



**HAL**  
open science

## Обратные задачи для уравнения Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в краевом условии

Namig Guliyev

### ► To cite this version:

Namig Guliyev. Обратные задачи для уравнения Штурма–Лиувилля со спектральным параметром в краевом условии. Dokl. Nats. Akad. Nauk Azerb., 2004, 60 (3-4), pp.10-16. <hal-01709345>

**HAL Id: hal-01709345**

**<https://hal.science/hal-01709345>**

Submitted on 28 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Н. Дж. КУЛИЕВ

**ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШТУРМА–ЛИУВИЛЛЯ  
СО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ В КРАЕВОМ УСЛОВИИ***(Представлено академиком НАН Азербайджана Дж.Э.Аллахвердиевым)*Рассмотрим краевую задачу  $P = P(q, h, H, H_1, H_2)$ :

$$\begin{aligned} \ell y := -y''(x) + q(x)y(x) &= \lambda y(x), \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\lambda(y'(\pi) + Hy(\pi)) = H_1 y'(\pi) + H_2 y(\pi),$$

где  $h, H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}$ ,  $q(x) \in L_2(0, \pi)$  — вещественнозначная функция и

$$\rho := HH_1 - H_2 > 0.$$

В настоящей работе изучаются обратные задачи восстановления краевых задач типа  $P$ . Некоторые обратные задачи для уравнений со спектральным параметром в краевом условии рассмотрены в работах [1-3]. В случае, когда краевые условия не зависят от спектрального параметра, обратные задачи подробно исследованы (см. [4-6]).

Информацию о конкретных физических задачах, приводящих к изучению  $P$ , можно найти в работах [7-9]. В [9-12] исследованы осцилляционные свойства и базисность собственных функций, а в [7-8, 13] разложения по собственным функциям задач вида  $P$ .

Пусть  $\varphi(x, \lambda)$  и  $\psi(x, \lambda)$  являются решениями уравнения (1) при начальных условиях

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h, \quad \psi(\pi, \lambda) = -\lambda + H_1, \quad \psi'(\pi, \lambda) = \lambda H - H_2.$$

Тогда характеристическая функция, нули которой являются собственными значениями задачи  $P$ , имеет вид

$$\chi(\lambda) := \varphi(\pi, \lambda)\psi'(\pi, \lambda) - \varphi'(\pi, \lambda)\psi(\pi, \lambda).$$

Задача  $P$  имеет счетное число простых вещественных собственных значений и для каждого собственного значения  $\lambda_n$  существует такое число  $k_n$ , что

$$\psi(x, \lambda_n) = k_n \varphi(x, \lambda_n), \quad k_n \neq 0.$$

В гильбертовом пространстве  $\mathbf{H} = L_2(0, \pi) \oplus \mathbf{C}$  определим скалярное произведение

$$(F, G) := \int_0^\pi F_1(x) \overline{G_1(x)} dx + \frac{1}{\rho} F_2 \overline{G_2},$$

где

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix} \in \mathbf{H}.$$

Определим оператор

$$A(F) := \begin{pmatrix} -F_1''(x) + q(x)F_1(x) \\ H_1 F_1'(\pi) + H_2 F_1(\pi) \end{pmatrix}$$

с областью определения

$$D(A) = \{F \in \mathbf{H} \mid F_1(x), F_1'(x) \in AC[0, \pi], \ell F_1 \in L_2(0, \pi), \\ F_1'(0) - hF_1(0) = 0, F_2 = F_1'(\pi) + HF_1(\pi)\}.$$

Тогда

$$\Phi_n := \begin{pmatrix} \varphi(x, \lambda_n) \\ \varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n) \end{pmatrix}$$

являются ортогональными собственными элементами оператора  $A$  (см. [8]):

$$(\Phi_n, \Phi_m) = 0, \quad n \neq m.$$

Определим *нормировочные числа* как

$$\gamma_n := \|\Phi_n\|^2 = \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx + \frac{(\varphi'(\pi, \lambda_n) + H\varphi(\pi, \lambda_n))^2}{\rho}.$$

Числа  $\{\gamma_n, \lambda_n\}$  назовем *спектральными данными* краевой задачи  $P$ .

**Теорема 1.** Справедливы следующие асимптотические равенства:

$$s_n := \sqrt{\lambda_n} = n - 1 + \frac{\omega}{n\pi} + \frac{\zeta_n}{n}, \quad \{\zeta_n\} \in l_2, \quad (2)$$

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\zeta_n'}{n}, \quad \{\zeta_n'\} \in l_2, \quad (3)$$

где

$$\omega := h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(x) dx.$$

Приведем теорему разложения по собственным функциям и одну лемму, которые понадобятся при выводе основного уравнения обратной задачи.

**Теорема 2.** Пусть  $f(x) \in AC[0, \pi]$ . Тогда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{\gamma_n} \int_0^{\pi} f(t) \varphi(t, \lambda_n) dt \right) \varphi(x, \lambda_n), \quad (4)$$

причем ряд сходится равномерно на  $[0, \pi]$ .

**Лемма 1.** (см. [6]) Если  $s_n$  и  $\gamma_n$  подчиняются асимптотикам (2), (3) и

$$\alpha_n^0 = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \geq 1 \\ \pi, & n = 0 \end{cases}$$

то

$$a(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos s_n x}{\gamma_n} - \frac{\cos(n-1)x}{\alpha_{n-1}^0} \right) \in W_2^1(0, \pi).$$

Положим

$$F(x, t) := \frac{\cos s_0 x \cos s_0 t}{\gamma_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\cos s_n x \cos s_n t}{\gamma_n} - \frac{\cos(n-1)x \cos(n-1)t}{\alpha_{n-1}^0} \right).$$

Так как

$$F(x, t) = \frac{\cos s_0 x \cos s_0 t}{\gamma_0} + \frac{a(x+t) + a(x-t)}{2},$$

то в силу леммы 1 функция  $F(x, t)$  — непрерывна и  $\frac{d}{dx} F(x, x) \in L_2(0, \pi)$ .

Известно [4] что, имеют место представления

$$\varphi(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} x + \int_0^x K(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt,$$

$$\cos \sqrt{\lambda} x = \varphi(x, \lambda) + \int_0^x H(x, t) \varphi(t, \lambda) dt,$$

где  $K(x, t)$  и  $H(x, t)$  — вещественные непрерывные функции, причем

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt.$$

С помощью этих представлений доказываем следующие теоремы.

**Теорема 3.** При каждом фиксированном  $x \in (0, \pi]$  функция  $K(x, t)$  удовлетворяет следующему основному уравнению

$$F(x, t) + K(x, t) + \int_0^x K(x, \tau) F(\tau, t) d\tau = 0, \quad 0 < t < x. \quad (5)$$

Более того, это уравнение имеет единственное решение  $K(x, t) \in L_2(0, x)$ .

**Теорема 4.** Если спектральные данные краевых задач  $P(q, h, H, H_1, H_2)$  и  $P(\tilde{q}, \tilde{h}, \tilde{H}, \tilde{H}_1, \tilde{H}_2)$  совпадают, то

$$\begin{aligned} q(x) &= \tilde{q}(x) \text{ п.в. на } (0, \pi), \\ h &= \tilde{h}, \quad H = \tilde{H}, \quad H_1 = \tilde{H}_1, \quad H_2 = \tilde{H}_2. \end{aligned}$$

Пусть  $\{\lambda_n, \gamma_n\}_{n \geq 0}$  — спектральные данные некоторой краевой задачи  $P$ . По этим данным строим функцию  $F(x, t)$  и находим  $K(x, t)$  из (5). Заменим  $t \rightarrow tx$ ,  $\tau \rightarrow t\tau$  в (5):

$$F(x, xt) + K(x, xt) + x \int_0^1 K(x, x\tau) F(x\tau, xt) d\tau = 0, \quad 0 < t < 1.$$

Согласно лемме 1 и лемме 1.5.2 из [6] функция  $K(x, t)$  определяется однозначно и  $\frac{d}{dx} K(x, x) \in L_2(0, \pi)$ . Теперь построим функции  $q(x)$ ,  $\varphi(x, \lambda)$ ,  $\chi(\lambda)$  и число  $h$  по формулам

$$\begin{aligned} q(x) &:= 2 \frac{d}{dx} K(x, x), \quad h := K(0, 0), \\ \varphi(x, \lambda) &:= \cos sx + \int_0^x K(x, t) \cos st dt, \\ \chi(\lambda) &:= -\pi(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{(\lambda_n - \lambda)}{(n-1)^2} \end{aligned}$$

и положим

$$k_n := \frac{\dot{\chi}(\lambda_n)}{\gamma_n}.$$

Ясно, что  $k_n \neq 0$ .

Имеют место следующие утверждения.

**Лемма 2.** Справедливо равенство

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi(x, \lambda_n)}{k_n \gamma_n} = 0. \quad (6)$$

**Лемма 3.** Справедливы соотношения

$$\begin{aligned} -\varphi''(x, \lambda) + q(x)\varphi(x, \lambda) &= \lambda\varphi(x, \lambda), \\ \varphi(0, \lambda) &= 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h. \end{aligned}$$

**Лемма 4.** Для любого фиксированного  $n_0$  система  $\{\varphi(x, \lambda_n)\}_{n \neq n_0}$  образует базис Рисса в  $L_2(0, \pi)$ .

**Лемма 5.** Для каждой функции  $f(x) \in W_2^2(0, \pi)$  имеет место разложение (4).

Леммы 3-5 доказываются аналогично соответствующим утверждениям работы [6].

Напишем равенство (6) в форме

$$\frac{\varphi(x, \lambda_{n_0})}{\gamma_{n_0}} = - \sum_{n \neq n_0} \frac{k_{n_0} \varphi(x, \lambda_n)}{k_n \gamma_n}, \quad (7)$$

где  $n_0$  - любое неотрицательное целое число. Пусть  $m \neq n_0$  фиксировано и  $f(x) = \varphi(x, \lambda_m)$ . Используя (7), из (4) находим:

$$\varphi(x, \lambda_m) = \sum_{n \neq n_0} c_{mn} \varphi(x, \lambda_n), \quad c_{mn} = \frac{1}{\gamma_n} \int_0^\pi \varphi(t, \lambda_m) \left( \varphi(t, \lambda_n) - \frac{k_{n_0}}{k_n} \varphi(t, \lambda_{n_0}) \right) dt.$$

Согласно лемме 4,  $c_{mn} = \delta_{mn}$  ( $\delta_{mn}$  - символ Кронекера). Из произвольности  $n_0$  получим:

$$\int_0^\pi \varphi^2(t, \lambda_n) dt = \gamma_n - \frac{\rho}{k_n^2}, \quad \int_0^\pi \varphi(t, \lambda_m) \varphi(t, \lambda_n) dt = -\frac{\rho}{k_m k_n}, \quad m \neq n.$$

Используя эти равенства в формуле Грина

$$\varphi(\pi, \lambda) \varphi'(\pi, \mu) - \varphi'(\pi, \lambda) \varphi(\pi, \mu) = (\lambda - \mu) \int_0^\pi \varphi(t, \lambda) \varphi(t, \mu) dt$$

можем написать

$$\frac{k_n \varphi(\pi, \lambda_n) k_m \varphi'(\pi, \lambda_m) - k_n \varphi'(\pi, \lambda_n) k_m \varphi(\pi, \lambda_m)}{\lambda_n - \lambda_m} = -\rho, \quad n \neq m.$$

Из последнего равенства после некоторых преобразований получаем равенства

$$\lambda_n (\varphi'(\pi, \lambda_n) + H \varphi(\pi, \lambda_n)) = H_1 \varphi'(\pi, \lambda_n) + H_2 \varphi(\pi, \lambda_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

для некоторых вещественных  $H, H_1$  и  $H_2$ . Таким образом, мы доказали

**Теорема 5.** Для того чтобы вещественные числа  $\{\lambda_n, \gamma_n\}_{n \geq 0}$  были спектральными данными некоторой задачи вида  $P$ , необходимо и достаточно, чтобы  $\lambda_n \neq \lambda_m$  при  $n \neq m$ ,  $\gamma_n > 0$  и имели место (2)–(3).

Пусть  $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$  и  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$  являются спектрами некоторых краевых задач  $P(q, h, H, H_1, H_2)$  и  $P(q, \tilde{h}, H, H_1, H_2)$  соответственно. Согласно лемме 3.4.2 из [4] и теореме 1, они удовлетворяют следующим условиям:

$$\sqrt{\lambda_n} = n - 1 + \frac{\omega}{n\pi} + \frac{\zeta_n}{n}, \quad \sqrt{\mu_n} - \sqrt{\lambda_n} = \frac{\sigma}{n\pi} + \frac{\zeta'_n}{n^2}, \quad \{\zeta_n\}, \{\zeta'_n\} \in l_2. \quad (8)$$

Для определенности предположим, что  $h < \tilde{h}$ . Так же, как и в классическом случае (см., напр., [5]) можно показать, что

$$\lambda_0 < \mu_0 < \lambda_1 < \mu_1 < \lambda_2 < \mu_2 < \dots$$

Можно показать, что указанные необходимые условия на собственные значения являются также достаточными. Для этого построим функции

$$\Phi(\lambda) = -\pi(\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda_1) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda_n - \lambda}{(n-1)^2},$$

$$\Psi(\lambda) = -\pi(\lambda - \mu_0)(\lambda - \mu_1) \prod_{n=2}^{\infty} \frac{\mu_n - \lambda}{(n-1)^2}$$

и положим

$$\gamma_n := (\omega - \sigma) \frac{\dot{\Phi}(\lambda_n)}{\Psi(\lambda_n)}.$$

С помощью леммы 3.4.2 из [4] можно показать, что числа  $\gamma_n$  удовлетворяют условию (3). Поэтому можем восстановить задачу  $P(q, h, H, H_1, H_2)$ . Число  $\tilde{h}$  определим из равенства  $\tilde{h} = h + \sigma - \omega$ . Аналогично теореме 3.3.1 из [5] доказываем, что собственные значения построенной задачи совпадают с числами  $\{\mu_n\}_{n \geq 0}$ . Таким образом, доказана

**Теорема 6.** Для того чтобы последовательности вещественных чисел  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\mu_n\}$  были спектрами двух краевых задач вида  $P(q, h, H, H_1, H_2)$  и  $P(q, \tilde{h}, H, H_1, H_2)$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялись (8) и они перемежались.

В заключение автор выражает глубокую благодарность проф. И. М. Гусейнову за постановку задачи и полезные указания.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мамедов С.Г. Определение дифференциального уравнения второго порядка по двум спектрам, со спектральным параметром, входящим в граничные условия. // Изв. АН Азерб. ССР, серия физ.-техн. и матем. наук, 1982, №2, с.15-22.
2. Browne P.J., Sleeman B.D. A uniqueness theorem for inverse eigenparameter dependent Sturm-Liouville problems. // Inverse Problems, 1997, v.13, p.1453-1462.
3. Binding P.A., Browne P.J., Watson B.A. Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions. // J. London Math. Soc. (2), 2000, v.62, №1, p.161-182.
4. Марченко В.А. Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения. К.: Наукова Думка, 1977.
5. Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля. М.: Наука, 1984.
6. Юрко В.А. Обратные спектральные задачи и их приложения. Саратов: Изд-во Саратов. пед. ин-та, 2001.
7. Walter J. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. // Math. Z., 1973, v.133, p.301-312.

8. *Fulton C.T.* Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, 1977, v.77, p.293-308.

9. *Капустин Н.Ю., Мусеев Е.И.* О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения, 1997, т.33, №1, с.115-119.

10. *Binding P.A., Browne P.J., Seddighi K.* Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 1993, v.37, №1, p.57-72.

11. *Капустин Н.Ю.* Осцилляционные свойства решений одной несамосопряженной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. // Дифференц. уравнения, 1999, т.35, №8, с.1024-1027.

12. *Керимов Н.Б., Мирзоев В.С.* О базисных свойствах одной спектральной задачи со спектральным параметром в граничном условии. // Сиб. мат. журн., 2003, т.44, №5, с.1041-1045.

13. *Wray S.D.* Absolutely convergent expansions associated with a boundary-value problem with the eigenvalue parameter contained in one boundary condition. // Czechoslovak Math. J., 1982, v.32(107), p.608-622.

*Институт математики и механики  
НАН Азербайджана*

*Поступило 17.V.2004*

**N.C.Quliyev**

**SƏRHƏDDƏ SPEKTRAL PARAMETRDƏN ASILILIQ OLDUQDA  
ŞTURM-LİUVİLL TƏNLİYİ ÜÇÜN TƏRS MƏSƏLƏLƏR**

İşdə

$$\begin{aligned} \ell y &:= -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \\ \lambda(y'(\pi) + Hy(\pi)) &= H_1 y'(\pi) + H_2 y(\pi), \end{aligned}$$

məsələsi üçün bir spektr və normallaşdırıcı ədədlər dəstinə əsasən, iki spektrə görə spektral analizlə tərs məsələlərinə baxılır, burada  $h, H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}$ ,  $q(x) \in L_2(0, \pi)$  isə həqiqi funksiyadır.

**N.J.Guliyev**

**INVERSE PROBLEMS FOR STURM-LIOUVILLE EQUATION  
WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITION**

Inverse problems of reconstruction of the boundary-value problem

$$\begin{aligned} \ell y &:= -y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \\ y'(0) - hy(0) &= 0, \\ \lambda(y'(\pi) + Hy(\pi)) &= H_1 y'(\pi) + H_2 y(\pi), \end{aligned}$$

where  $h, H, H_1, H_2 \in \mathbf{R}$  and  $q(x) \in L_2(0, \pi)$  is a real-valued function, by one spectrum and a sequence of norming constants, by two spectra are considered.