



HAL
open science

Approche mixte pour la modélisation de plaques composites par séparation de variables

Philippe Vidal, Laurent Gallimard, Olivier Polit

► **To cite this version:**

Philippe Vidal, Laurent Gallimard, Olivier Polit. Approche mixte pour la modélisation de plaques composites par séparation de variables. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01706212

HAL Id: hal-01706212

<https://hal.science/hal-01706212>

Submitted on 10 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Approche mixte pour la modélisation de plaques composites par séparation de variables

Philippe VIDAL, Laurent GALLIMARD, Olivier POLIT

LEME EA 4416, Université Paris Ouest, France, {philippe.vidal, laurent.gallimard, olivier.polit}@u-paris10.fr

Résumé — Cet article porte sur la modélisation de plaques composites et sandwichs basée sur une approche mixte (RMVT) en exploitant une méthode par séparation de variables (Proper Generalized Decomposition). Les déplacements et les contraintes hors plan sont donc décomposés en une somme de produits de fonctions du plan x,y par des fonctions de la coordonnée transverse z . Ce travail est l'extension de travaux basés sur une approche en déplacements [1, 2, 3]. On aboutit à une approche LayerWise d'ordre élevée dont les résultats obtenus sont comparés à des solutions de référence exactes.

Mots clés — approche RMVT, composite, séparation de variables

1 Introduction

Les composites stratifiés et sandwichs sont de plus en plus utilisés, en particulier dans les structures aéronautique, maritime, ... grâce à leurs excellentes propriétés mécaniques. Dans cet environnement, ils sont souvent soumis à des sollicitations sévères de nature mécanique et/ou thermique. Or, les mécanismes de rupture dépendent fortement des effets locaux aux interfaces des couches ou à proximité des bords. Il s'avère donc nécessaire de les évaluer de façon précise.

Pour la modélisation des structures composites et sandwichs, on peut distinguer deux grandes approches :

- l'approche couche équivalente (ESL) : le nombre d'inconnues est indépendant du nombre de couches,
- l'approche couche discrète (LW) : le nombre d'inconnues est proportionnel au nombre de couches.

Ces approches sont généralement basées sur des formulations en déplacements. Néanmoins, des formulations mixtes sont également utilisées afin d'améliorer la précision sur l'estimation des contraintes, et en particulier celles hors plan qui sont déterminantes dans les phénomènes de délaminage.

Ces approches permettent d'éviter le recours à des modélisations 3D qui peuvent être lourdes en terme de mise en oeuvre et en temps de calculs.

Notons également que depuis une dizaine d'années, la méthode PGD (Proper Generalized Decomposition) [4] a montré d'intéressantes propriétés dans le cadre de réduction de modèles [5]. Elle a été proposée dans le cadre de la méthode Latin par Ladevèze [6] en introduisant une décomposition radiale. Elle a pu être avantageusement exploitée en utilisant la séparation de variables (coordonnées x,y et z) pour traiter des problèmes de plaques composites [1] (Solution de type Navier) et [2] (solution EF).

En nous basant sur le travail développé dans [1, 2, 3] pour la séparation des variables, sur une formulation mixte [7], et sur les travaux de Carrera [8, 9] pour l'évaluation des modèles raffinés, nous en déduisons une approche mixte de type LayerWise (LW) avec séparation de variables en utilisant une expansion en z d'ordre 4 pour toutes les inconnues. Le but est de construire une approche efficace et précise pour la modélisation de structures composites stratifiés et sandwichs.

2 Modélisation LW d'ordre 4 par variables séparées

Considérons une plaque $\mathcal{P} = \Omega \times \Omega_z$ avec $\Omega = [0, a] \times [0, b]$, $\Omega_z = \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ dans un système de coordonnées cartésiennes (x, y, z) . La coordonnée z est relative à la direction de l'épaisseur de la plaque h . Ω est une région arbitraire du plan (x, y) et définit le plan moyen de la plaque.

En s'appuyant sur la représentation du déplacement par variables séparées, on écrit $(u_1(x, y, z), u_2(x, y, z), u_3(x, y, z))$ comme la somme de N produits de fonctions dans le plan par des fonctions de la coordonnée transverse :

$$u = \begin{bmatrix} u_1(x, y, z) \\ u_2(x, y, z) \\ u_3(x, y, z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} f_1^i(z) v_1^i(x, y) \\ f_2^i(z) v_2^i(x, y) \\ f_3^i(z) v_3^i(x, y) \end{bmatrix} \quad (1)$$

où (f_1^i, f_2^i, f_3^i) sont définies sur Ω_z et (v_1^i, v_2^i, v_3^i) sur Ω .

Pour le modèle basé sur la formulation RMVT (Reissner's partially Mixed Variational Theorem), les contraintes σ_{i3} sont également exprimées de la même façon :

$$\sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_{13}(x, y, z) \\ \sigma_{23}(x, y, z) \\ \sigma_{33}(x, y, z) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^N \begin{bmatrix} f_{\sigma_1}^i(z) \sigma_1^i(x, y) \\ f_{\sigma_2}^i(z) \sigma_2^i(x, y) \\ f_{\sigma_3}^i(z) \sigma_3^i(x, y) \end{bmatrix} \quad (2)$$

où $(f_{\sigma_1}^i, f_{\sigma_2}^i, f_{\sigma_3}^i)$ sont définies sur Ω_z et $(\sigma_1^i, \sigma_2^i, \sigma_3^i)$ sur Ω .

Dans ce travail, une approximation élément fini classique à 8 noeuds est utilisée sur Ω , et une description LW d'ordre 4 est adoptée dans Ω_z , cette dernière s'avérant particulièrement adaptée pour la modélisation de structures composites.

3 Résolution du problème

La formulation du problème s'appuie sur l'approche RMVT (Reissner's partially Mixed Variational Theorem) :

Chercher $\vec{u}(M)$ et $[\sigma_{nM}]$ avec $\vec{u}(M) = \vec{u}_d$ sur $\partial_u \mathcal{P}$ tel que

$$\int \int \int_{\mathcal{P}} ([\delta \varepsilon_{pG}]^T [\sigma_{pH}] + [\delta \varepsilon_{nG}]^T [\sigma_{nH}] + [\delta \sigma_{nM}]^T ([\varepsilon_{nG}] - [\varepsilon_{nH}])) d\mathcal{P} = \int \int_{\partial \mathcal{P}_F} \delta \vec{u} \cdot \vec{p} dS \quad (3)$$

où \vec{p} sont les efforts surfaciques appliqués sur $\partial \mathcal{P}_F$, $[\sigma_p]^T = [\sigma_{11} \ \sigma_{22} \ \sigma_{12}]$, $[\sigma_n]^T = [\sigma_{13} \ \sigma_{23} \ \sigma_{33}]$, $[\varepsilon_p]^T = [\varepsilon_{11} \ \varepsilon_{22} \ \gamma_{12}]$, $[\varepsilon_n]^T = [\gamma_{13} \ \gamma_{23} \ \varepsilon_{33}]$.

$[\varepsilon_{pG}]$ ou $[\varepsilon_{nG}]$ signifie que la déformation vérifie les conditions de compatibilité (Géométriques). L'indice H se réfère à la loi de Hooke.

La séparation des contraintes hors plan se retrouvent dans la loi de comportement mixte qui s'écrit alors :

$$\begin{cases} [\sigma_{pH}] = [C_{pp}][\varepsilon_{pG}] + [C_{pn}][\sigma_{nM}] \\ [\varepsilon_{nH}] = [C_{np}][\varepsilon_{pG}] + [C_{nn}][\sigma_{nM}] \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{où } [C_{pp}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix}, [C_{pn}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & C_{13} \\ 0 & 0 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{36} \end{bmatrix},$$

$$[C_{np}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{36} \end{bmatrix}, [C_{nn}] = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} & 0 \\ C_{45} & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{bmatrix}$$

Les couples (f_j^i, v_j^i) , $(f_{\sigma_j}^i, \sigma_j^i)$ se calculent itérativement. On suppose que les m premiers couples sont

connus, et on calcule le $m + 1^{\text{ème}}$ couple. On peut écrire :

$$\begin{aligned} [u^{m+1}] &= [u^m] + \begin{bmatrix} f_1(z) v_1(x,y) \\ f_2(z) v_2(x,y) \\ f_3(z) v_3(x,y) \end{bmatrix} \\ [\sigma_n^{m+1}] &= [\sigma_n^m] + \begin{bmatrix} f_{\sigma_1}(z) \sigma_1(x,y) \\ f_{\sigma_2}(z) \sigma_2(x,y) \\ f_{\sigma_3}(z) \sigma_3(x,y) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

où $[u^m]$ et $[\sigma_n^m]$ sont connues, et $(v_1(x,y), v_2(x,y), v_3(x,y))$, $(\sigma_1(x,y), \sigma_2(x,y), \sigma_3(x,y))$, $(f_1(z), f_2(z), f_3(z))$, $(f_{\sigma_1}(z), f_{\sigma_2}(z), f_{\sigma_3}(z))$ sont les fonctions à calculer.

En injectant ces expressions dans la formulation variationnelle Eq. (3), le problème à résoudre devient non-linéaire. Une technique classique de type point fixe est adoptée. Elle conduit à la résolution successive d'un problème 2D (associé au calcul de $[v]^T = [v_1, v_2, v_3]$, $[\sigma_n]^T = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3]$) et d'un problème 1D (associé au calcul de $[f]^T = [f_1, f_2, f_3]$, $[f_{\sigma}]^T = [f_{\sigma_1}, f_{\sigma_2}, f_{\sigma_3}]$) jusqu'à obtenir la convergence. Ce processus est arrêté dès que la distance entre deux solutions successives est inférieure à une valeur choisie par l'utilisateur. Le dernier couple (\tilde{f}, \tilde{v}) , $(\tilde{f}_{\sigma}, \tilde{\sigma}_n)$ de ce processus est donc le $m + 1^{\text{ème}}$ couple de la somme Eq. (5).

On remarque d'une part que le problème associé à f et f_{σ} est d'une taille très inférieure à celui associé à v , σ_n . D'autre part, le coût de ce dernier problème 2D est lui très inférieur à une approche LW classique, le nombre de ddls inconnus se limitant à ceux du maillage 2D du plan moyen.

4 Résultats numériques

Dans cette section, un EF quadrilatère à 8 noeuds basé sur les fonctions d'interpolation de Serendipity est utilisé pour les inconnues dépendant des coordonnées x, y . Un schéma d'intégration numérique avec 3×3 points permet d'évaluer les matrices élémentaires. Pour l'intégration des fonctions dépendant de la coordonnée transverse, une intégration analytique est réalisée.

L'approche est évaluée sur des exemples de plaques stratifiées et sandwich. Différents élancements sont considérés. Les résultats sont comparés à des solutions de référence [10].

Pour illustration, on considère une plaque rectangulaire ($b = 3a$) stratifiée simplement appuyée et soumise à une pression bi-sinusoidale $p(x,y) = q_0 \sin(\frac{\pi x}{a}) \sin(\frac{\pi y}{b})$. Elle est constituée de 4 couches $[0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ]$ avec un élancement $S = a/h = 4$. Le matériau est tel que

$$E_L = 25 \text{ GPa}, E_T = 1 \text{ GPa}, G_{LT} = 0.2 \text{ GPa}, G_{TT} = 0.5 \text{ GPa}, \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25$$

où L désigne la direction des fibres, et T la direction transverse. Les résultats sont adimensionnés tel

$$\text{que : } \bar{u} = u_1(0, b/2, z) \frac{E_T}{hq_0 S^3}, \bar{v} = u_2(a/2, 0, z) \frac{E_T}{hq_0 S^3}, \bar{w} = u_3(a/2, b/2, z) \frac{100E_T}{S^4 h q_0},$$

$$\bar{\sigma}_{13} = \frac{\sigma_{13}(0, b/2, z)}{q_0 S}, \quad \bar{\sigma}_{23} = \frac{\sigma_{23}(a/2, 0, z)}{q_0 S}, \quad \bar{\sigma}_{33} = \frac{\sigma_{33}(a/2, b/2, z)}{q_0}.$$

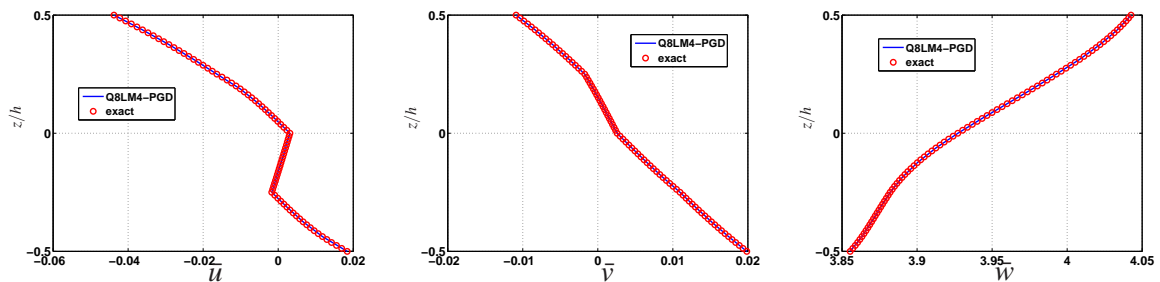


FIGURE 1 – distribution de \bar{u}_1 (gauche), \bar{u}_2 (milieu) et \bar{u}_3 (droite) dans l'épaisseur - $S=4$ - 4 couches

La distribution dans l'épaisseur des déplacements et des contraintes hors plan est donnée sur les figures Fig. 1 et Fig. 2. Elles montrent une très bonne corrélation avec la solution exacte. De par la

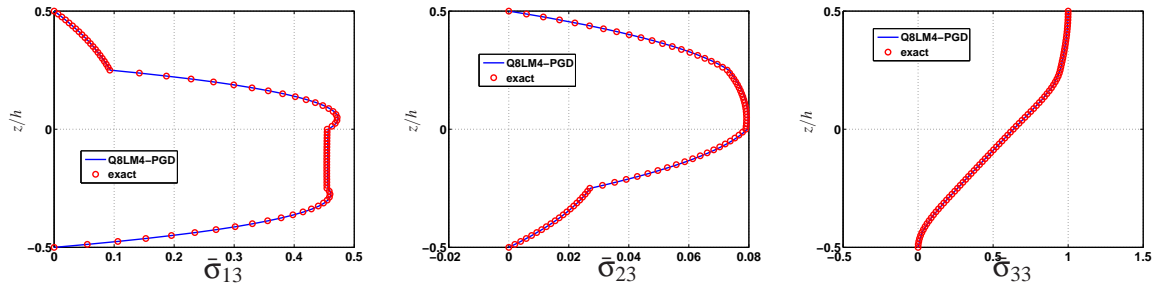


FIGURE 2 – distribution de $\bar{\sigma}_{13}$ (gauche), $\bar{\sigma}_{23}$ (milieu) and $\bar{\sigma}_{33}$ (droite) dans l'épaisseur - S=4 - 4 couches

formulation, les continuités des contraintes sont satisfaites. On note également que les conditions de bord libre et de chargement sont bien respectées, ce qui n'est pas a priori imposées.

Les résultats seront également discutés sur d'autres configurations pour montrer les performances et les limitations de la méthode.

5 Conclusion

Dans cet article, la décomposition de la solution sous forme radiale est appliquée à la modélisation de plaques composites en utilisant une approche layerwise d'ordre 4 pour le déplacement et les contraintes hors plan. La formulation est basée sur une approche mixte RMVT, Reissner's partially Mixed Variational Theorem. Les résultats sur des structures plaques de type composite stratifié et sandwich avec différents empilements et élancements seront discutés. La qualité des résultats sont très satisfaisants. Par ailleurs, pour des empilements complexes, l'approche devient moins coûteuse qu'une méthode LW-Mixte, et elle permet de raffiner le comportement suivant l'épaisseur à moindre coût.

Références

- [1] M. Savoia, J.N. Reddy. *A variational approach to three-dimensional elasticity solutions of laminated composite plates*, J. Applied Mech. ASME, 59, 166–175, 1992.
- [2] B. Bognet, F. Bordeu, F. Chinesta, A. Leygue, A. Poitou. *Advanced simulation of models defined in plate geometries : 3D solutions with 2D computational complexity*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 201-204, 1-12, 2012.
- [3] P. Vidal and L. Gallimard, O. Polit. *Proper Generalized Decomposition and Layer-Wise approach for the modeling of composite plate structures*, Int. J. Solids Struct., 50, 2239–2250, 2013.
- [4] A. Ammar, B. Mokdada, F. Chinesta, R. Keunings. *A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids*, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 139, 153-176, 2006.
- [5] O. Allix, P. Vidal. *A new multi-solution approach suitable for structural identification problems.*, Comput. Methods Appl. Mech. Eng., 191, 2727–2758, 2002.
- [6] P. Ladevèze. *Nonlinear computational structural mechanics - New approaches and Non-incremental methods of calculation*, Springer-Verlag, 1999.
- [7] E. Reissner *On a certain mixed variational theorem and a proposed application*, Int. J. Numer. Methods Eng., 20, 1366–8, 1984.
- [8] E. Carrera. *Developments, ideas and evaluations based upon Reissner's mixed variational theorem in the modeling of multilayered plates and shells*, Appl. Mech. Rev., 54, 301–29, 2001.
- [9] E. Carrera, L. Demasi. *Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 2 : Numerical implementations*, Int. J. Meth. Eng., 55, 253-291, 2003.
- [10] N. Pagano. *Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates*, J. Comp. Materials 4, 20–34, 1970.