formalisme introduit par Auriault (1991). Nous considérons que le milieu est doublement périodique. A l'échelle des pores la périodicité est  $\Omega$  et la longueur caractéristique est  $l$ .  $\Omega_s$  est le volume occupé par le solide,  $\Omega_p$  est le volume occupé par les pores.  $\Gamma$  est la frontière entre ces deux derniers (fig. 1). A l'échelle des fractures, le milieu présente une deuxième porosité de longueur caractéristique  $l' \gg l$ , et est périodique de période  $\Omega'$ .  $\Omega'_{sp}$  est le volume occupé par la matrice micro-poreuse et  $\Omega'_f$  celui des fractures. La frontière entre les deux est notée  $\Gamma'$  (fig. 2). On suppose que les pores et les fractures sont connectés. Enfin, on note  $l'' \gg l' \gg l$  la longueur caractéristique du milieu macroscopique. L'écoulement d'un fluide compressible dans une matrice poreuse déformable à simple porosité a déjà été étudié (Auriault, 1990). Nous faisons ici plein usage des résultats obtenus alors : la situation la plus riche pour les fractures est obtenue pour un nombre de Strouhal macroscopique de l'ordre de 1 et des termes inertiels négligeables. D'autre part, le comportement d'un milieu à double porosité a déjà été étudié par la méthode des développements asymptotiques (Auriault, 1992, 1993 et à paraître), dans le cas d'un fluide incompressible et d'une matrice déformable. Nous reprenons ici la même procédure en l'adaptant au contexte considéré. Comme cela a alors été noté, le comportement macroscopique dépend fortement des trois séparations d'échelles présentes dans le problème :

$$\alpha = \frac{l}{l'}, \quad \beta = \frac{l'}{l''}, \quad \gamma = \frac{l}{l''}$$

nous considérons les trois cas caractéristiques suivants (Auriault *et al.*, 1992, 1993 et à paraître) :

Cas I :  $\beta = O(\alpha^2) = O(\varepsilon^2)$  ;

Cas II :  $\alpha = O(\beta) = O(\varepsilon)$ ,  $\varepsilon \ll 1$  ;

Cas III :  $\alpha = O(\beta^2) = O(\varepsilon^2)$ .

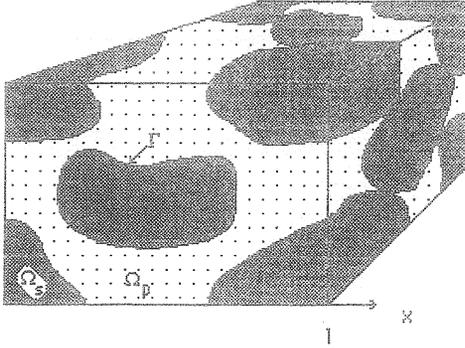


Fig. 1

Fig. 1. – Représentation de la cellule périodique à l'échelle des pores.

Fig. 1. – Representation of the periodic cell at the pore scale.

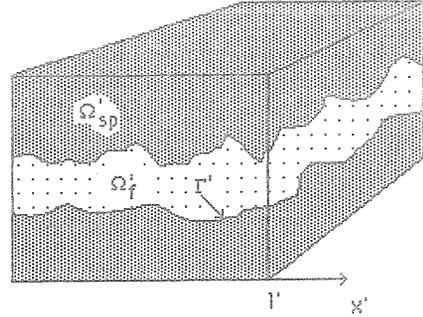


Fig. 2

Fig. 2. – Représentation de la cellule périodique à l'échelle des fractures.

Fig. 2. – Representation of the periodic cell at the fracture scale.

## 2. FORMULATION DU PROBLÈME :

*Les équations.* – Les équations décrivant l'écoulement sont les suivantes, avec  $k = p$  dans les pores ;  $k = f$  dans les fractures :

$$(1) \quad \mu \Delta \vec{v}_k + (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k) - \vec{\nabla} P_k = \rho_k \left[ \frac{\partial \vec{v}_k}{\partial t} + (\vec{v}_k \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}_k \right] = \vec{0}$$

$$(2) \quad \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k) = 0$$

$$(3) \quad \rho_k = A P_k$$

$$(4) \quad \vec{v}_p / \Gamma = \vec{0}$$

$$(5) \quad \vec{v}_f / \Gamma' = \langle \vec{v}_p \rangle \Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega_p} \vec{v}_p d\Omega$$

$$(6) \quad P_f = P_p \quad \text{sur } \Gamma'$$

*Étude préalable des ordres de grandeur des vitesses.* – Le milieu est soumis à deux excitations : un gradient de pression macroscopique et une variation temporelle de la pression macroscopique qui imposent les ordres de grandeur suivants sur les vitesses d'après (1) et (2) :

$$(7) \quad \frac{v_p^p}{v_f^p} = O(\alpha^2), \quad \frac{v_p^t}{v_f^t} = O(\alpha)$$

où  $v_k^p$  est la vitesse générée par le gradient macroscopique de pression et où  $v_k^t$  est la vitesse générée par la variation temporelle de la pression. De plus, la condition aux limites (5) impose :

$$(8) \quad \frac{v_p^p}{v_f^p} = O(\beta^n), \quad n \text{ entier positif}$$

D'autre part, nous nous plaçons dans le cas décrit en Auriault (1990) où le nombre de Strouhal macroscopique est de l'ordre de 1, ce qui entraîne :

$$v_f = O(v_f^p) = O(v_f^t)$$

Ainsi, d'après (7) :

$$v_p^t \gg v_p^p; \quad \frac{v_p^p}{v_p^t} = O(\alpha)$$

Enfin, les deux excitations provoquent un écoulement dans les pores caractérisé par la séparation d'échelles  $\gamma$ , ce qui impose :

$$\frac{v_p^p}{v_p^t} = O_\gamma(1)$$

En conséquence,  $v_p$  sera  $v_p^t$ , si :

$$\alpha = O_\gamma(1)$$

et si (8), est vérifiée. En conclusion, on obtient :

$$(9) \quad \frac{v_p}{v_f} = O(\varepsilon^q)$$

$$\varepsilon^q = \alpha \text{ si } \alpha = O_\gamma(1) \text{ et } \alpha = \beta^n (v_p^p = v_p^t);$$

$$\varepsilon^q = \varepsilon \alpha \text{ sinon}$$

( $q, n$  entiers positifs).

*Variables spatiales.* – A partir des trois longueurs caractéristiques, on définit les trois variables d'espace suivantes :

$$\vec{x} = O(\gamma^{-1}) \vec{x}'' \text{ variable décrivant le domaine des pores ;}$$

$$\vec{x}' = O(\beta^{-1}) \vec{x}'' \text{ variable décrivant le domaine des fractures ;}$$

$$\vec{x}'' \text{ variable macroscopique.}$$

*Échelles et variables temporelles.* – La séparation des échelles spatiales induit une séparation des échelles temporelles que l'on met en évidence de la façon suivante :

$$\vec{v}_p = \frac{\vec{u}_p}{T_p}, \quad \vec{v}_f = \frac{\vec{u}_f}{T_f}, \quad \frac{u_p}{u_f} = O(1)$$

où  $u_p$  et  $u_f$  sont deux champs de déplacement de référence (fictifs) du fluide, et  $T_p$  et  $T_f$  les temps caractéristiques. On en déduit les variables temporelles suivantes :

$t$  pour le domaine des fractures ;

$T = O(\varepsilon^q) t$  pour le domaine des pores.

*Nombres adimensionnels.* – Les choix faits ci-dessus donnent aux deux variables  $x''$  et  $t$  un rôle directeur. Les nombres adimensionnels seront en conséquence évalués avec la longueur caractéristique  $l''$  et le temps caractéristique  $T_f$ . Les équations (1) et (2) introduisent :

$$Q_k = \frac{|\vec{\nabla} P_k|}{|\mu \Delta \vec{v}_k|}, \quad S_k = \frac{|\partial \rho_k / \partial t|}{|\vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k)|}$$

Compte tenu de ce qui précède :

$$Q = Q_f = Q_p = O(\beta^{-2});$$

$$S = S_f = S_p = O(1).$$

Les équations décrivant l'écoulement s'écrivent sous forme adimensionnelle normalisée :

$$\beta^2 \mu \Delta \vec{v}_k + \beta^2 (\lambda + \mu) \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}_k) - \vec{\nabla} P_k = \vec{0}, \quad \frac{\partial \rho_k}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_k \vec{v}_k) = 0$$

$$\rho_k = AP_k, \quad \vec{v}_p / \Gamma = \vec{0}, \quad \vec{v}_f / \Gamma' = \langle \vec{v}_f \rangle_\Omega, \quad P_f = P_p \quad \text{sur } \Gamma'$$

*Homogénéisation.* – Il s'agit d'introduire chaque grandeur inconnue adimensionnelle sous forme d'un développement asymptotique approprié dans les équations normalisées, puis d'analyser les problèmes qui s'en dégagent aux différents ordres de  $\varepsilon$  :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \phi_p = \phi_p^0(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \varepsilon \phi_p^1(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \dots \quad \phi = P, \rho \\ \vec{v}_p = \varepsilon^q \vec{v}_p^q(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \varepsilon^{q+1} \vec{v}_p^{q+1}(\vec{x}, \vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \dots \\ \phi_f = \phi_f^0(\vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \varepsilon^r \phi_f^r(\vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \varepsilon^{2r} \phi_f^{2r}(\vec{x}', \vec{x}'', t, T) + \dots \\ \beta = \varepsilon^r \quad \phi = \vec{v}, P, \rho \end{array} \right.$$

3. RÉSULTATS ET CONCLUSIONS. – Les descriptions macroscopiques sont les suivantes :

*cas I :*

$$(11) \quad [n' + (1 - n') n] \frac{\partial P^0}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x''} \cdot (P^0 \tilde{K}_f(\vec{x}'') \vec{\nabla}_{x''} P^0) = 0$$

avec :

$$\tilde{K}_f = \langle \tilde{k}_f \rangle_{\Omega'}; \quad \langle \cdot \rangle_{\Omega'} = \frac{1}{|\Omega'|} \int_{\Omega'} \cdot d\Omega$$

$$\vec{v}_f^0 = -\tilde{k}_f(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x''} P^0; \quad P^0 = P_p^0 = P_f^0$$

$$n = \frac{|\Omega_p|}{|\Omega'_{sp}|}; \quad n' = \frac{|\Omega'_f|}{|\Omega|}$$

*cas II :*

$$(12) \quad n' \frac{\partial \rho_f^0}{\partial t} + n \frac{\langle \rho_p^0 \rangle_{\text{eff}}}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x''} \cdot [\rho_f^0 \tilde{K}_f(\vec{x}'') \vec{\nabla}_{x''} P_f^0] = 0$$

avec :

$$\begin{aligned} \langle \rho_p^0 \rangle_{\text{eff}} &= \frac{1}{|\Omega'|} \int_{\Omega'_{sp}} \rho_p^0 d\Omega \\ n \frac{\partial \rho_p^0}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x'} \cdot [\rho_p^0 \tilde{K}_p(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} P_p^0] &= 0 \\ \tilde{K}_p &= \langle \tilde{k}_p \rangle_{\Omega}; \quad \langle \cdot \rangle_{\Omega} = \frac{1}{|\Omega'_{sp}|} \int_{\Omega'} \cdot d\Omega \\ \vec{v}_p^1 &= -\tilde{k}_p(\vec{x}') \vec{\nabla}_{x'} P_p^0 \\ \vec{v}_f^0 &= -\tilde{k}_f(\vec{x}'') \vec{\nabla}_{x''} P_f^0; \quad \rho_k^0 = AP_k^0 \\ P_f^0 &= P_p^0 \quad \text{sur } \Gamma' \end{aligned}$$

$P_p^0 = \mathcal{F}(P_f^0)$  où  $\mathcal{F}$  est une fonctionnelle non linéaire à effet de mémoire dépendant du temps.

cas III :

$$(13) \quad n' \frac{\partial P_f^0}{\partial t} - \vec{\nabla}_{x''} \cdot [P_f^0 \tilde{K}_f(\vec{x}'') \vec{\nabla}_{x''} P_f^0] = 0$$

Les résultats mettent en évidence l'importance de la valeur relative des séparations d'échelles. Dans le cas I, au premier ordre d'approximation, le domaine des pores joue uniquement le rôle d'un réservoir de fluide compressible, la perméabilité  $K_f$  étant celle des fractures. Dans le cas II, les pores imposent un effet de mémoire sur l'écoulement macroscopique. Enfin, dans le cas III, toujours au premier ordre d'approximation, les pores sont ignorés dans la description macroscopique. Les effets transitoires et de mémoire de ces descriptions proviennent de la compressibilité du fluide (existence d'un terme transitoire dans le bilan (2)). Ils disparaissent lorsque le fluide est incompressible comme en Levy (1990 a ou b).

Note remise le 28 mai 1993, acceptée le 22 juin 1993.

#### RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- J. L. AURIAULT, Heterogeneous medium. Is an equivalent macroscopic description possible ? *Int. Engng. Sci.*, 29, n° 7, 1991, p. 785-795.
- J. L. AURIAULT et C. BOUTIN, Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics I : coupling effects, *TIPM*, 7, 1992, p. 63-82.
- J. L. AURIAULT et C. BOUTIN, Deformable porous media with double porosity. Quasi-statics II : memory effects, *TIPM*, 10, 1993, p. 153-169.
- J. L. AURIAULT et C. BOUTIN, Deformable porous media with double porosity III : acoustics, *TIPM* (à paraître).
- J. L. AURIAULT, T. STRZELECKI, J. BAUER et S. HE, Porous deformable media saturated by a very compressible fluid : quasi-statics, *Eur. J. Mech. A/Solids*, 9, n° 4, 1990, p. 373-392.
- A. BENSOUSSAN, J. L. LIONS et G. PAPANICOLAOU, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1978.
- T. LEVY, Écoulement dans un milieu poreux avec fissures unidirectionnelles, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 310, série II, 1990 a, p. 685-690.
- T. LEVY, Filtration in a porous fissured rock : influence of the fissure connexity, *Eur. J. Mech., B/Fluids*, 9, 1990 b, p. 309-327.