Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016

Thomas Barrier, Christine Chambris

▶ **To cite this version:**

Thomas Barrier, Christine Chambris (Dir.). Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2016. Thomas Barrier; Christine Chambris. IREM de Paris – Université Paris Diderot, 2018, Christophe Hache, 978-2-86612-386-4. hal-01704879

HAL Id: hal-01704879
https://hal.science/hal-01704879

Submitted on 8 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques

2016

Édités par

Thomas Barrier et Christine Chambris

université PARIS DIDEROT PARIS 7

LDAR LABORATOIRE DE DIDACTIQUE ANDRÉ REVUZ

IREM PARIS

espe École supérieure du professorat et de l'éducation Académie de Lille Lille Nord de France

UNIVERSITÉ D'ARTOIS

Communauté d'Universités et d'Établissements Lille Nord de France

PRESENTATION

Le séminaire national de didactique des mathématiques, organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM), a pour but de favoriser la mise en discussion et la diffusion des recherches en didactique des mathématiques. Il s'agit d'un outil que s'est donné l'ARDM pour soutenir la structuration d'une communauté de de chercheur-e-s.

Sous réserve de l'accord des intervenant-e-s, les présentations sont filmées et diffusées en ligne. Le travail de capture, de montage et d'hébergement des vidéos est assuré habituellement par l'IREM de Paris. Signalons que pour le séminaire de Janvier 2016 qui s'est tenu à Arras, cette tâche a été assurée par l'équipe du SINAP de l'ESPE Lille Nord de France.

Au fur et à mesure de la finalisation des textes, ceux-ci sont mis à disposition sur le site de l'ARDM. Ils sont ensuite regroupés en un volume. Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2016. Par ailleurs, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de poster durant les sessions du séminaire. Ces présentations affichées donnent lieu à des textes courts que vous retrouverez également dans ce volume d'actes.

Le premier séminaire de l'année, celui de Janvier 2016, a eu lieu à Arras avec le soutien de l'ESPE Lille Nord de France et du Laboratoire de Mathématiques de Lens, poursuivant ainsi l'idée d'une session « itinérante » biannuelle (séminaire à Bordeaux en 2014). Nous avons pu compter sur l'appui de Françoise Chenevotot, Marie-Pierre Galisson et Christine Mangiante Orsola pour l'organisation locale. Nous les en remercions. Les deux séminaires suivants, Mars et Novembre 2016, ont eu lieu comme nous en avons maintenant l'habitude à Paris avec le soutien de l'Université Paris Diderot, du LDAR et de l'IREM de Paris. Nous remercions Christophe Hache pour son aide dans l'organisation.

Bonne Lecture.

SOMMAIRE

Séminaire des 22 et 23 janvier 2016

Ouverture sur… **6**

Renaud d'Enfert

Enseigner les mathématiques par les « centres d'intérêts ». Le cas des classes de fin d'études primaires élémentaires (1936-années 1950).

Présentation de thèse **18**

Katalin Gosztonyi

Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des " mathématiques modernes " : le cas de la Hongrie et de la France.

Présentation de thèse **19**

Xavier Sido

Les mathématiques dans l'enseignement professionnel. Genèse et évolution d'un enseignement (1945-1985). Perspectives historiques, enjeux didactiques.

Travaux en cours **35**

Christine Mangiante-Orsola, Marie-Jeanne Perrin-Glorian

Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain.

Présentation de thèse **60**

Marianne Moulin

Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : proposition et mise à l'épreuve d'un modèle d'interaction des processus de narration et de raisonnement dans une activité de résolution de problèmes.

Présentation d'habilitation à diriger des recherches **80**

Laurent Vivier

Opérationnaliser les registres - étude de trois objets : nombre entier, nombre rationnel, tangente.

Présentation de thèse **101**

Jean-François Chesné

Élaboration et analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental.

Session de posters

Cécile Allard. Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de professeurs des écoles expérimentés. **115**

Francine Athias. Un usage de la géométrie dynamique en cycle 3 : expliciter en géométrie. . **122**

Christine Mangiante, Pascale Masselot, Édith Petitfour, Claire Winder. Proposition d'un cadre d'analyse de situations de formation de professeurs des écoles. **127**

Séminaire des 18 et 19 mars 2016

Travaux en cours **132**

Teresa Assude, Karine Millon-Fauré.

Questionner le temps dans l'analyse d'un type de dispositif d'aide.

Présentation de thèse **137**

Édith Petitfour

Enseignement de la géométrie à des élèves dyspraxiques : étude du processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée.

Présentation de thèse **154**

Zoé Mesnil

Élaboration d'une référence pour l'enseignement de la logique.

Travaux en cours **176**

Ghislaine Gueudet

Le manuel scolaire : quelles analyses didactiques d'un objet en mutation ?

Travaux en cours **188**

Claire Guille-Biel Winder

Changements de regard sur les figures : une étude de cas en début de cycle 2.

Présentation de thèse **211**

Nathalie Auxire

Stéréotypes et complexification de l'identité enseignante.

Travaux en cours **228**

Nicolas Pelay, Michèle Artigue

Vers une approche didactique des activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques, et de leurs synergies possibles avec les activités scolaires.

Session de posters

Pierre-Vincent Quéré. Une étude de l'autonomie en mathématiques dans la transition secondaire-supérieur. **243**

Séminaire des 18 et 19 novembre 2016

Présentation de thèse **248**

Lynn Farah

Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales.

Travaux en cours **268**

Stéphanie Bridoux, Nicolas Grenier-Boley, Christophe Hache, Aline Robert

Anciennes et nouvelles questions sur l'enseignement supérieur : un exemple de recherches actuelles sur l'exposition des connaissances

Travaux en cours **287**

Stéphane Clivaz

Développement des connaissances mathématiques pour l'enseignement au cours d'un processus de *lesson study*.

Ouverture sur… **303**

Thomas Preveraud

Le transfert de manuels de mathématiques français aux États-Unis et la pulsation du marché de l'édition américain (1800-1850).

Présentation de thèse **304**

Monica Panero

Les pratiques enseignantes concernant la dérivée dans le secondaire

Table ronde **325**

Fabrice Vandebrouck, Luc Trouche, Hussein Sabra, Valentina Celi, Christine Chambris et Mariam Haspekian, Lalina Coulange et Grégory Train

Le réseau des IREM et la communauté des didacticiens : Quatre expériences d'interactions fructueuses.

Session de posters

Christine Choquet, Magali Hersant. Démarche d'investigation en mathématiques dans le premier degré en France : relations entre des questions de recherche et les instructions officielles. **347**

Dilma Fregona, Pablo Gregori, Pilar Orús, Laura Peydró, Irene Pitarch. Resources generated in the frame of the theory of didactical situations for the training of teachers and researchers. **352**

Blandine Masselin. Etude d'ETM idoines autour d'un problème de probabilité. **357**

Romain Mario. Etude et enquête mathématiques hors classe des très bons élèves. **362**

Denis Tanguay, Viviane Durand-Guerrier. L'introduction des réels au post-secondaire : questions épistémologiques et horizons didactiques **368**

ENSEIGNER LES MATHÉMATIQUES PAR LES « CENTRES D'INTÉRÊTS ». LE CAS DES CLASSES DE FIN D'ÉTUDES PRIMAIRES ÉLÉMENTAIRES (1936-ANNÉES 1950)

Renaud D'ENFERT

Université de Picardie Jules Verne, CURAPP-ESS (UMR 7319)
renaud.denfert@u-picardie.fr

Résumé
Créées dans le cadre de la prolongation de la scolarité obligatoire de 13 à 14 ans (1936), les classes de fin d'études primaires élémentaires constituent alors, pour les mathématiques, le lieu privilégié d'une pédagogie « active » fondée sur l'étude de « centres d'intérêt » en relation avec la vie quotidienne des élèves, présente ou future. En se basant sur une étude des textes officiels, de manuels scolaires et de revues pédagogiques, cet article met en lumière les principales caractéristiques de l'enseignement mathématique dispensé dans ces classes, depuis leur création jusque vers 1960, ainsi que les inflexions dont il fait l'objet dès les années 1940.

Mots clés
Enseignement primaire ; classes de fin d'études ; arithmétique ; éducation nouvelle ; méthodes actives

Entre 1936 et 1938, le système scolaire français fait l'objet d'une réforme de grande ampleur, qui concerne aussi bien l'enseignement primaire que l'enseignement secondaire. En particulier, la prolongation en 1936 de la scolarité obligatoire de 13 à 14 ans conduit à la création, dans les écoles primaires, de nouvelles classes appelées « classes de fin d'études primaires élémentaires ». Constituant désormais l'année terminale des études primaires élémentaires (6-14 ans), elles ont pour mission de préparer à entrer dans la vie sociale et professionnelle les nombreux élèves qui ne continueront pas leurs études dans des établissements de type secondaire. En se basant sur une étude des textes officiels (d'Enfert, 2015)[1], de manuels scolaires et de revues pédagogiques, cette contribution s'attache à caractériser l'enseignement mathématique dispensé dans ces classes, depuis leur création jusque vers 1960. On montrera notamment qu'elles constituent lors de leur création un lieu privilégié pour la mise en œuvre de pédagogies actives en mathématiques, notamment par le recours aux « centres d'intérêts » en relation avec la vie quotidienne des élèves. On verra également que ce renouvellement pédagogique est de courte durée : la décennie 1940, tant sous le régime de Vichy (1940-1944) pendant la Seconde Guerre mondiale que dans les années qui suivent la Libération de la France, est caractérisée par un retour à un enseignement mathématique plus classique, tandis que dans les années 1950, son caractère pratique commence à être dénoncé.

1 Cet article, écrit en partie avant la publication de (d'Enfert, 2015), reprend certains développements de l'introduction de cet ouvrage.

DES CLASSES DE FIN D'ÉTUDES PRIMAIRES POUR UNE « SCOLARITÉ PROLONGÉE »

La création, au sein du système d'enseignement primaire français, des classes de fin d'études primaires élémentaires trouve son origine dans la loi du 9 août 1936 relative à l'obligation de l'enseignement primaire, qui porte de 13 à 14 ans l'âge de la fin de la scolarité obligatoire. Votée trois mois après la mise en place du gouvernement de Front populaire dirigé par Léon Blum et dont Jean Zay est le ministre de l'Éducation nationale, cette loi vise à rattraper le retard pris par la France par rapport à de nombreux pays et à se conformer aux conventions internationales relatives à l'âge d'admission au travail (Conférence internationale de l'instruction publique, 1934). La loi du 9 août 1936 trouve aussi sa raison d'être dans la conjoncture économique du milieu des années 1930. La résorption du chômage engendré par la crise économique – la France compte plus d'un million de chômeurs en 1935 (Borne & Dubief, 1989, p. 37) – constitue en effet l'un des principaux arguments en faveur de la prolongation à 14 ans de la scolarité obligatoire (Férin, 1936). Le maintien des élèves à l'école primaire, pour une année supplémentaire, doit permettre de réduire une main d'œuvre pléthorique en mettant fin à cette « concurrence prématurée » (Zay, 1936) que représentent, sur le marché de l'emploi, les enfants de moins de 14 ans. Il faut noter toutefois que la loi du 9 août entérine, en partie du moins, des pratiques scolaires déjà en vigueur : dès avant 1936, du fait notamment de la crise économique, de nombreux élèves, surtout en milieu urbain, demeuraient à l'école primaire jusqu'à l'âge de 14 ou 15 ans (Condevaux, 1938a, p. 7).

Par-delà ces considérations économiques, la prolongation de la scolarité obligatoire jusqu'à l'âge de 14 ans s'inscrit dans le projet scolaire du Front populaire qui prévoit une réorganisation générale du système scolaire français (d'Enfert, 2015). Celui-ci est alors essentiellement composé de deux « ordres » d'enseignement bien distincts, avec, d'une part, l'enseignement primaire élémentaire qui s'adresse aux enfants des milieux populaires et possède des filières de scolarisation prolongée (écoles primaires supérieures et cours complémentaires) pour les élèves âgés de plus de 11 ou 12 ans ; et, d'autre part, l'enseignement secondaire des lycées et collèges, qui s'adresse principalement aux enfants de la bourgeoisie. Si l'on prend en compte, en outre, l'enseignement technique de niveau « moyen » (écoles pratiques de commerce et d'industrie, écoles nationales professionnelles) qui s'est constitué à la fin du XIX^{e} siècle, c'est en réalité une organisation scolaire en trois « ordres » d'enseignement qui prévaut au milieu des années 1930.

Le projet de loi déposé par le ministre Jean Zay le 5 mars 1937 et les mesures réglementaires prises par ce dernier en 1937 et 1938 ont pour ambition de rapprocher les différentes filières de scolarisation post-élémentaire (primaire supérieur, secondaire, technique) dans un enseignement du « second degré ». Mais cet enseignement du second degré n'a pas vocation à accueillir la grande masse des enfants. La prolongation de la scolarité obligatoire vise donc à améliorer la formation des très nombreux élèves (7 élèves sur 8 selon Jean Zay[2]) qui ne poursuivront leurs études ni dans le second degré, ni même dans les cours complémentaires des écoles primaires[3], et qui quitteront tôt l'école – à 14 ans désormais – pour entrer dans la vie active. Plus précisément, comme l'indiquent les instructions officielles du 20 septembre 1938, cette année d'école supplémentaire « doit servir de transition entre l'école et la vie » (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 87). Elle doit aussi les entraîner à s'instruire et

2 En 1938-1939, les écoles primaires élémentaires françaises réunissent 5 254 000 élèves, contre 850 000 pour les différentes filières post-élémentaires (lycées, collèges, écoles primaires supérieures, cours complémentaires, établissements techniques), et quelques dizaines de milliers pour les « petites classes » des lycées et collèges (7^{e}, 8^{e}, 9^{e}, etc.).

3 Contrairement aux écoles primaires supérieures (transformées en collèges modernes en 1941) qui sont des établissements scolaires autonomes, les cours complémentaires, qui proposent un enseignement du même type que ces dernières mais sur un nombre d'années réduit, sont établis dans des écoles primaires élémentaires.

à se cultiver par eux-mêmes ou dans le cadre de l'enseignement post-scolaire prévu par le projet de loi Jean Zay pour les adultes et les adolescents de plus de 14 ans (Sorre, 1938).
Pour accueillir les élèves durant cette année supplémentaire, des classes spécifiques, appelées « classes de scolarité prolongée », sont ouvertes dès la rentrée 1936 dans les écoles primaires. Elles y constituent l'année terminale du cycle d'études primaires élémentaires, son dernier étage (voir le tableau en annexe). Si l'on en croît le ministre Jean Zay, plus de 5 000 de ces classes sont déjà créées en février 1937, qui accueillent environ 200 000 élèves de plus de 13 ans (Journal des instituteurs, 1937). En 1938, dans le cadre d'une réorganisation d'ensemble de la fin de la scolarité élémentaire, elles sont renommées « classes de fin d'études primaires élémentaires » et dotées d'horaires et de programmes spécifiques.

UN ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE FONDÉ SUR LES « CENTRES D'INTÉRÊTS » (1936-1940)

Telle qu'elle est conçue par Jean Zay et ses collaborateurs, la classe de fin d'études primaires « est une préparation directe à la vie » (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 74). L'enseignement dispensé doit donc y être résolument pratique et s'accorder à l'activité économique et aux réalités locales, rurales ou urbaines. Il s'agit aussi de proposer « autre chose » que ce que les élèves ont connu dans les classes précédentes : non seulement ces derniers ne doivent pas avoir l'impression de redoubler en étant soumis aux mêmes exercices scolaires que leurs camarades plus jeunes, mais ils doivent ressentir, et leurs parents avec eux, l'intérêt et l'utilité d'entreprendre une année d'études supplémentaire.
Cette double ambition imprègne très largement l'enseignement mathématique des classes de fin d'études, tel qu'il est défini par les textes et les discours officiels, et décliné dans les revues pédagogiques et certains manuels scolaires de la fin des années 1930. « On souhaite que l'enfant y perde progressivement son esprit d'écolier pour s'initier aux problèmes concrets si variés que lui poseront dans la vie sa profession future et ses obligations de citoyen », indiquent ainsi les instructions de 1938 à propos de l'enseignement mathématique (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 87).
Du point de vue des contenus, l'objectif n'est pas d'enseigner aux élèves de nouvelles connaissances mathématiques, mais de leur faire appliquer celles qu'ils ont antérieurement acquises aux diverses situations qu'ils rencontreront dans leur vie d'adulte. Pour définir les contenus d'enseignement, le ministère ne publie pas un programme détaillé énumérant les diverses notions à assimiler, comme pour les autres classes de l'école primaire, mais seulement un court paragraphe significativement intitulé « Application du calcul » et dont le libellé privilégie le réinvestissement des acquis :

> Utilisation des connaissances mathématiques déjà acquises à la résolution de problèmes concrets de la vie pratique relatifs : à la vie sociale et aux activités familiales, dans toutes les écoles ; à la vie rurale et aux activités agricoles, à la vie urbaine et aux activités industrielles, selon le milieu où vit l'enfant. (Ministère de l'Éducation nationale, 1938a)

Du point de vue des méthodes, la classe de fin d'études primaires constitue une expérience originale de mise en place d'une pédagogie active, dont l'ambition est de rompre avec une tradition scolaire jugée trop livresque et dogmatique, et qui est partie prenante d'une volonté de renouvellement pédagogique concernant l'ensemble du système d'enseignement (Prost, 2003 ; Condette, 2011). Pour ses promoteurs influencés par les courants de l'éducation nouvelle, la classe de fin d'études constitue une « page blanche pour y expérimenter à grande échelle quelques-unes des intuitions et des suggestions suscitées par le projet de réforme dans son ensemble » (Ory, 1994, p. 664). Les instructions ministérielles lient étroitement la finalité « utilitariste » des classes de fin d'études, c'est-à-dire leur rôle de « préparation à la vie », et la volonté d'y développer une pédagogie substituant aux recettes et aux automatismes un

travail actif et réfléchi faisant appel à l'initiative des élèves. Les maîtres sont invités à renoncer aux leçons systématiques et, dans la mesure du possible, aux explications théoriques. Ceci au profit d'un enseignement concret et actif, basé sur l'étude de « centres d'intérêts »[4] en rapport avec des problèmes pratiques rencontrés dans la vie sociale ou familiale, dans les activités industrielles, agricoles ou ménagères, à la ville ou à la campagne : communications postales, épargne, assurances, constructions et réparations, banques, usines, salaires, engrais, cultures, comptabilité ménagère ou agricole, etc.

Cette nouvelle approche doit aussi conduire à décloisonner les disciplines : le maître « cherchera, autour de sujets particulièrement opportuns, à établir une liaison étroite entre les enseignements de tous ordres, littéraires et scientifiques, artistiques et manuels, et ces centres d'intérêt communs aux anciennes disciplines se substitueront à ces disciplines elles-mêmes » (Ministère de l'Éducation nationale, 1938b, p. 87). Non seulement les exercices et problèmes d'arithmétique peuvent trouver leur source dans les questions abordées en sciences, en géographie, en dessin ou en travail manuel, voire dans le cadre de l'« initiation à la vie civique » inscrite au programme, mais leur étude va bien au-delà de leur seule dimension mathématique : elle doit être « l'occasion d'exercices de toutes sortes, vocabulaire, lettres, demandes de renseignements aussi bien que calcul, devis, factures, études de prix de revient, projets d'itinéraires » (*Ibid*.).

Par rapport à l'enseignement prescrit pour les classes précédentes, la perspective pédagogique se trouve donc inversée. Il ne s'agit pas d'enseigner telle ou telle notion mathématique puis de faire des exercices d'application sur des sujets variés, mais de prendre comme point de départ un thème de la vie quotidienne ouvrant sur de « vrais » exercices pratiques basés sur l'exploitation de documents que les élèves auront à réellement utiliser dans leur vie d'adulte. L'inspecteur Georges Condevaux, l'un des principaux promoteurs des classes de fin d'études, écrit ainsi : « Nous voudrions qu'on habituât les élèves à travailler dans les mêmes conditions que les adultes, c'est-à-dire que les problèmes qu'on leur propose soient pratiques, c'est-à-dire encore qu'on n'y ait pas artificiellement rassemblé tous les nombres utiles, mais, au contraire, que les élèves soient obligés, pour les résoudre, de consulter un tarif, un barème ou tel document officiel » (Condevaux, 1938b, p. 32-33). Si le recours à une « vraie » documentation vise bien la « préparation à la vie », il est aussi une façon de rompre avec des pratiques enseignantes jugées routinières car trop exclusivement centrées sur la résolution quasi-mécanique des problèmes-types qui abondent dans les manuels d'arithmétique. Mettant généralement en scène des situations de la vie courante, ces problèmes sont en effet régulièrement critiqués pour leurs énoncés artificiels ou désuets, leurs données numériques factices, leurs solutions toutes faites qui demandent un effort de mémoire plutôt que de réflexion (Marijon & Leconte, 1930). La rupture avec la tradition scolaire semble d'autant plus aisée que l'âge de passage de l'examen du certificat d'études primaires, institué en 1880 pour sanctionner les études primaires élémentaires, reste fixé à 12 ans : l'enseignement des classes de fin d'études peut être dispensé sans souci d'examen et donc de préparation intensive des élèves à ses épreuves.

Parmi les rares manuels d'arithmétique qui paraissent à partir de 1936 pour les classes de scolarité prolongée puis de fin d'études primaires, celui d'Albert Châtelet et Georges Condevaux, publié par l'éditeur Bourrelier en 1937 (soit avant la parution du programme et des instructions officielles), est particulièrement emblématique du renouvellement

4 Notons qu'en 1912, la *Revue de l'enseignement primaire et primaire supérieur* publie un article intitulé « Les centres d'intérêts » (Laurin & Degouy, 1912), lequel sera suivi de plusieurs autres sur ce thème. Notons également que les textes officiels et para-officiels sur les classes de fin d'études que nous avons consultés ne font pas référence au pédagogue belge Ovide Decroly, qui fait pourtant de l'exploitation des « centres d'intérêts » un élément central de sa pédagogie. Une analyse approfondie de la presse pédagogique resterait à entreprendre afin d'évaluer l'influence de ce dernier sur la pédagogie des classes de fin d'études. Sur Decroly, voir notamment (Depaepe, Simon & Van Gorp, 2003 ; Wagnon, 2008).

pédagogique voulu par le ministère de l'Éducation nationale (Châtelet & Condevaux, 1937). Il est vrai que les deux auteurs sont fortement impliqués dans les réformes engagées par Jean Zay : mathématicien, recteur de l'académie de Lille à partir de 1924, Albert Châtelet a été nommé par Jean Zay à la direction de l'enseignement du Second degré du ministère de l'Éducation nationale en 1936 (Condette, 2009) ; dans les années 1930, il a publié des manuels d'arithmétique pour l'école élémentaire avec Georges Condevaux, un inspecteur primaire qui devient l'un de ses proches collaborateurs au ministère en 1937 (Caplat, 1997, pp. 219-223 ; Radtka, à paraître). Leur manuel d'arithmétique pour les classes de fin d'études, réalisé avec la collaboration d'instituteurs du département du Nord (Condevaux a été inspecteur primaire dans ce département), semble connaître un certain succès puisque le chiffre de 40 000 exemplaires est atteint en 1938, et celui de 225 000 en 1946.
L'organisation interne de ce manuel rompt radicalement avec celle des manuels ordinaires. À l'exception du chapitre consacré à la géométrie, les différents chapitres qui composent l'ouvrage ne portent pas, comme c'est traditionnellement l'usage, sur des notions mathématiques (la numération, l'addition, la soustraction, etc.), mais sur des questions relatives à la vie pratique : la construction et l'entretien de la maison, la vie ménagère, les industries, la vie sociale, les impôts et assurances, la vie à la campagne, le commerce, les transports et communications, les placements d'argent. Chacun de ces chapitres est subdivisé en « leçons », également thématiques. La vie ménagère est ainsi déclinée en 16 leçons, depuis le « loyer de la maison » jusqu'à la « comptabilité de la ménagère », en passant par « l'alimentation ». Chacune de ces leçons articule une partie documentaire comprenant informations pratiques, tarifs, barèmes, etc. (page de gauche), avec une série d'exercices et de problèmes visant à exploiter les informations fournies (page de droite). Par les renseignements qu'elles fournissent, celles-ci sont autant des leçons de science pratique, de législation ou d'économie, que des leçons de calcul. Une « Note pour les maîtres » suggère d'ailleurs que les élèves puissent emporter avec eux le manuel en quittant l'école primaire : « Ils y trouveraient, quelle que soit leur profession, nombre de renseignements utiles qu'ils pourraient difficilement trouver ailleurs sans de longues et difficiles démarches » (Châtelet & Condevaux, 1937, p. 6).

LE RETOUR À UN « ORDRE ARITHMÉTIQUE » (ANNÉES 1940-1950)

Ce renouvellement pédagogique initié sous le Front populaire est toutefois de courte durée. La décennie 1940, tant pendant la Seconde Guerre mondiale, sous le régime de Vichy (1940-1944), que dans les années qui suivent la Libération, est caractérisée par un retour à un enseignement mathématique plus traditionnel, qui donne la priorité à l'acquisition des mécanismes fondamentaux du calcul. Cette réorientation de l'enseignement mathématique, qui concerne l'ensemble de l'enseignement primaire, est motivée par diverses considérations. Certaines sont d'ordre idéologique : en rendant l'enseignement « attrayant », les méthodes actives promues avant-guerre auraient fait oublier qu'à l'école primaire comme dans la vie réelle, rien ne s'acquiert sans effort et sans travail[5]. D'autres invoquent la transformation du public des classes de fin d'études, désertées par les bons élèves qui préfèrent poursuivre leurs études dans les lycées et collèges ou dans les cours complémentaires. N'y restent donc que les élèves dont le niveau scolaire ne permet pas de pousser leurs études au-delà de l'obligation scolaire. En 1943, par exemple, l'inspecteur d'académie de Paris note ainsi que ces élèves constituent un « résidu médiocre » qui ralentit l'étude du programme[6]. Au lendemain de la

5 Archives nationales [désormais AN], F/17/14300 : conférences pédagogiques de 1944. Voir également (Le Lay, 1946).

6 AN, F/17/13357 : papiers du cabinet d'Abel Bonnard. Entre 1941 et 1944, la classe de fin d'études est intégrée dans un « deuxième cycle » accueillant les enfants de 11 à 14 ans. Voir également (Béchet, 1950).

guerre, la classe de fin d'études n'est donc plus seulement une « préparation à la vie » comme le voulait Jean Zay : elle est aussi une classe de remise à niveau pour des élèves qui ne possèdent pas suffisamment les mécanismes et le sens des opérations. En outre, la réforme du certificat d'études primaires, dont l'âge est repoussé à 14 ans en 1941, n'est pas sans conséquence sur les objectifs de la classe de fin d'études : celle-ci devient *aussi* une classe de préparation à cet examen. Reconnaissant la faiblesse en calcul (calcul écrit et calcul mental) des élèves des classes de fin d'études, le ministère doit d'ailleurs intervenir à plusieurs reprises par voie de circulaire pour que les sujets des épreuves d'arithmétique ne soient pas hors de portées des candidats (Ministère de l'Éducation nationale, 1947, 1949).

Concrètement, le nouveau programme publié en 1947 privilégie, comme c'est déjà le cas dans les autres classes, une organisation notionnelle plutôt que thématique de l'enseignement mathématique, et accorde une large place aux révisions des connaissances acquises antérieurement. Ce nouveau programme, qui restera valable jusqu'à l'extinction des classes de fin d'études au tournant des années 1960, fournit ainsi la liste des connaissances mathématiques qui devront être passées en revue et appliquées à des problèmes concrets relatifs aux diverses activités de la vie économique et sociale : la numération et les quatre opérations, les pourcentages, les fractions « usuelles », la mesure du temps, les échelles et les graphiques, le système métrique, les notions élémentaires de la géométrie. Si les instructions de 1938 restent toujours valables, le programme de 1947 s'en éloigne par son esprit. Son organisation, par notions mathématiques, apparaît en effet comme une incitation à délaisser la méthode des « centres d'intérêt » promue avant la guerre. Un inspecteur primaire résume bien le renversement de perspective qui est alors opéré :

> Sans doute, calcul et vie pratique doivent être intimement liés. Mais au lieu de « faire du calcul » à propos de la vie sociale, de la vie familiale, des activités locales, on se préoccupera de ces activités, de la vie familiale et de la vie sociale à l'occasion de leçons de calcul systématiquement organisées. En somme, l'ordre des termes est inversé : ce n'est plus la vie pratique qui provoque, suivant un ordre qu'elle impose, l'intervention de notions variées de calcul, c'est l'étude méthodique du calcul, le plus souvent sous forme de révision d'ailleurs, qui conduit à aborder, dans un ordre « arithmétique », des applications variées à la vie pratique. (Godier, 1955, p. 178)

C'est bien, d'ailleurs, une telle orientation qu'adoptent après 1940 les auteurs des manuels d'arithmétique pour les classes de fin d'études. Leurs préfaces rappellent la nécessité de revoir, confirmer, préciser les connaissances mathématiques élémentaires étudiées antérieurement mais superficiellement acquises. Leur organisation interne marque le retour à une conception « disciplinaire » de l'enseignement du calcul, centrée sur les contenus mathématiques. Ce que signale l'alternance, dans des proportions variées, ou même la répartition en deux parties bien distinctes, de « vraies » leçons d'arithmétique, de système métrique ou de géométrie d'une part, et de leçons consacrées à l'étude de problèmes pratiques d'autre part. Certains auteurs se démarquent d'ailleurs franchement des conceptions qui prévalaient sous le Front populaire : « Il faut se demander, s'il ne faut pas considérer l'enseignement de l'arithmétique comme étant précisément l'occasion par excellence où l'on peut s'efforcer d'échapper à l'influence excessive ou dominante de l'activité globale, c'est-à-dire des centres d'intérêts » (Marijon, Masseron & Delaunay, 1949, p. 5) ; « [les auteurs] ont pris soin de ne pas substituer des leçons de choses ou des leçons de sciences à des leçons d'arithmétique » (Franck, 1952, p. 5). Même le manuel de Châtelet et Condevaux, dont on a vu plus haut le caractère novateur à la fin des années 1930, est l'objet d'une telle évolution puisqu'il comporte, à partir de l'édition de 1948 (alors intitulée *J'apprends à résoudre les problèmes de la vie pratique*), « une révision méthodique et approfondie des notions acquises au cours moyen, poursuivie de concert avec l'étude de leurs applications » (Condevaux, 1952, p. 3). Les cinq leçons consacrées aux divers services postaux (envois de lettres et paquets, poste aérienne, télégraphe, téléphone, envois et recouvrements d'argent) ont été réduites à une seule. De façon significative, une édition remaniée, comportant des « énoncés simplifiés et

plus étroitement adaptés à l'acquisition des notions fondamentales d'arithmétique » est publiée à partir de 1954 sous le titre *J'apprends l'arithmétique et ses applications*, la leçon sur le bureau de postes étant désormais sous-titrée « Problèmes d'addition » (Condevaux, 1954).

Ce retour à un enseignement mathématique plus traditionnel signifie-t-il pour autant l'abandon des méthodes de l'éducation nouvelle dans les classes de fin d'études ? En réalité, certains manuels font appel, explicitement ou implicitement, aux « méthodes actives ». Ils proposent par exemple, en ouverture de chaque leçon, des exercices de réflexion et d'observation ou des petites enquêtes à faire seul ou équipe. L'exploitation de documents, qu'ils soient à recueillir à l'extérieur de l'école ou qu'ils figurent en bonne place dans le manuel, vise alors à mettre les élèves en contact avec les réalités qui les attendent au sortir de l'école, mais aussi à favoriser la collaboration entre le maître et ces derniers (Pugibet, Adam & Gason, 1943, p. 2). Il est vrai que la réglementation du certificat d'études primaires prône ce type de démarche. Sous Vichy, l'épreuve de calcul du certificat d'études comprend « un problème comportant, autant que possible, l'utilisation de documents (plans, séries de prix, tarifs, barèmes, catalogues, documents officiels, etc.) et se rapportant à la vie pratique » (Secrétariat d'État à l'Éducation nationale et à la Jeunesse, 1941). Elle revient ensuite à une forme plus traditionnelle, mais une circulaire de 1946 encourage ce « souci de réalisme » qui consiste « à faire rechercher par les candidats eux-mêmes certains des éléments numériques dont ils ont besoin dans des documents placés sous leurs yeux » (Ministère de l'Éducation nationale, 1946)[7]. Toutefois, la faible fréquence de ce type de problèmes (environ 5 %) à l'examen du certificat d'études au milieu des années 1950 semble indiquer qu'une telle pratique, pour autant qu'elle ait été réellement adoptée par les maîtres, est rapidement tombée en désuétude au profit d'énoncés plus traditionnels (Vuibert, 1957 ; Godier & Donnet, 1954).

L'ORIENTATION PRATIQUE DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE REMISE EN QUESTION (ANNÉES 1950)

Contre l'exclusivité des centres d'intérêts prônée sous le Front populaire, c'est donc une sorte de compromis entre une approche disciplinaire traditionnelle et l'emploi de certaines méthodes actives (enquêtes, utilisation de documents, etc.) qui s'établit à partir de la décennie 1940. Pour autant, le recentrage sur les contenus mathématiques n'invalide pas l'objectif premier des classes de fin d'études, qui est « d'informer les élèves et de les préparer méthodiquement aux difficultés qu'ils pourront rencontrer ultérieurement dans leur vie individuelle, familiale, sociale ou même professionnelle » (Ministère de l'Éducation nationale, 1947, p. 1110). Toutefois, au cours des années 1950, cet objectif fait l'objet d'une sérieuse remise en question, qui s'inscrit dans le cadre plus général d'une critique des programmes des dernières années de l'école primaire.

Cette remise en question se cristallise lors des conférences pédagogiques d'instituteurs organisées par le ministère de l'Éducation nationale en 1955, sur le thème de l'enseignement du calcul[8]. L'orientation pratique de l'enseignement mathématique dispensé dans les classes de fin d'études y est alors massivement – et vivement – dénoncée. Les nombreuses applications pratiques inscrites au programme concentrent les critiques : elles sont accusées d'être trop éloignées des préoccupations des élèves, considérés à tort comme des adultes, et de leur environnement immédiat ; de simplifier arbitrairement des situations qui sont en réalité complexes et que, de surcroît, les élèves n'auront probablement pas l'occasion d'affronter

7 À partir de 1947, la réglementation n'encourage plus l'emploi de documents, comme si cet objectif était abandonné.

8 AN, F/17/17839 : formation professionnelle des instituteurs - conférences pédagogiques (1954-1955).

dans leur vie future ; de mobiliser des connaissances nombreuses et un vocabulaire spécialisé, au point de transformer les contenus d'enseignement en « une encyclopédie de science pratique », un « monstrueux savoir ». De plus, dans les années 1950, les élèves des classes de fin d'études sont de plus en plus nombreux à poursuivre leur scolarité au-delà de l'âge de 14 ans, en intégrant des établissements d'enseignement technique, notamment les centres d'apprentissage créés à partir de 1945 (Sido, 2011). Le faible niveau mathématique de ces élèves, déjà souligné dans la décennie 1940, apparaît ici comme une circonstance aggravante :

> Les enfants du CFE [cours de fin d'études] ont surtout besoin de faire du calcul, de l'arithmétique et non des applications qui, le plus souvent, sont des simulacres, voire des hérésies si on se réfère à la vie réelle. […] pourquoi proposer au CFE tant de problèmes soi-disant pratiques comportant des barèmes, des relevés de compteurs, des prix de revient d'une charpente compliquée, etc., alors que les élèves ne connaissent pas encore suffisamment les mécanismes de base, les simples opérations arithmétiques ; qu'ils ignorent la plupart du temps le sens du vocabulaire technique qui est employé dans les énoncés de problèmes ? (Ayméric, 1955)

Cette orientation pratique de l'enseignement est donc accusée de porter préjudice à l'acquisition de bases solides. Elle est aussi dénoncée pour sa faible contribution à la formation de l'esprit et au développement d'une véritable éducation mathématique. Le rôle de l'école primaire, pense-t-on alors, n'est pas de faire résoudre aux élèves toutes les difficultés qui pourront se présenter dans la vie : elle doit plutôt « exercer l'esprit de l'enfant sur des thèmes de réflexion, souvent plus schématiques que les situations de la vie réelle, mais qui par les habitudes de pensée claire et rigoureuse dont ils sont le support, sont, sans doute, la plus efficace des préparations aux difficultés plus ou moins imprévisibles que lui réserve l'existence » (Canac, 1955, p. 117). Les classes de fin d'études deviennent ainsi partie prenante d'une conception de l'enseignement primaire où la dimension éducative de l'enseignement doit primer sur la dimension pratique.

Cette volonté de transformation de l'enseignement des classes de fin d'études ne trouvera toutefois pas sa traduction dans de nouveaux programmes. La réforme de l'enseignement, menée en 1959 par le ministre de l'Éducation nationale Jean Berthoin, transforme fondamentalement le système scolaire français en prolongeant à 16 ans l'âge de la scolarité obligatoire et en décidant que tous les élèves de l'école primaire ayant acquis une « formation élémentaire normale » pourront suivre des études secondaires à partir de l'âge de 11 ans (décret du 6 janvier 1959). Désormais, l'école primaire, réduite à la tranche d'âge 6-11 ans, constitue un premier degré à l'issue duquel les élèves iront suivre un nouveau cycle d'études au collège ou au lycée. Dans ce nouveau contexte, les classes de fin d'études primaires, dont l'échec est unanimement reconnu (Fouchet, 1963, p. 3553), sont progressivement supprimées jusqu'à leur disparition totale au tournant des années 1960-1970.

CONCLUSION

Sans nul doute, le recours aux « centres d'intérêts » constitue un épisode singulier de l'histoire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire française. Promue par le ministère de l'Éducation nationale dans la seconde moitié de la décennie 1930 pour les classes de fin d'études primaires élémentaires nouvellement créées, cette pédagogie originale ne s'est pas imposée sur le long terme. La volonté ministérielle de revenir à un enseignement primaire des mathématiques plus traditionnel au lendemain de la Seconde Guerre mondiale, les contraintes pédagogiques induites par le faible niveau scolaire des publics concernés comme par la préparation à l'examen du certificat d'études primaires, la contestation par les instituteurs de sa dimension pratique, la suppression progressive des classes de fin d'études primaires liée aux transformations structurelles du système scolaire, sont autant de facteurs qui peuvent expliquer cet insuccès.

On notera cependant que le recours à une approche thématique pour enseigner les mathématiques ne disparaît pas entièrement avec l'extinction des classes de fin d'études. On en retrouve la trace dans les classes dites « de transition » créées au début de la décennie 1960 pour accueillir les élèves dont le niveau est insuffisant pour suivre des études secondaires (et qui disparaissent avec la réalisation du « collège unique » en 1975). Celles-ci sont en effet promues comme le lieu d'une pédagogie couplant le réapprentissage des mécanismes de base et l'étude de thèmes transversaux issus de l'actualité ou de la vie de tous les jours. Pour ce qui est des mathématiques, il s'agit « d'introduire à des situation qui justifient et motivent le calcul » (Ministère de l'Éducation nationale, 1964). La revue mensuelle *Thèmes*, créée spécialement pour ces classes en 1964 par l'éditeur Armand Colin/Bourrelier (le même éditeur que celui du manuel de Châtelet et Condevaux évoqué plus haut) et publiée jusqu'en 1974, est emblématique de cette orientation pédagogique. Mais contrairement à ce qui a été observé pour les classes de fin d'études primaires, les thèmes d'étude proposés par cette revue ne sont pas centrés sur la vie sociale ou familiale : ils abordent des questions en prise sur l'actualité et le monde contemporain comme les jeux olympiques, l'homme et l'animal domestique, la montagne en hiver, ou encore la conquête de l'espace. En mathématiques comme dans les autres disciplines, il s'agit alors moins de « préparer à la vie » que de redonner aux élèves de ces classes le goût du travail scolaire et de combler leurs lacunes (Bishop, d'Enfert, Dorison & Kahn, 2011).

Références bibliographiques

Aymeric (1955). Compte-rendu de la conférence pédagogique de la circonscription d'Arles, 22 décembre 1955 (signé Aymeric, inspecteur départemental de l'enseignement primaire). *Archives nationales*, F/17/17839.

Béchet, A. (1950). L'enseignement du calcul dans la classe de fin d'études primaires. *Bulletin de la Société Alfred Binet*, 394, 141-155.

Bishop, M.-F., d'Enfert, R., Dorison C. & Kahn, P. (2011). Réformes du système éducatif et rénovation pédagogique dans les années 1960 : le cas des classes de transition. In R. d'Enfert & P. Kahn (Eds.), *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Cinquième République : les années 1960* (pp. 99-119). Grenoble : Presses Universitaires de Grenoble.

Borne, D. & Dubief, H. (1989). *Nouvelle histoire de la France contemporaine, tome 13 : La crise des années 1930*. Paris : Seuil.

Canac, H. (1955). Les problèmes dits « pratiques ». In F. Brachet, H. Canac & E. Delaunay (Eds.), *L'Enfant et le nombre. Éléments pour une pédagogie du calcul élémentaire* (pp. 11-118). Paris : Didier.

Caplat, G. (1997). *L'inspection générale de l'Instruction publique au XX^e^ siècle. Dictionnaire biographique des inspecteurs généraux et des inspecteurs de l'Académie de Paris, 1914-1939*. Paris : INRP/Economica.

Châtelet, A. & Condevaux, G. (1937). *Arithmétique. Applications. Usages du calcul dans la vie pratique. Cours supérieur. Classes de scolarité prolongée*. Paris : Bourrelier.

Condette, J.-F. (2009). *Albert Châtelet. La République par l'école (1883-1960)*. Arras : Artois Presse Université.

Condette, J.-F. (2011). Les loisirs dirigés dans les collèges et les lycées (1937-1939). *Histoire de l'éducation*, 129, 5-38.

Condevaux, G. (1938a). Le problème de la prolongation de la scolarité ». In G. Condevaux (Ed.), *La prolongation de la scolarité. Classe de fin d'études primaires et ateliers-écoles* (pp. 7-13). Paris : Bourrelier.

Condevaux, G. (1938b). L'enseignement scientifique. In G. Condevaux (Ed.), *La prolongation de la scolarité. Classe de fin d'études primaires et ateliers-écoles* (pp. 32-36).

Paris : Bourrelier.
CONDEVAUX, G. (1952). *J'apprends à résoudre les problèmes de la vie pratique*. Paris : Bourrelier.
CONDEVAUX, G. (1954). *J'apprends l'arithmétique et ses applications*. Paris : Bourrelier.
CONFÉRENCE INTERNATIONALE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE (1934). *Recommandation n° 1 concernant la scolarité obligatoire et sa prolongation.* http://www.ibe.unesco.org/policy/34_77_f/R01.pdf
D'ENFERT, R. (2015). *L'enseignement mathématique à l'école primaire, de la Révolution à nos jours. Textes officiels. Tome 2 : 1915-2000*. Limoges : Presses universitaires de Limoges.
DEPAEPE, M., SIMON, F. & VAN GORP, A. (2003). The Canonization of Ovide Decroly as a "Saint" of the New Education. *History of Education Quarterly*, 43(2), 224-249.
FÉRIN, R. (1936). Rapport fait au nom de la Commission de l'enseignement et des beaux-arts chargée d'examiner le projet de loi modifiant la loi du 28 mars 1882 relative à l'obligation de l'enseignement primaire, par M. Raymond Férin, député. *Journal officiel de la République française. Documents parlementaires - Chambre*, annexe n° 441, séance du 25 juin 1936, 1028-1029.
FOUCHET, C. (1963). Problèmes de l'Éducation nationale. *Journal officiel de la République française. Débats parlementaires – Assemblée nationale 67*, 20 juin 1963, 3550-3557.
FRANCK, R. (1952). *Arithmétique. Classe de fin d'études primaires. Préparation au certificat d'études*. Paris : Larousse.
GODIER, A. (1955). Le calcul en classe de fin d'études (Arithmétique – Système métrique – Géométrie). In A. Châtelet & M. Bompard (Eds.), *Enseignement de l'arithmétique* (pp. 177-190). Paris : Bourrelier.
GODIER, A. & DONNET, A. (1954). *L'arithmétique au certificat d'études, à l'usage : des classes de fin d'études, des centres d'apprentissage, des écoles pratiques*. Paris : Gedalge.
JOURNAL DES INSTITUTEURS (1937). La classe de scolarité prolongée. L'Union fédérale des combattants chez M. Jean Zay. *Journal des instituteurs*, 26, 378.
LAURIN, M. T. & DEGOUY, A. (1912). Les centres d'intérêts. *Revue de l'enseignement primaire et primaire supérieur*, 1, 1-3 [6 octobre 1912].
LE LAY, J. (1946). À propos des nouveaux horaires et programmes des CP, CE, CM des écoles primaires élémentaires. *L'Éducation nationale*, 18, 6-7 [21 mars 1946].
MARIJON, A. & LECONTE, T. (1930). Rapport sur les conférences pédagogiques de 1928 (L'arithmétique et la géométrie à l'école primaire). *L'Enseignement public. Revue pédagogique*, 93(1), 1-29.
MARIJON, A., MASSERON, R. & DELAUNAY, E. (1949). *Nouveau Cours d'arithmétique. Arithmétique, Géométrie, Cours supérieur, classe de fin d'études, certificat d'études primaires*. Paris : Hatier.
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1938a). Arrêté du 23 mars 1938 fixant les programmes du cours de fin d'études primaires élémentaires (13 à 14 ans). *Journal officiel de la République française*, 76, 3732-3734 [30 mars 1938].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1938b). Instructions du 20 septembre 1938. In Ministère de l'Éducation nationale (Ed.), *Plan d'études et programmes des écoles primaires élémentaires* (pp. 36-139). Paris : Vuibert.
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1946). Circulaire du 13 mai 1946 sur le certificat d'études primaires – Remarques sur la nature des épreuves écrites (ancien régime), session de 1945. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 26, 762-765 [25 mai 1946].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1947). Instructions du 30 octobre 1947 sur le certificat d'études primaires. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 31, 1109-1111 [6 novembre 1947].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1949). Circulaire du 16 avril 1949 sur l'organisation

du certificat d'études primaires. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale*, 21, 1399-1400 [28 avril 1949].
MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE (1964). Instructions du 18 septembre 1964 concernant les classes de sixième et de cinquième de transition. *Bulletin officiel de l'Éducation nationale* 36, 2178-2185 [1er octobre 1964].
ORY, P. (1994). *La belle illusion. Culture et politique sous le signe du Front populaire, 1935-1938*. Paris : Plon.
PROST, A. (2003). Les instructions de 1938. In A. Prost (Ed.), *Jean Zay et la gauche du radicalisme* (pp. 193-208). Paris : Presses de SciencesPo.
PUGIBET, C., ADAM, A. & GASON, P. (1943). *Arithmétique. Deuxième cycle 1re et 2e années. Certificat d'études primaires. Conforme aux programmes du 16 août 1941 et aux instructions du 5 mars 1942. Livre du maître*. Paris : A. Colin.
RADTKA, C. (à paraître). Renouveler l'enseignement des mathématiques au primaire dans les années 1930 en France : le *Cours d'Arithmétique Albert Châtelet* aux Éditions Bourrelier et son élaboration. In R. d'Enfert, M. Moyon & W. Valente (Eds.), *Les mathématiques à l'école élémentaire (1880-1970). Études France-Brésil*. Limoges : Presses universitaires de Limoges.
SECRÉTARIAT D'ÉTAT À L'ÉDUCATION NATIONALE ET À LA JEUNESSE (1941). Arrêté relatif au diplôme d'études primaires préparatoires et au certificat d'études primaires. *Journal officiel de l'État français*, 244, 3715-3716 [2 septembre 1941].
SIDO, X. (2011). *Les mathématiques dans l'enseignement professionnel. Genèse et évolution d'un enseignement, 1945-1985*. Thèse de doctorat, ENS Cachan.
SORRE, M. (1938). Sur le sens des programmes de la classe de scolarité prolongée. In G. Condevaux (Ed.), *La prolongation de la scolarité. Classe de fin d'études primaires et ateliers-écoles* (pp. 14-15). Paris : Bourrelier.
VUIBERT (1957). *Annales du certificat d'études primaires. Livre de l'élève. Année 1956*. Paris : Vuibert.
WAGNON, S. (2008). Ovide Decroly, un programme d'une « école dans la vie » aux accents leplaysiens ? *Le Télémaque*, 33, 129-138.
ZAY, J. (1936). Projet de loi modifiant la loi du 28 mars 1882 relative à l'obligation de l'enseignement primaire, présenté au nom de M. Albert Lebrun, président de la République française, par M. Jean Zay, ministre de l'Éducation nationale – Exposé des motifs. *Annales de la Chambre des députés. Documents parlementaires*, 869 [séance du 11 juin 1936].

ANNEXE

<table>
<tr><th></th><th>1923</th><th>1938</th><th>1945-1947</th></tr>
<tr><td>14 ans</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2">Classe de fin d’études</td><td>CEPE</td></tr>
<tr><td>13 ans</td><td rowspan="2">Classe de fin d’études</td></tr>
<tr><td>12 ans</td><td>Cours supérieur 2e année</td><td>Cours supérieur 2e année</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">CEPE</td><td rowspan="2">Cours supérieur</td></tr>
<tr><td>11 ans</td><td>Cours supérieur 1re année</td><td>Cours supérieur 1re année</td></tr>
<tr><td>10 ans</td><td colspan="3">Cours moyen 2e année</td></tr>
<tr><td>9 ans</td><td colspan="3">Cours moyen 1re année</td></tr>
<tr><td>8 ans</td><td colspan="3">Cours élémentaire 2e année</td></tr>
<tr><td>7 ans</td><td colspan="3">Cours élémentaire 1re année</td></tr>
<tr><td>6 ans</td><td colspan="3">Cours préparatoire</td></tr>
</table>

CEPE : certificat d’études primaires élémentaires

L’enseignement primaire élémentaire selon les plans d’études de 1923, 1938 et 1945-1947

TRADITIONS ET REFORMES DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES A L'EPOQUE DES « MATHEMATIQUES MODERNES » : LE CAS DE LA HONGRIE ET DE LA FRANCE

Katalin **GOSZTONYI**

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris-Diderot
& Institut Bolyai, Université de Szeged

katalin.gosztonyi@gmail.com

Résumé

L'œuvre de Tamás Varga est considéré en Hongrie comme un représentant particulièrement pertinent d'une tradition d'enseignement des mathématiques centrée sur la résolution des problèmes, gardant son actualité jusqu'à aujourd'hui. Dans ma thèse, je compare la réforme d'enseignement dirigée par Tamás Varga dans les années 1960 et 1970 à la réforme française dite des « mathématiques modernes ».

Je suis pour cette comparaison une approche double, à la fois historique et didactique. Après l'étude de leur contexte historique et de leur arrière-plan épistémologique, je caractérise les réformes à l'aide de divers outils théoriques de la didactique : la structure et le contenu de leur programme à l'aide de l'approche écologique et la notion de paradigmes, les pratiques pédagogiques envisagées par les concepteurs des réformes à l'aide de la Théorie des Situations Didactiques.

L'analyse des deux réformes révèle quelques points communs pouvant découler des échanges internationaux de l'époque, mais montre également des différences importantes. Je propose d'interpréter les deux réformes comme les réalisations, chaque fois particulièrement cohérentes, de deux épistémologies mathématiques différentes : « bourbakiste » dans le cas français et « heuristique » dans le cas hongrois, proche des conceptions de Pólya et de Lakatos.

La comparaison des projets d'enseignement de Brousseau, dans les années 1970, et de Varga en utilisant les termes de la TSD contribue à une meilleure caractérisation de la conception de Varga, mais amène aussi à poser des questions sur la transmissibilité des théories didactiques d'un contexte à l'autre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

D'ENFERT, R. & GISPERT, H. (2011). Une réforme à l'épreuve des réalités: le cas des mathématiques modernes au tournant des années 1970. *Histoire de l'Éducation*, *131*, 27–49.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

GOSZTONYI, K. (2015). *Traditions et réformes de l'enseignement des mathématiques à l'époque des « mathématiques modernes » : le cas de la Hongrie et de la France*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot - Paris 7 et Université de Szeged.

Les mathématiques dans l'enseignement professionnel
Genèse et évolution d'un enseignement
(1945-1985)
Perspectives historiques, enjeux didactiques

Xavier SIDO

Univ. Lille, EA 4354 – Théodile-CIREL – Centre Interuniversitaire de Recherche en Éducation de Lille, F59000 Lille, France

xavier.sido@gmail.com

Résumé
En 1945, avec la création de l'Enseignement Technique Court, qui marque la scolarisation d'une partie de la formation des ouvriers qualifiés, est élaboré et structuré un enseignement mathématique. Ma recherche s'intéresse à la genèse et aux évolutions de cet enseignement jusqu'en 1985, date de la mise en place du baccalauréat professionnel. L'étude des mouvements sur les trois pôles des références, des tâches et des visées contribue à discuter les cohérences qui s'installent au cours des quarante ans de cette histoire. Je montre alors qu'entre 1945 et 1985 l'enseignement mathématique dans le Technique Court est élaboré et évolue d'un enseignement de type Primaire, celui de 1945, et proche des disciplines professionnelles vers un enseignement de type Secondaire qui s'autonomise vis-à-vis de la formation professionnelle. La genèse et les évolutions de cet enseignement répondent alors aux transformations internes de la discipline et à trois critères constitutifs de l'identité du Technique Court : l'inscription de cette filière dans le système éducatif, les qualifications et leurs mutations et le public scolaire.

Mots clés
Mathématiques ; enseignement professionnel ; 1945-1985 ; histoire et didactique ; curriculum

Introduction

Ma recherche porte sur un enseignement mathématique particulier, celui dispensé dans la formation professionnelle scolarisée entre 1945 et 1985. 1945 est une borne « naturelle » car c'est à cette date qu'est élaboré et structuré un enseignement mathématique dans les centres d'apprentissage dont la mise en place marque la création de l'Enseignement Technique Court, actuellement désigné par enseignement professionnel. Les centres s'inscrivent dans la perspective d'un enseignement post-Primaire. Ils sont destinés à former des ouvriers et des employés qualifiés et préparent ainsi en 3 ans au Certificat d'Aptitude Professionnelle (CAP). C'est donc un Enseignement Technique Court, l'Enseignement Technique Long préparant globalement aux postes de technicien dans les collèges techniques (CT) ou les écoles nationales professionnelles (ENP). 1985 correspond à la création des lycées professionnels et

du Baccalauréat Professionnel. Ce diplôme permet de décloisonner la filière professionnelle en offrant aux élèves la possibilité d'une poursuite d'étude, suggérant ainsi l'inscription de l'enseignement mathématique dans une perspective curriculaire. Ainsi, plus précisément, ma recherche se focalise sur les enseignements de mathématiques prescrits pour les sections préparant au Certificat d'Aptitude Professionnelle et au Brevet d'Études Professionnelles (BEP), dans les centres d'apprentissage créés à la Libération et transformés ensuite en collèges d'enseignement technique (CET) en 1959, puis en lycées d'enseignement professionnel (LEP) en 1976.

À la fois l'objet et la période de cette étude marquent son originalité dans le champ des recherches en histoire de l'enseignement mathématique. En effet, dans ce domaine, les travaux s'intéressaient jusqu'alors essentiellement au Primaire et au Secondaire (*cf.* Belhoste, 1990, 1995 ; d'Enfert, 2003, 2006, 2010, 2011 ; Gispert, Hulin & Robi, 2007). La question de l'enseignement mathématique dans la formation professionnelle scolarisée dans la seconde moitié du 20^{e} siècle était de fait un domaine peu voire pas exploré par la recherche. Une remarque similaire peut être effectuée en didactique des sciences. Martinand, en 1985, puis Caillot, en 2002, soulignent en effet que les chercheurs universitaires en ce domaine ont peu investi l'enseignement professionnel, « *comme si cet enseignement n'existait pas* » (Caillot, 2002, p. 5). Soulignons toutefois que, dans le champ de l'Enseignement Technique, notre recherche, de type disciplinaire, n'est pas totalement isolée. Citons par exemple la thèse de Maryse Lopez (2015) sur l'enseignement du français dans la filière professionnelle (1930-1985) ou encore celle de Nathalie Auxire (2015) sur l'interdidactique de l'enseignement mathématique en lycée professionnel.

Un double enjeu didactique et historique

Je l'ai indiqué précédemment, ma préoccupation centrale porte sur l'enseignement prescrit, c'est-à-dire le curriculum prescrit et non pas le curriculum effectif ou réalisé. Il ne s'agit pas non plus d'une recherche centrée sur les apprentissages. Ainsi, mon questionnement concerne essentiellement les choix programmatiques, les contenus et leur organisation dans le contexte particulier de l'enseignement professionnel, ainsi que son opérationnalisation. Plus précisément, cette recherche vise à répondre à trois questions majeures.

La première est celle de l'élaboration et de la structuration d'un enseignement mathématique dans ce segment scolaire particulier. Au milieu des années 1950, sur quel modèle cet enseignement se structure-t-il ? S'agit-il de celui de l'enseignement Primaire avec ses classes de fin d'études et ses cours complémentaires ? De celui du Secondaire ? Et plus particulièrement du Secondaire Technique avec les collèges techniques et les écoles nationales professionnelles ? Ou alors, s'agit-il d'un modèle original du fait des particularités du public auquel il s'adresse et des spécificités du diplôme préparé dans les centres d'apprentissage ?

La deuxième question est celle des cohérences de cet enseignement dans ce segment scolaire qui s'installent au cours des quarante premières années de son histoire. C'est-à-dire des relations entre les visées de l'enseignement, ses références et les tâches des élèves (Lebeaume, 2000). Cette deuxième question focalise sur les évolutions internes de l'enseignement mathématique dans l'enseignement professionnel après sa mise en place. L'enjeu est alors d'identifier et de caractériser les transformations des contenus et des méthodes d'enseignement entre 1945 et 1985.

La troisième est celle des facteurs d'évolution de cet enseignement entre 1945 et 1985. La période étudiée est en effet celle de la construction du système éducatif unifié (Berthoin,

1959[1] ; Haby, 1975[2]), des dynamiques réformatrices de l'enseignement mathématique (notamment la réforme dite des mathématiques modernes) et de l'évolution des moyens de production. Il s'agit ainsi de décrire et d'interpréter les évolutions des mathématiques à enseigner dans l'enseignement professionnel.
Ces questions, rendent compte de l'ancrage de ma recherche à l'intersection des perspectives didactique, historique et curriculaire. En effet, elle contribue à l'histoire des disciplines scolaires et répond à des enjeux didactiques d'identification des principes constitutifs, de la structure et de l'organisation de cet enseignement particulier dans la formation professionnelle scolarisée. Cette double préoccupation répond alors à mon ambition de proposer un cadre d'analyse pour rendre intelligibles les évolutions d'autres enseignements ou disciplines dispensés dans l'Enseignement Technique Court à la fois sur la période de mon étude, mais aussi pour la période contemporaine.

Un cadre d'analyse spécifique pour un enseignement mathématique spécifique

La recherche en histoire de l'enseignement et en didactique propose des modèles pour interroger les disciplines scolaires et leur histoire. Ainsi, Chervel (1988) suggère d'examiner tous les enseignements, ou presque, au travers de l'étude de quatre caractéristiques qu'il affecte à ces derniers : un enseignement d'exposition, des batteries d'exercices, des pratiques d'incitation et un appareil docimologique. Develay (1993), dans une approche historique et épistémologique des disciplines scolaires, propose quant à lui « d'analyser tout savoir à enseigner avec les mêmes lunettes, quelles que soient les disciplines concernées » (Develay, 1993, p. 38). Il définit alors les éléments qui caractérisent les disciplines : une matrice disciplinaire identifiée par des objets d'enseignements, des tâches qu'elle permet d'effectuer, des connaissances déclaratives et des connaissances procédurales, qui constituent les savoirs et pratiques associés propres à la discipline. Pour l'analyse de l'évolution du travail manuel à l'école puis de la technologie au collège, Lebeaume (2000) ne reprend pas le modèle de Develay. Dans la continuité des travaux menés par Martinand (1983) sur la notion de référence, il construit un schéma de questionnement (*cf.* figure 1) afin d'identifier et de caractériser des figures historiques de ces enseignements. Il centre ce schéma de questionnement sur les situations d'enseignement-apprentissage prototypiques, mettant en relation trois pôles et en étudiant leur cohérence : visées, tâches et références. Les visées de l'enseignement fixent les tâches des élèves, lesquelles se définissent aussi en référence à des pratiques et réciproquement. La spécificité de la formation professionnelle scolarisée est d'être à l'articulation entre les mondes éducatif et économique. L'intérêt de l'investigation de l'enseignement mathématique inscrit dans l'enseignement professionnel réside dans la mise en évidence des évolutions liées à la fois aux changements des savoirs savants, mais aussi des pratiques sociotechniques. En raison de la prise directe sur les emplois et les activités techniques, la notion de référence introduite et discutée par Martinand (1983, 2003) est donc centrale dans notre analyse. Ainsi, dans notre recherche, nous utiliserons le schéma d'analyse élaboré par Lebeaume (2000) afin de saisir les mouvements sur les trois pôles des références, des tâches et des visées pour discuter les cohérences des situations prototypiques d'enseignement-apprentissage de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court entre 1945 et 1985.

1 Décret n°59-57 du 6 janvier 1959 : Réforme de l'enseignement public. JO du 7 janvier 1959, pp. 422-430.
2 Loi n°75-620 du 11 juillet 1975 relative à l'éducation. JO du 12 juillet 1972, pp. 7180-7182.

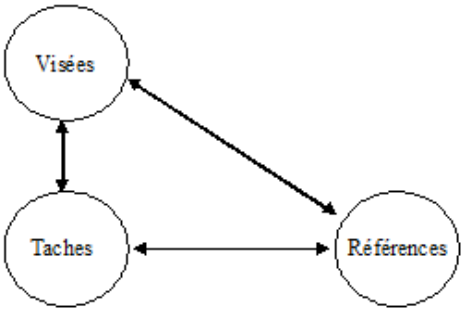


Figure 1 : schéma Visées, Tâches, Références (Lebeaume, 2000)

Une enquête historique

La méthodologie de ma recherche est celle de l'enquête historique. Les sources de l'analyse sont celles susceptibles de mettre au jour la structure et les principes organisateurs de cet enseignement et d'en discuter la cohérence au fil du temps. Sont alors valorisés les textes prescriptifs relatifs à l'enseignement qui fixent les contenus, les recommandations qui précisent ou discutent les orientations de l'enseignement et son opérationnalisation et les manuels qui explicitent les principes pédagogiques. En raison de la spécificité de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court qui est de devoir préparer les élèves à répondre à des exigences certificatives dont les acteurs du monde économique participent à l'élaboration, ces sources sont insuffisantes. En effet, en raison des enjeux de formation professionnelle et des relations État–Patronat, le second type de sources est constitué des programmes et épreuves d'examen. De plus, afin d'interpréter voire d'expliquer les évolutions de l'enseignement mathématique, il est aussi nécessaire d'étudier : les discours des acteurs qui contribuent à fixer et à discuter les choix programmatiques et les orientations de l'enseignement et participent à sa mise en œuvre, c'est-à-dire, les discours des politiques, des inspecteurs, des formateurs et des enseignants mais aussi des acteurs du monde économique et plus particulièrement le Patronat. À cet effet, l'étude porte aussi sur les archives relatives aux commissions ou groupes de travail en charge de l'élaboration des programmes d'enseignement et d'examen, et des publications plus générales relatives aux qualifications et à leurs évolutions, ainsi qu'aux missions et aux orientations du Technique Court.
Afin de répondre aux trois questions majeures de ma recherche et préciser les apports scientifiques de ce travail de thèse, je vais maintenant vous présenter les analyses que j'ai menées.

LA GENÈSE ET LES ÉVOLUTIONS DE L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE COURT

Trois périodes structurent cette histoire. La première s'étend de 1945[3], date la mise en place d'un enseignement mathématique dans la filière Technique Courte, à 1953 qui marque la parution de programmes et de recommandations[4] en vigueur jusqu'en 1967 pour cet enseignement dans ce segment scolaire. Quels sont alors les principes fondateurs de cet enseignement ? Quelles tensions suggèrent-ils ? Dans le contexte d'une formation qui prépare

3 Circulaire du 9 août 1945 : programmes. BOEN n°43 du 30 août 1945, pp. 3079-3080.
4 MEN (1958). *Centres d'apprentissage. Enseignement industriel. Garçon. Enseignements généraux*. Brochure 407 Pg/TE. Paris : institut pédagogique national (réédition de 1953)

au CAP, quelles influences ont les exigences certificatives sur l'enseignement mathématique ? Quelle opérationnalisation de l'enseignement pour un public issu des classes de fin d'études au profil particulier ?
La deuxième période, 1967-1972, est celle de l'évolution des profils d'entrée et de sortie dans l'Enseignement Technique Court. La question traitée est celle de l'impact sur l'enseignement mathématique de la modification des exigences de qualification, du niveau de recrutement et de la mise en place de poursuites d'études.
Enfin, la troisième période est celle de la transformation de l'enseignement mathématique dans la filière Technique Courte induite par les réformes du début et de la fin des années 1970. Dans le contexte de la rénovation des programmes de CAP et BEP, respectivement en 1972[5] et 1973[6], consécutivement à la réforme des mathématiques modernes, puis d'une modification de ceux de CAP en 1980 suite à la contre-réforme, quel est l'impact du bouleversement et de l'évolution globale de l'enseignement mathématique sur celui dispensé dans l'Enseignement Technique Court ? Quelle opérationnalisation de l'enseignement mathématique rénové dans une filière à vocation professionnelle pour un public orienté par l'échec ?

1945-1953, la genèse de l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court

En 1945, l'élaboration de l'enseignement mathématique dans les centres d'apprentissage répond à la fois à des enjeux utilitaires et éducatifs. Il s'agit de préparer l'élève à « sa vie d'homme, d'ouvrier et de Français » (Direction de l'enseignement technique, 1945, p. 12). En effet, en intégrant à la Libération ces établissements dans l'Enseignement Technique, l'État Français les destine à donner une éducation à la fois professionnelle et humaine à un public issu de l'enseignement Primaire qui n'avait pas accès jusque-là à une formation à la fin des études obligatoires. Ces élèves, âgés de 14 ans et issus majoritairement des classes de fin d'études, se caractérisent par une origine sociale plus modeste que ceux des autres établissements techniques. De plus, en raison de l'absence de sélection à l'entrée de la plupart des centres (Pelpel & Troger, 2001, p. 172), contrairement aux autres écoles techniques, ce sont des élèves d'un niveau inférieur en mathématiques qui intègrent ces établissements. L'enseignement mathématique, composé d'un enseignement du calcul et de la géométrie, s'inscrit dans les missions de la filière Technique Courte. Il présente alors deux facettes que je vais expliciter en présentant les deux situations d'enseignement-apprentissage auxquelles elles renvoient.

Un enseignement mathématique à deux facettes : concret et utilitaire / formateur de l'esprit

D'un côté, l'enseignement vise à transmettre des connaissances mathématiques utiles, pratiques et usuelles, c'est-à-dire dont l'usage est avéré dans la pratique professionnelle et la vie de tous les jours. En ce sens, la résolution de problèmes concrets occupe une place importante dans l'enseignement, prenant plus d'ampleur au fil des trois années d'études. Notons que l'étude de situations *réelles* est aussi l'occasion de donner des connaissances utiles au futur citoyen, par exemple sur les escomptes, les impôts ou les valeurs immobilières.
Tout d'abord, en référence aux problèmes courants et professionnels que l'élève est susceptible de rencontrer dans et hors le centre, le programme reprend celui des classes de fin d'études qui, pour les milieux économiques[7] et éducatifs (Auriac, 1946), contient les

5 Circulaire n°72-242 du 21 juin 1972 : enseignement des mathématiques dans les CET. BO n°26, p. 1785.
6 Circulaire n°73-283 du 6 juillet 1973 : enseignement des mathématiques dans les CET. BO n°28, p. 2180.
7 Compte rendu de la 9e réunion du 27 septembre 1950 de la CNPC de la métallurgie. CAC, 19810225-art 1,

connaissances indispensables que nul ne peut ignorer. Les élèves, dont peu possèdent le certificat d'études primaires, revoient ainsi les opérations sur les nombres entiers ou décimaux, le système métrique, les calculs de surface et de volume ou encore la règle de trois. En référence à un usage courant des mathématiques, l'étude de l'arithmétique est préférée à celle de l'algèbre qui est absente des programmes. Ensuite, ce programme est complété par des connaissances utiles à la résolution de nombreux problèmes professionnels comme les calculs de PGCD et PPCM ou la trigonométrie. Enfin, les premières instructions des centres laissent explicitement la possibilité aux professeurs d'inclure dans leur enseignement des connaissances plus spécifiques nécessaires à la pratique professionnelle comme les additions type banque de France pour le CAP Comptabilité ou la géométrie descriptive pour la formation de CAP traceur de coque.

Si l'enseignement mathématique vise à transmettre des connaissances pratiques, il ne doit pas pour autant s'y réduire. L'enseignement ne doit pas consister en un catalogue de recettes, mais, pour citer un inspecteur de l'Enseignement Technique, procurer « des connaissances d'une nécessité moins évidente qui assurent une meilleure compréhension de la pratique professionnelle » (Bataillon, 1954, p. 252).

Ainsi, de l'autre côté, il s'agit de donner aux élèves à la fois une culture désintéressée et des connaissances et une formation de l'esprit qui favoriseront leur intégration dans la société et la pratique intelligente de leur futur métier. D'une part, l'enseignement ne doit pas faire uniquement référence au métier, mais aussi à l'histoire, l'architecture ou encore les arts. D'autre part, comme le précisent les Instructions (Direction de l'enseignement technique, 1945, p. 41), il s'agit d'enseigner le calcul et la géométrie « sans jamais négliger les nécessités du raisonnement ». De façon assez classique, les prescripteurs considèrent que la géométrie contribue de façon privilégiée à la formation de l'esprit et les programmes indiquent que c'est principalement au travers de son enseignement que les élèves doivent acquérir les bases du raisonnement. Par exemple, les manuels et les leçons-types publiées dans les revues para-officielles mettent en avant l'usage de la démonstration dans l'étude des cas d'égalité des triangles semblables.

Une pédagogie concrète et active pour articuler les deux facettes de l'enseignement

Dans les textes prescriptifs, l'articulation entre ces deux facettes repose sur la démarche pédagogique préconisée pour l'enseignement mathématique. Au moment de la mise en place de l'enseignement, inspecteurs, formateurs et professeurs des centres s'opposent aux méthodes traditionnelles, qu'ils perçoivent comme expositives, dogmatiques, et fondées sur l'abstraction. Ils militent en faveur d'une pédagogie concrète (partant du concret pour revenir au concret) fondée sur l'activité des élèves et leurs centres d'intérêts. D'une part, il s'agit d'éviter une perte de sens des notions mathématiques étudiées pour un public des centres qui se caractériserait par un goût pour le concret et une curiosité naturelle pour tout ce qui touche au métier. D'autre part, en référence à la psychologie et la psychopédagogie, il s'agit de proposer une démarche qui respecte les stades de développement des élèves. Cette démarche pédagogique préconisée articule deux temps (Matray, 1952). Tout d'abord, il s'agit à partir d'observations, de manipulations et d'expérimentations sur une multitude de problèmes concrets d'amener les élèves à énoncer une propriété mathématique. Si cette démarche intuitive et inductive peut à certains égards rappeler une pédagogie inspirée des classes de fin d'études (d'Enfert, 2010), elle vise à préparer le passage à l'abstraction. Ainsi, dans un second temps, les élèves sont amenés, en mettant en œuvre une démarche déductive, à démontrer la propriété mathématique constatée. Prendre pour point de départ de l'enseignement le concret ne signifie donc pas qu'il faille se limiter à l'observation, la manipulation et

CNPC de la Métallurgie.

l'expérimentation, mais plutôt attirer l'attention des élèves sur des problèmes dont ils peuvent saisir pleinement le sens, qui les intéressent et qui doivent amener à une solution rationnelle, une explication mathématique.
Deux éléments participent à favoriser la mise en place d'un enseignement mathématique actif et concret : d'une part, la défense de l'idée que le métier est porteur de valeurs culturelles et, d'autre part, les liens qu'entretiennent les cadres de l'enseignement technique avec le mouvement des pédagogies nouvelles comme Roger Gal, secrétaire général en 1947 du Groupe Français d'Éducation Nouvelle ou Fernand Canonge formateur et membre de la commission Langevin-Wallon.

Un enseignement en tension

L'enseignement mathématique prescrit en CAP se caractérise par une séparation entre les situations d'enseignement-apprentissage à finalité utilitaire et celles visant la formation de l'esprit. Dans le cadre d'une formation professionnelle destinée à un public d'un faible niveau mathématique, cette configuration de l'enseignement crée des tensions à la fois sur les objectifs (utilitaire / formateur de l'esprit), les références (pratique avérée des mathématiques / théorie) et les tâches des élèves (résolution de problèmes concrets / démonstration). Ces tensions sont exacerbées par deux éléments structurants de l'identité de cet enseignement dans la filière Technique Courte : les exigences certificatives et les spécificités du public (Lopez & Sido, 2015).
En effet, les épreuves de mathématiques au CAP s'inscrivent dans les enjeux professionnels de ce diplôme et l'examen vise à attester la capacité des élèves à mettre en œuvre une démarche professionnelle dans laquelle ils prendraient appui sur les mathématiques pour résoudre un problème d'atelier comme le ferait un professionnel.

> *Une machine à percer tourne à 600 tr/mn. Quel sera le diamètre maximum des trous que l'on pourra percer sur cette machine si l'on ne veut pas dépasser une vitesse de coupe de 35 m/mn ?* (CAP Tourneur, 1958)

Les recommandations qui accompagnent les règlements d'examen incitent alors les professeurs à délaisser les démonstrations abstraites au profit de la maîtrise des techniques mathématiques utiles et avérées dans la vie courante ou la pratique professionnelle.

> On évitera avec soin les démonstrations abstraites pour chercher, en application des théorèmes usuels, la solution de problèmes intéressant le métier. (CAP Cuir industriel, sellerie, équipement militaire, 1957)

À la fois, la nécessité de former des employés qualifiés pour reconstruire le pays, le poids de l'examen dans le système éducatif (Bourdieu & Passeron, 1968) et le recours des maîtres aux problèmes-types CAP pour entraîner les élèves à l'examen, contribuent au pilotage, au moins en partie, de l'enseignement par les exigences certificatives. Fortement attachés aux finalités éducatives des centres, les professeurs sont confrontés au problème d'opérationnaliser un enseignement mathématique qui soit à la fois utilitaire et éducatif mais dont la visée centrale serait la préparation des élèves à un examen.
En référence au mouvement de la pédagogie nouvelle, les cadres de l'Enseignement Technique, les formateurs, les inspecteurs et les professeurs des centres insistent sur la nécessité d'adapter l'enseignement aux caractéristiques sociales et psychologiques des élèves. Pour Paul le Rolland, premier directeur de l'Enseignement Technique, la pédagogie dans les centres d'apprentissage est commandée par une donnée générale :

> Leurs aptitudes manuelles sont plus grandes que leur capacité d'abstraction. Ils sont naturellement plus portés vers les réalisations concrètes que vers les spéculations intellectuelles. [De ceci] découle une certaine méthode pédagogique. (Le Rolland cité par Avenir, 1959, p. 137)

Cette citation illustre les discours principalement portés par les inspecteurs et les professeurs des centres qui perçoivent les élèves comme « incapables d'abstraction » (Direction de l'enseignement technique, 1945, p. 13), possédant une intelligence « concrète » (Cercelet, 1949, p. 52), et « d'âge intellectuel très faible ou encore retardés » (Alphand, 1946, p. 726). Dans les revues, un glissement de sens peut être constaté dans les articles directement liés à l'opérationnalisation de l'enseignement comme les leçons-types : le concret ne fait plus seulement référence au point de départ de la démarche pédagogique, à ce qui fait sens et intéresse les élèves, mais aussi à leur tournure d'esprit. Ainsi, dans la perspective d'adapter l'enseignement aux élèves et en référence à leurs difficultés présumées à comprendre les choses abstraites, mais aussi à leur faible niveau scolaire et leur profil social, les recommandations engagent les maîtres des centres à mener un enseignement efficace, c'est-à-dire axé sur l'acquisition et l'utilisation d'outils mathématiques utiles pour la formation professionnelle et la préparation des élèves au CAP.
C'est donc un enseignement mathématique éminemment pratique et utilitaire qui est mis en place durant cette période dans les sections préparant au CAP. Proche du modèle de l'enseignement dispensé dans le Primaire élémentaire, il prépare les élèves à la vie courante et professionnelle. Il s'en distingue toutefois par les liens qu'il entretient avec les enseignements professionnels.

1967-1972, l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court et les évolutions des profils d'entrée et de sortie

Passé ce moment fondateur, à partir du milieu des années 1960, les conditions dans lesquelles a été élaboré l'enseignement mathématique pour la formation des employés qualifiés changent. Les années 1960 sont en effet les témoins de réformes de structuration d'un système éducatif unifié et de prolongations de la scolarité (Berthoin, 1959 ; Fouchet-Capelle, 1963-1966[8]). L'orientation dans les collèges d'enseignement technique (CET), anciennement centre d'apprentissage, s'effectue à partir de 1967 à l'issue des classes de troisième. De plus, à partir de 1969, des classes de première adaptation permettant aux élèves du Technique Court de rejoindre le Technique Long sont mises en place. Ces années sont aussi celles d'une mutation des moyens de production marquant un passage des qualifications de la monovalence pratique à la polyvalence technique et l'adaptabilité professionnelle. L'évolution de l'enseignement mathématique dans la filière professionnelle est alors le fruit d'enjeux spécifiques liés aux transformations des exigences certificatives et aux conditions de recrutement des élèves de l'Enseignement Technique Court. Cette évolution s'opère au moment de la création d'un nouveau diplôme, le brevet d'études professionnelles (BEP). Elle s'opérationnalise par le biais des programmes d'examens et des manuels, l'écriture des programmes d'enseignement étant repoussée en vue de la réforme des mathématiques modernes qui va se mettre en place au cours de la prochaine décennie.

Harmoniser l'enseignement mathématique avec les évolutions de la culture technique

Le BEP, diplôme plus polyvalent que le CAP vise à former un employé qualifié capable d'évoluer avec les techniques, de s'adapter à des types d'industries différents et de bénéficier de promotion ou d'un reclassement ultérieur. L'analyse technique, fondée sur l'étude

8 Décret n°63-793 du 3 Août 1963 : modification de certaines dispositions du décret n°59-57 du 6 janvier 1959 portant réforme de l'enseignement public. JO du 4 août 1963, p. 7264.

méthodique des principes technologiques et le raisonnement scientifique remplacent l'apprentissage empirique du geste professionnel. L'étude des programmes des disciplines professionnelles montre alors qu'en BEP, l'apprentissage du métier repose sur l'acquisition d'une culture technique, et par incidence mathématique, plus théorique et plus large que celle nécessaire dans le cadre du CAP. En BEP, l'objectif n'est plus d'enseigner un corpus de connaissances mathématiques circonscrites à une utilisation particulière, mais de donner aux élèves des outils suffisamment généraux et sophistiqués pour répondre aux besoins des disciplines professionnelles et susceptibles d'une multitude d'applications. Ceci se traduit par l'apparition de nouveaux contenus nécessaires à la modélisation des situations techniques dans les programmes d'examen comme l'algèbre ou la notion de nombre dérivé. L'enseignement s'oriente alors vers un cadre plus réflexif. Dans les manuels, l'approche théorique des connaissances et les démonstrations occupent une place importante dans les différents chapitres. Il s'agit d'apporter aux élèves les éléments de raisonnement et de logique nécessaires aux étapes d'analyse et de synthèse techniques et au processus de mathématisation. Au BEP, les épreuves de mathématiques jugent alors le candidat d'un double point de vue : application du calcul à la technique professionnelle et formation de l'esprit. Afin d'illustrer notre propos, nous reportons ici un extrait de l'épreuve de mathématique proposée au BEP électromécanicien en 1972.

> Un circuit est constitué d'un potentiomètre et d'une résistance fixe. Il est alimenté sous une intensité constante I = 4 A. La résistance fixe est égale à la résistance totale du potentiomètre : R. On pose $x = R_1/R$ (fraction utilisée du potentiomètre).
>
> a) Calculer et représenter graphiquement en fonction de x le courant i traversant la résistance fixe. La courbe représentative sera tracée pour x variant de moins l'infini à plus l'infini. On indiquera la portion de courbe correspondant à une réalité physique. On justifiera ce choix.
>
> b) Calculer en fonction de x la puissance P dissipée dans la résistance fixe. Application numérique : calculer P pour R = 100 Ω et x = 1 puis pour R = 50 Ω et x = 1/4.
>
> (BEP électromécanicien de Nantes, 1972)

Les recommandations qui accompagnent les programmes d'examens précisent les critères de notation pour l'épreuve de mathématiques. Ils portent sur trois éléments. Le premier est le contrôle de l'acquisition par les candidats des connaissances du programme d'examen et de leur « aptitude à conduire avec sureté des calculs exploitables » (Installations sanitaires et thermiques, 1971, p. 12). Les élèves sont alors jugés sur l'exactitude, l'expression et la présentation pratique des réponses. Par exemple, ils seront notés sur les calculs effectués aux questions a et b ainsi que sur la représentation graphique. Durant les examens, les élèves doivent aussi montrer qu'ils sont capables de « passer d'une opération mathématique à sa signification physique ou technologique » et qu'ils connaissent « le sens réel des résultats obtenus et leurs limites de validité » (*Ibid.*). Il s'agit ici de vérifier si les candidats, après avoir mené la résolution du problème, sont capables de recontextualiser les réponses que leur a apportées l'étude mathématique. C'est, par exemple, l'objet de la dernière partie de la question a, et l'on peut supposer que des points seront retirés si les élèves n'indiquent pas dans leur réponse l'unité de la puissance lors de la dernière question. Enfin, les critères de notation portent aussi sur l'aptitude des candidats « à raisonner clairement en se défiant des automatismes de pensée et des opérations de mémoire » (Cuirs et peaux, 1971, p. 13). Il s'agit ici de vérifier qu'ils sont capables, d'une part, de décontextualiser le problème technique pour le ramener à un exercice de mathématiques, et d'autre part, qu'ils savent faire la synthèse de leurs connaissances pour le résoudre. Dans l'exemple proposé, ils doivent poser une équation, se ramener à partir de celle-ci à la fonction i(x). Ils sont alors amenés à dresser un tableau de valeurs et calculer les limites de la fonction en plus et moins l'infini.

Ainsi, l'examen évalue davantage la capacité des candidats à mathématiser une situation et à

la résoudre à l'aide des outils appropriés que l'utilisation de recettes de calcul. L'élève doit désormais être capable de décontextualiser le problème auquel il est confronté afin de le ramener à un exercice de mathématique, plus général et commun à un ensemble de situations concrètes, qu'il saura résoudre grâce à une formation théorique appropriée.

La mise en cohérence de l'enseignement mathématique avec le parcours scolaire des élèves

Les premiers projets de programme d'examen de mathématique, établis en concertation entre professionnels et inspection technique, sont repris par l'inspection de mathématiques. Son intervention vise à mettre en continuité l'enseignement mathématique dispensé dans les collèges d'enseignement technique avec ceux des classes de troisième et de première d'adaptation. Ils rappellent ainsi dans les textes prescriptifs des différentes spécialités de BEP, la nécessité d'harmoniser l'enseignement avec celui reçu par les élèves avant leur entrée au CET. En outre, ils complètent les programmes d'examen avec les connaissances nécessaires à la poursuite d'étude, à l'école ou en formation continue, par exemple l'étude des fonctions carré et inverse, la géométrie dans l'espace ou encore les statistiques. Ils s'appuient pour cela sur les programmes de mathématique des secondes techniques.
Les nouvelles exigences en matière de culture mathématique et les contraintes liées au nouveau mode de recrutement et à la poursuite d'étude marquent un changement sur les pôles références et tâches de l'enseignement mathématique dans les sections préparant au BEP. Il prend désormais modèle sur celui dispensé dans le second cycle du secondaire, tant sur le plan des contenus que des méthodes. Si les liens que doit entretenir l'enseignement mathématique avec la formation professionnelle sont toujours mis en avant, il doit aussi répondre à des objectifs qui lui sont propres : la maîtrise de l'outil mathématique et l'apprentissage du processus de mathématisation. Cette évolution conduit à une autonomisation relative de l'enseignement mathématique vis-à-vis des exigences de la formation professionnelle.

1972-1985, l'impact des réformes mathématiques sur l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court

Cette période est marquée par une permanence des profils de sortie dans l'Enseignement Technique Court, l'achèvement du processus d'unification du système éducatif avec la création du collège unique (Haby, 1975)[9] et un bouleversement de l'esprit de l'enseignement mathématique, c'est-à-dire la façon dont on apprend et on enseigne les mathématiques. En effet, à la fin des années soixante et au début des années soixante-dix l'enseignement mathématique est l'objet d'une importante réforme, dite des « mathématiques modernes », qui traverse l'ensemble du système éducatif. Dans le contexte d'une modernisation des sciences et des techniques dans l'industrie et dans la société, cette réforme vise à promouvoir les mathématiques contemporaines qui, selon les réformateurs, grâce à l'efficacité de la notion de structure sont devenues un langage universel, indispensable pour appréhender le réel (Bkouche, 1996). Fortement influencés par les travaux de Piaget et Bourbaki, les promoteurs de la réforme inscrivent l'enseignement dans l'univers structuraliste des mathématiques. Il s'agit, au travers de l'activité des élèves, de les amener à élaborer eux-mêmes les connaissances mathématiques à partir des fondements ensemblistes. Dès sa mise en place, cette réforme est l'objet d'une certaine défiance de la part des professeurs de mathématiques et de certains mathématiciens. Dans une période marquée par la mise en place du collège unique, les critiques dont cette réforme est l'objet conduisent à ce qui est communément appelé la contre-réforme des mathématiques modernes. Elle s'appuie sur une nouvelle conception des mathématiques, différente de celle portée par les zélateurs de la réforme des

9 Loi n°75-620 du 11 juillet 1975 relative à l'éducation. JO du 12 juillet 1975, pp. 7180-7182.

mathématiques modernes. Les mathématiques ne sont plus perçues comme un univers de structures mais relevant d'une activité humaine. En ce sens, leur finalité est de résoudre des problèmes issus des mathématiques ou d'autres domaines scientifiques (Artigue, 1996). Dans l'enseignement, la place de l'algèbre et des théories ensemblistes est remise en cause. En réponse à la critique d'une mathématique sélective car trop abstraite, les aspects théoriques sont minimisés. L'objectif est l'appropriation progressive des principes et concepts mathématiques au travers leur fonctionnement au sein de problèmes.
Dans ce contexte, entre 1972 et 1985, les évolutions de l'enseignement mathématique dans la filière Technique Courte ne répondent plus à une transformation des qualifications et des exigences certificatives, mais à une mutation de l'enseignement mathématique dans le secondaire, et plus généralement de la culture mathématique que doit posséder tout citoyen.

Inscrire l'enseignement mathématique dans une culture moderne

Si la commission de réforme de l'enseignement mathématique, mise en place en 1967 et menée par le mathématicien Lichnerowicz, ambitionne de proposer à tous les élèves un accès aux mathématiques modernes, elle ne se préoccupe pas de la rénovation de l'enseignement dans les filières Techniques Courtes. La question de l'application de la réforme pour le Technique Court n'a été soulevée qu'une seule fois lors de la séance du 22 avril 1967 par un des membres de la commission en disant « faut-il enseigner des mathématiques désuètes à des enfants moins intelligents ? »[10].
Les programmes de mathématiques pour les CET sont en fait élaborés hors commission lors de deux séminaires qui se sont tenus en Décembre 1970 et Février 1971 par des inspecteurs de l'Enseignement Technique et formateurs des enseignants de mathématiques et d'autres disciplines. Ces séminaires se font avec l'accord de Lichnerowicz et les programmes élaborés reçoivent son assentiment. Définies comme « polyconcrètes » (Lichnerowicz, cité par Trabal, 1996, p. 186), c'est-à-dire capables d'une multitude d'application, par Lichnérowciz ces mathématiques modernes rencontrent l'adhésion des patrons des grandes industries. Ils y voient la possibilité de former les futurs ingénieurs aux nouvelles techniques et de les préparer à leurs évolutions. Les dirigeants des petites entreprises et les artisans sont quant à eux plus circonspects. Les mathématiques modernes, caractérisées par l'abstraction, la formalisation et l'axiomatisation détourneraient selon eux les élèves de l'apprentissage des procédés de calculs pratiques, c'est-à-dire utilisés lors de l'exercice de leur profession. Ils regrettent par exemple la disparition de la règle de trois. Malgré ces réserves, les programmes qui permettent selon les inspecteurs de « munir les élèves de moyens qui leur permettraient par la suite d'utiliser des techniques professionnelles »[11] sont adoptés et de nouveaux textes pour les sections préparant au CAP et au BEP paraissent respectivement en 1972 et 1973 consécutivement à la mise en place de nouveaux programmes dans les classes de cinquième et troisième des collèges[12].
Ces réticences montrent que la rénovation des programmes de CAP et BEP ne s'inscrit pas dans un réel enjeu économique. En fait, elle répond à la double nécessité de mettre les élèves en contact avec une culture mathématique actuelle et d'harmoniser l'enseignement avec celui qu'ils ont reçu au collège afin de ne pas créer de rupture. La rénovation des programmes de CAP en 1980[13] dans le cadre de la contre-réforme répond aux mêmes enjeux. Les deux

10 CAC, 19870205. Archives de la commission Lichnerowicz.
11 CAC, 19870547-Art 8. Séance de la commission de l'enseignement général et technologique. Examen des projets de programmes concernant les enseignements généraux dispensés dans les CET (CAP et BEP). PV du 14 mars 1973.
12 Circulaire n° 71-370 : programme de mathématiques de 4e et 3e. BO n° 45 du 22 novembre 1971, p. 2867.
13 Arrêté du 13 novembre 1980 : programmes d'enseignement général applicables dans les lycées d'enseignement professionnel et établissements assimilés (sections de préparation aux certificats d'aptitude

premières années de préparation au CAP sont transformées en classes de 4e et 3e préparatoires intégrées au collège unique. Les transformations programmatiques et pédagogiques pour l'enseignement mathématique en CAP accompagnent celles des classes de 5e, 4e et 3e générales[14] et répondent alors à la volonté d'actualiser la culture mathématique dispensée dans les collèges d'enseignement technique en fonction des évolutions de la discipline et de l'esprit de l'enseignement. Elles sont ainsi une conséquence à la fois des enjeux de démocratisation de l'enseignement et des transformations qui affectent les programmes de mathématique du collège.

Une opérationnalisation fondée sur le processus de mathématisation

Ces transformations disciplinaires, structurelles et organisationnelles s'accompagnent d'une évolution du recrutement des professeurs de mathématique dans le Technique Court (Tanguy, Poloni & Aghulon, 1987). Le corps des professeurs d'enseignement général (PEG), majoritairement constitué d'instituteur durant les premières années des centres, intègre peu à peu entre 1956 et 1975 des enseignants qui sont passés par l'université, sans toutefois avoir obtenu de licence. À partir de la moitié des années 1970, les trois quarts des PEG des LEP ont une licence. Cette élévation du niveau de recrutement des professeurs de mathématique du Technique Court accompagne, et rend possible dans une certaine mesure la secondarisation de cette discipline. À partir de 1973, corrélativement aux transformations de l'enseignement par la réforme des mathématiques modernes et à l'élévation du niveau de recrutement des professeurs de mathématiques des collèges d'enseignement technique, les travaux issus de praticiens se multiplient. Ces acteurs rappellent la nécessité de mener un enseignement adapté au profil des élèves de ce segment scolaire, qu'ils perçoivent comme « concrets » et en froid avec les mathématiques, et aux nécessités de la formation professionnelle. Afin de minimiser les tensions suscitées par la mise en place d'un enseignement abstrait où les applications sont quasiment absentes, ils revendiquent un enseignement centré sur l'apprentissage du processus de mathématisation et l'étude de situations concrètes, empruntées à la pratique professionnelle.

En conséquence de ces différents enjeux, il apparait que les changements qui affectent l'enseignement mathématique dans la filière Technique Courte au début des années 1970 et 1980 sont le fruit d'un effet domino lié aux transformations de l'enseignement dans les autres classes du second degré. Dans les CET, l'enseignement prend alors comme référence les besoins induits par une culture mathématique détachée de tout contexte productif et non plus sur ceux de la formation professionnelle. L'objectif est désormais de donner aux élèves des connaissances mathématiques ressources, susceptibles d'une multitude d'applications et dont la fonction est d'éclairer l'utilisation qu'ils peuvent faire des mathématiques lors de la résolution de problèmes. Les textes prescriptifs et les manuels sont alors marqués par une faible proportion de références au domaine professionnel et à une utilisation avérée des mathématiques dans le métier. L'ensemble de ces facteurs indique la poursuite du processus de secondarisation et d'autonomisation de l'enseignement, engagé lors de la mise en place des BEP.

professionnelle). BO n°43 bis, novembre 1980, p. 3469. Annexe III de la note de service n°81-298 du 3 août 1981 : instructions pédagogiques relatives aux programmes d'enseignement général applicables dans les LEP (section de préparation au CAP). BO n° 32 bis, août 1981, p. 2571

14 Circulaire n°77-157 du 29 avril 1977 : Enseignement des mathématiques dans les collèges. BO n°22 du 9 juin 1977, p. 1568.

RÉPONSES AUX QUESTIONS DE RECHERCHE

Ainsi menée, l'analyse de mon corpus me permet de répondre à mes trois questions de recherches et de préciser les apports scientifiques de mon travail.

Un modèle spécifique

Ainsi, en réponse à la première question portant sur l'élaboration et la structuration d'un enseignement mathématique dans ce segment scolaire particulier, j'ai montré qu'en 1945, dans l'Enseignement Technique Court nouvellement créé, l'enseignement mathématique se structure selon un modèle original proche de celui de l'enseignement primaire, à la fois dans ses méthodes et dans ses contenus, mais spécifique par les liens qu'il entretient avec les enseignements professionnels et la certification. À mon sens, la mise au jour d'un modèle spécifique pour l'enseignement mathématique dans le Technique Court contribue à repenser pour les recherches portant sur l'enseignement mathématique la dualité scolaire (Primaire, Secondaire) en une triade scolaire (Primaire, Secondaire et Technique). C'est-à-dire réexaminer les propositions pour l'enseignement mathématique dans la seconde moitié du vingtième siècle, non plus seulement en opposant ou en articulant Primaire et Secondaire, mais aussi en articulant Primaire et Technique Court et Secondaire et Technique Court. En didactique ce résultat participe si ce n'est à une meilleure appréhension, du moins à considérer et à interroger le système des enseignements de mathématique, à la fois d'un point de vue historique, mais aussi actuel.

Un processus de secondarisation et d'autonomisation vis-à-vis des exigences professionnelles

En réponse à la deuxième question qui portait sur les cohérences de cet enseignement, les mouvements des pôles des visées, des tâches et des références de l'enseignement au cours de la période étudiée indiquent un processus d'évolution, d'un enseignement de type Primaire, celui de 1945, spécifique à cause des enjeux de formation professionnelle auxquels cet enseignement doit répondre, à un enseignement de type secondaire, éloigné des exigences des enseignements professionnels. En effet, en 1945 les tâches des élèves, fondées sur la résolution de problèmes concrets, sont fixées en référence à une pratique avérée des mathématiques des ouvriers et répondent à la visée d'un enseignement utilitaire qui prépare à la vie courante et professionnelle. En 1967, les mutations des pratiques sociotechniques, et par incidence de la culture technique à dispenser dans la filière professionnelle, induisent un changement de référence dans l'enseignement mathématique. L'enseignement ne peut plus être défini selon un gamme de problèmes professionnels spécifiques à la spécialité préparée, mais doit préparer les élèves à résoudre des problèmes techniques variés. L'inscription de l'enseignement dans un cadre plus réflexif, moins procédural, et l'apprentissage du processus de mathématisation répondent à l'objectif de former des ouvriers polyvalents susceptibles de se reclasser. À partir des années 1970, les réformes de l'enseignement au niveau global conduisent à un changement de référence de la culture mathématique à transmettre dans la filière professionnelle. Il ne s'agit plus dans l'enseignement de valoriser une culture mathématique professionnelle fondée sur la pratique mathématique de l'ouvrier qualifié, mais une culture mathématique détachée des contingences professionnelles, fondée sur l'activité du mathématicien pour la résolution de problème.

Trois points cruciaux pour l'étude de la genèse et des évolutions de l'enseignement

Enfin, en réponse à la troisième question de ma recherche, qui portait sur la détermination des facteurs de l'évolution de cet enseignement, la mise au jour de ce processus de transformation me permet d'élaborer un cadre d'analyse pour l'étude de l'enseignement mathématique dans l'enseignement professionnel. Ce cadre d'analyse, que je vais présenter maintenant (c*f*. figure 2), s'appuie sur l'étude de trois points : Les élèves, les pratiques sociotechniques et les mathématiques, sous-entendu ici les mathématiques savantes et la façon dont on enseigne et on apprend les mathématiques au niveau global. À notre sens, ce cadre d'analyse, non spécifique aux mathématiques, est susceptible d'être utilisé dans des travaux visant à rendre intelligible les évolutions d'autres enseignements de la filière professionnelle, par exemple les sciences physiques ou le français.
Sur le schéma, le cercle en noir représente l'enseignement mathématique dans l'Enseignement Technique Court, il s'agit donc d'interroger :

- l'adaptation des méthodes pédagogiques aux spécificités du public scolaire auquel est destiné l'enseignement mathématique (Zone 1)
- l'influence des exigences certificatives et de formation professionnelle sur l'enseignement mathématique (Zone 3)
- l'inscription de l'enseignement dans les évolutions globales des mathématiques (Zone 5)

Mais il s'agit aussi de questionner plus finement :

- l'adaptation de l'enseignement au devenir professionnel des élèves et à leur profil d'entrée (Zone 2)
- l'adaptation des contenus d'enseignement aux exigences de certification et de formation (par exemple l'inscription au programme des connaissances spécifiques au domaine d'activités du diplôme préparé, mais aussi la question des contributions des autres disciplines à la formation mathématique des élèves) (zone 4)
- la mise en cohérence de l'enseignement avec le passé et le devenir scolaires des élèves, c'est-à-dire avec la formation mathématique que les élèves ont reçue avant d'intégrer l'Enseignement Technique Court et celle qu'ils sont susceptibles de recevoir à la fin de leurs études (Zone 6)

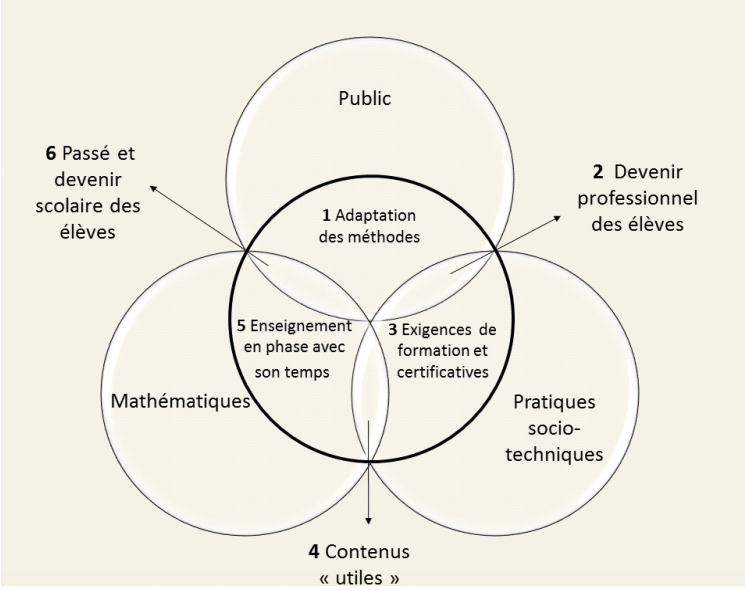


Figure 2 : Cadre d'analyse de l'enseignement mathématique dans l'enseignement professionnel

Pour conclure cette communication, je reprendrais quelques mots de l'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR) de Marie France Bishop : « cette approche historique est inséparable de la didactique puisqu'elle lui permet de mettre en contexte les différents modèles et configurations disciplinaires » (Bishop, 2013, p. 8) en contribuant notamment à une réflexion sur les spécificités de cet enseignement dans cette filière (notamment en termes de fonction, d'épistémologie des savoirs enseignés etc.) et à la prise en charge de ces spécificités dans les recherches didactiques, ce qui à mon sens reste encore largement à explorer.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALPHAND, J. (1946). Arithmétique. *Apprentissage*, 9, 726.

ARTIGUE, M. (1996). Réformes et contre-réforme dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (Eds.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (pp. 197-217). Paris : Vuibert.

AURIAC, O. (1946). Culture et travail manuel. *Technique, Art, Science*, 2, 5–6.

AUXIRE, N. (2015). *Interdidactique de l'enseignement des mathématiques dans trois disciplines de la filière productique usinage en lycée professionnel*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis.

AVENIR (1959). Les carrières de l'Enseignement Technique. *Avenir*, 103/104, 137–154.

BATAILLON, R. (1954). Le but et l'esprit des enseignements scientifiques. In Ministère de l'Éducation Nationale*, Encyclopédie générale de l'éducation française* (pp. 250-255). Paris : Rombaldi.

BELHOSTE, B. (1990). L'enseignement secondaire français et les sciences au début du XXe siècle. La réforme de 1902 des plans d'étude et des programmes. *Revue d'histoire des sciences,* 43, 371–400.

BELHOSTE, B. (1995). *Les sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914)*. Paris : INRP et Économica.

BISHOP, M-F. (2013). *Statut et fonctions de la mise en perspective historique dans la didactique du français*. Note de synthèse en vue d'une Habilitation à Diriger des Recherches, Université Lille 3.

BKOUCHE, R. (1996). La place de la géométrie dans l'enseignement des mathématiques en France : de la réforme de 1902 à la réforme des mathématiques modernes. In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (Eds.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (pp. 121-137). Paris : Vuibert.

BOURDIEU, P. & PASSERON, J-C. (1968). L'examen d'une illusion. *Revue Française de sociologie,* IX (numéro spécial), 227–253.

CAILLOT, M. (2002). Sciences, techniques et pratiques professionnelles. *Aster*, 34, 3–8.

CANONGE, F. (1948). Les bases psychologiques de notre enseignement. *Technique, Art, Science*, 3, 5–8.

CERCELET, R. (1949). Une leçon de mathématiques dans les Centres d'Apprentissage masculins et féminins. *Technique, Art, Science*, 6, 52–55.

CHERVEL, A. (1988). Histoire des disciplines scolaires : réflexion sur un domaine de recherche. *Histoire de l'éducation*, 38, 59-119.

D'ENFERT, R. (2003). *L'enseignement du dessin en France. Figure humaine et dessin géométrique (1750-1850)*. Paris : Belin, collection histoire de l'éducation.

D'ENFERT, R. (2006). L'enseignement mathématique à l'école primaire de la Troisième république aux années 1960 : enjeux sociaux et culturels d'une scolarisation « de masse ». *SMF gazette*, 108, 67-81. Consultable en ligne (dernière consultation le 25/12/2015) :

http://smf.gazette.emath/fr/publications/Gazette/2006/108/smf_gazette_108_67-81.pdf
D'ENFERT, R. (2010). Mathématiques modernes et méthodes actives : les ambitions réformatrices des professeurs de mathématiques du secondaire sous la Quatrième république. In R. d'Enfert & P. Kahn (Eds.), *En attendant la réforme. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la IVe République* (pp. 115-129). Grenoble : PUG.
D'ENFERT, R. (2011). Une réforme Ambiguë : l'introduction des « mathématiques modernes » à l'école élémentaire (1960-1970). In R. d'Enfert & P. Kahn (Eds.), *Le temps des réformes. Disciplines scolaires et politiques éducatives sous la Ve république. Les années 1960* (pp. 53-73). Grenoble : PUG.
DEVELAY, M. (1993). Pour une épistémologie des savoirs scolaires. *Pédagogie collégiale*, 7, 35-40.
DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT TECHNIQUE (1945). *Instructions sur les programmes et les méthodes des centres d'apprentissage de garçons.* Lyon : France-empire.
GISPERT, H., HULIN, N. & ROBIC, M-C. (2007). *Science et enseignement. L'exemple de la grande réforme des programmes du lycée au début du XXe siècle*. Paris : INRP-Vuibert.
LEBEAUME, J. (2000). *L'éducation technologique. Histoires et méthodes.* Paris : ESF éditeur.
LOPEZ, M. (2015). *Formation littéraire et formation professionnelle de 1930 à 1985*. Thèse de doctorat, Université Cergy-Pontoise.
LOPEZ, M. & SIDO, X. (2015) L'enseignement des mathématiques et du français dans l'enseignement technique court de 1945 à 1985. Identité singulière, dynamique et temporalité spécifiques ? In R. D'ENFERT & J. LEBEAUME (Dirs), *Réformer les disciplines*, *Les savoirs scolaires à l'épreuve de la modernité 1945-1985* (pp. 137-154). Rennes : PUR.
MARTINAND, J.-L. (1983). Questions pour la recherche : la référence et le possible dans les activités scientifiques scolaires. In G. DELACÔTE & A. TIBERGHIEN (coord), *Recherche en didactique de la physique : les actes du premier atelier international* (pp. 227-249). Paris : Éditions du CNRS.
MARTINAND, J.-L. (1985). Réflexions de Mr Martinand de l'université Paris-Sud. *Bulletin de liaison des professeurs maths-sciences de lycées professionnels*, 1, 4–6.
MARTINAND, J.-L. (2003). La question de la référence en didactique du curriculum. *Investigaçoes em ensino de ciências*, ,8, 125–130.
MATRAY, F. (1952). *Pédagogie de l'enseignement technique*. Paris : PUF.
PELPEL, P. & TROGER, V. (2001). *Histoire de l'enseignement technique*. Paris : L'harmattan.
TANGUY, L., POLONI, A., & AGULHON, C. (1987). Les institutions d'enseignement technique court en France : Genèse et évolution. *Revue française de pédagogie*, 78, 43-64.
TRABAL, P. (1996). La réforme des mathématiques modernes, discours, polémiques et réalités. In B. Belhoste, H. Gispert & N. Hulin (Eds.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger* (pp.179-195). Paris : Vuibert.

INGENIERIE DIDACTIQUE DE DEVELOPPEMENT EN GEOMETRIE AU CYCLE 3 DANS LE CADRE DU LEA VALENCIENNES-DENAIN

Christine **MANGIANTE-ORSOLA**
Laboratoire de Mathématiques de Lens, Université d'Artois, ESPE Lille Nord de France
christine.mangiante@espe-lnf.fr

Marie-Jeanne **PERRIN-GLORIAN**
Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot, Université d'Artois
marie-jeanne.perrin@univ-paris.diderot.fr

Résumé
Nous revenons dans ce texte sur la notion d'ingénierie didactique pour le développement et la formation (IDD, Perrin-Glorian, 2011) et sur les problèmes méthodologiques liés à sa mise en œuvre (Mangiante & Perrin-Glorian, 2016). Dans le cas de l'enseignement de la géométrie plane à l'école élémentaire, nous tentons de préciser le questionnement de niveau 1 (lié au contenu à enseigner, Perrin-Glorian & Godin, 2014) et de niveau 2 (lié aux pratiques ordinaires des enseignants et à leurs conditions d'évolution). Prenant appui sur le dispositif de travail mis en place dans le cadre du LéA de Valenciennes-Denain, nous précisons comment notre dispositif de travail et de recherche nous permet de tester à la fois des hypothèses concernant l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (G) et des hypothèses concernant les pratiques des enseignants (P). Nous questionnons également la notion de ressource et ses implications à chacun des niveaux de l'IDD ainsi que les conditions de fonctionnement d'une instance de conversion bidirectionnelle entre le monde de la recherche et le monde de l'enseignement ordinaire.

Mots clés
Ingénierie didactique ; géométrie plane à l'école primaire ; évolution des pratiques et formation des enseignants ; collaboration chercheurs - formateurs de terrain - enseignants.

INTRODUCTION

Cet exposé prend appui sur les derniers développements d'une recherche qui a commencé au début des années 2000 avec le soutien de l'IUFM Nord Pas-de-Calais et se prolonge dans le cadre d'un LéA sur l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 à Valenciennes-Denain. Notre intention dans ce texte est d'apporter des précisions à propos de l'ingénierie didactique pour le développement et la formation (IDD) (Perrin-Glorian, 2011) en mettant l'accent sur les problèmes méthodologiques et les moyens de contrôle théoriques. Nous reviendrons tout d'abord sur la démarche d'IDD pour mieux la situer à l'intérieur de l'ingénierie didactique. Nous présenterons ensuite la mise en œuvre de cette démarche dans le cadre du LéA et nous terminerons par une discussion autour de certains points plus théoriques.

PRECISIONS A PROPOS DE L'INGENIERIE DIDACTIQUE POUR LE DEVELOPPEMENT ET LA FORMATION DANS LE CAS DE LA GEOMETRIE

Ingénierie didactique pour le développement et la formation comme méthode de recherche : quelles sont les questions ?

La question des relations entre recherche et enseignement n'est pas nouvelle. Le développement de la didactique des mathématiques et de ses cadres théoriques s'est fait contre l'idée d'une recherche-action qui proposerait directement des solutions aux problèmes d'enseignement et d'apprentissage. Le projet était de développer une recherche fondamentale et des cadres théoriques qui permettraient d'étudier les phénomènes didactiques et, plutôt que de donner aux enseignants des solutions toutes faites, leur donner des outils qui les aident à gérer les problèmes d'enseignement et d'apprentissage qu'ils rencontrent dans leur quotidien. Outre les outils qui permettent l'étude des phénomènes, les recherches en didactique ont produit des résultats qui pourraient contribuer à améliorer l'enseignement et la formation des maîtres, par exemple l'élucidation de contenus mathématiques et des organisations possibles de ces contenus en lien avec d'autres, les difficultés d'apprentissage des élèves sur ces contenus, l'impact des choix institutionnels et didactiques sur l'enseignement et l'apprentissage de ces contenus, les pratiques des enseignants et leurs possibilités de développement. Comment ces résultats peuvent-ils se traduire pour un enseignant qui a besoin de préparer et gérer sa classe, d'organiser le travail de ses élèves pour assurer leur apprentissage, pour un formateur en prise directe avec les demandes pressantes des enseignants ? Un enseignant a besoin d'intégrer ces résultats à son fonctionnement ordinaire et la prise en compte de résultats de recherche, portant sur certains aspects de son travail à l'exclusion des autres, risque de déstabiliser plus que d'améliorer sa pratique d'où la résistance des enseignants et les effets parfois négatifs de la diffusion des recherches dans l'enseignement. Pour que les travaux de recherche puissent contribuer à améliorer l'enseignement et la formation des maîtres, il faut qu'ils prennent en compte le fonctionnement réel des classes et les besoins des enseignants.

Dès le début, l'ingénierie didactique a la volonté de prendre en compte le fonctionnement réel des classes et le souci de diffuser les résultats de recherche. Ainsi, dans plusieurs textes, notamment assez récents (Brousseau (2006), Brousseau (2013), Brousseau & Brousseau (2006), cité par Bessot (2011)), Brousseau donne les raisons qui placent l'ingénierie didactique au cœur de la didactique : comme indispensable instrument de confrontation de la science didactique à la contingence mais aussi comme moyen de mise en œuvre et de diffusion des résultats de didactique vers les enseignants et le public. L'ingénierie didactique produit des situations qui peuvent en effet être des ressources pour l'enseignement mais la diffusion de ces situations ne va pas de soi. Les ingénieries issues des recherches, surtout les ingénieries longues, sont difficilement reproductibles dans l'enseignement ordinaire. Dans les années 90, il devient évident qu'il faudrait mieux connaître le fonctionnement ordinaire des classes et les besoins des enseignants. Se développent alors des recherches appuyées sur l'observation de classes ordinaires, par exemple par le biais d'une caméra au fond de la classe, et des cadres théoriques comme la double approche didactique et ergonomique (Robert & Rogalski, 2002) qui, à la suite de Vergnaud, mettent davantage l'accent sur le développement des individus via la théorie de l'activité.

L'expression « ingénierie didactique pour le développement et la formation (abrégée en IDD) » est peut-être mal choisie parce que ce n'est pas « une ingénierie de production et de développement qui vise uniquement l'enseignement » comme la caractérise Bessot (2011), en citant Brousseau et Brousseau (2006). Dans l'IDD, la production de situations d'enseignement n'est pas le but unique : il s'agit d'étudier leur adaptation aux conditions ordinaires

d'enseignement et aux besoins des enseignants, de prendre comme objet d'étude la diffusion de ces situations dans l'enseignement ordinaire via la production de ressources et les besoins de formation et d'accompagnement des enseignants qu'elles nécessitent pour que ceux-ci puissent les utiliser efficacement pour améliorer l'apprentissage de leurs élèves. Il s'agit donc de mettre à l'épreuve les conditions qui permettent de définir ces situations. L'IDD est en fait une ingénierie didactique de recherche particulière qui se distingue par le type de questions qu'elle aborde, questions qui posent des problèmes méthodologiques et théoriques particuliers.

Qu'une étude préalable ait été effectuée ou non, il s'agit en même temps d'élaborer une proposition de transposition didactique et d'en étudier les conditions de diffusion dans l'enseignement ordinaire, sur un contenu assez large, ici l'enseignement de la géométrie plane au cycle 3, c'est-à-dire, en termes de niveaux de codétermination (Chevallard, 2005) qu'on se situe au moins au niveau du secteur si ce n'est du domaine. Le questionnement est triple :

- sur le contenu lui-même et sa possible transposition didactique. Cela suppose la recherche d'une organisation mathématique conforme aux programmes d'enseignement pour qu'elle soit acceptable par les enseignants, sans se soumettre à l'interprétation qui en est généralement faite et la recherche de situations permettant de mettre en scène cette organisation du contenu mathématique avec des contraintes sur le milieu matériel et l'organisation du temps, donc une réflexion de nature épistémologique, cognitive et didactique.
- sur les pratiques actuelles de l'enseignement de ce contenu et l'identification des besoins des élèves (difficultés d'apprentissage) et des enseignants (difficultés d'enseignement) en confrontant ceux qui sont identifiés par les chercheurs à ceux qui sont exprimés par les enseignants et par l'institution.
- sur le contenu des ressources à produire et leur mode d'élaboration.

Perrin-Glorian (2011) distingue deux niveaux de questionnement pour l'IDD :

- un premier niveau où il s'agit surtout de tester la validité théorique des situations au plan épistémologique et cognitif et de dégager les choix essentiels de l'ingénierie ;
- un deuxième niveau concernant les pratiques ordinaires des enseignants et leurs possibilités d'évolution en repérant les points sur lesquels ils ont besoin de soutien, points à prendre en compte dans les ressources et dans les formations.

Ces deux niveaux ne sont pas indépendants et le questionnement au deuxième niveau amène à reprendre le premier niveau pour mieux élucider ce qui relève du milieu et ce qui relève de la gestion du milieu par le maître dans la situation, par exemple dans le passage d'un niveau de milieu à un autre. En particulier, il est nécessaire de prévoir soigneusement les modifications à apporter dans le milieu pour la formulation et la validation, vu la difficulté souvent observée dans les classes à faire le lien entre l'activité des élèves et le savoir à retenir. Ainsi, dans le travail au premier niveau, on essaie d'anticiper le deuxième niveau et dans le travail au deuxième niveau, on remet aussi en question le premier niveau.

Dans tous les cas, une ingénierie didactique teste la validité théorique des situations par confrontation de l'analyse *a priori* et de l'analyse *a posteriori*. Dans le cas de l'IDD, des contraintes et des questions supplémentaires se posent dès l'élaboration des séances, par exemple : le milieu matériel demande-t-il un temps de préparation raisonnable à partir du matériel ordinaire des élèves ? La suite de situations peut-elle se réaliser en un temps raisonnable, compatible avec le temps total consacré aux mathématiques ? Quels sont les milieux et les choix de variables didactiques incontournables de la progression, lesquels peuvent être omis ou modifiés ?

Un appui sur des mises en œuvre précédentes dans des conditions expérimentales peut aider à prendre en compte ces contraintes supplémentaires. Cependant, le travail avec les enseignants sur un projet d'ingénierie didactique avant la mise en œuvre en classe et l'observation de cette mise en œuvre permettent de mieux connaître les pratiques ordinaires des enseignants, les

manques éventuels relatifs aux conditions qui devraient favoriser l'apprentissage des élèves mais aussi des enrichissements qui pourraient être apportés à l'ingénierie initiale en y intégrant des éléments qui font partie des pratiques ordinaires des enseignants.
Pour assumer le lien entre les deux niveaux, il est donc nécessaire d'itérer le processus. Ainsi, dans les modalités de travail que nous présenterons dans la deuxième partie, apparaissent plusieurs versions des ressources[1], retravaillées avec un groupe de formateurs dont des EMF[2] qui mettent en œuvre les situations dans leurs propres classes, avant d'être proposées à d'autres enseignants puis rediscutées après observations dans les classes. C'est dans ces allers et retours entre chercheurs, formateurs de terrain et enseignants que se tissent les liens entre les deux niveaux de questionnement de l'IDD. Nous y reviendrons.

Questions méthodologiques à propos des relations chercheurs/enseignants

L'IDD pose des questions méthodologiques particulières, notamment en ce qui concerne l'organisation des relations entre chercheurs et enseignants dans la mesure où on est dans une position un peu intermédiaire entre ingénierie didactique classique et observation de séances ordinaires.
Dans l'ingénierie didactique pour le développement et la formation, on cherche à avoir accès simultanément à un nombre assez important de classes ordinaires et on cherche à mettre au point une ressource utile pour le plus grand nombre possible de classes et susceptible d'améliorer l'apprentissage des élèves. L'accès aux classes ordinaires se fait par un intermédiaire institutionnel : dans notre cas, nous avons eu accès à une circonscription via un inspecteur ancien formateur de mathématiques de l'IUFM qui avait participé à des étapes antérieures de notre recherche sur l'enseignement de la géométrie. L'accès à la circonscription n'est donc pas ordinaire et cela influence sans doute les formateurs de terrain mais la circonscription est ordinaire et même dans un quartier plutôt défavorisé socialement.
La question de recherche doit prendre en compte les besoins ressentis par les enseignants et leurs questions sur le thème pour qu'ils puissent s'investir raisonnablement dans le travail demandé. Elle doit aussi prendre en compte les besoins identifiés par le chercheur qui ne coïncident pas nécessairement avec les précédents.
Les dispositifs de travail avec les enseignants sont soumis aux contraintes institutionnelles usuelles et ont donc besoin d'être formalisés un peu plus que dans une ingénierie didactique classique. Il reste des questions sur les rôles respectifs des chercheurs, formateurs de terrain et enseignants dans l'élaboration de la ressource et sur la formation à prévoir pour accompagner cette ressource.
Les problèmes méthodologiques à propos des choix concernant l'élaboration de la ressource sont d'autant plus importants que l'enjeu d'enseignement concerne un secteur large voire un domaine, comme c'est le cas pour la géométrie plane à l'école élémentaire. Sans pouvoir être exhaustif, ce qui demanderait d'établir une progression sur plusieurs années scolaires, et donc de gros moyens de suivi et d'observation, il faut élaborer des situations qui mettent en jeu de façon suffisamment cruciale les hypothèses concernant l'apprentissage de ce contenu.
De plus, les situations élaborées doivent pouvoir être mises en œuvre avec les pratiques ordinaires des enseignants tout en leur donnant l'occasion de réfléchir à ces pratiques en observant leurs élèves dans des situations inusuelles. Et bien sûr, la validité de la situation pour produire les connaissances visées chez les élèves ne peut être testée que via la mise en œuvre dans les classes. Or cette mise en œuvre n'est pas nécessairement celle qui était prévue dans la ressource (Gueudet & Trouche, 2010). D'où la nécessité de reprendre la ressource si

[1] Nous employons ressource dans le sens ordinaire de document à disposition des enseignants pour préparer leur classe.
[2] Enseignants Maîtres Formateurs

on s'éloigne trop de l'apprentissage prévu et la nécessité des boucles itératives.
Comme dans toute ingénierie didactique, nous exerçons un contrôle théorique sur l'analyse du savoir, sur la définition des situations, du milieu et sur les connaissances des élèves. Mais nous cherchons aussi un contrôle théorique sur la mise en œuvre de la situation en classe par les enseignants et même sur les échanges chercheurs - enseignants. Sur les trois premiers points, nous combinons des outils théoriques issus des mathématiques et de leur histoire, de la théorie des situations et de la théorie anthropologique du didactique. Sur la gestion de la classe par l'enseignant, nous combinons la théorie des situations avec la double approche didactique et ergonomique. Nous reviendrons en troisième partie sur les possibilités d'importation d'autres éléments théoriques.

Caractériser l'approche de la géométrie

L'approche de la géométrie dont nous étudions les possibilités d'implantation dans les classes ordinaires se caractérise à travers des hypothèses relatives à la possibilité de penser un enseignement cohérent sur la scolarité obligatoire, permettant de s'appuyer efficacement sur G1 pour introduire G2 plutôt que de le rejeter en mettant en avant la méfiance par rapport à la figure. Nous interprétons les paradigmes définis par Houdement et Kuzniak (Houdement, 2007 ; Houdement & Kuzniak, 2006), en considérant G1 comme la géométrie des figures matérielles qui permet la représentation de l'espace, des objets de l'espace et des actions dans l'espace ou sur les objets de l'espace, que nous appelons géométrie physique. Elle correspond à la situation fondamentale du charpentier dont parlait Brousseau (1983) ; le problème se pose dans l'espace sensible ou dans l'espace graphique[3] et la validation se fait dans cet espace. G2 est pour nous une théorie de l'espace, un modèle de G1, défini à partir d'objets premiers, les points, les droites et les plans et de relations entre ces objets dont certaines sont posées comme axiomes et les autres démontrées : c'est la géométrie d'Euclide, représentée par Brousseau (1983) par la situation de l'intersection des médiatrices d'un triangle, avec comme outil de validation la démonstration.
Nous faisons l'hypothèse que les figures planes tracées sur une feuille de papier avec des instruments constituent un milieu riche pour mettre en scène les savoirs de base de la géométrie élémentaire plane dans leur capacité à représenter les formes et grandeurs des objets plats de l'espace et leurs relations, sans passer par les nombres. Pour mettre à l'épreuve cette hypothèse, il nous faut rechercher des conditions pour que le contrôle par la vue soit insuffisant et le contrôle par les instruments, nécessaire. De plus, comme nous pensons que les grandeurs géométriques contribuent à fonder les nombres, les opérations sur ces grandeurs doivent avoir un sens indépendamment des nombres. Ainsi les reports de grandeurs (longueurs et angles) se font avec des instruments sans passer par les nombres.

Vision des figures

Pour éclairer la suite et expliciter nos hypothèses de départ, il nous faut rappeler les différentes visions des figures que nous avons définies en lien avec la déconstruction dimensionnelle (Duval, 2005) et aussi avec la capacité à voir des unités figurales non tracées mais qui pourraient se définir à partir de celles qui sont présentes sur la figure et permettraient d'engendrer tout ou partie de la figure.

3 Nous appelons espace graphique l'espace des figures tracées sur une feuille de papier ou sur un écran.

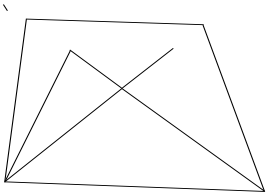


Figure 1

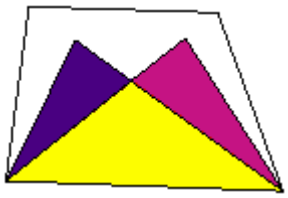


Figure 2

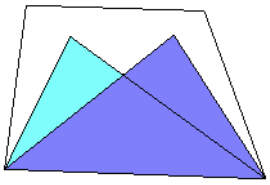


Figure 3

La vision naturelle des figures, que nous appelons vision « surfaces », est une vision en termes de surfaces juxtaposées ou, éventuellement, superposées. Ainsi, sur la figure 1, on peut voir trois triangles juxtaposés et superposés sur un quadrilatère (figure 2) ou bien deux triangles superposés sur un quadrilatère (figure 3). Le quadrilatère, surface fermée convexe, est perçu plus facilement que l'heptagone laissé en blanc. Les lignes sont seulement des bords de surfaces et les points des sommets de surfaces ou des intersections de lignes déjà tracées.
Dans une vision « lignes », la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments : la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments, le compas pour les cercles ou les arcs de cercle. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà. On peut tracer des segments (voire des demi-droites ou des droites) qui relient des points qu'on a déjà. On peut obtenir de nouveaux points par intersection de lignes qu'on a prolongées mais on ne peut pas créer ces points pour obtenir de nouvelles lignes. Sur l'exemple (figure 4), on verra plus ou moins de lignes supports des côtés. Les lignes qui font sortir de l'enveloppe convexe de la figure initiale sont plus difficiles à considérer.
Dans une vision « points » de la figure, on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes.
Sur l'exemple (figure 5), on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes de la figure et de créer de nouveaux points : la donnée de A, B, C, D (le quadrilatère) détermine quatre droites (et même six) dont les intersections donnent deux nouveaux points E et F. Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles.

Figure 4

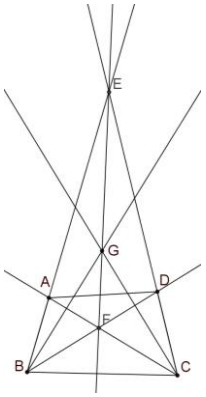


Figure 5

La vision géométrique des figures demande la mobilité entre ces différentes visions des figures. C'est nécessaire dans G2 parce que les objets géométriques sont définis à partir des notions premières de droites et de points. Or cet apprentissage n'est jusqu'à présent pas pris en compte dans l'enseignement.

Notre approche de la géométrie

Un des points forts de notre approche (Perrin & Godin, 2014) est de prendre en compte des éléments cognitifs concernant la différence entre le regard porté naturellement sur les dessins et celui qu'il faut porter sur les figures géométriques. Nous faisons l'hypothèse qu'un regard analytique sur les figures peut se construire dès la géométrie instrumentée en créant des milieux adéquats pour la reproduction de figures et en jouant sur les variables didactiques concernant les propriétés des figures et les instruments à disposition (nous entendons ici instrument en un sens large qui inclut par exemple les gabarits et le papier calque).
Un autre point que nous avons commencé à travailler plus récemment concerne le langage géométrique. La plupart des mots de la langue utilisée en géométrie élémentaire sont aussi des

mots de la langue courante où ils ont, en plus du sens proche de celui qu'ils ont en géométrie, d'autres sens qui s'en éloignent plus ou moins. De plus, la signification de ces mots et les moyens de reconnaissance et de justification évoluent, de qualités perceptives d'objets matériels en début de primaire à des propriétés d'objets théoriques établies par des définitions et des démonstrations en fin de collège, en passant par des propriétés que l'on produit et vérifie avec des instruments. Dans ce cas, la figure matérielle est l'objet même du travail et les propriétés sont rencontrées et établies par les contraintes de la construction. Les propriétés géométriques se confondent souvent avec le langage lié à la manipulation des instruments règle, équerre, compas, puisque ce sont ces instruments qui permettent de réaliser et de vérifier les propriétés. Edith Petitfour dans sa thèse (Petitfour, 2015) a fait un énorme travail pour clarifier les rapports entre langage géométrique et ce qu'elle a appelé langage technique géométrique qui est lié à la manipulation des instruments pour obtenir des propriétés géométriques des figures.
En résumé, notre approche de la géométrie vise à prendre en compte dans l'ensemble des activités géométriques trois aspects liés :
- Mobilité à apporter dans le regard porté aux figures matérielles tracées sur papier ou sur écran (en particulier surfaces, lignes, points) ;
- Rôle d'interface des instruments d'une part pour outiller la perception dans le travail sur les figures matérielles, d'autre part pour représenter des propriétés de la géométrie théorique ;
- Rapports entre langage courant, langage technique géométrique et langage géométrique.

Nos hypothèses à propos de la géométrie et à propos des pratiques

Hypothèses et objectifs sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (G)

Notre hypothèse générale à propos de l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie est qu'il est possible de travailler sur les figures dans la géométrie physique de façon à développer chez les élèves 1) une vision des figures qui sera nécessaire dans la géométrie théorique, 2) un rapport aux objets géométriques et à la notion de propriété qui prépare celui de la géométrie théorique, 3) un lien entre le langage géométrique et le langage technique géométrique.
Pour la mettre en œuvre, nous formulons les hypothèses suivantes :
- Pour que les instruments matériels puissent jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il est important que les élèves apprennent à en faire un usage que nous appelons géométrique parce qu'il respecte des règles qui correspondent au report des propriétés géométriques avec les instruments théoriques[4] correspondants.
- Le travail sur le report de grandeurs sans passer les nombres qui les mesurent est essentiel pour accéder à une vision géométrique des figures.
Enfin, nous y ajoutons une hypothèse de travail : la restauration de figures, par le jeu qu'elle permet sur les variables didactiques que sont notamment les propriétés de la figure à reproduire, de l'amorce et les instruments fournis, constitue un milieu qui permet de produire des situations de classe visant ces objectifs.
Une restauration de figure est une reproduction de figure mais avec des contraintes particulières : une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non) ; une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée ; les élèves disposent d'instruments variés ; soit l'amorce, soit des instruments permettant de reporter des informations de dimension 2 (D2) de la figure initiale mais sans donner toute l'information, c'est-à-dire qu'on peut démarrer la restauration avec une vision surfaces des figures ; la vérification se fait à l'aide d'un

[4] Par exemple, la règle et l'équerre théoriques ont des bords infinis, le compas théorique a un écartement aussi petit ou aussi grand qu'on veut. Voir Perrin-Glorian et Godin (soumis pour un livre édité par la Corfem).

transparent portant la figure à obtenir.
Dans le cadre du LéA, notre objectif est d'aider les élèves à passer d'une vision des figures comme surfaces juxtaposées ou superposées à une vision en termes de lignes et de points de construction, qu'on peut obtenir avec des instruments de tracé. Plus précisément, nous cherchons à ce que les élèves soient capables d'utiliser le support d'un segment en le prolongeant, d'obtenir un point par l'intersection de deux droites supports de segments de la figure, de reporter une longueur sur une droite déjà tracée, et de créer les extrémités d'un segment pour tracer ce segment.

Hypothèses sur les pratiques ordinaires en géométrie et leurs possibilités d'évolution (P)

Notre pratique de formatrices, un questionnaire réalisé dans les années 2000, au début de notre groupe de recherche, les discussions avec les formateurs de terrain et l'examen des manuels du primaire nous amènent à supposer que l'enseignement de la géométrie est centré sur l'acquisition du vocabulaire et de la maîtrise des instruments usuels ; qu'il relève principalement de pratiques ostensives ; que les concepts de droite, droites parallèles ou perpendiculaires sont enseignés sans beaucoup de lien avec la reproduction de figures ; qu'il n'y a pas de travail explicite sur le report des grandeurs indépendamment de leur mesure.
Nous formulons aussi des hypothèses à propos de ce qui est susceptible de favoriser l'appropriation des situations par les enseignants. Les recherches menées dans le cadre de la double approche attestent que les pratiques enseignantes constituent un système complexe, cohérent et stable (Robert, Rogalski, 2002). Il nous semble par conséquent tout à fait légitime de tenir compte de cette organisation des pratiques et d'interroger les possibilités d'une intégration progressive de pratiques nouvelles au sein de pratiques existantes (Leclercq & Mangiante-Orsola, 2014).
Nos précédentes analyses montrent que certains enseignants ont des difficultés à mettre en lien les situations proposées avec certains enjeux d'apprentissage de l'enseignement de la géométrie et que cela constitue un frein à l'enrichissement de leurs pratiques au-delà de la simple mise en œuvre de ces situations.
De même, nous estimons qu'il est important d'éviter de fournir des descriptions trop détaillées, des situations trop « clés en main », qui pourraient enfermer les enseignants dans un déroulement trop contraint mais en même temps de veiller à leur fournir les éléments d'analyse suffisamment précis pour éviter qu'ils dénaturent la situation proposée. Enfin, les situations produites par le groupe de recherche du Nord Pas-de-Calais visent un enrichissement des pratiques enseignantes qui ne va pas de soi car nos propositions sont généralement assez éloignées des pratiques ordinaires. C'est pourquoi nous devons au préalable mieux cerner les besoins ressentis par les enseignants, leurs préoccupations, leurs priorités… pour à terme mieux tenir compte des contraintes du métier qui pèsent sur eux.
Ainsi, nous retenons la nécessité de clarifier dans notre ressource les hypothèses et objectifs sur l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (caractériser l'approche de la géométrie développée) ; de prévoir dans la présentation des situations proposées la possibilité pour les enseignants d'investir une certaine marge de manœuvre tout en les aidant à cerner les éléments fondamentaux des situations ; de mettre en évidence en quoi nos propositions peuvent répondre aux priorités qui sont les leurs.

MISE EN ŒUVRE DE LA DEMARCHE D'IDD DANS LE CADRE DU LEA DE VALENCIENNES-DENAIN

Présentation générale du dispositif de travail

Depuis un peu plus de deux ans, nous travaillons à l'élaboration de ressources pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3, avec l'équipe de circonscription de Valenciennes Denain et depuis septembre 2014, ce projet s'inscrit dans le cadre d'un LéA (Lieu d'éducation Associé à l'IFE). Au cours de l'année précédant notre entrée dans le réseau des LéA, des séances ont été testées dans les classes des maîtres formateurs associés au projet (année 0). En 2014-2015 (année 1), nous avons rédigé un document de travail présentant une séquence que des enseignants de la circonscription (bénéficiant de temps de formation continue) ont mise en œuvre dans leur classe, accompagnés par les formateurs du LéA. En septembre dernier (début de l'année 2), nous avons décidé de poursuivre le travail de conception et d'évaluation de ressources tout en élargissant notre réflexion (il s'agira d'inscrire nos situations dans une progression[5]) pour à terme (fin de l'année 3) rédiger et diffuser une ressource sur l'enseignement de la géométrie dont tout enseignant de cycle 3 pourrait éventuellement s'emparer.
Dans cette deuxième partie, notre intention est de présenter comment la démarche d'IDD décrite précédemment a été mise en œuvre dans le cadre de ce LéA et comment notre méthodologie de recherche s'est précisée au fur et à mesure des choix du groupe de travail et de l'évolution des questionnements.

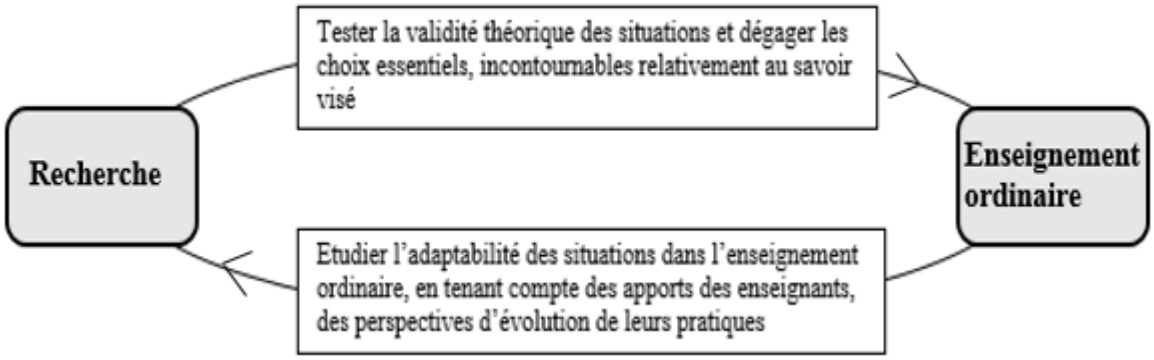


Figure 6

Le schéma ci-dessus (figure 6) présente de manière succincte la démarche d'IDD : les deux flèches correspondent aux deux niveaux de questionnement, l'aspect cyclique du schéma traduit le lien entre ces deux niveaux, le tout étant situé à l'interface de la recherche et de l'enseignement ordinaire. Nous allons l'enrichir au fur et à mesure de l'explicitation de notre méthodologie.
Le projet de conception de ressources du LéA est porté par une équipe constituée d'acteurs rattachés à des institutions différentes : nous travaillons en effet avec six formateurs de terrain, trois CPC[6] et trois EMF, et une dizaine d'enseignants (associés au projet dans le cadre des heures de formation continue). Même s'ils ne participent pas directement à l'écriture de la ressource, ces enseignants savent qu'ils contribuent à sa conception à travers leur participation à la préparation des séances testées et observées dans leurs classes ainsi que les entretiens et bilans organisés par le groupe restreint. C'est pourquoi, complétant le schéma initial (figure

[5] A ce stade de notre réflexion, nous n'avions pas encore déterminé sur quels apprentissages précis allait porter cette progression. Ce choix faisait partie du travail à accomplir ensemble.
[6] Conseiller pédagogique de circonscription

7), nous faisons apparaître au cœur du dispositif de recherche, un espace de travail créé par les acteurs eux-mêmes réunis autour d'une finalité commune : la production de ressources pour l'enseignement de la géométrie au cycle 3.

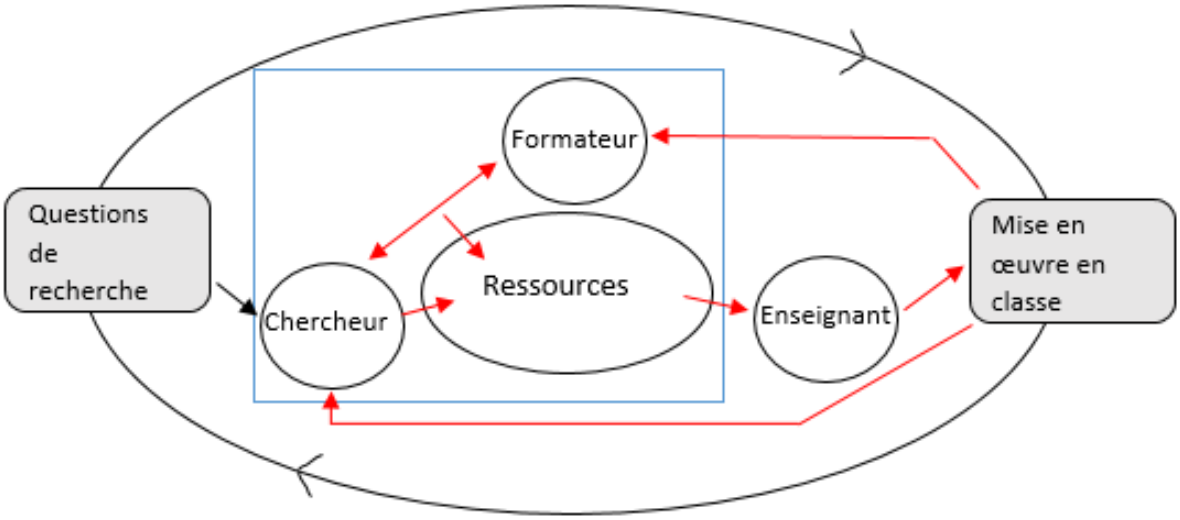


Figure 7

L'équipe restreinte (chercheurs et formateurs) pilote le dispositif, élabore des versions provisoires de la ressource (cadre rectangulaire bleu) que les enseignants maîtres formateurs testent eux-mêmes dans leur classe. Les situations ainsi conçues sont ensuite proposées à des enseignants de la circonscription lors d'une première séance de formation continue de trois heures. Accompagnés par les formateurs de terrain, les enseignants participant à cette formation, testent à leur tour ces situations dans leur classe. Les séances mises en œuvre sont observées par des membres du groupe restreint, certaines sont filmées et un entretien « à chaud » est mené avec chaque enseignant. Une deuxième séance de formation continue de trois heures préparée par le groupe restreint sur la base des observations, enregistrements vidéos et entretiens menés dans les écoles permet de faire le bilan en grand groupe des expérimentations réalisées. Ainsi, la conception de ressources est organisée selon des boucles itératives (flèches rouges) dont le but est de produire des séquences d'enseignement adaptées, utiles et diffusables dans l'enseignement ordinaire.

Au sein de ce dispositif, les modalités de travail sont diverses : les séances de formation continue en grand groupe alternent avec des séances de travail du groupe restreint. De plus, les formateurs de terrain se réunissent parfois en l'absence des chercheurs pour mener certaines analyses ou élaborer des propositions d'activités et de leur côté, les chercheurs échangent régulièrement par mail et se rencontrent pour préparer les séances de travail du groupe restreint. Ainsi, l'organisation du dispositif induit différents niveaux de collaboration et des degrés divers d'autonomie des uns et des autres selon les modalités de travail prévues.

Première année de travail (année 0)

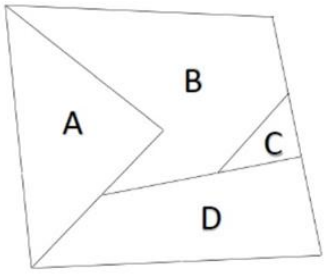


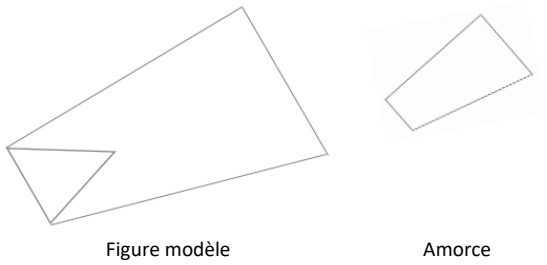
Figure 8

Comme cela a déjà été précisé, cette recherche s'inscrit dans une approche de la géométrie qui vise à accompagner le changement de regard des élèves sur les figures. Nous avons, dans cette perspective, conçu des situations de restauration de figures.

L'année précédant notre entrée dans le réseau des LéA (année 0), l'équipe restreinte a fait le choix de travailler sur une situation de restauration de figure destinée à différents niveaux de cycle 3 et de laisser les enseignants participant au projet fixer les différentes étapes de la séquence.

Lors de la première séance de formation continue les enseignants ont été invités à jouer sur les variables didactiques à disposition pour proposer une séquence composée de différentes activités de restauration de la même figure à partir d'amorces différentes. Certaines restaurations nécessitaient le tracé des diagonales du quadrilatère cadre pour y repérer des alignements de segments et de points (par exemple, restaurer la figure modèle en donnant pour amorce, le quadrilatère-cadre et les pièces C et D sous forme de gabarits).

L'équipe restreinte décide aussi de mettre à disposition des enseignants des activités à mener avant la séquence préparée ensemble dans le but d'installer un certain contrat didactique. Or, dans plusieurs de ces activités, les élèves étaient amenés à tracer des diagonales, comme dans l'exemple ci-après (figure 9).



L'intention des formateurs était d'habituer les élèves à utiliser les diagonales comme support des côtés de triangles juste avant la situation de restauration de figure qui devait constituer l'essentiel de la séquence c'est-à-dire, le moment où les élèves devaient repérer des alignements sur la figure modèle grâce au tracé des diagonales du quadrilatère.

Figure 9

Suite à ce travail, nous avons réalisé des observations dans deux classes seulement. Néanmoins, l'analyse des vidéos recueillies a permis au groupe de prendre conscience que certaines activités insistaient trop sur le tracé de diagonales et les formateurs en ont conclu que « certaines activités préalables allaient trop loin » et « tuaient le problème » posé dans la séquence principale.

Situons à présent le bilan de cette première année par rapport aux deux niveaux de questionnement de l'IDD. Le groupe restreint a fait des choix : favoriser l'appropriation de la situation par les enseignants en les laissant jouer sur les variables didactiques et proposer un large éventail d'activités préalables. Ces choix ont eu un impact sur la manière dont nous avons investi les deux niveaux de questionnement ainsi que sur le lien entre eux.

Au niveau 1, le contrôle théorique s'est exercé *a minima* : une situation a été donnée avec des variables sur lesquelles jouer mais rien de plus.

Au niveau 2, une large part a été laissée à l'expérimentation et au travail des formateurs de terrain. C'était un choix de formation : il s'agissait de laisser les acteurs (formateurs et enseignants) expérimenter pour mieux s'approprier l'approche proposée.

Le lien entre les deux niveaux a lui aussi été impacté. En effet, il y a eu peu d'anticipation du

niveau 2 au niveau 1 et c'est le retour d'expérimentation qui a été privilégié.
Même si nous ne sommes pas allées au bout de l'expérimentation, nous avons appris des pratiques ordinaires et les EMF et CPC ont appris de l'approche développée par les chercheurs et de leurs propres pratiques. Nous avons aussi appris à travailler ensemble – ce qui est important – mais, pour l'année 1, nous avons pris un certain nombre de décisions.
Du côté du groupe restreint est apparue la nécessité de mieux organiser l'accompagnement des enseignants par les formateurs de terrain notamment en clarifiant le contrat passé avec eux : leur proposer davantage d'aide à la mise en œuvre mais en retour leur demander de s'engager à mettre en œuvre les situations proposées, à être éventuellement filmés, au moins observés et à participer au dispositif pendant deux ans.
En tant que chercheurs, nous avons aussi fait d'autres choix. Tout d'abord, nous avons décidé d'investir différemment les deux niveaux de questionnement, de renforcer le contrôle théorique du niveau 1 en proposant une situation davantage « clé en main », conçue par les chercheurs mais une situation suffisamment déstabilisante pour permettre aux enseignants d'entrer dans le questionnement souhaité (nous voulions leur donner une certaine sécurité par le côté clé en main tout en déstabilisant suffisamment leurs pratiques).
Ensuite, il nous fallait préciser notre méthodologie à travers un certain nombre de questions à mieux prendre en charge : quelle articulation penser entre le dispositif de travail et le dispositif de recherche ? Quelles sont nos hypothèses de travail ? Nos hypothèses de recherche ? Et quels cadres théoriques faisons-nous intervenir ?

Deuxième année de travail (année 1)

Précisions apportées à la méthodologie

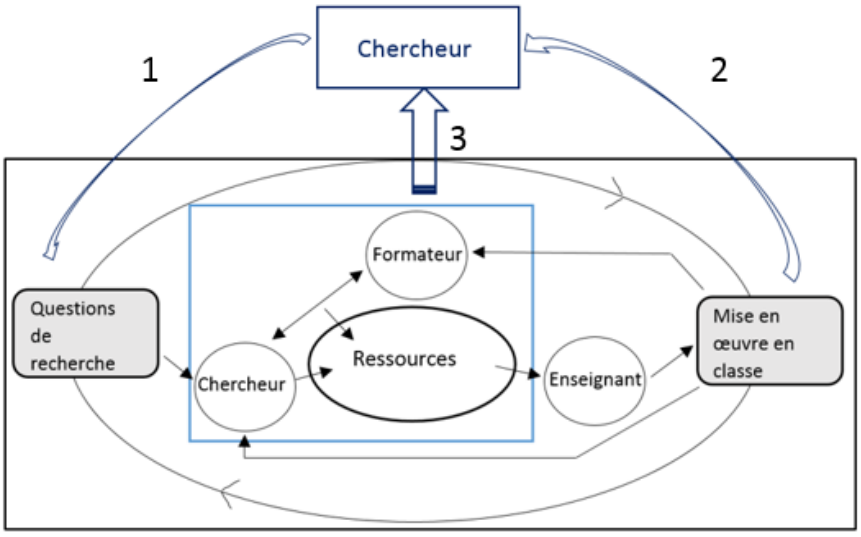


Figure 10

Nous avons clarifié notre méthodologie, en la pensant en termes d'espaces pour la recherche, avec un double positionnement du chercheur comme acteur du dispositif à l'intérieur de l'espace de travail et comme chercheur surplombant l'ensemble du dispositif (figure 10). Au cœur de cet espace de travail, nous retrouvons le groupe restreint, composé des chercheurs et des formateurs de terrain, qui pilote le dispositif et produit la ressource et le groupe élargi aux enseignants inscrits dans le stage de formation continue qui la met en œuvre et réagit à cette mise en œuvre.
Décrivons à présent plus précisément la chronologie induite par les modalités de travail.
A l'origine il y a des questions et des hypothèses de recherche identifiées par les chercheurs

en position surplombante. Elles concernent l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie (hypothèses G) mais aussi les pratiques enseignantes et les possibilités d'enrichissement de ces pratiques (hypothèses P). Ces questions et hypothèses (représentées par la flèche 1**)** correspondent à des hypothèses de travail pour les chercheurs lorsqu'ils interagissent avec les autres acteurs au sein du dispositif de travail. En effet, c'est sur ces hypothèses que les chercheurs s'appuient pour concevoir une trame de situation qu'ils proposent au groupe restreint. Cette situation est mise au point à travers des échanges dans le groupe restreint représenté par le cadre bleu intérieur de façon qu'elle puisse vivre dans l'enseignement ordinaire. Un document/ressource d'accompagnement de la situation est également rédigé dans le groupe restreint.
Les hypothèses de travail gardent la trace des hypothèses G et P qui se manifestent dans une double analyse : l'analyse *a priori* de la situation (hypothèses G) et l'analyse par anticipation de la tâche de l'enseignant (hypothèses P qui se traduisent par la formulation des besoins supposés des enseignants, des indications à leur donner etc.).
La situation ainsi conçue est transmise aux enseignants du groupe élargi via la formation et la mise à disposition d'une ressource (un document écrit). La mise en œuvre en classe, accompagnée par les formateurs, observée par les chercheurs et les formateurs, suivie d'un entretien, nourrit le travail du groupe restreint (cela correspond aux flèches internes). Une analyse *a posteriori* est menée dans le groupe restreint. Elle permet de préparer la deuxième séance de formation qui fait avec les enseignants le bilan de l'expérimentation en classe. Ces observations et analyses permettent aussi de mettre à l'épreuve les hypothèses de recherche et nourrissent ainsi le travail du chercheur en position surplombante (flèche 2).
De plus, à chaque étape, pendant l'action même et/ou après coup, le chercheur prend aussi des informations sur l'ensemble du dispositif de production de la ressource et de la formation et en observant comment les différents acteurs interagissent, ce qui est négocié entre eux (cela correspond à la flèche 3)[7].

Organisation du travail et choix effectués

Cette deuxième année de travail a débuté par une phase de préparation entre chercheurs puis entre chercheurs et formateurs du groupe restreint. Au cours de la première séance de formation continue nous avons présenté nos objectifs et donné un certain nombre d'arguments susceptibles de convaincre les enseignants de s'inscrire dans l'approche proposée. Nous les avons aussi accompagnés dans une analyse *a priori* d'une situation de restauration présentée plus loin et un premier document leur a été remis. L'accompagnement organisé par les formateurs (EMF et CPC) a permis d'aller dans les classes de tous les enseignants associés au projet, d'observer des séances et de recueillir des vidéos ainsi que des entretiens et notes sous forme de carnets de suivi. L'analyse de ces séances par les chercheurs, partagée ensuite au sein du groupe restreint, a permis de préparer la deuxième séance de formation qui a donné lieu à la rédaction d'un second document.
Partant du constat – appuyé sur des analyses précédentes (Leclercq & Mangiante-Orsola 2014) – que l'appropriation par les enseignants de situations issues de la recherche ne va pas de soi, tout particulièrement lorsque les propositions qui leur sont faites sont éloignées de leurs pratiques ordinaires, nous avions des choix importants à faire.
Dès le début de l'année, nous avons décidé de proposer une situation « déclenchante », c'est-à-dire susceptible d'amener les enseignants à faire évoluer leurs représentations à propos de l'enseignement de la géométrie et de ses enjeux, à travers d'une part l'analyse *a priori* menée lors de la séance de formation et d'autre part l'observation de leurs élèves. Nous avons

[7] Nous reviendrons dans la troisième partie sur les cadres théoriques qui guident la méthodologie mise en œuvre par le chercheur en position surplombante.

également choisi de faciliter la mise en œuvre de la situation, notamment à travers le déroulement en étapes qui fixe le jeu sur les variables didactiques. La marge de manœuvre porte principalement sur des routines de type 1, plutôt liées à l'installation et au respect d'attitudes de travail ou d'attitudes générales (Butlen, Masselot & Pezard, 2009).

Présentation de la situation de restauration

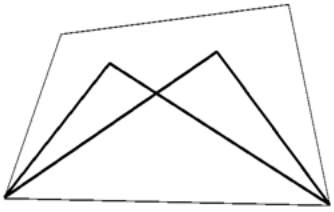


Figure 11

La situation de restauration évoquée porte sur une figure (figure 11) qui présente des alignements mais pas d'angle droit. Le déroulement de la situation prévoit quatre phases au cours desquelles il est demandé aux élèves de restaurer la figure modèle mais l'amorce donnée ainsi que les instruments mis à disposition diffèrent d'une phase à l'autre.

Phase 1 : Réaliser un assemblage par superposition / chevauchement puis tracer les contours des gabarits.

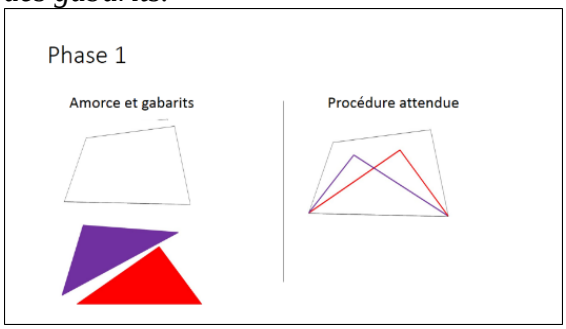


Figure 12

Au cours de cette première phase, les élèves ont à leur disposition les deux grands triangles sous forme de gabarits, ils doivent tout d'abord les positionner pour retrouver la figure modèle et ensuite organiser les tracés : placer un gabarit, tracer, placer l'autre gabarit, tracer. Ici, certains élèves peuvent avoir des difficultés à organiser la réalisation des tracés mais justement ces difficultés sont dues à la nécessité de se représenter mentalement des parties cachées par la superposition des gabarits et c'est précisément ce qui est visé ici.

Phase 2 : Commencer à prendre en compte certains alignements en utilisant le fait que certains côtés des petits triangles sont portés par une même droite.

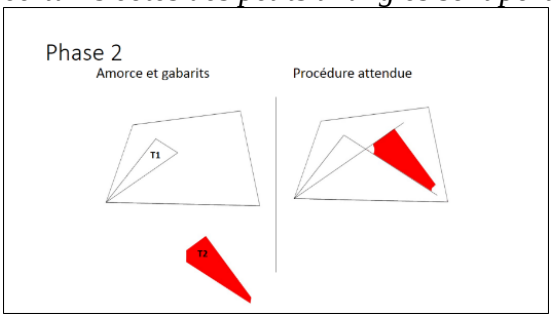


Figure 13

Dans cette deuxième phase, l'un des deux petits triangles est donné. Pour compléter la figure, les élèves doivent placer le gabarit grignoté du second petit triangle. Pour cela, ils doivent utiliser leur règle et prolonger les côtés du triangle T1. Or, ce n'est pas dans leurs habitudes de prolonger des traits au-delà de ce qui est nécessaire et de gommer ensuite "ce qui dépasse". De plus, lorsque les élèves placent le gabarit grignoté, ils doivent faire attention à ses deux côtés en même temps.

Cela ne peut pas être fait dans un seul mouvement, c'est comme lorsque les élèves doivent prêter attention aux deux côtés de l'équerre lorsqu'ils tracent une perpendiculaire. Soulignons le fait que dans cette deuxième étape, les élèves sont tenus de prolonger les côtés du triangle, mais rien ne les oblige à voir que ces côtés sont portés par les diagonales du quadrilatère.

Phase 3 : Prendre en compte les diagonales (alignement de segments et de points)

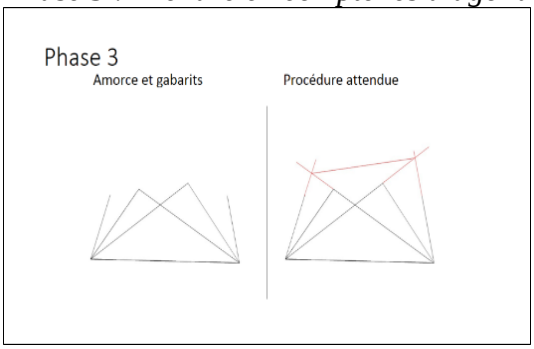


Figure 14

Il s'agit dans cette troisième phase de restaurer le quadrilatère à partir des deux triangles et du début des côtés du quadrilatère (les élèves doivent restaurer les deux sommets du haut). Signalons que cette étape est la plus importante dans la mesure où les élèves doivent prendre en compte les diagonales. Certains élèves peuvent avoir déjà remarqué cette propriété mais rien ne les y obligeait dans les étapes précédentes. La taille de l'amorce est réduite par rapport à la figure modèle pour empêcher les reports de longueur.

Phase 4 : Tracer les diagonales pour placer les gabarits (alignement de segments et de points)

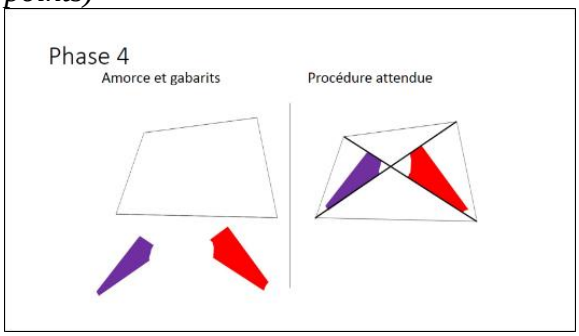


Figure 15

Cette dernière étape vise à réinvestir ce qui a été découvert par les élèves au cours des trois premières phases. Les élèves ont à leur disposition les gabarits grignotés des deux petits triangles et ils doivent en tracer les contours. Pour cela, ils doivent commencer par tracer les diagonales du quadrilatère pour pouvoir ensuite placer les gabarits et obtenir les côtés manquants.

Observations réalisées et bilan de l'année 1

Dans le document distribué aux participants à l'issue de la première séance de formation figuraient les différentes phases de cette situation, les procédures attendues, les difficultés spécifiques de chacune des phases mais aussi une rubrique « les mots pour le dire » afin de fournir aux enseignants une aide à l'institutionnalisation.
Nous avons analysé les modifications apportées par les enseignants au cours de la préparation des séances et de leur mise en œuvre. Nous avons relevé des modifications témoignant d'interprétations erronées montrant par exemple que certains enseignants n'avaient pas compris (ou avaient oublié) que le changement de taille du modèle dans la phase 3 permettait d'éviter le report de longueur. Mais, nous avons aussi relevé des modifications témoignant d'une réelle appropriation de la situation de la part des enseignants. Citons par exemple le choix d'ajouter un gabarit intrus obligeant les élèves à placer chaque gabarit sur la figure modèle pour identifier ceux à utiliser (figure 16) ou encore l'usage d'une ficelle pour rechercher des alignements (figure 17).

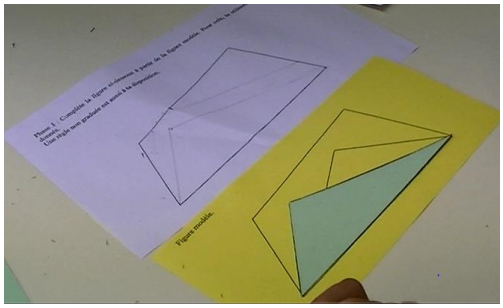


Figure 16

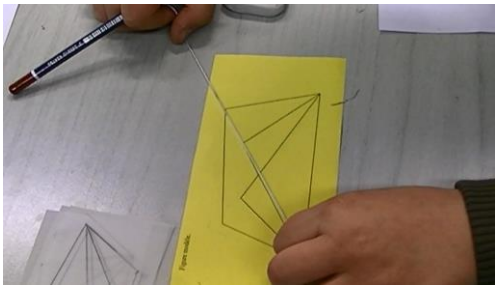


Figure 17

Suite à cette analyse *a posteriori*, nous avons organisé et mené la deuxième séance de formation continue. Nous avons demandé aux participants de prendre appui sur leurs observations pour compléter un tableau en trois colonnes en indiquant les procédures observées dans leurs classes, les difficultés rencontrées par les élèves et les aides apportées. La mise en commun de ce travail a débouché sur un document collectif (Annexe 1).

Comme à la fin de l'année 0, nous avons dressé le bilan de l'année écoulée dans l'équipe restreinte et aussi entre chercheurs dans le but non seulement de rendre compte des activités réalisées au sein du LéA auprès de l'IFE mais aussi pour fixer les orientations à donner à notre projet l'année suivante. Au cours de cette deuxième année de travail, nous avons appris sur l'utilisation de cette situation dans des classes ordinaires et la description qu'il serait pertinent d'en faire dans une ressource mais nous nous interrogeons encore à propos des indications à donner aux enseignants à propos de la dévolution (jusqu'où aller dans l'analyse collective de la figure modèle avant la phase de recherche ?), de la régulation (moyens d'étayage individuel, gestion de l'avancée du groupe), de l'institutionnalisation (indiquer les mots pour le dire dans la ressource ne suffit pas). Comment les aider dans la mise en œuvre de certains gestes professionnels ? Ne faudrait-il pas les aider à distinguer les moments d'institutionnalisation locale après chaque phase et l'institutionnalisation globale qui doit revenir sur les quatre phases de la situation ?

L'organisation à deux niveaux, entre groupe restreint et groupe élargi, semble satisfaisante et nous la poursuivons en 2015-2016 en veillant à prendre en compte les demandes émises par les enseignants. En effet, si la mise en œuvre de la situation proposée a permis aux enseignants de mieux comprendre l'approche développée par les chercheurs, la demande de penser une progression à l'année, en lien avec les programmes reste forte et nous conduit à élargir le travail à la recherche de repères pour une progression sur des notions des programmes scolaires : ces repères sont proposés sous forme de situations en accord avec notre approche de la géométrie et mettant en jeu les figures des programmes pour aider les enseignants à élaborer des séances pour leurs classes (avec accompagnement par les formateurs).

Du côté des chercheurs, les questions évoluent en conséquence : il s'agira d'interroger les possibilités d'intégration de ces repères dans les pratiques ordinaires (quelle est l'utilité de ces « outils » donnés aux enseignants ? Qu'est ce qui reste à la charge des enseignants ? Quel contrôle de cette appropriation par les enseignants ? Comment mieux cibler les « idées clés » de notre approche (à mettre en lien avec les nouveaux programmes pour plus de légitimité) ?

DISCUSSION

Le travail mené dans le cadre du LéA, nous a amenées à affiner notre méthodologie et à préciser le rôle de la ressource comme fin (objectif commun pour le groupe élargi) et moyen (objectifs différents pour chaque catégorie d'acteurs) ainsi que les hypothèses (G) et (P) mais

des questions essentielles demeurent sur les moyens théoriques de contrôler les deux niveaux et le lien entre les deux. Dans cette troisième partie, nous revenons sur ces questions que nous commençons par préciser, en nous appuyant sur un premier bilan du LéA à mi-parcours.

Des questions à propos des deux niveaux et de leur lien

Avec quels outils tester la validité théorique des situations (niveau 1) ?

Nos hypothèses sur l'enseignement de la géométrie sont issues d'un questionnement épistémologique de la géométrie d'Euclide, d'hypothèses sur le fonctionnement cognitif lié à la visualisation des figures et d'observations par Marc Godin de procédures inattendues d'élèves de l'enseignement spécialisé dans les activités géométriques, notamment d'un détournement d'instruments comme des règles ou des équerres en carton. La théorie des situations nous a servi pour l'élaboration des situations et l'identification des variables didactiques. Leur mise en œuvre a été observée dans un petit nombre de classes mais elles ont souvent rencontré l'adhésion des enseignants à la fois parce qu'elles leur fournissaient des moyens d'aborder la géométrie par des résolutions de problèmes et qu'elles les aidaient à comprendre des difficultés de leurs élèves dans la manipulation des instruments classiques, en particulier de l'équerre. Cependant les observations de classe ont aussi montré les difficultés à mettre en place un contrat didactique adéquat et la difficulté pour les enseignants à faire le lien entre ces situations et l'enseignement des notions du programme. La validité des situations ne peut se tester que sur les apprentissages des élèves sur le long terme, et à condition que notre approche ait vraiment inspiré l'enseignement de la géométrie. Le travail dans le LéA a permis de davantage prendre en compte les besoins de l'enseignement ordinaire. Cependant, l'adaptabilité à l'enseignement ordinaire est testée dans un cadre encore assez protégé et très restreint : celui d'un stage de formation continue sur 2 ans en petit groupe (deux fois six heures plus un léger suivi dans les classes). Nous reviendrons sur nos hypothèses concernant l'enseignement de la géométrie et les moyens d'en extraire des éléments fondamentaux plus faciles à diffuser et à tester dans les classes.

Quelle dialectique entre les hypothèses de niveau 1 et de niveau 2 dans l'IDD ?

Nous avons pu voir que les niveaux 1 et 2 ne sont pas indépendants et qu'une dialectique doit s'exercer entre ces deux niveaux pour aboutir à la production d'une ressource utile pour l'apprentissage des élèves et utilisable efficacement par les enseignants. Cette dialectique s'exerce en particulier par le travail au sein du groupe restreint et par l'existence de boucles itératives entre la conception et la réalisation des séances sur le terrain. Faut-il intégrer, dans la définition même de l'IDD, une instance de conversion dans les deux sens entre recherche et enseignement ordinaire comme moyen de faire vivre une dialectique entre les deux niveaux de questionnement ?

Avec quels outils tester l'adaptabilité à l'enseignement ordinaire (niveau 2) ?

Plus généralement le niveau 1 concerne les hypothèses sur le contenu et l'organisation de milieux possibles pour l'apprentissage. Nos outils théoriques restent ceux de l'analyse épistémologique et cognitive, et de la théorie des situations didactiques. Mais pour la mise en œuvre de situations en classe, il doit y avoir compatibilité entre les milieux organisés et le contrat didactique. Or c'est l'analyse de niveau 2 qui nous renseigne sur cette compatibilité. Pour le niveau 2, nous articulons la théorie des situations avec la double approche qui nous permet de considérer l'enseignant du point de vue de son développement professionnel. Faut-il y ajouter d'autres éléments théoriques ? Comment les articuler ?

Nous allons à présent revenir sur ces questions.

Mieux caractériser notre approche de la géométrie (niveau 1)

A mi-parcours du LéA, nous identifions mieux les éléments fondamentaux sur lesquels nous devons travailler avec les enseignants en géométrie et la manière dont on peut les formuler en termes compréhensibles pour eux. Il ne suffit pas de proposer des situations complexes qui représentent le savoir géométrique qu'on veut faire acquérir aux élèves. Il faut identifier des briques élémentaires qui permettent de fabriquer de telles situations.
Un moyen de le faire dans notre cas est de considérer que reproduire des figures quelconques, c'est reporter des formes et des grandeurs. Il faut donc s'intéresser aux moyens de reporter des formes et des grandeurs (longueurs et angles). On peut commencer à le faire avec des instruments qui permettent de reporter sans les dissocier toutes les informations sur les figures, comme les gabarits et pochoirs ou le papier calque. Un des objectifs de l'enseignement de la géométrie est d'apprendre à dissocier les différentes informations qui caractérisent une figure. Les instruments de géométrie usuels : règle, équerre, compas permettent de tracer des lignes (droites et cercles) et de reporter des angles droits. On ne peut pas considérer d'emblée le compas comme un moyen de reporter des longueurs, c'est pourquoi nous ajoutons un instrument de report de longueur qui permet de la matérialiser. Les angles, autres que les angles droits, peuvent se reporter avec un papier calque ou un gabarit que l'on fabrique en pliant du papier. Le compas comme instrument de report de longueur ou d'angle ne vient que dans un deuxième temps, quand s'amorce la vision points des figures.
Il faut que les enseignants puissent identifier ces briques élémentaires concernant les reports de formes et de grandeurs dans des situations plus complexes. Les propriétés géométriques vont permettre de les formaliser progressivement.
Un autre point important est d'identifier avec les enseignants des savoirs généralement ignorés par l'enseignement et qui nous paraissent essentiels pour que les savoirs de G2 puissent s'appuyer sur ceux de G1 en dépassant les malentendus identifiés dans de nombreuses recherches. Par exemple :
- Un segment est porté par une droite qui peut se prolonger autant qu'on veut de chaque côté.
- Pour définir un segment, il faut deux points ou un point et une droite support sur laquelle on reporte une longueur ; reporter une longueur à partir d'un point seul donne un cercle.
- Un point s'obtient par l'intersection de deux lignes.

Les situations que nous proposons permettent de donner une place dans l'enseignement à ces savoirs ignorés.

Place d'une instance de conversion dans la démarche d'IDD (dialectique niveaux 1 et 2)

Il nous est apparu que le groupe restreint et la présence dans ce groupe de maîtres formateurs qui sont à la fois enseignants et formateurs jouait un rôle essentiel qui devait être identifié en tant que tel dans la démarche d'IDD. Le fait de rédiger en commun une ressource pour les enseignants est aussi un élément important de la dialectique parce qu'il donne un but commun à tous les acteurs du groupe restreint et même à ceux du groupe élargi.
C'est dans le groupe restreint que peut s'exercer concrètement la dialectique entre les deux niveaux de questionnement de l'IDD. L'existence de ce groupe crée un lieu où les hypothèses de recherche se traduisent en hypothèses de travail qui sont amenées à évoluer dans le travail commun, ce qui amène ensuite à préciser ou modifier les hypothèses de recherche.
Une alternance de modalités de travail diverses dans le groupe laissant plus ou moins d'initiative aux formateurs de terrain permet de mettre l'accent, suivant les besoins, soit sur l'étude de la transposition didactique et des situations soit sur l'étude des pratiques ordinaires et de leurs possibilités d'évolution.

Un des objets du travail de l'année prochaine sera sans doute de préciser mieux ce que nous entendons par ressource et quel rôle nous lui faisons jouer. D'abord, il s'agit d'une ressource pour les enseignants qui contient des fiches ressources pour les élèves accompagnées d'éléments d'analyse à propos de leurs besoins. En effet, c'est souvent par le biais des difficultés constatées chez les élèves qu'on enclenche la réflexion des enseignants.
L'organisation de la ressource est un point crucial parce que nous savons que les enseignants ne sont pas prêts à lire de longs textes avant de rencontrer une activité qu'ils peuvent proposer à leurs élèves. Elle doit donc comporter des activités pour les élèves qui sont presque clés en main mais, avec néanmoins des repères pour les adapter sans en perdre l'intérêt. De plus, les situations proposées doivent s'intégrer dans une progression et non rester en marge du reste de l'enseignement de la géométrie. Une piste que nous explorons cette année est de rédiger des progressions théoriques (des repères dans les savoirs) qui mettent en œuvre les hypothèses G et P et couvrent toute l'école élémentaire sur un sujet familier et d'indiquer des croisements entre ces progressions : nous avons commencé avec une progression englobant le carré, le rectangle et le triangle rectangle.
La ressource doit comporter ce qui relève du contenu à apprendre par les élèves, y compris des formulations pour les élèves mais aussi des connaissances complémentaires sur le contenu pour l'enseignant et des questions de gestion de la progression des connaissances des élèves en classe. Nous ne pouvons pas nous contenter de la description de la situation, des procédures attendues des élèves et de ce qu'il y a à retenir. Il faut indiquer jusqu'où on peut aller dans l'explicitation de la consigne, quels types d'aide on peut apporter et dans quelles conditions. C'est en effet un des points de difficulté que nous avons repérés dans nos observations. Plusieurs niveaux de ressources sont ainsi à envisager.
Il faut de plus que la ressource soit assez proche des pratiques ordinaires pour que les enseignants la reconnaissent comme utilisable et s'en servent. Il faut aussi qu'elle leur permette d'acquérir des connaissances nouvelles sur le contenu lui-même et sur sa didactique. Il nous semble que ces conditions sont assez proches de ce que Adler (2010) appelle la transparence de la ressource, mais dans le cas d'une ressource pour les élèves.
Ainsi, la nécessité de l'instance de conversion semble découler de la volonté de prendre en compte les deux sens des rapports entre recherche et enseignement : diffuser des résultats de recherche via une ingénierie didactique et répondre aux besoins de l'enseignement. C'est le lieu où s'organise une dialectique entre les niveaux 1 et 2 de l'IDD et c'est aussi le moyen d'élaborer une ressource utile du point de vue des chercheurs (répondant aux besoins qu'ils ont identifiés) et utilisable du point de vue des enseignants (répondant aux besoins ressentis).

Quels outils théoriques utiliser pour tester l'adaptabilité des situations ? (niveau 2)

Pour recueillir des éléments de réponses à propos de l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire, le chercheur (en position surplombante) s'appuie d'une part sur le travail mené lors des séances en circonscription (groupe restreint et groupe élargi), ce qui correspond à la flèche 3, et d'autre part sur les expérimentations menées dans les classes, ce qui correspond à la flèche 2[8]. Mais, quels outils théoriques utiliser pour tester cette adaptabilité ?

Cerner le « point de vue » des enseignants

Dans le cadre de notre dispositif de travail, la prise en compte du point de vue des enseignants est bien évidemment facilitée par les EMF et CPC qui ont une meilleure connaissance du

[8] Le chercheur recueille d'autres types de données (certaines concernent le niveau 1) mais nous nous limitons ici aux questions relevant du niveau 2.

terrain que les chercheurs (ne serait-ce que parce qu'ils y ont plus facilement accès). L'instance de conversion facilite donc la prise en compte du point de vue des enseignants par les chercheurs (et du point de vue des chercheurs par les enseignants). Dans l'état actuel de notre recherche, nous cherchons à mieux outiller nos analyses et dans ce but nous questionnons certains aspects de notre méthodologie en les mettant en parallèle avec d'autres notions issues d'autres cadres théoriques.

La notion de monde, telle qu'elle est développée dans le travail de Beguin qui, lui-même, emprunte ce concept à Prieto[9], vise justement à conceptualiser la notion de « point de vue » (Beguin & Cerf, 2004 ; Beguin, 2005). Il ne s'agit pas ici d'un point de vue purement subjectif comme dans l'expression « à chacun son point de vue » pour signifier « à chacun son opinion, son avis » mais d'un point de vue situé c'est-à-dire défini par rapport au métier exercé ou pour le dire autrement défini par rapport à « d'où le sujet voit ». Ainsi, face à un même objet (par exemple une situation de travail) coexistent différents systèmes de référence, différents « points de vue », différents mondes qui sont autant d'*arrière-plans à partir desquels chacun se saisit d'une réalité tangible*. Cet arrière-plan est construit par et pour l'action par le sujet ce qui fait dire à Beguin que ce monde est construit et orienté. Beguin utilise cette notion pour étudier l'activité pour la conception de situation de travail lorsque celle-ci est considérée comme un processus développemental (c'est-à-dire un processus où caractéristiques des situations et activités de travail évoluent dialectiquement). La notion de monde permet donc de conceptualiser le « point de vue des opérateurs » et le « point de vue des concepteurs » et d'étudier ce qui se joue à l'interface entre les « points de vue » en présence.

Le travail de conception est alors vu comme la construction d'un monde commun, lieu d'échanges et d'apprentissages mutuels au sein duquel de nouvelles propositions émergent peu à peu. Il est important de noter que la construction de ce monde commun ne va pas de soi, il y a des conflits, des désaccords mais c'est *« lorsqu'on s'éloigne d'un monde qu'on prend conscience de son existence »* (Beguin, 2005). Le résultat du travail des uns n'est jamais définitif, ce n'est qu'une hypothèse de travail à confirmer dans le monde des autres. Sans aller jusqu'à une intégration de cette notion dans notre méthodologie de recherche (le travail d'articulation entre les cadres théoriques reste à faire), nous souhaitons souligner quelques similitudes.

Dans le travail de conception de ressources mené au sein du LéA, nous cherchons à prendre en compte à la fois le « point de vue des chercheurs » (finalisé par la production de savoirs scientifiques) et « celui des enseignants » (finalisé par l'action auprès des élèves). Dans notre recherche, nous étudions ce qui se joue dans l'espace interinstitutionnel que nous avons créé afin de mieux comprendre ce qui peut faire obstacle à l'adaptabilité des situations à l'enseignement ordinaire ou au contraire ce qui peut la favoriser. Ce travail de conception est donc bien un lieu d'échanges et d'apprentissages mutuels. L'évolution de notre projet témoigne que la construction d'une ressource commune ne va pas de soi (il y a des débats, des désaccords, des besoins à prendre en compte) : le résultat du travail des uns n'est jamais définitif, ce n'est qu'une hypothèse de travail à confirmer par les autres.

Ce sont ces moments de confrontation (moments où le travail des uns n'est pas validé dans le monde des autres) et leur dynamique (comment évoluent ces mises en tension et comment les différents protagonistes parviennent ou non à les dépasser) qui peuvent permettre au chercheur en position surplombante de cerner ce qui est prioritaire pour les chercheurs, mais surtout ce qui est prioritaire pour les enseignants (flèche 3 sur la figure 10).

[9] Prieto, L. J. (1975). *Pertinence et pratique. Essai de sémiologie*. Paris: Editions de Minuit.

Cerner la contribution de l'enseignant pour mieux réinterroger la situation et la ressource

Interrogeons-nous à présent sur la méthodologie à mettre en place par le chercheur en position surplombante pour traiter les données recueillies lors des expérimentations menées en classe (flèche 2 sur la figure 10). A ce stade-là du travail, ce dernier cherche à identifier ce qui doit être modifié dans la situation telle qu'elle a été conçue pour être plus adaptée aux pratiques. Mais, pour cela, il doit pouvoir identifier parmi les écarts constatés entre la situation proposée et sa mise en œuvre en classe, ceux qui sont révélateurs d'un manque d'adaptabilité et qui doivent déboucher sur des modifications à apporter à la situation et à la ressource présentant cette situation.

L'écart entre le travail prescrit et le travail réel est un sujet d'étude classique des chercheurs en analyse du travail qui opèrent comme l'indiquent Ombredane et Faverge (1955) une distinction fondamentale entre tâche et activité, c'est-à-dire entre « ce qu'il y a à faire » et « ce que l'on fait ». Selon ces chercheurs, cet écart est irréductible, y compris dans les situations où le travail est présenté comme une « simple » exécution, voire même lorsque la prescription d'une procédure est faite sous forme par exemple de fiche technique, même lorsque cette fiche technique prétend rendre compte de la totalité de ce qui est à faire. Lorsque la tâche est difficilement explicitable (et c'est particulièrement le cas pour les tâches enseignantes qui sont complexes) la contribution de l'agent est importante.

Dans le cadre de notre recherche, lorsque nous analysons les séances mises en œuvre, nous avons besoin de cerner la contribution de l'enseignant pour mieux distinguer ce qui est dû à la situation elle-même et ce qui dépend de l'enseignant (c'est-à-dire, ses propres choix, ses connaissances, son parcours…).

Le modèle d'analyse présenté ici est un modèle de l'activité de l'enseignant (Mangiante-Orsola, 2012) adapté d'un schéma de Leplat (1997) qui analyse l'activité de l'agent comme une suite de tâches. Nous y distinguons trois niveaux ou positions pour le maître : la représentation de la tâche (tout ce que l'enseignant met en œuvre pour se représenter tout ce qu'il pense qu'on attend de lui), la redéfinition de la tâche (tout ce que l'enseignant met en œuvre pour redéfinir la tâche représentée en fonction de ses propres finalités, ce qu'il pense être capable de faire) et la réalisation de la tâche (tout ce que l'enseignant met en œuvre pour réaliser la tâche redéfinie).

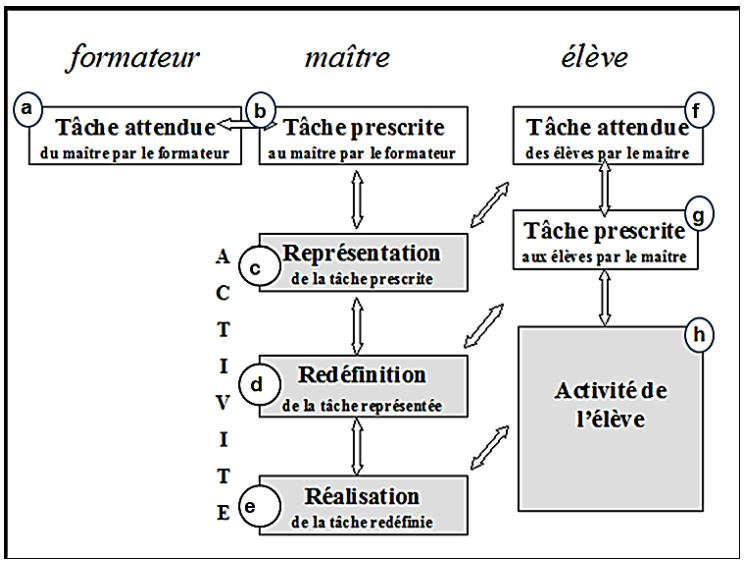


Figure 18

Par exemple, certains enseignants, malgré l'accompagnement mis en place, peuvent ne pas percevoir les enjeux de la situation et le rôle qu'ils sont censés jouer (écart entre la tâche

prescrite, c'est-à-dire, la tâche qui leur a été prescrite via la formation continue et la ressource et la tâche représentée, c'est-à-dire, ce qu'ils pensent que nous attendons de leur part. L'écart est alors au niveau de la représentation de la tâche. Certains enseignants peuvent avoir une idée assez claire de ce qu'on attend d'eux, mais faire d'autres choix, qui peuvent d'ailleurs être tout à fait pertinents, comme par exemple travailler avec le Tableau Blanc Interactif parce que cela leur semble plus pratique mais ils créent un écart au niveau de la redéfinition de la tâche parce que le TBI induit d'autres façons de manipuler les instruments (virtuels)… Ici, l'enseignant redéfinit la tâche représentée en fonction d'autres finalités (qui lui sont propres). Les écarts peuvent aussi survenir au moment de la réalisation de la tâche. Ils sont dus par exemple à la manière dont les enseignants vont réguler, vont gérer les imprévus, etc.
Ainsi, l'analyse de la contribution de l'enseignant doit permettre de mieux cerner les éléments de la situation et/ou de la ressource qu'il convient de revisiter aux niveaux 1 ou 2.

CONCLUSION

Au cours de la troisième et dernière année du LéA, nous envisageons de tester avec d'autres enseignants les documents produits et d'apporter les ajustements nécessaires à la rédaction d'une ressource diffusable auprès d'enseignants n'ayant pas suivi de formation spécifique. Ce sera aussi l'occasion d'affiner nos avancées théoriques et méthodologiques. Cependant, le travail de conception n'est jamais véritablement achevé : à chaque bilan, les propositions des uns peuvent constituer un nouveau point de départ qui oriente le travail des autres vers de nouveaux choix et de nouvelles hypothèses de travail à tester.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADLER J. (2010) La conceptualisation des ressources. Apports pour la formation des professeurs de mathématiques. In Gueudet G., Trouche L. (Eds.) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques.* Lyon : INRP et Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

BEGUIN P. (2005) Concevoir pour les genèses professionnelles. In Rabardel P., Pastré P. (Eds.) *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques activités développement*. Toulouse : Octarès.

BEGUIN P., CERF M. (2004) Formes et enjeux de l'analyse de l'activité pour la conception des systèmes de travail. *Activités*, 1(1), 54-71.

BESSOT A. (2011) L'ingénierie didactique au cœur de la théorie des situations. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 29-56). Grenoble : La pensée sauvage.

BROUSSEAU G. (1983) Etude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble.

BROUSSEAU G. (2006) Mathematics, Didactical engineering and observation in Novotná J., Moraová H., Krátká M., Stehlíková N. (Eds) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1*. (pp. 3-18). Prague: PME.

BROUSSEAU G. (2013) Introduction à l'Ingénierie Didactique. guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2013/12/Introduction-à-lingénierie-didactique3.pdf

BROUSSEAU G., BROUSSEAU N. (2006) *L'ingénierie didactique en mathématiques.* Séminaire

du DAEST, Bordeaux.

BUTLEN D., MASSELOT P., PEZARD M. (2009) Gestes et routines professionnels : un enjeu pour analyser et intervenir sur les pratiques enseignantes. In Kuzniak A., Sokhna M. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et développement, enjeux de société et de formation. Actes du colloque EMF2009. Revue internationale Francophone,* numéro spécial. HTTP://WWW.FSE.ULAVAL.CA/LDEBLOIS/PDF/BUTLEN.PDF, consulté le 18 novembre 2015.

CHEVALLARD Y. (2005) La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire : transposition didactique des mathématiques et nouvelle épistémologie scolaire. In *La place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire*, pp. 239-263. Paris : APMEP.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

GUEUDET G, TROUCHE L. (2010) *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs de mathématiques.* Rennes : PUR et INRP.

HOUDEMENT C. (2007) A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM* 67, 69-84.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 175-195.

LECLERCQ R., MANGIANTE-ORSOLA C. (2014) Étude d'un dispositif articulant production de ressources et formation continue en géométrie : quels effets sur les pratiques des enseignants ? *Actes du XLème colloque de la COPIRELEM*. Nantes

LEPLAT J. (1997) *Regards sur l'activité en situation de travail. Contribution à la psychologie ergonomique*. Paris : PUF.

MANGIANTE-ORSOLA C. (2012) Une étude de la cohérence en germe dans les pratiques de professeurs des écoles en formation initiale puis débutants. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol 32(3), 289-331.

MANGIANTE-ORSOLA C., PERRIN-GLORIAN M.J. (2016) Elaboration de ressources pour la classe, interface entre recherche et enseignement ordinaire. In Chopin M.P., Cohen-Azria C., Orange-Ravachol D. (Eds.) *Questionner l'espace. Les méthodes de recherche en didactiques.* (pp. 79-94) Lille : Presses Universitaires du Septentrion.

OMBREDANE A., FAVERGE J-M. (1955) *L'analyse du travail*. Paris : PUF.

PERRIN-GLORIAN M.J. (2011) L'ingénierie didactique à l'interface de la recherche avec l'enseignement. Développement de ressources et formation des enseignants. In C. Margolinas et al. (Eds.) *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 57-78). Grenoble : La pensée sauvage.

PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (2014) De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école* 222, 26-36.

PERRIN-GLORIAN M.J., GODIN M. (en cours de publication) Géométrie plane : pour une approche cohérente du début de l'école à la fin du collège.

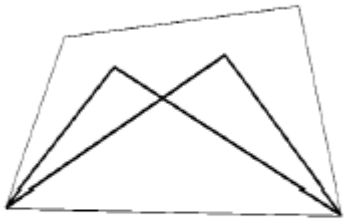
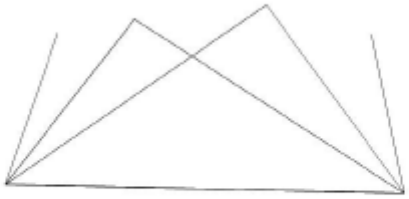
PETITFOUR E. (2015) *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

ROBERT A., ROGALSKI J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des

enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

ANNEXE 1

Phase 3

Figure modèle	Amorce et instruments
	

Variables didactiques :

Modèle à la même taille ① ou non ②

Modèle sur la même feuille ③ ou séparé④

Procédures observées	Difficultés rencontrées	Aides / adaptations apportées	Mots pour le dire
● Seuls les deux côtés latéraux sont prolongés. Le côté manquant de la figure est tracé après : - Estimation (plus ou moins précise) - Mesure par rapport à la taille du modèle - Réajustement par rapport à ce qui a été observé lors de la phase de vérification avec le calque - Superposition de l'amorce avec le modèle ● Prolongement des deux côtés latéraux, puis tracé du quatrième côté en s'appuyant sur la perception, puis prolongement des côtés des triangles et réajustement. ● Procédure attendue : perception des alignements (diagonales) et des sommets à l'intersection des diagonales et des côtés latéraux prolongés.	L'absence de gabarit n'incite pas les élèves à repartir sur la figure-modèle. Les élèves se contentent de procédures hasardeuses Le fait que les triangles constituent des lignes fermées n'incite pas les élèves à prolonger les côtés. Les élèves ne savent pas ce qu'ils doivent chercher. Il faut prolonger des lignes pour trouver des points. Il faut envisager une intersection de droites pour un point. Ce point est vu comme un sommet et non comme l'intersection de deux droites. Ces actions sont à faire dans un ordre précis.	→ Etayage → Utilisation de la ficelle pour repérer des alignements → Rappel du contrat didactique et notamment qu'on ne peut pas se fier qu'à la perception → Etayage pour clarifier ce qu'on cherche : les deux points (activité intermédiaire autorisant les reports de longueur ?)	→ « On ne peut pas faire confiance à nos yeux. L'œil n'est pas un outil géométrique. » → Deux points sont nécessaires pour déterminer / tracer une droite. → Un point peut s'obtenir par l'intersection de deux droites. → Les côtés des triangles sont portés par ces deux droites.

INSCRIPTION DU RECIT DANS LE MILIEU EN RESOLUTION DE PROBLEMES DE MATHEMATIQUES : PROPOSITION ET MISE A L'EPREUVE D'UN MODELE D'INTERACTION DES PROCESSUS DE NARRATION ET DE RAISONNEMENT DANS UNE ACTIVITE DE RESOLUTION DE PROBLEMES

Marianne **Moulin**

EA 4148 S2HEP (Sciences, Société, Historicité, Éducation et Pratiques)
EA 2462 Laboratoire de Mathématiques de Lens
marianne.moulin@cue-lillenorddefrance.fr

Résumé
Notre travail vise à explorer la pertinence du Récit en tant que mode de pensée et support potentiel à la construction de raisonnement. Ainsi, dans notre thèse, nous nous sommes attachés à caractériser le rôle du Récit dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes en mettant en relation les processus inhérents à cette activité et les fonctions du Récit : structuration, problématisation, explication. Nous avons en particulier caractérisé deux espaces problèmes en interrelation : *L'espace problème du contenu* (relatif au Problème de Mathématiques) et *l'espace problème rhétorique* (relatif au Récit). Notre travail théorique et expérimental nous a permis de déterminer les conditions nécessaires à une inscription du Récit dans le milieu didactique permettant d'envisager une co-construction entre récit et raisonnement. La situation que nous avons proposée (cycle 3) a amené les élèves à produire différents types de récits pour résoudre des problèmes numériques. Nos résultats mettent en évidence que le Récit enrichit le milieu didactique en particulier le *registre empirique* et le *registre des nécessités* et permet à l'élève de circuler entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (*milieu matériel, milieu objectif, milieu de référence*). C'est en produisant différents types de récits que les élèves, tout en prenant en charge les contraintes mathématiques de la situation, s'affranchissent du monde sensible et s'engagent dans une véritable activité de preuve mathématique (production d'exemples, de contre-exemples, de conjectures, d'argumentations, etc.).

Mots clés
Récit, Fonctions du récit, Raisonnement, Langage, Milieu Didactique, Jeu

INTRODUCTION

Le travail de thèse[1] présenté au séminaire national de janvier 2016 et dans ce texte a été conduit sous la direction de M. Eric Triquet et de Mme Virginie Deloustal-Jorrand au sein du laboratoire S2HEP. Il a été soutenu en juillet 2014 à l'Université Claude Bernard Lyon 1

[1] Moulin, M. (2014) *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement,* Thèse de doctorat disponible en ligne, Université Claude Bernard Lyon 1, 328p, http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01066443.

(Moulin, 2014). Nous y avons proposé une approche par le Récit qui se fonde sur les travaux de Bruner (2003, 2008) mettant en évidence la tendance naturelle de l'Humain pour le Récit ainsi que le rôle de ce dernier dans la construction des connaissances :

> Tout indique (…) que la manière la plus naturelle et la plus précoce dont nous organisons nos expériences prend précisément une forme narrative (Bruner, 2008, p. 151).

Depuis 2007, ce type d'approche narrative s'est développé au sein du laboratoire S2HEP en Sciences Expérimentales avec pour objectif de caractériser les fonctions du Récit dans les apprentissages scientifiques. Notre travail de thèse visait à étendre cette approche aux mathématiques et plus précisément à en caractériser les fonctions dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes. En nous appuyant sur les travaux menés au S2HEP ainsi que sur les perspectives ouvertes par notre mémoire de Master (Moulin, 2010), nous avons fait le postulat initial que l'acte de construction et de production d'un récit permet à l'élève, sous certaines conditions, la prise en charge ou la mobilisation de connaissances, la construction de nouvelles connaissances ainsi que la (re)structuration des connaissances anciennes et nouvelles. Ce postulat a amené un choix épistémologique particulier dans notre approche : Nous intéresser au Récit non pas en tant qu' « objet matériel » c'est à dire un texte déjà construit (respectant des caractéristiques de structure et de forme singulières) qu'il est possible de donner à étudier à des élèves, mais en nous intéressant au Récit en tant que « mode de pensée » dans son acte de construction. Comme le souligne Bruner, « il est [en effet] possible de distinguer avec précision ce qui appartient au mode de pensée narratif de ce qui est texte ou discours narratif » (Bruner, 2008, p. 166). Avec cette distinction nous envisageons l'inscription du Récit dans le milieu didactique comme un outil permettant aux élèves de mobiliser, dans l'élaboration de leur raisonnement, des processus heuristiques et structurants inhérents à la construction d'un récit. Confronté à une *situation problématique*, c'est à dire un problème de mathématiques ou toute autre situation conduisant à mobiliser des connaissances mathématiques (pour répondre à une question ou produire une explication), l'élève peut s'engager, ou être amené à s'engager, dans la production d'un récit. Nous faisons l'hypothèse que cette production de récit (qu'elle soit naturelle ou imposée) dans le cadre d'une activité de résolution de problèmes, peut participer à la production du raisonnement, à sa structuration et sa justification.

Dans ce texte, nous traitons tout d'abord les aspects théoriques de cette hypothèse en proposant une modélisation des objets « Problème » et « Récit » qui nous permet d'anticiper sur l'action potentielle du Récit sur le milieu didactique (Brousseau, 1990). En nous appuyant sur les travaux de Scardamalia & Bereiter (1987, 1998), nous caractérisons un « espace de transfert de processus » entre deux activités a priori différentes : la construction d'un récit et la résolution d'un problème. Nous mettons ainsi en évidence la possibilité d'inscrire et de construire un raisonnement dans un espace de travail qui soit à la fois mathématique et rhétorique et la possibilité d'une interaction productive entre les deux activités voire une co-construction entre récit et raisonnement. Dans une seconde partie, nous présentons la mise à l'épreuve expérimentale de modèle en présentant quelques résultats significatifs de l'ingénierie didactique développé dans notre thèse. Nous analysons dans cette même partie les conditions et enjeux d'une rencontre entre Récit et Problème, construction de récit et résolution de problème.

TRAVAIL THEORIQUE : MODELISATION DES INTERACTIONS ENTRE CONSTRUCTION DE RECIT ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Pour introduire cette partie théorique, nous proposons une analyse du discours d'un élève de cycle 3 pendant la correction collective d'un travail de résolution de problèmes (Enoncé :

figure 1 ; Réponse de l'élève : Figure 2). Le discours de l'élève est proposé dans le tableau 1.

Énoncé	Règles du jeu	
Laura joue aux toupies. Pendant le début de la partie, elle gagne 5 points. En tout elle a gagné 3 points. Que s'est-il passé pendant la fin de la partie ?	- 1	pour le joueur qui lance sa toupie en dehors du stadium
	- 3	pour le joueur qui touche le stadium durant la manche
	+ 3	pour le joueur éjecte la toupie de son adversaire
	+ 2	pour le joueur qui coince son adversaire en zone de pénalité
	+ 1	pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire tout en restant dans le stadium

Figure 1 : *Énoncé du problème*

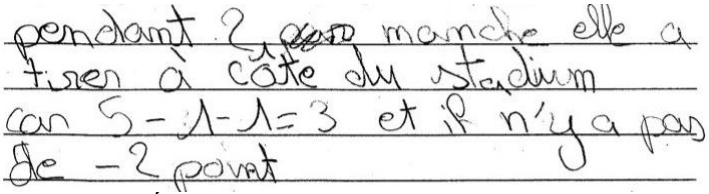


Figure 2 : *Énoncé du problème et Réponse de l'élève*

1	Bah au début, moi je pensais que ça allait être en une manche, que ça allait être en fait … puisque en tout on disait qu'elle [gagnait] trois points.
2	Puisque elle en avait cinq au début. Et ensuite elle en avait trois, elle perd deux points donc.
3	Et puisque y a pas dans la règle moins deux points y a que un ou moins trois (…) Donc ensuite moi j'ai dit qu'il fallait faire en deux manches,
4	deux fois en tirant à coté du stadium comme ça, ça fait moins deux ».

Tableau 1 : *Transcription du discours de l'élève*

Le raisonnement décrit ici débute par une réflexion centrée sur des aspects relatifs au récit (Tableau 1 - Ligne 1) : l'énoncé « en tout elle a gagné 3 points » suggère à l'élève une fin de partie en une étape. En conservant cette idée d'une étape unique, l'élève s'engage ensuite au calcul de la valeur de la transformation (Ligne 2). Il s'éloigne ainsi du contexte de la situation et du récit pour s'engager dans un travail mathématique et déterminer la transformation en jeu. Il revient ensuite au récit (Ligne 3) en s'attachant à déterminer les évènements permettant cette perte effective de deux points et se rend compte qu'il n'est pas possible de la réaliser en une seule étape. Ce travail qui ne relève pas directement des mathématiques et qui met en jeu uniquement des événements relatifs au récit amène l'élève à modifier son idée initiale et d'envisager deux manches pour la fin de la partie. Enfin (Ligne 4), il réinvestit le domaine mathématique pour valider « comme ça, ça fait moins deux » et conclure.

Avec cet exemple nous voulions mettre en évidence la circulation de l'élève entre deux espaces de travail distincts pour résoudre le problème[2]:

- un espace relatif aux savoirs mathématiques, appelé *espace problème du contenu* ;
- un espace relatif aux évènements du récit, appelé *espace problème rhétorique*.

Ces allers-retours (entre l'espace du contenu et l'espace rhétorique) conduisent à une circulation de connaissances d'un espace à l'autre. Par conséquent, une connaissance mathématique relative à l'espace du contenu, peut-être mobilisée, voire transformée sous certaines conditions, dans l'espace rhétorique (et inversement). Les travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), sur lesquels nous nous sommes appuyés pour construire notre modèle théorique, proposent une modélisation de ces transferts nommés de processus de *mobilisation* et de *transformation des connaissances.*

[2] Dans ce texte, l'expression *espace problème (rhétorique ou de contenu)* écrite en italique désigne l'espace problème tel qu'il est défini dans les travaux de Scardamalia & Bereiter (1998). Le mot Problème (avec une majuscule désignera l'objet conceptuel (théorique) en symétrique du mot Récit. Le mot problème (sans majuscule) désignera un problème particulier ou bien fera référence au sens commun du mot problème.

Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)

Les travaux de Scardamalia et Bereiter (1987, 1998) analysent les processus mis en place par des rédacteurs, experts et non experts, dans le cadre de la rédaction d'un texte. En observant les pratiques des rédacteurs, les deux auteurs ont caractérisé deux espaces de travail : *L'espace problème rhétorique*, relatif au texte en cours de rédaction, et l'*espace problème du contenu* relatif au domaine de connaissances en jeu.

> [La] caractéristique principale est l'existence de deux *espaces-problèmes* interconnectés, un espace qui concerne les problèmes de la connaissance du domaine (l'espace du contenu) et l'autre (l'espace rhétorique) concernant les problèmes relatifs au texte en cours de rédaction (Scardamalia & Bereiter, 1998, p. 31).

Les analyses menées par les auteurs montrent une interaction différente entre ces deux espaces qui est fonction du niveau d'expertise du rédacteur. Dans le cas d'un rédacteur non expert, les connaissances relatives au contenu sont simplement *mobilisées* pour être exprimées dans le texte (Modèle *d'expression des connaissances*, figure 3). Dans le cadre d'un fonctionnement expert, les processus de rédaction induisent une transformation des connaissances dans les deux espaces (Modèle de *transformation des connaissances*, figure 4).

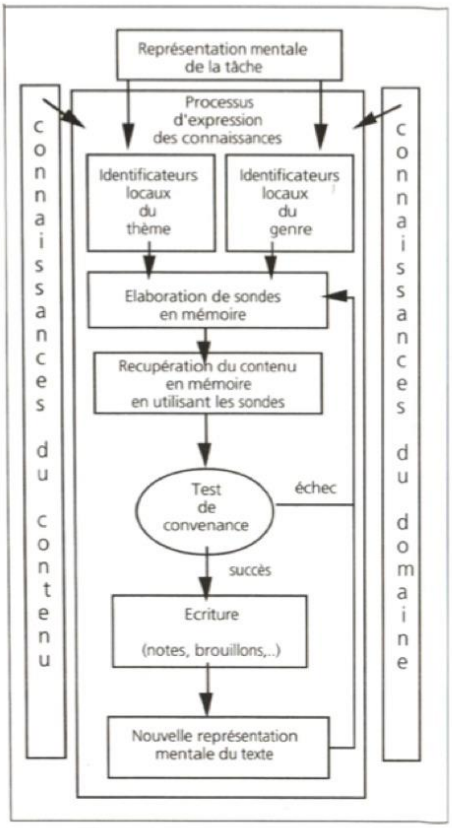


Figure 3 : *Modèle d'expression des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)*

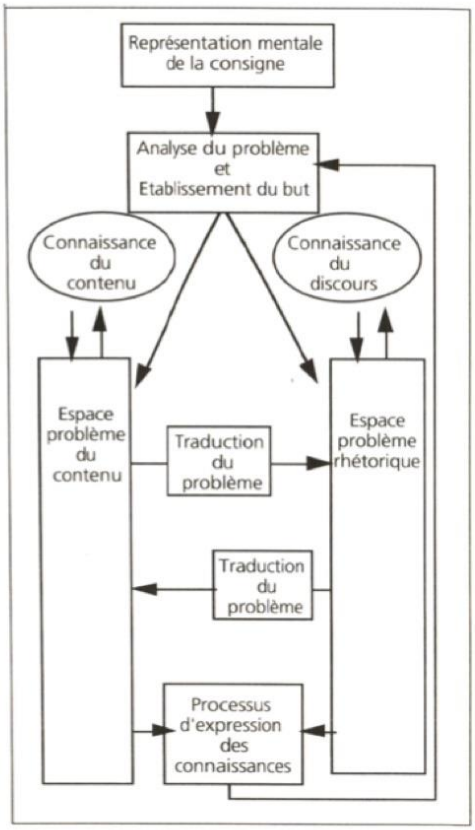


Figure 4 : *Modèle de transformation des connaissances (Scardamalia & Bereiter, 1998)*

Plus concrètement, tout problème local de l'un des deux *espaces problèmes* peut se transférer (moyennant transformation) à l'autre espace et y être résolu. Les résultats obtenus (grâce aux processus cognitifs et autres mis en œuvre pour la résolution) peuvent être transférés à nouveau vers *l'espace problème* initial (moyennant à nouveau une éventuelle transformation). Parmi les illustrations proposées par les auteurs nous pouvons citer, par exemple, que « la nécessité rhétorique de construire une transition reliant des sous-thèmes peut entraîner la

découverte d'une relation préalablement non distinguée » (*Ibid.*, p. 33). En effet, dans le cadre de la rédaction d'un texte, un rédacteur peut-être amené à proposer des transitions construites notamment via la proposition de mots de liaison. La nécessité de proposer le mot de liaison le plus adéquat ou le plus pertinent, peut conduire le rédacteur à réinterroger ses connaissances dans le domaine du contenu. Par conséquent il devra réévaluer les relations entre les deux objets de contenu concernés et ainsi transformer sa connaissance de ces deux objets via la découverte ou l'approfondissement d'une relation.

Ces travaux et plus particulièrement ce modèle de transformation des connaissances nous ont permis d'envisager l'interaction entre *l'espace problème* du Récit et *l'espace problème du contenu* relatif au Problème de Mathématiques via la possibilité d'un transfert de connaissances et de processus d'un espace à l'autre (une fois ces espaces convenablement définis dans le point suivant) et d'une co-construction entre récit et raisonnement. Pour cela, nous avons modélisé de manière symétrique les objets Problème et Récit, via la mise en évidence de trois composantes similaires, pour définir nos deux espaces problèmes et ainsi construire notre modèle afin de définir un espace de transfert de processus entre l'activité de résolution de problème et de rédaction d'un récit.

Définition des *espaces problèmes* du Problème et du Récit

L'objectif de notre travail de modélisation était de pouvoir anticiper sur les interactions possibles entre la construction d'un récit et d'un raisonnement dans une même situation. Dans ce but, nous avons retenu trois composantes symétriques pour caractériser structurellement nos *espaces problèmes* (Moulin, 2014, p. 129) :

- **La structure** interne qui apparaît (sans être forcément entièrement définie) au travers de la donnée des **informations explicites** et de leurs relations (temporelles, logiques, etc.). Dans un récit, une part importante de ces informations peut être proposée lors de l'exposé de l'état initial, dans un problème scolaire elles sont présentées dans l'énoncé. Les **informations implicites** qui complètent la situation sont à déterminer par le résolveur lors de la résolution du problème et par le récepteur du texte lors de sa lecture du récit.
- **L'élément problématique** qui est à l'origine de la construction du problème et du récit. Il est généralement présenté sous forme d'une ou plusieurs **questions** dans un problème scolaire. Il apparaît sous forme d'une **complication** grâce un élément perturbateur dans le récit et permet la construction de l'intrigue.
- **Le(s) élément(s) de solution**, construits en réponse à l'élément interrogatif. Il(s) consiste(nt) en la résolution de l'intrigue et à un état final stable, le **dénouement,** dans un récit et à la (les) réponse(s) aux questions du problème lorsqu'elle(s) existe(nt), la (les) **solution(s)**.

La construction de cette modélisation en symétrique (figure 5) est développée dans les chapitres 5, 6 et 8 de notre travail de thèse.

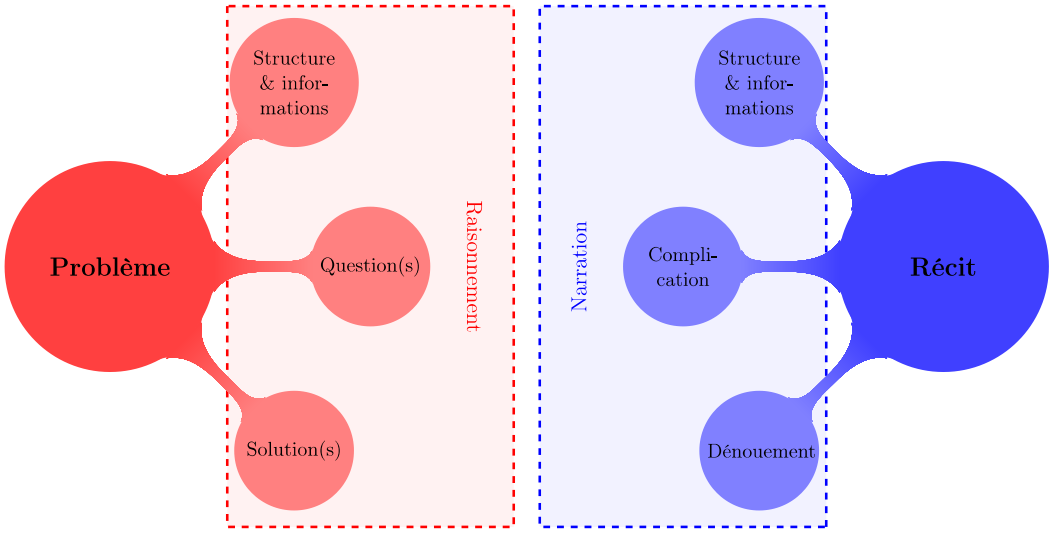


Figure 5 : *Composantes des objets Problème et Récit*

L'inscription dans le cadre développé par Scardamalia et Bereiter (1998) nous a conduits à associer ces trois composantes aux différents processus de traitement qui leur sont liés afin de définir nos deux *espaces problèmes*. En effet, dans le modèle de Scardamalia et Bereiter (Figure 4), les processus développés dans chaque *espace problème* (considérés comme des réponses à des problèmes locaux rhétoriques *traduits* pour être transformés en problèmes de l'*espace du contenu* ou inversement) sont à l'origine de la transformation des connaissances du rédacteur. La définition de nos deux *espaces problèmes* intègre donc ces processus.

Dans notre cas, du côté du Problème, ces processus s'inscrivent dans une activité globale de résolution de problème via la construction d'un raisonnement et dans une activité d'élaboration d'un texte via l'acte narratif. En référence aux travaux de Polya (1945, 1994), qui mettent en évidence les aspects heuristiques de l'activité de résolution de problèmes, nous avons mis en évidence trois type de processus du côté de *l'espace problème* du Problème (en relation avec la caractérisation des fonctions du Récit exposées ci-après) :

- **Des processus « de structuration et de modélisation » relatifs en particulier au traitement de la structure et des informations** : Dans notre approche de l'activité de résolution de problèmes, nous avons considéré que la détermination de l'ensemble des relations entre les objets mathématiques en jeu était équivalente à la résolution du problème. Ainsi, nous avons qualifié de « processus de structuration » l'ensemble des processus permettant la caractérisation (en terme de propriétés et / ou de mesure et de valeurs) des objets en jeu et de leurs différentes relations. Les processus permettant de représenter (mathématiquement ou schématiquement) la situation et de faire évoluer (au fil de la résolution du problème) ces représentations ont été considérés dans notre travail comme des « processus de modélisation ».
- **Des processus « d'élaboration et de problématisation » participant au traitement de la question** : L'élaboration de conjectures, le découpage du problème en sous-problèmes pour produire de nouvelles informations (et compléter la connaissance de la situation), la recherche d'un modèle de résolution connu ou l'élaboration d'un nouveau modèle via l'articulation de sous-problèmes sont autant de démarches que nous avons qualifiées de « processus d'élaboration et de problématisation ».
- **Des processus « calculatoires » et processus « d'explication et d'argumentation » participant à la détermination en termes de valeurs de la (des) solution(s) de la preuve de sa (leur) validité** : Au delà de la détermination de la valeur de la solution

via des processus « calculatoires » (l'application d'un algorithme, la résolution d'une équation, etc.), la résolution d'un problème nécessite la justification de la solution trouvée. Que ce soit via la rédaction d'une preuve mettant en jeu arguments logiques et théorèmes ou simplement via la production d'explications permettant de justifier la validité de solution par rapport aux contraintes de la situation le résolveur du problème s'engage dans des processus « d'explication et d'argumentation ».

Du coté du Récit, nous nous sommes intéressés à l'ensemble des processus mis en place par un auteur dans l'acte de construction de ce récit (la narration). En considérant le Récit comme un mode de pensée et en référence aux travaux de Bruner (2005, 2008) et Eco (1985, 1996) nous avons pu inscrire ces processus dans trois fonctions spécifiques du Récit :

- **Fonction structurante :** La mise en Récit permet de prendre en charge des objets et facilite leur mise en relation. En conduisant à la construction d'un tout cohérent (le *holos*), le récit peut structurer des connaissances et permettre l'articulation des phénomènes. Il facilite ainsi la compréhension de systèmes complexes.
- **Fonction problématisante :** Il n'y a pas de Récit sans intrigue et donc sans problématisation. La mise en place de l'intrigue, via un élément perturbateur, peut être comparée à la construction d'un problème. Elle invite à reconsidérer les connaissances en jeu et à adopter une démarche de problématisation.
- **Fonction explicative : Le** Récit, à travers la fiction, permet de construire des explications. Celles-ci s'inscrivent dans des *mondes possibles* qui prennent en charge toutes les contraintes portées par le récit et par la situation de référence. Les explications produites respectent par conséquent ces mêmes **contraintes.**

C'est la mise en évidence de la relation particulière de chacune de ces trois fonctions à une composante spécifique de l'objet Récit qui nous a conduit à classer les processus de résolution de problème de manière similaire dans notre définition de l'*espace problème* du Problème. Dans la suite de ce texte, pour plus de légèreté dans l'écriture et en accord avec les dénominations de Scardamalia et Bereiter, *l'espace problème* du Problème sera appelé *espace problème du contenu* et *l'espace problème* du Récit sera appelé *espace problème rhétorique.*

Espace de transfert des processus et inscription du Récit dans le milieu didactique

Le modèle proposé par Scardamalia et Bereiter nous a permis d'envisager la co-construction entre raisonnement et récit comme un transfert des processus de résolution de problèmes de *l'espace problème du contenu* vers *l'espace problème rhétorique* (et inversement) grâce la possibilité de *traduction* de chaque problème local (à l'origine du processus) d'un *espace problème* à l'autre. La mise en évidence de ce que nous avons appelé un « espace de transfert de processus » (Figure 6) dans le cadre d'une activité de résolution de problème de Mathématiques apporte aux élèves un nouvel espace de travail : *l'espace problème* du Récit. Cet *espace problème rhétorique*, dans lequel les élèves vont pouvoir développer certains processus est structuré par une logique narrative qu'ils maîtrisent. Cette maîtrise autorise la mise en place de processus plus complexes que ceux qui pourraient être développés dans *l'espace du problème du contenu* qui est également structuré mais qui est régi par une logique mathématique moins maîtrisée des élèves. Dès l'âge de six ans, les enfants sont en effet capables de produire des structures logiques narratives aussi complexes que celles d'un adulte (Fayol, 1985) ce qui n'est pas le cas en Mathématiques.

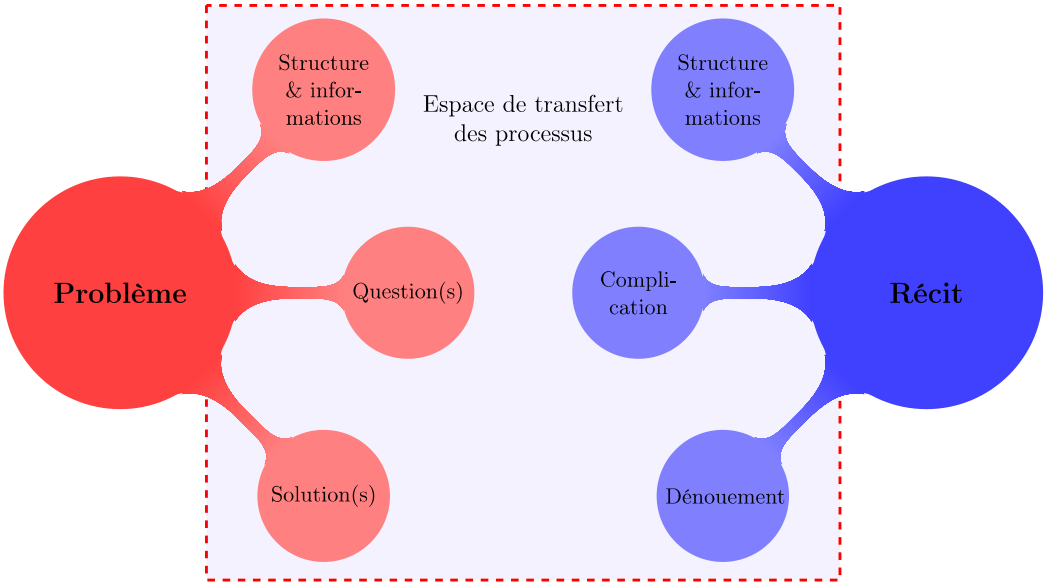


Figure 6 : *Espace de transfert des processus*

Ainsi, en accord avec le *modèle de transformation des connaissances*, tout problème de *l'espace problème du contenu* peut donc (théoriquement) être *traduit* dans *l'espace problème rhétorique* et y trouver une solution pertinente via la mise en place d'un ou plusieurs processus (et inversement). Cette solution (qui est en fait une nouvelle connaissance, une connaissance transformée, une mise en évidence ou caractérisation d'une relation, etc.) peut ensuite être réinvestie dans *l'espace du contenu* directement ou moyennant une réinterprétation. Le travail théorique développé dans notre travail de thèse et présenté ici, nous permet donc de mettre en évidence l'existence, sous certaines conditions, d'un « espace de transfert de processus » entre Problème et Récit et, de fait, la possibilité pour les élèves de s'appuyer sur des processus relatifs à la narration et aux fonctions du Récit pour résoudre un problème de Mathématiques.

L'inscription du Récit dans le milieu didactique que nous avons proposée dans notre thèse a pour donc pour objectif de mettre à disposition des élèves un milieu didactique plus riche et un espace de travail supplémentaire. Même si c'est généralement « *la propriété de milieu antagoniste à* l'élève qui est mise en avant » (Hersant, 2010, p. 44), le milieu possède en fait trois propriétés fondamentales : il est rétroactif, proactif et contraignant. C'est la propriété de contraignance qui nous a particulièrement intéressée dans notre travail car elle est essentielle pour le développement de situations de preuves et de raisonnement. Après avoir souligné la faiblesse de plusieurs situations dans ce domaine, Hersant propose deux manières d'enrichir le milieu didactique (p. 45-46) pour favoriser sa contraignance : l'enrichissement du registre empirique et l'enrichissement du registre des nécessités. Le Récit de par ses caractéristiques peut, en tant qu'acte de pensée, participer à l'enrichissement de ces deux registres :

- Registre empirique : Le Récit, via la fiction, amène la possibilité de construire des mondes alternatifs. Ceux-ci peuvent mettre en jeu une situation réelle légèrement modifiée, une situation fictive ou une situation plus intermédiaire. Dans tous les cas, les mondes possibles engendrés par la construction d'un récit enrichissent le registre empirique porté par le milieu. En effet, même en proposant une situation fictive, le récit est porteur d'un exemple qui peut être considéré et analysé et ce même s'il ne s'est pas effectivement réalisé. Il est ainsi possible de s'affranchir de la réalité, tout en restant dans un monde concret, voire sensible, et respectant les caractéristiques (mathématiques) de la situation.

- Registre des nécessités : Le Récit est un objet structuré dont la construction est régie par une organisation nécessairement logique. Lorsque celle-ci n'est pas conforme à la réalité, les variations sont nécessairement explicites. Tout ce qui n'est pas présenté comme discordant est analogue à la réalité. De fait, les mondes possibles que nous évoquions ci-dessus sont soumis à la logique du récit mais aussi à celle de la situation dans laquelle ils sont construits. Chaque décision prise dans la construction du récit peut donc permettre de considérer ou de déterminer une nécessité relative à la situation. La création de nouveaux récits participe de fait à l'enrichissement du registre des nécessités.

Le Récit peut également, dans une situation de résolution de problème de Mathématiques, favoriser la circulation de l'élève entre les différentes couches du milieu didactique mises en évidence dans les travaux de Margolinas (1998) : le *milieu matériel*, le *milieu objectif* et le *milieu de référence*. L'élève placé face à un énoncé proposant ce que nous avons appelé une situation problématique (avec une question qui lui est posée), doit opérer un passage du *milieu matériel* (composé des objets matériels et / ou conceptuels proposés dans la situation et l'énoncé) vers *un milieu objectif* en établissant un rapport localement stable avec les objets du *milieu matériel* (Margolinas, 1998). En incluant des objets mathématiques (proposés dans l'énoncé) dans la construction d'un récit, l'élève se positionne par rapport à eux en les sélectionnant et en les organisant. Il peut ainsi construire un rapport stabilisé avec ces objets. C'est alors la fonction de structuration du Récit qui entre en jeu et qui peut favoriser le passage du *milieu matériel* vers le *milieu objectif*. Il ne s'agit pas de proposer à l'élève d'établir un récit global incluant toutes les informations et objets mais d'imaginer une multitude de récits, en fonction de différentes contraintes de préférence mathématiques, relatifs aux différents objets en jeu. Le passage vers le *milieu de référence* implique la mise en évidence de similitudes et / ou d'incohérences dans la structure du milieu afin d'en repérer les propriétés. La comparaison et l'analyse de ces différents récits, qu'elle soit structurelle ou qu'elle prenne en charge les relations des objets en jeu, peut permettre de repérer ces propriétés et participer à la détermination de la structure mathématique proposée dans l'énoncé du problème. La démarche de propositions et de tests (à ajuster en fonction des rétroactions du milieu) adossée à une construction de récit (contraint et structuré par nature) va permettre à l'élève de s'affranchir du milieu matériel, de s'éloigner du milieu objectif pour en déterminer les contraintes. Les fonctions de problématisation et d'explication en particulier favoriseront ainsi le passage du *milieu objectif* vers le *milieu de référence*.

Conclusion sur le modèle théorique

La construction de ce modèle d'interactions entre construction de Récit et résolution de Problème ainsi défini nous a permis de mettre en évidence un « espace de transfert de processus » et de nous engager dans une série d'hypothèses mises à l'épreuve dans la partie expérimentale de notre travail de thèse (Moulin, 2014, p. 88 & 139) :

- Sous certaines conditions, l'introduction du Récit dans le traitement d'une *situation problématique*[3] amène une interaction entre la narration (comme activité de production de récit) et la construction d'un raisonnement. L'élaboration d'un récit visant à répondre à une *situation problématique* peut être un élément déclencheur et structurant du raisonnement. Autrement dit, le Récit est un outil problématisant qui permet également de produire une argumentation en vue de

[3] Dans notre thèse, nous avons appelé situation problématique toute situation mise en jeu dans un problème de mathématiques via la question posée dans l'énoncé ou tout sous problème inhérent à cette même question.

justifier la solution trouvée. À un second niveau, les interactions entre les deux *espaces problèmes* (*espace rhétorique* relatif au Récit et *espace du contenu* relatif au Problème de mathématiques), via le transfert de processus mis en évidence dans notre modèle, permettent la mobilisation de connaissances mathématiques et compétences mathématiques et transversales nécessaires à la résolution et peuvent induire une transformation des ces mêmes connaissances afin de permettre la résolution effective du problème.

- Le Récit enrichit, notamment grâce à la fiction, le registre empirique grâce aux possibles, réels et fictionnels, qu'il permet d'exprimer. Le Récit, de par son caractère structurant, contribue à la définition de la structure de la situation par l'élève en lui permettant de déterminer et d'exprimer les contraintes en jeu. Il participe, de ce fait, à la dévolution de la preuve. De plus, sous certaines conditions, le Récit participe, en tant que support de pensée, à la circulation de l'élève entre les différents niveaux structurels du milieu didactique (milieu matériel, milieu objectif et milieu de référence). Ces deux paramètres (enrichissement et circulation) sont essentiels pour conduire l'élève à entrer dans un processus de preuve. Enfin, en tant qu'objet de communication, le Récit prolonge l'action du milieu en apportant la possibilité d'être mis à l'épreuve des pairs et donc d'être soumis à une validation collective.

TRAVAIL EXPERIMENTAL : INSCRIPTION DU RECIT DANS LE MILIEU DIDACTIQUE ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Afin de tester ces hypothèses, nous avons développé un travail expérimental reposant sur la méthodologie de l'ingénierie didactique (Artigue, 1988). La situation proposée, devait permettre l'entrée dans une démarche d'écriture de récit et mettre en jeu des objets et des problèmes de mathématiques. Nous avons proposé à six classes de cycle 3 une séquence[4] construite autour d'un jeu de toupies dont les règles sont présentées (Figure 7) :

La partie est découpée en manches. Au signal, les deux joueurs lancent leur toupie dans le stadium en même temps. Si un joueur lance sa toupie à coté du stadium, il perd la manche. Si les deux toupies atterrissent dans le stadium, c'est le début de la manche. La manche se termine dès que :

1. un joueur touche le stadium ;
2. une des toupies n'est plus dans le stadium ;
3. une des toupies est en zone de pénalité ;
4. une des toupies ne tourne plus.

Le premier joueur qui se retrouve dans une de ces situations perd la manche. S'il n'est pas possible de déterminer un perdant, et par conséquent un vainqueur, la manche est annulée puis rejouée. Cela peut être le cas si les deux toupies arrêtent de tourner en même temps par exemple. Une fois la manche terminée, des points sont distribués ou retirés à un seul des deux joueurs. Pour cela, il faut attribuer les points en appliquant les règles suivantes dans l'ordre ci-dessous (dès qu'un point est distribué ou retiré, on passe à la manche suivante) :

– 1 pour le joueur qui lance sa toupie à côté du stadium ;
– 3 pour le joueur qui touche le stadium pendant la manche ;
+ 3 pour le joueur qui éjecte la toupie de son adversaire hors du stadium ;
+ 2 pour le joueur qui coince la toupie adverse dans la zone de pénalité ;
+ 1 pour le joueur dont la toupie tourne plus longtemps que celle de son adversaire.

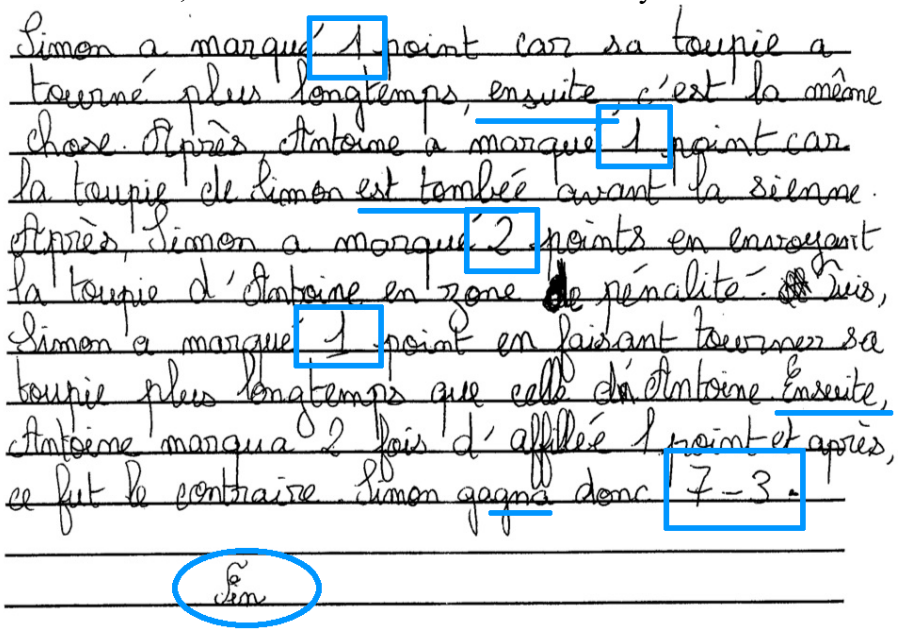
Il n'y a donc qu'un seul joueur qui gagne ou perd des points à chaque manche. Il est également possible d'avoir un score négatif. La partie se termine lorsqu'un joueur atteint 7 points (ou plus). Le premier joueur qui obtient un score supérieur ou égal à 7 points gagne la partie.

[4] Les six classes ont suivi des séquences similaires mais avec des conditions différentes dans certaines classes que nous détaillerons en note pour chaque activité présentée.

Figure 7 : *Règles du jeu*

Production de récits à partir de la situation de jeu

Cette situation permet effectivement aux élèves d'entrer dans une activité de production de récit. Après avoir joué une première partie nous leur avons demandé de raconter la partie qu'ils avaient jouée. Ce premier type de récit descriptif (exemple Figure 8), permet de décrire, sous une forme structurée, une succession d'évènements et d'y associer des scores.


Simon a marqué 1 point car sa toupie a tourné plus longtemps, ensuite c'est la même chose. Après, Antoine a marqué 1 point car la toupie de Simon est tombée avant la sienne. Après, Simon a marqué 2 points en envoyant la toupie d'Antoine en zone de pénalité. Puis, Simon a marqué 1 point en faisant tourner sa toupie plus longtemps que celle d'Antoine. Ensuite, Antoine marqua 2 fois d'affilée 1 point et après, ce fut le contraire. Simon gagna donc 7-3.

Fin

Figure 8 *: Exemple de récit descriptif*

On repère dans ce texte des marqueurs de récit tels que des marqueurs de temps (éléments soulignés), le mot « fin », des personnages (Simon, Antoine). Il n'y a pas ici d'action du Récit sur le milieu didactique car il n'y a pas de problème mathématique en jeu. Les points et les scores sont inclus dans le récit, les règles du jeu sont prises en charge automatiquement. Il s'agit d'une première étape visant à l'entrée des élèves dans une démarche d'écriture de récit.

Pour inscrire réellement le Récit dans le milieu didactique, nous avons proposé par la suite aux élèves de construire des récits de parties qui n'avaient pas eu lieu. Il s'agit alors de récits d'anticipation qui, même s'ils ne relatent pas des parties réelles, doivent se conformer aux règles du jeu. Les déroulements des manches correspondent toujours aux événements du récit, mais les points et les scores deviennent des objets mathématiques à part entière et les règles du jeu deviennent une axiomatique locale au sens de Tarski (1960). En situation de résolution de problème, c'est à dire à partir du moment où l'on impose une contrainte mathématique au récit d'anticipation (un score final, un nombre de manches, etc.) le Récit est inscrit dans le milieu didactique. La résolution du problème et la construction du récit et qui se font simultanément imposent (non nécessairement dans cet ordre) l'analyse des contraintes mathématiques de la situation, la construction d'une succession d'événements permettant d'expliquer la situation problématique, la vérification de l'adéquation de cette solution avec les contraintes mathématiques et événementielles de la situation.

Dans notre travail expérimental, nous avons proposé aux élèves deux types de situations de résolution de problèmes : des situations dans lesquelles le Récit était explicitement convoqué par la consigne et d'autres où le récit ne l'était pas. Dans les deux points suivants nous proposons d'analyser au travers du modèle d'interactions que nous avons présenté dans la

partie théorique le rôle du Récit dans ces deux types de situations.

Exemple d'action du Récit sur le milieu didactique (structuration et explication) dans une situation où le récit est explicitement convoqué par la consigne

Nous avons proposé aux élèves de résoudre des problèmes mettant en jeu des objets mathématiques dans le cadre du récit. Nous leur avons fourni un début de récit qu'ils devaient compléter par rapport à différentes contraintes sur le score final du narrateur :

> *Je joue contre Camille. À la première manche, ma toupie a tourné plus longtemps donc j'ai gagné 1 point. À la deuxième manche, c'était l'inverse, c'est Camille qui a marqué 1 point parce que ma toupie s'est arrêtée en premier. On est à égalité. À la manche suivante, j'ai lancé ma toupie plus fort et j'ai réussi à coincer la toupie de Camille dans la zone de pénalité. J'ai gagné 2 points.*

Figure 9 : *Récit initial*

La donnée de cette situation et de la question « complète le récit pour que Laura gagne la partie avec un score de … points » place les élèves dans une situation de résolution de problème. D'un point de vue mathématique, ils doivent déterminer une transformation permettant de passer d'un état initial de 3 points à un état final de 7, 8, 9 ou 10 points selon la contrainte proposée. L'objectif de la tâche était de permettre aux élèves d'analyser la structure mathématique de la situation (une analyse exhaustive, sous forme d'une axiomatique locale, est proposée dans le chapitre 9 de notre thèse). Ils devaient en particulier déterminer qu'il est nécessaire de gagner au moins 2 points à la dernière manche pour atteindre un score de 8 points, qu'il est nécessaire d'avoir 6 points puis de gagner 3 points d'un coup pour atteindre un score de 9 points et enfin qu'il n'est pas possible d'atteindre un score de 10 points[5].

L'analyse cette tâche de résolution de problème au travers de notre modèle d'interaction (Figure 10) nous amène à considérer le récit à compléter comme étant la donnée d'une structure d'informations comprenant des objets mathématiques reliés par une axiomatique locale. La situation ainsi définie est commune au récit et au problème et donc à *l'espace problème du contenu* et à *l'espace problème rhétorique*. Notre contrainte externe, la question du problème mettant en jeu score final du personnage, correspond également à la complication dans *l'espace problème* du Récit.

[5] Lors de la première expérimentation (classe 1), nous avons proposé aux élèves un récit qui se terminait (provisoirement) sur un score de 6 à 1. Les élèves n'avaient donc plus qu'une étape à déterminer ce qui a eu pour conséquence de fermer la situation et les a empêché de mettre en évidence le passage crucial au score de 6 points. Dans les classes 4 et 5, les enseignants ont autorisé les élèves qui avaient des difficultés à écrire à proposer un récit « raccourci » ne comportant que les scores (sans décrire les événements). Nous avons montré dans notre thèse que cela a été un frein à l'analyse de la structure mathématique de la situation.

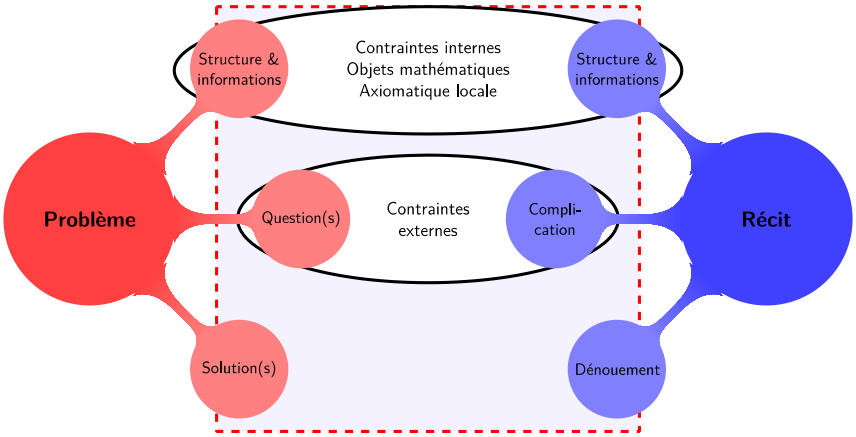


Figure 10 : *Analyse des composantes*

Pour résoudre le problème mathématique proposé, il est nécessaire d'opérer un travail dans *l'espace problème rhétorique*. L'élève ne doit pas seulement déterminer la valeur de la transformation, il doit également déterminer des événements permettant cette transformation. Ce travail, qui est à l'origine un problème de *l'espace rhétorique*, conduit l'élève à analyser la structure et la situation problématique en relation avec les règles du jeu (afin de trouver une succession d'évènements permettant d'atteindre l'état final tout en respectant ces règles). Il amène, de fait, l'élève à analyser la situation par rapport aux propriétés de l'axiomatique locale et, donc, d'un point de vue mathématique. Le problème initial, qui est avant tout un problème mathématique avec une question mathématique (Entouré en pointillés, Figure 11) est déplacé par la consigne « complète le récit » dans *l'espace rhétorique*. L'analyse de la situation dans *l'espace problème* rhétorique conduit à l'analyse de la situation dans *l'espace problème du contenu* (Flèche du haut, Figure 11) et la solution trouvée du point de vue des événements répond également au problème mathématique (Flèche du bas, Figure 11).

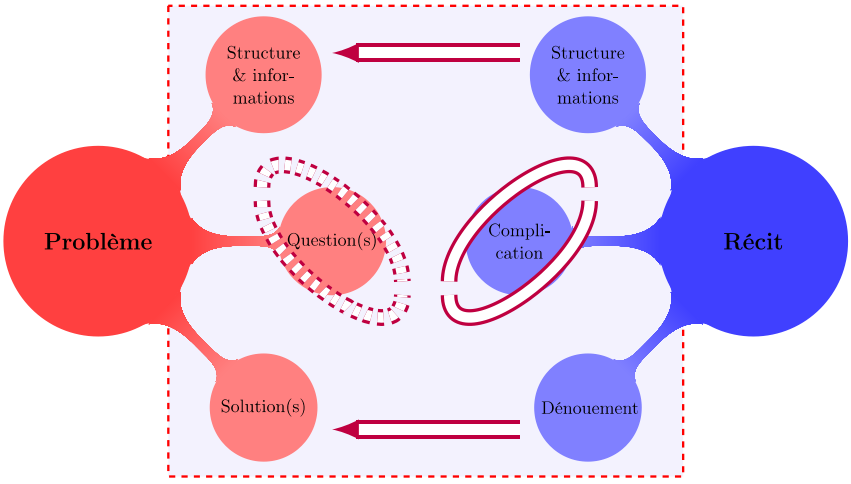


Figure 11: *Analyse des processus*

Plus concrètement, lorsque nous avons proposé aux élèves différentes contraintes sur le score du personnage, ils se sont engagés dans la production de *possibles explicatifs* (voire d'*impossibles explicatifs*), c'est à dire de récits permettant d'expliquer une situation problématique. Le cadre du Récit, qui impose une description des événements a amené les élèves à explorer du point de vue mathématique la situation et son axiomatique.

Ils ont par exemple pu repérer qu'il est nécessaire de gagner au moins 2 points à la dernière manche pour terminer une partie avec 8 points, ce qu'ils n'avaient pas réussi à déterminer

dans un premier temps[6] (Exemple : Figure 12).

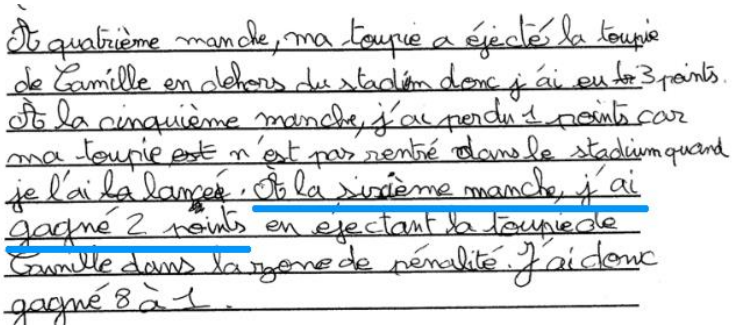


Figure 12 : *Possible explicatif pour terminer avec 8 points*

Ils ont également pu se rendre compte qu'il n'était pas possible de dépasser un score de 9 points (Figure 13) alors que beaucoup affirmaient initialement qu'il était possible de terminer une partie avec n'importe quel score supérieur à 7. Même après avoir construit un *impossible explicatif*, certains élèves mettent en évidence la prise en compte des contraintes mathématiques de la situation en proposant explicitement que leur personnage, même après avoir gagné ait envie de continuer à jouer.

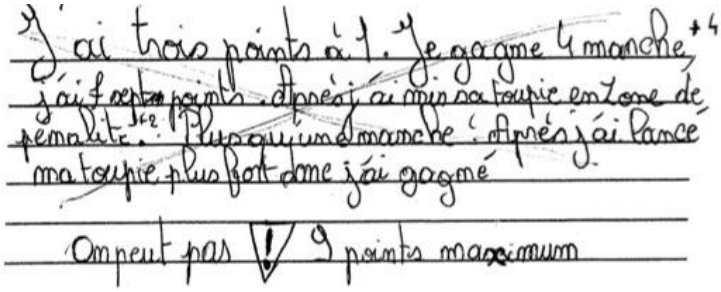


Figure 13 : *Impossible explicatif pour terminer avec 10 points*

Ces exemples mettent en évidence les fonctions de structuration et d'explication du Récit. La mise en récit permet aux élèves de prendre en charge les objets mathématiques et leur mise en relation (dans le but de produire le récit). Ce travail les amène en particulier à déterminer des contraintes mathématiques qui n'étaient pas explicites et qui restaient indisponibles pour les élèves dans un premier temps. Le récit a également conduit les élèves à envisager des mondes possibles et impossibles et ainsi à déterminer les contraintes qui les rendaient effectivement possibles et impossibles. La fonction d'explication du récit leur a permis de s'engager dans l'explicitation de contraintes mathématiques, voire pour certains d'entrer dans la production de preuves (Figure 14) ce qui n'était pas forcément attendu de la part d'élèves de cycle 3.

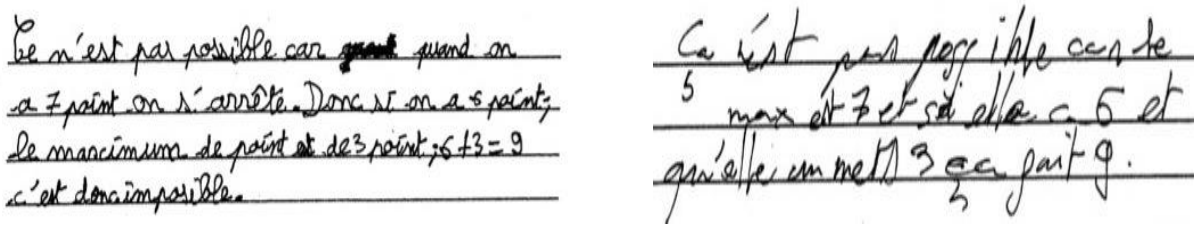


Figure 14: *Exemples de justifications / preuves*

D'une certaine manière, et en comparaison avec la tâche d'élaboration et justification de conjecture que nous présenterons dans le point suivant, cette tâche peut être assimilée à une

[6] En amont de cette activité, les élèves ont du produire des conjectures sur les scores que le vainqueur d'une partie peut atteindre, sur le nombre maximum de manches qu'il est possible de jouer et sur le nombre minimum de manches nécessaires pour terminer une partie (seconde tâche présentée dans cet article).

activité de validation / invalidation de conjectures proposées par la consigne grâce à la production d'un possible explicatif (tout en restant une activité de résolution de problèmes). Les processus de problématisation étaient en partie portés, ou du moins guidés, par la consigne : la conjecture était donnée et le moyen (l'exhibition par le récit d'un cas « ou ça marche » ou non) était également imposé. Le transfert de la question dans *l'espace problème du Récit* a permis aux élèves de s'engager dans l'exploration mathématique de la situation en s'appuyant sur des processus de problématisation également placés dans *l'espace heuristique*. Le problème résolu par les élèves était, en essence et initialement, un problème heuristique : Quelle suite d'évènements proposer pour atteindre un état final donné ? L'appui sur des processus, maîtrisés, dans *l'espace problème du Récit*, à conduit à la nécessité pour les élèves de s'engager dans des processus mathématiques de structuration et d'explication tels que nous les avons définis.

Exemple d'action du Récit sur le milieu didactique (problématisation) dans une situation où le récit n'est pas convoqué par la consigne

Le second type de situation que nous avons proposé aux élèves ne convoquait pas explicitement le récit. Nous leur avons demandé de proposer des conjectures sur l'axiomatique locale et la structure de la situation en nous intéressant particulièrement à :

- la valeur des scores possibles du vainqueur ;
- le nombre de manches minimum pour terminer une partie ;
- le nombre de manches maximum dans une partie.

Cette activité a été proposée aux élèves après qu'ils ont joué et raconté une première partie. Elle s'est donc déroulée (à l'écrit) en amont de la tâche présenté dans le point précédent et donc avant que les élèves élaborent les différents récits d'anticipation présentés ci-dessus. La principale différence est qu'ici les élèves n'ont pas d'indication sur l'état final qu'ils peuvent atteindre. Ils doivent donc s'engager, sans support imposé, dans une activité d'élaboration d'une conjecture, la tester, l'ajuster lorsque cela s'avère nécessaire et proposer une justification accompagnant la conjecture choisie. Les processus de problématisation sont ici au cœur du travail demandé à l'élève. Les conjectures des élèves ont étés discutées à l'oral dans des séances ultérieures (après l'activité présenté dans le point précédent)[7].

Concernant la première conjecture (sur les scores possibles du vainqueur) les élèves se sont engagés dans différentes procédures (exemples tableau 2) :

- Des procédures prenant appui sur une opération (une addition ou une multiplication) avec une analyse plus ou moins correcte de la situation avec des élèves qui semblent inscrire leurs processus de problématisation (et de structuration et d'explication) uniquement dans *l'espace problème du contenu* ;
- Des procédures basées sur la production d'un *possible explicatif*[8] qui conduit les élèves à s'engager dans des processus inhérents à *l'espace problème rhétorique* (avec une conjecture mathématique éventuellement construite dans *l'espace problème du contenu*). Certains ont également proposé plusieurs *possibles explicatifs* avec dans certains cas une base commune qui met en évidence le fait que l'élève a repéré un aspect crucial de la situation.
- D'autres approches sont également apparues avec des justifications basées sur le matériel, sur l'expérience des parties jouées ou encore sur les règles du jeu.

Les arguments avancés par les élèves sont majoritairement des preuves d'existence relatant

[7] Cette tâche a été proposé dans toutes les classes, seule la classe 1 n'a pas réalisé cette activité à l'écrit.
[8] C'est à dire d'un récit, d'une suite d'événements, permettant d'atteindre le score souhaité.

des parties se terminant avec des scores égaux à 7, 8 ou 9.

Appui sur une opération	**Production d'un *possible explicatif***	**Production de plusieurs *possibles explicatifs***
Si le gagnant fait 3 + 3 + 2 + 3 = 12 donc il peut avoir 12 points. *9 points c'est le maximum car si on éjecte de l'arène la toupie adverse 3 fois cela fait 9 car 3 x 3 = 9*	*À la première manche la toupie de mon adversaire s'est arrêtée avant donc j'ai +1. À la deuxième manche j'ai coincé la toupie de mon adversaire à la zone de pénalité donc j'ai +2, à la troisième manche j'ai éjecté la toupie de mon adversaire donc +3. À la quatrième manche la toupie de mon adversaire …*	*Le vainqueur peut avoir 9 points car s'il a 6 points et s'il éjecte l'autre toupie du stadium il gagne + 3 points donc il a 9 points. Le joueur peut avoir 8 points car s'il a 6 points et qu'il envoie la toupie de son adversaire dans la zone de pénalité il a gagné 8 points. Et enfin si le joueur a 6 points et qu'il gagne une manche il a 7 points.*

Tableau 2 : *Exemples de justifications de conjectures*

Quantitativement, sur 113 élèves, une quinzaine seulement utilise des arguments mathématiques et / ou basés sur les règles du jeu et donc en s'appuyant des processus développé (*a priori* uniquement) dans *l'espace problème du contenu*. Plus de la moitié s'engage dans la production de possibles explicatifs grâce au récit, en donc en inscrivant (au moins en partie) leurs processus de problématisation dans *l'espace problème du Récit*, confirmant ainsi le penchant naturel pour ce dernier (souligné par Bruner, 2008). D'un point de vue qualitatif, cette seconde approche se révèle également efficace car elle amène :

- 85 % des 32 conjectures complètes,
- 60 % des 46 conjectures incomplètes,
- moins de 50 % des 27 conjectures fausses.

Dans l'objectif de proposer et de justifier des conjectures, ces élèves se sont engagés, sans que la consigne ne leur impose, dans la production de ces *possibles explicatifs*. Ces élèves ont ainsi construit leur raisonnement en mobilisant naturellement des processus relatifs à la production de Récit. La fonction de problématisation du Récit, qui entre en jeu dès lors que l'on cherche à construire un récit, a conduit ces élèves à questionner leur connaissance « sensible » de la situation (connaissance des règles du jeu et expérience d'une partie effectivement joué) et à rechercher des caractéristiques mathématiques de la situation et des objets mathématiques qui y sont inscrits (*situation objective* en lien avec le *milieu objectif*). *L'espace problème du Récit*, en tant qu'espace de travail, a permis à ces élèves d'explorer la situation mathématique.

Prolongement de l'action du Récit sur le milieu didactique par le passage à l'oral

Durant les phases de discussion en classe entière, le Récit en général et les récits construits dans les séances précédentes ou pendant la discussion elle-même sont devenus des supports pour l'argumentation. En tant qu'objet de communication et pouvant être partagé facilement, le Récit peut prolonger l'action du milieu en apportant la possibilité de mettre les récits produits (des *possibles explicatifs*) à l'épreuve des pairs. Les récits de parties enrichissent le *registre empirique* du milieu didactique commun aux élèves. Ils sont en effet partagés dans la classe et proposent des exemples concrets que les élèves intègrent au débat en les discutant et en les acceptant (car ils respectent et donc prennent en charge les contraintes mathématiques de la situation) comme des arguments convaincants. Dans notre travail de thèse, en analysant les transcriptions des phases de travail collectif, nous avons mis en évidence plusieurs utilisations du Récit par les élèves :

- Ils ont utilisé des récits de parties réelles, en y faisant référence, comme des exemples et des contre-exemples pour valider ou invalider des conjectures. Par exemple, l'idée

qu'une partie ne pouvait pas comporter plus de quatorze manches (le nombre de lignes de la feuille) a été réfutée par le fait que deux élèves de la classe ont lu leur récit de partie. À partir de ce récit, les élèves ont proposé de compléter leur récit pour proposer des parties de plus en plus longues en repérant et en « réutilisant » les événements qui ont été à l'origine de la longueur de la partie.

- Les élèves ont également construit durant les débats des récits de parties imaginaires afin de convaincre leurs pairs qu'une conjecture était vraie. Par exemple, toujours lorsque les élèves tentaient de déterminer le nombre de manches maximum qu'il était possible de jouer dans une partie, ils ont utilisé l'inscription dans la fiction pour s'affranchir de la réalité. Même si « il n'y a pas le temps », même si « dans la réalité au bout d'un moment y en a un qui gagne » il est possible de construire et de raconter une partie infinie. En voici plusieurs exemples construits par les élèves qui ont convaincu leurs camarades (proposition finale) :
    - Il gagne trois points en éjectant et après il touche le stadium, il a zéro (…) Il tourne plus longtemps et après il lance à coté.
    - Parce qu'à chaque fois on fait moins trois.
    - Si on gagne un point et si on en perd un ; ça fait plus un moins un.
    - Plus trois, moins un, plus deux (…) il a quatre, moins trois et moins un et il se retrouve à zéro.

Ces *possibles explicatifs,* tout en s'éloignant des situations réelles, ont conduit les élèves à explorer les caractéristiques mathématiques de la situation. Dans un premier temps, ils se sont appuyés sur des processus de *l'espace problème du Récit*, puis sur des processus de *l'espace du contenu*. Les élèves se sont appuyés sur des constructions via les événements du récit, rattachés aux scores de manière ultérieure. Dans un second temps, les élèves se sont détachés de ces événements de Récit, les processus relatifs à *l'espace problème rhétorique* ont étés réduits, voire (dans le cas des trois dernières propositions) éliminés (du moins dans l'expression orale). C'est ici la fonction explicative du Récit qui est au cœur de l'activité. En construisant des *possibles explicatifs*, et plus précisément en vérifiant individuellement et collectivement qu'ils sont valides par rapport aux contraintes mathématiques, les élèves établissent un rapport objectif avec les objets mathématiques en jeu et enrichissent le *registre des nécessités* du milieu didactique. Ils mettent en évidence les régularités, les points clefs de la situation et s'engagent dans des processus mettant en évidence leur inscription dans le *milieu objectif* et pour certain dans le *milieu de référence*.

Conclusion sur l'expérimentation

L'expérimentation menée nous a permis de montrer, en référence à notre hypothèse initiale, que le Récit était effectivement un support privilégié par les élèves pour émettre et justifier des conjectures, pour justifier et argumenter à l'écrit comme à l'oral :

- L'engagement dans le raisonnement s'appuie en particulier sur le caractère fictionnel du Récit et sur sa *fonction explicative* : En construisant des récits, en produisant des *possibles explicatifs*, les élèves s'affranchissent de la *situation matérielle* (ce qu'il est possible de faire en vrai avec les contraintes de temps et de matériel) et s'inscrivent dans une *situation objective* en s'engageant la construction d'exemples et de contre-exemples non sensibles. Le passage du *milieu matériel* au *milieu objectif* s'appuie sur des constructions « fictives » mais structurées par les contraintes mathématiques *objectives* de la situation étudiée.
- La structuration du raisonnement peut s'appuyer sur la *fonction de problématisation* et de *structuration* du Récit. Le caractère structuré du Récit et la résolution d'un élément problématique de *l'espace problème* du Récit amène les élèves à repérer les

caractéristiques mathématiques de la situation. La possibilité d'engager des processus de raisonnement dans *l'espace problème rhétorique* accompagne les élèves dans le passage vers le *milieu de référence*. La comparaison structurelle, la comparaison des événements (avant la comparaison mathématique) leur permet de saisir les subtilités de la situation et d'appuyer leur raisonnement via le repérage de ces points critiques *traduits* par la suite dans *l'espace problème du contenu*.

- La justification du raisonnement peut s'appuyer sur des exemples produits et / ou exprimés par le Récit. Les *possibles explicatifs* construits dans *l'espace problème rhétorique* sont analysés par les élèves dans ce même espace mis également dans *l'espace problème du* contenu et donc par rapport aux mathématiques. Ce travail leur permet de produire des arguments mathématiques solides et permettant la validation.

CONCLUSION

L'objectif principal de notre travail était de déterminer si le Récit, introduit dans le milieu didactique en tant que mode de pensée, pouvait participer au travail mathématique et à la construction de raisonnement.

Le modèle théorique développé dans notre travail de thèse qui s'appuie sur une similarité structurelle entre Récit et Problème met en évidence des lieux d'interaction entre construction de récit et construction de raisonnement. Grâce aux travaux de Scardamalia et Bereiter (1998), nous avons en particulier défini et caractérisé un « espace de transfert de processus » entre ces deux activités et souligné la possibilité d'une co-construction entre récit et raisonnement lors d'un travail de résolution de problèmes de mathématiques. Les processus de structuration, d'argumentation, de problématisation, d'argumentation nécessaires à la résolution d'un problème, qui s'inscrivent habituellement dans *l'espace problème du contenu*, peuvent ainsi être réalisés (moyennant une *traduction* et une réinterprétation des problèmes locaux) dans *l'espace problème rhétorique*. Le travail dans cet espace, soutenu par les fonctions structurantes et heuristiques du récit, peut permettre aux d'élèves d'initier, de construire et de justifier leur raisonnement.

Le travail expérimental que nous avons réalisé a confirmé la validité de notre modèle théorique. En explorant et en construisant différents types de récits et différents types de structures les élèves ont enrichi le milieu didactique, au sens proposé par Hersant (2010), ainsi que leurs rapports avec ce dernier. L'appui sur les différentes fonctions du récit a en particulier permis aux élèves de s'affranchir des contraintes matérielles de la situation afin d'établir un rapport plus objectif avec les objets mathématiques en jeu et les différentes caractéristiques mathématiques de la situation. Ils ont en particulier pu repérer et analyser certains points cruciaux de l'axiomatique locale de la situation. Le Récit en tant que mode de pensée a été dans cette situation un support puissant qui a permis à certains élèves de s'engager dans des processus de preuve.

La situation choisie, permettant la proposition de problèmes de transformation avec des caractéristiques temporelles faciles à rapprocher du Récit, a certainement facilité le transfert des processus vers *l'espace problème rhétorique*. Le travail engagé à la suite de notre thèse vise à étendre ce type d'approches à des situations qui apparaissent *a priori* (et *a priori* seulement) plus éloignés de la structure du récit telle qu'on la connaît (c'est à dire avec des étapes, des changements et une temporalité (chronologique) assez marquée. Il faut noter que le Récit en tant qu'objet n'a pour temporalité que celle que l'auteur lui donne en organisant

son discours dans un ordre, qui n'est pas nécessairement l'ordre chronologique de l'histoire qu'il raconte. Ce travail d'organisation, essentiel au travail de problématisation dans *l'espace problème rhétorique*, permet de mettre en relation des objets et des événements d'une manière non temporalisée qui pourrait se rapprocher de situations mathématiques non temporalisées.

Les perspectives ouvertes par ce travail, en particulier vis à vis de la preuve, nous incitent également à nous intéresser de près aux processus d'élaboration preuve en particulier dans ce qu'ils ont de commun et / ou de différent avec les processus de construction de récit tels que nous les avons évoqués ci-dessus (temporalité mais aussi, et surtout, organisation, mise en relation, etc.). Une étape préliminaire à ce travail, nous a conduite à nous engager dans le domaine de la géométrie. En nous appuyant sur les travaux de Duval, nous développons et analysons une entrée par le récit dans les apprentissages relatifs aux programmes de construction et à l'analyse de figures (Moulin & Mithalal, 2015).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, M. (1988) Ingénierie didactique. *Recherche en didactique des mathématiques, 3,* 281–308. Grenoble : La pensée Sauvage Editions.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(2/3), 309-336.

Bruner, J.S. (2003). *Making stories: Law, literature, life*. Harvard University Press.

Bruner, J.S. (2005). *Pourquoi nous racontons-nous des histoires?*. Paris : Pocket.

Bruner, J.S. (2008) *L'éducation, entrée dans la culture : les problèmes de l'école à la lumière de la psychologie culturelle* (Nouv. éd.). Retz.

Eco, U. (1985) *Lector in fabula.* Hachette.

Eco, U. (1996) *Six promenades dans les bois du roman et d'ailleurs* (M. Bouzaher, Trad.). Éditions Grasset.

Fayol, M. (1985). *Le récit et sa construction : une approche de la psychologie cognitive.* Delachaux & Niestle.

Hersant, M. (2010) *Le couple (contrat didactique, milieu) et les conditions de la rencontre avec le savoir en mathématiques : de l'analyse de séquences ordinaires au développement de situations pour les classes ordinaires*. Note de synthèse HDR, Université de Nantes, Nantes.

Margolinas, C. (1998) Le milieu et le contrat, concepts pour la construction et l'analyse de situations d'enseignement. In Noirfalise Robert (Ed..), *Université d'été de didactique de La Rochelle, La Rochelle, France.* (pp. 3-16) I.R.E.M. de Clermont-Ferrand.

Moulin, M. (2010). Mathématiques et récits : des textes de fiction pour bien lire des énoncés de problèmes de mathématiques en classe de CM2. *Grand N*, *86*, 33-57.

Moulin, M. (2014) *Inscription du récit dans le milieu en résolution de problèmes de mathématiques : Études des contraintes didactiques, des apports et des limites dans la construction de raisonnement,* Thèse de doctorat disponible en ligne, Université Claude Bernard Lyon 1, 328p, http ://tel.archives-ouvertes.fr/tel- 01066443.

Moulin, M., Mithalal, J. (2015) *Le programme de construction comme un récit : réticence et prolifération,* Atelier présenté aux Journées d'étude LEMME, 05-06 octobre 2015, Villeneuve D'Ascq.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.

Polya, G. (1994). *Comment poser et résoudre un problème*. Sceaux : Gabay.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1987). Knowledge telling and knowledge transforming in written composition. In R. Rosenberg (Ed.), *Reading, writing, and language learning* (pp. 142–175). Cambridge : Cambridge University Press.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1998). L'expertise en lecture-rédaction. In : Piolat, A., Pélissier, A., & Bereiter, C. (Eds), *La rédaction de textes : Approche cognitive* (pp. 13–59). Lausanne : Delachaux et Niestlé.

Tarski, A. (1960). *Introduction à la logique : ["Introduction to logic and to the methodology of deductive science"], par alfred tarski, 2e édition revue et augmentée. traduit de l'anglais par [le p.] jacques tremblay*, S.J.. Paris : Gauthier-Villars.

OPÉRATIONNALISER LES REGISTRES
ÉTUDE DE TROIS OBJETS : NOMBRE ENTIER, NOMBRE RATIONNEL, TANGENTE

Laurent VIVIER
LDAR, Université Paris Diderot
laurent.vivier@univ-paris-diderot.fr

Résumé
Duval, dans ses travaux, pointe l'importance cognitive de la coordination entre les registres de représentations sémiotiques dans le travail mathématique. Il précise en outre que les traitements sont moins problématiques dans les registres monofonctionnels. Dans la suite de ses travaux, j'avance que pour que les registres puissent jouer pleinement leur rôle dans l'activité mathématique, et spécifiquement pour la conceptualisation des notions en jeu, la coordination ne peut se limiter aux seules représentations : les traitements doivent également être coordonnés. Si les registres n'acquièrent pas une valence instrumentale, représente-t-on réellement des objets mathématiques ? n'a-t-on pas uniquement des représentations *inertes* ? Ainsi, chaque registre doit-il être *opérationnalisé* par des traitements afin d'effectuer des tâches mathématiques qui, elles-mêmes, doivent pouvoir s'exprimer dans les registres. C'est dans cette perspective que je propose un cadre d'analyse, alliant registres de représentation et praxéologies, pour étudier la coordination de ce que j'appelle les R-praxis.

Mots clés
Registre de représentation ; praxéologie ; nombre ; entier ; rationnel ; période ; tangente

INTRODUCTION

Ce texte est une adaptation de ma note de synthèse pour l'Habilitation à Diriger des Recherches (HDR)[1] soutenue le 28 mai 2015, intitulée *Sur la route des réels – Points de vue sémiotique, praxéologique, mathématique*, intégrant mes recherches sur la notion de tangente. L'idée de cette réinterprétation provient du rapport de Denis Tanguay qui écrit, à propos de mon HDR :

> la coordination entre registres de représentations sémiotiques ne peut jouer le rôle essentiel que lui prête Duval (1993, 1995) pour la conceptualisation que si les signes acquièrent d'abord dans chaque registre une *valence instrumentale* (au sens de Chevallard), c'est-à-dire que si l'on a pu les faire fonctionner dans des tâches et techniques (toujours au sens de Chevallard) qui mobilisent des traitements intégrant ces signes à un *système* sémiotique.

Je vais commencer par exposer mes recherches sur les nombres entiers, en base autre que dix pour des étudiants-professeurs et une comparaison des registres chiffré et graphique en première année de primaire, pour lesquelles j'ai développé un cadre d'analyse. Puis, j'exposerai mes recherches sur les nombres rationnels issues de mes recherches en

1 Disponible en ligne : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01223012.

mathématiques avec des implications sur les nombres réels. Enfin, je traiterai de la notion de tangente aux courbes algébriques que je considère comme un intermédiaire intéressant entre la géométrie, où se situe les représentations premières, et l'analyse, qui permet d'étendre largement la notion de tangente et qui est privilégiée par les curricula.
Dans chacune de ces études, même si ce n'est pas la préoccupation première, on se rend compte de l'importance d'avoir des registres de représentations opérationnels, dans lesquels on dispose de suffisamment de traitements efficaces. Je m'intéresse également à la coordination des registres en tentant de comprendre l'importance de l'opérationnalisation de ceux-ci.

1- LES ENTIERS

Un cadre d'analyse

Initié dans (Vivier, 2008) pour l'étude de la synthèse sur les nombres à la transition collège/lycée en France, ce cadre d'analyse prend en compte une double sensibilité sur l'influence du sémiotique dans l'activité mathématique et sur l'organisation mathématique des connaissances – voir (Block, Nikolantonakis & Vivier, 2012) pour un exposé plus détaillé.
En Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), c'est autour des *types de tâches* que s'élabore le travail en mathématiques (Chevallard, 1999) qui donne lieu au bloc [T,τ], nommé bloc des savoir-faire ou *praxis* et composé du type de tâches T et d'une *technique* τ pour effectuer T. La production et la justification d'une technique nécessitent un regard théorique que Chevallard nomme une *technologie*. Cette dernière est un élément du bloc des savoirs, ou *logos*. Praxis et logos forment une *praxéologie*.
Duval (1995, 2006) regroupe les signes utilisés dans le travail mathématique en registres de représentation sémiotique. Il distingue les *traitements*, une transformation sémiotique qui reste à l'intérieur d'un même registre de représentation R, et les *conversions*, une transformation sémiotique dont le résultat est exprimé dans un autre registre. Duval insiste particulièrement sur la différence cognitive entre ces deux transformations sémiotiques.
Le sémiotique en TAD est bien pris en compte à travers la notion d'*ostensif* (Bosch & Chevallard, 1999). Mais les ostensifs en TAD ne sont pas constitués en système sémiotique. En particulier, cette notion ne prétend pas rendre compte de la dépendance d'une technique aux systèmes sémiotiques sur lesquels elle repose. Malgré l'intérêt de cette notion d'ostensif, elle n'est pas adaptée aux questions liées aux registres de mes études.
En TAD, un type de tâches ne fait pas toujours référence aux registres de représentation utilisés. Or, une tâche est toujours exprimée à l'aide de registres sémiotiques et ces derniers, c'est notre hypothèse principale, influencent directement l'activité mathématique[2]. Ainsi, je propose d'indexer les types de tâches et techniques par le(s) registre(s) dans le(s)quel(s) ils sont exprimés. Un type de tâches T relatif à un registre R est noté T_R. Bien entendu, il est tout à fait possible de considérer des types de tâches exprimés avec deux registres ou plus comme on peut le constater avec la tâche *comparer 2/3 et 0,6*. Je ne considère que les types de tâches exprimés dans un seul registre (en revanche, les procédures de résolution peuvent utiliser plusieurs registres).
Afin de prendre en compte les registres de représentations en TAD, je distingue, en me restreignant au cadre numérique :

2 Bosch, Fonseca et Gascón (2004) étudient l'influence de la variation d'ostensifs dans les tâches, par exemple en demandant de calculer une intégrale en *inversant* les signes usuels des variables muettes et liées (*inversion* des lettres *x* et *a* comme paramètre et variable d'intégration) mais il n'y a dans leur étude pas de variation de registres.

- une technique τ_R qui n'utilise qu'un seul registre mathématique R ;
- une technique $\tau_{R \to R'}$ qui correspond à une conversion d'un registre R vers un registre R'.

La restriction au cadre numérique n'est pas une nécessité *a priori* mais permet d'éviter un écueil. Dans le cadre numérique, au moins pour les questions que je considère, les conversions ont toutes une partie algorithmique ou algorithmisable – ou presque –, partie qui peut être considérée comme une technique. Sans cette propriété, on risquerait d'assimiler une conversion à une technique ce qui masquerait la distance cognitive irréductible entre conversion et traitement, précisément ce je voudrais conserver.

Il faut ici distinguer deux types de techniques que nous notons τ_R. Ce peut être évidemment un traitement proprement dit, c'est-à-dire une transformation sémiotique interne à un registre R, ou bien un autre type de technique qui fournit une réponse externe au registre R. Donnons un exemple de ce deuxième type : pour déterminer la parité d'un nombre écrit en base *a*, il n'y a pas forcément de transformation (si *a* est pair) et surtout le résultat n'est pas exprimé dans le registre initial mais en langue naturelle : « vingt est pair » ou « treize est impair » – il ne s'agit donc pas d'un traitement au sens strict de Duval.

De même, s'il est clair qu'une technique mathématique ne se fait pas toujours de manière interne à un registre, ce cadre d'analyse permet de décomposer une technique mathématique comme une succession de techniques d'un des deux types précédents. Prenons l'exemple suivant issu de (Nikolantonakis & Vivier, 2010) sur la numération : pour trouver le successeur de $(66)_{sept}$, on peut :

- effectuer un traitement (ou technique) en base sept pour trouver $(100)_{sept}$.
- convertir $(66)_{sept}$ en base dix puis déterminer le successeur codé en base dix qui est 49 (et éventuellement reconvertir en base sept).

L'objectif de cette reformulation des traitements et conversions dans le langage des praxéologies est de conserver leur différence cognitive tout en les considérant au sein d'une organisation mathématique que donne la TAD. Cette distinction des techniques permet une conciliation des deux cadres sur le point crucial des conversions.

Il est clair que, dans notre cadre d'analyse, du caractère cognitif spécifique d'une conversion nous ne conservons qu'une partie qui contient notamment le choix conscient d'un sujet de faire cette conversion. C'est ainsi que parfois la différence cognitive entre une conversion et un traitement peut s'effacer totalement car seule la dimension algorithmique, qui est une technique au sens de la TAD, est du ressort du sujet, soit parce que l'on demande explicitement au sujet de faire cette conversion, soit parce qu'elle correspond à une technique qui a été travaillée dans l'institution pour effectuer un certain type de tâches pour un exemple avec les bases de numération pour l'écriture des entiers cf. Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010, 2013).

Les entiers codés en base quelconque pour des étudiants-professeurs des écoles

En collaboration avec Kostas Nikolantonakis nous étudions l'impact des bases de numération différentes de dix dans les techniques mises en œuvre par des étudiants-professeurs du premier degré avec une comparaison des deux populations étudiées, française et grecque (Nikolantonakis & Vivier, 2009, 2010, 2013) en ce qui concerne le niveau de la *praxis* (savoir-faire). Plus récemment (Nikolantonakis & Vivier, 2016), nous poursuivons l'étude dans le modèle des Espaces de Travail Mathématique (ETM) de Kuzniak (2011).

Avec des tableaux de pourcentages et avec une faible population française dans la première étude (2009), nous n'avons pas pu mettre en évidence notre hypothèse principale : au-delà des principes mathématiques identiques, les numérations définies par des bases différentes donnent lieu a des registres différents. Pour cela, nous voulions nous appuyer sur la différence

cognitive avancée par Duval entre traitement et conversion. Il a donc fallu une deuxième expérimentation (Nikolantonakis & Vivier, 2010, 2013) avec des populations plus grandes et plus équilibrées (139 étudiants français et 195 étudiants grecs) afin de pouvoir recourir à l'Analyse Statistique Implicative (ASI), avec le logiciel CHIC (Gras, Régnier & Guillet, 2009). Cet outil s'est révélé indispensable en montrant les similarités entre les différentes variables de traitement d'une part et de conversion d'autre part. L'ASI a ainsi permis de valider notre hypothèse en la précisant puisque c'est la distinction entre la base dix et les autres bases de numération que nous mettons en évidence. Plus précisément, on relève deux difficultés cognitives particulièrement importantes pour le codage des nombres dans la numération de position :

- tout d'abord l'introduction de nouveau registres de représentation R_a avec $a \neq dix$;
- puis l'introduction des registres de représentation R_a avec $a > dix$, car cela nécessite de nouveaux signes pour les chiffres.

Ces difficultés cognitives relatives aux registres R_a, avec $a \neq dix$ d'une part et $a > dix$ d'autre part, sont évidemment liées et semblent, d'après notre étude, stables d'une institution à une autre et d'un enseignement à un autre. En particulier, on remarque que beaucoup d'étudiants ne font pas de traitement dans une base autre que dix et, pour effectuer une tâche énoncé dans une base autre que dix, procède d'abord à une conversion en base dix – et ce malgré les variables didactiques choisies pour rendre coûteux cette conversion. Tout se passe comme si les nombres entiers n'étaient considérés comme des nombres que lorsqu'ils sont codés en base dix puisqu'il s'agit du registre où l'on dispose de techniques pour effectuer les tâches.

Toutefois, l'interprétation nécessite d'aller plus loin car les registres et les types de tâches influencent conjointement l'activité mathématique. On propose alors une hiérarchie des cinq types de tâches de l'étude. En particulier, l'item qui demande la parité d'un nombre codé en base impaire a été très difficile bien que la base, sept, soit inférieure à dix car aucune technique interne à R_a n'est disponible.

Nous pointons également le potentiel technologique du registre de l'écriture polynomiale qui constitue un registre très efficace pour traiter les types de tâches pour lesquels on ne dispose pas de technique institutionnelle – c'est le cas de la recherche de la parité d'un nombre en base impaire.

Du point de vue de la comparaison des deux populations, française et grecque, on ne relève que peu de différences. La principale étant que les items sur les successeurs et prédécesseurs de nombres codés dans des bases autres que dix sont beaucoup mieux réussis par les étudiants grecs, mais il faut signaler que ce type de tâches a été largement travaillé, beaucoup plus que pour la population française. La seule *vraie* différence concerne l'écriture polynomiale qui n'est utilisée par aucun étudiant grec, mais peu d'étudiants français l'ont utilisée et il est difficile d'en tirer des conclusions.

Une étude en CP

En collaboration avec Kostas Nikolantonakis et David Block, nous étudions le rôle joué par le registre de représentation de l'énoncé (graphique ou chiffré) dans les choix des stratégies de résolution d'élèves en première année d'école primaire avec une comparaison des trois populations nationales étudiées (Block et al., 2012). L'étude porte sur 61 élèves français, 45 élèves grecs et 86 élèves mexicains à qui on a proposé deux séries de tests, à une semaine d'intervalle : le premier comportait 5 tâches proposées dans le registre graphique et le deuxième comportait les mêmes tâches dans le registre numérique chiffré.

À partir de cette étude internationale sur les problèmes numériques en fin de première année de l'école primaire, nous avons mis en évidence l'influence à la fois des registres de représentation et des praxis sur l'activité mathématique des élèves. Plus précisément, nous

pouvons avancer une hypothèse sur l'importance du registre de représentation pour certains types de tâches.
Pour un type de tâches travaillé, on suppose qu'un élève reconnaît ce type de tâches, le registre dominant pour le traitement est numérique – et ce, même si celui-ci n'est pas le meilleur registre pour le traitement. Il n'y a de ce fait pas de réelle influence du registre de l'énoncé sur les stratégies des élèves même si, comme nous l'avons dit, les activités changent puisque cette stratégie globale peut nécessiter une conversion selon l'énoncé.
On peut avancer deux explications :

- le coût d'une procédure graphique par rapport à une procédure numérique, surtout lorsqu'il y a un minimum de maîtrise de la praxis numérique – ce qui est notamment le cas pour les types de tâches qui ont été travaillés ;
- lorsque l'on traite d'un type de tâches qui a été travaillé, le rôle de l'institution est justement de développer une praxis numérique.

Pour les autres types de tâches, le registre de l'énoncé influence largement les traitements et la réussite. Car si l'énoncé est essentiellement numérique, on a tendance à y rester ce qui ne favorise pas forcément la réussite. Cette tendance semble venir directement du phénomène précédent qui favorise le numérique. En revanche, un énoncé graphique permet de mieux appréhender un type de tâches non travaillé.
Comme le signale Duval, la coordination des registres est importante. Mais il nous semble que cette importance ne s'exprime pas de la même manière selon le type de tâches :

- s'il est travaillé, l'important est de maîtriser la conversion entre le registre graphique et le registre numérique et la praxis numérique enseignée (cf. par exemple pour la somme de deux nombres où beaucoup d'élèves ne maîtrisent pas la technique de la somme) ;
- s'il n'est pas travaillé, l'important est une bonne coordination des deux registres, sans se limiter à la maîtrise des conversions, comme par exemple lors d'une procédure qui est principalement un traitement dans un des deux registres mais avec un contrôle de l'activité dans l'autre registre (notamment pour la tâche d'une répartition équitable de 24 gâteaux dessinés entre 3 enfants).

Néanmoins, les différents points explicités sont directement liés à l'enseignement reçu que ce soit à travers des cultures différentes, comme nous l'avons mis en évidence avec les profils de chaque pays, ou plus vraisemblablement à travers des profils d'activité enseignante dans les classes, ce qui nécessite une étude plus approfondie. Globalement, il nous semble que l'enseignement se focalise un peu trop sur le registre de l'écriture chiffrée (cela est plus flagrant chez les élèves grecs). Car si cela paraît normal pour le développement des praxis numériques (ce registre est tout de même plus puissant que le registre graphique), il n'en reste pas moins que cela entrave l'activité des élèves lorsqu'ils sont confrontés à un type de tâches nouveau car l'enseignement reçu ne permet pas d'entrer sereinement dans des problèmes plus complexes ni de choisir le(s) registre(s) pour les traitements.

Conclusion sur les nombres entiers

Pour les nombres entiers, l'intérêt d'avoir d'autres registres de représentation chiffrés pour les nombres entiers est de permettre de prendre de la distance et de ne pas confondre l'objet mathématique et sa représentation (Duval, 2006). Mais on voit l'intérêt de pouvoir faire des traitements dans ces nouveaux registres, sinon l'objectif risque de ne pas être atteint, la représentation nouvelle n'étant pas perçue comme un nombre. Au-delà du développement des praxéologies, le développement des R-praxis semble de première importance.
Cette question se retrouve également dans le cas de l'étude en CP. Mais on perçoit un autre aspect : avoir un autre registre, graphique ici, dans lequel des traitements sont possibles

permet d'effectuer des tâches que l'on ne sait pas forcément effectuer dans le registre chiffré. Cette conclusion n'est pas nouvelle et rejoint les travaux de Douady (1986) sur les changements de cadre. Au-delà de ce constat déjà ancien, il semble qu'il faille, en plus des nécessaires conversions entre représentation, également considérer la coordination des registres en prenant en compte les traitements. Cela permet d'effectuer des tâches complexes et inédites par un jeu entre deux registres et un contrôle des traitements dans un registre par des traitements dans un autre registre (comme par exemple : isoler graphiquement la part de chaque enfant par un contrôle numérique de la taille des parts par des élèves de 6-7 ans). Il en est de même avec l'étude des entiers dans des bases autres que dix avec l'utilisation du registre de l'écriture polynomiale.

2- LES RATIONNELS EN ÉCRITURE DÉCIMALE

Introduction

Dans l'enseignement secondaire français, les rationnels apparaissent essentiellement comme des fractions. Ceci, comme annoncé ci-dessus, peut entraîner une confusion entre l'objet et sa représentation. Parallèlement, on ne dispose pas d'un registre numérique de représentation valable pour tous les nombres réels ce qui marque une rupture avec les autres ensembles de nombres rencontrés dans l'enseignement secondaire. Les développements décimaux illimités pourraient résoudre ces deux problèmes. Je me concentre plus particulièrement, à la suite des *idécimaux* de Bronner (1997, 2005), sur le cas des développements périodiques en m'appuyant sur des résultats mathématiques afin de pouvoir faire les opérations de base dans ce système de représentation. En se limitant à la somme, il est déjà possible de comprendre pourquoi, si l'on veut des nombres, il est nécessaire d'imposer l'égalité entre 0,999… et 1. Ainsi, opérationnaliser ce registre des Développements Décimaux Illimités (DDI) périodiques permet d'avoir des retombées intéressantes sur les connaissances en jeu, sur la conceptualisation. Il permet en outre, comme précédemment, d'avoir un registre chiffré, valable pour tous les nombres réels, pour lesquels des traitements sont disponibles ce qui permet d'envisager des nouvelles représentations chiffrées comme des représentations d'objets mathématiques, des nombres. Il reste que ces traitements sont limités au cas des rationnels.
Dans cette partie, je traite ainsi largement de l'égalité entre 0,999… et 1, discussion déjà ancienne comme on le verra avec les arguments de Zénon. Mes premières recherches menées sur le sujet (Vivier, 2011) renforcent le fait déjà bien connu (Tall & Schwarzenberger, 1978 ; Sierpinska, 1985 ; Mena-Lorca, Mena-Lorca, Montoya-Delgadillo, Morales & Parraguez, 2015) que pour beaucoup d'élèves du lycée et une proportion importante d'étudiants de mathématiques en première année d'université (niveau L1) on a l'inégalité stricte $0,\overline{9}<1$.

Depuis l'Antiquité

Commençons par poser le problème en nous référant aux arguments de Zénon d'Elée. Il n'est ici pas question de discuter de la validité de ces arguments ni de leur réfutation par Aristote (1969) dans la Physique VI ou encore Bergson (1889). Il s'agit ici simplement de voir et de comprendre où nous conduisent ces arguments du point de vue mathématique et sémiotique. Pour simplifier, la distance totale est prise égale à 1. Un groupe de chiffres surligné signifie, comme usuellement, la répétition à l'infini vers la droite de ce groupe de chiffres. Dans ce prologue, nous utilisons la base deux car elle est bien adaptée au problème de la dichotomie de Zénon.

Dans le premier argument de Zénon, la dichotomie, les distances à parcourir sont, successivement, 1/2, 1/4, 1/8… ce qui s'écrit, en base deux : 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; etc. (figure 1). Allons-nous jusque $0,\overline{0}1$? Avons-nous pour autant 0 ? Symétriquement, les distances restantes, pour atteindre l'arrivée, sont égales à 1/2, 1/2+1/4, 1/2+1/4+1/8,… , soit, toujours en base deux : 0,1; 0,11; 0,111 etc. Allons-nous jusque $0,\overline{1}$? A-t-on finalement 1 ?

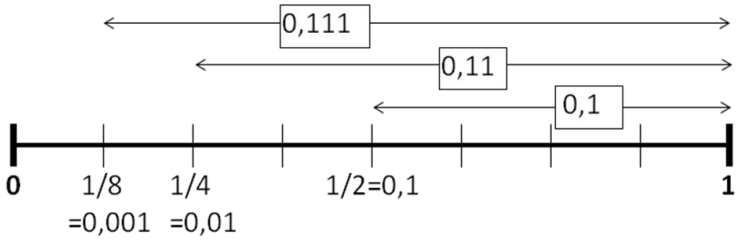


Figure 1 : la dichotomie (les nombres sont écrits en fraction et en base deux)

A partir de l'argument de Zénon, il y a deux points intéressants si l'on veut concilier les aspects mathématiques et la réalité (la notion de limite est bien sûr sous-jacente ainsi que celles des infinis potentiel et actuel) :

1. le fait de considérer la totalité des distances, à l'infini ;
2. le fait de comprendre et de justifier que cette totalité est 1 (ou 0).

Du point de vue mathématique, la situation est identique en base dix avec 0,999… et 1. Les problèmes relatifs aux points (1) et (2) surgissent chez les étudiants comme dans la figure 2 où il s'agit d'un étudiant de première année de mathématiques ; l'égalité 0,999…= 1 a pourtant été enseignée au premier semestre.

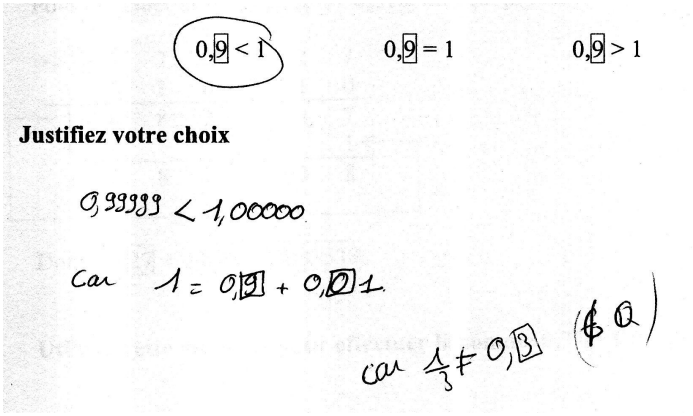


Figure 2 : Un étudiant de L1, mathématiques

Ce type de réponse est à rapprocher d'une conception non standard des nombres. Des étudiants semblent en effet avoir développé des conceptions proches de l'analyse non standard (Ely, 2010) ce qui ne peut manquer de créer des malentendus dans l'enseignement. Nous avons interprété cela en terme de paradigmes dans le modèle des Espaces de Travail Mathématique (Montoya & Vivier, 2016 ; Kuzniak, Montoya-Delgadillo, Vandebrouck & Vivier, 2016).

Les *justifications* de l'égalité

Voici quelques justifications, recensées par Tall et Schwarzenberger (1978), de l'égalité $0,\overline{9}=1$ qui s'appuient de fait sur les calculs dans **Q** :

1. $1/3=0,\overline{3}$ donc $3\times1/3 = 3\times 0,\overline{3}$ d'où $1 = 0,\overline{9}$;

2. $10\times0,\overline{9} = 9+0,\overline{9}$ donc $9\times 0,\overline{9} = 9$ et $0,\overline{9} = 1$;
3. $1/9=0,\overline{1}$, $2/9=0,\overline{2}$, etc. jusque $8/9=0,\overline{8}$ et $9/9=0,\overline{9}$;
4. de manière plus « légale », comme le dit Tall lui-même, faire une division par 2 pour prouver que $(1+a)/2=a$ pour $a= 0,\overline{9}$ et que donc $a=1$ par des traitements algébriques.

Tall et Schwarzenberger (1978) parlent de légalité parce que l'on n'a pas défini les opérations (addition et multiplication par un entier, soustraction) sur ces nouveaux objets (pour le cas 4, on abaisse successivement les chiffres, on n'a donc pas besoin de considérer l'ensemble infini de chiffres). Cela gêne d'ailleurs les enseignants lorsqu'ils produisent ces justifications avec ces calculs.

Des justifications analytiques sont également possibles comme le calcul d'une somme d'une série géométrique (limite) ou par un argument topologique (Dubinsky, Weller, Michael, Mc Donald & Brown, 2005).

En outre, malgré ces tentatives de justifications, cela ne convainc pas les étudiants (Mena et al. 2015 ; Njomgang Ngansop & Durand-Guerrier, 2014) même s'ils peuvent reproduire ces arguments (cela est sans doute lié à l'autorité de l'enseignant).

Les taux de réponse pour l'inégalité $0,\overline{9}<1$ sont élevés avec peu de variations entre les différentes études ce qui semble indiquer un obstacle :

- au début du lycée (113 élèves) : 100% (Vivier, 2011),
- à l'université pour des étudiants de mathématiques : 13/21 (Vivier, 2011) ; 20/36 (Tall, 1980) ; 23/40 et 12/19 (Mena-Lorca et al., 2015) avec une stabilité autour de 60% pour ce public *mathématicien*,
- pour 204 étudiants-professeurs du 1er degré (Weller, Arnon et Dubinsky, 2009) : 73,5%.

On note en effet une opposition frontale et forte avec des connaissances très anciennes sur l'ordre en écriture décimale, connaissances qui ont fait leur preuve et qui entraîne $0,\overline{9}<1$. Ainsi, la nécessaire réorganisation des connaissances s'avère complexe, plus complexe que dans le cas des nombres négatifs avec $(-1)\times(-1)=1$ où, malgré la difficulté conceptuelle (Glaeser, 1981), il n'y a pas d'opposition de connaissance.

Les opérations

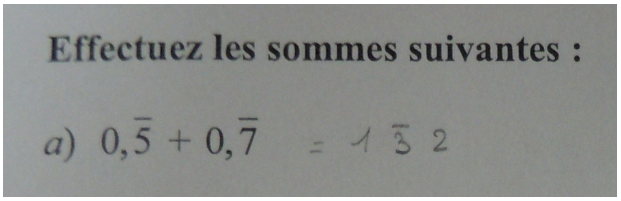
Comme dit dans la 1re partie, pour que ces écritures acquièrent un statut de nombre, il est nécessaire de pouvoir faire des opérations – du moins on peut le penser. Regardons comment on peut procéder avec un cas simple comme $0,\overline{5}+0,\overline{7}$:

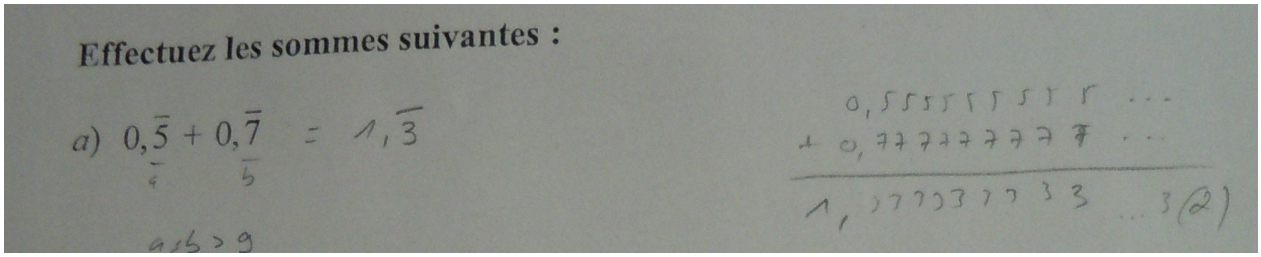
i. $0,55+0,77=1,32$; $0,5555+0,7777=1,3332$ etc.
ii. $5/9 + 7/9 = 12/9 = 1+3/9 = 1,\overline{3}$
iii. $0,\overline{3}+0,\overline{2}+0,\overline{7} = 0,\overline{3}+0,\overline{9} = 1,\overline{3}$
iv. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5+7}{10^n} = 12\times\frac{1}{9}$ par un calcul d'une somme de série.

La procédure (i) nécessite d'avoir des connaissances sur les sommes d'écritures périodiques et en particulier de devoir supprimer les chiffres de droite comme on peut parfois le constater. Néanmoins, elle est source d'erreur et, comme pointé par Margolinas (1988), peut amener à des écritures infinitésimales (on les rencontre effectivement, notamment chez des étudiants-professeurs de mathématiques en Master 2, cf. figures 3a et 3b). Cette procédure se base essentiellement sur un point de vue processus, au sens de la théorie APOS (Arnon et al., 2014), des écritures décimales périodiques.

La procédure (ii), par une double conversion, est plus classique et permet de comprendre pourquoi l'on ne dispose pas de procédure directe de somme en écriture décimale puisque l'on n'en a pas besoin pratiquement. Elle apparaît aussi dans les réponses des étudiants (figure 4). Néanmoins, comme nous l'avons vu en partie 1 sur les entiers, il semble difficile

d'accéder à la notion de nombre si on évite les opérations par une conversion.
La procédure (iii) nécessite la connaissance de l'égalité $0,\overline{9}=1$. Elle n'apparaît pas chez les étudiants des études que nous avons menées (en première et cinquième années d'université, en mathématiques).
La procédure (iv) sur les séries semble être dans un autre *monde* et la coexistence de l'inégalité $0,\overline{9}<1$ avec le calcul correct de la somme de la série $\Sigma 9/10^n$ est tout à fait possible comme le rapportent Njomgang Ngansop et Durand-Guerrier (2014) : le calcul de la somme de la série est perçu comme valide ou est effectué correctement mais, malgré cela, des étudiants continuent d'affirmer l'inégalité. Tall et Vinner (1981) interprètent cela comme des activations de *concept images* différentes : « different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole. » (Tall & Vinner, 1981, p. 152).
Force est de constater que l'on est démuni et, dans ce contexte, on comprend bien l'élaboration d'un logiciel pour l'étude de Weller et al. (2009) qui sert d'appui pour effectuer les opérations en restant dans le registre des écritures décimales en prenant un point de vue objet. Mais ce qu'il me paraît important dans cette étude (voir aussi Arnon et al., 2014, chapitre 8) est qu'un travail sur les opérations mathématiques améliore la compréhension de $0,\overline{9}=1$: ils remarquent l'augmentation du taux des étudiants qui affirment l'égalité avec une amélioration de la qualité des arguments avancés.





Figures 3a et 3b : étudiants-professeurs (Vivier, 2012)

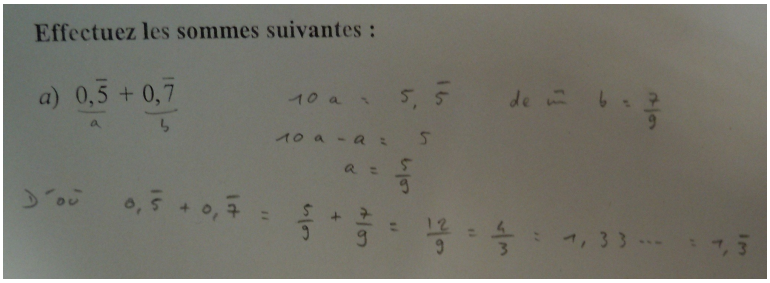


Figure 4 : étudiants-professeurs (Vivier, 2012)

Les opérations avec les mots circulaires

Les études qui suivent se nourrissent de mes recherches en mathématiques en collaboration avec Benoît Rittaud. Il s'agit d'une étude sur une extension du système de numération de Zeckendorf (1972) où les entiers sont codés à l'aide de la suite de Fibonacci : les nombres de base sont issus de la suite $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ avec $F_0=1$ et $F_1=2$ et non pas $B_{n+1}=b\times B_n$ avec $B_0=1$ pour un codage usuel en base b. Nous étudions la structure générale de cet ensemble de

nombres et nous caractérisons les éléments périodiques comme des rationnels (Rittaud & Vivier, 2012). Dans cette numération, nous n'avons besoin que des chiffres 0 et 1 (sans avoir deux 1 consécutifs du fait de la relation entre les unités de numération). Par exemple : 1010010 code le nombre $1\times21+0\times13+1\times8+0\times5+0\times3+1\times2+0\times1=31$ et les nombres périodiques $\overline{0010010}100$ et $0\overline{01001010}$ codent tous deux 1/2 comme solution de $2x=1$.
Tout devait être construit mathématiquement et notamment la somme de deux F-adiques périodiques, nos nouveaux *nombres*. Cela n'a pas été simple à cause de la gestion des retenues, bien plus complexe qu'en base usuelle de numération, et cela nous a amenés à concevoir les périodes comme de nouveaux objets, les *mots circulaires*, pour comprendre leur fonctionnement.
Les mots circulaires s'avèrent être des objets intéressants à plus d'un titre. En particulier, une période d'un rationnel en écriture décimale peut être considérée comme un mot circulaire. Cela nous permet une construction du corps **Q** à partir des écritures décimales périodiques en donnant des algorithmes pour effectuer les 4 opérations de base sans utiliser l'écriture fractionnaire. Les cas de la somme et de la différence sont détaillés à la suite.

La somme

Présentons tout d'abord l'algorithme sur quatre exemples (Vivier, 2012) où les trois éléments essentiels ressortent : faire débuter la période au même rang, avoir des périodes de même taille, gérer l'éventuelle retenue à gauche.

1. Le premier exemple (figure 5a) est celui où il n'y a aucune adaptation par rapport à l'algorithme de somme de deux décimaux en écriture décimale : $34{,}0\overline{45} + 2{,}5\overline{27} = 36{,}5\overline{72}$.
2. L'exemple (figure 5b) de la somme $5{,}7\overline{248} + 8{,}\overline{307} = 5{,}7\overline{248} + 8{,}3\overline{073} = 14{,}0\overline{321}$ montre comment procéder lorsque les périodes ne commencent pas au même rang (il faut *décaler* la période tout en permutant ses chiffres).
3. L'exemple (figure 5c) de la somme $0{,}\overline{34} + 7{,}\overline{202} = 0{,}\overline{3434} + 7{,}\overline{202202} = 7{,}\overline{545636}$ montre comment procéder lorsque les périodes n'ont pas la même taille (il suffit d'utiliser le PPCM des tailles).
4. Le dernier exemple (figure 5d) concerne le problème de la gestion de la retenue qui *sort de la période*. Nous marquons en gras les retenues qu'il faut compter deux fois : au premier chiffre de la période et au premier chiffre à gauche de la période (le 0 trouvé en premier est donc barré et remplacé par un 1). On trouve : $3{,}\overline{24} + 4{,}\overline{96} = 8{,}\overline{21}$.

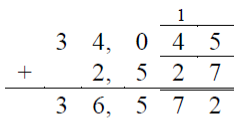


Figure 5a

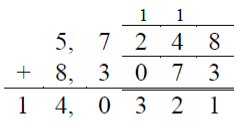


Figure 5b

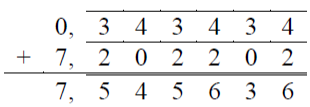


Figure 5c

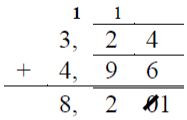


Figure 5d

Figure 5 : Exemples de somme

Une étude sur l'utilisation d'un algorithme, qui est donné sur un exemple, de somme de deux

rationnels en écriture décimale a été menée en classe de seconde (113 élèves) et de première année d'université (14 étudiants) et est exposée dans (Vivier, 2011). Du point de vue procédural, cet algorithme de somme est plutôt bien compris en seconde, malgré quelques problèmes d'identification des périodes, mais la compréhension conceptuelle de cet algorithme semble loin des possibilités des élèves de ce niveau. Il en est de même en formation des enseignants du premier degré qui, en outre, préfèrent conserver les procédures par approximation, sans pour autant pouvoir les contrôler.
En revanche, en première année d'université il n'y a quasiment plus de problème, ni procéduraux, ni conceptuels. Une étude est également faite sur la comparaison et surtout sur la somme avec notamment une étude des techniques pour effectuer la somme de deux rationnels en écriture décimale illimitée périodique et une discussion avec la théorie APOS (Arnon et al., 2014).
Ces deux études permettent de justifier que cet algorithme de somme peut tout à fait être considéré dans l'enseignement français, mais sans doute à partir de la fin de l'enseignement secondaire pour les classes scientifiques. Il reste néanmoins à étudier expérimentalement l'intérêt que peut présenter cet algorithme de somme.
Une étude (Vivier, 2012) en formation d'enseignant du second degré (12 enseignants) a été menée dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998). Sur la base d'un test diagnostique sur les comparaisons et sommes, des groupes ont été formés avec la consigne de trouver un algorithme de somme pour les rationnels en écriture décimale. Si aucun groupe n'a trouvé d'algorithme, les trois points cruciaux ont été globalement trouvés (début et taille des périodes, gestion des retenues) et résolus pour la plupart des groupes sauf en ce qui concerne la gestion des retenues. Cependant, un groupe, sur un exemple, a bien identifié le problème (figure 6) et un autre groupe a trouvé la procédure à suivre sans la comprendre (figure 7) ce qui fait que collectivement un algorithme, proche de celui que l'on propose, a pu être élaboré.

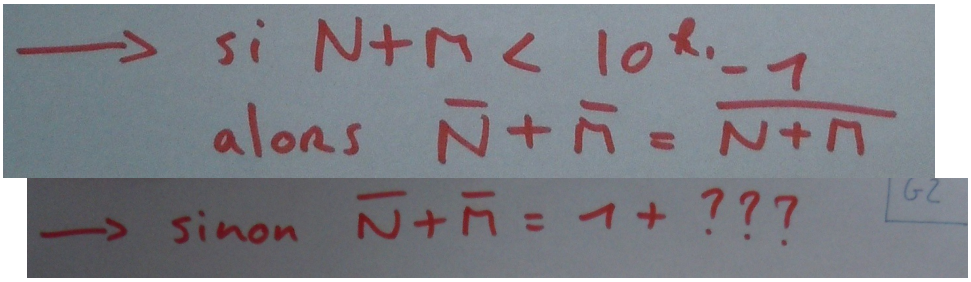


Figure 6 : Par des étudiants-professeurs de M2 MEEF 2nd degré (Vivier, 2012)

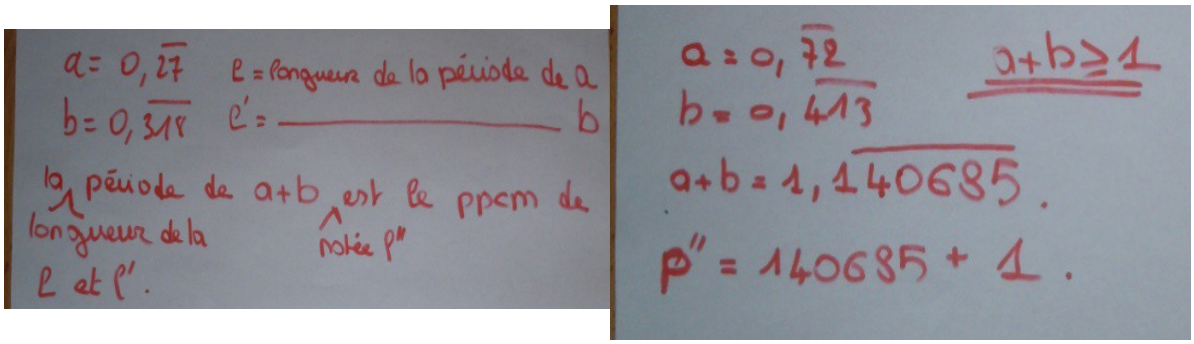


Figure 7 : Par des étudiants-professeurs de M2 MEEF 2nd degré (Vivier, 2012)

En outre, un groupe a explicitement considéré les périodes en les considérant comme des objets à part entière en essayant de les ajouter (figure 6). Il y a bien, sur cet exemple,

l'encapsulation d'un processus en un objet, la période, sur lequel on peut effectuer des traitements (ici des sommes). Ce groupe a de fait découvert un nouvel objet, les mots circulaires.

Le problème de la soustraction et les autres algorithmes

L'algorithme de la somme permet en effet d'obtenir rapidement l'identité $0,\overline{9}+a=1+a$ pour tout a dont la période n'est pas $\overline{0}$. Cette relation n'est pas nouvelle (Richman, 1999) mais la nouveauté ici est qu'elle apparaît comme une conséquence de la définition de la somme sur ces écritures chiffrées. Un jeu est alors possible entre la comparaison et la somme qui ont des caractéristiques qui s'opposent : numériquement on devrait avoir $0,\overline{9}<1$ mais algébriquement on devrait avoir, par simplification, $0,\overline{9}=1$. Il est possible de faire ressortir cette opposition des deux points de vue des travaux des étudiants en L1 car « on calcule $0,\overline{9}+a$ » et « on voit $1+a$ » (Rittaud & Vivier, 2014).
Ainsi, tel quel, on n'a pas un monoïde régulier, donc pas de soustraction possible (on ne peut pas définir un groupe)… à moins d'identifier $0,\overline{9}$ et 1 (mais ce n'est pas une obligation ! Tout dépend de ce que l'on veut). Ainsi peut-on construire le corps **Q**. Et il n'est pas sans intérêt de remarquer que dans tous les calculs *prouvant* $0,\overline{9}=1$ il y a une soustraction (excepté pour la justification s'appuyant des relations comme 1/3=0,333… etc. où la conversion définit un morphisme entre l'ensemble des développements décimaux périodiques et **Q**).
En identifiant $0,\overline{9}$ et 1, on peut donc définir une soustraction qui fonctionne de manière identique à la somme avec une gestion similaire des retenues. La multiplication est plus complexe (il faut faire des sommes *triangulaires* ou considérer des divisions par 9, 99, 999, etc.). La division n'est pas si difficile et permet de revisiter l'algorithme usuel de la division : multiplier par une puissance de 10, c'est juste un décalage.
Une recherche historique a permis de retrouver les travaux de Marsh (1742), et d'autres comme Malcom ou Hatton (cf. Rittaud & Vivier, 2014)[3] qui avait proposé ces algorithmes en s'appuyant fortement sur les fractions et la conversion en écriture décimale – cela nous a permis de simplifier l'algorithme de la multiplication. Les travaux de ces comptables semblent avoir été oubliés par l'histoire des mathématiques.

Une étude en L1

L'étude (Rittaud & Vivier, 2014) a été menée en L1 auprès de 29 étudiants, sur deux jours. Le premier jour un test diagnostique a été proposé sur les écritures décimales illimitées, des comparaisons, des sommes, des différences. Cela a permis de former les groupes du deuxième jour autour de l'algorithme de somme, qui est donné sur des exemples. Si la contradiction apparaît, en revanche l'égalité n'émerge pas de cette contradiction essentiellement pour deux raisons, différentes selon que le groupe a affirmé l'égalité ou non : (1) l'égalité a été rappelée en début d'année et elle est avancée comme une évidence sans que l'on puisse attribuer sa présence à la contradiction ; (2) le temps de travail sur l'algorithme a été sans doute trop court pour que les étudiants puissent avoir suffisamment confiance en lui pour écarter l'inégalité $0,\overline{9}<1$. Enfin, une étude plus théorique en TAD est exposée utilisant les praxéologies et en interprétant l'égalité $0,\overline{9}=1$ comme une technologie cachée.
Cette position pour discuter de la comparaison entre $0,\overline{9}$ et 1 est totalement nouvelle. La plupart des travaux, tels ceux de Tall (1980) et de Dubinsky et al. (2005), se placent d'emblée dans un ensemble construit de nombres qui est de fait soit **Q** soit **R**, même si l'ensemble de référence n'est pas toujours explicité. On justifie alors l'égalité $0,\overline{9}=1$ soit par des opérations dans **Q** (Tall & Schwarzenberger, 1978), soit par des considérations topologiques (Dubinsky

3 A noter aussi le travail en révision : Rittaud, B. & Vivier, L. La mystérieuse égalité 0,9999…=1 : regards didactiques, mathématiques et historiques, projet d'ouvrage collectif aux PUFC.

et al., 2005). Pour les premières justifications, prenons, par exemple, le calcul $10\times0,\overline{9}-0,\overline{9}=9$ qui mène à $0,\overline{9}=1$. Pourquoi croire cela au lieu de la très naturelle inégalité ? Si l'on fait comme d'habitude, avec les opérations on aboutit à l'égalité alors qu'avec la comparaison on aboutit à l'inégalité. Bref, les mathématiques semblent incohérentes sur ce point et en tout cas il n'y a pas d'explication. Quant aux justifications topologiques, basées sur la complétude de **R**, elles me paraissent d'un niveau beaucoup trop élevé pour fournir une explication raisonnable à ce public : c'est comme si l'on justifiait l'existence du PGCD dans le secondaire par les idéaux dans l'anneau principal **Z**.

Conclusion de la partie 2

Ici encore, on voit l'intérêt d'opérationnaliser le registre des écritures décimales illimitées. D'une part cela permet de ne pas avoir un unique registre de représentation chiffré pour les rationnels ce qui pourrait avoir pour conséquence la confusion (répandue) entre nombres rationnels et fractions exactement comme nous l'avons affirmé avec les nombres entiers et l'écriture décimale de ces objets.
En outre, comme annoncé, le gain conceptuel paraît important. Il permet en effet de comprendre, d'une manière nouvelle, le besoin de l'égalité entre $0,\overline{9}$ et 1 afin d'avoir un ensemble de nombres avec une structure algébrique intéressante (pouvoir définir une soustraction, pouvoir simplifier) comme dans l'extension des entiers naturels aux entiers relatifs où l'on impose $(-1)\times(-1)=+1$ afin de conserver des propriétés algébriques (le fameux *principe de permanence*).
Cela, alors même que l'enseignement secondaire français semble exclure toute référence aux écritures décimales périodiques, nous paraît important dans l'apprentissage des premières connaissances sur les nombres réels. Les écritures décimales illimitées constituent en effet un registre de représentation chiffré valable pour tous les nombres réels où l'on peut percevoir la propriété de complétude spécifique de **R**. On pourra se référer à (Oktaç & Vivier, 2016) pour une présentation de recherches sur les nombres réels.

3- LES TANGENTES AUX COURBES

Introduction

Dans mes investigations pour écrire l'ouvrage de vulgarisation « La géométrie analytique » (Vivier, 2006), je me suis familiarisé avec les méthodes algébriques d'obtention des tangentes aux courbes algébriques et plus spécifiquement avec la méthode de Descartes. C'est avec cette référence historique que j'ai commencé à étudier l'enseignement de la notion de tangente en France. Je propose alors dans (Vivier, 2010a, 2010b) de travailler sur la notion de tangente d'un point de vue algébrique avant de rentrer pleinement dans l'analyse. Je m'inspire de la méthode de Descartes et je m'appuie sur un logiciel libre de géométrie dynamique.
Cette méthode permet de déterminer les tangentes à une courbe algébrique, qu'elle soit représentative d'une fonction ou non, en considérant une condition sur les points d'intersection entre une droite passant par le point et la courbe. Il s'agit alors d'un faisceau de droites qui est constitué, cette fois-ci, des sécantes dans un sens usuel (sauf pour la, ou les, tangente(s)). Cette condition revient, dans les cas les plus courants, à la recherche d'une intersection d'ordre 2 (ordre maximum dans le cas général). Il est à noter qu'il n'est pas nécessaire de rechercher explicitement les points d'intersection, un travail sur les équations suffit. La méthode adaptée de Descartes (1637) se trouve en annexe 1.
Néanmoins, les notions d'algèbre nécessaires étant avancées (il faut considérer les équations

de courbes, savoir factoriser un polynôme par un monôme du premier degré) et vu les programmes du secondaire en France, il semble difficile de proposer ce déroulement en l'état à des lycéens. De plus, il est préférable de comprendre d'abord comment réagissent les enseignants avant de se lancer dans une expérimentation sur des élèves et ce d'autant plus que, lors de conférences en lycées, je m'étais aperçu que certains enseignants étaient récalcitrants à considérer le point de vue algébrique. Je me suis donc tourné, dans un premier temps, vers un public d'enseignants.

Un état des lieux

La limite des sécantes

Depuis plus d'un siècle (Beke, 1914), la notion de tangente sert à introduire la dérivation, notamment à travers la conception « limite des sécantes » (figure 8), pour ensuite définir plus généralement la tangente à une courbe représentative d'une fonction comme la droite dont le coefficient directeur est le nombre dérivé au point considéré. Bien sûr, il y a là une sorte de cercle vicieux du point de vue mathématique, mais cela n'est pas un problème du point de vue didactique. En effet, l'idée est de s'appuyer sur une conception des tangentes déjà-là pour aller plus loin et ensuite mieux définir ces tangentes.
En revanche, c'est le travail sur les tangentes pour aboutir au nombre dérivé qui est problématique. Plusieurs points sont à discuter :

- la notion de sécantes utilisée, « droite qui passe par deux points distincts de la courbe », n'est pas usuelle, alors que d'autres *sécantes* à la courbe peuvent être envisagées (voir la droite qui coupe la courbe en figure 8) ;
- on introduit la limite d'un quotient de nombres réels par une limite dans l'espace projectif de dimension 1 – n'est-ce pas un peu trop ? ;
- cette nouvelle conception de la notion de tangente n'est pas opérationnelle, pas proposée spontanément par les élèves, n'est plus utilisée jusque la fin des études secondaires ;
- elle s'accompagne souvent d'une activité TICE, mais selon les paramètres du logiciel utilisé il se peut que l'animation aboutisse à superposer exactement les deux points et la droite disparaît alors de l'écran ce qui renforce l'obstacle bien connu chez les élèves (Sierpinska, 1985) : *à la limite il n'y a plus de droite car il n'y a qu'un seul point* !

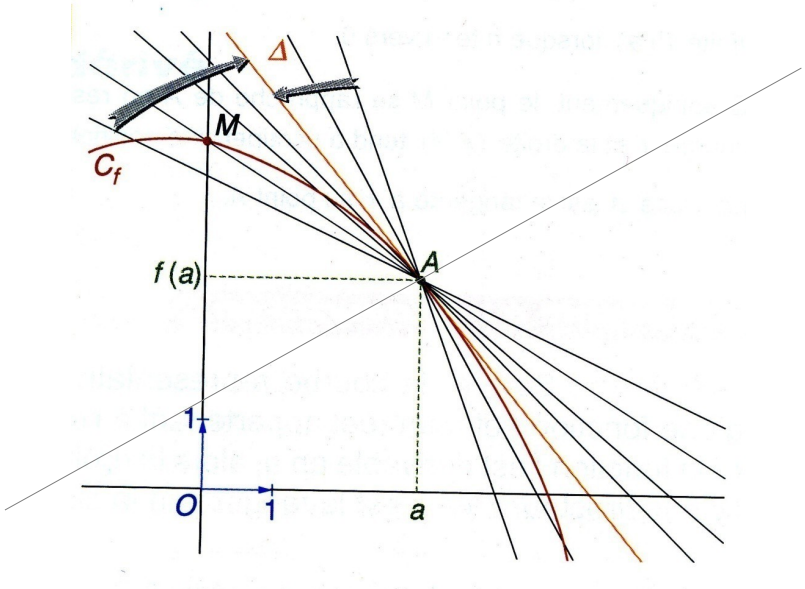


Figure 8 : extrait d'un manuel de 1ère S auquel on a ajouté une droite ne coupant la courbe qu'au point A : est-elle une sécante à la courbe ?

Conceptions relatives à la notion de tangente

Adaptant les travaux de Vinner (1991) et de Castela (1995), j'ai mené des études auprès de 88 élèves de 1re S, avant le chapitre sur la dérivation. Il se trouve que ces élèves ont des conceptions des tangentes qui s'opposent pour les 4/5 d'entre eux aux conceptions sur lesquelles on voudrait s'appuyer (sur 88 élèves ; Vivier, 2010b). En particulier, la conception UPI (une droite avec un Unique Point d'Intersection avec la courbe) est très forte et fréquemment restreinte au cercle – la seule courbe pour laquelle les élèves ont entendu parler de tangente en mathématiques.
En début d'université (Montoya & Vivier, 2015), pour les enseignants du secondaire aussi (Páez Murillo & Vivier, 2013 ; Vivier, 2013), des problèmes sont toujours là.
Une étude expérimentale sur les tangentes a été menée en formation continue des enseignants au Mexique (Páez Murillo & Vivier, 2013). On retrouve dans cette recherche mes préoccupations relatives aux registres sémiotiques et aux techniques. Mais, dans ce cas, le cadre de la TAD n'est pas adapté car les conceptions sont multiples, propres à chaque sujet, et cela conditionne fortement le tracé, ou non, de la tangente. La technique est en effet pratiquement toujours la même : pour dire vite, il s'agit du tracé d'une droite. C'est le type de courbe et le sujet, en amont de la technique, qui sont importants ici – même si l'on peut trouver des éléments technologiques comme l'unicité de la tangente. C'est pourquoi l'étude utilise le cadre cK¢ (Balacheff & Gaudin, 2010 ; Balacheff & Margolinas, 2005) qui permet une étude fine des conceptions et une analyse des actions des sujets en prenant en compte les registres sémiotiques.
Dans (Páez Murillo & Vivier, 2013), nous nous donnons une liste restreinte de conceptions. Bien entendu, ces dernières s'appuient, en partie, sur les recherches sur la notion de tangente telles (Vinner, 1991), (Castela, 1995) et (Maschietto, 2004). Ces conceptions *a priori* nous permettent alors d'analyser les conceptions des enseignants participant à l'étude. En outre, cette formation continue a été élaborée avec la méthodologie ACODESA (Hitt, 2009) et notamment lors de la première phase dans le cadre graphique.
L'objectif de cette première phase, graphique, est pleinement atteint avec 12 courbes proposées dont il faut tracer, si possible, une tangente. Ces 12 courbes sont choisies avec précaution car il s'agit d'une variable didactique de première importance. Ce travail déstabilise les participants ce qui entraîne des débats riches entre différentes conceptions, parfois opposées, et montre le besoin de connaissances permettant de faire le lien entre ces conceptions du concept de tangente.
Nous avions pensé à la méthode adaptée de Descartes et à un Logiciel de Géométrie Dynamique (LGD) pour faire ce lien, mais le niveau en algèbre et la méconnaissance des LGD ont été deux obstacles, sous-estimés pour cette population d'enseignants de mathématiques. Les objectifs n'ont été atteints que pour un des participants, et de manière partielle. En revanche, nous avons validé notre hypothèse qu'une activité uniquement dans le registre graphique, inspirée du « terril » de (AHA, 1999), pouvait donner lieu à une recherche de la tangente dans le cadre algébrique (et non analytique).

Les tangentes dans les cadres graphique et algébrique

Dans (Vivier, 2013), je présente une étude se basant sur trois populations : 88 élèves de 1ère S, 5 enseignants au Mexique (lors d'un atelier de formation continue) et 10 étudiants-professeurs en France (en formation initiale). Je pars de l'hypothèse que la tangente est avant tout, dans

les représentations spontanées, un objet graphique que les mathématiques définissent en géométrie, en algèbre et en analyse. La question qui se pose est alors celle du passage du graphique à un domaine mathématique et de la *distance* entre les deux conceptions en jeu.
Cette distance est *faible* avec la géométrie, mais finalement exploitée uniquement pour le cercle dans l'enseignement secondaire français (ainsi que dans d'autres pays). La distance avec l'analyse est *importante* car cela nécessite des points de vue nouveaux comme une perspective locale et les notions de limites, de taux d'accroissement, de pente. Dans cette perspective de *distance*, le cadre algébrique apparaît comme étant intermédiaire.
Je discute alors deux méthodes algébriques pour l'obtention des tangentes en prenant en compte la proximité avec les conceptions initiales relevées dans les études expérimentales dans le cadre graphique. C'est notamment la perspective locale qui permet de distinguer les deux méthodes : nécessaire pour mener à bien celle qui considère la tangente comme une « droite de transition » (Crombie & Grant, 2012), la perspective locale peut en revanche émerger du travail algébrique sur la méthode de Descartes.
La proposition d'enseignement des tangentes a été élaborée en s'appuyant sur des éléments mathématiques, épistémologiques et historiques de la notion de tangente ainsi qu'à partir de l'identification de connaissances génériques que possèdent des élèves au début de la deuxième année du lycée. Ainsi, nous avons élaboré un milieu théorique (Bloch, 2002) pour la notion de tangente aux courbes algébriques et les principales variables de la situation sont identifiées. Plus précisément, le savoir visé par ce milieu théorique est constitué par la définition mathématique de la tangente qui émerge de ce premier travail algébrique : *Une tangente est une sécante qui forme une intersection d'ordre de multiplicité au moins 2 avec la courbe*. Il semble toutefois que des interventions du professeur soient nécessaires pour certains points comme la mise en évidence des nécessaires solutions doubles, l'obtention d'une tangente *verticale* à un cercle ou la forme algébrique adéquate d'une sécante.

Conclusion sur les tangentes

La méthode algébrique développée (voir annexe 1) permet d'opérationnaliser le registre de représentation algébrique des tangentes dans le domaine de l'algèbre. Il est en général laissé de côté, sauf pour quelques exercices que l'on peut trouver dans certains manuels de lycée, essentiellement pour la parabole en classe de seconde.
Cette opérationnalisation s'appuie sur les représentations premières, et notamment la conception Unique Point d'Intersection, dans le registre graphique. Ainsi, on peut espérer réduire la *distance* entre les conceptions des élèves (en géométrie) et la notion de tangente en analyse permettant d'atteindre la notion de tangente et, ainsi, de donner du *poids mathématique* à l'objet tangente, avant l'enseignement de l'analyse. Est-ce qu'ainsi on pourra effectivement s'appuyer sur les représentations des élèves ? Cela reste à valider, mais on peut néanmoins penser que la tangente dans le domaine de l'algèbre peut constituer un intermédiaire intéressant entre la géométrie et l'analyse.

CONCLUSION GÉNÉRALE

A travers ces trois exemples de notions mathématiques, il ressort que avoir des représentations opérationnelles est, en plus de ne pas confondre l'objet et sa représentation, une condition pour que ces représentations représentent bien des objets mathématiques et pas uniquement une *représentation inerte* sur laquelle on ne peut effectuer aucun traitement. En outre, la recherche d'une opérationnalité des registres est productrice, permet un approfondissement de la compréhension, de la conceptualisation, et permet un renouvellement

des questions didactiques, voire mathématiques et historiques.
Mais cela est souvent au prix d'une prise de distance avec l'habitude, avec le point de vue commun : 10 est le nombre dix ; le chiffre des unités donne la parité d'un nombre entier ; un rationnel est une fraction ; il n'existe pas d'algorithme permettant de faire directement les opérations sur les écritures décimales périodiques ; la tangente est un objet de l'analyse qui *doit* être introduit par la *limite des sécantes*. Autant de *certitudes* qu'il faut arriver à dépasser.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARISTOTE (1969). *Physique.* Paris : Les belles Lettres.
AHA (groupe d'auteurs) (1999). *Vers l'infini pas à pas, Approche Heuristique de l'Analyse – Guide méthodologique.* Bruxelles : De Boeck Wesmael.
ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA FUENTES, S., TRIGUEROS, M. & WELLER, K. (2014). *APOS theory, a Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education.* New York : Springer-Verlag.
BALACHEFF, N. & GAUDIN, N. (2010). Modeling Students' Conceptions: The Case of Function. In F. Hitt, D. Holton & P. Thompson (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education*, Volume VII (pp. 207- 234). Washington : American Mathematical Society.
BALACHEFF, N. & MARGOLINAS, C. (2005). cK¢ : modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In C. Margolinas & A. Mercier (Eds.), *Actes de la XIIe école d'été de didactique des mathématiques*, *Balises pour la didactique des mathématiques* (pp. 75–106). Grenoble : La Pensée Sauvage.
BEKE, E. (1914). Les résultats obtenus dans l'introduction du calcul différentiel et intégral dans les classes supérieures des établissements secondaires. *L'Enseignement Mathématiques*, 16, 245-284.
BERGSON, H. (1889). *Essai sur les données immédiates de la conscience*, Alcan, Paris.
BLOCH, I. (2002) Différents niveaux de modèles de milieu dans la théorie des situations, *Actes de la 11e École d'été de didactique des mathématiques 21-30/08/2001*, Corps – France, La Pensée Sauvage.
BLOCK, D., NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2012). Registre et praxis numérique en fin de première année de primaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 17, 59-86.
BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-123.
BOSCH, M., FONSECA, C. & GASCON, J. (2004). Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 24(2/3), 205-250.
BRONNER, A. (1997). *Etude didactique des nombres réels: Idécimalité et racine carré*. Thèse de doctorat, Université de Grenoble 1.
BRONNER, A. (2005). La question du numérique dans l'enseignement du secondaire au travers des évolutions curriculaires. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Actes de la XIIIème école d'été de didactique des mathématiques*, *Perspective en didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
CASTELA, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 15(1), 7-47.
CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 222-265.
CROMBIE, W. & GRANT, M. (2012). Polynomial calculus: rethinking the role of architecture and access to advanced study. Texte présenté à ICME-12*,* Seoul, Korea.

DESCARTES, R. (1637). *La géométrie.* Paris : Editions Jacques Gabay (réédition de 1991).
DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.
DUBINSKY, E., WELLER, K., MICHAEL, A., MC DONALD, M. A. & BROWN, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 253-266 .
DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37–65.
DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Berne : Peter Lang.
DUVAL, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1), 103-131.
ELY, R. (2010). Nonstandard Student Conceptions About Infinitesimals. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 117-146.
GLAESER, G. (1981). Épistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.
GRAS, R., RÉGNIER, J.-C., & GUILLET, F. (Eds.) (2009). *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités*. Toulouse : Cépaduès.
HITT, F. (2009). Resolución de situaciones problemas y desarrollo de competencias matematicas en ambientes de aprendizaje de colaboración, debate científico y autoreflexión (ACODESA). In. D. Benitez, O. Mederos, & E. Padron (Eds.), *Memorias del primer seminario internacional sobre resolución de problemas y uso de la tecnologia computaciona.* Mexico.
KUZNIAK, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 16, 9-24.
KUZNIAK, A., MONTOYA DELGADILLO, E., VANDEBROUCK, F. & VIVIER, L. (2016). Le travail mathématique en analyse de la troisième au début du supérieur : identification et construction. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques* (accepté). Grenoble : La Pensée Sauvage.
MARGOLINAS, C. (1988). Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x*, 16, 51-66.
MARSH, J. (1742). *Decimal arithmetic made perfect; or, the management of infinite decimals displayed.* London.
MASCHIETTO, M. (2004). Le jeu entre point de vue local et point de vue global en analyse: une ingénierie didactique à visée diagnostique au niveau première. In *Actes du colloque de Mulhouse 8-9 mars 2002.* IREM de Strasbourg.
MENA-LORCA, A., MENA-LORCA, J., MONTOYA-DELGADILLO, E., MORALES, A., & PARRAGUEZ, M. (2015). El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), 329–358.
MONTOYA DELGADILLO, E. & VIVIER, L. (2015). ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico - Cambios de dominios y de puntos de vista. In P. Scott & A. Ruiz (Eds.), *Educación Mathemática en las Américas 2015, Volumen 17 : Talleres y Minicursos, Proceedings of CIAEM XIV* (pp. 157-168). México : CIAEM.
MONTOYA DELGADILLO, E. & VIVIER, L. (2016). Mathematical Working Spaces and Paradigms as an analysis tool for the teaching and learning of analysis. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 48(6), 739–754.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2009). La numération en base quelconque pour la formation des enseignants du premier degré en France et en Grèce. Une étude articulant registres et praxéologies. In A. GAGATSIS, A. KUZNIAK, E. DELIYIANNI & L. VIVIER (Eds.), *Chypre et France, Recherche en didactique des mathématiques, Actes du 1er colloque*

Franco-Chypriote de didactique des mathématiques. Université de Chypre, Chypre.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2010). Registres et praxis pour la numération de position en base quelconque – une étude statistique en France et en Grèce. In J.-C. Régnier, R. Gras, F. Spagnolo & B. Di Paola (Eds.), *Analyse statistique implicative - objet de recherche et de formation en analyse de données, outil pour la recherche multidisciplinaire*, *Actes du 5e colloque A.S.I.*. Université de Palerme, Italie.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. *MENON : Journal of Educational Research*, Issue 2a, 99-114.
NIKOLANTONAKIS, K. & VIVIER, L. (2016). El ETM de Futuros Profesores de Primaria en un Trabajo sobre los Números Naturales en Cualquier Base. *Boletim de Educação Matemática – BOLEMA,* 30, numéro 54, 23-44.
NJOMGANG NGANSOP J. & DURAND-GUERRIER V. (2014). 0, 999….. = 1 an equality questioning the relationships between truth and validity. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti, *Proceedings of CERME 8* (pp. 196-205). Middle East Technical University, Ankara, Turquie.
OKTAÇ, A. & VIVIER, L. (2016). Conversion, change, transition… In B. R. HODGSON, A. KUZNIAK, & J.-B. LAGRANGE (Eds.), *The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues. A Hommage to Michèle Artigue* (pp. 87-122). Springer International Publishing.
PÁEZ MURILLO, R. E. & VIVIER, L. (2013). Evolution of teachers' conceptions of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 209-229.
RICHMAN, F. (1999). Is .999. . .= 1 ? *Mathematics Magazine*, 72(5), 396–400.
RITTAUD, B. & VIVIER, L. (2012). Circular words, F-adic numbers and the sequence 1, 5, 16, 45, 121, 320,… *Functiones et approximatio commentarii mathematici*, 47(2), 207-231.
RITTAUD, B. & VIVIER, L. (2014). Different praxeologies for rational numbers in decimal system – the $0,\overline{9}$ case. In B. Ubuz, C. Haser & M. A. Mariotti, *Proceedings of CERME 8* (pp. 363-372). Middle East Technical University, Ankara, Turquie
SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 6(1), 5-67.
TALL, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. *Poster presented at the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley*.
TALL, D. O. & SCHWARZENBERGER, R. L. E. (1978). Conflicts in the Learning of Real Numbers and Limits. *Mathematics Teaching*, 82, 44–49.
TALL, D. O., & VINNER, S. (1981). Concept image and conception definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151–169.
VINNER, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of Mathematics. In D. TALL (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
VIVIER, L. (2006). *La Géométrie analytique*. Paris : Le Pommier, collection Quatre à Quatre.
VIVIER, L. (2008). De la synthèse sur les nombres à la doxa ensembliste. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 13, 63 - 92.
VIVIER, L. (2010a). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y su enseñanza*, Vol. II. México.
Revue en ligne : http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
VIVIER, L. (2010b). Un milieu théorique pour la notion de tangente dans l'enseignement secondaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 15, 167-193.
VIVIER, L. (2011). El registro semiótico de los Desarrollos Decimales Ilimitados. *El cálculo y su enseñanza*, Vol. III. México.
Revue en ligne : http://mattec.matedu.cinvestav.mx/el_calculo/
VIVIER, L. (2012). Construction d'une ressource pour l'enseignant : un algorithme de somme de deux rationnels en écriture décimale. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des*

mathématiques et contrat social, Enjeux et défis pour le 21e siècle, Actes du colloque EMF 2012 (pp. 919-932). Université de Genève.
VIVIER, L. (2013). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. *International Journal of Mathematic Education in Science and Technology*, 44(5), 711-717.
WELLER, K., ARNON, I. & DUBINSKY, E. (2009). Preservice Teachers' Understanding of the Relation Between a Fraction or Integer and Its Decimal Expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 9(1), 5-28.
ZECKENDORF, E. (1972). Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas. *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège*, 41, 179-182.

ANNEXE 1 : ADAPTATION DE LA MÉTHODE DE DESCARTES

Descartes propose de déterminer un cercle tangent à une courbe algébrique de manière à obtenir la tangente (le rayon est la normale). On peut adapter cette méthode avec des droites dans un repère cartésien, la seule restriction est que l'on n'obtient pas les tangentes *verticales*. L'idée est simple : parmi les droites du faisceau de droites concourantes, rechercher celle(s) qui a (ont) une intersection d'ordre supérieur. Cela requiert un travail sur les équations et on peut s'appuyer sur l'identification des points d'intersection pour les courbes de degré 2 puis 3. Je développe ces deux exemples à la suite, mais la méthode est beaucoup plus générale (Vivier, 2010).

Commençons par l'exemple d'une parabole et cherchons la tangente à $y=x^2$ passant par le point $A(a,a^2)$. On forme le système d'équations qui suit puisque la courbe et chacune des droites du faisceau passent par A :

$$y = x^2 \quad ; \quad y = k(x-a)+a^2$$

En identifiant y, on obtient l'équation : $x^2 = k(x-a)+a^2$. Cette équation se factorise en $(x-a).(x+a-k) = 0$ puisque l'on peut remarquer que $x=a$ est nécessairement une solution. On obtient donc deux solutions qui correspondent à deux points d'intersection. Comme on veut la tangente, on peut, en s'appuyant sur la conception Unique Point d'Intersection, identifier les solutions : $a=k-a$ ce qui donne le coefficient attendu $k=2a$. Il est à noter que l'on peut aussi imposer que la solution évidente $x=a$ annule aussi le second facteur puisque l'on ne veut qu'un seul point d'intersection ($a + a - k = 0$). On obtient ainsi la tangente, $y = 2a(x-a)+a^2$, avec un unique point d'intersection avec la courbe, cette intersection étant double.

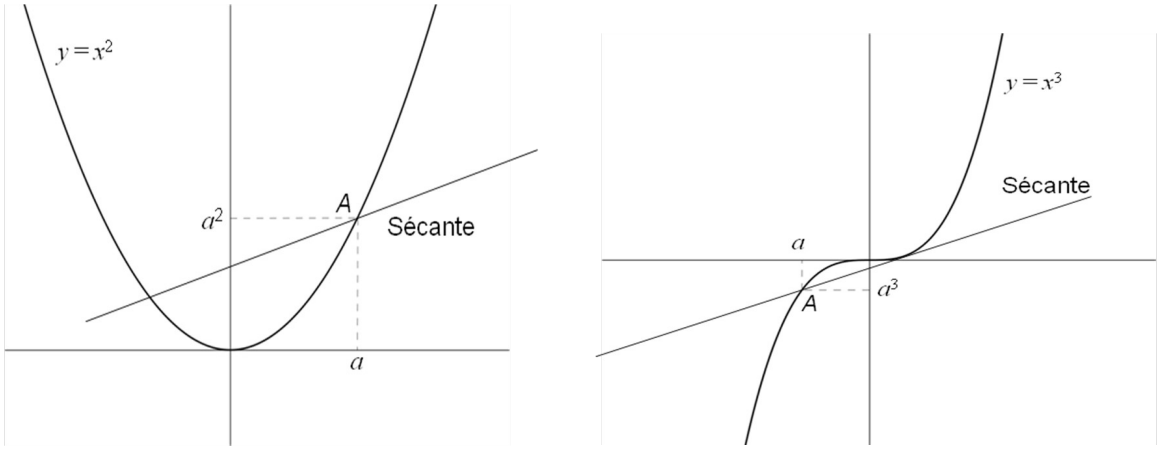


Figure ÷9

Cela se généralise aux polynômes f : la tangente de la courbe $y = f(x)$ est l'unique droite qui a un point double. Reprenons la méthode précédente pour la fonction cube. On forme le système :

$$y = x^3 \quad ; \quad y = k(x-a)+a^3$$

Puis l'équation que l'on factorise : $(x-a) . [x^2+ax+a^2 - k] = 0$. On peut calculer les deux autres points d'intersection et identifier avec la solution évidente $x=a$, mais cela nécessite de distinguer différents cas ce qui est un peu lourd. Il est plus facile de remarquer que le deuxième facteur est annulé par la valeur $x=a$. On obtient ainsi $a^2 + a.a + a^2 - k = 0$ puis $k = 3a^2$, puis la tangente. On peut, avec cet exemple, comprendre que tangente et courbe peuvent avoir d'autres points d'intersection.

ÉLABORATION ET ANALYSE D'UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS CENTREE SUR LE CALCUL MENTAL

Jean-François **CHESNÉ**

Directeur scientifique du Cnesco

Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot,

jean-francois.chesne@education.gouv.fr

Résumé

Depuis 25 ans en France, des évaluations standardisées font apparaître des constats récurrents sur les activités des élèves dans le domaine des nombres et du calcul. Nous interrogeant sur les apports que pourraient avoir ces évaluations pour l'enseignement, nous nous sommes demandé comment intégrer leurs résultats dans les pratiques quotidiennes des enseignants au début du collège pour améliorer les apprentissages des élèves. Pour cela, nous avons conçu et mis en place un dispositif étagé de formation d'enseignants (PACEM : Projet pour l'acquisition de compétences par les élèves en mathématiques) centré sur le calcul mental.

Nous avons utilisé la théorie de l'activité, la double approche, issue de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique, et d'autres outils de didactique des mathématiques que nous avons adaptés pour formuler des d'hypothèses de formation, mises à l'œuvre dans le dispositif. Puis nous avons exploré comment l'ensemble du dispositif a été mis en place, en analysant *a posteriori* le potentiel de formation des résultats d'un pré-test *ad hoc* réalisé auprès des élèves, et construit à partir d'évaluations standardisées. Enfin, grâce à un protocole spécifique d'évaluation, nous avons analysé les effets de l'expérimentation, positive à bien des égards, en comparant les résultats d'un post-test des élèves impliqués et des élèves de groupes témoins.

Dans notre communication, nous présenterons l'ensemble du dispositif PACEM et les résultats obtenus, en mettant un accent sur le rôle du calcul mental dans la formation des enseignants.

Mots clés

Calcul mental, évaluations standardisées**,** formation des enseignants, théorie de l'activité

PREAMBULE

Ma présentation recouvre deux histoires imbriquées l'une dans l'autre, et l'exercice qui a consisté à les dégager l'une de l'autre a d'ailleurs représenté en soi la première étape de mon travail de thèse. La première histoire est la conception et la mise en œuvre d'une expérimentation de formation d'enseignants (PACEM), que j'ai menée de 2010 à 2012 alors que j'occupais la fonction de chef de bureau de l'évaluation des actions éducatives et des expérimentations à la Direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance, la DEPP, expérimentation toutefois inspirée en partie par des travaux de recherche. La deuxième est celle de ma recherche proprement dite (Chesné, 2014), c'est-à-dire de l'analyse du point de vue du chercheur de cette expérimentation, que j'ai dû revisiter, avec les données qu'elle a demandé de recueillir et qu'elle a fournies, et avec ce que cela impose comme travail de questionnement, de documentation, de choix du cadrage théorique, de problématisation et de méthodologie de recherche.

En fait, au fur et à mesure des diverses présentations de mon travail, je me suis rendu compte que les questions que j'avais eu comme ambition de traiter étaient trop nombreuses ou trop importantes, une par une, pour être toutes exposées dans ce texte. Là où j'en suis maintenant, je crois pouvoir dire que mon travail consistait, et consiste d'ailleurs toujours, en une réflexion accompagnée, voire précédée en partie de mise en actes, sur :

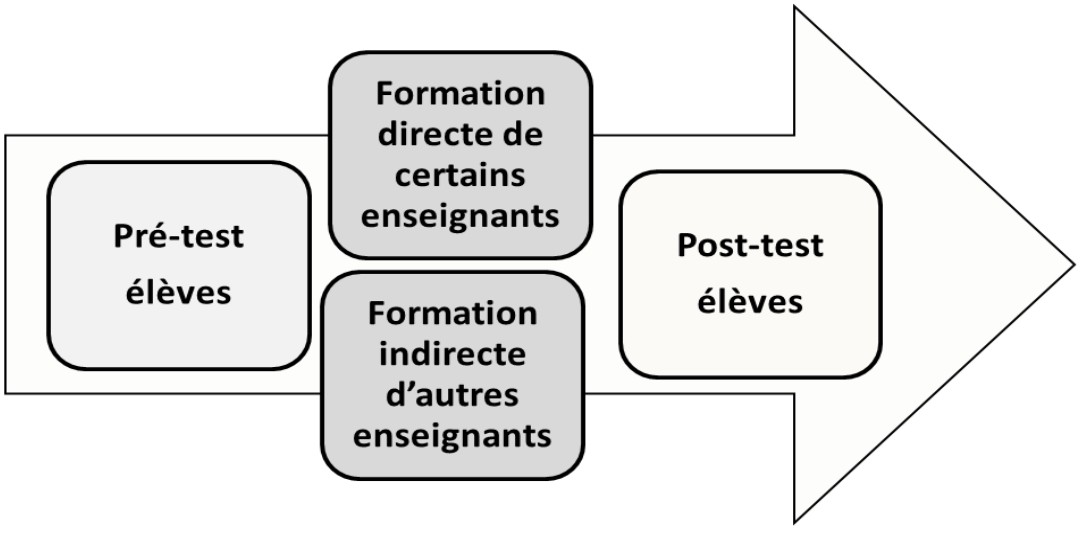
- l'état des lieux des acquis mathématiques des élèves à l'issue de l'école élémentaire, notamment dans le domaine des nombres et du calcul, et des réponses possibles en termes d'enseignement ;
- les évaluations standardisées à la fois productrices d'informations, avec une nécessaire relativisation, et outils potentiels de formation des enseignants ;
- le calcul mental comme élément d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques ;
- le format, spatial et temporel, d'une action de formation continue et sa contribution au développement professionnel, individuel et collectif, des enseignants;
- le déroulement d'une formation d'enseignants et l'identification de « facteurs clés d'efficacité ».

Cette réflexion engage plusieurs entrées, plus ou moins générales, plusieurs temporalités et plusieurs postures – celle de formateur concepteur, de formateur acteur, de chercheur… Après avoir rappelé quelques éléments sur l'expérimentation PACEM et les ancrages théoriques que j'ai adoptés pour ma recherche, j'ai choisi aujourd'hui d'évoquer principalement mon travail sur le calcul mental, en tant qu'objet d'étude pour lui-même, et dans ses liens avec les autres aspects évoqués ci-dessus.

A. QUELQUES REPÈRES SUR L'EXPÉRIMENTATION PACEM

La première histoire, c'est celle d'un projet, orienté d'emblée vers la classe et vers l'amélioration des acquis des élèves, avec l'hypothèse qu'il y a moyen de faire évoluer les pratiques des enseignants grâce à une formation adéquate pour améliorer ces acquis, et par le biais d'une diffusion de la formation au sein des établissements des enseignants formés.

Figure 1 : Protocole de l'expérimentation PACEM



Le protocole de mesure d'impact de l'expérimentation est classique avec la comparaison des résultats des élèves à un pré-test et un post-test, tous deux construits à partir d'items d'évaluations nationales antérieures (standardisées), validés d'un point de vue

psychométrique.

Un groupe expérimentateur et un groupe témoin ont été constitués, le plus rigoureusement possible, avec à l'intérieur de chacun de ces deux groupes, deux catégories d'enseignants.

Figure 2 : Structure de la population d'enseignants de l'expérimentation PACEM en 2011-2012

Enseignants	**Collèges expérimentateurs**	**Collèges témoins**
Identifiés par l'inspection et volontaires pour participer à l'expérimentation	Participent à une formation continue spécifique (« *Enseignants Correspondants* »)	Ne participent pas à la formation (« *Enseignants témoins* »)
Non identifiés par l'inspection	Ne participent pas à la formation (« *Enseignants associés* »)	Ne participent pas à la formation *(« Enseignants involontaires* »)

La population étudiée est quantitativement importante, et équilibrée du point de vue de variables disponibles sur les élèves.

Figure 3 : Structure de la population d'élèves de l'expérimentation PACEM en 2011-2012

Enseignants	**Élèves**		**Classes**		**Garçons**		**Élèves "à l'heure"**		**Élèves "en retard"**	
	N	%	N	%	N	%	N	%	N	%
Correspondants (17)	591	19,3	28	19,2	303	51,3	467	79,0	107	18,1
Associés (39)	1221	39,9	58	39,7	625	51,2	989	81,0	216	17,7
Témoins (16)	524	17,1	25	17,1	255	48,7	416	79,4	92	17,6
Involontaires (28)	724	23,7	35	24,0	362	50	598	82,6	121	16,7
TOTAL	3060	100	146	100	1545	50,5	2470	80,7	536	17,5

Les prétests ont confirmé cet équilibre du point de vue des performances des élèves.

La formation des enseignants dure 18 heures, réparties en 1 journée puis 4 demi-journées sur le premier semestre de l'année scolaire. Elle comporte quatre temps :

- **une phase d'amorce** destinée à favoriser des prises de conscience des enseignants sur des notions clés à partir d'évaluations nationales, puis des résultats des élèves au pré-

test ; à faire émerger des pratiques et à faire exprimer des besoins ;
- **un apport** de connaissances mathématiques et didactiques, notamment en calcul mental.
- **une phase d'appropriation** de ces connaissances par les enseignants que le formateur inscrit dans des pratiques de classe possibles, grâce à des exemples de couples tâches/déroulements en calcul mental ;
- **une phase de structuration**, permettant aux enseignants d'organiser les différentes séances de calcul mental entre elles d'une part, et les séances de calcul mental dans une programmation globale annuelle des nombres et du calcul d'autre part.

Les résultats obtenus, par-delà les biais possibles liés notamment à la méthode pré-test/post-test, aux effets expérimentaux, montrent un impact global positif de l'expérimentation avec :
- un effet positif direct de la formation, c'est-à-dire sur les élèves des enseignants formés ;
- un effet positif indirect de la formation : on observe une nette progression des élèves des enseignants du groupe expérimental, non-identifiés par les inspecteurs, par rapport aux scores des élèves des enseignants « involontaires » du groupe témoin, mais aussi par rapport aux scores des élèves des enseignants « identifiés » du groupe témoin ;
- des tendances intéressantes sur les résultats des filles, sur ceux des élèves d'éducation prioritaire, et sur ceux des élèves de bas niveau, qui semblent marquer des « effets de rattrapage » ;
- un effet positif du dispositif qui se conserverait sur deux ans, mesuré par deux tests effectués en fin de 5^{e} (un test spécifique lié à l'expérimentation, et le test national proposé en 2012).

B. LA RECHERCHE SUR PACEM

La deuxième histoire est celle de mon travail de recherche, mené avec Aline Robert et Janine Rogalski, qui va m'obliger à faire non pas un pas de côté, mais plusieurs, pour me départir de mes rôles successifs de concepteur et pilote du dispositif, et de formateur. Il s'agit alors pour moi d'interroger et de comprendre *a posteriori* ce qui a été mis en place dans l'expérimentation PACEM, pour en quelque sorte dénaturaliser les éléments qui la composent, les analyser, identifier ceux qui, dans la démarche d'expérimentation, avaient déjà pu, au moins partiellement, relever d'une démarche de recherche, et enfin repérer l'évolution de certains d'entre eux.
J'ai donc été amené, du point de vue du chercheur, à m'engager dans l'analyse du dispositif, et pour cela me poser un certain nombre de questions sur chacune de ses composantes, avec la difficulté que la complexité des pratiques enseignantes se retrouvait d'une certaine façon dans la conception et la mise en œuvre du dispositif. L'architecture globale de ma recherche s'est donc organisée autour de quatre grands axes d'étude :
- l'analyse des évaluations standardisées (dégager une méthodologie, comment m'y étais-je pris pour les analyser ? Que nous apprennent-elles exactement ? Formaliser ce que j'en avais fait pour la conception des tests, pour concevoir la formation) ;
- l'analyse de ce qui concerne le calcul mental (qu'est-ce que c'est ? Qu'est-ce que la recherche en sait, du côté des élèves ? Des enseignants ? Quel rôle le calcul mental peut-il jouer dans les apprentissages ? Pourquoi ? Comment ça peut se passer en classe ?) ;
- l'analyse de la formation des enseignants (qu'est-ce qui s'est joué, en comparant notamment le scénario initial avec le déroulement ?) ;

- l'appréciation de l'impact du dispositif sur les élèves (valider en quelque sorte le protocole d'évaluation envisagé, mais aussi le compléter et en définir les limites, et bien sûr analyser les résultats) ;

Même si, comme chacun sait, il y a beaucoup plus d'allers-retours dans la réalité que dans la présentation finale d'un travail de recherche, la première étape de ce travail fut bien sûr d'abord de définir un cadrage théorique adapté à mes questionnements, qui me permettrait à la fois d'analyser les fondements et la manière dont ma démarche avait été opérationnalisée au cours de l'expérimentation.

Toutes les questions énoncées ci-dessus ne sont pas reprises dans ce texte, qui est centré sur le calcul mental. Toutefois, après avoir présenté les éléments théoriques qui m'ont permis de légitimer et d'étayer ma démarche de chercheur, j'exposerai rapidement en quoi l'analyse des évaluations standardisées en a constitué une première étape fondatrice. Je m'attarderai ensuite plus largement sur le calcul mental, ce qu'il recouvre de mon point de vue, sur les fonctions qu'il peut recouvrir pour la classe, du côté des élèves et des enseignants, et sur la place qu'il peut prendre dans une formation d'enseignants. Je ne reviendrai pas sur l'analyse de l'impact du dispositif, mais son caractère positif, non seulement sur les acquis des élèves des professeurs ayant participé à la formation spécifique organisée pour l'expérimentation (les « enseignants correspondants »), mais aussi sur ceux des élèves de leurs collègues dans les collèges expérimentaux, non formés directement (les « enseignants associés »), constitue, malgré certaines limites, des avancées incontestables pour la recherche, et offre également un certain nombre de perspectives que je propose à la fin du texte.

1. Cadre théorique

Il est important de préciser les trois ancrages théoriques que j'ai choisis. Pour analyser ce qui touche, dans mon travail, l'enseignement et l'apprentissage, j'ai choisi comme toile de fond la théorie de l'activité, qui permet d'étudier, en situation scolaire et en mathématiques, les apprentissages des élèves en relation avec leurs activités provoquées par leurs enseignants. Pour compléter, et spécifier ce cadrage, j'ai choisi la théorie de la double approche, issue de la didactique des mathématiques et de la psychologie ergonomique (Robert et Rogalski, 2002), qui est un moyen de prendre en compte la complexité des pratiques (réelles) des enseignants.
Pour analyser ce qui relève de la formation des enseignants, je me réfère également aux deux cadres précédents : à la théorie de l'activité, en mettant les activités mathématiques des élèves, notamment en classe, au centre de ce qui peut provoquer leurs apprentissages (objectif des pratiques et des formations), et à la double approche, permettant d'apprécier les choix réels, les anticipations et les improvisations de ce qui peut se jouer en classe. Mais, en ce qui concerne plus spécifiquement les formations, j'ai aussi essayé d'avancer dans un travail de modélisation, dans lequel Aline Robert et moi-même sommes engagés depuis plusieurs années, et qui s'inspire de la notion de zone proximale de développement. Nous définissons ainsi une zone proximale de développement des pratiques (ZPDP), associée à des activités des enseignants proches des leurs, qu'ils peuvent reconstituer, apprécier, analyser et enrichir.

L'hypothèse que nous faisons est que pour qu'un travail en formation enrichisse les pratiques, et pas seulement des connaissances sur les exercices ou les déroulements, il est important qu'il s'appuie sur des éléments des pratiques relevant de cette ZPDP, dont les enseignants ont conscience ou peuvent prendre conscience. Ce peut être parce qu'ils les reconnaissent comme relevant de leurs pratiques ou proches de celles-ci, ou parce qu'ils peuvent en ressentir le besoin. En fait ce qui est développé ici relève du travail réalisé à partir de cette hypothèse, même si cela a été explicité en partie après la formation (et a donc pu bénéficier de

l'expérience de formateur acteur) ! Avec, tout de suite, une question sous-jacente : les ZPDP sont individuelles, et la formation collective.

2. Analyse des évaluations standardisées

Concernant l'analyse comparative des évaluations standardisées, des chercheurs s'y étaient déjà livrés avant moi (Pluvinage & Rauscher, 1991 ; Bolon, 1992, 1996 ; Roditi, 2001). J'ai tenté pour ma part de travailler de manière quasi exhaustive sur l'ensemble des matériaux des évaluations nationales disponibles en faisant un certain nombre de choix : d'abord, restreindre mon champ d'étude au domaine qui me préoccupait, nombres et calcul. Ensuite, considérer que cette analyse se rapporte à ce qui est enseigné, ou en tout cas censé être enseigné, et donc pour cela procéder à l'étude des programmes en vigueur au cycle 3 depuis 1980, c'est-à-dire en gros, ceux qui correspondent à la scolarité des élèves testés depuis que les résultats d'évaluations les plus anciens sont disponibles (1989). Puis j'ai abordé cette analyse, non pas avec l'objectif de dresser un bilan du niveau des élèves, c'est-à-dire par exemple en cherchant à savoir s'il y avait des évolutions du nombre d'élèves en difficulté (en effectuant des comparaisons temporelles), mais avec le but de dresser un état des lieux (évolutif) du niveau de maîtrise par les élèves des différents types de tâches testés, tels qu'ils sont définis dans les programmes du cycle 3 de l'école primaire. Pour cela, j'ai regroupé tous les items disponibles par type de tâches, et j'ai analysé d'un point de vue didactique les données métriques[1] sur l'ensemble des tâches disponibles ; enfin, j'ai dégagé des résultats non pas d'un point de vue rétrospectif, c'est-à-dire orienté vers une recherche d'éléments qui peuvent les expliquer, mais dans la perspective de comprendre en quoi ce que ces données nous apprennent peut être utile à un enseignant de sixième pour travailler avec ses élèves. L'ensemble des résultats obtenus m'a ainsi permis de mettre en relief certaines connaissances, sans doute insuffisamment acquises par les élèves à la fin de l'école primaire pour constituer une base solide qui leur permette d'en acquérir de nouvelles au collège : en particulier celles qui portent sur les décimaux et les rationnels, celles qui mettent en jeu des structures multiplicatives et celles qui concernent l'estimation d'un ordre de grandeur d'un résultat numérique. Cela m'a aussi permis d'anticiper sur des bénéfices potentiels du calcul mental relativement aux apprentissages des élèves sur ces points précis.

C. LE CALCUL MENTAL

La formation des enseignants dans le dispositif PACEM s'est progressivement articulée autour de la place du calcul mental dans l'enseignement au collège, en termes de choix de contenus, de déroulements, et de programmation. Quel calcul mental, pourquoi y consacrer du temps, dans quels buts, comment l'organiser en classe, quand ? Je présente dans cette partie quelques sources qui ont inspiré ma démarche avec les enseignants lors de cette formation ; je propose ensuite une définition du calcul mental, issue d'une revue de littérature nationale et internationale, et j'expose enfin mes partis pris sur les apprentissages des élèves liés au calcul mental, et d'autres se plaçant plutôt du côté des pratiques des enseignants.

1. Introduction

L'exercice du calcul mental a toujours fait partie de mes pratiques d'enseignant, au collège et

[1] Ces données renseignent à la fois sur la réussite des élèves à un item et sur la corrélation de celui-ci avec l'ensemble des items proposés dans le même test.

au lycée, et j'ai maintes fois eu l'occasion de constater des effets positifs sur les élèves, et pas seulement sur des dimensions purement cognitives comme le souligne ce témoignage d'élève :
« Le calcul mental m'a permis d'acquérir des automatismes, c'est-à-dire qu'en face d'opérations, je sais tout de suite ce qu'il faut faire. Il m'a aussi permis de donner un ordre d'idée des résultats. Ainsi, je peux me rendre compte quand mes résultats sont faux. A force de travailler en calcul mental, c'est plus facile de résoudre des problèmes. J'ai plus confiance en moi. »
A contrario, j'ai également pu constater les difficultés des élèves en calcul mental, lors de travaux communs avec des collègues enseignants ou à l'occasion d'examens oraux. Ces difficultés sont d'ailleurs confirmées par les résultats des évaluations nationales. Pour rappel, selon l'évaluation de fin de 3e menée en 2008 par la direction de l'évaluation, de la prospective et de la performance (Depp) dans le cadre du cycle d'évaluations disciplinaires réalisées sur échantillons (Cedre), certains élèves parmi les plus performants sont en difficulté devant le calcul « trois quarts de 44 » Et selon les évaluations nationales à l'entrée en 6e, nombreuses sont les tâches moyennement ou faiblement réussies par les élèves, et qui pourraient relever d'un calcul mental simple, comme par exemple :

- Addition et soustraction des décimaux :
  - 1,7 + 2,3 (2003, TR = 61 %)
- Multiplication
  - 35,2 x 100 (1994, TR = 60 % ; 2008, TR = 32 %)
  - 3 fois 0,5 (2003, TR = 44 %)
- Ecriture fractionnaire d'un nombre décimal
  - ¼ = 0,25 (2008, TR = 27 %)

Comme formateur enfin, j'ai souvent eu l'occasion de constater le manque de familiarité des enseignants ou des futurs enseignants avec le calcul mental, mais aussi l'intérêt que peut présenter le recours au calcul mental en formation comme réponse possible à des difficultés d'enseignement des nombres et du calcul.

2. Ce que recouvre le calcul mental

Pour ma recherche, j'ai donc cherché à étayer les partis pris que j'avais finalement adoptés au cours de la mise en œuvre du projet PACEM. Je me suis d'abord livré à une revue de littérature, française avec essentiellement les travaux de Butlen et Pézard (1992, 1996), et internationale, très abondante sur ce thème. La très grande majorité des recherches dont j'ai pris connaissance s'accorde à présenter les bienfaits du calcul mental dans les apprentissages des élèves, mais il n'y a cependant pas consensus sur un enseignement systématique du calcul mental. Un certain nombre de recherches menées sur les pratiques d'enseignement relatives au calcul mental font en effet apparaître le risque de voir ces pratiques réduites à des exercices techniques routiniers (Maclellan, 2001). Quoi qu'il en soit, l'enseignement exclusif, mécanique, des algorithmes standards de calcul posé semble quasi unanimement rejeté aujourd'hui par les chercheurs, en France (Butlen, 2007) comme à l'étranger (Gravemeijer, 2003; Heirdsfield & Cooper, 2004 ; Kamii & Dominick, 1997). Par exemple, les recommandations actuelles de chercheurs britanniques, néerlandais et américains, accompagnant l'évolution de l'enseignement des mathématiques dans leurs pays respectifs,

insistent largement sur la compréhension par les élèves des méthodes et stratégies utilisées en calcul mental (par exemple Anghileri, Beishuizen & Putten, 2002 ; Thompson, 1999, 2008 ; van de Heuvel-Panhuizen, 2001 ; Yackel, 2001).
De quoi parle-t-on quand on parle de calcul mental ? Pour ma part, j'entends par calcul mental l'ensemble des activités qui consistent à effectuer des opérations avec des nombres, essentiellement sans aide matérielle externe. J'étends ces activités relevant du calcul mental à un travail explicite sur les désignations des nombres (écrites, orales, symboliques chiffrées ou non) et à un travail participant, tout ou en partie, à la résolution de problèmes mettant en jeu des données numériques, dans un cadre intra ou extra mathématique (de l'amorce de la démarche à la résolution complète). Le calcul mental est donc bien davantage que la seule activité, fréquente dans les classes de l'école primaire il y a une cinquantaine d'années, qui consistait à exécuter le plus rapidement possible des procédures opératoires sur les nombres, et dont l'objectif principal était l'automatisation de ces procédures. Dans cette acception, le calcul mental se rapproche largement du concept anglo-saxon de « *number sense* » (Gersten & Chard, 1999 ; Berch, 2005) qui n'est pas associé exclusivement au calcul mental. Ce concept fait globalement référence à « la compréhension générale des nombres et des opérations, ainsi qu'à la capacité d'utiliser cette compréhension de façon adaptée dans la gestion de situations numériques, pour porter des jugements mathématiques et élaborer des stratégies utiles et efficaces » (Reys, Reys, McIntosh, Emanuelsson, Johnsson & Yang, 1999). En particulier, je reprends fortement à mon compte ce que les chercheurs appellent *inclination* en anglais, et que je comprends comme la tendance et l'envie de recourir au calcul mental, associées à la disponibilité, au sens de Robert (1998) de connaissances sur les nombres et les opérations. Ce dernier aspect renvoie à l'idée que quelqu'un qui se sent « à l'aise » avec les nombres saura d'autant mieux les utiliser et les interpréter (Turkel & Newman, 1988).

J'établis ainsi une grande proximité du concept de « *number sense* » selon deux dimensions sous-jacentes centrales dans mon travail de recherche sur le calcul mental. La première de ces dimensions porte sur les contenus numériques et les différentes manières de les mettre en œuvre avec des élèves, la seconde est liée à la nature des objectifs visés en calcul mental : fin en soi pour que les élèves acquièrent des connaissances et des capacités spécifiques parmi d'autres connaissances et d'autres capacités, ou moyen pour faciliter chez eux des apprentissages, voire leur permettre de les amorcer. Autrement dit, je m'intéresse au calcul mental comme apprentissage, mais aussi et surtout, comme modalité d'apprentissage le dépassant : la pratique du calcul mental par les élèves, défini et mis en œuvre selon des choix conscientisés et optimisés par les enseignants, ne constituerait pas seulement un moyen d'acquérir des faits numériques (tables d'addition et de multiplication par exemple) ou des procédures de calcul automatisées (multiplier par 11 ou par 0,5 par exemple), mais une voie privilégiée pour la construction des nombres et des propriétés des opérations.

3. Une analyse des partis pris sur le calcul mental pour la classe et dans la formation PACEM

Ce qui devait constituer un élément de formation parmi d'autres, le calcul mental, est en réalité devenu l'axe principal, le fil rouge, de la formation PACEM. De nouveaux questionnements sont alors apparus tout naturellement au cours de mon travail de recherche : en quoi et sur quoi la pratique du calcul mental apporte un plus pour l'apprentissage des élèves ? Dans quelle mesure est-il profitable pour les enseignants d'enseigner des procédures de calcul mental ? Comment concilier un enseignement de procédures de calcul mental et prendre en compte les procédures personnelles des élèves ? A quel moment doit-on passer à une « procédure experte » ? Est-il toujours pertinent de le faire ? Et plus largement, une des

questions, de mon point de vue fondamentale actuellement, porte sur la pertinence d'élaborer des progressions pour le collège autour de tâches spécifiques à effectuer mentalement.
Cette réflexion m'a conduit à déterminer trois fonctions spécifiques que le calcul mental peut jouer pour répondre à des difficultés identifiées chez les élèves :

- du côté des tâches et du côté des activités spécifiques des élèves qu'elles peuvent provoquer, une fonction qui fait la quasi-unanimité dans la recherche étrangère : participer à l'acquisition de connaissances mathématiques des élèves, c'est-à-dire développer le sens des nombres chez les élèves, avec la signification évoquée ci-dessus, et favoriser des habiletés pour la résolution de problèmes (engagement dans des démarches heuristiques, stratégies personnelles de résolution et de contrôle) ;
- du côté des enseignants : la possibilité d'adopter un « rythme didactique » spécifique, voire différent ; au niveau macro, dans l'organisation annuelle de l'enseignement, qui permet non seulement la fréquentation régulière, renouvelée, de notions, mais aussi l'anticipation sur de nouveaux apprentissages pour les élèves, avec l'élaboration de représentations mentales et de formulations intermédiaires ; et au niveau local, l'organisation de moments de classe spécifiquement dédiés au calcul mental, sans lien nécessaire avec le reste des séances, offrant ainsi de la souplesse aux enseignants ;
- et enfin, une troisième fonction, qui porte *a priori* sur une tout autre dimension, mais néanmoins importante, notamment dans les classes de l'académie de Créteil (largement peuplée d'élèves socialement défavorisés) : la pratique du calcul mental est un moyen d'installer un climat de classe favorable aux apprentissages, en créant des routines qui favorisent à la fois une mise en activité rapide de tous les élèves et des interactions entre les élèves, et entre les élèves et leur enseignant. Mais des tâches de calcul mental, convenablement choisies, peuvent être à la fois immédiatement accessibles aux élèves et leur offrir des cheminements différents pour les effectuer. Une certaine pratique du calcul mental en début de séance peut donc aller bien au-delà de ce seul aspect de gestion de classe.

Ce sont ces trois fonctions qui ont fondé mes partis pris sur le calcul mental, en termes de pratiques enseignantes potentiellement porteuses de facteurs favorables à l'apprentissage des élèves.
Le premier point a été souligné par Lieven Verschaffel (pour les nombres entiers à l'école primaire) lors de la conférence de consensus sur la numération co-organisée par le conseil national d'évaluation du système scolaire (Cnesco) et l'institut français de l'Éducation (Ifé / ENS de Lyon) en novembre 2015. Le calcul mental est porteur d'un intérêt primordial, s'il est conçu comme un moyen privilégié de favoriser la conceptualisation des nombres (compréhension du système de numération, décompositions additives et multiplicatives, ordre de grandeur), notamment par comparaison avec le calcul posé. Du point de vue de la nature de l'activité cognitive provoquée par les deux démarches, Verschaffel a rappelé que le calcul posé repose sur des algorithmes, qu'il fonctionne sur les chiffres, et qu'il exige de travailler « de droite à gauche », alors que le calcul mental a un fondement heuristique, qu'il opère sur les nombres au lieu des chiffres, et qu'il va « de gauche à droite ». Au-delà de ces différences de ces deux méthodes de calcul desquelles de nombreux chercheurs (étrangers surtout) ont analysé les forces et les faiblesses, à la fois en termes d'efficacité et plus largement de leur importance pour l'enseignement des mathématiques, le calcul mental permet aussi une articulation aisée entre différents registres de représentation sémiotique, oraux et écrits.
Je vais présenter quelques analyses de tâches que j'ai menées. Elles m'ont en effet permis de faire émerger différents types de traitements sur les nombres et sur les opérations, et m'ont conduit à faire l'hypothèse générale qu'une certaine pratique du calcul mental permettrait d'optimiser les choix, à la fois sur les nombres et sur les opérations, tout en étant très compatible avec des modalités de gestion de la classe favorables à des activités des élèves.

Prenons le cas d'une somme à calculer, par exemple 37 + 99. Dans un calcul posé, il s'agit d'abord pour un élève de reconnaître qu'il s'agit d'une addition de deux entiers et éventuellement de repérer qu'ils ont le même nombre de chiffres. La deuxième étape consiste à choisir une organisation spatiale adaptée (écriture des nombres l'un en-dessous de l'autre avec alignement des chiffres de même rang), puis à gérer l'écriture de nouveaux chiffres, y compris celle de la retenue intermédiaire. Enfin, vient une phase de traitement qui est ici un algorithme et qui comporte au moins 2 étapes, voire 3 ou 4 : « 7 + 9 = 16, je pose 6 et je retiens (voire j'écris au bon endroit) 1 ; 3 + 1 = 4 et 4 + 9 = 13 ». Le résultat est le nombre qui s'écrit avec un 1, un 3 et un 6 dans cet ordre, donc 37 + 99 = 136. Cette analyse vaut peu ou prou pour tous les calculs posés, notamment l'étape finale, « reconstitutrice » du résultat obtenu à partir de chacun de ses chiffres, et éventuellement avec une virgule à placer correctement. Une ultime étape pourrait être – devrait être – un contrôle *a posteriori* de l'ordre de grandeur du résultat, mais l'activité menée dépasse alors l'application stricte de l'algorithme.

Sur la même somme (37 + 99) à effectuer mentalement, il s'agit toujours évidemment de reconnaître une addition de deux entiers, mais en identifiant cette fois que l'un des deux est très proche de 100. Le travail consiste d'abord à remplacer la somme à effectuer par celle de 100 et de 37 et de compenser ensuite (ou avant). Le traitement interne qui va suivre a donc été anticipé dans les deux phases précédentes, par la double reconnaissance de l'opération et de la spécificité des nombres en jeu. C'est comme si cette troisième phase avait été déclenchée avant d'avoir réellement débuté le calcul, par la transformation de 99 en 100 – 1. Il reste alors à effectuer 37 + 99 = 37 + (100 – 1) = (37 + 100) – 1 (ou (37 – 1) + 100) ; on remplace un entier par une différence d'entiers (choisie lors de l'anticipation), puis une somme de deux entiers par une somme/différence de trois entiers, et on table sur la disponibilité de 37 + 100 et de l'expression de l'entier qui précède 100, sans parler de l'associativité en actes, qu'on considère ici comme naturelle. Il y a donc deux étapes et au moins un choix.

C'est ce travail de description précise des sous-activités possiblement en jeu qui m'a permis d'identifier des facteurs favorables à une certaine pratique du calcul mental, porteuse d'apprentissages pour les élèves à la fois

- en termes de tâches qui favorisent la mémorisation, la conceptualisation des nombres et de leurs propriétés (travail sur les nombres et non sur les chiffres, travail de gauche à droite), le développement d'habiletés pour la résolution de problèmes, -
- et en termes de modalités (quand faire du calcul mental avec les élèves et comment, avec l'importance de l'explicitation et de la mutualisation des procédures des élèves, ce qui renvoie à un travail sur la ZPD).

Voici quelques exemples de calculs, repris des évaluations nationales, qui me semblent particulièrement représentatifs des difficultés repérées chez les élèves, propices au questionnement des enseignants, qui étaient présents dans le pré-test et qui ont été travaillés en formation, avec une centration sur le calcul mental :

- Addition et soustraction des décimaux :
  - 38 – 1,5 (EN 6e 2008, TR = 52 % ; PACEM sept 2011, TR = 30 %)
- Multiplication :
  - 3,72 × 1000 (PACEM sept 2011, TR = 30 %)
  - 4,6 × 3 (PACEM sept 2011, TR = 35 %)
- Ecriture fractionnaire d'un nombre décimal
  - ¼ = 0,25 (EN 6e 2008, TR = 27 % ; PACEM sept 2011, TR = 27 %)

Ces exemples illustrent des connaissances très partiellement acquises, qui relèvent, dans les programmes, à la fois de l'école primaire et de la sixième, et pour lesquelles je considère qu'une certaine pratique du calcul mental peut avoir une influence positive sur les apprentissages des élèves, en développant la disponibilité des connaissances mises en jeu. Ainsi, le premier calcul apparemment largement à la portée d'un élève de sixième, offre pourtant des taux de réussite très moyens surprenants, et permet d'enclencher avec les enseignants un travail de réflexion sur l'insuffisance de ces taux de réponse, puis sur la nature des réponses erronées (37,5 pour environ la moitié des réponses incorrectes, et 23 ou 2,3), en remontant aux procédures des élèves, à leurs connaissances sur les nombres décimaux, et en ouvrant des pistes concrètes pour favoriser l'apprentissage de ces connaissances par des tâches de calcul mental.
Les résultats positifs de l'expérimentation apportent une réflexion globale, actualisée et adaptée à la sixième, sur le calcul mental, son exploitation à bon escient, et enrichie d'une réflexion didactique un matériel important presque « laissé en jachère » jusqu'ici par les enseignants (les évaluations standardisées). On peut pressentir l'intérêt de recherches allant plus loin dans ce sens, par exemple en explorant plus précisément la proposition aux élèves, régulière et fréquente, de tâches à effectuer mentalement dans la résolution de tâches complexes (au sens où les documents institutionnels les définissent) ou avec l'utilisation des matériels numériques (tableau numérique interactif, tablettes).

D. LA PLACE DU CALCUL MENTAL DANS LA CONCEPTION D'UNE FORMATION D'ENSEIGNANTS

Pour le formateur, les retours des professeurs participant à la formation ont incontestablement valorisé la démarche choisie, mais suscité dans le même temps un certain nombre de questions « naïves » en cours de formation, auxquelles je ne m'attendais pas toujours, ou en tout cas pas aussi clairement explicitées : du côté des contenus et tâches à proposer (comment énoncer un calcul ? Peut-on proposer des tâches qui ne sont pas du « calcul » au sens strict ? Peut-on proposer des tâches de calcul mental qui ne sont pas directement liées à la suite d'une séance ? Etc.), du côté des mises en œuvre (Combien de temps ? Sur quels supports ?), du côté des prises d'information et de leur exploitation (Faut-il « corriger » les productions des élèves ? Faut-il les noter ? Comment organiser la correction ? Quelle durée ?). Ces retours constituent évidemment des indices sur les pratiques des enseignants et leurs besoins, et m'ont obligé à des adaptations en cours de formation. Pour le chercheur, ces mêmes retours offrent des renseignements sur des pratiques dont on peut faire l'hypothèse qu'elles renvoient à des activités génériques, et procurent ainsi des éléments de compréhension sur les apprentissages des élèves. Par ailleurs, ils provoquent des réflexions sur la formation des enseignants, et sur ce qui peut apparaître comme des conditions nécessaires pour atteindre des attendus de la formation, sur le calcul mental en particulier.
Je terminerai mon analyse par la place du calcul mental dans la conception globale d'une « formation à l'envers[2] » et sa cohérence (compte tenu du domaine étudié) avec le fait d'avoir cherché à travailler dans une zone proximale de développement des pratiques des enseignants participant à la formation. Le fait de travailler d'abord sur des matériaux extérieurs aux enseignants – des résultats d'évaluations nationales–, puis sur des matériaux plus proches

[2] Nous entendons par « formation à l'envers » une formation dans laquelle les apports du formateur sont adaptés aux besoins des enseignants, soit qu'ils aient été exprimés par eux, soit qu'ils aient été identifiées par le formateur ; Cette stratégie inductive de formation part d'éléments de pratiques locales des enseignants, pour remonter ensuite vers des alternatives et des pratiques plus globales.

d'eux – les résultats du prétest – et de proposer des activités mettant en jeu des « couples[3] » contenus/déroulements de calcul mental, comme réponses possibles aux difficultés d'apprentissage et d'enseignement exprimées et identifiées, permet sans doute en effet aux enseignants d'enrichir facilement et rapidement leurs pratiques sans les bouleverser.

E. RESULTATS ET PERSPECTIVES

En ce qui concerne le champ de la didactique des mathématiques, on peut donc considérer que ma recherche offre un certain nombre d'avancées, qui ne sont pas toutes de même nature, et sans doute pas à considérer au même degré de développement. Parmi elles, je retiendrai :

- du côté des évaluations standardisées : l'outillage méthodologique que j'ai mis en place pour analyser les résultats et le potentiel de formation qu'elles peuvent contenir ;
- du côté de la formation des enseignants : la validité d'un travail de formation dans la ZPDP des enseignants, et l'ancrage d'une formation sur au moins deux composantes des pratiques au sens de la double approche (cognitive et médiative) ; la question de la durée de la formation, révélée à la fois sur le plan qualitatif par les retours des enseignants et par les résultats aux tests ; le fait qu'une action de formation continue peut dépasser le seul cadre spatial et temporel de l'action proprement dite, et contribuer au développement professionnel des enseignants d'un même établissement : développement individuel en agissant sur les pratiques dans la classe, et développement collectif, en offrant à une équipe d'enseignants un terrain propice à la réflexion autour de matériaux communs à utiliser (ou à construire) et à mettre en œuvre ;
- enfin, l'intérêt du calcul mental comme élément de formation et comme pratiques en termes de contenus/déroulements pour les enseignants : ces pratiques possibles en calcul mental sont effectivement intégrables par les enseignants, et peuvent générer des activités favorables aux apprentissages des élèves.

Bien sûr, il existe des limites à ma recherche qui sont liées à la structure du projet (et notamment à son montage particulier), à la méthodologie de l'expérimentation (effets enseignants ? effets établissements ?) et aux moyens d'observation mis en œuvre (que s'est-il vraiment joué dans les classes et dans les collèges ?). Mais cette recherche fait apparaître aussi un certain nombre de questions théoriques qui offrent des pistes à explorer pour la recherche :

- sur les évaluations : travail de croisement entre différents types de tâches, analyse des activités des élèves pendant un test, formes différentes d'évaluation (en groupes, avec aides), travail de croisement entre évaluations de classe et évaluations standardisées ;
- sur le calcul mental, avec des études plus poussées sur les tâches, des études cliniques sur les liens tâches/activités/productions des élèves, sur les changements de cadres ou les changements de registre, sur l'articulation avec le reste de ce qui est enseigné.

D'autres questions à approfondir sur la dimension collective du métier d'enseignant et sur la possibilité d'exploiter collectivement dans une formation des ZPDP *a priori* individuelles. Des questionnements sur l'activité du formateur, pendant la formation en présentiel, voire au-delà dans le cadre d'une formation hybride, sont encore nombreux, et importants dans la réflexion actuelle sur l'enseignement des mathématiques dans le cadre de la scolarité

[3] Un « couple » contenu/déroulement est constitué d'un énoncé et d'un déroulement possible associé à la mise en œuvre en classe de cet énoncé, le choix d'un énoncé prédéterminant *a priori* des tâches pour les élèves, et le déroulement influençant leurs activités.

obligatoire, et la formation continue des enseignants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ANGHILERI, J., BEISHUIZEN, M. & PUTTEN, K. (2002). From informal strategies to structured procedures: Mind the gap! *Educational Studies in Mathematics, 49*, 149-170.

BERCH, D. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children with Mathematical Disabilities. *Journal of learning disabilities, 38*, 4, 333-339.

BOLON, J. (1992) L'enseignement des décimaux à l'école élémentaire. *Grand N*, *52*, 49-79. IREM de Grenoble.

BOLON, J. (1996). *Comment les enseignants tirent-ils parti des recherches faites en didactique des mathématiques ? Le cas de l'enseignement des décimaux à la charnière école - collège*. Thèse de doctorat de l'Université Paris 5.

BUTLEN, D. (2007). *Le calcul mental entre sens et technique, Recherches sur l'enseignement des mathématiques aux élèves en difficulté, du calcul mental à la résolution des problèmes numériques*. Presses universitaires de Franche-Comté.

BUTLEN, D., & PÉZARD, M. (1992). Calcul mental et résolution de problèmes multiplicatifs, une expérimentation du C.P. au CM2, *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *12*(2/3) 319-368.

BUTLEN, D., & PÉZARD, M. (1996), Rapports entre habileté calculatoire et prise de sens dans la résolution de problèmes numériques, étude d'un exemple : impact d'une pratique régulière de calcul mental sur les procédures et performances des élèves de l'école élémentaire. *Cahier de DIDIREM n°27*. Paris, IREM Paris 7.

CHESNÉ, J.-F. (2014). *D'une évaluation à l'autre : des acquis des élèves sur les nombres en sixième à l'élaboration et à l'analyse d'une formation d'enseignants centrée sur le calcul mental*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot (Paris 7).

GERSTEN, R., & CHARD, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of Special Education*, *33*, 19–28.

GRAVEMEIJER, K. (2003). Facts and algorithms as products of students' own mathematical activity. In KILPATRICK J., MARTIN W. G., & SCHIFTER D. (Eds.). *A research companion to Principles and Standards for school mathematics*, (pp. 114–122). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

HEIRDSFIELD, A., & COOPER, T. (2004). Inaccurate Mental addition and subtraction: Causes and Compensation. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *26*(3) 43-65.

KAMII, C., & DOMINICK, A. (1997). To teach or not to teach algorithms. *Journal of Mathematical Behaviour*, *16*(1) 51-61.

MACLELLAN, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. *Westminster Studies in Education, 24*(2) 145-154.

PLUVINAGE, F., & RAUSCHER, J.-C. (1991). Les élèves et leur enseignement en mathématiques en sixième. *Education et formations, 27*, 83-95.

REYS, R., REYS, B., MCINTOSH, A., EMANUELSSON, G., JOHNSSON, B., & YANG, D. C. (1999). Assessing number sense of students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics, 99*(2) 61-70.

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à

l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 18*(2), 139-190.

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 2*(4), 505-528.

RODITI, E. (2001). *L'enseignement de la multiplication des décimaux en sixième. Étude de pratiques ordinaires.* Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.

THOMPSON, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction - Part 1, *Mathematics in School, 28*, 5, 22-25.

THOMPSON, I. (2008). Mental Calculation. *Mathematics Teaching, 213*, 40-42.

TURKEL, S., & NEWMAN, C. (1988). What's your number? Developing number sense. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 53-55.

VAN DE HEUVEL-PANHUIZEN, M. (2001). Realistic mathematics education in the Netherlands. In J. ANGHILERI (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, (pp. 49-64). Buckingham: Open University Press.

VERSCHAFFEL, L. (2015) : Quelles difficultés rencontrent les élèves quand ils ont à effectuer des opérations ? Conférence consultable à l'adresse http://www.cnesco.fr/numeration/paroles-dexperts/calcul-et-operations/

YACKEL, E. (2001). Perspectives on arithmetic from classroom-based research in the United States of America. In J. ANGHILERI (Ed.). *Principles and practices in arithmetic teaching: Innovative approaches for the primary classroom*, (pp. 15-32). Buckingham: Open University Press.

ETUDE DU PROCESSUS D'INSTITUTIONNALISATION DANS LES PRATIQUES DE PROFESSEURS DES ECOLES EXPERIMENTES.

Cécile **ALLARD**
LDAR, Université Paris-Est-Créteil
cecile.allard@u-pec.fr

Résumé
L'objectif de cette recherche consiste à décrire et débusquer les résistances à exposer des connaissances, plus précisément à mettre en œuvre le processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives des professeurs pour le cas de l'enseignement des fractions.

Mots clés
Institutionnalisation- pratiques- fraction- formation.

1. INTRODUCTION.

L'objectif de ma recherche consiste à décrire et débusquer les résistances à exposer des connaissances (Butlen et al, 2002, 2012 ; Coulange, 2011, 2012 ; Margolinas & Lappara, 2011) et plus précisément à mettre en œuvre le processus d'institutionnalisation dans les pratiques effectives des professeurs pour le cas de l'enseignement des fractions.
L'institutionnalisation en didactique a été définie dans la Théorie des Situations Didactiques, assez tardivement et suite à des ingénieries didactiques pas nécessairement destinées à être diffusées dans l'enseignement ordinaire (Brousseau, 1984 ; Perrin Glorian, 1986, 1993, 1997).
L'institutionnalisation des savoirs est définie comme étant un processus qui rend possible la décontextualisation et la dépersonnalisation des savoirs. Dans la Théorie des Situations Didactiques, le Processus d'Institutionnalisation (PI) induit l'Exposition de Connaissances (EC). Ces phases peuvent être induites par des situations de formulation voire de validation. Elles se construisent éventuellement et idéalement après des phases d'action sur une situation liée à un problème adéquat mettant en jeu le savoir, inspiré d'une situation fondamentale. Le principal enjeu de ce travail est de dépeindre ce que signifie exposer des connaissances en classe, plusieurs décennies après que le caractère incontournable dans l'enseignement de l'institutionnalisation ait été précisé et dégagé dans les théories didactiques (Brousseau, 1984 ; Perrin, 1993) sur lesquelles je m'appuie.
Ce processus qualifié de lent (Perrin, 1997) est difficile à observer. Perrin distingue trois types d'institutionnalisation :

> « l'Institutionnalisation ne peut se faire que de façon très progressive avec de nombreux cycles contextualisation/décontextualisation ce qui conduit à distinguer des niveaux dans le PI :
> - Des institutionnalisations locales

- Des institutionnalisations qui permettent d'ancrer l'ancien dans le nouveau : phase de rappel
- Les institutionnalisations plus globales qui renvoient à l'émergence du concept. »

(Perrin, 1993, pp21-22)

C'était là une des premières difficultés de mon objet d'étude : rendre compte d'un processus qui s'étale sur une durée de plusieurs séances induisant plusieurs semaines d'observation.
Une autre difficulté est apparue assez rapidement : institutionnaliser à l'école n'est pas nécessairement finalisé par un écrit.

2. CADRES ET POINTS D'APPUIS THEORIQUES.

J'emprunte à la **théorie des situations didactiques** (Brousseau, 1998) les définitions, résultats et fonctions de l'institutionnalisation (mémoire didactique, phase de rappel, phase de conclusion). J'utilise la **dialectique Outil Objet** (Douady, 1986) qui me permet ainsi de mieux cerner les enjeux de la décontextualisation et le rôle des changements de registre dans le processus que j'étudie. Enfin pour la caractérisation des pratiques, j'utilise la **Double approche didactique et ergonomique** (Robert & Rogalski, 2002). J'emprunte les outils de ce cadre notamment les 5 composantes des pratiques, les 5 niveaux de détermination des pratiques, les degrés de décontextualisation.
Les difficultés à institutionnaliser ont été identifiées par plusieurs autres chercheurs : Butlen et al (2002, 2012), Margolinas et Lappara (2008), Coulange (2012). C'est ainsi que ces auteurs s'accordent à parler d'un déficit de l'institutionnalisation au profit de la dévolution, du faire, de l'action des élèves Le couple dévolution/institutionnalisation est alors qualifié de couple en tension. Ce déséquilibre montre un dysfonctionnement qui conduit à reléguer à l'arrière-plan les connaissances et les savoirs (Margolinas et Lappara 2011).
Enfin, l'étude des pratiques d'enseignants débutants a permis de proposer une catégorisation de ces dernières en i-genre. Le i-genre 3 correspondant à des pratiques ayant atteint les cinq niveaux suivants (Butlen et al, 2012) :

- niveau 1 : installer la paix sociale voire la paix scolaire
- niveau 2 : choix des situations plus ou moins robustes (avec potentiel a-didactique)
- niveau 3 : savoir dévoluer
- niveaux 4 et 5 : savoir Hiérarchiser des procédures et Institutionnaliser.

Butlen et al (2012) ont ainsi pu montrer que les enseignants débutants relevant du i-genre 3 étaient minoritaires, les niveaux 4 et 5 faisant défaut à la plupart des enseignants suivis. Les résultats suivants ayant été obtenus auprès de professeurs des écoles débutants, j'ai souhaité compléter cette étude en analysant des pratiques de professeurs reconnus experts par l'institution.
Cette difficulté à institutionnaliser est-elle également présente pour des professeurs expérimentés ou bien encore est-il possible que plusieurs années après la formation initiale des enseignants cette difficulté demeure ? J'ai étudié un processus lent et diffus dont les acteurs (enseignants et élèves) produisaient à différents moments des connaissances plus ou moins contextualisées.
C'est pourquoi j'ai dû établir une méthodologie originale composant avec **de nombreux observables et un recueil de données conséquent pour réussir à qualifier et à caractériser l'institutionnalisation dans ces classes de professeurs expérimentés.**
J'ai construit un modèle qui met en évidence les deux dimensions dans lesquelles le Processus d'Institutionnalisation se développe : la **dimension sociale et la dimension cognitive.**

Le processus d'institutionnalisation est **impulsé** par les activités que propose le PE en s'appuyant sur les programmes. En appliquant les programmes un professeur offre une dimension culturelle et sociale et inscrit son action dans ce **que prescrit l'institution.**
Les élèves individuellement et collectivement cherchent à trouver une solution au problème proposé. Ils sont conduits à échanger : l'activité est sociale dans la classe. Mais cette activité n'est pas donnée au hasard, elle doit permettre aux élèves d'accéder à une nouvelle connaissance.
Dans la dimension sociale, le PI s'inscrit dans le prescrit par l'institution. Les interactions entre les individus (éléves/élèves, maître/élèves) permettent une existence au savoir en jeu.
La dimension **cognitive** a une part moins accessible, celle de la construction individuelle des concepts pour un sujet. Cette construction individuelle repose également sur les interactions avec les autres. Dire, **formuler rend plus visible ce qu'il y a à conceptualiser** et peut être rendu possible par des cycles de contextualisation/décontextualisation/recontextualisation.
Pour synthétiser je rappelle un résultat de Forget (2011). Cette auteure dans sa thèse étudie comment importer le concept d'institutionnalisation dans la classe de Français, elle conclut ainsi : « Peut-on documenter l'absence **?** et si oui comment ? » (Forget, 2011 p302)
Est-il possible que les enseignants produisent des textes décontextualisés et dépersonnalisés le plus souvent à l'oral en s'appuyant sur des interactions avec leurs élèves ?
Est-il possible de décrire dans les pratiques ordinaires un PI le plus abouti possible, c'est-à-dire se rapprochant du modèle théorique?
J'ai préféré utiliser la formulation d'exposition de connaissances (EC) au lieu d'institutionnalisation. Cette formulation (Bridoux et al, 2015) a le mérite :

- de ne pas renvoyer la question de l'institution de référence difficile à déterminer
- de prendre en compte les expositions de connaissances plus ou moins décontextualisées et dépersonnalisées et dont les niveaux de formulation et de généralisation sont à de degrés différents
- de prendre en compte tous les moments des séances où il y a des Expositions de Connaissances
- de prendre en compte les modalités de gestion et les déroulements lors de ces moments.

Les EC contribuent au PI et permettent de rendre compte de sa dynamique, ils apparaissent comme constitutifs du PI.

3. METHODOLOGIE

Mon objectif est de décrire et de débusquer les résistances, les raisons de ces difficultés à exposer des connaissances dans les pratiques des professeurs des écoles. J'ai apporté des éléments de réponse à la question suivante : dans quelle mesure est-il possible de mener jusqu'au bout un processus d'institutionnalisation basé sur des situations solides ?

3.1 Les choix

Mes choix méthodologiques m'amènent à étudier les pratiques des maitres formateurs sur un temps long et par conséquent à opérer un choix sur une notion en particulier : les fractions. Ces choix répondent à des contraintes de mon objet d'étude (l'étude du PI dans les pratiques) : ce processus lent nous conduit à observer plusieurs séances consécutives sur plusieurs années et à trouver des enseignants qui potentiellement proposent des situations robustes, qui institutionnalisent (donc relèvent du i-genre 3), qui déclarent avoir un bon rapport aux mathématiques et qui assurent la paix scolaire. Je fais remarquer que le choix des situations est souvent corrélé au choix des ressources

3.2 Les données

Pour une enseignante, j'ai été en mesure de proposer une étude longitudinale (3 ans) : j'ai recueilli suffisamment de données pour reconstituer l'itinéraire cognitif de ce professeur ainsi que l'ensemble des EC produites sur trois années dans le même niveau de classe. Afin de relever ce qui a été dit à l'oral, j'ai été en mesure de filmer la quasi-totalité des séances sur les fractions (une dizaine de séances) et cela plusieurs années de suite. Ainsi, j'ai pu réaliser une étude longitudinale et comparative d'une même enseignante.
Pour les trois autres enseignants la quantité de données est moindre notamment parce que deux d'entre eux ne sont pas restés sur des postes devant élèves. Pour autant les données sont suffisantes et permettent l'étude comparative des pratiques d'enseignants utilisant les mêmes ressources (trois professeurs des écoles sur quatre utilisent Ermel (CM2).
La lenteur de ce processus impose une étude sur un temps long et sur une notion précise. De manière pragmatique j'ai choisi l'étude des fractions au regard des cahiers de leçons. L'étude comparative des cahiers de leçons montraient que cet enseignement était pris en charge par les quatre enseignants de mon expérimentation. L'enseignement des fractions semblait suffisamment emblématique pour provoquer un écrit destiné à être appris.

3.3 Etude du relief de la notion étudiée : les fractions

J'emprunte des résultats des travaux du Rational Number Project (RNB). Les anglo-saxons ont, en effet, une autre approche de l'enseignement des fractions. La comparaison entre leur approche et les choix français m'a permis de mieux cerner les difficultés de cet enseignement. Les résultats de RNB font partie de ma méthodologie car ils me permettent de cerner dans les déroulements effectifs mon objet d'étude. D'après les auteurs du RNB construire le concept de nombre rationnel dépend de la fréquentation et de la rencontre de ce que Behr et al (1992) appellent les différents « points de vue » ;

> *« However, when fractions and rational numbers as applied to real-world problems are looked at from a pedagogical point of view ».*(Behr et al, 1992, p296)

Ils ajoutent que ce qui est difficile c'est la reconnaissance et l'apprentissage de ces différente personnalités des fractions à des élèves très jeunes (à partir de 7/8 ans au canada par exemple) Ainsi, l'ensemble des nombres rationnels est un ensemble infini de classes d'équivalences, chaque classe d'équivalence (fraction) ayant une infinité de représentants. Cette définition n'est pas accessible pour des élèves de primaire et c'est bien là tout l'enjeu de cet enseignement : asseoir les premières représentations de ces nouveaux nombres sans pouvoir s'appuyer sur du formalisme et en s'appuyant sur des représentations matérielles de ces nombres. Les documents d'accompagnements des programmes de l'Ontario (Canada) donnent des pistes pour enseigner les fractions en appui sur du matériel et dans des contextes très variés). C'est ainsi que ces auteurs distinguent au moins cinq aspects des fractions (partie/partie d'un tout, fraction-mesure, fraction quotient, fraction ratio, fraction opérateur)
Grâce à l'étude longitudinale et comparative de pratiques d'une même enseignante sur trois ans d'une part, et de l'étude des pratiques de trois autres maitres formateurs d'autre part, je suis en mesure de documenter un peu plus l'ordinaire de ces pratiques et j'ai pu établir des gestes professionnels d'institutionnalisation. De plus, j'ai pu caractériser le Processus d'institutionnalisation à l'oral comme à l'écrit.

4. LES RESULTATS

4.1 Du côté des ressources

Les quatre enseignants articulent parfois deux manuels et une ressource « ERMEL » qui est un ouvrage proposant des situations issues des résultats obtenus en didactique des mathématiques. De l'avis des enseignants, leur progression semble trop dense et impossible à réaliser. C'est pourquoi ils empruntent et articulent le plus souvent deux ressources. Les modifications que les enseignants font changent parfois les enjeux de la situation. Les connaissances didactiques semblent parfois faire défaut aux PE.
Ces ressources souvent conseillées en formation (Allard & Ginouillac, 2014) sont centrées sur des situations qualifiées de robustes mais n'outillent pas suffisamment les PE dans le contenu, n'explicitent pas suffisamment les variables didactiques et leurs rôles. Les indications portant sur les institutionnalisations possibles sont souvent trop anecdotiques ou peu explicitées pour être retenues.
La question des ressources (au sens large) se précise : les programmes officiels, les manuels présentent une transposition problématique du domaine considéré (au regard de celle opérée dans le monde anglo-saxon) peu étayé tant du point de vue du traitement de la notion que du côté des apports didactiques. J'avance alors qu'il devient indispensable de penser l'élaboration des ressources en tenant compte des contraintes du métier.

4.2 Résultats les plus significatifs du côté des pratiques

Trois des enseignants sur quatre choisissent des situations robustes, enrôlent leurs élèves si bien que ces derniers se lancent dans les activités, proposent des phases de recherche suffisamment longues, ils exploitent les différentes procédures des élèves et ils organisent des mises en commun suivies de synthèse (pour deux sur quatre des enseignants suivis). En revanche, proposer un texte de savoir suffisamment décontextualisé ou généralisé n'est pas présent. C'est là une véritable difficulté et un enjeu du métier. Les pratiques de trois professeurs sur quatre relèvent du i-genre3 malgré un processus d'institutionnalisation non abouti.
La question de <u>la professionnalisation</u> des professeurs des écoles (et donc de la formation continue !) sur un temps long, de la construction de connaissances didactiques en acte et de gestes d'institutionnalisation apparaissent suite à ces analyses. Institutionnaliser et les gestes associés ne sont pas pris en charge dans les instituts de formation (Allard, 2015 ; Butlen, 2012) et ce sont des gestes professionnels qui se construisent sur un temps long.

4.3 Résultats du côté des fractions

J'ai pu montrer que seuls deux aspects sur les cinq présentés sont travaillés à l'école primaire (pour des raisons institutionnelles). De plus les nombres rationnels ne sont utilisés que dans des cas continus (mesure d'aires, de longueurs) et jamais dans des cas discrets (sacs de billes par exemple et billes à répartir en plusieurs parts). Enfin les seules opérations possibles avec ces « nouveaux nombres » sont les additions ou soustractions de fractions au même dénominateur ce qui ne rend pas explicite le fait que les fractions soient des nombres. Cela interroge sur les possibilités pour le professeur à favoriser la conceptualisation et des cycles de contextualisation/décontextualisation/recontextualisation

4.4 Du côté de l'institutionnalisation

Pour une enseignante seulement, le texte du savoir écrit proposé aux élèves est un point d'appui et on retrouve des traces de ce qui a été écrit dans le discours oral.
En revanche pour les trois autres enseignants, l'écrit n'est pas la clé de voûte du processus d'institutionnalisation. Les moments d'exposition de connaissances sont alors diffus et non étiquetés en tant que tels.
C'est alors à la charge des élèves d'identifier ce qui est de l'ordre du contexte (le presque anecdotique) et de l'ordre du savoir (de l'ordre de l'indispensable). Je vois dans cette difficulté à cerner l'essentiel de ce qui doit être su, construit, la source de difficultés scolaires voire d'inégalités scolaires

5. CONCLUSION

Les élèves de CM2 des classes retenues ne fréquentent pas ou peu de textes mathématiques si bien qu'ils ne sont pas habitués à lire ou à entendre des textes présentant des savoirs formalisés, formulés, décontextualisés et montrant un certain degré de généralisation. Ainsi pour les fractions, les deux seuls aspects enseignés sont les aspects partie sur un tout et l'aspect mesure. Au collège les trois autres aspects sont enseignés (quotient, opérateur et ratio). La construction de la fraction comme nombre est-elle vraiment envisageable en fin d'école primaire ?
L'un de mes résultats montre le manque de visibilité des contenus mathématiques, ce qui a pour conséquence directe de laisser à la charge des élèves d'identifier ce qui est de l'ordre du contexte et de l'ordre du savoir. De plus, les variabilités intra et inter personnelle constatées n'assurent pas que les savoirs enseignés soient les mêmes (malgré les programmes identiques sur tout le territoire Français) d'un enseignant à l'autre. Je postule que les temps d'expositions de connaissances devraient être un levier puissant dont dispose le professeur pour orienter les élèves dans l'activité mathématique, l'absence ou le manque de visibilité contribue à creuser les inégalités scolaires.
J'ai mis également en évidence que l'absence de traité, de textes à destination des maîtres est une des explications possibles à cette difficulté d'institutionnaliser. Les ressources, reconnues de qualité par les formateurs ESPE (Allard & Ginouillac, 2014) et la formation n'outillent pas suffisamment ces enseignants polyvalents dont la formation initiale est assez peu souvent scientifique. Je montre que les enseignants même déclarés experts sont insuffisamment outillés aux plans didactiques et mathématiques mais, et surtout, montre l'intelligence pratique de ces professionnels pour créer et construire des manières pertinentes de faire vivre le processus d'institutionnalisation. La question de l'institutionnalisation dépasse la dialectique novices/experts.
Mes perspectives de travail me conduisent à étudier la place des textes de savoir dans le cadre de la liaison école collège : comment des élèves qui n'ont pas fréquenté un texte de savoir en primaire vont-ils s'adapter au collège ? Comment vont-ils comprendre les enjeux du cahier de cours –quand il y en a un- ?
C'est pourquoi je pense qu'il devient important de produire un tel traité en collaboration avec des chercheurs, des enseignants-formateurs en mathématiques, des enseignants de l'école.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALLARD, C. (2015). *Etude du processus d'institutionnalisation dans les pratiques de fin d'école primaire : le cas de l'enseignement des fractions*. Thèse de doctorat, Université de Paris Diderot, 297 pages.

ALLARD, C., & GINOUILLAC S. (2014). De la ressource à la séance de classe : le cas de la proportionnalité en cycle3. *Actes du 41e colloque COPIRELEM, « Quelles ressources pour enrichir les pratiques et améliorer les apprentissages à l'école primaire»*,18-19-20 Juin 2014, Mont de Marsan.

BEHR, M., HAREL, G., POST, & T., LESH R. (1992). Rational number, ratio and proportion. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). NY: Macmillan Publishing.

BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIES M., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C., & ROBERT, A. (2015) *Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques : secondaire et début de l'université.* Cahiers du laboratoire de didactique André Revuz 14,1-14. Paris : IREM.

BROUSSEAU, G. (1984) Le rôle du maître et l'Institutionnalisation. *IIIème école d'été de didactique des mathématiques*. http://guy-brousseau.com/2376/le-role-du-maître-et-l'institutionnalisation-1984/ (consulté le 24/09/2015).

BROUSSEAU, G. (1998). *Théories des situations didactiques*. Grenoble : la pensée Sauvage.

BUTLEN, D., PELTIER M.L., & PEZARD, M. (2002). Nommés en REP, comment font-ils ? Pratiques de professeurs des écoles enseignant les mathématiques en REP : cohérence et contradictions, *Revue Française de Pédagogie* ,140, 41-52.

BUTLEN, D., CHARLES-PEZARD, & M., MASSELOT P. (2012) *Professeurs des écoles débutants enseignant les mathématiques en ZEP : quelles pratiques ? Quelle formation ?* Grenoble : la pensée Sauvage.

COULANGE, L. (2011). Quand les savoirs mathématiques à enseigner deviennent incidents. Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques d'une enseignante de CM, in Rochex, J.-Y. et Crinon, J.(dir) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, 33-34. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

COULANGE, L. (2012). *L'ordinaire dans l'enseignement des mathématiques. Les pratiques enseignantes et leurs effets sur les apprentissages des élèves.* Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot, 136 pages.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectiques outil-objet. *Recherche en didactique de mathématiques*, 7(2),5-31.

FORGET, A. (2011). *Importer le concept d'institutionnalisation en classe de français : quatre classes aux prises avec une même séquence didactique sur le genre encyclopédique en cinquième année primaire*. Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. 307 pages.

MARGOLINAS, C., & LAPARRA,M. (2008) : « Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation », *Actes du colloque : Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation*, Bordeaux.
http ://www.aquitaine.iufm.fr/infos/colloque2008/cdromcolloque/communications/marg.pdf

MARGOLINAS, C., & LAPARRA, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire in Rochex, J.-Y. et Crinon, J.(dir) *La construction des inégalités scolaires. Au cœur des pratiques et des dispositifs d'enseignement*, 19-33. Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

PERRIN-GLORIAN, M.J.(1997). Que nous apprennent les élèves en difficulté en mathématiques ? *Repères Irem*, 29, 43-66.

PERRIN-GLORIAN, M.J.(1986).Représentations des fractions et des décimaux chez des élèves de CM2 et du collège. Cahier de didactique des mathématiques 24.
http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_cahiers_de_didactique/#blanc consulté le 09/09/2015

PERRIN-GLORIAN, M.J. (1993).Questions de didactiques soulevées à partir de l'enseignement des mathématiques dans des « classes faibles ». *Recherches en didactiques des mathématiques*, 13(1/2), 95-118

ROBERT, A., & ROGALSKI, J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématique : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences des mathématiques et des technologies*, 2(4), 505-528.

UN USAGE DE LA GEOMETRIE DYNAMIQUE EN CYCLE 3 : EXPLICITER EN GEOMETRIE

Francine **ATHIAS**
ESPE Besançon/ Laboratoire ADEF
francine.athias@univ-fcomte.fr

Résumé
Nous nous intéressons au rôle que peut avoir la géométrie dynamique dans l'enseignement et l'apprentissage de la géométrie au cycle 3 de l'école primaire (les élèves ont 9/10 ans). Plus précisément, dans une étude de cas, nous cherchons à étudier comment le professeur rend nécessaire une explicitation des relations géométriques autour du triangle équilatéral. La question de recherche concerne l'organisation des transactions par le professeur autour d'un logiciel de géométrie dynamique pour mettre en évidence les éléments caractéristiques d'un cercle.
Mots clés
géométrie dynamique, cercle, action conjointe.

INTRODUCTION

Cette recherche concernant l'introduction de la géométrie dynamique en cycle 3 s'inscrit dans le prolongement de travaux antérieurs (e.g. Assude & Gelis, 2002 ; Assude & Grugeon, 2002 ; Restrepo, 2008). Les deux premières études ont permis de rendre compte des tâches et techniques que les élèves ont pu mettre en œuvre et la manière dont ils s'approprient l'environnement dynamique. Quant à Restrepo, cette auteure rend compte de la manière dont les élèves s'approprient le déplacement. Nous nous focalisons sur les transactions in situ pendant l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques (Barrier & Mathé, 2014). Le logiciel de géométrie dynamique choisi ici est Tracenpoche[1], il a été introduit dans des classes de CM1/CM2 par des professeurs des écoles. À l'école primaire, les constructions sont la plupart du temps faites avec les instruments usuels, ces derniers « embarquant » plus ou moins implicitement les propriétés. Dans le cas du cercle, par exemple, les élèves savent qu'il faut utiliser le compas, la pointe du compas étant placé sur le centre du cercle et l'écartement du compas représentant le rayon du cercle. Si l'usage du compas en CM1/CM2 est régulier en classe, les éléments caractéristiques du cercle sont rarement nommés. Nous voulons étudier comment le changement d'environnement va contraindre les élèves et le professeur à développer un discours technologique, au sens où l'entend Chevallard (1998). On peut donc poser la question de recherche sous la forme suivante : comment, au cours des transactions suite à l'utilisation autour d'un logiciel de géométrie dynamique, le professeur peut-il engager les élèves dans le jeu d'explicitation ?

[1] Tracenpoche : http://tracenpoche.sesamath.net/

CADRE THEORIQUE ET METHODOLOGIQUE

Pour l'analyse des transactions, nous nous appuyons sur la notion de jeu, issue de la théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy, 2011). À un premier niveau de description, on peut considérer qu'un professeur et des élèves jouent à un jeu dans lequel l'un des joueurs (le professeur) gagne si et seulement si l'autre joueur (l'élève) gagne. Le professeur sait, mais il ne peut donner directement la solution à l'élève, qui doit la trouver de son propre mouvement. À un deuxième niveau de description, plus spécifique, le professeur est amené à organiser la séance et à orienter l'attention de l'élève de manière à ce qu'il agisse de façon adéquate dans la situation. Autrement dit, en prenant appui sur ce que les élèves savent (contrat), il fait rencontrer aux élèves un problème (milieu), dont la résolution permet de faire une certaine expérience du savoir, enjeu de la situation. C'est précisément à ce niveau de jeu, nommé jeu d'apprentissage dans la théorie, que nous nous situons pour la suite.

Méthodologie

Différentes situations ont été proposées à des professeurs des écoles dans le cadre d'une ingénierie de premier niveau (Perrin-Glorian, 2009). L'organisation de cette ingénierie et l'analyse des séances ont fait l'objet d'une recherche (Athias, 2014). Les séances ont été filmées et transcrites.
La question est ici travaillée à travers une étude de cas, en appui sur l'une des séances mise en œuvre par un des professeurs. Dans cette séance, le professeur a d'abord demandé aux élèves de construire un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche. Collectivement, il choisit de faire construire en parallèle un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche, ce dernier étant vidéoprojeté, et un triangle équilatéral au tableau, avec les instruments usuels (nous parlerons d'environnement papier-crayon).

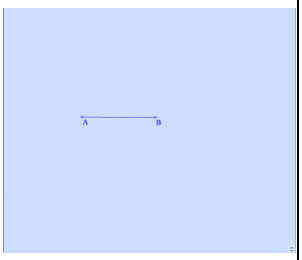
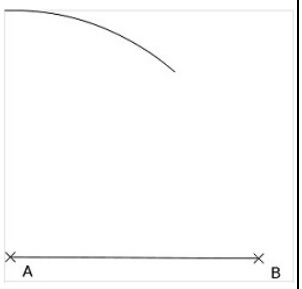
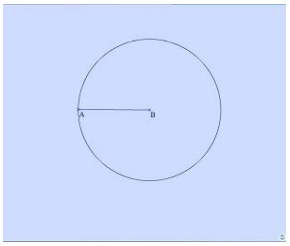
LE CAS ETUDIE

Dans une première partie de séance, les élèves ont travaillé individuellement. Ils devaient tracer un triangle équilatéral dans l'environnement papier-crayon avec la règle et le compas. Dans une deuxième partie, en binômes, ils devaient construire un triangle équilatéral cette fois-ci dans l'environnement Tracenpoche, ce qui n'a pas été fait sans difficulté. Le professeur se déplaçait alors de binômes en binômes pour réguler l'action des élèves. De retour en classe entière, le professeur choisit de partager le tableau en deux parties : une élève E doit tracer avec les instruments usuels un triangle équilatéral, à droite du tableau, une autre élève Am doit construire un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche, sachant que l'écran est vidéoprojeté. Il demande à la classe de repérer « ce qui est pareil et ce qui est différent ». Sont ainsi tracés successivement, le segment [AB], le cercle de centre A et passant par B, le cercle de centre B passant par A, le point C à l'intersection des deux cercles, et ce alternativement à chaque étape dans l'environnement papier-crayon (sur le tableau) puis dans l'environnement Tracenpoche.

Un moment approfondi

Il s'agit du moment de la construction du cercle de centre A et passant par le point B. Le segment [AB] a été déjà tracé, dans l'environnement papier-crayon et dans l'environnement Tracenpoche (cf illustrations 1 et 2). L'élève E sait construire le triangle équilatéral avec le compas. Alors qu'elle s'apprête à le faire, le professeur l'interrompt et lui demande de dire ce qu'elle va faire. Il explique que cela permettra à l'élève Am de continuer la construction dans

l'environnement Tracenpoche. Nous savons par ailleurs qu'Am ne l'a pas fait (nous n'en connaissons pas les raisons). L'élève E ne sait pas expliquer ce qu'elle a l'intention de faire. Collectivement, les élèves et le professeur arrivent à expliquer qu'avec le compas, E va tracer le « cercle » de centre A passant par le point B. Ils précisent alors immédiatement que le cercle sera en fait réduit à un arc de cercle. Puis les deux élèves tracent l'arc de cercle (cf illustration 3) et le cercle (cf illustration 4).
Nous avons reproduit dans le tableau ci-dessous les constructions successives faites alternativement dans l'environnement papier-crayon puis dans l'environnement Tracenpoche[2].

<table>
<tr><td>Illustration 1</td><td>Illustration 2</td><td>Illustration 3</td><td>Illustration 4</td></tr>
<tr><td></td><td>  </td><td> 
</td><td>  </td></tr>
<tr><td>Le segment [AB] dans l'environnement papier-crayon</td><td>Le segment [AB] dans l'environnement Tracenpoche</td><td>Le premier arc de cercle tracé avec le compas dans l'environnement papier-crayon</td><td>Le premier cercle dans l'environnement papier-crayon</td></tr>
<tr><td colspan="2">P : Comment on fait pour utiliser le compas, E ?
E : On prend la mesure de AB.
P : Qu'est-ce que tu fais pour prendre la mesure ? Dis-nous ce que tu fais pour qu'Am puisse le faire ?
E : Ben, je fais le cercle. Je prends la mesure et je fais ça.
P : Oui, tu prends la mesure. Tu prends le compas d'une certaine façon.
E : Ben oui, je pique sur B.
P : Pourquoi tu piques sur B ?
E : Parce que… je ne sais pas.</td><td colspan="2">Un peu plus tard
P : Et donc Am, elle va avoir quoi, elle ? On va appeler comment AB, pour son travail à Am ?
E : Ben le diamètre.
P : Le diamètre ?
E : Euh non le rayon.
P : Le rayon. Am, t'es prête ? Tu as vu, elle va faire un arc de cercle et toi tu vas faire un cercle. Elle a dit de centre B, de centre B…
E : Et de rayon AB.
P : Et de rayon AB. C'est parti. Oui, de centre B et de rayon AB.</td></tr>
</table>

Analyse

Si nous modélisons le début de ce moment sous forme d'un jeu, l'enjeu pour le professeur est de faire expliciter par les élèves les éléments caractéristiques du cercle. L'enjeu pour les élèves (dont l'élève E) est de faire en sorte que A puisse tracer dans l'environnement Tracenpoche, sous les injonctions du professeur. Pour pouvoir s'engager dans le jeu, nous savons que les élèves ont déjà des connaissances sur le triangle équilatéral et en ont tracé un dans les deux environnements. Ils ont une certaine habitude des constructions dans

[2] Nous avons des photographies faites en classe. Pour des raisons de lisibilité, nous ne les avons pas proposées, mais nous les avons reproduites.

l'environnement papier-crayon (feuille ou tableau). Ils ont également découvert le logiciel de géométrie dynamique depuis sept séances. Les règles du jeu ont été clairement annoncées par le professeur (comparer). Dans la modélisation, ces éléments sont plutôt du côté du contrat. Lorsque le professeur propose de jouer à ce jeu, il organise une co-construction collective dans les deux environnements. C'est cette organisation, nouvelle pour les élèves, qui va nourrir l'action. Il est à noter qu'à ce moment, tous les problèmes de construction rencontrés ont été résolus. Du point de vue du modèle, ces éléments, du côté du milieu, offrent peu de résistance. Si nous notons que l'élève E sait ce qu'elle doit faire, elle se trouve face à un problème d'explicitation. Autrement dit, le professeur modifie le contrat : il ne s'agit plus de comparer les deux environnements mais d'anticiper la construction dans l'environnement Tracenpoche à partir de celle de l'environnement papier-crayon. Au regard des élèves, cette modification n'est pas une exigence qui dépend du professeur mais bien une exigence relative à cette juxtaposition des deux environnements. De plus, elle est problématique. Les rétroactions du milieu ainsi constitué sont saillantes : dire ce que l'on fait dans l'environnement papier-crayon devra permettre à A de poursuivre la construction dans l'environnement Tracenpoche. Implicitement, ne pas l'expliquer ne permettrait pas de le faire. Ainsi, le professeur amène les élèves à dire que tracer un arc de cercle dans l'environnement papier-crayon, c'est faire le choix de ne tracer qu'une portion d'un cercle, dont le centre et le rayon est à préciser.

CONCLUSION

Regarder la séance comme un jeu donne à voir ce que le professeur fait faire aux élèves. L'enjeu de comparaison (« ce qui est pareil et ce qui est différent »), déclaré de manière explicite par le professeur n'est pas l'enjeu épistémique qu'il vise (mettre en évidence les éléments caractéristiques du cercle). Il est ainsi possible, à partir de ce cas, de voir comment l'environnement Tracenpoche peut être utilisé non pas comme une fin en soi, mais plutôt comme un adjuvant au contrat pour rendre le milieu plus résistant et les questions épistémiques plus saillantes. Dans l'exemple analysé, savoir construire un triangle équilatéral dans l'environnement Tracenpoche est devenu un prétexte pour savoir donner les éléments caractéristiques d'un cercle. Ainsi, l'usage des TICE est revisité pour mettre en évidence la figure géométrique, ici le cercle défini par un centre et un point du cercle. Cependant, dans cette classe, notons que les raisons d'être du cercle ne sont jamais évoquées. En effet, le professeur n'explique pas que le cercle, en tant qu'ensemble de points équidistants d'un centre, garantit l'égalité des longueurs des côtés du triangle. Le jeu épistémique relatif à cette définition du cercle n'est pas mis en œuvre au cours de cette séance. Le professeur n'éprouve pas la nécessité de justifier l'égalité des longueurs des trois côtés. L'institutionnalisation consiste donc en une explicitation d'une technique de construction, reposant sur l'emploi des éléments caractéristiques du cercle, mais la technologie justifiant cette technique n'est pas présentée.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ASSUDE, T., & GELIS, J-M. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de Cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematic*, *50*, 259-287.

ASSUDE, T., & GRUGEON, B. (2002). Intégration de logiciels de géométrie dynamique dans des classes de l'école primaire. *29ème colloque Inter Irem des formateurs et professeurs de mathématiques chargés de la formation des maîtres*, La Roche-sur-Yon.

ATHIAS, F. (2014). *La géométrie dynamique comme moyen de changement curriculaire*, thèse de doctorat, Université Aix-Marseille (Hal : https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01092711) (446 pages)

BARRIER, T., & MATHÉ A-C. (Eds.) (2014). Langage, apprentissage et enseignement des mathématiques. *Spirale*, *54*.

CHEVALLARD, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques. *Actes de l'Université d'été, La Rochelle*, (pp. 91-120), IREM de Clermont-Ferrand.
PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2009). L'ingénierie comme interface recherche-enseignement, dans C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, F. Vandebrouck et F. Wozniak (Eds), *En amont et en aval des ingénieries didactiques, XV école d'été de didactique des mathématiques*, (pp. 57- 78), Clermont-Ferrand.
RESTREPO, A.-M. (2008). *Génèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème*, Thèse Université Joseph Fourier Grenoble.
SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. De Boeck.

PROPOSITION D'UN CADRE D'ANALYSE DE SITUATIONS DE FORMATION DE PROFESSEURS DES ECOLES

Christine **MANGIANTE**, Pascale **MASSELOT**, Édith **PETITFOUR**, Claire **WINDER**
COmmission Permanente des IRem sur l'enseignement ELEMentaire (COPIRELEM)
christine.mangiante@espe-lnf.fr, pascale.masselot@u-cergy.fr,
edith.petitfour@univ-lorraine.fr, claire.winder@free.fr

Résumé
Les réflexions dans le domaine de la formation en mathématiques des professeurs des écoles ont conduit à la production d'un grand nombre de documents présentant des situations de formation issues de pratiques de formateurs. Nous présentons le cadre d'analyse de ces situations de formation que nous avons élaboré. Ce cadre nous permet de conduire une analyse des situations de formation et d'en interroger leurs potentialités dans le but, à terme, de favoriser une meilleure appropriation de ces ressources, voire d'envisager des adaptations prenant en compte les contraintes de formation imposées.

Mots clés
Cadre d'analyse, situation de formation, professeurs des écoles, savoirs didactiques, savoirs mathématiques, savoirs professionnels.

Dans le domaine de la formation en mathématiques des professeurs des écoles, les réflexions menées notamment par la COPIRELEM, ont conduit à la production d'un grand nombre de documents à destination des formateurs des professeurs des écoles. Dans la plupart des cas, ces documents comportent des informations précises relatives à la mise en œuvre de ces scénarios (présentant les différentes étapes, phases, consignes, éléments à institutionnaliser) et des explicitations relatives aux choix effectués rapportés aux enjeux de formation associés. Or il nous semble que la mise à disposition des formateurs de ressources, dont la qualité est reconnue par un collectif, ne suffit pas à garantir leur appropriation.
Notre questionnement est double. D'une part, nous cherchons à cerner les savoirs potentiellement en jeu dans chacune de ces « situations de formation » et leur possible articulation. D'autre part, nous étudions comment le formateur peut exploiter les différentes potentialités de ces « situations de formation » en fonction des objectifs qu'il s'est fixés. Pour cela, il nous a semblé nécessaire de construire un outil d'analyse de « situations de formation ». Nous utilisons ici le mot « situation » au sens de (Brousseau, 2010) :

> Une situation est caractérisée dans une institution par un ensemble de relations et de rôles réciproques d'un ou de plusieurs sujets (élève, professeur, etc.) avec un milieu, visant la transformation de ce milieu selon un projet. Le milieu est constitué des objets (physiques, culturels, sociaux, humains) avec lesquels le sujet interagit dans une situation. Le sujet détermine une certaine évolution parmi des états possibles et autorisés de ce milieu, vers un état terminal qu'il juge conforme à son projet. (Brousseau, 2010, p. 2)

Ainsi une « situation de formation » est, pour nous, une situation impliquant des formés (étudiants en formation initiale ou enseignants en formation continue), et des formateurs au sein d'une institution de formation d'enseignants. Elle consiste en un ensemble d'activités

proposées par le formateur et construites autour d'une activité que nous appellerons activité « amorce ».
Notre cadre d'analyse des situations de formation vise dans un premier temps à interroger les potentialités de ces situations pour pouvoir les adapter à un public choisi dans le contexte de contraintes de formation imposées. Il contribue aussi à clarifier les enjeux dans les différentes phases de la mise en œuvre, enjeux liés à des objectifs de formation mathématiques, didactiques ou pédagogiques. À terme, il s'agit de permettre aux utilisateurs de ces ressources de mieux appréhender et de s'approprier les enjeux de formation sous-jacents, de manière plus fidèle aux intentions des concepteurs.

UNE VARIABLE ET DES INDICATEURS

Nous prenons en compte l'ensemble des activités proposées par le formateur en les caractérisant en fonction de leur nature. Pour chaque activité, plusieurs indicateurs apparaissent :

- le type de connaissances convoquées ;
- le degré de décontextualisation de ces connaissances ;
- la posture du formé dans l'activité.

Le type de connaissances convoquées

En accord avec Margolinas (2012), « une connaissance est ce qui réalise l'équilibre entre le sujet et le milieu, ce que le sujet met en jeu quand il investit une situation ». En ce sens, une connaissance est intimement liée au sujet, alors qu'un « savoir est une construction sociale et culturelle qui vit dans une institution. (…) [Il est] dépersonnalisé, décontextualisé, détemporalisé ». Les connaissances convoquées sont les connaissances attendues au regard de la tâche prescrite. Houdement (1995) et Kuzniak (1994), en utilisant une métaphore issue de la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau), ont identifié trois types de « savoirs utiles pour enseigner » (Houdement, 2013) :

> Le savoir mathématique correspond aux mathématiques nécessaires à l'enseignant pour préparer, réguler et évaluer sa séance et ses élèves.
> Le savoir didactique est, par définition, nourri par les recherches en didactique sur les mathématiques du primaire. *A priori* ce savoir a vocation à être théorique mais (…) une transposition est nécessaire pour rendre accessible en centre de formation des « savoirs utiles ». Ce savoir didactique est issu d'ouvrages de recherches collaboratives (…).
> Le savoir pédagogique ou « savoir d'expérience » (Portugais, 1995) (…) se caractérise par son oscillation entre deux pôles, l'un théorique mais parfois très éloigné de la pratique future des étudiants (par exemple le fait que les pratiques constructivistes de l'apprentissage prennent le pas sur les conceptions behavioristes), l'autre proche du sens commun et de la pratique (…) mais privée de l'adaptabilité d'un modèle plus théorique. (Houdement, 2013, pp. 12-13).

Dans les différentes activités, nous distinguons alors les connaissances mathématiques ainsi que les connaissances didactiques et pédagogiques, que l'on vise à faire acquérir aux formés.
Les *connaissances pédagogiques* relèvent des conceptions de l'apprentissage, de l'organisation et de la gestion de la classe, indépendamment des contenus disciplinaires : par exemple envisager différentes modalités de travail (individuel, en petits groupes pour favoriser les interactions, en grand groupe), différentes gestions de la mise en commun (par affichage – ou pas – des productions, par une prise en compte de toutes les productions ou d'une partie), différents supports de travail (cahier de brouillon, affiches, ardoises ; éphémères ou pas), ...
Les *connaissances didactiques* sont spécifiques au contenu mathématique enseigné. Ces

connaissances sont des connaissances pour l'enseignant : elles correspondent à des transpositions de savoirs didactiques initialement conçus dans le cadre de la recherche. Par exemple le concept de variable didactique donne à l'enseignant le moyen d'identifier et de hiérarchiser les différents paramètres à considérer et de faire des choix des valeurs de certains en fonction de ses objectifs en termes d'apprentissage à provoquer.
Connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques sont intimement liées au cœur des pratiques enseignantes et ne peuvent être abordées de façon vraiment indépendante dans le cadre des situations de formation.

Le degré de décontextualisation des connaissances convoquées

Selon les moments de la mise en œuvre, les connaissances convoquées peuvent être :
- mobilisées en contexte implicitement (en acte) ;
- mobilisées en contexte explicitement ;
- décontextualisées (pour devenir mobilisables dans d'autres contextes).

On définit ainsi trois degrés de décontextualisation de connaissances convoquées. Les connaissances mathématiques sont mobilisées en acte lorsqu'elles sont utilisées comme outil (Douady, 1986) dans l'activité mathématique considérée. Cette dernière peut être soit vécue, avec la réalisation effective de ce qui est demandé (réalisation de manipulations, élaboration et rédaction d'une solution), soit évoquée, avec une résolution mentale. Les connaissances mathématiques sont explicitées en contexte lorsque leur utilisation dans l'activité en tant qu'outil est formulée et elles sont décontextualisées lorsqu'elles sont présentées en tant qu'objet, généralement dans une phase d'institutionnalisation. Concernant les connaissances didactiques ou pédagogiques, elles sont mobilisées en acte dans l'identification des choix didactiques ou pédagogiques effectués dans l'activité mathématique considérée, elles sont explicitées en contexte dans une analyse des implications de ces choix et elles sont décontextualisées dans la mise en évidence et l'explicitation des concepts didactiques ou pédagogiques sous-jacents.

La posture du formé

En liaison avec les différentes manières dont un formateur peut s'adresser à des stagiaires (en formation initiale ou continue) dégagées par Sayac (2010), nous distinguons, dans une situation de formation, plusieurs postures spécifiques attendues du formateur de la part du formé, dont ce dernier peut ou non être conscient. Ainsi, le formé est placé dans une *posture d'élève* par rapport aux connaissances mathématiques lorsqu'il doit réaliser l'activité mathématique ou lorsqu'il s'intéresse aux connaissances mathématiques décontextualisées de cette activité. Il est placé dans une *posture d'élève-enseignant* (au sens de « élève ingénieur ») lorsqu'il étudie des activités à destination des élèves ou des productions d'élèves, lorsqu'il analyse les conditions de mise en œuvre en classe de l'activité mathématique considérée. Il est placé dans une *posture d'enseignant* lorsqu'il entre dans un questionnement plus large sur les pratiques de classe ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques. Enfin, il est placé dans une *posture d'élève-chercheur* (voire de *praticien-chercheur*) lorsqu'il s'agit de problématiser une question professionnelle en lien avec les pratiques de classe et les enjeux d'apprentissage.

La nature des activités

Dans une situation de formation, nous distinguons des activités de natures différentes qui induisent (implicitement ou explicitement) des postures spécifiques attendues du formateur de la part du formé, dont ce dernier peut ou non être conscient. Les différentes activités se présentent sous forme de paliers (figure 1).

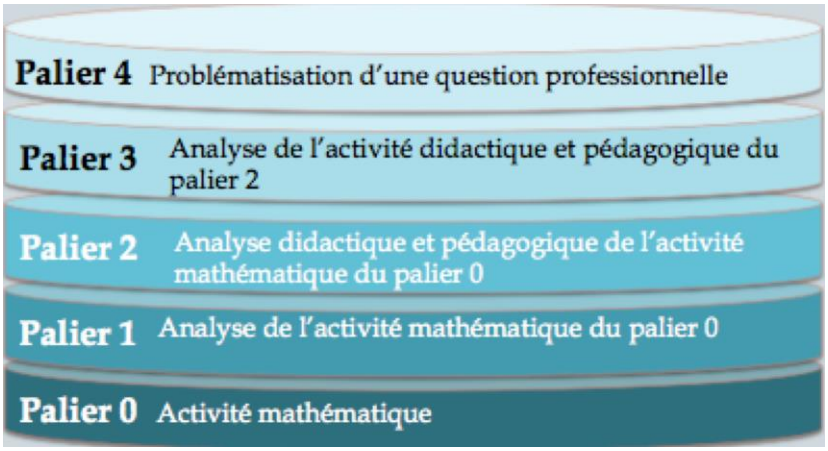


Figure 1 : Cinq paliers d'étude

Palier 0 - *Activité mathématique* : elle peut être vécue ou évoquée (réalisée mentalement), le formé étant placé en posture d'élève (par rapport aux connaissances mathématiques) ; les connaissances mathématiques convoquées sont contextualisées, elles peuvent être implicites ou explicites ;

Palier 1 - *Analyse de l'activité mathématique de palier 0* : elle fait apparaître les connaissances mathématiques décontextualisées (ce qui place le formé en posture d'élève apprenant les mathématiques), ainsi que des connaissances didactiques et/ou pédagogiques en acte (initiant le changement de posture du formé vers une posture d'élève-enseignant) ;

Palier 2 - *Analyse didactique et pédagogique de l'activité mathématique de palier 0* (analyse des conditions de mise en œuvre – effective ou seulement anticipée – de cette activité mathématique) : elle nécessite une posture d'élève-enseignant de la part du formé ; les connaissances didactiques et/ou pédagogiques sont explicitées en contexte ;

Palier 3 - *Analyse de l'activité pédagogique et/ou didactique du palier 2* : elle conduit à la décontextualisation des connaissances didactiques et/ou pédagogiques ; elle peut se présenter sous la forme d'un questionnement plus large portant sur les pratiques de classe (situations d'apprentissage spécifiques, gestes professionnels, …), ou sur les enjeux d'apprentissages mathématiques d'un ou de plusieurs contenus (programmes, progressions, …) ou bien encore sous la forme d'une mise en évidence d'outils d'analyse didactique (phases d'une situation didactique, types de tâches, …) ; le formé a une posture d'enseignant ;

Palier 4 - *Problématisation de questions professionnelles* en lien avec les pratiques de classe, les enjeux d'apprentissage et/ou les outils d'analyse didactique : elle permet une posture d'élève-chercheur notamment lorsqu'il s'agit d'élaborer une méthodologie d'analyse de cette question et d'en inférer des résultats.

Le tableau suivant récapitule les caractéristiques des cinq paliers d'étude que nous distinguons même s'ils sont imbriqués et « se chevauchent » parfois dans la mise en œuvre de situations de formation.

<table>
<tr><th rowspan="2">Palier</th><th rowspan="2">Nature de l'activité</th><th rowspan="2">Posture du formé</th><th colspan="3">Connaissances</th></tr>
<tr><th>mathématiques</th><th>didactiques</th><th>Pédagogiques</th></tr>
<tr><td>0</td><td>Activité mathématique (action réalisée effectivement ou mentalement)</td><td>Élève</td><td>En contexte</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>1</td><td>Analyse de l'activité mathématique du palier 0.</td><td>Élève
Elève-enseignant</td><td rowspan="4">Décontextuali-sées</td><td>Implicites en contexte</td><td>Implicites en contexte</td></tr>
<tr><td>2</td><td>Analyse didactique et pédagogique de l'activité du palier 0.</td><td>Elève-enseignant</td><td>Explicitées en contexte</td><td>Explicitées en contexte</td></tr>
<tr><td>3</td><td>Analyse de l'activité didactique et pédagogique du palier 2.</td><td>Enseignant</td><td rowspan="2">Décontex-tualisées</td><td rowspan="2">Décontex-tualisées</td></tr>
<tr><td>4</td><td>Problématisation d'une question pro-fessionnelle en lien avec le palier 3.</td><td>Élève-chercheur</td></tr>
</table>

Chaque palier correspond à une mise à distance, mettant en jeu des connaissances mathématiques et/ou didactiques et/ou pédagogiques, à partir de l'étude du palier précédent. Le passage d'un palier *n* à un palier *n* + 1 s'accompagne :

- soit d'un changement de posture du formé ;
- soit d'une mise à distance dans une posture donnée en lien avec le degré de décontextualisation (implicites en contexte, explicitées en contexte, décontextualisées) des connaissances de différents types.

Nous faisons l'hypothèse qu'il n'est pas possible d'exploiter une situation à un palier *n* + 1 si les formés ne possèdent pas les acquis correspondants du palier *n*.

Le cadre d'analyse des situations de formation ainsi élaboré met en lumière les différentes potentialités de ces situations et rend compte de la manière dont s'articulent les différents types de savoirs « utiles pour enseigner » intervenant dans celles-ci, en explicitant la « stratégie » du formateur pour pouvoir adapter ces situations à un public choisi dans le contexte de contraintes de formation imposées en fonction des objectifs visés. En effet, il clarifie les enjeux possibles des différentes phases de la mise en œuvre, enjeux liés à des objectifs de formation (appropriation de savoirs mathématiques, didactiques ou pédagogiques).

Par ailleurs, ce cadre d'analyse est un outil pour décrire des alternatives quant à l'usage par le formateur de ces situations, mais aussi pour décrire certains passages obligés. En effet, la mise en parallèle de différents scénarios de formation nous conduit à plusieurs constats. Tout d'abord, une même mise en activité peut donner lieu à différentes exploitations dont nous pouvons rendre compte en termes de parcours selon différents paliers d'étude. Ensuite, le premier palier d'étude (celui correspondant à la mise en activité) diffère d'un scénario à l'autre. Enfin, certaines régularités observées dans ces scénarios suggèrent non pas une organisation chronologique des différents paliers, mais une hiérarchisation : l'entrée dans une situation donnée peut se situer aux paliers 0, 1, 2, 3 ou 4 mais des passages par les paliers inférieurs se révèlent souvent nécessaires. En outre, en considérant la succession de plusieurs situations de formation, ce cadre aide à mettre en évidence l'existence de différents parcours de formation envisageables, révélateurs de la stratégie du formateur à un niveau plus global.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BROUSSEAU, G. (2010). *Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* (édition révisée de 1996). http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2010/09/Glossaire_V5.pdf

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2),* 5-31.

HOUDEMENT, C. (1995). *Projets de formation des maîtres du premier degré en mathématiques : programmation et stratégies.* Thèse de l'Université Paris 7.

HOUDEMENT, C. (2013). *Au milieu du gué : entre formation des enseignants et recherche en didactique des mathématiques.* Note d'habilitation à diriger des recherches. Université Paris Diderot – Université de Rouen.

KUZNIAK, A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs des maîtres du premier.* Thèse de l'Université Paris 7.

MARGOLINAS, C. (2012). Des savoirs à la maternelle, oui mais lesquels ? *Actes du XXXIX Colloque COPIRELEM,* Quimper.

SAYAC, N. (2010). Appréhender la formation des professeurs des écoles en France à travers la pratique des formateurs en mathématiques. *Actes du congrès de l'AREF,* Université de Genève.

QUESTIONNER LE TEMPS DANS L'ANALYSE D'UN TYPE DE DISPOSITIF D'AIDE

Teresa **ASSUDE**
Karine **MILLON-FAURE**
Aix-Marseille Université, équipe ADEF
teresa.dos-reis-assude@univ-amu.fr
karine.millon-faure@univ-amu.fr

PREAMBULE

L'exposé que nous avons fait au séminaire national de didactique des mathématiques correspond à un article qui a été publié en 2016 dans la revue « *Recherches en didactique des mathématiques* », volume 36.2, pp. 197-230. Les auteurs de cet article sont indiqués par la suite.
Pour qu'il y ait une trace dans les actes du séminaire national, nous avons décidé de recopier ici le titre, les résumés, l'introduction, la conclusion et la bibliographie de cet article pour que les personnes intéressées par ce sujet puissent ensuite se référer à l'article en question. Ainsi, le texte suivant correspond à des citations de cet article (pp. 197-200, pp. 223-226).

DU RAPPORT ENTRE TEMPS DIDACTIQUE ET TEMPS PRAXÉOLOGIQUE DANS DES DISPOSITIFS D'AIDE ASSOCIÉS À UNE CLASSE

Teresa ASSUDE, Karine MILLON-FAURE, Jeanne KOUDOGBO, Marie-Pier MORIN, Jeannette TAMBONE, Laurent THEIS

Résumé
La plupart des dispositifs d'aide aux élèves ayant des difficultés dans la résolution de problèmes mathématiques ont lieu après le travail en classe. Des travaux ont montré que le

temps didactique n'avance pas dans ce type de dispositif. Dans notre recherche, nous nous intéressons aux dispositifs d'aide qui ont lieu avant la résolution d'un problème mathématique en classe, ce qui pose autrement la question du temps. À partir d'un certain nombre d'indicateurs, les analyses chronogénétiques de quatre dispositifs de ce type montrent que le temps didactique n'y avance pas non plus mais qu'une autre temporalité est bien présente. Nous proposons de nommer temps praxéologique, le temps d'évolution d'au moins une des composantes d'une praxéologie. Nous montrons ensuite des exemples d'avancement du temps praxéologique, et leur fonctionnalité pour synchroniser les élèves participant à ces dispositifs avec le temps didactique de la classe.

Mots-Clés : temps didactique, temps praxéologique, dispositif d'aide, mathématiques, résolution de problèmes

INTRODUCTION

Le temps dans l'enseignement et en éducation a fait l'objet de nombreuses études ayant donné lieu à plusieurs synthèses publiées soit en anglais (Smyth 1985), soit en français (Delhaxhe 1997, Chopin 2010). Ces synthèses montrent l'évolution des études temporelles en éducation. D'abord, les travaux se sont focalisés sur les relations entre le temps et l'efficacité de l'enseignement, notamment sur l'impact de la quantité de temps d'instruction sur les réussites des élèves. Plus tard, la focale a été celle du temps de l'apprentissage de l'élève. Certains travaux se sont intéressés au « temps d'engagement » de l'élève et aussi au « temps d'apprentissage académique » de l'élève en lien avec une matière. Smyth (1985) présente un modèle d'analyse du temps dans l'enseignement basé sur cinq niveaux d'analyse : le premier niveau est celui de la quantité officielle de l'instruction ; le deuxième celui de la quantité d'instruction par élève ; le troisième est le temps passé sur le contenu ; le quatrième est celui de l'engagement de l'élève, et le cinquième est celui du temps d'apprentissage académique de l'élève lié à une matière donnée. Les deux derniers niveaux ont été l'objet d'études sous l'influence des travaux du psychologue Carroll dans les années soixante. Ce chercheur s'intéresse au facteur temps relatif à la réussite dans l'apprentissage des élèves et définit le « degré d'apprentissage » comme une « fonction du rapport de la quantité de temps que l'apprenant consacre réellement à la tâche sur la quantité totale dont il a besoin. » (Carroll 1963, p.730, in Chopin 2011, p.21). Il s'agit notamment de donner du temps pour que les élèves apprennent à leur rythme. Plus tard, les travaux commencent à s'intéresser à la qualité du temps d'enseignement et au constat prégnant du manque de temps fait par les professeurs. Comme l'indique Chopin (2010), une évolution s'est opérée dans les thématiques temporelles relatives au système éducatif : du temps de l'instruction, on passe au temps d'apprentissage et ensuite on se focalise sur le temps de l'enseignement.

Selon Chopin (2010, 2011), la plupart de ces travaux se placent dans une approche « provisionnelle » du temps, à savoir celle où le temps est un donné, une ressource qu'il faut maîtriser et contrôler : « une ressource que l'on pourrait « dépenser » ou au contraire « économiser » dans le but de tirer le meilleur profit de l'investissement réalisé » (Chopin 2011, p.27). Une autre approche dite « processuelle » est apparue depuis quelque temps, approche consistant à supposer que le temps est un construit, généré dans et par les situations d'enseignement : « La diversité des pratiques de la temporalité ne tient pas à des mystérieuses

variations culturelles, mais renvoie aux contraintes spécifiques qui confèrent à chaque situation sa singularité temporelle. » (Bensa 2006, p.15).
La plupart des travaux en didactique des mathématiques sur le temps didactique se placent dans une telle perspective : le temps didactique, le temps du savoir et de la construction du savoir est un temps propre au système didactique où il apparaît. Il est consubstantiel à son existence comme système. (Chevallard & Mercier 1987, p.3)
Nous nous plaçons dans cette approche où le temps est à la fois un produit des systèmes didactiques et un cadre pour l'action des acteurs et nous étudions la question suivante : quelles sont les différentes temporalités existantes dans un système didactique principal SDP (une classe) et dans un système didactique auxiliaire SDA associé (un dispositif d'aide) et leurs relations ? Notre étude temporelle est spécifiée à un cas particulier, celui des relations entre les temporalités dans une classe et dans un dispositif d'aide qui a la particularité de se situer en amont du travail en classe contrairement à la plupart des dispositifs d'aide. Pour étudier cette question, nous présentons d'abord quelques éléments théoriques et méthodologiques qui nous permettent d'analyser les relations temporelles entre plusieurs systèmes didactiques, systèmes que nous préciserons par la suite.

CONCLUSION

Étant donné que les SDA observés ont lieu avant les SDP (sauf le SDA4 post), ils sont différents des dispositifs d'aide qui existent habituellement après le travail en classe. Certains travaux ont montré que dans ces derniers le temps didactique n'avance pas car les élèves travaillent sur des objets anciens. Est-ce que le temps didactique n'avance pas non plus dans les SDA en amont des SDP ? C'est la question que nous nous sommes posée. Pour répondre à cette question, nous avons pris une définition du temps didactique qui est celle de Chevallard & Mercier (1987) : le temps didactique est le temps du savoir qui est un produit du processus de transposition didactique externe à la classe, mais qui est aussi un produit de la classe en tant que système didactique comme émergeant de la dialectique entre temps d'enseignement et les temps d'élèves de la classe. Pour identifier l'avancée du temps didactique, nous avons pris en compte les indicateurs ancien/nouveau et objets sensibles/objets non sensibles, ces indicateurs étant associés à deux balises : le processus de dévolution et d'institutionnalisation. Dans ce sens, le temps didactique n'avance pas dans les SDA observés. Or cette réponse pose de nouvelles questions car il y a bien un temps qui avance dans le cadre de ces SDA.
Aussi avons-nous défini le temps praxéologique comme étant la temporalité qui rend compte de l'évolution de chacune des composantes d'une praxéologie. L'avancée du temps praxéologique correspond à l'évolution d'au moins une des composantes de la praxéologie, et ceci peut être identifié à partir de la dialectique ancien/nouveau et des objets sensibles/non sensibles. Dans les quatre SDA observés, le temps praxéologique avance au moins dans une de ses composantes qui est le type de tâches : les élèves du SDA savent « plus avant » de quoi il va s'agir. Cette fonction chronogénétique est une fonction essentielle de ce type de dispositif, comme nous l'avons montré par ailleurs (Theis et *al.* 2014, Assude et *al.* 2016). Notons toutefois que des différences existent entre les quatre dispositifs puisque pour certains le temps praxéologique avance aussi en ce qui concerne les techniques.
L'une des conditions pour qu'un SDA puisse avoir une fonction d'aide sans compromettre le déroulement de l'activité de résolution du problème mathématique en classe est que le temps didactique n'avance pas ou qu'il avance juste ce qu'il faut pour que les élèves y participant

puissent garder leur intérêt. Dans nos exemples, le temps didactique n'a pas progressé mais l'avancée du temps praxéologique durant le SDA a facilité l'engagement des élèves dans le milieu de la situation par une reprise des objets anciens, par un travail sur des objets non sensibles et aussi par un travail sur l'une des difficultés d'un des types de tâches. Elle a également conduit ces élèves à mettre en œuvre des techniques comparables à celles de leurs camarades, permettant ainsi, tout au moins pendant un temps, un rythme équilibré dans la classe, ce qui peut s'interpréter comme une synchronisation des élèves du SDA au temps didactique du SDP.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ASSUDE, T. (2005). Time management in the work economy of a class, a case study: integration of CABRI in primary school mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics, 59*, 183-203.

ASSUDE, T., MERCIER, A. (2007). L'action conjointe professeur-élèves dans un système didactique orienté vers les mathématiques. In G. Sensevy, A. Mercier (Ed.), *Agir ensemble. L'action conjointe du professeur et des élèves* (pp.153-185). Rennes : Presses Universitaires de Rennes.

ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURE, K., MORIN, M-P., TAMBONE, J., THEIS, L. (2016). Mise à l'épreuve d'un dispositif d'aide aux difficultés d'un système didactique. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 16*(1), 64-76.

BENSA, A. (2006). *La fin de l'exotisme : essais d'anthropologie critique*. Toulouse : Anacharsis.

BROUSSEAU, G., CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2.3), 167-210.

CARROLL, J.B. (1963). A Model of School Learning. *Teachers College Record, 64*(8), 723-733.

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignores par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28*(2), 135-182.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble : La Pensée Sauvage (réédition 1991).

CHEVALLARD, Y., MERCIER, A. (1987). *Sur la formation historique du temps didactique*. Marseille : IREM.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2010). *Le sujet apprenant entre espace et dispositif. Commentaires depuis la théorie anthropologique du didactique.* Texte d'une intervention le 9 septembre 2010 aux journées du LISEC tenues à Gérardmer. En ligne : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Commentaires_depuis_la_TAD_YC_.pdf

CHOPIN, M-P. (2010). Les usages du temps dans les recherches sur l'enseignement. Note de synthèse. *Revue Française de Pédagogie, 170*, 87-110.

CHOPIN, M-P. (2011). *Le temps de l'enseignement. L'avancée du savoir et la gestion des hétérogénéités dans la classe*. Rennes : Presses universitaires de Rennes.

DELHAXHE, A. (1997). Le temps comme unité d'analyse dans la recherche sur l'enseignement. *Revue Française de Pédagogie, 118*, 107-125.

GIROUX, J. (2014). Les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques : historique et perspectives théoriques. In C. Mary, L. DeBlois, H. Squalli, L. Theis (Ed.), *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques* (pp.11-44). Québec : Presses Universitaires du Québec.

LARGUIER, M. (2012). La connaissance des différents types de nombres : un problème de la profession de seconde. *Recherches en didactique des mathématiques, 32*(1), 101-144.

LEUTENEGGER, F. (2000). Construction d'une clinique pour le didactique. Une étude des phénomènes temporels de l'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 20*, 209-250.

MARY, L., DEBLOIS, L., SQUALLI, H., THEIS, L. (Ed.) (2014). *Recherches sur les difficultés d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques*. Québec : Presses Universitaires du Québec.

MATHERON, Y. (2002). Une modélisation pour l'étude didactique de la mémoire. *Recherches en didactique des mathématiques, 21*(3), 207-246.

MERCIER, A., (1995). Approche biographique de l'élève et des contraintes temporelles de l'enseignement : un cas en calcul algébrique. *Recherches en didactique des mathématiques, 15*(1), 97-142.

MERCIER, A. (1999). *Sur l'espace-temps didactique. Etude du didactique en sciences de l'éducation. Note d'habilitation à diriger des recherches*. Université de Provence, Aix-en-Provence.

MERCIER, A. (2002). La transposition didactique, une théorie de l'espace didactique. Note de synthèse. Vers une didactique comparée. *Revue Française de Pédagogie*, *141*, 135-171.

MERCIER, A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Éducation et didactique, 2*(1), 7-40.

MILLON-FAURE, K. (2011). *Les répercussions des difficultés langagières des élèves sur l'activité mathématique en classe : le cas des élèves migrants* (Thèse). Université d'Aix-Marseille 1, Marseille.
PERRIN, M.-J. (1994). Théorie des situations didactiques : naissance, développement, perspectives. In M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot (Ed.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* (pp.97-147). Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.
QUILIO, S. (2008). *Contribution à la pragmatique didactique. Une étude de cas dans l'enseignement des nombres rationnels et décimaux à l'école primaire* (Thèse). Université Aix-Marseille 1, Marseille.
SARRAZY, B. (2002). Les hétérogénéités dans l'enseignement des mathématiques. *Educational Studies in Mathematics*, *49*(1), 89-117.
SENSEVY, G. (1996). Le temps didactique et la durée de l'élève. Étude d'un cas au cours moyen : le journal des fractions. *Recherches en didactique des mathématiques*, *16*(1), 7-46.
SENSEVY, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : De Boeck.
SMYTH, W.J. (1985). Time and School Learning. In T. Husèn, *International Encyclopedia of Education* (pp. 5265-5272). Oxford: Pergamon Press.
TAMBONE, J. (2014). Enseigner dans un dispositif auxiliaire : le cas du regroupement d'adaptation et de sa relation avec la classe d'origine de l'élève. *Les Sciences de l'Education – Pour l'ère nouvelle*, *47*, 51-71.
THEIS, L., ASSUDE, T., TAMBONE, J., MORIN, M-P., KOUDOGBO, J., MARCHAND, P. (2014). Quelles fonctions potentielles d'un dispositif d'aide pour soutenir la résolution d'une situation-problème mathématique chez des élèves en difficulté du primaire? *Education & Francophonie*, *XLII-2*, 158-172.
THEIS, L., TAMBONE, J., MORIN, M-P., ASSUDE, T., KOUDOGBO, J., MILLON-FAURE, K. (2016). Quelles fonctions de deux systèmes didactiques auxiliaires destinés à des élèves en difficulté lors de la résolution d'une situation-problème mathématique ? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 21,* 9-38.

ENSEIGNEMENT DE LA GEOMETRIE A DES ELEVES DYSPRAXIQUES : ETUDE DU PROCESSUS D'ACCES A LA GEOMETRIE PAR LA CONSTRUCTION INSTRUMENTEE

Édith **PETITFOUR**
LDAR, Université de Rouen
edith.petitfour@univ-rouen.fr

Résumé
Notre recherche (Petitfour, 2015) vise à proposer une approche pour enseigner la géométrie plane élémentaire aux élèves dyspraxiques de cours moyen et de sixième, autrement qu'en leur faisant exécuter des constructions instrumentées, car leurs difficultés manipulatoires et organisationnelles empêchent tout apprentissage géométrique. L'approche, basée sur la sémiotique (Arzarello, 2006 ; Radford, 2002), s'inspire de deux courants des sciences cognitives : l'approche instrumentale en ergonomie cognitive (Rabardel, 1995) et le développement du geste en neuropsychologie (Mazeau & Pouhet, 2014). À partir de ces outils théoriques, mais aussi à partir de nos observations en classe d'élèves dyspraxiques de CM2 et de 6e lors de séances de géométrie, nous avons élaboré un cadre d'analyse du processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée. Il nous permet d'identifier et de catégoriser les actions requises dans des tâches de construction géométrique pour mieux comprendre leur potentiel didactique et dépasser les difficultés des élèves. Ce cadre a servi à la conception et à l'analyse d'une expérimentation menée hors classe avec deux élèves de 6e, dont une dyspraxique. Dans cet article, nous présenterons un aperçu de notre approche et nos premiers résultats expérimentaux.

Mots clés
Action instrumentée – Conceptualisation – Dyspraxie – Enseignement – Géométrie élémentaire – Travail en dyade.

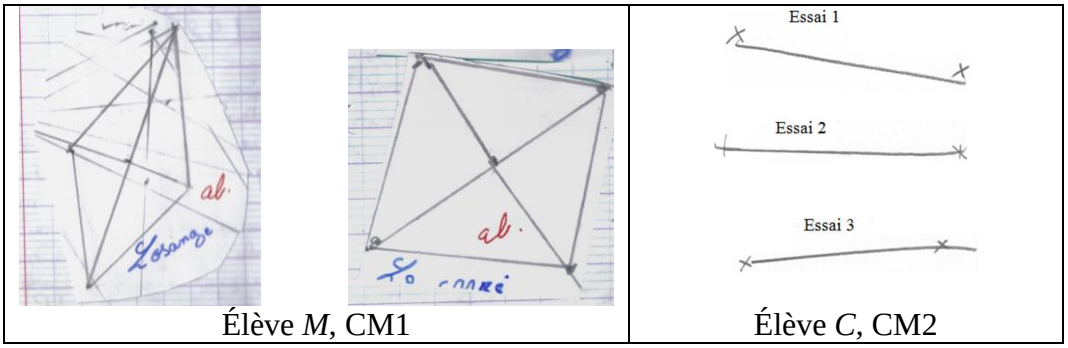
CONTEXTE DE LA RECHERCHE ET PROBLEMATIQUE

L'enseignement de la géométrie plane élémentaire à l'école primaire et en début de collège s'appuie sur des expériences dans le monde sensible (manipulation de formes, pliage, travail expérimental avec calque) et sur des constructions instrumentées dans l'environnement papier-crayon (avec règle, équerre, compas, rapporteur) ou avec des outils d'un logiciel de géométrie dynamique. Ainsi, dans les programmes scolaires de 2008, il est spécifié que « l'objectif principal de l'enseignement de la géométrie du CE2 au CM2 est de permettre aux élèves de passer progressivement d'une reconnaissance perceptive des objets à une étude fondée sur le recours aux instruments de tracé et de mesure » (BO n°3 du 19 juin 2008). Ce travail se poursuit au collège où il est précisé que « les constructions géométriques, avec leurs instruments traditionnels – règle, équerre, compas, rapporteur – aussi bien qu'avec un logiciel de géométrie, constituent une étape essentielle à la compréhension des situations

géométriques » (BO Spécial n°6 du 28 Août 2008). Les nouveaux programmes du cycle 3 (BO spécial n°10 du 19 novembre 2015) continuent à privilégier des situations portant sur des objets géométriques avec des types de tâches qui nécessitent l'utilisation d'instruments (reconnaître, nommer, comparer, vérifier, décrire, reproduire, représenter, construire). L'objectif annoncé est de faire émerger des concepts géométriques et de les enrichir. Par ailleurs, l'approche de la géométrie développée par Mangiante-Orsola et Perrin-Glorian (2016) conforte l'idée de l'importance de la pratique de la construction instrumentée dans l'enseignement pour passer d'une géométrie physique (« géométrie des figures matérielles ») à la géométrie d'Euclide. Les activités géométriques dont le but est la réalisation d'objets graphiques représentant des objets géométriques constituent donc un moyen d'amener les élèves à l'acquisition de connaissances géométriques. Elles leur permettent d'exercer leur raisonnement, à travers la mobilisation des connaissances requises.

Cependant, cela ne fonctionne pas ainsi pour les élèves dyspraxiques à cause de leur handicap. Tout d'abord, leurs troubles du développement gestuel les empêchent de réussir l'exécution des actions qu'ils souhaitent réaliser avec des instruments : ils sont maladroits, réalisent des productions peu soignées, très imprécises, qui peuvent être refaites de nombreuses fois sans jamais donner un résultat visuellement satisfaisant. Par exemple, nous pouvons voir sur la figure 1 de telles productions réalisées par des élèves dyspraxiques de Cours Moyen :

- à gauche, un losange et un carré construits avec une équerre et une règle graduée à partir du tracé des diagonales : même si les techniques de construction observées sont correctes, les tracés ne conviennent pas ;
- à droite, trois essais successifs pour relier deux points à la règle : au premier essai la règle était un peu trop décalée par rapport aux deux croix, au deuxième essai la règle n'a pas été bien maintenue, au troisième essai les points de départ et d'arrêt du tracé n'ont pas été bien contrôlés.



Élève *M*, CM1 Élève *C*, CM2

Figure 1 : Constructions instrumentées réalisées par des élèves dyspraxiques

Certains élèves dyspraxiques peuvent également peiner dans l'écriture manuscrite et avoir une très mauvaise calligraphie. L'écriture semble négligée, peu soignée, mais surtout, elle peut être illisible pour autrui tout comme pour l'élève lui-même. Toute communication par l'écriture est donc compromise, ainsi que l'on peut le constater sur la figure 2.

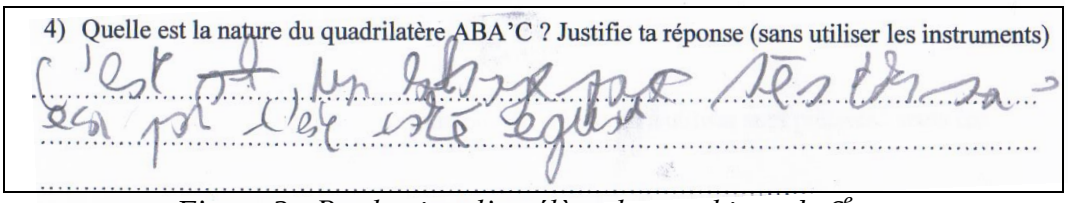


Figure 2 : Production d'un élève dysgraphique de 6e

Enfin, certains élèves dyspraxiques peuvent aussi avoir des troubles des fonctions visuo-spatiales qui perturbent leur analyse visuelle des objets et qui mènent donc à une

représentation spatiale incomplète ou défectueuse. De plus, l'interprétation perceptive des propriétés métriques et la perception de l'orientation des lignes (en particulier les obliques) posent problème : la reconnaissance visuelle de propriétés sur des figures géométriques est donc compromise.

Le décalage entre ce que les élèves dyspraxiques cherchent à réaliser avec les instruments et ce qu'ils obtiennent graphiquement les contraint à focaliser leur attention sur les aspects manipulatoires et organisationnels des constructions au détriment des aspects conceptuels. La construction instrumentée ne peut donc pas produire les effets attendus pour ces élèves, et cela en dépit d'un apprentissage normal, malgré la répétition et l'entraînement. Mazeau et Le Lostec (2010), spécialistes en neuropsychologie, soulignent qu'à l'école l'enfant dyspraxique est très souvent mis en difficulté par la méthode d'enseignement, le matériel pédagogique utilisé, et non par les connaissances ou le concept à acquérir. Il est donc vain de persévérer dans les techniques d'enseignement habituelles :

> Être dyspraxique, c'est donc être dans l'incapacité (totale ou partielle) d'inscrire cérébralement certains « programmes gestuels », en dépit d'une exposition et/ou d'un apprentissage normal des gestes considérés. Il en découle donc, lorsque le diagnostic de dyspraxie est porté, qu'il est inutile de continuer à proposer sans fin les mêmes apprentissages à l'enfant par les techniques habituelles, puisque justement, sa pathologie consiste en ce fait que, malgré la répétition et l'entraînement, il ne peut engrammer la ou les praxie(s) correspondantes. (Mazeau, 2008, p. 95)

En conséquence de l'approche de la géométrie par la construction instrumentée, préconisée dans les programmes scolaires, et des échecs importants rencontrés par les élèves dyspraxiques lorsqu'ils doivent manipuler des instruments, nous assistons souvent à un renoncement à cet enseignement. Par exemple, des dispenses peuvent être demandées dans des Projets Personnalisés de Scolarisation des élèves ou encore des enseignants spécialisés peuvent privilégier les apprentissages dans le domaine numérique, parce que cela leur paraît primordial, en laissant de côté le domaine de la géométrie qui semble inaccessible.

Dans notre recherche, nous avons voulu questionner les certitudes qui fondaient ce renoncement. Une première raison est qu'il nous semblait important de ne pas priver les élèves dyspraxiques des apports que pourraient avoir pour eux des apprentissages en géométrie. Dans une finalité pratique, la géométrie permet en effet de modéliser et de traiter des problèmes de l'espace physique, elle contribue aussi à la structuration de l'espace de l'individu et l'aide ainsi à agir dans sa vie quotidienne. Mais surtout, elle permet l'apprentissage du raisonnement avec une initiation à la démonstration possible très tôt dans la scolarité : la pratique du raisonnement déductif conduit à développer l'argumentation, la logique, la rigueur, l'esprit critique et contribue ainsi à la structuration de la pensée, à la formation du citoyen. Une seconde raison de ne pas renoncer à l'enseignement de la géométrie, non des moindres, est que les élèves dyspraxiques n'ont pas de difficulté raisonnementale en lien avec leurs troubles cognitifs, ils peuvent être très performants au niveau intellectuel. Les possibilités offertes par la géométrie d'apprendre à raisonner devraient donc leur être accessibles. Or, dans des types de tâches de construction géométrique, la manipulation des instruments constitue un réel obstacle au développement du raisonnement qui est visé, parce qu'elle nécessite un savoir-faire pratique que les élèves dyspraxiques ne peuvent automatiser. Ce savoir-faire, le plus souvent acquis en situation de façon implicite que par un enseignement explicite, est indispensable à l'obtention d'une construction précise et soignée. Nous faisons cependant l'hypothèse qu'il n'apporte rien au niveau de la conceptualisation géométrique recherchée. Ainsi, nous avons cherché à conserver les apports géométriques de la pratique de la construction instrumentée, tout en renonçant à développer des habiletés manipulatoires et organisationnelles qu'elle implique. Nous avons donc tenté de dissocier les aspects cognitifs liés à la conceptualisation en géométrie, des aspects pratiques problématiques pour les élèves dyspraxiques, dans ce qui est en jeu dans la construction instrumentée.

Dans la partie suivante, nous présentons le cadre théorique élaboré dans cette perspective. Il permet d'identifier et de catégoriser les actions requises dans des tâches de construction géométrique pour mieux comprendre leur potentiel didactique et dépasser les difficultés des élèves dyspraxiques. Nous l'avons complété par des outils d'analyse du langage et des gestes, outils que nous exposons dans une troisième partie. Ce cadre a alors servi à la conception et à l'analyse d'une expérimentation menée hors classe avec deux élèves de 6e, dont une dyspraxique. Nous présentons cette expérimentation et ses résultats dans la dernière partie.

CADRE THEORIQUE

Nous avons élaboré un cadre théorique pour étudier le processus d'accès à la géométrie par la construction instrumentée en prenant appui d'une part sur deux courants des sciences cognitives, à savoir l'approche instrumentale en ergonomie cognitive (Rabardel, 1995) et le développement du geste en neuropsychologie (Mazeau & Pouhet, 2014) ; d'autre part sur des observations d'actions et d'échanges langagiers d'une quinzaine d'élèves dyspraxiques de CM2 et de 6e lors de séances de géométrie durant la période janvier 2011 - janvier 2014. Ces élèves étaient scolarisés en milieu spécialisé ou en milieu ordinaire, avec l'accompagnement d'un Auxiliaire de Vie Scolaire ou sans.

Appuis théoriques en sciences cognitives

Dans l'approche instrumentale, Rabardel (1995) propose un modèle dans lequel il considère trois types d'interactions : celles entre le sujet et l'instrument, celles entre l'instrument et l'objet sur lequel il permet d'agir, et les interactions sujet-objet médiatisées par l'instrument : ce dernier est un moyen de l'action qui permet d'effectuer des tâches déterminées, il permet à la fois de connaître l'objet et de le transformer. L'artefact, objet matériel ou symbolique avec des caractéristiques permettant d'assurer l'accomplissement de buts spécifiques, devient un instrument au cours d'un processus de genèse instrumentale consistant en l'élaboration de schèmes d'utilisation de cet artefact.
Dans notre étude, la tâche du sujet consiste à utiliser un objet technique pour produire un objet graphique représentant un objet géométrique. L'objet technique est un instrument matériel (objet concret ou outil numérique). L'objet graphique, quant à lui, a un double statut dans cette tâche de tracé : celui d'instrument sémiotique (il donne des informations sur l'objet géométrique qu'il représente) et celui d'objet produit par un instrument matériel, c'est-à-dire l'objet technique.
Dans l'approche neuropsychologique, le geste avec un outil est défini comme un ensemble de mouvements coordonnés dans le temps et dans l'espace, dans l'intention de réaliser une action finalisée (Mazeau & Le Lostec, 2010). La neuropsychologie s'intéresse aux aspects cognitifs du geste, préalables aux aspects moteurs, en considérant l'intention préalable et l'intention motrice du geste, sa planification (organisation temporelle du geste) et sa programmation (organisation motrice et spatiale du geste spécifiant tous les détails pratiques de l'exécution motrice), les régulations ainsi que la prise de décision du sujet (Mazeau & Pouhet, 2014).
Dans notre cadre d'analyse, nous exploitons ces différents aspects cognitifs préalables à la réalisation d'une action instrumentée.

Cadre d'analyse de l'action instrumentée

Le sujet réalise des *actions instrumentées* lorsque dans son environnement de travail, il utilise des objets techniques pour produire des objets graphiques représentant des objets géométriques.

Intention d'agir

Le projet de réaliser une action instrumentée est engendré par une intention d'obtenir un objet graphique représentant un objet géométrique. Cette intention correspond à la *visée sémiotique* de l'action instrumentée. Elle est centrée sur les effets de l'acte, le but final, à savoir l'objet graphique porteur de propriétés géométriques ou l'objet géométrique défini par ses éléments caractéristiques. Elle est totalement indépendante de l'environnement de travail et des objets techniques qui seront utilisés. Par exemple, le sujet peut avoir l'intention de représenter une droite passant par deux points *A* et *B* donnés.
L'intention d'obtenir une représentation graphique d'un objet géométrique engendre le projet d'utiliser des objets techniques pour produire un objet graphique porteur de propriétés géométriques. Cela correspond à la *visée technico-figurale* de l'action instrumentée. Dans son intention d'agir, le sujet élabore une manière de réaliser l'objet graphique avec des objets techniques théoriques, sans tenir compte des aspects pratiques de mise en œuvre relatifs à ses capacités corporelles et aux caractéristiques physiques des objets techniques concrets. Ainsi, les objets techniques théoriques sont mis en relation avec les objets graphiques par le projet des différentes actions élémentaires à réaliser : choisir l'instrument, le positionner et tracer. Par exemple, pour représenter la droite (*AB*) dans l'environnement papier-crayon, le sujet envisagera de prendre une règle dans l'intention d'en utiliser le bord droit pour tracer un trait droit ; il projettera de placer ce bord sur les deux centres des croix représentant les points A et B, en laissant une partie de la règle de part et d'autre des points ; il concevra enfin de tracer un trait le long du bord de la règle, en commençant avant un point et en allant au-delà de l'autre.
Dans son intention d'agir, le sujet active des connaissances géométriques. Dans l'exemple du tracé de la droite (*AB*), il doit savoir que deux points distincts suffisent à caractériser une droite. Il active également des *connaissances graphiques* : nous appelons ainsi l'ensemble des connaissances qui permettent de discerner les informations graphiques pertinentes, à prélever visuellement sur un objet graphique, et qui permettent d'en interpréter la signification géométrique. Ces connaissances sont relatives au domaine de fonctionnement et au domaine d'interprétation de l'objet graphique (Laborde & Capponi, 1994). Dans l'exemple précédent, le sujet doit savoir qu'un point est représenté par une croix à côté de laquelle est écrit son nom et qu'il se situe graphiquement à l'intersection des branches de la croix. Il doit savoir qu'une droite n'est représentée qu'en partie, par un trait droit dont la longueur n'a pas d'importance et qui peut être prolongé comme l'on veut. Il doit savoir enfin que pour représenter une droite passant par deux points, les extrémités du trait tracé doivent au moins aller de part et d'autre des deux points. Le sujet active enfin des *connaissances techniques* concernant le lien théorique entre instrument et trace graphique. Elles sont construites dans les processus de la genèse instrumentale du sujet, au cours de laquelle instruments matériels et sémiotiques entrent en interaction. Ces connaissances sont celles des fonctions des instruments relatives au tracé géométrique et celles de leurs schèmes d'action instrumentée menant à la production de la trace graphique souhaitée. Dans l'exemple du tracé avec la règle, la fonction sollicitée pour cet instrument est celle de permettre le tracé de traits droits. Les schèmes d'action instrumentée consistent à fixer la règle sur le lieu du tracé souhaité et à tracer le long de la règle avec le crayon.

Intention motrice

L'intention d'agir engendre une intention motrice au sein de laquelle l'exécution corporelle de l'action instrumentée avec des objets techniques concrets est planifiée et programmée.
La *visée manipulatoire* de l'action instrumentée se définit par l'intention motrice de manipuler l'objet technique avec dextérité pour produire l'objet graphique. Elle correspond

aux aspects corporels en jeu pour la préhension et le positionnement de l'objet technique, ainsi que pour le tracé (position des mains, vitesse de tracé, lieu des appuis, etc.). Elle dépend à la fois des capacités corporelles du sujet et des caractéristiques matérielles de l'objet technique concret. Par exemple pour le tracé de la droite (*AB*), le sujet doit d'abord atteindre et saisir une règle (allonger sa main, préfigurer la prise nécessaire pour la saisir de façon la plus opportune). Il doit ensuite effectuer des mouvements pour positionner la règle selon différents schèmes d'usage possibles : ajustements successifs en glissant la règle tenue par les deux mains ou alors placement de la mine du crayon sur un point, avec la main dominante, puis placement de la règle contre la mine et pivotement jusqu'à l'autre point, avec l'autre main. Il doit enfin maintenir la règle, avec la main non dominante, doigts écartés sur la partie centrale de la règle et en ne dépassant pas le bord, pendant que la main dominante trace le long de la règle. La vitesse de tracé doit être contrôlée pour pouvoir arrêter à temps (le trait ne doit pas aller au-delà de la règle). La posture du corps doit permettre de voir le trait durant sa réalisation.

Une partie de la programmation du geste découle de l'action motrice et est relative aux relations spatiales entre objets techniques et objets graphiques. Ainsi, la perspective d'une réalisation concrète de l'action instrumentée conduit le sujet à réaliser des choix dans une *visée technico-figurale* : l'un concerne l'anticipation de la zone de tracé sur le support, l'autre concerne les ajustements de l'objet technique par rapport aux objets graphiques présents. Deux finalités possibles de l'action instrumentée peuvent alors orienter les choix du sujet :

- dans une *finalité géométrique*, il s'agit de produire une figure juste, c'est-à-dire visuellement conforme à la théorie : les propriétés géométriques sont produites par des déductions théoriques et l'utilisation d'instruments appropriés. Les imprécisions du tracé générées par la matérialité des objets techniques sont gérées par le codage, mais également régulées par l'activation de connaissances géométriques issues de déductions.
- dans une *finalité graphique*, il s'agit de produire un dessin précis : les propriétés géométriques peuvent être produites avec des instruments placés au jugé dès lors qu'elles sont vérifiées *a posteriori* par l'usage d'instruments appropriés. Une très grande précision est requise pour obtenir, sur l'objet graphique, les propriétés issues de déduction théorique sans convoquer le raisonnement. Dans cette même idée, Arsac (1989) évoque un dessin parfait, infiniment précis.

Dans une *visée organisationnelle* de l'action instrumentée, le sujet conçoit l'organisation de ses actions dans son environnement pour produire l'objet graphique dans de bonnes conditions. Cette organisation se situe à deux niveaux. Le premier concerne l'organisation des actions élémentaires en lien avec l'action instrumentée principale : il s'agit d'organiser temporellement ses gestes – simultanés ou successifs – et de hiérarchiser des séquences de mouvements. Le second concerne la conception de l'organisation des actions périphériques à l'action principale, comme se procurer les objets techniques, les apprêter, apprêter la surface de travail. Par exemple pour le tracé à la règle, concernant le premier niveau, le sujet doit d'abord prendre sa règle, ensuite la positionner et enfin la maintenir tout en traçant. Concernant le second niveau, il devra éventuellement sortir la règle de sa pochette de rangement et aiguiser son crayon, la feuille de tracé devra être posée sur une surface plane et l'espace autour devra être dégagé pour que la règle puisse être aussi posée à plat sur la feuille.

Dans son intention motrice, le sujet met en jeu différentes connaissances et compétences. D'abord, des connaissances pratiques sur les caractéristiques matérielles des objets techniques, des objets graphiques et sur les capacités corporelles du sujet sont en jeu, à travers les compétences pratiques du sujet qui sont sollicitées : il doit être capable de mettre en œuvre ses connaissances pratiques pour manipuler de manière efficiente les objets techniques compte tenu de leur matérialité. Ensuite, des compétences visuo-spatiales sont sollicitées au

niveau de la représentation spatiale : le sujet doit être capable d'anticiper les relations spatiales entre son corps, les objets techniques et les objets graphiques, il doit être également capable de prélever des informations spatiales par une analyse visuelle. Des compétences praxiques sont également requises. Elles se caractérisent par la capacité du sujet à coordonner ses mouvements et ajustements posturaux concomitants réalisés avec l'objet technique dans l'espace (Mazeau, 2008). Enfin, des compétences organisationnelles sont en jeu : le sujet doit être capable de planifier ses actions en en concevant l'organisation selon un plan déterminé.

Exécution de l'action instrumentée

Suite à des activations des différentes visées de l'action instrumentée le sujet peut décider de passer à l'acte mentalement ou alors de façon concrète en exécutant les actions périphériques et l'action principale. Dans l'environnement papier-crayon, son action motrice est observable sur l'espace de la feuille de papier, posée sur la table, et ses conséquences graphiques sont perceptibles sur ce même espace, tandis que dans l'environnement numérique, l'espace d'action motrice (la table sur laquelle se trouve l'ordinateur) et l'espace perceptif (l'écran) sont disjoints.

Les tableaux suivants synthétisent le cadre théorique que nous venons de présenter dans l'environnement papier-crayon (Figure 3) et dans l'environnement numérique (Figure 4). Nous y représentons l'action instrumentée par une décomposition en quatre composantes (quatre colonnes), chacune répondant à une visée spécifique de l'action : organisationnelle, manipulatoire, technico-figurale et sémiotique.

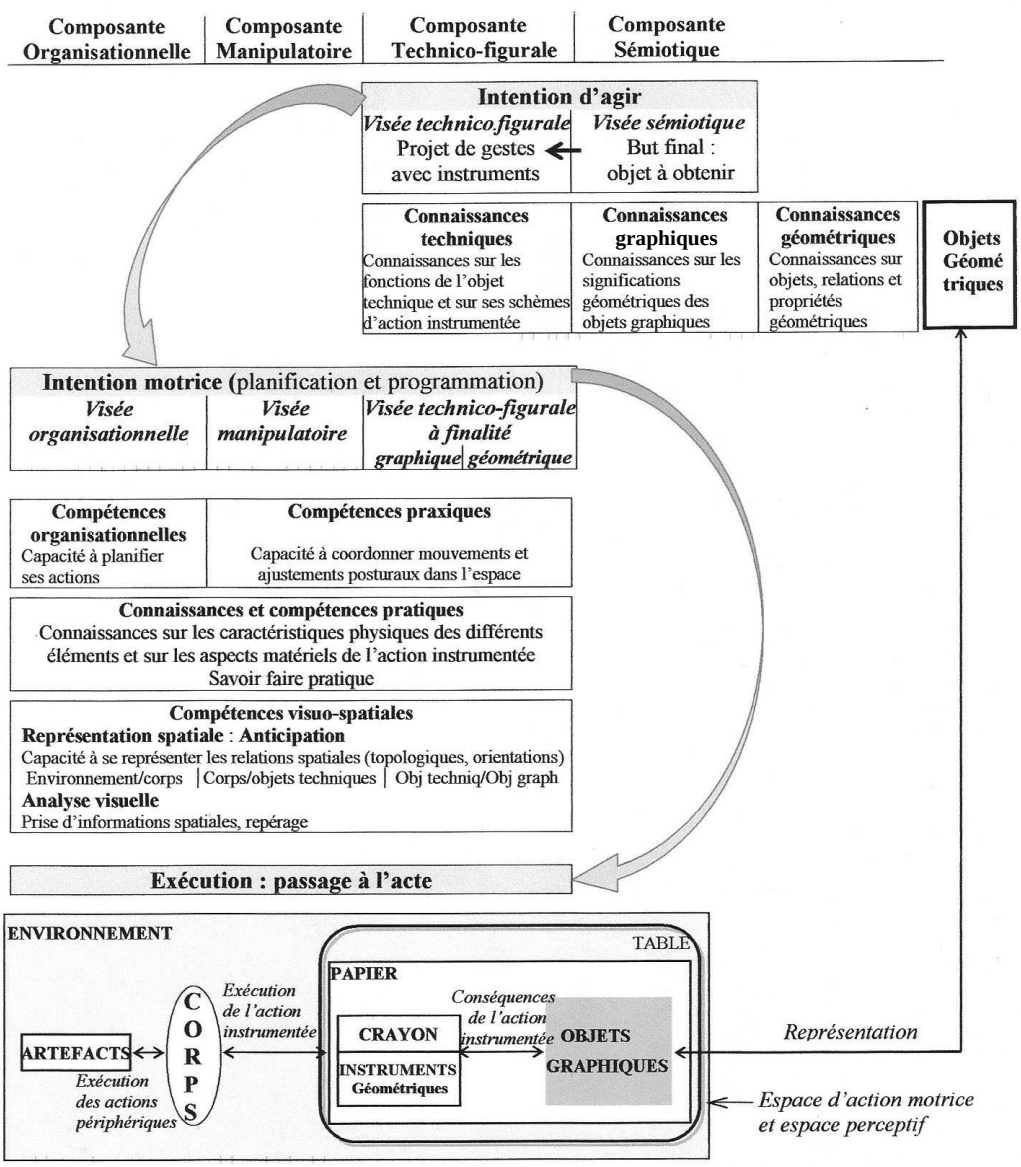


Figure 3 : Action instrumentée dans l'environnement papier-crayon

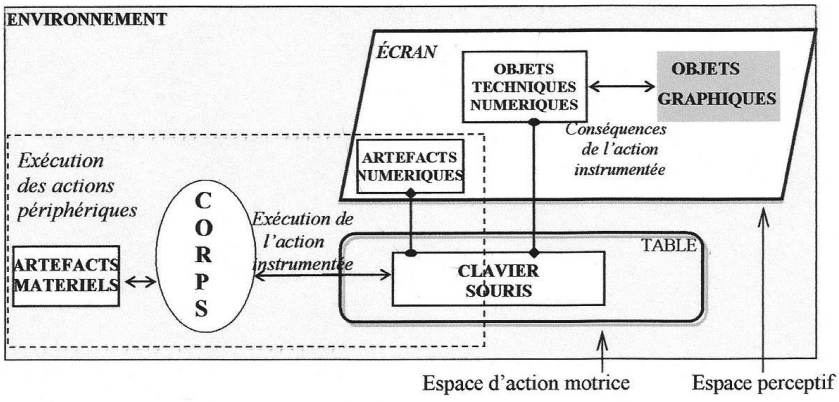


Figure 4 : Action instrumentée dans l'environnement numérique

APPLICATION DU CADRE THEORIQUE

Retour sur la problématique

Dans l'action instrumentée, les difficultés de l'élève dyspraxique se situent au niveau de l'intention motrice : il est défaillant au niveau des compétences organisationnelles, praxiques, pratiques et visuo-spatiales. Cela se manifeste dans l'exécution de ses actions et leur résultat et concerne donc les composantes organisationnelle, manipulatoire et la partie perceptive de la composante technico-figurale (dans l'intention motrice) où une organisation temporelle, motrice et spatiale doit avoir lieu. Malgré un entraînement, même intensif, l'élève dyspraxique n'est pas en capacité d'automatiser ce que tout élève standard fait sans y penser. En revanche, il n'a pas de difficulté spécifique au niveau de l'intention d'agir, et c'est là que les connaissances géométriques se développent, dans les composantes technico-figurale et sémiotique de l'action instrumentée.
Nos premières propositions pour une expérimentation ont donc consisté à supprimer de l'action instrumentée de l'élève dyspraxique tous les aspects relatifs à l'intention motrice et à l'exécution de l'action, en mettant en place un travail en dyade où ces aspects sont pris en charge par l'autre dans un travail de collaboration avec un pair ou dans une situation d'aide par un Auxiliaire de Vie Scolaire ou par l'enseignant. Nous sacrifions ainsi délibérément le développement d'une autonomie matérielle de l'élève dyspraxique en classe pour encourager, travailler l'expression de son intention d'agir. L'élève aurait ainsi à :

1. activer son intention d'agir en donnant des instructions à l'autre,
2. éprouver cette action sans se préoccuper de ses caractéristiques manipulatoires fines, via l'activation de ses neurones miroirs (Rizzolatti & Sinigaglia, 2008), en observant l'action exécutée par l'autre,
3. bénéficier d'une rétroaction de l'action réalisée par l'autre, conformément à l'intention transmise.

L'élève dyspraxique conserverait ainsi la possibilité d'élaborer les schèmes d'utilisation des instruments, pas lors d'une manipulation effective, mais lors d'une observation de cette manipulation effectuée par quelqu'un qu'il guiderait par des instructions. Cela suppose donc de développer des compétences langagières et gestuelles pour communiquer en mettant en jeu les apprentissages géométriques visés.

Outils complémentaires d'analyse sémiotique de l'activité des élèves

Appuis théoriques

L'activité mathématique se développe à travers une pluralité de registres ostensifs : oral, écrit (graphisme et écriture), gestualité, matérialité (Bosch & Chevallard, 1999). Ces objets ostensifs, signes produits à travers différentes actions intentionnelles (parler, écrire, dessiner, faire des gestes ou manipuler un artefact), avec leurs modes de production et de transformation, ainsi qu'avec les relations entre ces signes et leurs significations, constituent un ensemble sémiotique (Radford, 2002). Considérant que les processus d'apprentissage sont multimodaux, nous nous référons au concept de faisceau sémiotique (Arzarello, 2006) afin d'étudier le développement dynamique des interactions entre les ensembles sémiotiques. Par ailleurs, nous nous situons dans une conception de l'apprentissage comme phénomène social (Vygotski, 1931/1978). Conformément à la théorie de l'objectivation (Radford, 2006 ; Radford, Demers, Guzman & Cerulli, 2003), nous considérons alors que la formation des concepts mathématiques peut se réaliser pour les élèves à travers des interactions sociales, dans un travail conjoint autour de la résolution d'un problème au cours de laquelle l'activation simultanée de signes donne du sens au contenu mathématique émergent.

Langage et gestes

Dans le cadre d'un travail en dyade sur une activité où des objets géométriques sont à obtenir de façon instrumentée, une variété de signes est observable : l'action du sujet avec les instruments et la production graphique obtenue, mais aussi le langage et les gestes à propos de cette action et de la production graphique.

Nous analysons le discours produit autour d'une action instrumentée en identifiant les visées de l'action auxquelles il se réfère. Par exemple, « Place la pointe de ton compas sur le point *A* et la mine sur le point *B* » est à visée technico-figurale tandis que « Ne tiens pas ton compas par les branches » est à visée manipulatoire. « Commence par tailler ton crayon » est à visée organisationnelle, « Fais une croix à côté de la lettre *A* pour représenter le point *A* » est à visée sémiotique. Dans la visée technico-figurale, nous définissons le *langage technique géométrique* : ce langage est relatif à la manipulation des instruments en lien avec des propriétés géométriques, sans mention de ces propriétés. Dans la conception de notre expérimentation, nous avons privilégié l'emploi de ce langage, lorsque le langage géométrique n'était pas encore maîtrisé, parce que au plus proche de l'action et en relation directe avec les concepts géométriques. Par exemple, le tracé d'une demi-droite d'origine *A* perpendiculaire à un segment [*AB*] donné peut être formulé en langage technique géométrique de la façon suivante : « Placer un côté de l'angle droit de l'équerre sur le segment [*AB*] et le sommet de l'angle droit sur le point *A* ; tracer le long de l'autre côté de l'angle droit de l'équerre jusqu'au point *A*. »

Tout comme pour le discours, nous analysons les gestes produits autour d'une action instrumentée en identifiant les visées de l'action auxquelles ils se réfèrent. Nous appelons *gestes mathématiques* tout mouvement du corps, spontané ou délibéré, réalisé dans l'air ou sur un support, en relation avec l'activité géométrique. Nous considérons alors les catégories de gestes suivantes, en lien avec les typologies des gestes communicatifs de Kendon (1988) et McNeill (1992) : déictique, mimétique, iconique, métaphorique et de structuration du discours. Dans notre expérimentation, nous avons privilégié l'emploi de gestes à visée technico-figurale ou à visée sémiotique, en complément du discours.

Comme gestes à visée technico-figurale, nous avons par exemple des gestes déictiques (Figure 5 à gauche) : suite à un positionnement erroné de l'équerre par un élève, l'enseignante parcourt les côtés de l'angle droit de l'instrument, puis parcourt la droite *d* et pointe le point *A*, objets graphiques avec lesquels l'équerre doit être mise en relation. Nous pouvons avoir aussi des gestes mimétiques (Figure 5 à droite) avec le mime de l'utilisation du compas pour tracer un cercle, les branches du compas étant incarnées par l'index et le pouce de la main (gestes mimétiques sans instrument) ou le compas étant manipulé de façon approximative (gestes mimétiques avec instrument).

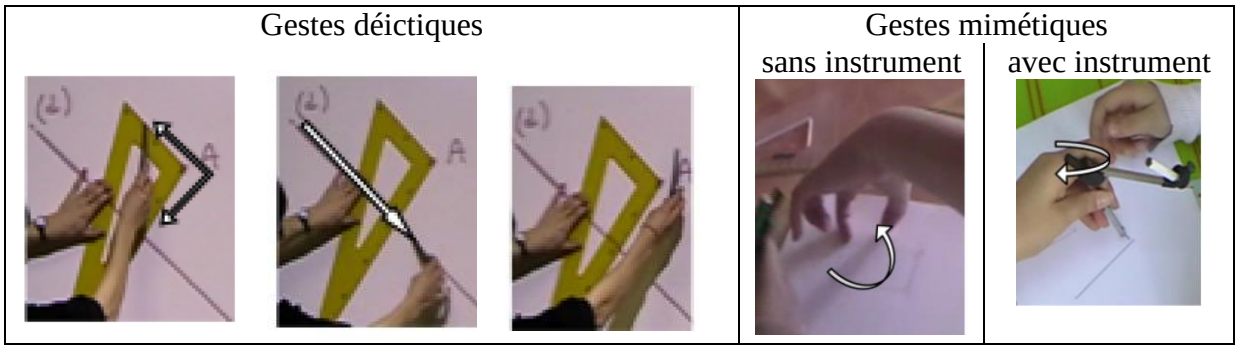


Figure 5 : Exemples de gestes à visée technico-figurale

Comme gestes à visée sémiotique, nous avons par exemple (Figure 6) un geste déictique avec le parcours de l'axe de symétrie d'une configuration symétrique, des gestes iconiques

représentant des objets géométriques (représentant statique ou dynamique d'un triangle) et des gestes métaphoriques exprimant un concept géométrique (propriété de conservation de longueurs).

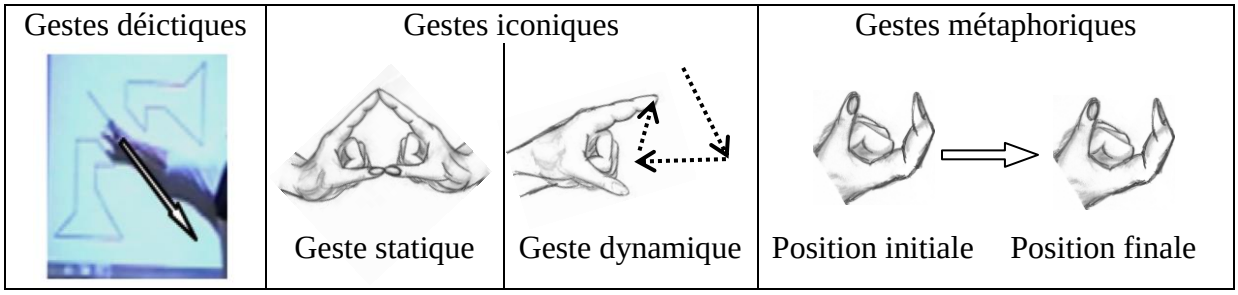


Figure 6 : Exemples de gestes à visée sémiotique

EXPERIMENTATION

Hypothèses et choix pour une expérimentation

Le but de notre recherche est de permettre à l'élève dyspraxique un accès plus étendu à des apprentissages géométriques que celui qu'il peut avoir par la pratique de la construction instrumentée. Ainsi, nous avons fait l'hypothèse qu'il pourrait apprendre et exercer son raisonnement s'il était libéré des tâches manipulatoires et organisationnelles liées à la construction instrumentée. Nous avons alors choisi que ces tâches pratiques soient prises en charge par un tiers dans un travail en dyade, en faisant l'hypothèse que le langage, en situation de communication et en appui sur une certaine expérience (regarder l'autre agir avec les instruments, ébaucher soi-même des gestes ou réaliser des schémas grossiers permettant d'identifier les relations entre les objets techniques et graphiques), serait susceptible de produire, au niveau des apprentissages géométriques, au moins les mêmes effets que l'exécution d'actions instrumentées. Lors de l'expérimentation, nous avons donc cherché à :

- développer et renforcer les capacités langagières de l'élève dyspraxique avec l'usage du langage technique géométrique,
- exploiter ses capacités raisonnementales en mettant l'accent sur les propriétés géométriques sur lesquelles se basent les constructions, en le rendant capable de les justifier.

Pour avoir une idée de la validité de ces hypothèses, mais aussi pour déterminer les conditions de mise en œuvre d'un dispositif de travail à deux qui réponde au mieux aux finalités d'apprentissages géométriques que nous poursuivons pour les élèves, nous avons mené une expérimentation.

Méthodologie de l'expérimentation

L'expérimentation a été menée avec deux filles de 6e, l'une dyspraxique visuo-spatiale, l'élève *M*, l'autre n'ayant pas de difficulté particulière, l'élève *Bm*. Ces deux élèves ont toujours été dans la même classe et ont donc suivi les mêmes enseignements depuis le début de leur scolarité.

L'expérimentation devait être réalisée sur une durée suffisante pour permettre d'installer des moyens de communication appropriés entre les deux élèves. Comme il nous semblait impossible d'obtenir l'adhésion d'un enseignant pour changer ses habitudes d'enseignement sur un temps long avec toute sa classe parce que nous ne pouvions garantir que ces changements pourraient favoriser l'apprentissage pour tous ses élèves, nous avons envisagé

une expérimentation hors classe, en lien étroit avec l'enseignement donné en classe. Nous avons donc pris en charge un temps d'enseignement hors classe en travaillant principalement dans l'environnement papier-crayon afin de minimiser les écarts qu'il pourrait y avoir avec l'enseignement reçu par les élèves en classe. Bien que le complément d'enseignement donné aux deux élèves se soit déroulé hors classe, nous avons gardé les contraintes d'un enseignement en classe : tout ce que nous avons proposé y serait réalisable. L'objectif était que les propositions qui résulteraient de l'expérimentation soient transférables dans une pratique de classe, que ce soit dans le cadre d'une inclusion d'un élève dyspraxique en milieu ordinaire, avec ou sans Auxiliaire de Vie Scolaire, ou dans le cadre de l'enseignement spécialisé.

L'expérimentation s'est déroulée durant l'année scolaire de 6e, au moment du passage d'une géométrie instrumentée à une géométrie théorique, lorsque des changements de regard sur les figures et des déconstructions dimensionnelles sont nécessaires (Duval & Godin, 2005 ; Perrin-Glorian & Godin, 2014). La symétrie axiale nous a semblé un bon objet d'étude car, introduite dynamiquement comme transformation par des actions sur des objets de l'espace sensible, elle est ensuite considérée comme transformation ponctuelle, pour être alors utilisée comme outil de démonstration. Les propriétés de perpendicularité et d'égalité de longueurs mises en jeu dans cette transformation apparaissent et peuvent être étudiées au préalable dans la caractérisation et la construction des figures usuelles. Par ailleurs dans le rectangle, un changement de point de vue permet le passage de l'angle droit à la perpendicularité des côtés de l'angle : les constructions à l'équerre permettent de travailler ces notions. D'autre part, pour passer à la transformation ponctuelle, il est nécessaire que le cercle ne soit plus vu seulement comme une ligne fermée particulière, mais comme un ensemble de points équidistants de son centre : l'utilisation du compas pour les reports de longueur y contribue. Nous avons donc choisi de travailler le langage dans des situations de communication sur des constructions instrumentées de cercles, de triangles et de quadrilatères, à l'équerre et au compas, afin de le réinvestir dans des constructions où intervient la symétrie axiale.

L'expérimentation démarre à la fin de l'année scolaire de CM2 en 2013 et se termine à la fin de l'année scolaire de 6e en 2014. Nous avons recueilli nos données sur 40 séances, avec des temps d'observation hors classe des deux élèves en fin de CM2 (3 séances filmées) et de l'élève *M* en début de 6e (1 séance filmée), des temps d'observation de l'élève *M* en classe de 6e (22 séances enregistrées), des temps de travail hors classe avec les deux élèves (8 séances filmées) et seulement avec l'élève *M* (3 séances filmées) et enfin des temps d'évaluation (3 séances filmées). Ces séances, dépendantes de la progression d'enseignement suivie par le professeur de mathématiques des deux élèves durant leur année scolaire de 6e, sont réparties de façon inégale sur la période expérimentale. Nous avons ainsi alterné quatre périodes d'observation en classe de 6e (une consacrée au cercle, une aux triangles et quadrilatères, une à la symétrie axiale et une dernière aux propriétés des figures usuelles) avec des séances de travail hors classe.

Présentation de l'expérimentation

Temps d'observation

Nous avons tout d'abord mené des observations d'un travail en dyade de l'élève *M* et de l'élève *Bm*, hors classe, sur des activités de construction avec règle graduée, équerre et compas (constructions à partir d'un schéma ou d'une figure à reproduire : voir des exemples en figure 7), en vue d'une évaluation diagnostique. L'une donnait des instructions à l'autre qui les suivait avec ses instruments. Il s'agissait d'une part d'identifier leurs moyens de communication et modalités de fonctionnement spontanés autour d'une activité géométrique

afin de déterminer ce qui pourrait être conservé et ce qui devrait être amélioré par la suite, et d'autre part de faire état de leurs connaissances géométriques et compétences dans l'exécution de tracés.

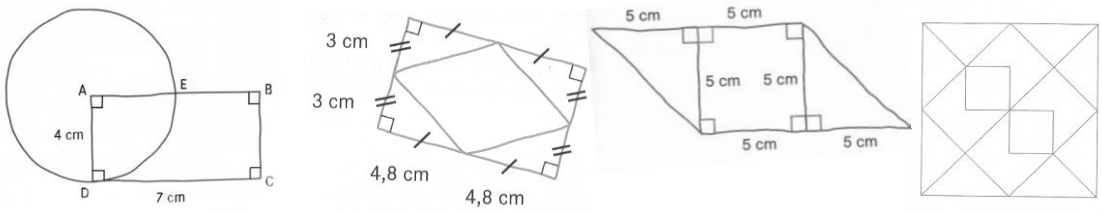


Figure 7

Nous avons ensuite observé l'élève *M* dans sa classe de 6e, lors de séances de géométrie que nous avons aussi enregistrées. Nous étions à côté de l'élève *M* et avons pris des notes sur ce qu'elle faisait, de façon détaillée notamment lorsqu'il s'agissait de constructions instrumentées, nous avons pris des photos de ses productions en cours de réalisation lorsque c'était possible. Nous avons également relevé les gestes mathématiques produits par l'enseignante et les écrits au tableau. Ces données nous ont permis de reconstituer au mieux chacune des séances, sous l'angle de l'élève *M*. Nous avons ainsi assisté à 22 séances. Un objectif de ces observations était d'évaluer les difficultés et réussites de l'élève *M* en classe et d'analyser les aides qui lui étaient apportées le cas échéant, ainsi que leurs effets. Un autre était de voir de quelles façons les notions géométriques étaient abordées (par quels actions, langages et gestes) afin d'établir des moyens de communication langagiers (verbal et gestuel) cohérents avec ce qui se disait et se faisait en classe.

Concernant les séances hors classe de fin de CM2 - début 6e, l'élève *M* manifeste des difficultés à donner des instructions précises et à se faire comprendre lorsque la figure est complexe : ses instructions langagières contiennent des implicites. Elle s'exprime essentiellement dans un langage courant avec de nombreux indicateurs spatiaux et termes déictiques associés à des gestes déictiques et mimétiques complétant ses manques langagiers, mais cela n'est pas toujours suffisant. Cela a donc conforté l'idée de la nécessité d'un travail d'appropriation d'un langage pour communiquer sur les actions instrumentées à réaliser, à savoir le langage technique géométrique.

Par ailleurs, nous n'avions pas prévu que l'élève dyspraxique soit en situation de manipuler les instruments dans le travail en dyade, mais il est apparu comme une évidence pour les deux élèves d'alterner les rôles. Nous avons donc intégré cette contrainte dans notre dispositif expérimental pour que chacune se sente dans une position égale par rapport à l'autre dans l'activité géométrique et s'investisse pleinement. Enfin, pour ce qui est des connaissances et compétences mises en jeu dans les activités proposées, l'élève *M* a manifesté des difficultés organisationnelles et manipulatoires conduisant à des productions imprécises lorsque cela a été à son tour de manipuler les instruments. Ces mêmes difficultés ont persisté tout au long de son année de 6e en classe (manque d'organisation, manque d'anticipation, maladresse dans les positionnements d'instruments) malgré les aides apportées par l'enseignante et un entraînement important. Cela conforte donc l'idée de renoncer à développer l'autonomie de l'élève *M* dans des tâches « non conceptuelles ». En fin de CM2, l'élève *M* travaille spontanément dans une finalité graphique en s'appuyant fortement sur les relations spatiales, avec par exemple des placements de règle au jugé pour obtenir une direction perpendiculaire à une droite donnée ou pour reproduire des directions horizontales, verticales ou obliques lues sur des schémas. Ce travail spontané dans une finalité graphique a perduré pour l'élève *M* durant son année de 6e, sans plus être toutefois systématique : nous avons donc cherché dans les séances hors classe à renforcer l'acquisition de techniques de construction valides dans une finalité géométrique.

Temps de travail hors classe

8 séances de travail en dyade ont eu lieu hors classe avec des constructions diverses à réaliser, en articulation avec l'enseignement en géométrie que les élèves recevaient en classe. Une appropriation du langage technique géométrique a été progressivement réalisée, d'abord pour les tracés de cercles et d'arcs de cercles avec le compas, ensuite pour les tracés d'angles droits ou de droites perpendiculaires avec l'équerre, enfin pour les prolongements de segments à la règle et pour les reports de longueur au compas. Ce langage a ensuite été réinvesti dans des constructions mettant en jeu la symétrie axiale et un travail sur les justifications de ces constructions a été réalisé lors des deux dernières séances.
Le travail en dyade s'est déroulé de la façon suivante, en deux ou trois phases à chaque fois :

1. Les deux élèves reçoivent une figure, sous forme de schéma ou de texte, à construire en vraie grandeur, elles échangent alors pour se mettre d'accord sur une technique de construction.
2. L'une donne des instructions que l'autre suit avec les instruments.
3. Les deux élèves échangent ensuite sur la validité de ce qui a été produit, au niveau du discours sur l'action et au niveau de l'action que cela a engendré.

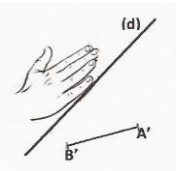
La première phase n'existait pas lorsque seule une élève avait accès à l'énoncé. En outre, nous n'intervenions que dans la troisième phase pour aider les élèves à mener une réflexion sur les écarts entre ce qui devait être produit et ce qui avait été effectivement produit le cas échéant.
Des règles de fonctionnement ont été établies dans le but d'impliquer les deux élèves dans l'activité géométrique afin que les deux progressent. Tout d'abord, pour permettre une alternance des rôles avec la contrainte que l'élève *M* ne manipule pas les instruments, nous avons proposé de remplacer cette manipulation par la réalisation de dessins à main levée, mais cela n'a pas été concluant pour travailler le langage technique géométrique. En revanche, l'utilisation de gestes mimétiques a produit les effets voulus : l'élève *M* a pu se concentrer sur la précision du langage en tant que réceptrice pour positionner des instruments ou tracer, sans se préoccuper de la précision (le mime ne laisse pas de trace). Ensuite, pour éviter de réduire l'élève qui manipule à un rôle d'exécutant et pour favoriser l'utilisation d'un langage porteur de connaissances géométriques, l'élève qui donnait les instructions devait exclure de son discours tout guidage verbal simultané à l'action, du type « un peu plus à droite », « encore », « stop ». Enfin, pour éviter qu'une construction soit réussie malgré des instructions imprécises, l'élève qui manipulait devait agir en faisant ce qui lui semblait le moins probable, le plus éloigné des attentes de l'autre, tout en étant conforme à ses instructions.
Après la séquence d'enseignement en classe sur la symétrie axiale, trois séances hors classe avec l'élève *M* seulement ont été l'occasion de faire fonctionner un travail en dyade dans lequel l'activité géométrique était entièrement à sa charge.

Temps d'évaluation

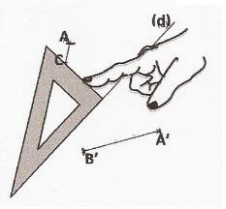
Nous avons proposé un test avec différentes constructions à réaliser, dont certaines à justifier, pour évaluer la pertinence des modalités de travail expérimentées hors classe, ainsi que leurs effets sur l'activité géométrique de l'élève *M*. Cette dernière a passé le test hors classe avec une Auxiliaire de Vie Scolaire (AVS) qui lui apportait des aides non mathématiques – organisationnelles et manipulatoires – en exécutant les constructions d'après ses instructions. L'AVS avait comme consigne d'agir en faisant le « moins probable » et de ne pas accepter d'instructions sous forme de « guidage manipulatoire » du type « avance un peu l'équerre jusqu'à ce que je te dise stop ».
L'élève *M* obtient de très bons résultats à ce test avec dix constructions réussies sur onze. Elle s'est montrée capable de communiquer des programmes de tracé que l'AVS a exécutés et

capable aussi d'élaborer des techniques de construction instrumentées correctes mettant en jeu des propriétés géométriques, qu'elle a su justifier pour certaines (quatre sur six). Voici par exemple un extrait des échanges sur la première construction du symétrique d'un point *C* appartenant à un segment [*AB*] qui était à réaliser avec l'équerre seulement :

M : Dans la zone du segment *AB* *Geste 1*
// elle met sa main à plat au-dessus de (d) [Geste 1]
euh, sur la droite *d*, il faut mettre un côté de l'angle droit de l'équerre, et l'autre côté de l'angle droit doit passer par *C*.



AVS : Comme ça ?
// Elle place l'équerre. *Geste 2*
M : Hm. On trace euh C jusqu'à la droite d
// elle parcourt de C à (d) en l'air
Là
// elle parcourt de C à (d) sur la feuille [Geste 2]



L'élève *M* a progressé au niveau de ses apprentissages géométriques par rapport à des erreurs récurrentes sur lesquelles un travail a été réalisé dans les séances hors classe :

- les prolongements de segments sont maintenant réalisés avec un bon positionnement de règle ;
- les points sont bien représentés comme intersection de deux lignes et elle les considère comme telle alors qu'avant elle considérait l'arc de cercle comme un point ;
- pour le tracé de l'axe de symétrie de deux segments symétriques à la règle non graduée seulement, elle a été capable par elle-même de remettre en cause son projet de positionnement de la règle au jugé, ce qui n'était jamais arrivé jusque-là, et elle a su ensuite trouver une technique de construction correcte.

L'élève *M* obtient de meilleurs résultats au test que chacun des élèves de sa classe. Cette réussite peut s'expliquer par le travail renforcé en géométrie dont elle a bénéficié (11 séances réparties dans l'année). Le travail sur le langage l'a notamment rendue capable de mieux communiquer sur les actions instrumentées que les autres élèves, qui, lorsqu'ils réussissent leurs constructions, connaissent néanmoins des difficultés pour désigner les objets géométriques construits ou pour formuler les propriétés géométriques en jeu. Par ailleurs, un type de tâches de construction n'avait été travaillé que hors classe (construction d'un axe de symétrie d'une configuration symétrique, à la règle seulement). Le dispositif de travail en dyade mis en place a aussi contribué à la réussite de l'élève *M* : elle a pu ainsi être déchargée de tous les aspects pratiques des constructions qui la conduisent habituellement à l'échec. Les commentaires de son professeur de mathématiques sur sa copie au contrôle en classe sur le chapitre de la symétrie axiale attestent d'ailleurs cela (voir figure 8).

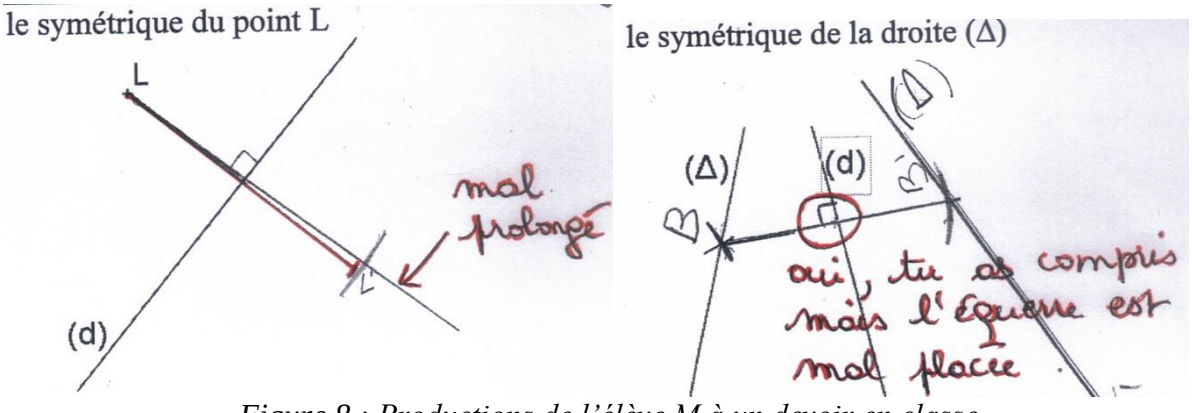


Figure 8 : Productions de l'élève M à un devoir en classe

Par ailleurs, les règles de communication ont aussi contribué à la réussite de l'élève *M*. Cette dernière s'est bien interdit l'emploi d'indicateurs spatiaux exclus du langage technique géométrique, de plus, elle a bénéficié des rétroactions que génère un positionnement de l'instrument le moins probable : cela a aidé à faire évoluer positivement ses instructions vers une technique correcte.

Nous avons également réalisé deux autres évaluations : une pré-expérimentale et une post expérimentale pour évaluer l'évolution spontanée de l'élève *M* dans ses domaines déficitaires pour lesquels nous n'avons proposé aucune intervention lors de l'expérimentation. Les tests neuropsychologiques révèlent une absence de progrès : l'élève *M* obtient des résultats très en dessous de la norme. Nous avions également proposé la construction d'un carré et une reproduction de figure au compas sur support quadrillé : les productions de l'élève *M* sont toujours aussi imprécises, en revanche, elle a progressé dans la manipulation des instruments, mais surtout, elle travaille dans une finalité géométrique.

CONCLUSION

Les résultats positifs obtenus à l'issue de l'expérimentation vont dans le sens de la validité de nos hypothèses : l'élève dyspraxique peut exercer son raisonnement en géométrie s'il est libéré des tâches manipulatoires et organisationnelles liées à la construction instrumentée et s'il est libéré de la culpabilité des échecs graphiques. Cela est possible lorsque ces tâches sont prises en charge par un tiers, dans un dispositif de travail en dyade, avec l'utilisation d'un langage technique géométrique, renforcé par une production de gestes.
L'expérimentation a permis de le vérifier pour un seul élève dyspraxique, dans un travail hors classe et sur quelques concepts de géométrie plane : cela constitue les limites de notre recherche. Les résultats nous permettent cependant de dégager des pistes pour une expérimentation plus large (en classe et avec d'autres élèves dyspraxiques) pour concevoir des modalités d'accueil de l'élève dyspraxique en classe créant des conditions d'apprentissage. Par ailleurs, nous faisons aussi l'hypothèse que les modalités de travail (travail en dyade, utilisation du langage technique géométrique) peuvent être tout autant bénéfiques pour les élèves ordinaires et en particulier ceux qui ont des difficultés dans les activités qui nécessitent des manipulations et ceux pour qui le passage de l'action instrumentée à son expression en langage géométrique pose des difficultés. De nouvelles recherches sont nécessaires pour vérifier ces hypothèses.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARSAC, G. (1989). La construction du concept de figure chez les élèves de 12 ans. In M. Artigue, J. Rogalski & G. Vergnaud (Eds.), *Actes de la 13ème conférence PME* (pp. 85-92).

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 267-299.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(1),* 77-124.

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regard nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7-27.

KENDON, A. (1988). The significance of gesture: how it is achieved. *Papers in Pragmatics, 2,* 60-83.

LABORDE, C. & CAPPONI, B. (1994). Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactique des*

Mathématiques, 14(1), 165-210.
MCNEILL, D. (1992). *Hand and Mind : What gestures reveal about thought*. Chicago : Chicago University Press.
MANGIANTE-ORSOLA, C. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2016, à paraître). Ingénierie didactique de développement en géométrie au cycle 3 dans le cadre du LéA Valenciennes-Denain. In T. Barrier & C. Chambris (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'année 2016*. Paris : IREM de Paris.
MAZEAU, M. (2008). *Conduite du bilan neuropsychologique chez l'enfant*. Elsevier Masson.
MAZEAU, M. & LE LOSTEC, C. (2010). *L'enfant dyspraxique et les apprentissages. Coordonner les actions thérapeutiques et scolaires.* Elsevier Masson.
MAZEAU, M. & POUHET, A. (2014). *Neuropsychologie et troubles des apprentissages chez l'enfant. Du développement typique aux « dys- »*. 2e édition. Elsevier Masson.
PERRIN-GLORIAN, M.-J. & GODIN, M. (2014). De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école*, *222*, 26-36.
PETITFOUR, E. (2015). *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.
RABARDEL, P. (1995). *Les hommes et les technologies. Approche cognitive des instruments contemporains*. Paris : Armand Colin.
RADFORD, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics, 22(2)*, 14-23.
RADFORD, L., DEMERS, S., GUZMAN, J. & CERULLI, M. (2003). Calculators, graphs, gestures and the production meaning. *In P. N. B. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27 Conference of PME (Vol. 4, pp. 55–62). Hawaii: University of Hawaii.*
RADFORD, L. (2006). Elements of a Cultural Theory of Objectification. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking*, 103-129.
RIZZOLATTI, G. & SINIGAGLIA, C. (2008). *Les Neurones miroirs*. Paris : Odile Jacob.
VYGOTSKI, L.S. (1931/1978). *Mind in Society. The Developoment of Higher Psychological Processes.* Cambridge, Massachusetts : Harvard University Press.

ÉLABORATION D'UNE RÉFÉRENCE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA LOGIQUE

Zoé **MESNIL**
Université Paris Est Créteil
zoe.mesnil@u-pec.fr

Résumé
Cette communication présente ma thèse qui porte sur l'enseignement de notions de logique au lycée. Les instructions officielles actuelles précisent qu'il ne s'agit pas de faire un cours de logique mathématique, mais de développer une utilisation en tant qu'outils des notions de logique considérées. Afin de prendre en compte cette contrainte dans l'étude du processus de transposition didactique, j'introduis, entre *savoir savant* et *savoir à enseigner,* un *savoir de référence* pour la logique, savoir qui n'a jamais été institué par la communauté de l'enseignement des mathématiques. Je m'appuie pour proposer une telle référence sur une double étude épistémologique et didactique, dans laquelle je privilégie les liens entre logique et langage. Une étude plus fine du savoir à enseigner donne ensuite à voir la complexité des conditions et contraintes portant sur l'enseignement de ces notions. La question de la formation des enseignants est finalement posée à partir d'une étude de cas : une formation continue de trois jours sur la logique, dans laquelle les notions de logique sont abordées à partir d'une étude naïve du langage mathématique.

Mots clés
Logique, langage, enseignement

INTRODUCTION ET PROBLÉMATIQUE

En France, le nouveau programme de mathématiques pour la classe de Seconde, publié en 2009, demande explicitement d'enseigner des connaissances sur des notions de logique, et c'est une nouveauté par rapport au programme précédent. Celui-ci datait de 2001 et ne contenait qu'une rapide mention de la logique, ce qui était tout de même déjà un changement puisqu'après avoir été très présente dans les programmes de mathématiques du lycée à partir de 1969, au moment des mathématiques modernes, la logique en a été exclue entre 1981 et 1999. Le nouveau programme fixe des objectifs concernant les connecteurs, les quantificateurs, les types de raisonnement : la dimension outil de ces notions est fortement mise en avant, et on peut même parler d'une méfiance vis-à-vis de la dimension objet.
Il semble effectivement difficile de faire des mathématiques sans que connecteurs, quantificateurs, raisonnements soient présents, et l'on peut se demander s'il y a vraiment besoin de recommandations institutionnelles pour que les enseignants en parlent. Selon Durand-Guerrier, ces éléments présents dans l'activité mathématique ne le sont pas forcément pour autant dans le discours du professeur :

> Pratiquement absente aujourd'hui des curricula français, la logique à l'œuvre dans l'activité mathématique est également le plus souvent absente du discours du professeur. Pour autant, les objets dont s'occupe la logique, tels que les connecteurs, la quantité, les

> règles d'inférences, la vérité et la validité sont autant d'outils de l'activité mathématique, utilisés le plus souvent de façon naturalisée, non problématisée et sans théorie de référence. (Durand-Guerrier, 2005, p. 5)

Peu habitués à mettre des mots sur la dimension logique de leur activité mathématique, quand bien même leurs actes en montrent une bonne maîtrise, les mathématiciens et enseignants ne sont pas forcément conscients des implicites créés par leur pratique des mathématiques. Ainsi, les auteurs du manuel *Maths 2nd, collection Indice* oublient que toutes les propositions en mathématiques ne sont pas forcément universelles, même si effectivement ces dernières sont extrêmement présentes :

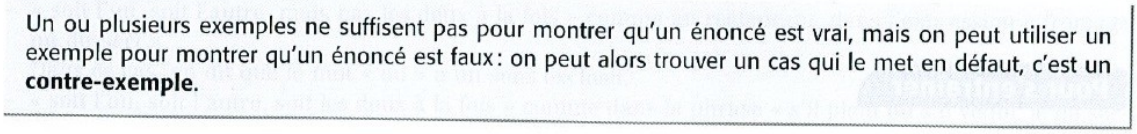

Un ou plusieurs exemples ne suffisent pas pour montrer qu'un énoncé est vrai, mais on peut utiliser un exemple pour montrer qu'un énoncé est faux : on peut alors trouver un cas qui le met en défaut, c'est un **contre-exemple**.

Figure 1 : Extrait du manuel Maths 2de, collection Indice

Cet extrait montre qu'il n'est pas si simple de passer de connaissances en acte à des propos clairs pour les enseigner. Par ailleurs, des difficultés persistantes d'élèves sur ces questions de logique étant maintenant bien identifiées par la recherche en didactique des mathématiques (voir par exemple une synthèse dans la thèse de Njomgang Ngansop (2013)), il est intéressant d'étudier plus précisément la demande institutionnelle et les ressources sur lesquelles les enseignants pourront s'appuyer pour y répondre, ce que j'ai fait dans ma thèse intitulée *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement* (Mesnil, 2014), que je présente dans ce texte.

La demande formulée par les rédacteurs des programmes n'est pas d'enseigner la logique mathématique, mais bien d'enseigner cette logique à l'œuvre dans l'activité mathématique, que j'appelle alors *logique des mathématiques*. Une des questions qui se pose sur cet enseignement concerne la façon dont la logique mathématique y participe. Je partage la position de plusieurs chercheurs qui pensent, et montrent, que c'est une référence pertinente, voir indispensable, mais qui doit être articulée avec l'activité mathématique (Adda, 1988 ; Durand-Guerrier, 1996 ; El Faqih, 1991). Ce point de vue ne semble pas être celui de l'institution puisque qu'il n'y a de logique mathématique dans la formation initiale des enseignants que là où localement des formateurs prennent l'initiative d'en mettre[1].

À travers cette demande se dessine un *savoir à enseigner*, et l'enseignement de la logique au lycée peut être regardé comme résultat d'un processus de transposition didactique, dans le cadre de la Théorie Anthropologique du Didactique qui permet d'étudier les transformations nécessaires des *savoirs savants* en vue des les enseigner au sein d'une institution particulière (Chevallard, 1985). Mais le savoir logique que les mathématiciens partagent est un savoir en acte, visible dans des pratiques plutôt que dans des traités. Je propose alors de penser la transposition didactique des notions de logique en introduisant un *savoir de référence* entre le

1 Un retour de notions de logique dans les programmes de lycée devrait signifier également un retour dans la formation des enseignants de mathématiques, puisque par exemple en 2016, le programme du CAPES de mathématiques était « constitué de la réunion des programmes de mathématiques du collège, du lycée et des classes préparatoires aux grandes écoles ».
(http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/capes_externe/58/5/p2016_capes_ext_math_455585.pdf)
Dans le programme plus détaillé publié pour la session 2017 du CAPES, il y a un paragraphe « **Raisonnement et vocabulaire ensembliste**. Opérateurs logiques et quantificateurs. Vocabulaire de la théorie des ensembles. Applications, relations d'ordre et relations d'équivalence. », et pour l'option informatique, de la logique propositionnelle.
(http://media.devenirenseignant.gouv.fr/file/capes_externe/12/7/p2017_capes_ext_math_512127.pdf)
Ces prescriptions restent très vagues et ne mentionnent pas explicitement la logique mathématique, même si les objets qu'elle étudie sont évoqués.

savoir savant et le savoir à enseigner, savoir issu des pratiques, mais décontextualisé des situations où le savoir en acte se manifeste, tel que le définissent Rogalski et Samurçay :

> Dans le domaine étudié[2], on assiste au déroulement d'un processus de construction d'un corps de savoir de référence à partir d'un ensemble de « savoirs en acte » manifestés dans des pratiques. Ce processus consiste à identifier des catégories d'objets et de traitement communes à des pratiques efficaces, qui sont quant à elles spécifiques de situations, contextualisées et personnalisées. (Rogalski & Samurçay, 1994, p. 43)

Les auteurs précisent qu'il est nécessaire que ce savoir de référence puisse « s'exprimer avec ses concepts, ses méthodes, ses systèmes de représentations et son langage » (*ibid.*, p. 46). Or, pour ce qui est des notions de logique, un tel savoir de référence n'existe pas au sens où il n'y a pas de corpus rassemblant les connaissances logiques nécessaires à l'activité mathématique et qui fasse consensus dans le choix des concepts et de leur représentation.

J'ai alors mené une étude pour identifier des critères d'un savoir de référence épistémologiquement et didactiquement pertinent pour l'enseignement de notions de logique au lycée. Cette étude m'a également permis de constituer une référence utilisée dans la suite de ma recherche. Je qualifie cet outil d'analyse de *référence*, et non de *savoir de référence*, car la production d'un savoir relève d'un processus long et collectif.

J'ai ainsi pu mener dans un deuxième temps une étude de la partie externe de la transposition didactique, qui consiste en la « sélection des éléments du savoir savant qui, désignés par là comme "savoir à enseigner", seront alors soumis au travail de transposition » (Chevallard, 1991, p. 31). Il s'agit d'un travail externe car il se fait en dehors des institutions où est mis en œuvre l'enseignement. Des textes sont ainsi produits qui constituent la délimitation « officielle » du savoir à enseigner, vu alors comme aboutissement d'un processus d'adaptation et de choix faits par les rédacteurs de programmes, de documents d'accompagnement, de manuels. J'ai étudié ces documents à l'aide des outils de l'approche écologique (Artaud, 2011), avec une perspective historique qui permet de mieux comprendre la complexité de la demande actuelle.

J'ai ensuite orienté ma recherche vers des questions de formation. La partie interne de la transposition, le passage du savoir à enseigner au savoir enseigné, se passe à l'intérieur d'une institution d'enseignement, et le savoir à enseigner est alors vu comme le point de départ d'un processus d'adaptation et de choix faits par un enseignant. Une formation d'enseignants vise à influencer ce processus. À partir d'une étude de cas, celle d'une formation continue proposée par l'IREM de Paris, dont je suis co-responsable avec R. Cori, je me suis plus largement demandé comment une formation pouvait permettre aux enseignants d'appréhender la complexité des notions de logique et les intégrer efficacement dans leur enseignement.

Ces trois études structurent ma recherche et le texte qui suit. Je présenterai la méthodologie adoptée pour chacune d'elle, et les principaux résultats, mais je détaillerai surtout ce qui concerne la constitution d'une référence et son utilisation pour l'étude du savoir à enseigner à travers l'exemple des quantificateurs. Dans la thèse, j'ai choisi de ne pas étudier une notion de logique en particulier parmi celles évoquées dans les programmes (connecteurs ET et OU, négation, proposition conditionnelle, quantificateurs, types de raisonnement), j'ai par contre rajouté à cette liste les notions de proposition et de variable. Dans l'étude de l'enseignement de toutes ces notions, j'ai en revanche privilégié le pilier langage de la logique, au détriment du pilier raisonnement. Cet accent mis sur les liens entre logique et langage relève d'une volonté de « réhabilitation du pilier langage », qui me semble moins souvent associé à la logique que le raisonnement.

2 La formation de professionnels de haut niveau

ÉTUDE ÉPISTÉMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE : IDENTIFICATION DE CARACTÉRISTIQUES PERTINENTES POUR UN SAVOIR DE RÉFÉRENCE POUR L'ENSEIGNEMENT DE LA LOGIQUE

Du point de vue épistémologique, j'ai mené une étude de différents systèmes logiques dans trois époques. Dans l'Antiquité grecque, la logique d'Aristote est une logique des termes, et celle des Stoïciens est une logique des propositions. Au XVII^{e} siècle, la logique de Port-Royal, inspirée des réflexions de Descartes, prend position contre l'excès de formalisme, et s'oppose ainsi sur ce point à Leibniz qui tente de formaliser la logique aristotélicienne. Enfin, au XIX^{e} siècle, on assiste à la gestation et à la naissance de la logique mathématique, de Boole et la mathématisation de la logique aristotélicienne à Frege et la logicisation des mathématiques. Du point de vue didactique, j'ai sélectionné des travaux mettant en évidence l'apport de l'analyse logique pour des questions didactiques sur le raisonnement, notamment ceux de Durand-Guerrier (1996, 2005), et sur le langage, notamment ceux de Laborde (1982). J'ai également mis en parallèle l'activité de reformulation très présente en mathématiques avec les registres de représentation sémiotique de Duval (1993). J'ai ainsi dégagé quatre axes pour la constitution d'un savoir de référence : le travail sur le langage (qui est au commencement de tous les systèmes étudiés), la validité des raisonnements (qui est le but de tous ces systèmes), la nécessaire formalisation (pour dégager la validité des raisonnements du contenu des propositions) et la dialectique entre syntaxe et sémantique (la formalisation amène ces deux aspects, qui permettent des allers-retours entre manipulation formelle des signes et interprétation), sur lesquels je reviens maintenant plus en détail.

Le travail sur le langage

Tous les systèmes logiques étudiés proposent une importante étude du langage préalable à celle des raisonnements. La notion de proposition y est primordiale. Aristote la définit comme un « discours dans lequel réside le vrai ou le faux » (Aristote, 2008, p. 95), et propose une catégorisation qui distingue les propositions selon un critère de quantité (propositions universelle ou particulière) et un critère de qualité (propositions affirmative ou négative)[3]. Mais cette catégorisation est insuffisante pour décrire les propositions mathématiques. Il a fallu attendre Frege pour qu'à la fin du XIX^{e} siècle, l'analyse de la proposition en sujet-copule-prédicat soit remplacée par une analyse en termes de fonction et argument, donnant ainsi naissance au langage des prédicats de la logique mathématique actuelle (Frege, 1999).
Le langage actuel des mathématiciens s'inspire du formalisme des logiciens du début du XX^{e} siècle, mais n'est en aucun cas une utilisation stricte d'un langage formel. Laborde (1982) le décrit dans sa thèse comme le lieu de l'interaction des deux codes de l'écriture symbolique et de la langue naturelle. Cette interaction a pour conséquences des usages spécifiques de ces deux codes et des transformations linguistiques parfois difficiles à comprendre et à utiliser, notamment pour les élèves. Mais l'interprétation des énoncés produits dans la classe de mathématiques demande également de prendre en compte les pratiques langagières de la communauté mathématique, c'est-à-dire non seulement comment sont construits les énoncés, mais aussi le sens que la communauté leur donne. La mise au jour de la structure logique des propositions, à l'aide du langage des prédicats, aide à déceler la complexité et les implicites de certaines formulations. Par exemple, Durand-Guerrier (1999) montre dans son analyse de la « tâche du labyrinthe » comment la pratique de quantification universelle implicite des implications amène un malentendu avec certains élèves.

3 On obtient donc 4 formes de proposition : universelle affirmative (Tous les A sont B), universelle négative (aucun A n'est B), particulière affirmative (quelques A sont B), particulière négative (quelques A ne sont pas B).

La validité des raisonnements

Ces systèmes logiques sont établis comme des contributions à la science du raisonnement. Pour les auteurs de la logique de Port-Royal, « la logique est l'art de bien conduire sa raison dans la connaissance des choses » (Arnauld & Nicole, 1662/1992, p. 30), elle a surtout besoin d'être exercée et la formalisation des raisonnements est vue comme une entrave au fonctionnement de l'intuition. Chez Leibniz (1998) et chez Frege (1999) au contraire, la logique doit fournir un système de signes dans lequel pourront s'exprimer les raisonnements, cette expression formelle étant la garantie de leur infaillibilité.
Gandit (2004) dénonce la place trop importante que prend l'aspect formel d'une preuve au début de l'apprentissage de la démonstration au collège. Mais se méfier de la formalisation au moment de la découverte du raisonnement déductif ne veut pas dire qu'elle ne puisse pas apporter ultérieurement un éclairage pour qui commence à en avoir une bonne pratique. Ainsi, au niveau de l'enseignement supérieur, Selden et Selden (1995) suggèrent de présenter les théorèmes et les définitions dans une formulation informelle, qui permet la compréhension intuitive, et dans une formulation formelle, qui permet un lien entre structures des énoncés et structures des preuves. Ces auteurs ne précisent cependant pas ce qui caractérise la distinction formelle/informelle, précision que j'ai apportée dans l'axe suivant.

La nécessaire formalisation

Il y a une différence importante entre Aristote, les Stoïciens, la logique de Port-Royal d'un côté, et Leibniz, Boole, Frege de l'autre : les premiers se contentent du langage courant pour exprimer les raisonnements, les seconds proposent un autre langage, celui de l'algèbre pour Leibniz et Boole, et un système de signes nouveaux pour Frege. Pour autant, ces systèmes peuvent tous être qualifiés de formels, dans le sens où ils proposent une mise en forme des propositions et des raisonnements selon un code plus ou moins contraignant.
Pour rendre compte de la plus ou moins grande formalisation des propositions dans le langage actuel des mathématiciens, j'ai distingué des registres de représentation sémiotique, au sens de Duval (1993). Deux registres sont facilement identifiables : celui de la langue naturelle (dont fait partie la proposition « les entiers divisibles par 4 sont pairs »), et celui que j'ai appelé « registre de l'écriture formalisée du langage des prédicats » (dans lequel les connecteurs sont explicites, et les quantifications exprimées par des quantificateurs, comme par exemple dans la proposition « quel que soit l'entier naturel n, si n est un multiple de 4, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$ »). Mais beaucoup d'autres formulations ne relèvent d'aucun de ces deux registres et constituent un registre intermédiaire (par exemple la proposition « si 4 divise n, alors $n = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ » contient des variables, et ne fait ainsi pas partie du registre de la langue naturelle, et contient une quantification universelle implicite associée à la formulation en *si…, alors…* et une quantification existentielle marquée par « avec », et ne fait ainsi pas partie du registre formalisé). Le mathématicien use selon ses besoins de différentes formulations équivalentes, qui relèvent de l'un ou l'autre de ces registres. En reliant cette pratique de reformulation aux registres de représentation sémiotique de Duval (*ibid.*), nous pouvons alors, à l'instar de ce qu'il dit d'une façon générale sur les registres de représentation sémiotique, arguer d'une part que ces différentes formulations sont nécessaires à la compréhension, d'autre part que les reformulations mettant en jeu des changements de registre peuvent s'accompagner de problèmes de non-congruence particulièrement complexes pour les élèves.

La dialectique syntaxe/sémantique

Dans les systèmes étudiés il n'y a pas de séparation nette entre les deux plans syntaxique et

sémantique. Mais la dialectique entre ces deux aspects est très présente : des règles concernant l'équivalence des propositions sont établies sur des fondements sémantiques, puis utilisées pour des manipulations indépendantes de la signification des signes (par exemple les règles de conversion dans la logique d'Aristote, qui deviennent des « règles de calcul » dans la mathématisation qu'en propose Boole), et l'adéquation entre l'utilisation formelle des signes et leur interprétation est une préoccupation constante des logiciens qui proposent des langages formels (par exemple, Frege précise qu'un des signes qu'il utilise, qui correspond au connecteur IMPLIQUE, ne peut pas se traduire dans tous les cas par *si…, alors…*).
D'un point de vue didactique, les travaux de Durand-Guerrier (1996) et Deloustal-Jorrand (2004) sur l'implication, de Chellougui (2004) sur les quantificateurs, de Ben Kilani (2005) sur la négation montrent que la prise en compte des deux dimensions syntaxique et sémantique est essentielle pour une bonne compréhension des notions de logique, mais qu'elle est rarement objet d'enseignement.

ÉLABORATION D'UNE RÉFÉRENCE

Les résultats de l'étude épistémologique et didactique justifient le choix d'une référence dans laquelle les notions de logique mathématique sont présentées à travers l'analyse du langage utilisé en mathématiques. Cette référence (que j'évoquerai en disant simplement *la référence*) n'est pas un savoir de référence puisqu'elle n'est pas partagée et reconnue par la communauté mathématique. Elle pourrait cependant contribuer à la construction d'un tel savoir. J'y combine trois points de vue : le point de vue de la logique mathématique, la prise en compte des pratiques langagières de la communauté mathématique, les difficultés d'élèves montrées dans différentes études didactiques. Dans cette approche multiple, la distinction entre ce que j'ai appelé le *langage mathématique*, qui concerne les objets mathématiques et eux seulement, et ce que j'ai appelé le *discours mathématique*, dans lequel intervient l'être humain qui examine ces objets, est essentielle, parce qu'elle permet de délimiter ce qui est modélisable par la logique des prédicats, qui ne s'occupe que du langage mathématique, et justifie de faire appel à la dimension plus pragmatique des pratiques langagières.
Dans cette référence sont présentés les éléments constitutifs du langage mathématique, en commençant naturellement par les notions de proposition et de variable. Ensuite, pour les connecteurs ET et OU, l'implication, la négation, les quantificateurs, j'ai adopté systématiquement les trois points de vue déjà mentionnés. Bien que l'accent soit mis sur le langage, le raisonnement n'est bien sûr pas absent de la référence. Une difficulté pour les élèves et les étudiants est de distinguer, dans un texte de démonstration, les propositions mathématiques qui concernent les objets mathématiques, et les parties du texte qui permettent de suivre le cheminement du raisonnement, par exemple les introductions de variables, ou la justification d'une inférence permettant de déduire une nouvelle proposition à partir des propositions posées en hypothèses ou déjà démontrées. La confusion entre implication et déduction relève de ce type de difficulté. La référence à la logique mathématique (logique des prédicats et déduction naturelle de Gentzen (1995)) permet aussi d'éclairer certains points complexes liés aux différents types de raisonnement : différence entre raisonnement par l'absurde et raisonnement par contraposée, lien entre exemple et contre-exemple, intervention d'un « et » et d'un « ou » dans le raisonnement par disjonction des cas, gestion de la quantification universelle dans l'étape d'hérédité d'un raisonnement par récurrence.
J'illustre ici le fonctionnement de cette référence à travers l'exemple des quantificateurs, mais pour cela, il est indispensable de donner au préalable quelques éléments concernant propositions et variables.

Sur les propositions

La notion de proposition mathématique est essentielle dans l'étude du discours mathématique. Elle est première dans le sens où les notions de variable, connecteur, quantificateur peuvent ensuite être introduites comme des éléments constitutifs de ces propositions.
Une caractérisation naïve de cette notion suffit pour cela : une proposition mathématique dit un (ou des) fait(s) sur un (ou des) objet(s) mathématique(s), elle est susceptible d'être vraie ou fausse. Ainsi, « 3 est impair » est une proposition vraie, « 2 est impair » est une proposition fausse, « *n* est impair » (la variable *n* pouvant prendre ses valeurs dans $\mathbb{N}$) est une proposition pour laquelle cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question par manque d'information sur *n*. Certains auteurs appellent « proposition » seulement les deux premières (qui sont des propositions *closes),* le choix inverse que je fais a pour but de renforcer la similitude entre ces trois énoncés : ce sont des phrases qui parlent d'objets mathématiques, la première de 3, la deuxième de 2, la troisième d'un objet qui s'appelle *n*.
Par contre, « 3 est impair donc 3^2 est impair » n'est pas une proposition. Cette phrase ne met pas en jeu seulement des objets mathématiques, elle met en jeu une personne en train d'affirmer des propriétés de ces objets et qui fait un lien entre elles par une inférence. La question qui se pose à propos de cette phrase n'est pas celle de la vérité ou non d'une proposition, mais celle de la validité ou non d'un raisonnement (cette distinction entre vérité et validité est précisée dans Durand-Guerrier, 2005). Pour être valide (on peut dire plus simplement « correct ») un raisonnement doit s'appuyer sur :

- une (ou des) prémisse(s) (hypothèses) vraie(s)
- un schéma de raisonnement valide

Dans l'exemple donné, le raisonnement est correct, et attribuer le qualificatif « vraie » à cette phrase ne nous dérange pas forcément. Par contre, d'autres exemples peuvent amener à voir que ce qualificatif est en fait inapproprié : « 2 est impair donc 2^2 est impair » s'appuie sur une prémisse fausse, mais sur un schéma de raisonnement valide (quel que soit l'entier naturel *n*, si *n* est impair alors n^2 est impair, or *a* est impair, donc a^2 est impair), alors à quoi devrait-on appliquer le qualificatif « vrai » ? Même question pour la phrase « 3 est premier donc 3^2 est impair » dont la prémisse et la conclusion sont vraies, mais qui ne s'appuie pas sur un schéma de raisonnement valide.

Sur les variables

Dans certaines propositions mathématiques nous utilisons des variables. C'est le cas par exemple dans la proposition « *n* est premier ET *n* est impair » et dans la proposition « quel que soit l'entier naturel *n*, si *n* est impair alors n^2 est impair ». Mais il y a une distinction fondamentale entre ces deux propositions concernant la variable *n*. D'un point de vue naïf, je dirais que la première proposition « parle » de *n*, elle dit quelque chose sur un objet qui s'appelle *n*, alors que la deuxième donne une propriété (il se trouve qu'elle est vraie) des entiers naturels, que je peux d'ailleurs formuler sans utiliser de variable : « le carré d'un entier naturel impair est impair ». D'un point de vue plus formel, on peut caractériser le statut de la variable *n* dans chacune de ces propositions : elle est parlante (ou libre) dans la première (qui est une proposition *ouverte*), muette (ou liée) dans la deuxième (qui est une proposition *close*).
Repérer le statut des variables qui sont présentes dans des propositions peut aider à contrôler les équivalences entre elles : ainsi, la proposition « pour tout *n*, $u_n \leq M$ », dans laquelle la variable M est parlante, est équivalente à la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par M » et non pas à la proposition « la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée » qui ne parle pas de M. Cette dernière

proposition est équivalente à « il existe un réel M tel que pour tout n, $u_n \leq M$ », dans laquelle la variable M est muette, à cause du quantificateur existentiel. Cette notion de variable muette/parlante peut tout-à-fait vivre dans la classe, et à mon avis utilement, en se posant la question « de qui parle cette proposition ? » Elle peut apporter un autre éclairage sur certains exercices, prenons par exemple un exercice classique en 1re : déterminer les valeurs de m pour lesquelles l'équation $mx^2 + 2x + 1 = 0$ a deux solutions. On trouve que c'est pour $m < 1$. Finalement, nous avons montré que les propositions « l'équation $mx^2 + 2x + 1 = 0$ a deux solutions » et « $m < 1$ » sont équivalentes. Et il est très facile de voir quand est-ce que la deuxième est vraie[4]. On peut faire remarquer que la variable x, qui était muette dans la première proposition, a disparu dans la deuxième, et utiliser cette idée pour disqualifier la réponse d'un élève qui proposerait « $m=(-2x+1)/x^2$ ».

Les quantificateurs dans la référence

Comme annoncé, la référence contient d'abord une présentation des notions de logique à partir de la logique mathématique. La logique des prédicats utilise deux quantificateurs : le quantificateur universel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\forall x$ P, et le quantificateur existentiel, qui appliqué à une variable x permet d'obtenir, à partir d'une proposition P, la proposition $\exists x$ P (description de l'aspect syntaxique des quantificateurs : ils opèrent sur une variable et une proposition pour construire une nouvelle proposition). La proposition $\forall x$ P[x] est vraie[5] lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E la proposition P[a] est vraie. La proposition $\exists x$ P[x] est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E tel que P[a] soit vraie (description de l'aspect sémantique des quantificateurs : conditions de vérité d'une proposition quantifiée). Les quantificateurs sont des mutificateurs : une variable sur laquelle opère un quantificateur est muette dans la proposition quantifiée.
Voici quelques résultats sur des propositions quantifiées (il faut parfois prendre la précaution que l'on est sur un domaine non vide), ces résultats peuvent être établis sémantiquement, en recourant au sens, mais ils permettent ensuite une manipulation syntaxique, indépendante de ce sens (de la même manière que sont manipulées des égalités algébriques pour être transformées en égalités équivalentes) :

- NON($\forall x$ P[x]) est équivalente à $\exists x$ NON(P[x])
- Si $\forall x$ P[x] est vraie, alors $\exists x$ P[x] est vraie
- $\forall x$ P[x] et $\forall x$ NON(P[x]) ne peuvent pas être vraies toutes les deux
- $\forall x$ (P[x] ET Q[x]) est équivalente à ($\forall x$ P[x]) ET ($\forall x$ Q[x])
- Si [($\forall x$ P[x]) OU ($\forall x$ Q[x])] est vraie, alors $\forall x$ (P[x] OU Q[x]) est vraie
- Si $\exists y$ $\forall x$ P[x,y] est vraie, alors $\forall x$ $\exists y$ P[x,y] est vraie

Dans le langage mathématique, les quantificateurs sont une façon de marquer la quantification (au sens large de l'expression de la quantité, telle qu'on la trouvait déjà chez Aristote), mais il y en a bien d'autres. Voyons cela à travers quelques exemples de propositions mathématiques :

(1) Un nombre réel a un carré positif
(2) Un nombre réel a toujours un carré positif
(3) Tous les réels ont un carré positif

4 On retrouve la démarche de résolution d'une équation qui consiste effectivement à donner une proposition simple, du type $x = a$, équivalente à une proposition initiale plus complexe, une égalité entre deux expressions algébriques. L'équivalence entre les deux propositions, et la simplicité de la deuxième, permet de dire quand est-ce que la première est vraie.

5 Cette caractérisation sémantique peut être qualifiée de « naïve » dans la mesure où je ne m'attache pas à définir ce que signifie « être vraie ». Mais bien sûr, cette caractérisation peut être plus rigoureuse à l'aide de la notion de satisfaction d'une formule dans un modèle introduite par A. Tarski (1972).

(4) Tout réel x est tel que x^2 est positif
(5) Pour tout réel x, x^2 est un réel positif
(6) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

Elles sont plusieurs formulations d'une même propriété, mais la quantification universelle y est exprimée de manière très différente. Dans la proposition (1), la quantification est implicite, sous-entendue par la première occurrence du mot *un*. Nous utilisons fréquemment l'article indéfini *un* pour marquer une quantification universelle, dans le langage courant comme en mathématiques. Mais *un* est également parfois utilisé pour marquer une quantification existentielle, ce qui est évidemment source de confusion ! Parfois même, les deux utilisations cohabitent dans une même proposition, comme par exemple dans « un réel positif possède une racine carrée », ou dans « un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ». Dans la proposition (2), l'adverbe *toujours* sert à marquer explicitement cette quantification universelle, de même que le mot *tous* dans la proposition (3). Les propositions (4) à (6) se démarquent des deux premières par l'utilisation d'une variable. Par ailleurs, on peut repérer dans chacune de ces propositions une expression exprimant la quantification (ici universelle), et possédant la propriété de pouvoir être séparée de la proposition « x^2 est positif » (ou formulation équivalente) dans laquelle la variable x est parlante (dans la proposition (4), l'expression « Tout réel x est tel que » est moins courante que les deux autres). J'appelle *quantificateur* une telle expression. Dans la formulation (4') « Tout réel x est tel que son carré est positif », la partie « son carré est positif » n'a pas de sens en soi, ça n'est pas une proposition, et ici l'expression « Tout réel x est tel que » n'est pas utilisée comme un quantificateur (d'ailleurs, l'utilisation d'une variable est inutile).

Finalement, nous avons vu que la quantification en mathématiques peut être implicite ou explicite, et dans ce deuxième cas, éventuellement marquée par un quantificateur qui est une expression répondant à des règles syntaxiques d'utilisation.

Les propositions (4) et (5) peuvent paraître plus proches des propositions (1) à (3) car elles sont formulées « avec des mots », contrairement à la proposition (6) qui utilise seulement des symboles mathématiques, et qui peut paraître beaucoup plus formelle. Je voudrais souligner qu'une telle vision masque la formalisation qui existe déjà dans ces propositions, au sens d'une mise en forme respectant certaines règles, même si cette formalisation ne s'accompagne pas d'une symbolisation.

Je terminerai en mentionnant certaines difficultés rencontrées par des élèves du secondaire ou des étudiants du supérieur en lien avec les quantificateurs. Tout d'abord, les quantifications implicites ne sont pas toujours perçues par les élèves. Le cas de la quantification universelle implicite associée aux implications et à la formulation en *si…, alors…* est repéré depuis bien longtemps (voir par exemple Durand-Guerrier, 1999). La quantification est souvent encapsulée dans des tournures rigidifiées (par exemple, « u_n est aussi grand qu'on veut dès que n est assez grand ») que le mathématicien expert sait reformuler en explicitant les quantifications, mais ces reformulations dans un langage plus formel ont tendance à disparaître du langage utilisé au lycée, et sont source de difficulté quand les étudiants les rencontrent dans le supérieur. Une autre difficulté concerne la non prise en compte de l'ordre des quantificateurs quand il y a alternance. On sait que les élèves ont plutôt une interprétation *pour tout… il existe…*, quand bien même ils sont face à une proposition *il existe… pour tout…* (Dubinsky & Yiparaki, 2000). Par ailleurs, Chellougui (2004) a montré les difficultés d'étudiants avec l'utilisation d'une proposition existentielle. Dans un texte de preuve, on confond généralement l'affirmation de l'existence d'un élément vérifiant une propriété, et l'acte d'en considérer un et de lui donner un nom. C'est-à-dire qu'on écrit « il existe k tel que $n = 2k$ », proposition dans laquelle la variable k est muette, et à la ligne suivante on parle de k. Cependant, si on écrit ensuite « il existe k tel que $m = 2k$ », le mathématicien expert saura qu'il ne faut pas continuer avec k, mais plutôt avec k', mais un certain nombre d'étudiants n'ont pas

cette expertise. De même, les mathématiciens ne se laissent pas piéger par la « règle de dépendance » dans les énoncés *pour tout… il existe…*, et repèrent très facilement cette erreur dans une production d'étudiant. Mais par contre, ils n'expliquent pas forcément cette erreur aux étudiants en la mettant en relation avec des règles formelles de manipulation des variables et des quantificateurs (Durand-Guerrier & Arsac, 2003).

ANALYSE DU SAVOIR À ENSEIGNER

La référence ainsi constituée dans ma thèse soulève pour chaque notion de logique des points sensibles qu'il convient de regarder plus particulièrement dans l'analyse du *savoir à enseigner*. Mais avant de regarder notion par notion, des questions plus globales se posent : Quelles notions de logique sont présentes ? Comment la logique est-elle reliée à un apprentissage du raisonnement et du langage mathématiques ? Quel est le niveau de formalisation des notions de logique ?
Reprenant les outils de l'approche écologique (Artaud, 2011), j'ai ainsi recherché habitat(s) (où trouve-t-on les notions de logique) et niche(s) (quelle est leur fonction) de la logique dans les textes des programmes et des documents les accompagnant depuis 1960. Pour cerner le contexte dans lequel est écrit chacun de ces programmes, je me suis appuyée sur différents textes publiés par l'APMEP[6], notamment le Bulletin, publication trimestrielle de l'association. J'utilise ces textes comme des indicateurs des interrogations de la communauté de l'enseignement des mathématiques. Des positions diverses s'y expriment, pas seulement celles prises officiellement par l'association. Je fais ainsi des allers-retours entre analyses des programmes à l'aide des outils de l'analyse écologique qui permettent de préciser la demande institutionnelle, et analyses des bulletins de l'APMEP, qui aident à en comprendre l'évolution, en montrant le point de vue des acteurs de la mise en œuvre de cette demande.
Cependant, comme le souligne Arsac, le savoir à enseigner ne se réduit pas aux textes officiels (d'ailleurs les enseignants se contentent rarement de cette seule lecture pour préparer leurs cours) :

> [le savoir à enseigner] ne se réduit pas au programme, nous avons remarqué en effet qu'un texte de programme appelle une interprétation. Le savoir à enseigner est ce que l'enseignant pense qu'il a à enseigner quand les manuels publiés, les annales, les habitudes prises, ont fixé à peu près définitivement l'interprétation du programme. (Arsac, 1989, pp. 12-13)

Parmi les ressources publiées à côté des textes officiels, les manuels ont une place importante. Ils sont un élément charnière de la transposition. Tout d'abord, ils donnent à voir des choix d'organisation d'enseignement de notions de logique, c'est-à-dire une interprétation possible des programmes à l'intérieur d'un système de contraintes qui leur est propre. Mais, par leur manière de présenter les notions et par le choix et l'organisation des tâches qu'ils proposent, ils sont aussi une ressource pour les choix didactiques des enseignants. J'ai réalisé une analyse de manuels en deux temps : tout d'abord une étude des « pages logiques » des manuels, c'est-à-dire des pages où sont présentées les notions de logique, dans l'ensemble des manuels de Seconde publiés pour la rentrée 2010, ainsi que dans 3 manuels de Seconde publiés en 1969[7], puis une étude des tâches proposées dans 5 manuels actuels.
Ces analyses, menées avec une perspective historique, éclairent les enjeux des choix faits pour

6 Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

7 L'étude de manuels de 1969 a pour but de donner une idée de l'approche adoptée à cette époque, nous pouvons faire l'hypothèse d'une certaine homogénéité dans les manuels, qui fait qu'il n'est pas nécessaire de proposer une étude de tous les manuels de cette époque, documents plus difficiles à se procurer que les manuels récents.

définir le savoir à enseigner, choix qui participent d'un système de conditions et de contraintes auquel sont soumis les enseignants. Je présente ici quelques résultats de l'étude globale des programmes, documents d'accompagnement et textes de l'APMEP, puis de l'étude plus locale des quantificateurs dans l'ensemble des documents actuels.

Étude des programmes et des documents d'accompagnement : point de vue global

J'ai centré mon étude sur les programmes pour la classe de Seconde[8], et je l'ai menée en distinguant quatre périodes selon la place attribuée à la logique dans ces programmes :

- de 1960 à 1969 : en 1960, la logique fait une entrée dans les programmes. Et dans les années qui suivent, des expériences sont faites sur le terrain, certaines pratiques d'enseignement sont débattues, notamment en ce qui concerne l'emploi des symboles logiques.
- de 1969 à 1981 : le programme de mathématiques pour les classes[9] de Seconde de 1969 est celui des mathématiques modernes. C'est une période dans laquelle la logique est objet explicite d'enseignement. Mais cette réforme donne rapidement lieu à de vives critiques.
- de 1981 à 1999 : le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1981 est celui de la contre-réforme. La logique en est exclue, accusée de participer au formalisme excessif reproché aux mathématiques modernes. Cette exclusion se poursuit dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1990.
- depuis 1999 : la logique fait un timide retour dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1999, puis dans le programme pour la classe de Première de la section littéraire en 2004, puis finalement un retour plus explicite dans le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009.

Je présente ici les résultats de cette analyse en proposant une comparaison entre la période des mathématiques modernes et la période actuelle.

Dans tous les textes institutionnels étudiés, la maîtrise du raisonnement et de l'expression est un objectif affiché de l'enseignement des mathématiques. Mais la logique mathématique n'est une référence pour cet apprentissage que durant la période des mathématiques modernes (1969-1981), et, à un degré moindre, depuis 1999. Nous pouvons donc parler, dans ces deux périodes, de deux niches qui correspondent aux deux piliers de la logique : une niche raisonnement et une niche langage. Ces deux niches sont bien sûr imbriquées puisque le langage est constitutif du raisonnement.

Dans ces deux périodes nous pouvons également parler d'un habitat flou pour la logique qui doit être présente partout, son étude accompagnant celle des notions vues dans les autres chapitres. Il y a cependant une différence notable sur ce point entre les deux périodes, qui révèle deux positions distinctes quant à la dimension objets des notions de logique. Pendant la période des mathématiques modernes, un chapitre spécifique était consacré à ces notions, étudiées en tant qu'objets mathématiques. Ce chapitre était placé en début de Seconde et il avait pour but de poser des bases qui seraient ensuite réinvesties à de multiples occasions. Dans le programme pour la classe de Seconde de 2009, il est précisé qu'il ne faut pas faire de cours et le programme ne suggère d'aborder les notions de logique que dans leur dimension outil.

L'étude de documents accompagnant les programmes de 1969 et de 2009 montre que, si les deux programmes mentionnent à peu près les mêmes notions de logique à étudier, les approches sont très différentes, notamment dans la place attribuée à la logique mathématique.

8 En ce qui concerne les programmes actuels, les objectifs sont presque identiques pour les classes de Seconde, Première et Terminale et seul un document d'accompagnement a été publié, pour la classe de Seconde.

9 Il y avait à l'époque trois sections pour la classe de Seconde.

Dans la période des mathématiques modernes, le *Commentaire pour les programmes de mathématiques des classes de Seconde* de 1970 qui accompagne les programmes de 1969 (désigné ensuite par *le commentaire de 1970*) propose un très synthétique cours de logique mathématique, en précisant que ce qui est exposé est surtout à visée de formation des enseignants plutôt que directement destiné aux élèves. Cet exposé n'est pas accompagné d'exemples d'activités pour la classe. À l'inverse, le document *Ressources pour la classe de Seconde, Notations et raisonnement mathématiques* de 2009 (désigné ensuite par *le document ressource*) propose une série d'exercices sur les éléments de logique au programme, mais aucune considération théorique les concernant. Il n'est ainsi pas question de les présenter, ni pour les élèves, ni même pour les enseignants à partir de l'approche de la logique mathématique. Plusieurs différences entre l'utilisation de certains mots (et, ou, un, si… alors…) dans le langage courant et dans le langage mathématique sont soulignées, mais aucun terme de la logique mathématique n'est utilisé pour expliquer ces différences (par exemple, les termes « quantificateur universel » et « quantificateur existentiel » ne sont pas utilisés pour parler des différents sens dans l'emploi du mot *un*).
Finalement, l'étude de ces deux documents nous permet de préciser les liens entre logique et langage dans ces deux périodes. Durant la période des mathématiques modernes, l'ancrage dans la niche langage est plus fortement affirmé : la formalisation du langage mathématique est vue comme bénéfique, structurante pour l'activité mathématique, et la logique mathématique est vue comme une aide à la maîtrise d'un langage formalisé beaucoup plus largement utilisé au lycée qu'aujourd'hui. Dans le programme actuel, même si la logique est reliée au langage, la maîtrise d'un langage mathématique spécifique n'est plus affichée comme objectif . Les principes de la logique mathématique sont en effet mis en parallèle avec les principes de la logique du langage courant, mais dans les commentaires du document ressource, les premiers semblent consister en des précisions nécessaires pour adapter les deuxièmes à la rigueur requise en mathématiques, qui exige notamment l'univocité de certains termes. Le traitement des notions de variable et de proposition est un indicateur de ces différentes positions par rapport au langage mathématique : elles sont présentées comme des notions essentielles dans le commentaire de 1970, elles sont absentes du document ressources de 2009.
L'étude des documents publiés par l'APMEP montre que l'enseignement de la logique est beaucoup plus une préoccupation des enseignants durant la période des mathématiques modernes qu'actuellement (une liste des articles publiés dans le Bulletin de l'APMEP sur ce sujet se trouve dans Mesnil, 2014, pp. 441-443). En 1967 et 1968, l'APMEP publie dans le Bulletin des articles théoriques sur la logique mathématique, montrant ainsi la volonté de former les enseignants en matière de logique avec cette référence. D'autres textes publiés dans le Bulletin témoignent des débats qui ont accompagné la période des mathématiques modernes, notamment autour de la présentation axiomatique dans l'enseignement des mathématiques. S'agissant plus particulièrement des notions de logique, le débat sur l'utilisation ou non des symboles de quantificateur a été particulièrement vif. Des expériences d'enseignement de logique sont relatées, de l'école primaire au lycée. Les auteurs y mettent en avant le travail sur le langage que permet la logique. La formalisation est défendue par plusieurs enseignants comme un élément fécond pour la conceptualisation des notions mathématiques. Pour la période actuelle, le premier article publié dans le Bulletin qui concerne la logique est paru en novembre 2014, et c'est au jour d'aujourd'hui le seul.

Les quantificateurs dans le programme, le document ressource et les manuels actuels

Je reviens maintenant plus spécifiquement sur les quantificateurs, en proposant un travail d'analyse d'extraits du programme, du document d'accompagnement ou de manuels. La

référence construite dans la thèse fonctionne comme une grille de lecture permettant de porter attention à des points sensibles, et nous verrons que les trois approches choisies sont effectivement convoquées.
Le programme de 2009 préconise que « les élèves [soient] entraînés, sur des exemples, à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles ∀, ∃ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ». Le document ressource précise qu'« il convient d'amener progressivement les élèves à prendre l'habitude de faire apparaître les quantifications dans leurs productions écrites, quand la compréhension le demande ». On voit que quantification et quantificateurs ne sont pas vraiment distingués, et l'expression « faire apparaître les quantifications » est ambiguë. On voit également la méfiance persistante vis-à-vis d'un formalisme excessif, puisque ceci n'est demandé que « quand la compréhension le demande ». Il est laissé à la charge des enseignants de savoir identifier ces moments. L'exemple de la tâche du labyrinthe montre qu'ils ne le font pas si facilement, tant l'interprétation de certaines expressions fait partie de leurs pratiques langagières. Le document ressource propose un exemple de tâche donnant lieu à une explicitation des quantifications (figure 2). Nous allons voir que la non distinction entre le niveau du discours mathématique et le niveau du langage mathématique empêche un propos clair sur les quantificateurs.

Exemple 3

Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications.
Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.
(*Pour tout nombre réel x, l'image de x par la fonction f est égale à $2x + 5$*)
L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
(*Existe-t-il des nombres réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux ?*)
Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
(*Trouver l'ensemble de tous les réels x pour lesquels $f(x)$ et $2x + 5$ sont égaux*)

Dans les deux énoncés, la trace écrite (au tableau ou sur le cahier) est souvent la même :

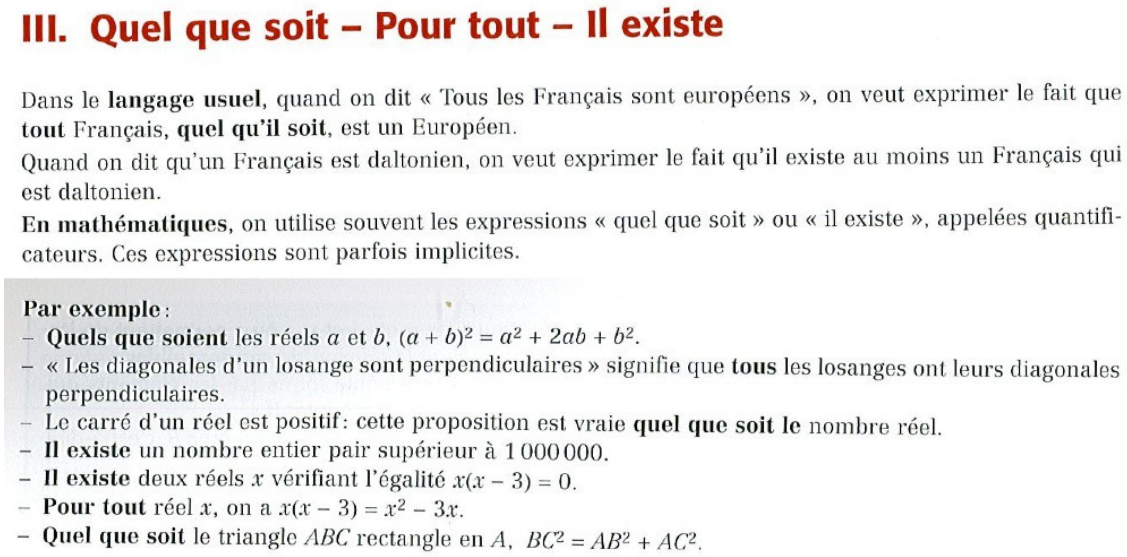
$$f(x) = 2x + 5.$$

Cependant les deux énoncés n'ont bien sûr pas le même statut : le premier énoncé définit une fonction, le second conduit à résoudre (graphiquement ou par calcul) une équation. Il est important de clarifier par oral ces différents statuts dès que l'occasion se rencontre, et dans certains cas, de faire noter les quantifications par écrit, sans formalisme excessif.

Figure 2 : extrait du document ressource « Notations et raisonnement mathématiques », explicitation des quantifications, page 4

Une première remarque sur cet exemple : nous l'avons vu, les quantificateurs servent à construire des propositions mathématiques, or ici, aucun des trois énoncés n'est une proposition mathématique. Cela complique l'exercice, et rend sa correction délicate. Regardons par exemple le premier énoncé : celui donné initialement et celui donné en dessous en italique (qui, par contre, est une proposition) ne sont pas synonymes, puisque ce qui est contenu dans le « soit » (qui marque l'introduction d'un objet et d'un nom choisi pour cet objet par une personne en train de faire des mathématiques) n'est pas repris.
Cherchons alors à formuler des propositions faisant intervenir l'expression « $f(x) = 2x + 5$ », qui est effectivement quantifiée différemment selon le contexte. Pour le premier exemple, il suffit de se contenter de la proposition « la fonction f est définie par $f(x) = 2x + 5$ », dans laquelle l'expression « f est définie par » masque effectivement une quantification universelle. Pour le deuxième, il suffit de ne pas le proposer sous forme interrogative, et de se contenter de la proposition « l'équation $f(x) = 2x + 5$ a au moins une solution », dans laquelle l'expression « l'équation a au moins une solution » masque une quantification existentielle. Cette rigueur paraît indispensable dans cet exercice, qui présente alors l'intérêt de montrer aux élèves comment une proposition telle que « $f(x) = 2x + 5$ » peut être insérée dans différentes propositions, et mêlée à des expressions exprimant différentes quantifications. Par contre,

dans le dernier énoncé, il n'y a pas de proposition mathématique sous-jacente, mais seulement le nom d'un objet : « l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 2x + 5$ », qui peut s'écrire « $\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 2x + 5\}$ », où n'intervient aucune quantification, mais dans laquelle la variable x est également muette.
La réintroduction de notions de logique dans le programme a eu un effet sur les manuels : ceux publiés en 2010 pour la classe de Seconde évoquent tous, au moins en partie, ces notions. 9 manuels sur 10 ont choisi de consacrer quelques pages (entre 1 page et 9 pages) aux notions de logique, mais pas comme un chapitre, généralement au début ou à la fin du manuel (seul 1 manuel le fait de manière disséminée). Par ailleurs, ils contiennent tous des exercices estampillés « logique » (de 10 à 54 exercices dans les manuels étudiés).
Dans les 8 manuels qui traitent des quantificateurs, ceux-ci sont introduits par des exemples. 7 de ces 8 manuels ne donnent que des exemples de propositions quantifiées vraies, comme dans l'extrait du manuel *Indice* de la figure 3.



III. Quel que soit – Pour tout – Il existe

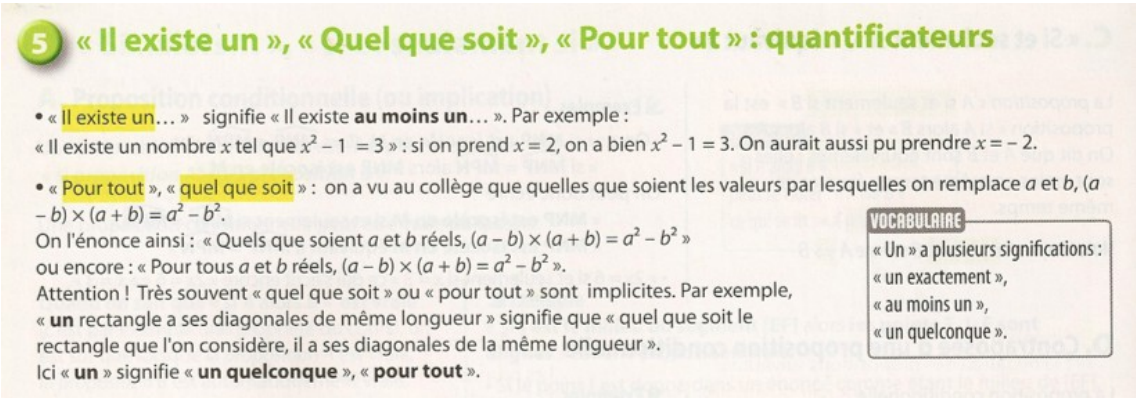
Dans le **langage usuel**, quand on dit « Tous les Français sont européens », on veut exprimer le fait que **tout** Français, **quel qu'il soit**, est un Européen.
Quand on dit qu'un Français est daltonien, on veut exprimer le fait qu'il existe au moins un Français qui est daltonien.
En mathématiques, on utilise souvent les expressions « quel que soit » ou « il existe », appelées quantificateurs. Ces expressions sont parfois implicites.

Par exemple :
- **Quels que soient** les réels a et b, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
- « Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires » signifie que **tous** les losanges ont leurs diagonales perpendiculaires.
- Le carré d'un réel est positif : cette proposition est vraie **quel que soit le** nombre réel.
- **Il existe** un nombre entier pair supérieur à 1 000 000.
- **Il existe** deux réels x vérifiant l'égalité $x(x - 3) = 0$.
- **Pour tout** réel x, on a $x(x - 3) = x^2 - 3x$.
- **Quel que soit** le triangle ABC rectangle en A, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Figure 3 : extrait du manuel Indice Maths 2^de^, pages 23-24

Dans une telle présentation, l'aspect syntaxique des quantificateurs n'est pas du tout présent. On ne se sert des quantificateurs que pour affirmer quelque chose, il n'y a pas du tout l'idée d'une proposition construite avec un quantificateur dont on peut se demander si elle est vraie ou fausse. Les auteurs comptent sur la compréhension des expressions utilisées pour signifier la quantification à partir de leur utilisation dans le langage courant. Comme le suggère le programme, ils mentionnent la quantification implicite liée au mot « un » : il est d'abord utilisé dans une proposition non mathématique où il a une signification existentielle, puis dans deux propositions mathématiques où il a une signification universelle. Mais ces exemples étant donnés dans des contextes différents, étant placés à des endroits de la page différents, et n'étant pas mis explicitement en relation, l'ambiguïté qu'ils sont censés illustrer n'est pas clairement explicitée. Regardons maintenant d'un peu plus près un premier exemple : dans la proposition « le carré d'un réel est positif », pour savoir que l'interprétation du « un » est une interprétation universelle, il faut… savoir que la proposition universelle est vraie ! Ce sont donc des connaissances mathématiques qui permettent de trancher entre les deux interprétations possibles du mot « un » (de même, sans savoir qu'il existe des français qui ne sont pas daltoniens, on ne peut pas trancher pour une interprétation existentielle dans le premier exemple). Cela invite à la prudence lors de l'utilisation de ce mot « un » dans un contexte où les connaissances des élèves sont éventuellement fragiles. Toujours à propos de cet exemple, il est dit que « cette proposition est vraie quel que soit le nombre réel ». Or, la

proposition désignée dans ce commentaire est la proposition non quantifiée « le carré de x est positif » dans laquelle la variable x désigne un nombre réel, qui est une proposition ouverte que l'on ne peut pas exprimer sans variable. Cela n'a pas de sens de dire que la proposition « le carré d'un réel est positif », qui est équivalente à « pour tout réel x, le carré de x est positif » est vraie quel que soit le réel x, puisque la variable x est alors muette. Il y a finalement une confusion entre l'utilisation de l'expression « quel que soit » pour marquer simplement la quantification universelle, et son utilisation pour signifier que cette proposition universelle est vraie (on retrouve ces deux utilisations si l'on dit que la proposition « quel que soit le réel x P[x] » est vraie lorsque quel que soit le réel x la proposition « P[x] » est vraie).
Regardons maintenant l'exemple « il existe deux réels x vérifiant l'égalité $x(x - 3)=0$ ». L'expression « il existe » marque ici une quantification, et non un quantificateur. En effet, reformuler cette proposition[10] en utilisant des quantificateurs demanderait d'utiliser deux variables : « il existe un réel x, il existe un réel y tels que ($x \neq y$ et $x(x – 3)=0$ et $y(y - 3)=0$) ».
Dans l'exemple « il existe un nombre entier pair supérieur à 1 000 000 », il n'y a pas de variable, et il s'agit également d'une quantification et non d'un quantificateur. Finalement, il n'y a donc pas d'exemple d'une proposition se présentant simplement sous la forme « il existe x tel que P[x] », c'est-à-dire pas d'exemple avec le quantificateur existentiel. Le quantificateur existentiel est moins présent dans ce qui concerne les notions de logique dans les manuels que le quantificateur universel. Certes, ce déséquilibre se retrouve dans les énoncés des théorèmes mathématiques, mais les difficultés soulignées dans la référence concernant le quantificateur existentiel montrent qu'il est nécessaire de ne pas le négliger.
Bien sûr, la transposition consiste en des adaptations du savoir savant, et il n'est pas question de présenter les quantificateurs dans les manuels de Seconde comme cela pourrait être fait dans un livre de logique mathématique. Mais les remarques dont j'ai fait part à propos de cet extrait de manuel laissent penser que, dans les choix qu'ils opèrent, les auteurs ne portent pas d'attention particulière aux points sensibles soulignés dans la référence, dont ils n'ont peut-être pas conscience. Ce constat ne s'applique pas à tous les manuels, par exemple, dans l'extrait du manuel *Math'x* de la figure 4, on ne retrouve pas les confusions évoquées.



5 « Il existe un », « Quel que soit », « Pour tout » : quantificateurs

• « Il existe un… » signifie « Il existe **au moins un**… ». Par exemple :
« Il existe un nombre x tel que $x^2 - 1 = 3$ » : si on prend $x = 2$, on a bien $x^2 - 1 = 3$. On aurait aussi pu prendre $x = -2$.

• « Pour tout », « quel que soit » : on a vu au collège que quelles que soient les valeurs par lesquelles on remplace a et b, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$.
On l'énonce ainsi : « Quels que soient a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ »
ou encore : « Pour tous a et b réels, $(a - b) \times (a + b) = a^2 - b^2$ ».
Attention ! Très souvent « quel que soit » ou « pour tout » sont implicites. Par exemple, « **un** rectangle a ses diagonales de même longueur » signifie que « quel que soit le rectangle que l'on considère, il a ses diagonales de la même longueur ».
Ici « **un** » signifie « **un quelconque** », « **pour tout** ».

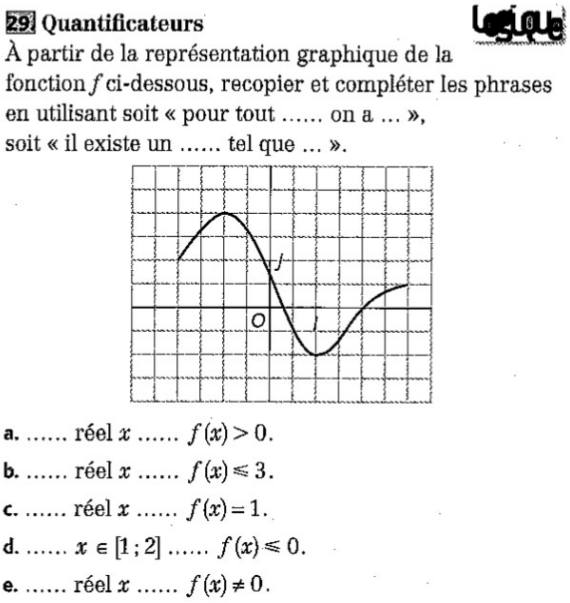
VOCABULAIRE
« Un » a plusieurs significations :
« un exactement »,
« au moins un »,
« un quelconque ».

Figure 4 : extrait du manuel 2de Math'x, page 354

Pour ce qui est des exercices, les quantificateurs sont la deuxième notion la plus présente (19,5% des tâches), derrière l'implication (32,6%). Il y a essentiellement deux types de tâche : dire si une proposition quantifiée est vraie ou fausse, compléter avec un quantificateur.
Par exemple, regardons l'exercice de la figure 5 extrait du manuel *Repères*. La consigne « compléter soit avec… soit avec… » laisse à penser qu'à chaque fois, un seul des quantificateurs est correct. Pourtant, lorsque la proposition « pour tout x P[x] » est vraie, la proposition « il existe x tel que P[x] » est vraie aussi, donc quand il est possible de compléter

10 En interprétant « il existe deux » comme « il existe au moins deux », l'interpréter comme « il existe exactement deux » donnerait une reformulation encore plus complexe.

avec le quantificateur universel, il est également possible de compléter avec le quantificateur existentiel. Dans le langage courant, nous respectons le principe du maximum d'information, selon lequel nous donnons à notre interlocuteur toutes les informations en notre possession. Ainsi, si je dis « pendant mes vacances, certains jours il a plu », je dis en même temps qu'il n'a pas plu tous les jours. L'habitude de ce principe nous amène dans cet exercice à compléter naturellement par le quantificateur universel lorsque cela est possible. Pour autant, ce serait en contradiction avec la notion de vérité d'une proposition d'aller jusqu'à dire que compléter alors avec le quantificateur existentiel est une erreur, car pour ce qui est des propositions mathématiques, si la proposition « pour tout x P[x] » est vraie, elle n'est pas « plus vraie » que la proposition « il existe x tel que P[x] ». Certains élèves adoptent cependant cette position, et le manuel du professeur qui ne propose comme correction que le quantificateur universel lorsque que cela est possible laisse planer le doute sur la position de ses auteurs.



29 Quantificateurs Logique

À partir de la représentation graphique de la fonction f ci-dessous, recopier et compléter les phrases en utilisant soit « pour tout ..... on a ... », soit « il existe un ..... tel que ... ».

a. ..... réel x ..... $f(x) > 0$.

b. ..... réel x ..... $f(x) \leqslant 3$.

c. ..... réel x ..... $f(x) = 1$.

d. ..... $x \in [1\,;2]$ ..... $f(x) \leqslant 0$.

e. ..... réel x ..... $f(x) \neq 0$.

Figure 5 : extrait du manuel Maths 2de Repères, page 77

Signalons un exercice du manuel *Hyperbole* d'un type légèrement différent (figure 6) : il s'agit de compléter une implication existentiellement quantifiée de façon à ce qu'elle soit vraie puis fausse.

82 Propositions vraies ou fausses

Recopier et compléter la phrase :

« Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$, alors ... »

pour obtenir :

a) une proposition vraie ;

b) une proposition fausse.

Figure 6 : extrait du manuel Mathématiques Seconde, Hyperbole, page 91

Il est impossible de compléter la proposition donnée de manière à ce qu'elle soit fausse. On le verra facilement en utilisant la forme disjonctive de l'implication : il faut compléter de manière à rendre fausse la proposition « Il existe au moins un réel x tel que ($x^2 \neq 36$ ou …) ». Or, elle est équivalente à « (Il existe au moins un réel x tel que $x^2 \neq 36$) ou (il existe au moins un réel x tel que …) », qui ne peut pas être fausse car « Il existe au moins un réel x tel que $x^2 \neq 36$ » est vraie. Un tel exercice est construit artificiellement pour faire travailler les notions de logique, on ne rencontre pas dans le discours mathématique d'implication existentiellement quantifiée, et il faut vraiment mobiliser des connaissances en logique mathématique pour voir qu'il n'est pas possible de répondre à la question b), connaissances qui semblent faire défaut

aux correcteurs qui proposent la solution « Il existe au moins un réel x tel que si $x^2 = 36$ alors $0 \leq x \leq 3$ ».
Finalement, dans le programme et le document ressource, le discours sur les notions de logique reste en grande partie informel, et le document ressource, pourtant à destination des enseignants, ne propose aucun élément théorique. Cette absence de référence dans le programme se ressent dans les manuels actuels, et ce que j'espère avoir donné à voir pour les quantificateurs est valable pour les autres notions de logique : le discours est assez différent d'un manuel à l'autre, il reste également en partie informel, et les notions de logique y sont même parfois malmenées. Une conséquence immédiate de la défiance affichée vis-à-vis de la formalisation des notions est l'absence quasi totale de leur aspect syntaxique.
Nous pourrions résumer très rapidement les résultats précédents en décrivant la situation actuelle en quelques mots : à un savoir de référence absent s'ajoute un savoir à enseigner imprécis. Il semble alors que les enseignants de lycée d'aujourd'hui pourraient légitimement se sentir en difficulté pour proposer à leurs élèves un enseignement de notions de logique permettant d'atteindre les objectifs du programme.

ANALYSE D'UNE FORMATION

Dans ce contexte particulièrement complexe, la formation des enseignants est d'autant plus importante. Or, la logique mathématique est absente de la plupart des cursus universitaires de mathématiques. De plus, l'enseignement de notions de logique n'était plus explicitement au programme entre 1981 et 2009, et nous pouvons supposer que les difficultés des élèves relevant de la logique étaient encore moins étudiées dans la formation des enseignants dans cette période qu'actuellement. Puisque depuis 2009 les programmes mentionnent de nouveau des notions de logique, il est légitime de se poser la question de ce qu'il est possible de proposer dans le cadre de la formation.

Des besoins de formation

Les études épistémologique et didactique de la première partie de la thèse m'ont permis de dégager des besoins supposés de formation, que j'ai comparés à des besoins ressentis dégagés des résultats d'un questionnaire soumis à 50 enseignants de Seconde. Cette comparaison m'a permis de lister des besoins de formation concernant l'enseignement de notions de logique :

- besoin d'une formation théorique, de connaissances sur les notions de logique, mais abordées en lien avec l'activité mathématique. Quelques enseignants, mais ils restent minoritaires, ressentent un manque de connaissances, qu'ils aient ou non eu une formation, même minimale, en logique mathématique. Quelques autres enseignants, qui n'ont eu aucune formation en logique mathématique, considèrent que les connaissances en acte dont ils usent dans leur propre activité mathématique sont suffisantes pour enseigner les notions de logique. Il y a donc un besoin de faire prendre conscience aux enseignants du fait que la complexité des notions de logique nécessite des outils permettant d'adopter une position réflexive indispensable quand il s'agit de transmettre ces connaissances.
- Besoin de constituer une référence qui amorce la transposition didactique. Ce *savoir de référence* devrait permettre de préciser le *savoir à enseigner* et de mettre en place un *savoir enseigné* qui prenne en compte les dimensions outil et objet des notions de logique.
- Besoin de ressources à destination des élèves, et surtout d'outils pour l'analyse d'activités permettant de travailler sur les notions de logique (outils pour une rédaction particulièrement rigoureuse des activités portant explicitement sur des notions de

logique, outils pour dégager un possible travail sur des notions de logique dans des activités où elles ne sont pas spécifiquement visées).

- Besoin de réhabiliter le pilier langage de la logique. Les enseignants associent plus spontanément la logique au raisonnement. Par ailleurs, ils montrent une défiance vis-à-vis de la formalisation du langage, et il y a donc un besoin de montrer comment cette formalisation peut aussi lever des ambiguïtés et participer à la conceptualisation des notions, de logique bien sûr, mais aussi de mathématiques en général.

Une étude de cas : l'analyse de la formation continue « Initiation à la logique » de l'IREM de Paris

Je me suis ensuite intéressée à une formation particulière : la formation *Initiation à la logique* proposée par l'IREM de Paris dans le cadre de la formation continue des enseignants. Bien que participant activement au stage et à sa conception, je prends pour ma recherche une position distanciée pour pouvoir questionner les choix d'organisation et de contenu de la formation.

Le langage est au cœur de cette formation de 3 jours, et les notions de logique sont étudiées à partir d'une approche naïve basée sur l'analyse du langage et du discours mathématique. Nous retrouvons en grande partie l'approche choisie pour la référence proposée dans la thèse, et l'analyse de cette formation permet alors une validation expérimentale de cette référence. Je regarde finalement comment les contenus proposés dans la formation se constituent en savoir de référence pour les enseignants qui la suivent, au sens d'un savoir partagé par une communauté[11]. Parallèlement à cette question, j'ai également analysé la façon dont les formateurs amènent les stagiaires à prendre conscience des implicites et des ambiguïtés des pratiques langagières des mathématiciens, et comment cet axe fort du contenu de la formation est perçu par les stagiaires.

La comparaison du scénario de la formation avec les besoins de formation précédemment identifiés montre qu'elle y répond *a priori* en grande partie. L'analyse du déroulement effectif à partir des vidéos et des transcriptions montre ce qu'il en est *a posteriori*. J'ai analysé finement la première journée, et notamment la première matinée dans laquelle le formateur démarre l'étude naïve du langage mathématique avec un exposé qui fonctionne à la manière de ce que Hersant (2004) appelle un cours dialogué.

J'ai finalement cherché à évaluer les effets de la formation à partir de présentations d'activités réalisées par des stagiaires lors de la troisième journée du stage, et de leurs réponses à un questionnaire-bilan.

Dans la formation, les notions de logique sont abordées à travers une approche naïve : elles ne sont pas mathématiquement définies comme cela serait fait dans un cours de logique mathématique. Pourtant, elles acquièrent un statut d'objet en étant décontextualisées des situations où elles sont rencontrées. Il y a des phases ponctuelles d'institutionnalisation, prises en charge par les formateurs. Elles sont prévues par le formateur dans l'exposé sur l'analyse du discours mathématique, ou insérées dans un moment qui ne leur est pas particulièrement destiné (présentation d'activités pour la classe par exemple). Certaines propriétés des notions de logique sont alors précisées, et sont réinvesties dans d'autres situations, il y a ainsi une mise en œuvre de la dialectique outil/objet. Une autre forme d'institutionnalisation se fait à travers la répétition de certaines expressions, la décontextualisation étant alors plutôt à la charge des stagiaires. La logique mathématique fonctionne comme *savoir savant* auquel se réfèrent les formateurs, mais le *savoir enseigné* dans la formation est une adaptation de ce savoir à des fins de formation des enseignants dans laquelle les formateurs oscillent entre plus

11 Il ne s'agit pas du *savoir de référence* évoqué pour étudier la transposition didactique puisque cette communauté se limite aux participants de la formation.

ou moins de formalisme. Selon qu'ils aient ou non des connaissances en logique mathématique, les stagiaires peuvent plus ou moins relier ce qui est dit au *savoir savant*.
Je dirais donc qu'il se constitue un *savoir de référence* à l'échelle du stage, dans le sens de conceptions partagées de notions de logique, caractérisées par les formateurs, et d'un vocabulaire institué pour parler de ces notions. Mais les formateurs ne proposent pas de corpus matériel qui l'exposerait. Une partie non négligeable de la constitution de ce savoir reste donc à la charge de chaque stagiaire et dépend alors des connaissances et des intérêts de chacun.
Le travail reste donc à poursuivre pour organiser ce *savoir de référence*. Il y a un noyau de contenu bien identifié, autour des éléments constitutifs du langage mathématique (variables, propositions, connecteurs, quantificateurs). Il y a des situations « d'introduction » de ces notions, qui fonctionnent plutôt bien (on pourrait cependant envisager d'y introduire plus de situations de formulation, avec un travail en groupe). Mais l'institutionnalisation pourrait être plus formalisée, pas forcément pendant la formation, mais par exemple en distribuant aux stagiaires un document dans lequel les notions seraient plus étudiées sous leur aspect objet (et qui s'apparenterait donc plus à un cours de logique).
Les stagiaires approuvent unanimement dans le bilan la stratégie choisie d'entrée dans la logique mathématique par l'étude naïve du discours mathématique. Mais plus encore que cette approbation, le fait que les trois quarts des stagiaires déclarent un impact de la formation sur la façon dont ils s'expriment dans leur classe montre une pertinence de ce choix. Plusieurs stagiaires mentionnent notamment un réel changement de pratiques quant à l'explicitation des quantifications, qu'ils jugent nécessaire à une bonne compréhension des élèves (même si elle n'est évidemment pas suffisante). L'impact de la formation est d'autant plus fort que la remise en question de certaines pratiques langagières des mathématiciens produit un effet de surprise, les formateurs amenant les stagiaires à se rendre compte que ces pratiques comportent plusieurs implicites qui peuvent être autant de difficultés pour les élèves. La première séquence de la formation, dans laquelle est mise au jour la quantification universelle implicite des implications, semble vraiment « faire mouche » et atteindre son double but de mettre en évidence une telle pratique et de montrer le déficit d'outils pour l'analyser. Les notions de variable, proposition, connecteur, quantificateur sont des éléments constitutifs d'un langage qui sert de référence pour analyser des énoncés couramment utilisés en mathématiques. Si la plupart des stagiaires se disent donc conscients que les quantifications sont importantes à souligner, ils ne font cependant pas tous les mêmes choix pour l'explicitation des quantifications : certains vont utiliser beaucoup plus les quantificateurs universel et existentiel dans leurs énoncés, d'autres font le choix de marquer cette quantification par des termes plutôt empruntés au langage courant (toujours, forcément, dans tous les cas).
La deuxième séquence du stage portait sur la notion de proposition. Les stagiaires se déclarent en moyenne très intéressés personnellement par l'apport du stage sur cette notion, pour laquelle ils sentaient leurs connaissances avant le stage à peine suffisantes. Pourtant, cet apport du stage leur paraît difficilement exploitable en classe. Il en va de même pour la notion de variable. Celle-ci occupe une place très importante dans le stage, avec des apports théoriques sur le statut (parlante ou muette) de la variable et la notion de signe mutificateur. Ces deux notions de proposition et de variable sont quasiment absentes du *savoir à enseigner*.
Il y a donc une réelle prise de position des formateurs qui leur accordent une place importante dans le stage, mais leur discours semble encore insuffisant pour que les stagiaires leur accordent une telle place dans la classe. Pour continuer à défendre une telle position, il me paraît nécessaire de relier le discours théorique à des phénomènes que les enseignants peuvent observer dans leur classe (comme c'est fait pour la quantification universelle implicite associée à l'implication). Il y a donc un travail didactique d'identification des situations où des conceptions erronées des notions de variable ou de proposition posent problème. Ce qui

bien sûr est d'autant plus difficile qu'elles ne sont pas l'objet d'activités spécifiques.
Les données que j'ai récoltées sont trop limitées pour pouvoir donner des résultats sur une éventuelle modification des pratiques. C'est finalement plutôt l'activité des stagiaires en tant qu'« élèves » de la formation que j'ai observée. Pour étudier un effet sur les pratiques, il faudrait compléter cela d'observations des stagiaires dans leur activité d'enseignant, c'est-à-dire de retour dans leur classe. J'ai cependant déjà mentionné que les stagiaires déclarent une modification de leurs pratiques concernant la façon dont ils s'expriment en classe.
À plusieurs moments dans le stage les pratiques individuelles sont mises en relation avec des pratiques institutionnelles (hésitation des enseignants à faire des moments d'institutionnalisation mis en relation avec les hésitations du programme, pratiques langagières qui sont celles de la communauté mathématique). Les trois quarts des stagiaires déclarent que le stage leur a apporté des éléments pour concevoir des activités portant sur la logique. Plusieurs propositions d'activités pour la classe sont faites pendant le stage, mais les stagiaires les découvrent en même temps qu'est raconté leur déroulement effectif. Les discussions au sujet de ces activités seraient sans doute plus riches en laissant aux stagiaires plus de temps pour les découvrir et imaginer une utilisation possible. Par ailleurs, là aussi le stage gagnerait sûrement à être accompagné d'une ressource papier dans laquelle ces activités seraient présentées.

CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La constitution d'une référence pour l'enseignement de la logique combinant trois approches est finalement le cœur de ma recherche. Elle permet d'étudier l'enseignement de notions de logique dans le secondaire en pensant la transposition didactique du savoir logique des mathématiciens non pas à partir d'un savoir savant (qui serait la logique mathématique) mais à partir d'un savoir de référence qui prend en compte une dimension pragmatique à partir des pratiques langagières et une dimension didactique à partir des difficultés supposées des élèves. J'ai d'abord argumenté les choix de contenu de cette référence : le choix de « l'entrée langage » adoptée est cohérente avec l'étude épistémologique, et en résonance avec plusieurs travaux didactiques. J'ai ensuite exploité cette référence comme outil d'analyse, montrant qu'elle permettait une sensibilité accrue à des points délicats de l'enseignement de notions de logique. Le travail sur cette référence est bien sûr à poursuivre. J'ai proposé une contribution à une réflexion qui doit être collective et menée sur un long terme par des logiciens, mathématiciens, didacticiens, enseignants (éventuellement aussi linguistes, psychologues…) pour finalement se mettre d'accord sur des incontournables qu'une telle référence devrait comporter. Des recherches sur les notions de proposition et de variable sont notamment à poursuivre. Ce sont des éléments essentiels du langage mathématique, mais, sans doute parce qu'elles sont primordiales, elles ont été l'objet de nombreux débats au moment de la crise de fondements. Le point de vue naïf adopté dans la référence que j'ai constituée tend à gommer leur complexité, l'étude de ces débats en permettrait sans doute une description plus fine. Ces notions sont également essentielles pour parler du langage mathématique dans une perspective d'enseignement des mathématiques. Elles sont pourtant en grande partie absentes du programme et des manuels, et le discours sur le langage mathématique y reste très confus. Ainsi, c'est surtout en direction de la classe que des recherches sont à poursuivre sur ces notions, qui pourraient être structurées autour des questions suivantes : quelles difficultés des élèves peuvent être mises en relation avec une conception erronée de ces notions ? Comment les enseignants abordent-ils ces difficultés ? Qu'est-ce qu'une clarification de ces notions peut apporter sur ces deux points ? Quelles situations proposer pour les aborder ?
Un autre enrichissement de la référence constituée consisterait à redonner au raisonnement

une place plus importante. Là encore, c'est une suite naturelle au travail déjà fait sur le langage (voir par exemple l'étude des pratiques langagières dans la formulation des preuves dans Hache et Mesnil (à paraître)), pour laquelle de nombreuses recherches existantes pourraient être exploitées.

L'analyse du savoir à enseigner à l'aide de la référence construite montre qu'il reste imprécis : il est difficile d'identifier les connaissances visées dans le programme, aucun élément théorique n'est proposé pour accompagner les activités proposées dans le document ressource, il y a une grande variabilité de ce qui est proposé dans les manuels, qui va au delà des différences de choix didactiques, les propos des manuels sont parfois en contradiction avec le point de vue de la logique mathématique. Ce constat invite à diffuser les ressources déjà existantes produites par la recherche ou au sein de groupes IREM, et à en créer de nouvelles. Mais la question de l'appropriation de ces ressources par les enseignants reste ouverte, puisqu'elle nécessite que ceux-ci dépassent l'impression que la maîtrise des outils logiques issue de la pratique mathématique est suffisante afin d'accepter que la dimension objet des notions de logique, et donc des connaissances en logique mathématique, sont nécessaires pour l'enseignement de ces notions. Une façon d'argumenter cette position serait de chercher à mesurer l'effet de l'imprécision du savoir à enseigner sur le savoir enseigné, et donc sur l'activité des élèves.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADDA, J. (1988). L'évolution de l'enseignement de la logique en France. *Atti degli incontri di logica matematica, 5,* 13-26.

ARISTOTE (2008). *Organon. I. Catégories. II. De L'interprétation* (version française). Traduction française par J.Tricot. Paris : Vrin.

ARNAULD, A. & NICOLE, P. (1992). *La logique ou l'art de penser.* Paris : Gallimard. (Ouvrage original publié en 1662)

ARSAC, G. (1989). La transposition didactique en mathématiques. In G. Arsac, M. Develay & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique en mathématiques, en physique et biologie* (pp. 3-36). IREM et LIRDIS de Lyon.

ARTAUD, M. (1997). Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. In M. Bailleul *et al*. (Eds.), *Actes de la 14e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 101—139).

BEN KILANI, I. (2005). *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

CHELLOUGUI, F. (2004). *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1 et Université de Tunis.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2004). *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

DUBINSKY, E. & YIPARAKI, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics, IV,* 239-289.

DURAND-GUERRIER, V. (1996). *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x, 50*, 57-79.

DURAND-GUERRIER, V. (2005). *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique*. Note de synthèse (HDR), Université Claude Bernard Lyon 1.

DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. spécificité de l'analyse. quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 23*(3), 295-342.

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 5*, 37-65.

EL FAQIH, E. M. (1991). *Place de la logique dans l'activité mathématique des étudiants du premier cycle scientifique*. Thèse de doctorat, Université Louis Pasteur, Strasbourg.

FREGE, G. (1999). *Idéographie* (version française). Traduction française par C. Besson. Paris : Vrin.

GANDIT, M. (2004). Preuve ou démonstration, un thème pour la formation des enseignants de mathématiques : première partie. *Petit x, 65,* 36-49.

GENTZEN, G. (1955). *Recherches sur la déduction logique* (version française). Traduction française par R. Feys et J. Ladrière. Paris : Presses Universitaires de France.

HACHE, C. & MESNIL, Z. (à paraître). Pratiques langagières et preuves. In A. Chesnais, M. Gandit & G. Train (Eds.), *Actes du XXII colloque de la CORFEM*.

HERSANT, M. (2004). Caractérisation d'une pratique d'enseignement, le cours dialogué. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies, 4*(2), 241-258.

LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique : deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse de doctorat, Université scientifique et médicale, institut national polytechnique de Grenoble.

LEIBNIZ, G. W. (1998). *Recherches générales sur l'analyse des notions et des vérités. 24 thèses métaphysiques et autres textes logiques et métaphysiques* (version française). Traduction française par J. B. Rauzy et al. Paris : Presses Universitaires de France.

MESNIL, Z. (2014). *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématiques vers un objet d'enseignement.* Thèse de doctorat, Université Paris Diderot.

NJOMGANG NGANSOP, J. (2013). *Enseigner les concepts de logique dans l'espace mathématique francophone: aspect épistémologique, didactique et langagier. Une étude de cas au Cameroun*. Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1.

ROGALSKI, J. & SAMURCAY, R. (1994). Modélisation d'un savoir de référence et transposition didactique dans la formation de professionnels de haut niveau. In G. Arsac, Y. Chevallard, J. Martinand & A. Tiberghien (Eds.), *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 35-71). Grenoble : la Pensée Sauvage.

SELDEN, A. & SELDEN, J. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics, 29*(2), 123-151.

TARSKI, A. (1972). *Logique, sémantique et métamathématique* (version française). Traduction française par G. G. Granger. Paris : Armand Colin.

MANUELS SCOLAIRES

Indice, Maths 2de, BORDAS, 2009

Hyperbole, Mathématiques 2de, NATHAN, 2010

Math'x 2de, DIDER, 2010

Repères Maths 2de , HACHETTE EDUCATION, 2010

LE MANUEL SCOLAIRE : QUELLES ANALYSES DIDACTIQUES D'UN OBJET EN MUTATION ?

Ghislaine **GUEUDET**
CREAD, ESPE de Bretagne, UBO
Ghislaine.Gueudet@espe-bretagne.fr

Résumé
Les travaux présentés ici concernent l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques au second degré, en France. Dans ce contexte le manuel scolaire est une ressource essentielle pour les professeurs et les élèves. Dans le même temps, des évolutions très significatives de cet objet sont en cours, remettant en cause sa nature même. Il est essentiel que la recherche en didactique des mathématiques prenne en compte ces mutations, en mobilisant ses outils d'analyse, voire en développant de nouveaux outils.
Je présente ici des travaux menés en collaboration avec plusieurs collègues, en particulier au sein du projet ANR REVEA : Ressources Vivantes pour l'Enseignement et l'Apprentissage.
Il s'agit tout d'abord d'une recherche portant sur le choix de manuel, pour la classe de seconde, par des enseignants de lycée (Gueudet & Lebaud, 2016). Nous nous sommes intéressées aux critères et aux procédures de choix, en suivant une équipe dans un lycée et en proposant un questionnaire en ligne à l'échelle de l'académie.
Dans un deuxième temps je considère plus particulièrement les évolutions liées au numérique, toujours concernant le manuel scolaire. Nous avons proposé d'introduire le concept de *connectivité* comme caractéristique spécifique du manuel numérique (Gueudet, Pepin, Sabra, Restrepo & Trouche, 2017). Nous avons donné une définition de la connectivité d'un manuel numérique, et présenté en quoi elle pouvait permettre d'appréhender les apports spécifiques de ce type de ressource. Nous présentons ici ce travail d'élaboration théorique et méthodologique, en utilisant deux exemples de manuels numériques.

Mots clés
Manuel, Manuel numérique, Ressources

Dans ce texte nous rendons compte d'un exposé au séminaire national de Mars 2016, concernant des recherches menées sur le manuel scolaire et sur ses évolutions. Nous exposons tout d'abord des éléments de contexte ; nous présentons ensuite le paysage dans lequel s'inscrivent nos travaux : travaux connexes et cadre théorique. Nous considérons ensuite deux recherches : l'une concernant le choix d'un manuel par les professeurs de mathématiques au lycée ; l'autre les modalités d'analyse didactique spécifiques aux manuels numériques.

1. LES MUTATIONS DU MANUEL ET LEUR ETUDE : ELEMENTS DE CONTEXTE

Le premier élément de contexte motivant notre étude est l'abondance de ressources numériques disponibles pour les professeurs. C'est cette abondance de ressources qui est au

cœur du travail du projet ANR REVEA[1] : Ressources Vivantes pour l'Enseignement et l'Apprentissage (piloté par Eric Bruillard). Ce projet qui se déroule de 2014 à 2018 vise à suivre les mutations dans les usages de ressources par les professeurs du second degré, et en conséquence les mutations du travail des professeurs, dans quatre disciplines : anglais, mathématiques, sciences physiques et technologie. Il s'intéresse au travail individuel, mais aussi au travail collectif des professeurs dans les établissements scolaires et en dehors de ces établissements : dans des groupes de travail, des associations etc. La comparaison entre disciplines permet de mettre au jour des spécificités dans le travail des professeurs avec les ressources qui seraient invisibles dans le cadre familier d'une discipline unique.
Dans ce projet, pour ce qui concerne les mathématiques, le travail que j'expose ici a été effectué en collaboration avec : Marie-Pierre Lebaud, Birgit Pepin, Angela Restrepo, Hussein Sabra et Luc Trouche.
Les analyses que nous avons menées dans REVEA montrent un recours important au numérique dans le travail des professeurs de mathématiques ; mais nous avons aussi noté que les manuels scolaires restent des ressources centrales pour les professeurs. De nouvelles versions des manuels de lycées ont été publiées par la plupart des éditeurs scolaires, qui ont débuté leur travail avec le niveau de seconde en 2014 puis l'ont poursuivi année par année – ceci sans nécessité liée à un changement de programme. C'est ce qui a motivé la recherche présentée en section 3 à propos du choix de manuel scolaire par les professeurs de lycée.
Ces manuels sont utilisés sous forme papier ; parfois le fichier pdf du manuel est projeté en classe. Mais les professeurs que nous avons suivis n'utilisent jamais en revanche de manuel numérique « enrichi » : d'une part, en ce qui concerne les éditeurs commerciaux, les enseignants n'ont pas fait l'acquisition de ces manuels pour des raisons de coûts ; d'autre part, pour les ressources gratuitement disponibles en ligne, leur usage est empêché par le fait que les professeurs se trouvent souvent dans des salles sans connexion à Internet ou avec une connexion peu fiable. Ceci rejoint les constats faits par l'inspection générale dans son rapport (IGEN/IGAEN, 2013) : si tous les éditeurs produisent des manuels numériques, ceux-ci ne représentent encore qu'une partie très minime de leurs ventes : moins de 1% du chiffre d'affaires du livre imprimé. Des évolutions ont eu lieu au fil des années, qui ont mené d'une simple version pdf du livre à un environnement complet, enrichi d'exercices interactifs, offrant au professeur la possibilité d'insérer ses propres ressources dans un espace fourni par l'éditeur. Ainsi l'éditeur n'offre plus seulement un support matériel, mais un ensemble de services pour le professeur inscrit à sa plate-forme. Cependant les éditeurs en 2015 n'avaient pas encore adopté une politique commerciale mettant fortement en avant ces possibilités. Lors des changements de manuels, les professeurs reçoivent des spécimens gratuits des manuels papier, mais pas des versions numériques enrichies. Parfois ces versions ne sont produites que dans un deuxième temps, alors même que les professeurs ont déjà effectué leur choix de livres à acheter par les élèves. Il nous semble toutefois nécessaire, pour la recherche en didactique, d'anticiper ces évolutions qui vont mener à l'emploi par les professeurs des plates-formes offertes par les éditeurs – un premier pas sera très probablement franchi dès septembre 2016 en ce qui concerne le collège, puisque le ministère a lancé un appel d'offre pour la production de ressources en ligne qui pourraient supplanter les manuels papiers qui ont tout de même été produits dans le même temps (figure 1).

1 https://www.anr-revea.fr/

LOT no 4 intitulé : Mathématiques cycle 4.

1) Description succincte
Prestations d'ingénierie pédagogique pour la conception, la création et la mise à disposition de ressources numériques pédagogiques pour le champ disciplinaire "Mathématiques cycle 4".

2) Classification CPV (vocabulaire commun pour les marchés publics)
80590000.

3) Quantité ou étendue
A titre indicatif, le montant prévisionnel du lot 4 est évalué à environ 1,8 M euros (H.T.) sur la durée ferme du marché (36 mois).

Figure 1. Extrait de l'appel d'offres lancé en 2015 pour la conception de ressources numériques en lien avec la réforme du collège

C'est pourquoi il nous semble nécessaire de nous doter dès maintenant d'outils pour l'analyse didactique des manuels numériques. Nous présentons de tels outils en partie 4.

2. MANUELS ET RESSOURCES : TRAVAUX DE RECHERCHE ET CADRES THÉORIQUES

Les travaux concernant les manuels scolaires mettent en évidence le fait que cet objet apparemment simple est en réalité difficile à définir ; sa forme (en particulier avec les évolutions liées au numérique) comme ses usages, peuvent être multiples (Bruillard, 2010). Nous nous référons ici à la définition de Choppin (1992, p. 16) qui définit les manuels scolaires comme des ouvrages « conçus dans l'intention, plus ou moins explicite ou manifeste (…) de servir de support écrit à l'enseignement d'une discipline au sein d'une institution scolaire ». Ces ouvrages peuvent être sur support papier ou numérique ; ils intègrent des textes, mais peuvent aussi désormais inclure divers autres médias. D'où notre choix de parler de manuels et de ressources, dans tout ce qui suit.

2.1 Recherches sur les manuels scolaires

La recherche sur les manuels scolaires est un champ très actif dans le monde, anglo-saxon et asiatique en particulier. En sciences de l'éducation, une association mondiale, IARTEM[2], propose des conférences régulières et édite un journal sur ce sujet. En ce qui concerne la didactique des mathématiques, un groupe thématique « textbooks » a longtemps travaillé dans les conférences ICME. Il a donné lieu à la publication d'un numéro spécial de ZDM, qui présente un bilan des travaux sur ce thème (Fan, Zhu & Miao, 2013 ; Fan, 2013). Ce thème de recherche est en plein essor ; c'est ainsi que s'est tenue à Southampton en 2014 la première « International Conference on Mathematics Textbooks Research and Development » (Jones, Bokhove, Howson & Fan, 2014). Dans la communauté ARDM également, des travaux se développent à propos des manuels et des ressources, qui semblent plutôt toucher l'enseignement au premier degré, on peut citer par exemple les travaux de Arditi et Briand (2014), Daina (2013), Mangiante-Orsola (2011), Tempier (2010). Les questions de recherche à propos des manuels peuvent être multiples. Elles peuvent concerner la manière dont un contenu particulier est présenté dans les manuels (Jones & Tarr, 2007), ce qu'on peut interpréter comme une étude de transposition didactique (Chevallard, 1991). Ces études peuvent porter sur l'identification de choix différents que peuvent faire les auteurs, à une même époque ou au fil des époques avec une perspective historique. Il peut aussi s'agir d'études comparatives : comparer comment le même contenu est présenté dans les manuels de différents pays permet de mettre en évidence des perspectives sur les mathématiques

2 http://www.iartem.org/

différentes, selon ces pays (Haggarty & Pepin, 2002). D'autres études portent de manière plus transversale sur le contenu des manuels, par exemple en s'intéressant à la place de la résolution de problèmes (Fan & Zhu, 2007) – ce qui peut amener à une réflexion sur la qualité des manuels, si on considère qu'un manuel qui offre de riches possibilités de résolution des problèmes pour les élèves répond à un certain critère de qualité (Shield & Dole, 2008).
Beaucoup de travaux portent sur les usages des manuels. Certains concernent les usages faits par les élèves (Rezat, 2012). Le plus souvent il s'agit cependant des usages par les professeurs, leur influence sur les pratiques, leur rôle, explicite ou implicite, pour le développement professionnel (Remillard, 2005). Nous avons présenté dans (Bueno-Ravel & Gueudet, 2015) une synthèse de ces travaux pour le premier degré. Les problématiques sont sensiblement les mêmes au second degré.

2.2 Perspective théorique : l'approche documentaire du didactique

Nous rappelons ici simplement les principes de l'approche documentaire qui nous seront utiles pour notre étude. Le lecteur intéressé trouvera plus de détails par exemple dans (Gueudet & Trouche, 2008). Nous considérons une notion large de *ressources* (Adler, 2000) : ainsi tout ce qui peut nourrir, modifier l'activité professionnelle du professeur est vu comme une ressource. Ceci englobe bien sûr les manuels scolaires, mais aussi les productions d'élèves, les échanges de mails avec des collègues etc. Le professeur consacre une part importante de son travail à chercher des ressources, les modifier, les adapter, les mettre en œuvre ou les partager avec des collègues : ceci constitue son *travail documentaire*. Naturellement, les différents types de ressources sont associées à des usages différents. Il est rare par exemple que le professeur *cherche* des productions d'élèves, dans le contexte actuel de l'enseignement. On peut cependant imaginer dans un futur proche des ressources en ligne partagées, présentant l'enseignement d'une notion et incluant systématiquement des exemples de productions d'élèves. Il deviendrait alors usuel pour les professeurs de chercher ces exemples de productions. Des évolutions d'une telle nature sont en cours, par exemple avec l'emploi de tablettes et de tableaux blancs interactifs, ou celui de visualiseurs, qui permettent au professeur de décider durant une séance de projeter pour l'ensemble de la classe certaines productions d'élèves. Ainsi ces productions deviennent des ressources partagées, elles peuvent être annotées, associées à d'autres. Dans les études sur le travail documentaire, il est intéressant de distinguer ces différents types d'usages. Cependant nous conservons en point de départ une définition large de ressources, afin de ne pas ignorer des éléments déterminants pour le travail du professeur.
Ce travail documentaire peut être individuel ou collectif. Au fil de son travail documentaire, un professeur ou un groupe de professeurs développe un *système de ressources* structuré. Les connaissances professionnelles des professeurs guident leur travail documentaire. Dans le même temps, les caractéristiques des ressources utilisées vont contribuer à des évolutions des connaissances professionnelles des professeurs.
Dans la première étude que nous présentons ici, le point de départ est un travail documentaire collectif : une équipe d'enseignants de seconde dans un lycée choisit un manuel scolaire pour la rentrée suivante. Dans cette étude nous observons comment les connaissances individuelles des professeurs interviennent dans la discussion, deviennent des critères partagés, ou donnent lieu à des débats.
Dans la deuxième étude que nous présentons, il s'agit de proposer un cadre pour l'analyse de manuels numériques. Le cadre proposé repose sur l'idée essentielle que les manuels numériques ne sont plus des ressources isolées, mais sont insérés dans des systèmes de ressources offerts par les éditeurs. De plus la possibilité est offerte aux professeurs d'articuler leur propre système de ressource et celui associé au manuel. Ceci représente une évolution

essentielle, par rapport à la situation dans laquelle le manuel papier entrait dans le système de ressources des professeurs sans donner lieu à l'articulation de deux systèmes.

3. Choix d'un manuel scolaire par les professeurs : le cas des manuels de seconde 2014

Le travail qui a été présenté lors du séminaire national a fait l'objet d'un article dans la revue Repères IREM : Gueudet et Lebaud (2016). Nous donnons ci-dessous le résumé de cet article, et nous invitons le lecteur intéressé à se reporter à l'article complet.

Nous présentons dans cet article une étude des critères et méthodes de choix utilisés actuellement par les professeurs de mathématiques pour retenir un manuel pour la classe, parmi l'offre dont ils disposent. Nous avons étudié plus particulièrement le choix d'un manuel de niveau seconde, édition 2014, en suivant d'une part une équipe d'enseignants dans un lycée ; et en soumettant d'autre part un questionnaire en ligne aux professeurs de l'académie de Rennes.
Les critères pour comparer des manuels portent sur l'existence, ou non, de contenus mathématiques particuliers, la progression, mais aussi l'organisation pour faciliter l'usage supposé qu'en fait l'élève. Nous étudions également l'importance éventuelle donnée à la partie exercices des manuels.
Nous analysons ici les réponses et présentons les principaux résultats que nous retirons de cette enquête. Notre objectif n'est pas de recommander certains critères, mais de comprendre ce qui guide les choix des enseignants, dans un contexte où les ressources à leur disposition évoluent considérablement.

4. Analyser des manuels numériques : définition et emploi de la notion de connectivité

4.1 Manuels numériques, regard sur les travaux existants et typologie

Les travaux sur les manuels numériques ont dès le départ posé la question de ce que de tels manuels pouvaient apporter de plus, par rapport aux traditionnels ouvrages sur papier (Gould, 2011). Ces travaux ont montré que les premiers manuels numériques restaient très proches de la structure d'un ouvrage papier : ils étaient le plus souvent constitués d'une version pdf du livre, à laquelle étaient ajoutés divers fichiers. Les manuels de cette première génération mettaient l'accent sur l'association de plusieurs médias, mais n'étaient pas réellement interactifs. De nombreuses évolutions ont eu lieu depuis, la Corée du Sud en particulier a joué un rôle pionnier dans le développement de manuels numériques constituant de véritables systèmes de ressources (figure 2).

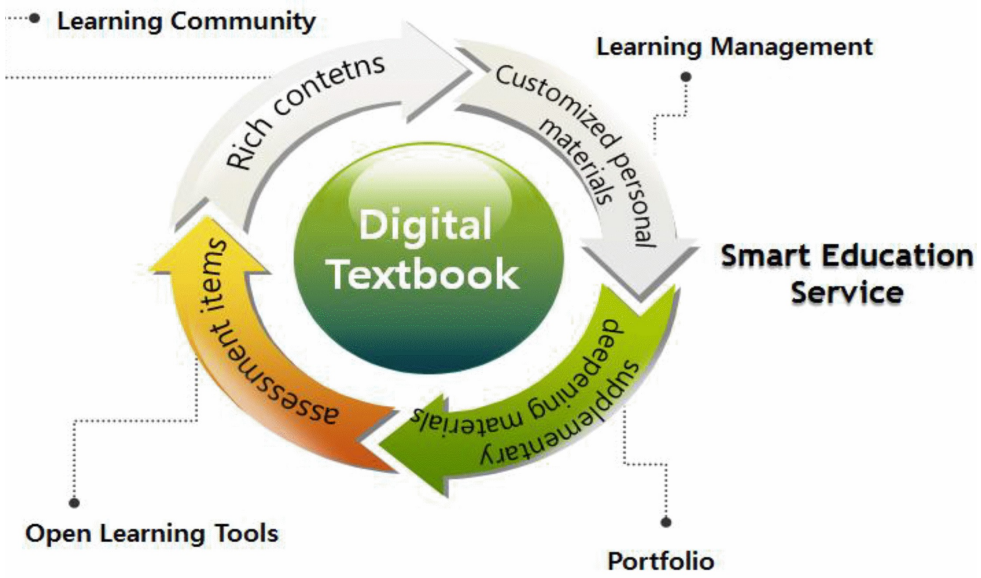


Figure 2 : Le manuel numérique en Corée du Sud. https://www.w3.org/2014/04/Publishing-Education-OWP.pdf (source KEIRIS, 2011).

En prenant en compte ces travaux, et les évolutions du manuel numérique, nous avons tout d'abord souligné la nécessité de préciser comment celui-ci était défini. Nous avons proposé la définition suivante :

> « Un système structuré et évolutif de ressources numériques, destiné à l'enseignement et l'apprentissage, qui peut être conçu à l'origine par différents types d'auteurs mais est ouvert à de nouvelles étapes de conception par des professeurs, individuellement et collectivement » (Pepin, Gueudet, Yerushalmy, Trouche & Chazan, 2015, p. 644, notre traduction).

Nous avons ensuite observé qu'il existait actuellement plusieurs types de manuels numériques :

1. « Le manuel numérique *intégratif* est constitué d'une version numérique d'un manuel (traditionnel) connecté à d'autres supports d'apprentissage [...]
2. Le manuel numérique *évolutif* qui est développé en continu par un large groupe d'auteurs et par la contribution des utilisateurs
3. le manuel numérique *interactif* est du type « boîte à outils » : le manuel est basé sur un ensemble d'outils numériques, de tâches, d'exercices interactifs et d'outils logiciels, qui peuvent être combinés par les utilisateurs. » (Pepin et al., 2015, p. 640, notre traduction).

Le fait d'établir, ou de permettre à l'utilisateur d'établir des liens entre différents éléments ressort comme essentiel dans les analyses de manuels numériques. C'est ce constat qui nous a amenés à proposer la notion de *connectivité*, telle que nous la présentons dans la partie suivante. Nous envisageons dans des travaux ultérieurs de lier cette notion de connectivité à celle de *qualité*. Cependant, ceci n'est pas en jeu dans l'étude présentée ici. Notre objectif ici est d'introduire la notion de connectivité et des catégories fournissant une méthode pour l'étude de la connectivité d'un manuel numérique. Après la présentation (§ 4.2) de cette définition et de ces catégories, nous l'appliquons sur deux exemples (§ 4.3), pour illustrer la méthode proposée et tenter de mettre en évidence la pertinence de la notion de connectivité.

4.2 Proposition d'une définition de la connectivité pour les manuels numériques

Dans cette partie, nous commençons par une rapide revue de travaux de recherche en didactique des mathématiques ayant mentionné la notion de *connectivité* (selon la traduction que nous proposons, le terme original étant *connectivity*). Cette notion comme nous allons le voir peut avoir différents sens. Ensuite nous proposons une définition appuyée sur ces travaux antérieurs pour la notion de *connectivité d'un manuel numérique*.

Différents auteurs ont souligné que la construction de savoirs mathématiques allait de pair avec l'établissement de liens : liens entre concepts, entre procédures, entre représentations etc. Ces auteurs introduisent le concept de *connectivity* (Hiebert & Carpenter, 1992), et on peut l'interpréter comme une *connectivité cognitive*.
De plus, le terme de *connectivity* apparaît également dans des travaux consacrés au potentiel des ressources numériques (Hoyles et al*.,* 2010 ; Trouche, 2016). Il s'agit alors de parler du potentiel de certaines ressources pour établir des connexions entre des personnes (par exemple de forums). Nous parlons alors de connexions *pratiques*, puisqu'il s'agit d'établir des liens effectifs entre des personnes. Cependant ces travaux prennent également en compte le potentiel d'une ressource numérique pour soutenir le développement de la connectivité cognitive dans les apprentissages.
De plus comme nous l'avons souligné ci-dessus, les travaux récents sur le manuel numérique (Pepin et al., 2015) invitent à considérer celui-ci comme un système structuré de ressources. Ainsi il s'agit aussi de prendre en compte les connexions, à l'intérieur et à l'extérieur du manuel, entre différents types de ressources (connexions que nous considérons aussi comme des connexions *pratiques*).
En nous appuyant sur ces travaux, et sur ceux concernant le manuel scolaire, nous proposons de définir comme suit la *connectivité d'un manuel numérique* : « *le potentiel de connexions que le manuel numérique permet pour l'utilisateur, sur le plan pratique comme sur le plan cognitif* ».
La définition ci-dessus caractérise ce que nous nommons connectivité d'un manuel numérique, mais ne fournit pas des catégories pour l'étude. Comment décrire et analyser la connectivité d'un manuel numérique ? Nous proposons de considérer la connectivité à deux niveaux.
Au niveau macro, nous nous intéressons aux liens entre le manuel et des ressources extérieures au manuel. Ces « liens » peuvent être de différentes natures : par exemple un lien Internet vers d'autres pages web ; un outil permettant de télécharger ou de déposer un fichier ; ou encore un outil de communication comme un forum. Dans tous les cas l'utilisateur peut utiliser ces liens ou non, on retrouve l'idée de « potentiel » évoquée dans la définition :

- connexions avec le programme officiel ; avec des manuels d'autres niveaux ou d'autres disciplines ;
- connexions avec d'autres ressources en ligne, produites ou non par l'éditeur du livre ;
- connexions avec des systèmes pour l'évaluation (externes au manuel) ;
- connexions avec le système de ressources de l'utilisateur ;
- connexions entre utilisateurs (enseignants ou élèves), entre utilisateurs et auteurs du manuel.

Au niveau micro, nous considérons des connexions à l'intérieur du manuel. Comme celles-ci peuvent largement différer d'un contenu mathématique à un autre, il s'agit dans ce cas de se centrer sur un thème mathématique. Pour ce thème nous proposons d'examiner les connexions suivantes :

- connexions entre différentes représentations ;
- connexions avec des logiciels, des calculatrices ;
- connexions avec d'autres thèmes mathématiques ;
- connexions entre différents concepts du même thème, différents moments dans l'appropriation d'un même concept, différentes stratégies de résolution de problèmes ;
- connexions avec des systèmes d'évaluation (internes au manuel) ;
- Connexions avec différents besoins des élèves (différenciation).

Sur la base de ces éléments caractérisant la connectivité d'un manuel numérique, nous avons construit une grille d'analyse de manuels ; nous n'en faisons pas ici une présentation détaillée, nous invitons le lecteur intéressé à consulter (Gueudet et al., 2017). Dans la partie suivante,

nous présentons les analyses en termes de connectivité de deux manuels numériques de types différents.

4.3 Exemple d'application de la définition à deux manuels

Nous avons retenu deux manuels de seconde, édition 2014 – ce choix de niveau et d'édition est en lien avec l'étude évoquée en partie 4.2, bien que les professeurs lors de leur choix de manuel n'aient considéré aucun manuel numérique.
Le manuel Sésamath 2de (Sésamaths, 2014) a été conçu par une large équipe d'auteurs. Comme tous les manuels Sésamath, il est gratuitement disponible en ligne, et associé à une version papier moins coûteuse que les manuels commerciaux (20,50 euro). Pour des détails sur la conception de ce manuel, le lecteur intéressé pourra consulter (Sabra & Trouche, 2011 ; Gueudet, Pepin, Sabra & Trouche, 2016). Le manuel Sésamath dans sa version professeur est intégré dans l'ensemble des ressources développées par l'association Sésamath : les exercices interactifs MathenPoche, les autres manuels, l'environnement virtuel LaboMEP, le site Sésaprof pour les enseignants sont accessibles depuis un bandeau situé au-dessus du manuel (Figure 3).

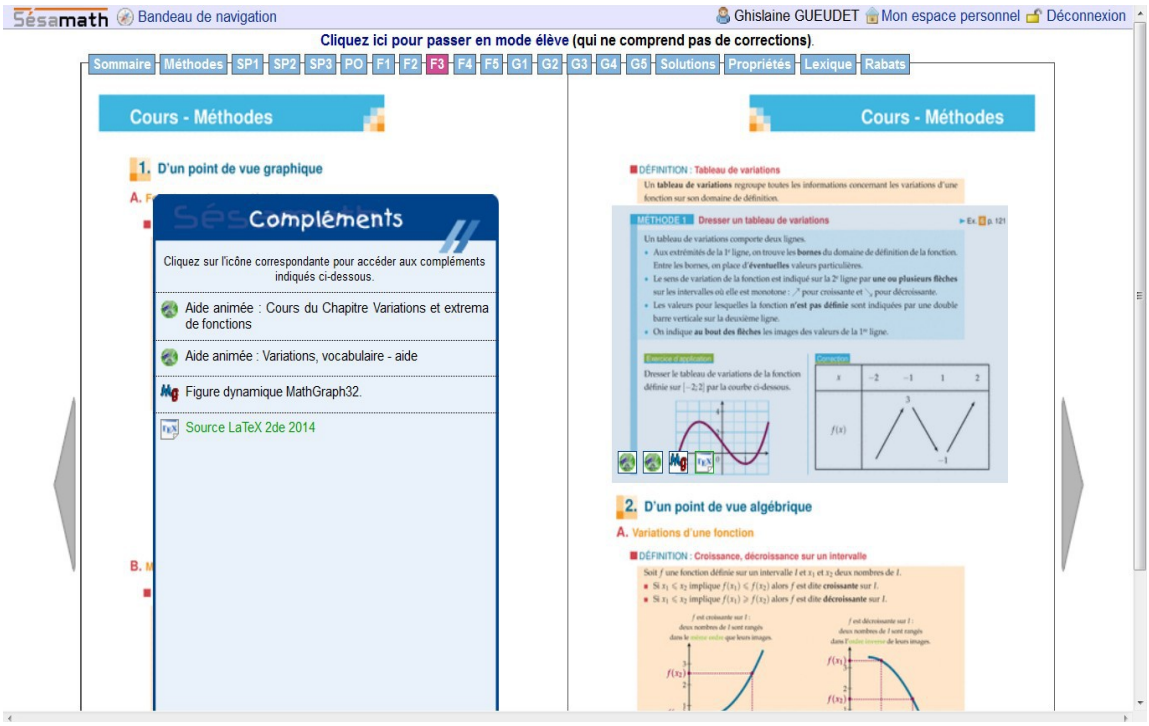


Figure 3. Le manuel numérique Sésamath seconde. En haut, le « bandeau de navigation » donne accès à toutes les ressources Sésamath

Le manuel Sésamath répond aux critères d'un manuel de type « évolutif » : conçu par une large équipe d'auteurs, il évolue progressivement au fil des remarques des utilisateurs.
Nous avons retenu par ailleurs un autre manuel numérique pour nos analyses : le manuel Hachette Seconde (Barbazo et al., 2014). Celui-ci a été conçu par une équipe plus restreinte, pilotée par Eric Barbazo - ancien président de l'APMEP. Il existe en diverses versions ; celle que nous examinons est la version « licence enrichie élève ». Cette licence enrichie, valable 12 mois, était en vente en 2016 sur le site du Kiosque Numérique de l'éducation (KNE) au prix de 10,50 euro (le manuel papier élève coûte 27,50 euro, et le manuel numérique

professeur enrichi coûte 39 euro). Cette offre est significative d'une importante évolution en cours : le manuel n'est plus un objet tangible dont l'utilisateur est propriétaire. Il s'agit d'un service accessible pour une durée limitée via un abonnement. Cet abonnement donne accès au manuel lui-même, mais aussi à un ensemble de ressources sur le site de l'éditeur (une partie de ces ressources est librement accessible).
Cette version enrichie offre à l'élève (et au professeur) un ensemble de possibilités : annoter le texte du manuel ; en sélectionner des parties à enregistrer dans son espace personnel ; accéder à des diaporamas ; à des outils de type tutoriel pour les deux modèles principaux de calculatrices ; insérer ses propres ressources dans son espace personnel ; accéder à des QCM pour tester ses connaissances, en particulier (figure 4).

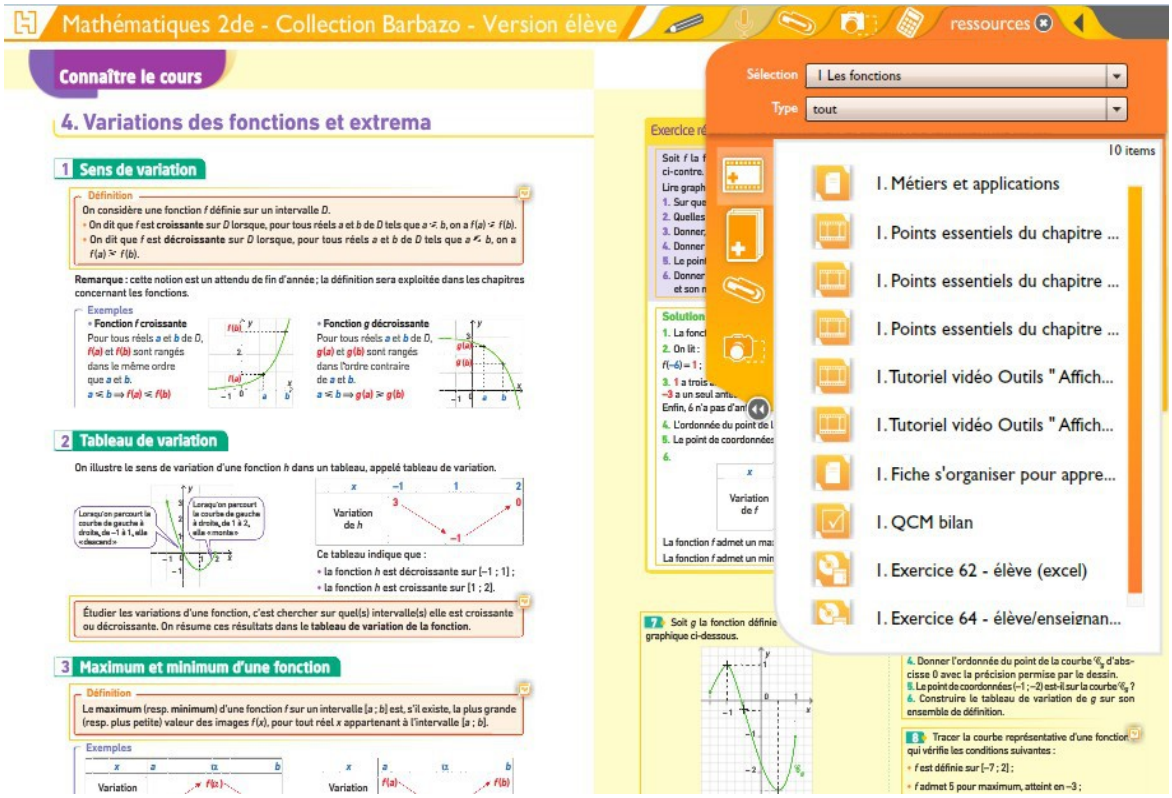


Figure 4. Le manuel numérique premium Hachette Seconde. A droite on observe la fenêtre « ressources » qui propose divers types de compléments.

Ce manuel (que les professeurs de seconde nomment « le Barbazo », du nom de son premier auteur) entre dans la catégorie que nous avons nommée « manuel numérique intégratif ». Sa structure et son mode de conception sont proches de ceux d'un manuel traditionnel sur papier, mais il offre de nombreux compléments – d'où le nom, évocateur, de « licence enrichie ».
Nous avons pour ces deux manuels effectué une étude de leur connectivité. Pour le niveau micro, nous nous sommes centrés sur le thème des fonctions.
Au niveau macro, nous retenons que les deux manuels offrent l'accès à un riche réseau de ressources produites par l'éditeur du manuel : l'association Sésamath (et l'accès est alors gratuit) ou l'éditeur Hachette (et l'accès est alors au moins en partie limité à la durée de l'abonnement payant). Pour ce qui est des liens avec les systèmes de ressources des professeurs et des élèves, dans les deux cas il est possible aux utilisateurs d'importer leurs propres ressources, dans LaboMEP pour Sésamath et dans l'espace prévu à cet effet pour Hachette. Cependant le manuel Hachette offre plus de possibilités en termes d'annotations du texte. Les annotations sont possibles avec le manuel Sésamath à condition de télécharger les

fichiers odt associés, mais il n'est pas possible (pour le moment) d'écrire directement sur le manuel. Dans le sens inverse en revanche, avec le manuel Sésamath il est plus simple de télécharger des parties du manuel pour les importer dans ses propres fichiers et les modifier. En termes de connexions entre utilisateurs, celles-ci sont plus développées pour le manuel Sésamath, en particulier avec le site Sésaprof qui permet aux professeurs d'échanger entre eux et avec les auteurs du manuel.
Au niveau micro et en ce qui concerne les fonctions, les deux manuels offrent de nombreuses connexions entre les différents concepts du chapitre, et entre différentes représentations des fonctions : algébrique, graphique, sous forme de tableau. Cependant dans le cas de Sésamath, on retient une présence plus importante de représentations dynamiques. Ceci est probablement une conséquence du mode de conception du manuel : en effet les professeurs collaboraient dans l'équipe d'auteurs avec des informaticiens. Ils étaient donc à même d'indiquer directement leurs idées en termes de représentations dynamiques ; et également d'exercices interactifs. Pour le manuel Hachette, on retient une présence plus importante des liens avec d'autres disciplines : les énoncés d'exercices ou de problèmes sur les fonctions font fréquemment référence à des contextes issus des sciences physiques, de l'économie etc. Ceci est également une conséquence du mode de conception du manuel, par une équipe en lien avec l'APMEP qui dispose d'un riche répertoire de problèmes. En revanche il ne s'agit pas de possibilités spécifiques au support digital, la même chose aurait pu être dite du manuel papier.

5. Conclusion

Au moment où nous effectuons ces travaux, il est clair que nous nous trouvons à une période de transition entre différents types de ressources éducatives qui peuvent toutes être désignées comme des manuels scolaires, mais qui revêtent des formes très différentes.
Concernant la forme traditionnelle du manuel papier, les enseignants ont développé de riches critères de choix. Cependant ils ne disposent pas toujours du temps nécessaire pour examiner les manuels et confronter les critères utilisés par chacun avant d'effectuer un choix. L'arrivée de nouvelles formes de manuels va demander le développement de nouveaux critères, et un travail collectif supplémentaire (permettant notamment la consultation de ressources en ligne et leur discussion par des groupes de professeurs).
Concernant les nouvelles formes de manuel, nous allons continuer à approfondir le concept de connectivité et la méthodologie d'analyse associée, qui nous semble pouvoir éclairer de manière significative les possibilités offertes par les manuels numériques. Pour les deux manuels considérés, nous observons, en particulier en analysant la connectivité au niveau macro, que le manuel Hachette correspond à une connectivité dirigée vers l'intérieur du monde de l'éditeur. Le professeur est invité à créer un espace personnel dans la plate-forme de l'éditeur. Mais qu'adviendra-t-il lorsque l'abonnement à cette plate-forme arrivera à son terme ? Le manuel Sésamath apparaît comme inscrit dans un réseau plus ouvert de ressources libres que le professeur peut s'approprier. Ceci est en cohérence avec les modes de conception de ces ressources, et le modèle économique sous-jacent. Au niveau micro, le manuel Sésamath réalise une réelle exploitation des figures dynamiques et des exercices interactifs ; alors que la connectivité du manuel Hachette se situe plus dans les liens avec d'autres disciplines, ou entre différents domaines des mathématiques. Les dimensions considérées pour le niveau micro pourraient sans doute intéresser les auteurs de manuels – de même que les critères d'analyse de manuels papier élaborés depuis de nombreuses années par l'APMEP (Bareil, 1975) ont été largement utilisés par les auteurs et les éditeurs de manuels.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ADLER, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*, 205–224.

ARDITI, S., & BRIAND, J. (2014). Regards croisés de chercheurs, auteurs de manuels et formateurs. Utilisation effective de manuels scolaires par des professeurs des écoles. Pistes pour la formation. In COPIRELEM (Ed.), *Actes du XLIème colloque de la Copirelem*, Mont-de-Marsan (pp. 37-58).

BAREIL, H. (1975). Grille d'analyse de manuels scolaires (texte disponible en ligne). http://www.univ-irem.fr/spip.php?article211.

BRUILLARD, É. (2010). Le passage du papier au numérique : le cas du manuel scolaire. In G. GUEUDET & L. TROUCHE (Dir.), *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques* (pp. 217-232). Rennes et Lyon : PUR et INRP.

BUENO-RAVEL, L., & GUEUDET, G. (2015). Quelles ressources pour les professeurs des écoles et leurs formateurs ? Apports de la recherche en didactique. *Grand N, 96*, 71-89.

CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions (1re édition : 1985).

CHOPPIN, A. (1992). *Les Manuels scolaires : Histoire et actualité*. Paris : Hachette éducation.

DAINA, A. (2013). *Utilisation des ressources : de la préparation d'une séquence à sa réalisation dans la classe de mathématiques / cinq études de cas sur la notion d'aire dans l'enseignement primaire genevois.* Thèse de doctorat, Université de Genève.

FAN, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM - The International Journal of Research in Mathematics Education, 45*(5)*,* 765-777.

FAN, L., ZHU, Y., & MIAO Z. (2013). Textbook research in mathematics education: development status and directions. *ZDM - The International Journal in Mathematics Education, 45*(5), 633-646.

FAN, L., & ZHU, Y. (2007). Representation of problem-solving procedures: A comparative look at China, Singapore, and U.S. mathematics textbooks. *Educational Studies in Mathematics, 66*, 61-75.

GOULD, P. (2011). Electronic Mathematics textbooks: old wine in new skins? In *Proceedings of the 5th APEC - Tsukuba conference*, Japan. http://www.criced.tsukuba.ac.jp/math/apec/apec2011/19-20/02_PeterGould-paper.pdf

GUEUDET, G., & LEBAUD, M.-P. (2016). Comment les enseignants de mathématiques choisissent les manuels ? Étude sur le cas des manuels de seconde, édition 2014. *Repères IREM,102*, 85-97.

GUEUDET, G., PEPIN, B., SABRA, H., RESTREPO, A. & TROUCHE, L. (2017). E-textbooks and connectivity : proposing an analytical framework. *International Journal for Mathematics and Science Education*.

GUEUDET, G., PEPIN, B., SABRA, H., & TROUCHE, L. (2016). Collective design of an e-textbook: teachers' collective documentation. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2-3), 187-203.

GUEUDET, G., & TROUCHE, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants : Genèses, collectifs, communautés. le cas des mathématiques. *Education et Didactique, 2*(3), 7-33.

HAGGARTY, L., & PEPIN, B. (2002). An investigation of mathematics textbooks and their use in English, French and German Classrooms: who gets an opportunity to learn what? *British Educational Research Journal*, *28*(4), 567-590.

HIEBERT, J., & CARPENTER, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D.A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York : Macmillan.

HOYLES, C., KALAS, I., TROUCHE, L., HIVON, L., NOSS, R., & WILENSKY, U. (2010). Connectivity and virtual networks for learning. In C. HOYLES & J.-B. LAGRANGE (Eds.), *Mathematical education and digital technologies: Rethinking the terrain* (pp. 439-462). New York : Springer.

IGEN & IGAENR (2013). *La structuration de la filière du numérique éducatif : un enjeu pédagogique et industriel* (rapport disponible en ligne). http://www.education.gouv.fr/cid73971/la-structuration-de-la-filiere-du-numerique-educatif-un-enjeu-pedagogique-et-industriel.html

JONES, K., BOKHOVE, C., HOWSON, G., & FAN, L. (Eds.) (2014). *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT-2014), Southampton, GB, University of Southampton. http://eprints.soton.ac.uk/374809/

JONES D. L., & TARR, J. E. (2007). An examination of the levels of cognitive demand required by probability tasks in middle mathematics textbooks. *Statistics Education Research Journal*, *6*(2) 4-27.

MANGIANTE-ORSOLA, C. (2011). Etude du processus d'appropriation de ressources par des

professeurs des écoles enseignant les mathématiques : entre travail au quotidien et développement des pratiques. In *Le travail enseignant au XXIe siècle. Perspectives croisées : didactiques et didactique professionnelle*, *Actes du Colloque international INRP,* Lyon, 16-18 Mars 2011.

PEPIN, B., GUEUDET, G., YERUSHALMY, M., TROUCHE, L., & CHAZAN, D. (2015). E-textbooks in/for Teaching and Learning Mathematics: A Disruptive and Potentially Transformative Educational Technology. In L. ENGLISH, & D. KIRSHNER (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 636-661). New York : Taylor & Francis.

REMILLARD, J. T. (2005). Examining key concepts in research on teachers' use of mathematics curricula. *Review of Educational Research*, *75*(2), 211-246.

REZAT, S. (2012). Interactions of teachers' and students' use of mathematics textbooks. In G. GUEUDET, B. PEPIN & L. TROUCHE (Eds.), *From Text to 'Lived' Resources. Mathematics Curriculum Materials and Teacher Development* (pp. 231-246). New York : Springer.

SABRA, H., & TROUCHE, L. (2011). Collective design of an online math textbook: when individual and collective documentation works meet. In M. PYTLAK, T. ROWLAND, & E. SWOBODA (Eds.)*, Proceedings of CERME 7* (pp. 2356-2366), University of Rzeszow, Poland.

SHIELD, M., & DOLE, S. (2008). A methodology for evaluating middle-years mathematics textbooks. Paper presented at ICME 11, Monterrey, Mexico.

TEMPIER, F. (2010). Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2. *Grand N, 86*, 59-90.

TROUCHE, L. (2016). Connectivity in mathematics education : Drawing some lessons from the current experiences and questioning the future of the concept. In J. MONAGHAN, L. TROUCHE, & J. BORWEIN (Eds.), *Mathematics and tools, instruments for learning* (pp. 433-466). New York : Springer.

MANUELS SCOLAIRES

BARBAZO, E. (Dir.), ABADIE, M.-L., GRIHON, D., LAFARGUE, B., MAIMARAN, S., & POLLET-MOURLAN, S. (2014). *Mathématiques seconde*. Paris : Editions Hachette Education.

SÉSAMATH (2014). *Maths 2de, statistiques probabilités, fonctions, géométrie : manuel collaboratif*. Paris : Magnard.
http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=ms2_2014

CHANGEMENT DE REGARD SUR LES FIGURES : UNE ETUDE DE CAS EN DEBUT DE CYCLE 2

Claire **GUILLE-BIEL WINDER**

ESPE Université de Nice, LDAR Université Paris-Diderot

claire.winder@unice.fr

Résumé

Cette recherche entre en résonnance avec les travaux portant sur la construction et l'observation dans des classes de situations d'enseignement visant à faire évoluer le rapport aux figures (Duval & Godin, 2005 ; Duval, Godin & Perrin-Glorian, 2005). Nous cherchons en particulier à étudier le rôle du langage de l'enseignant dans le déroulé de séances de géométrie réalisées à partir d'une situation générique – au sens de la Théorie des Situations Didactiques – appelée situation PLIOX (Guille-Biel Winder, 2013, 2014), et son impact (supposé) sur les élèves : leurs activités et leurs apprentissages. Pour cela, nous distinguons la « langue mathématique » (en tant que moyen d'expression effectif qui peut être objet d'enseignement/apprentissage), et le « langage » comme outil de communication dans et sur l'activité mathématique. Dans un premier temps, une analyse comparée de la mise en œuvre d'un même scénario dans deux classes nous permet de mettre en évidence la corrélation entre la langue mathématique employée par l'enseignant et l'évolution de celle employée par les élèves. Dans un deuxième temps, nous interrogeons le rôle et la place des interactions langagières dans les activités et les apprentissages des élèves en référant notre analyse à la modélisation du milieu (Bosch & Perrin-Glorian, 2013 ; Bulf, Mathé & Mithalal, 2015).

Mots clés

géométrie ; école primaire ; langage ; théorie des situations didactiques ; milieu ; rapport aux figures

INTRODUCTION

Cette recherche prend appui sur une situation générique, en référence à la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, 1998), que nous avons dénommée situation PLIOX (Guille-Biel Winder, 2013). Cette situation consiste à reproduire une figure modèle obtenue par pliage effectif d'un PLIOX, carré de papier présentant sur une seule face quatre zones également carrées et colorées en rouge, bleu, vert et jaune (voir Figure 1).

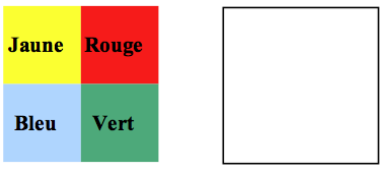


Figure 1. PLIOX recto et verso

Par ailleurs, ce travail entre en résonance avec les travaux portant sur la construction et

l'observation dans les classes de situations d'enseignement visant à faire évoluer le rapport aux figures (Duval, 2005 ; Duval & Godin, 2005 ; Duval *et al*., 2005 ; Perrin-Glorian, Mathé & Leclerc, 2013). Dans ce cadre, Duval *et al*. (2005) ont émis l'hypothèse d'un processus dialectique entre l'évolution du regard et du langage. Par ailleurs, Mathé (2012) a mis en évidence que dans les situations d'action sur des objets géométriques, le langage jouait un rôle essentiel dans le processus de construction de connaissances. Ces différentes recherches placent ainsi le langage au cœur de l'activité géométrique. *Quel est alors le rôle du langage de l'enseignant dans le déroulé de séances de géométrie réalisées à partir de la situation PLIOX et son impact (supposé) sur les élèves : leurs activités et leurs apprentissages ?*
Pour analyser des séquences de classe du point de vue du langage à l'aide de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), Bosch et Perrin-Glorian (2013, p. 274) discernent différentes fonctions du langage : faire des mathématiques, mais aussi apprendre et enseigner les mathématiques. Elles distinguent ainsi :

> « la langue mathématique (utilisée dans les énoncés) qui est un instrument pour faire des mathématiques et qui est objet d'enseignement/apprentissage, et le langage comme moyen d'enseignement/apprentissage des mathématiques, pour communiquer avec soi-même ou avec d'autres (enseignants ou élèves) au cours de l'activité mathématique, communiquer sur l'activité mathématique, (…) sur les relations entre les acteurs et l'activité mathématique, [sur] les relations entre les acteurs dans la vie de la classe. »

La distinction entre ces deux aspects du langage nous a conduit à envisager deux pistes de travail : d'une part la réalisation d'une étude de la langue mathématique en tant qu'objet d'enseignement/apprentissage, d'autre part la réalisation d'une étude du langage comme outil de communication dans et sur l'activité mathématique. Après une présentation et une première analyse de la situation PLIOX (première partie), nous explorons tour à tour chacune de ces deux pistes (deuxième et troisième parties).

PRESENTATION ET ELEMENTS D'ANALYSE *A PRIORI* DE LA SITUATION PLIOX

Après avoir présenté les caractéristiques de la situation générique, nous identifions les types de problèmes proposés, explicitons les variables didactiques principales, les potentialités de la situation concernant le regard sur les figures ainsi que les connaissances en jeu. Nous présentons et analysons enfin le scénario élaboré en accord avec la méthodologie d'analyse et de construction d'une situation didactique. Ces résultats sont développés dans (Guille-Biel Winder, 2014).

La situation générique

À partir d'un PLIOX il est possible de réaliser différentes formes planes colorées selon un ensemble de pliages autorisés dont les directions correspondent aux axes de symétrie du carré (ses diagonales et ses médianes), ainsi qu'aux axes de symétrie des quatre carrés de couleur (leurs diagonales et leurs médianes). Ceci est illustré Figure 2.

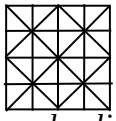


Figure 2. Directions de plis « autorisées »

La situation générique PLIOX est alors la suivante : ***Reproduire une figure modèle obtenue par pliage effectif d'un PLIOX***. La situation PLIOX correspond à une situation d'action au sens de Brousseau (1986). Par suite, les phases de formulation auront pour objectif la communication et le débat.

Le type de problèmes proposés

La situation PLIOX se déroule selon le « mode concret » (terminologie empruntée à Duval *et al*., 2005), c'est-à-dire dans le monde sensible puisqu'il s'agit d'un origami particulier. C'est un problème spatial au sens de Salin (2008). Par ailleurs, le PLIOX évoque un objet 2D (de dimension 2) dont la forme correspond à une figure géométrique composée elle-même de sous-figures. La situation PLIOX peut donc être considérée comme problème géométrique de reproduction de figures, dont nous avons identifié G1 comme paradigme correspondant (Houdement & Kuzniak, 2000, 2006). Par « figure », à l'école élémentaire, nous entendons « dessin qui a des propriétés qu'on pourrait préciser dans le cadre de la géométrie théorique en le considérant comme une représentation d'une figure géométrique ; ces propriétés se traduisent par des propriétés visuelles contrôlables avec des instruments » (Duval *et al*., 2005, p. 13). Dans ce cadre :

> « une figure ne se limite (…) pas à un tracé avec les instruments de géométrie usuels sur papier ou sur un écran d'ordinateur ; elle [peut] être obtenue aussi par un assemblage de formes par juxtaposition ou superposition. » (Perrin-Glorian *et al*., 2013, p. 12).

Par conséquent, reproduire des figures par assemblage ou par pliage de pièces de papier ou de carton – ce qui correspond à la situation PLIOX – constitue pour nous une activité de géométrie.

Les variables didactiques principales

Les modalités de présentation du modèle constituent un premier ensemble de variables didactiques. Le modèle peut être présenté par le maître sous forme de pliage d'un PLIOX préalablement effectué hors de la vue des élèves, le support du maître étant alors identique à celui des élèves (reproduction à échelle 1 avec possibilité de percevoir l'épaisseur ou de voir les plis déjà réalisés) ; le modèle peut rester éloigné, être manipulable ou pas (au tableau par exemple). Le modèle peut aussi être présenté sous la forme d'un dessin, ou d'une photo, ou retro-projeté, à échelle 1 ou pas, éloigné ou pas. La position du modèle au moment de sa présentation est également à prendre en compte.
Un deuxième ensemble de variables didactiques concerne le choix de la figure modèle, et notamment : la nature du contour du modèle (la « figure externe ») ; le nombre de zones colorées (les « figures internes ») ; la nature de ces « figures internes » ; leurs positions relatives ; le nombre de pliages nécessaires ; les directions des plis ; l'existence préalable ou non de(s) pli(s) nécessaire(s) à la reproduction du modèle.

Potentialités concernant le regard sur les figures

Nous présentons dans cet exposé les potentialités mathématiques de la situation PLIOX qui concernent plus particulièrement le regard sur les figures : nous identifions les éléments figuraux en jeu puis les modifications convoquées *a priori* dans la situation PLIOX. Pour cela, nous nous appuyons sur les travaux de Duval, notamment sur la notion d'unité figurale (Duval, 1995, 2003) et sur les niveaux d'appréhension des figures géométriques (Duval, 1988, 1995).

Eléments figuraux en jeu

Les objets géométriques inhérents à cette situation sont essentiellement des éléments figuraux 2D et 1D. Les différents pliages selon les directions privilégiées conduisent à différentes figures qui sont des polygones convexes de différentes tailles. Les éléments figuraux

potentiels 2D sont essentiellement les polygones convexes suivants : carrés, rectangles, parallélogrammes, trapèzes isocèles, trapèzes rectangles, quelques quadrilatères quelconques, triangles rectangles isocèles et pentagones non réguliers. Mais d'autres polygones non convexes (et non réalisables par pliage du PLIOX) existent du fait du réseau de droites présent sur le PLIOX. Les éléments figuraux 1D apparaissent sous forme de plis, en fonction des pliages que l'on est amené à faire, mais ils ne sont pas matérialisés par des traits (à part les deux médianes du PLIOX qui apparaissent comme frontières des zones colorées) : il s'agit des médianes puis des diagonales du PLIOX (axes de symétrie), des médianes et diagonales des carrés secondaires. Quelques éléments figuraux 0D apparaissent : ils correspondent aux sommets des éléments figuraux 2D identifiés ainsi qu'à l'intersection d'éléments figuraux 1D mis en évidence.

Niveaux d'appréhension et modifications convoquées a priori

La situation PLIOX porte sur les deux premiers niveaux d'appréhension d'une figure : l'appréhension perceptive de l'élément figural 2D correspondant au contour et des éléments figuraux 2D mis en évidence par les zones de couleur (les « figures internes »), et l'appréhension opératoire en convoquant *a priori* plusieurs modifications figurales (Duval, 1988). En premier lieu, la présence des figures internes colorées convoque des décompositions méréologiques (partages de figures en sous-figures) : par exemple, on peut voir Figure 3 que le modèle est un trapèze, qui se décompose deux triangles rectangles isocèles rouge et bleu et en un grand carré vert, ou en quatre petits carrés verts. De plus la présence des plis sur le PLIOX fait apparaître des décompositions qui mettent en jeu des reconfigurations de sous-figures : par exemple, Figure 3, il est possible d'identifier un carré bicolore rouge/vert, ou aussi l'hexagone concave formé d'un petit carré vert et du triangle bleu, … Des modifications positionnelles (qui consistent à déplacer ou faire tourner la figure) sont également convoquées : le coloriage induit en effet une orientation du PLIOX et des figures obtenues par pliage ; par ailleurs l'affichage du modèle se fait au tableau alors que quelquefois les élèves ne sont pas en face de celui-ci. Enfin, si le modèle est présenté à une autre échelle que celle du PLIOX, des modifications optiques (agrandissement ou diminution d'une figure), sont également convoquées.

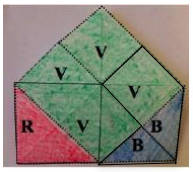


Figure 3. Un pliage du PLIOX

Connaissances en jeu

Connaissances spatiales

La situation PLIOX met en jeu des connaissances spatiales au sens de Berthelot et Salin (1999-2000). Ces connaissances sont liées à l'orientation et à la position des différentes figures dans les modèles. Elles sont mises en œuvre à différents moments de l'activité : lors de l'analyse des modèles puisqu'il s'agit d'identifier des positions relatives de sous-figures monochromes (les « figures internes ») ; dans les moments de recherche se déroulant dans l'espace sensible. Elles peuvent être liées au passage du plan fronto-parallèle au plan de la table (lorsque le modèle affiché au tableau). En outre, il est envisageable que l'orientation du PLIOX joue un rôle dans les moments d'explicitation de procédures. Les connaissances spatiales concernent également l'usage du vocabulaire adéquat.

Connaissances géométriques

Les connaissances géométriques en jeu concernent tout d'abord des polygones particuliers, le carré et ses propriétés, le rectangle, le triangle rectangle isocèle, le trapèze, et quelques polygones à plus de quatre côtés (pentagones, hexagones) qui ne sont pas réguliers. Ces figures sont dans différentes positions et il s'agit tout d'abord de les reconnaître.
Des relations entre différentes formes connues sont également mises en évidence par le jeu des reconfigurations et décompositions : un demi carré peut être un rectangle ou un triangle ; un assemblage de deux triangles rectangles isocèles superposables peut être un carré ou un triangle ; un assemblage de deux carrés superposables est un rectangle.
Certaines modalités de pliage mettent en évidence des côtés et des sommets de différents polygones, des droites particulières du carré (médianes, diagonales) visibles sous forme de plis, ainsi que leurs points d'intersection.
Les moments d'explicitation conduisent enfin à nommer certains objets géométriques.

Présentation du scénario

La situation PLIOX est composée d'une alternance entre phase d'action et phases de formulation, puis se conclut par une phase de synthèse/institutionnalisation.

Phase d'action

Individuellement, les élèves doivent réaliser par pliage de leur PLIOX une figure identique à la figure modèle présentée : aucun travail papier/crayon n'est exigé, seuls les pliages sont convoqués. L'activité est centrée sur l'analyse de la figure pour sa reproduction et non pas sur le tracé. L'action convoque des connaissances spatiales liées à la position et à l'orientation des figures qui restent implicites. Le milieu fournit une rétroaction immédiate essentiellement perceptive par comparaison visuelle entre le modèle et le résultat du pliage du PLIOX effectué. Les éléments qui sont pris en compte dans le contrôle de l'action dépendent des modèles proposés et sont parmi les suivants : la nature des figures externes ; la nature des figures internes ; l'orientation des figures internes ; la présence de zones de couleur ; les positions des zones de couleur.

Phases de formulation

Il existe deux phases de formulation : l'analyse collective du modèle et l'explicitation des procédures. Lors de l'analyse du modèle, des élèves sont sollicités pour dire ce qu'ils voient, les formes qu'ils reconnaissent aussi bien sur le contour, qu'à l'intérieur de la figure, ainsi qu'éventuellement leurs positions relatives. L'identification des formes peut faire l'objet d'une demande systématique de justification. Cette analyse implique pour chacun des modèles la prise en compte à la fois de sa figure externe et de ses figures internes, éventuellement en jouant avec le changement d'orientation. En outre, la demande de justification concernant l'identification des formes conduit à la prise de conscience de certaines propriétés de ces formes, à commencer par le nombre de côtés et de sommets, ainsi qu'à la mise en évidence de certains points communs (par exemple : un rectangle possède quatre côtés et quatre sommets ; un carré possède lui aussi quatre côtés et quatre sommets, tous ses côtés ont la même longueur).
A l'issue de la phase d'action, des élèves sont sollicités pour expliquer leur procédure, ou dans un premier temps la montrer à la classe s'ils ne parviennent pas à expliquer, aidés si besoin par l'enseignant pour la formulation ou le vocabulaire. Certaines productions erronées sont invalidées. La validation est double : sur le fond par la réalisation effective du pliage et

sur la forme par l'enseignant qui emploie le vocabulaire géométrique et spatial idoine. La mise en commun est aussi l'occasion de revenir sur la technique de pliage « bord sur bord ». La « mise en mots » des procédures peut aider certains élèves à effectuer la reproduction attendue et porte sur les gestes à accomplir dans le micro-espace 3D. Elle permet surtout de rendre explicites les compétences spatiales en jeu, restées implicites dans l'action. Elle peut également conduire à mettre en évidence des relations entre les différentes figures (entre un rectangle demi carré et un carré par exemple), ainsi que les éléments figuraux 1D que sont les droites du réseau, notamment les diagonales et les médianes. Les modalités de pliage permettent d'aborder les notions de côté et de sommet.
Les deux phases de formulation induisent par ailleurs l'utilisation du vocabulaire spatial (à droite de, à gauche de, au-dessus, au-dessous, en haut, en bas, derrière, devant) et géométrique (carré, rectangle, triangle, côté, diagonale, droite, sommet, point), qui apparaît comme un outil pour communiquer procédures ou analyses.

Phase de synthèse/institutionnalisation

La phase de synthèse/institutionnalisation correspond à la mise en évidence de nouveaux objets géométriques identifiés précédemment, ainsi que leurs relations : des sous-figures monochromes et polychromes, des relations entre figures, des droites, des points particuliers. Certaines connaissances peuvent alors prendre le statut de savoirs. Cette institutionnalisation locale reprend les différents points abordés tout au long de l'activité :

- le vocabulaire ;
- les objets figuraux 2D, voire 1D (notamment par la mise en évidence du réseau de droites visible sur le verso du PLIOX) ;
- les propriétés de certaines figures planes particulières (le carré, le rectangle, le triangle rectangle isocèle notamment) ;
- les relations mises en évidence (comme par exemple : le partage d'un carré en deux parties identiques peut donner deux triangles isocèles rectangles ou bien deux rectangles).

ETUDE DU ROLE DE LA LANGUE MATHEMATIQUE EMPLOYEE PAR L'ENSEIGNANT SUR CELLE EMPLOYEE PAR LES ELEVES

La « langue mathématique », au sens de Laborde (1982), « est constituée d'une combinaison de symboles (…), de mots spécifiques, de mots de la langue naturelle utilisés avec un sens spécifique, de la langue naturelle ordinaire elle-même mais avec un usage spécifique de la syntaxe » (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p. 267). Dans cette partie, nous nous intéressons plus précisément au vocabulaire relatif aux éléments figuraux 2D (les figures), 1D (les droites), voire 0D (des points particuliers), ainsi qu'aux relations entre ces objets (notamment égalités de longueur et relations entre surfaces). La méthodologie retenue se déroule en plusieurs temps. Tout d'abord, à partir des transcriptions de séances, nous identifions les mots désignant des objets géométriques. Puis nous réalisons l'analyse des occurrences de ces mots dans le déroulé de ces séances en distinguant ceux prononcés par l'enseignant et ceux prononcés par les élèves. Or « les formulations attendues dans une situation d'action (ou dans la mise en commun qui suit), sont celles qui décrivent des stratégies » (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p. 280). Le vocabulaire utilisé par les élèves et les enseignants n'est ainsi employé que lors des épisodes d'analyse et d'explicitation des procédures. Nous portons donc notre attention sur les moments collectifs de formulation (description, mise en commun, synthèse). Pour étudier la relation éventuelle qui peut exister entre le vocabulaire employé par

l'enseignant et celui employé par les élèves, nous avons besoin de leviers de comparaison. Nous choisissons d'analyser le lexique dans deux séances consécutives d'une même classe puis d'en étudier son évolution chez les élèves au cours de ces deux séances. Nous faisons également l'hypothèse que la même méthode d'étude portée sur deux classes dans lesquelles le même scénario a été proposé nous permettra d'inférer de nouveaux résultats. Cette étude fait l'objet du deuxième paragraphe de cette partie, le premier paragraphe étant consacré à la présentation des conditions dans lesquelles s'est déroulée l'expérimentation ainsi que le scénario mis en œuvre avec les différents modèles retenus.

Conditions de l'expérimentation

Présentation des classes

L'expérimentation s'est déroulée dans deux classes de CP (première année du primaire) relativement « équivalentes » : d'environ 25 élèves chacune, ces classes sont situées dans deux écoles du centre d'une ville moyenne de province. Les élèves sont issus d'un milieu socio-culturel moyen. Les deux enseignants, nommés ici M et P, sont des Professeurs d'Ecole Maîtres Formateurs[1], ayant 15 à 20 ans d'ancienneté mais qui ne font plus de géométrie depuis plus de 10 ans. Les mises en œuvre se déroulent en fin de quatrième période. A ce moment de l'année, les élèves des deux classes ont déjà travaillé le repérage et l'orientation dans des parcours puis sur quadrillage et ont réalisé des tracés à la règle. Dans la classe de M, le travail sur la reconnaissance de formes (carré, triangle, rectangle) et la distinction carré/rectangle a été réalisé par la « modulatrice », mais les élèves n'ont pas abordé d'activité de reproduction de figures. En revanche dans la classe de P, *aucun travail sur les formes planes n'a été réalisé au cours des périodes précédentes*.

Séances étudiées

Dans les deux classes, la séquence réalisée est issue du même scénario fourni aux enseignants. Celui-ci est construit selon une progressivité *a priori* et comporte une « petite » analyse didactique. La première séance (non observée) de la séquence correspond à la fabrication du PLIOX. Les deux séances suivantes portent sur la reproduction de figures à l'aide du PLIOX : la séance 2 correspond à la première rencontre avec les problèmes proposés dans la situation PLIOX, la séance 3 lui est consécutive. Dans chaque classe, les deux séances sont filmées, les données vidéo transcrites puis découpées en étapes et épisodes avant d'être analysées : un changement d'étape correspond à un changement soit dans l'organisation de la classe, soit dans la situation (changement d'exercice) ; un épisode possède une unité sur la tâche, sur la nature de l'activité ; un changement d'épisode peut correspondre à un changement au niveau de la nature de l'activité. La Figure 4 présente les grandes lignes du déroulement des deux séances dans chaque classe. On constate qu'une grande partie de la séance 2 s'appuie sur les mêmes modèles dans les deux classes, même si ce n'est pas forcément dans le même ordre ou si P s'écarte du scénario en fin de séance (ce qui conduit ses élèves à réaliser plus de reproductions que ceux de M). Par ailleurs dans cette séance, M respecte le scénario transmis, chaque étape se déroulant de la même manière en une alternance de phases d'action et de formulation (analyse collective de la figure modèle, suivie d'une recherche individuelle, puis de l'explicitation collective de procédures), alors que P ne fait pas précéder l'action d'une analyse. En revanche P propose dans certaines étapes une analyse collective de productions incorrectes. Enfin les séances sont équivalentes en temps. Pour pouvoir étudier l'évolution

[1] Les Professeurs d'Ecole Maîtres Formateurs sont des enseignants du premier degré qui contribuent à la formation initiale et continue des maîtres du premier degré.

d'une séance à l'autre, nous nous intéressons donc à chaque séance 2 dans son intégralité. Concernant la séance 3 on constate une plus grande homogénéité dans les mises en œuvre. L'étude porte alors sur les réalisations communes : toute la séance dans la classe de M et les six premières étapes dans celle de P.

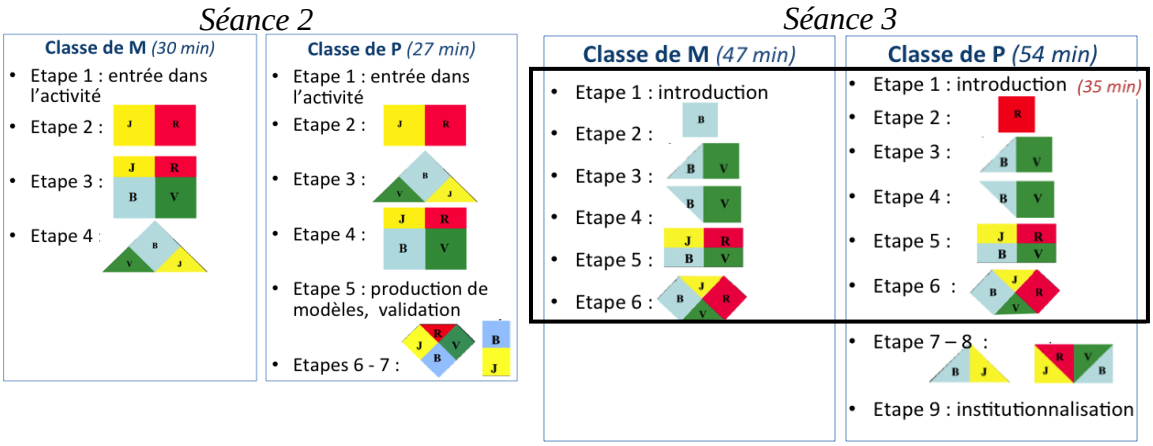


Figure 4 – Séances 2 et 3 dans les deux classes

Réalisation de l'étude

Identification des mots désignant les objets géométriques

A partir des transcriptions, nous avons identifié les mots qui désignaient les objets géométriques, qu'ils soient employés par l'enseignant ou par les élèves (Figure 5).

	Éléments figuraux 2D	**Éléments figuraux 1D**	**Éléments figuraux 0D**
Lexique géométrique	triangle, rectangle, carré, losange	droite, diagonale, médiane, côté	point, sommet, centre, milieu, angle
« Langue courante »	carreau, forme, surface « le rouge » morceau, truc	trait, pli, bord ligne, trace	pointe, coin, pic

Figure 5 – Désignations des objets géométriques dans les deux classes

Différents lexiques sont convoqués : certains mots sont issus du lexique géométrique alors que d'autres relèvent de ce que nous qualifierons de « langue courante » et parmi eux, certains dépendent de la dimension des éléments figuraux désignés (certains mots sont employés en référence à l'espace sensible, d'autres qui désignent des éléments figuraux 2D, sont issus du lexique des couleurs).

Etude de la langue mathématique employée par les enseignants et les élèves

Dans un deuxième temps, nous avons relevé le nombre de mots relevant du lexique géométrique et ceux relevant de la langue courante employés par les enseignants au cours des deux séances. Nous constatons des proportions assez différentes entre les deux (voir diagramme Figure 6).

Nombre d'occurences	**M**	**P**
Langue courante	97	35
Lexique géométrique	105	142

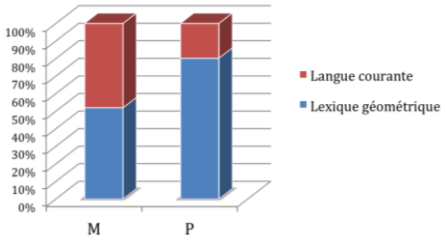


Figure 6 – Lexique employé par M et P au cours des deux séances

Nous complétons ce constat quantitatif en étudiant dans les transcriptions, les échanges entre les enseignants et les élèves. Nous constatons alors deux attitudes différentes de la part des deux enseignants. M a tendance à reprendre à son compte les termes (en général non géométriques) employés par les élèves, mais reste toujours dans une proximité langagière puisqu'il ne propose pas ensuite (ou que très rarement) le vocabulaire idoine. Dans certains cas, il propose même un vocabulaire mathématique non adapté ou hors programme. L'extrait de transcription suivant illustre ces constats :

> M : Et bien, avant de commencer, j'aimerais juste que vous me disiez qu'est-ce que vous avez sur vos tables. Pas très longtemps, mais/Thérèse ?
> Thérèse : Un carré.
> M : Un carré. Quoi d'autre ? Sonia ?
> Sonia : On a des couleurs. Y'a du bleu, du vert, rouge, jaune.
> M : Donc un carré avec euh des couleurs, est-ce que/
> Sonia : Quatre couleurs.
> M : Quatre couleurs. Est-ce que quelqu'un veut dire autre chose ? Oui ?
> Max : Quatre pointes.
> M : Quatre pointes. Est-ce qu'on dit « pointe » ? Est-ce qu'il n'y a pas un autre mot ?
> Élèves : Coin !
> M : Un coin. Un autre mot ?
> Élève : Pic.
> M : Pic, oui.
> Élève : En fait, il y a plusieurs couleurs.
> M : Il y a plusieurs couleurs. Quand vous êtes là *[M désigne un sommet]*, vous pouvez dire pointe, hein, vous pouvez dire aussi l'angle. Hein ? Voilà. (…)

En revanche, P s'appuie sur les propositions des élèves en reprenant d'abord leurs formulations pour leur faire employer, dans un deuxième temps, le vocabulaire adéquat (lorsqu'ils le connaissent), qu'il répète ensuite, ainsi que l'illustre l'extrait ci-dessous :

> P : (…) Alors maintenant tu nous expliques comment tu as fait pour trouver le même.
> Alexis : En fait, là // xxx Après / euh/ Il suffit de mettre là/
> P : Alors, qu'est-ce que tu as plié ?
> Alexis : Euh/ ça/ xx
> P : On écoute ! On écoute ! Alors, vas-y, qu'est-ce que tu as plié d'abord ?
> Alexis : Le jaune et le rouge.
> P : Le quoi jaune et le quoi rouge ?
> Alexis : Le carré … jaune et le rouge … le carré rouge.
> P : Alors tu dis que tu as plié le carré jaune et le carré rouge. D'accord.

Dans un troisième temps, nous avons relevé le nombre de mots relevant du lexique géométrique et ceux relevant de la langue courante employés par les élèves au cours de chacune des deux séances (séance 3 partielle pour les élèves de la classe de P). Le tableau et le diagramme de la Figure 7 présentent ces données.

	Classe de M		Classe de P	
	Séance 2	Séance 3	Séance 2	Séance 3 *(partielle)*
Langue courante	75	66	15	18
Lexique géométrique	15	46	15	72

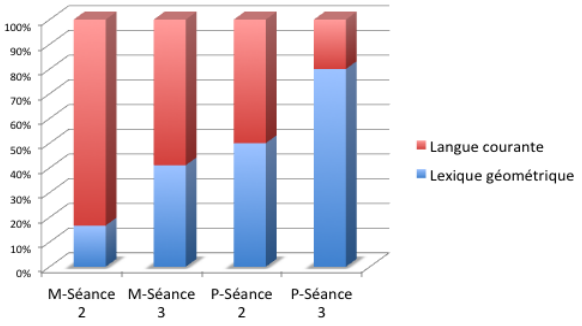


Figure 7 – Lexique employé par les élèves des classes de M et P au cours des deux séances

En comparant les occurrences des désignations des objets géométriques dans les séances des deux classes (séance 2 : 90 au total pour la classe de M, 30 au total pour celle de P ; séance 3 : 112 au total pour la classe de M, 90 sur la séance partielle pour la classe de P), on peut inférer une *influence de l'organisation de la séance* : la mise en œuvre réalisée par M, ainsi que celle

retenue par P en séance 3 intègrent en effet des phases de formulation (analyse des figures et explicitation des procédures) plus nombreuses que celle réalisée par P en séance 2, et qui conduisent donc à de plus grandes opportunités de verbalisation.
Mais d'autre part, on constate que la proportion de mots géométriques employés par les élèves de la classe de M lors de la séance 2 est peu importante et qu'elle reste minoritaire lors de la séance 3, alors que la séquence d'insère dans une progression en géométrie. *A contrario* dans la classe de P, malgré le fait que les élèves n'aient pas eu de séquence de géométrie avant la séquence PLIOX, le vocabulaire employé par les élèves relève du langage géométrique à presque 50% lors de la séance 2 et à 80% lors de la séance 3. La mise en regard, dans chaque séance et pour chacune des deux classes, de la proportion de mots relevant du lexique géométrique par rapport à ceux relevant de la langue courante mais désignant les objets géométriques, employés par l'enseignant et par les élèves (Figure 8) permet de compléter ce constat et conduit à questionner le rôle du lexique de l'enseignant dans l'évolution de celui des élèves.

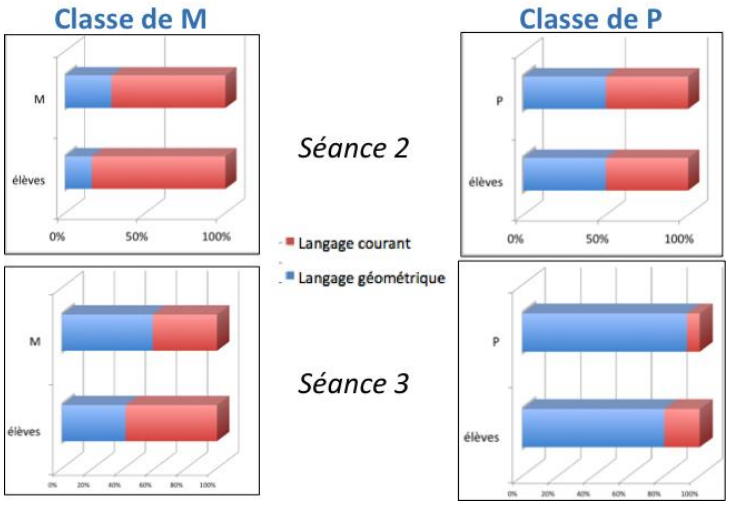


Figure 8 – Lexique employé par l'enseignant et les élèves dans une même séance

Eléments d'analyse

Dans les phases de formulation, le dialogue qui s'établit entre les élèves et l'enseignant fait « circuler » des mots des uns aux autres : l'enseignant reprend les formulations des élèves (voir par exemple les deux extraits de transcription ci-dessus), qui eux-mêmes sont influencés par les choix de l'enseignant. Cette corrélation peut en outre être illustrée ici par le graphique (Figure 9) qui exprime la proportion de mots géométriques employés par les élèves de chaque classe dans chacune des deux séances en fonction de celle de mots géométriques employés par l'enseignant.

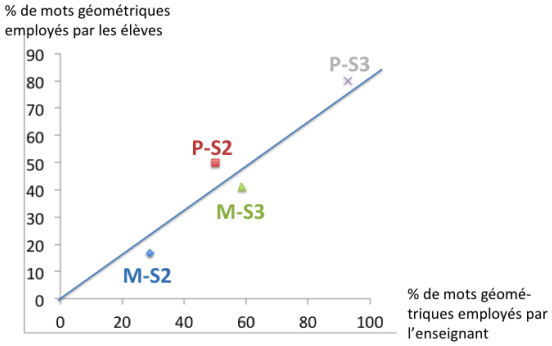


Figure 9 – Corrélation entre le langage de l'enseignant et celui des élèves

On constate qu'il y a quasiment proportionnalité entre ces données et il est même possible de donner un ordre de grandeur du coefficient de proportionnalité dans ce cas : il est de l'ordre de 0,8. Un premier facteur d'influence peut consister en l'usage plus ou moins grand du vocabulaire idoine par l'enseignant qui, au sein de la séance, semble avoir un impact sur celui employé par les élèves (corrélation établie ci-dessus), mais qui pourrait également en avoir un dans la séance suivante. Le contrat didactique établi par l'enseignant concernant l'usage en classe des mots qui désignent les objets géométriques peut être un deuxième facteur d'influence : on a en effet constaté que P incite ses élèves à utiliser le vocabulaire idoine, ce qui n'est pas le cas de M. Par exemple concernant les éléments figuraux 1D, les mots désignant des droites (ou des parties de droites) sont systématiquement « trait », « pli » ou « ligne » dans la classe de M en séance 2 alors que les mots géométriques ne sont jamais employés, même par l'enseignant. En séance 3, les élèves continuent d'employer ces mots, malgré quelques tentatives de M qui introduit les mots « médiane » et « diagonale ». Dans la classe de P en revanche, les mots « diagonale » et « médiane » sont employés par l'enseignant en séance 2 (et par quelques élèves à la suite de l'intervention de P), et ils supplantent les mots d'usage courant en séance 3 au cours de laquelle on constate l'emploi très minoritaire de « trait » ou « ligne » par les élèves.

Conclusion

Cette étude met en lumière une évolution dans l'acquisition du vocabulaire géométrique par les élèves au cours de la séquence et montre l'existence d'une corrélation entre l'usage du lexique géométrique par l'enseignant et celui des élèves. Le rôle de la langue mathématique de l'enseignant est ainsi mis en évidence, mais d'autres facteurs entrent en jeu comme le contrat didactique mis en place par l'enseignant et le déroulement de l'activité.

ETUDE DU ROLE DU LANGAGE DE L'ENSEIGNANT SUR LES ACTIVITES (SUPPOSEES) DES ELEVES ET LEURS APPRENTISSAGES

Dans cette partie, nous analysons les interactions langagières du point de vue de leur fonction didactique pour identifier le rôle du langage de l'enseignant sur les activités (supposées) des élèves et leurs apprentissages. En effet, l'analyse des pratiques langagières peut livrer des indices sur le rôle que joue l'enseignant dans le processus de résolution de problème par les élèves et sur leur position dans ce processus. Nous plaçons de nouveau notre étude dans le cadre de la TSD en nous appuyant sur les travaux de Bosch et Perrin-Glorian (2013) ainsi que ceux de Bulf *et al*. (2015) et Bulf, Mathé, Mithalal & Wozniak (2013). Nous reprenons à notre compte leur hypothèse : « Les interactions langagières mêlent étroitement le contenu mathématique visé, le milieu de la situation et le rapport supposé ou effectif des élèves à ce contenu et à ce milieu » (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p. 282).
La méthodologie retenue se fait en deux temps, en nous plaçant à une échelle plus locale de la situation (variables et modalités fixées). Une première étude porte sur une analyse selon la grille proposée par Bosch et Perrin-Glorian (2013). Par ailleurs, « la mise en fonctionnement du modèle de structuration du milieu (…) permet une analyse fine des interactions entre les élèves et le milieu » (Bulf *et al*., 2015, p. 30) et l'analyse du rôle des interactions langagières donne à voir sur cette dynamique. Une deuxième étude est alors menée en relation avec la dynamique des changements de milieux. Nous utilisons toujours comme matériau de travail les transcriptions des séances menées dans les deux classes que nous avons déjà présentées : celle de M pour la première étude, celle de P pour la deuxième.

Etude 1 – Analyse des fonctions didactiques du langage de l'enseignant dans une séance

Quatre éléments sont à prendre en compte dans l'analyse proposée par Bosch et Perrin-Glorian (2013). Le premier élément découle de l'analyse *a priori* de la situation et consiste à déterminer l'enjeu didactique de la situation. Il permet ainsi l'interprétation de ce qui se dit ou fait dans la séance. Les trois autres points concernent l'analyse des interactions langagières dans le déroulement de la séance en distinguant : la mise en place du milieu et la dévolution ; la régulation des rapports des élèves avec le milieu et la négociation du contrat didactique ; la mise en commun et conclusion de la séance. Nous précisons tous ces éléments dans ce qui suit. Nous délimitons par ailleurs notre étude à une phase particulière de la situation correspondant à la reproduction du modèle suivant (Figure 10) :

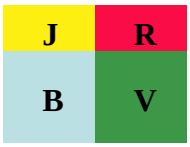


Figure 10 – Modèle à reproduire

A partir de l'analyse *a priori* de la situation générique PLIOX précédemment réalisée que nous complétons dans le cas étudié, nous identifions l'enjeu didactique de cette phase particulière. Nous en réalisons ensuite l'analyse *a posteriori* en nous appuyant sur les transcriptions de sa mise en œuvre dans la classe de M (séance 2 – phase 3) en distinguant dévolution, régulation et conclusion. Les données ainsi structurées sont proposées en Annexe.

Compléments d'analyse* a priori *pour l'étape concernée

Dans notre étude, les variables didactiques sont fixées :

- modalité de présentation : le modèle visible mais à distance des élèves ;
- nombre de pliage minimum : un seul pliage nécessaire ;
- le pli n'apparaît pas encore sur le PLIOX au moment de l'activité.

Le jeu des couleurs fait apparaître une décomposition méréologique d'éléments figuraux 2D (deux carrés secondaires et deux rectangles demi carrés). Pour réaliser ce modèle, il est nécessaire d'identifier ces figures internes comme étant : les deux figures (bleue et verte) identiques à celles présentes sur le PLIOX et deux figures (jaune et rouge) qui correspondent à la moitié de celles présentes sur le PLIOX. En revanche, il n'est pas nécessaire d'identifier la figure externe (élément figural 2D correspondant au « contour »). Le pli nécessaire à la reproduction du modèle correspond à l'axe de symétrie des deux carrés secondaires rouge et jaune. Le pliage à réaliser se fait « bord sur pli » puisqu'il s'appuie sur la médiane, axe de symétrie du PLIOX et élément figural 1D qu'il faut prendre en compte au verso.
On peut s'attendre à certaines productions « approximatives », c'est-à-dire comportant bien quatre figures internes, dont les deux carrés secondaires bleu et vert, mais aussi : soit deux rectangles jaune et rouge de taille différente de celle attendue (non demi carrés), le pli correspondant étant parallèle à la médiane secondaire (Figure 11 (a)) ; soit deux trapèzes rectangles rouge et jaune, le pli correspondant n'étant pas parallèle à la médiane secondaire (Figure 11 (b)).

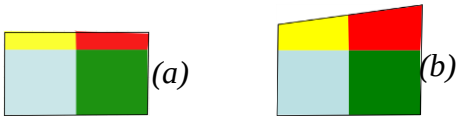


Figure 11 (a) et (b) – Reproductions erronées envisageables

Enjeux didactique et cognitif de l'étape concernée

L'enjeu didactique de cette étape est un enjeu local, mais il se situe dans un enjeu plus global. Nous identifions alors le statut du savoir en jeu (nouveau, en cours d'apprentissage, ancien) et nous explicitons la fonction didactique de l'étape (cours, exercice ou problème).
L'enjeu didactique porte tout d'abord sur des connaissances spatiales. Ces connaissances anciennes sont liées à l'orientation et à la position des différentes figures dans le modèle. Elles sont implicites au moment de l'action mais peuvent être explicitées lors des mises en commun, incitant à des formulations adaptées. Elles portent également sur le vocabulaire d'orientation (à l'envers, vertical, horizontal) et de position (à droite, à gauche, en haut, en bas, au milieu, dessus, devant, …).
Les connaissances géométriques spécifiquement en jeu dans cette étape portent sur : les quadrilatères particuliers (le carré et le rectangle) qu'il s'agit de reconnaître et de nommer notamment pendant l'analyse de la figure ; certaines de leurs propriétés qui peuvent apparaître suite à une demande de justification (nombre de côtés, de sommets, égalités de longueurs, éventuellement présence d'angles droits) ; la relation entre des rectangles demi carrés et des carrés qui peut être évoquée pendant l'explicitation des procédures ; le vocabulaire géométrique correspondant qui sera employé lors des différentes phases de formulation. Les côtés sont perçus comme les bords des figures internes colorées. La médiane utilisée dans le pliage et située au verso est perçue comme une droite indépendante des côtés des figures internes. Ces connaissances sont en cours d'apprentissage. Enfin, le jeu sur les deux « points de vue » qu'il est possible de porter sur la figure, l'un qui correspond à ce qui est immédiatement perçu (les figures internes, le contour) et l'autre aux sous-figures monochromes ou polychromes, conduit à des décompositions et des reconfigurations figurales. Ainsi un enjeu cognitif est associé à l'ensemble des problèmes issus de la situation PLIOX : il s'agit à terme d'acquérir une sorte de flexibilité quant à la reconnaissance des formes dans n'importe quelle position et détachées ou intégrées dans d'autres figures.

Méthodologie pour l'analyse **a posteriori**

Selon Bosch et Perrin-Glorian (2013, p. 283), le langage employé lors de la mise en place du milieu et du processus de dévolution « est une combinaison de langage mathématique et de langage naturel en lien avec les autres ostensifs fournis par le milieu ». L'analyse du langage de l'enseignant nous permet d'étudier la part d'ostension éventuelle qui est réalisée (lorsqu'elle est nécessaire), ainsi que la stratégie utilisée par le maître pendant la dévolution (formulations, questions, répétitions, reformulations des propositions des élèves), et sur quoi elle porte (sur un savoir ancien, sur les éléments du milieu ou sur la question à résoudre). Le deuxième point à prendre en compte est la régulation des rapports des élèves avec le milieu, qui se fait essentiellement par le langage, ainsi que la négociation du contrat didactique dans une phase de recherche si elle existe. Selon Bosch et Perrin-Glorian (2013, p. 283) :

> « La fonction didactique de ces interactions langagières se caractérise en répondant aux questions suivantes :
>
> - Quelles modifications éventuelles du milieu, du problème posé aux élèves peut-on observer ? Va-ton jusqu'à une modification de la situation elle-même ?
>
> - Quelle est l'activité mathématique des élèves : elle porte sur les connaissances mises en jeu, ostensifs utilisés, points de blocage ?
>
> - Quels sont les apports de l'enseignant : mise en évidence de certains éléments du milieu, injection de vocabulaire, d'ostensif (…), activation de connaissances, parallèle avec d'autres situations déjà rencontrées, gestion de la mémoire didactique (Brousseau et Centeno, 1991). »

Enfin, dans la mise en commun et la conclusion « le langage intervient de façon essentielle selon plusieurs dimensions qui prennent en compte l'appui sur le milieu et son extension, la place faite à la formulation des connaissances de l'élève (celles qu'on peut formuler) et des savoirs à retenir (éventuellement), la validation de ces savoirs.» (Bosch & Perrin-Glorian, 2013, p. 283).
Nous portons donc notre attention à la formulation du savoir lui-même ainsi qu'à sa place à travers la gestion de la parole. Nous regardons s'il y a explicitation d'un savoir nouveau, ou en cours d'apprentissage, ou reprise de savoirs anciens ; nous étudions la forme de la formulation, la langue mathématique utilisée, les liens avec les autres ostensifs du milieu, le degré de généralité des savoirs formulés mais aussi qui formule ces savoirs ; nous examinons les interactions entre les élèves et l'enseignant ainsi que le niveau dans lequel l'enseignant intervient. Ce travail est réalisé à partir de la transcription de la troisième phase de la séance 2 dans la classe de M (voir Annexe).

Constats concernant la mise en œuvre dans la classe de M

Nous constatons que lors de la mise en place du milieu, M modifie la situation qui devient un problème de reproduction de geste : en effet, M réalise d'abord ostensiblement le modèle en attirant l'attention des élèves sur ses gestes. Avec le rappel de la consigne, M modifie également le milieu en injectant une nouvelle contrainte (il faut « un seul pli »). Enfin, la synthèse porte non pas sur la manière d'obtenir la figure-modèle, mais sur l'élément qu'il faut prendre en compte pour l'obtenir, ce qui correspond à une nouvelle modification du milieu. La dévolution du nouveau problème se révèle sans enjeu, puisqu'elle s'effectue par la donnée de la consigne complétée par l'indication du nombre de plis nécessaires et précédée de la mise en évidence de tous les gestes nécessaires pour l'accomplir.
M ne s'appuie jamais sur la rétroaction du milieu : il n'incite pas les élèves à confronter leur production au modèle affiché au tableau et prend systématiquement en charge la validation dans un semblant de discussion avec les élèves lors des moments collectifs. Il ne peut y avoir débat dans la classe. Une grande partie du langage de M a un rôle de régulateur de l'activité. Par ailleurs il y a peu de reformulation des propositions des élèves, M répétant leurs expressions et employant donc très peu de vocabulaire géométrique. Lors de la recherche, l'étayage consiste en une reprise des aspects techniques. La part d'ostension est ainsi très importante dans toute l'activité. De manière générale, M se réfère au monde matériel mais peu au domaine géométrique : il reste dans le registre langagier des couleurs et des objets de l'espace sensible ; il apporte peu de vocabulaire (« surface », « carré », « moitié d'un côté », « moitié d'une surface », « superposer ») ; il ne fait pas émerger les différentes figures internes (deux carrés, deux rectangles demi carrés), ni la figure externe (rectangle), et ne fait pas de lien avec une propriété des quadrilatères (quatre sommets) pourtant évoquée par une élève. Dans la phase de synthèse, il reprend les éléments qui ont été dégagés durant l'activité et les discussions (la position de la droite permettant le pliage des carrés rouge et jaune en deux parties superposables), mais sans faire le lien avec ces carrés. Ainsi M ne cherche pas réellement à expliciter les objets ou concepts associés, il ne fait pas de lien avec les savoirs. Il semble que tout au long de la phase étudiée, *M vise la réussite de la tâche et passe du temps à faire expliciter les élèves sur la manière de réussir, sans insister sur les savoirs en jeu* : la reconnaissance de certaines figures et leur nom ; l'assimilation d'un trait de pliage à un trait droit annonciateur d'une droite ou d'un segment ; des relations entre certaines figures (entre carré et rectangle demi carré notamment) ; le vocabulaire associé. Par ailleurs, aucun travail n'est mené sur la décomposition/recomposition figurale. Ceci se traduit, lors de la conclusion, par le fait qu'aucun savoir (géométrique ou spatial) n'est finalement explicité ni repris, même partiellement, aucun constat établi.

Enfin, M tisse très peu de liens avec ce qui s'est passé précédemment dans la séance et dans la séquence. Il ne construit pas non plus les liens entre les différents moments de la situation didactique. Il est possible que la nature de la situation PLIOX (conçue comme situation d'action et non de formulation) ait pour conséquence une identification et une formulation des savoirs moins problématisées, les rendant plus difficiles à prendre en charge par l'enseignant (en particulier s'il rencontre des difficultés pour repérer les enjeux didactiques et cognitifs de la tâche).

Conclusion

Nous avons pu mettre en évidence comment l'enseignant gère les changements d'activité (ce qui correspond à une fonction régulatrice, organisatrice des activités, qui marque les changements de contrat). Nous avons pu décrire et analyser le fonctionnement et les effets des interactions langagières en distinguant les « fonctions didactiques différentes selon le contexte, qui relèvent d'intentionnalités différentes » (Bulf *et al*., 2013) : le langage relatif à la dévolution, qui installe les objets du milieu matériel et les règles du jeu, modifie ici le milieu ; le langage qui se développe dans les moments d'action relève essentiellement dans notre analyse des aspects techniques ; le langage pour la mise en commun permet la formulation des stratégies développées, des rétroactions éprouvées et des expériences menées par les élèves ; le langage relatif à la conclusion, qui devrait être mathématique, reste très limité dans cette mise en œuvre et est tourné vers l'activité de l'élève attendue de l'enseignant : la reproduction du geste. Enfin, l'analyse *a posteriori* a mis en évidence que « l'enchaînement de ces différents langages n'est pas chronologique » (Bulf *et al*., 2015, p. 25). Concernant l'impact des différents langages, nous avons constaté que l'apport du geste, du nombre de plis à prendre en compte dans le milieu, ainsi que les questions successives portant l'attention des élèves sur le geste de reproduction de manière de plus en plus précise (le geste, puis le pli à réaliser, puis la manière de le réaliser), instaurent un milieu mathématiquement (et didactiquement) assez pauvre. En outre, tout se passe comme si, pour l'enseignant, la séance se déroulait « hors sol », c'est-à-dire sans lien avec les apprentissages précédents : M n'inscrit pas les élèves dans un « historique d'apprentissage ». Les connaissances anciennes ne sont pas réactivées (en particulier l'usage du vocabulaire spatial pour expliciter les procédures), les connaissances en cours d'apprentissage (portant sur le carré et le rectangle notamment) ne sont pas convoquées, les compétences à construire comme l'identification des côtés des carrés en tant que droites ou segments (déconstruction dimensionnelle) ou la décomposition et recomposition des figures ne sont pas relevées. Tout ceci a deux conséquences majeures : les élèves restent dans les évocations matérielles et l'usage de vocabulaire géométrique ou spatial spécifique n'a pas de raison d'être.

Etude 2 – Analyse du rôle du langage de l'enseignant dans la dynamique des milieux

Selon Bulf *et al*. (2015), le modèle de structuration du milieu (Brousseau, 1986 ; Margolinas, 1995, 2003 ; Bloch, 2002) permet de décrire avec finesse les interactions entre sujet et milieu et livre des pistes pour comprendre le rôle du langage oral dans l'articulation entre processus de construction personnelle de connaissance (relié à l'interaction sujet/milieu) et processus de construction sociale des connaissances (relié à l'institutionnalisation). Nous nous sommes alors appuyés sur la méthodologie utilisée par ces chercheurs et qui se déroule en deux temps : dans le but d'anticiper les jeux possibles d'un élève générique lors de la résolution du problème, mais également de comprendre la façon dont l'évolution du rapport de l'élève au milieu peut permettre la construction de connaissances, nous réalisons une analyse *a priori* en termes de structuration du milieu ; puis nous analysons *a posteriori* une mise en œuvre dans une classe (celle de P) du point de vue du langage.

Analyse a priori en termes de structuration du milieu

Brousseau (1986, p. 60) a décrit une structure emboîtée « en oignon ». En accord avec Bulf *et al*. (2015), nous empruntons en partie la caractérisation des niveaux de milieux donnée par Maurel et Sackur (2002). Le milieu matériel M-3 est constitué des objets matériels de la situation qui sont extérieurs au professeur et à l'élève : la consigne « Reproduire la figure modèle en pliant le PLIOX » ; le modèle proposé sous forme de pliage effectif d'un PLIOX et affiché au tableau ; le PLIOX de l'élève. Les connaissances associées qui permettent « aux élèves d'interagir avec le milieu objectif et de passer à une position d'agissant » (Bulf *et al*., 2013, p. 592), sont les connaissances nécessaires à la compréhension de la consigne « Reproduire la figure modèle ». Les élèves doivent donc être capables d'interpréter cette consigne comme étant la réalisation du pliage proposé, sous-entendu à l'identique. Il n'y a pas au départ d'enjeu mathématique explicite. Poursuivons avec le milieu objectif M-2 :

> « Le milieu objectif M-2 doit permettre aux élèves de se poser des questions. Par leur action sur le milieu objectif, les élèves développent des stratégies et les rétroactions du milieu doivent leur permettre de valider ou d'invalider leurs actions » (Maurel & Sackur, 2002, p. 172).

Dans la phase d'action, le milieu fournit une rétroaction immédiate essentiellement perceptive par comparaison visuelle entre la figure modèle et le résultat du pliage du PLIOX effectué. Les éléments qui peuvent être pris en compte dans le contrôle de l'action sont parmi les suivants : la figure externe (un rectangle) éventuellement ; les figures internes (deux carrés et deux rectangles demi carrés) ; éventuellement la largeur des deux rectangles demi carrés ; la présence de toutes les zones de couleurs ; les positions relatives des zones de couleur. Une deuxième rétroaction du milieu est organisée par comparaison directe de longueurs en juxtaposant le PLIOX plié et le modèle.

Le milieu de référence M-1 est celui où les « connaissances de l'élève se transforment en savoirs (en connaissances utiles), où il saisit ce qu'il y a à comprendre – à ce niveau – de la situation » (Bulf *et al*., 2013, p. 590). Il est constitué des énoncés issus des stratégies développées par les élèves dans le milieu M-2 ainsi que « des validations théoriques [que ceux-ci] peuvent recevoir, grâce aux connaissances initiales ou grâce à celles qui ont été développées dans l'interaction avec le milieu objectif » (Maurel & Sackur, 2002, p. 172). A la suite des activités antérieures de reproduction de figures, ainsi que lors de la réalisation du PLIOX, une partie du milieu de référence existe déjà, mais il continue à s'enrichir par les interactions des élèves au milieu de cette activité précise. Le milieu de référence est alors constitué par : les pliages validés ou non ; les formulations des méthodes de pliages validés ou non ; l'identification des éléments figuraux 2D figurant sur le PLIOX ou obtenus après pliage (rectangles, rectangles demi carrés, trapèzes) ; l'élément figural 1D mis en évidence sur le verso (une médiane du PLIOX) ; l'explication des propriétés utilisées (partage d'un carré en deux rectangles demi carrés selon une médiane notamment). Plusieurs modalités de validation du discours lors de la mise en commun sont envisageables : par réalisation effective du modèle ; par d'autres élèves sans recours à la manipulation ; par l'enseignant.

Le milieu d'apprentissage M0 « est un milieu pour l'institutionnalisation par le professeur » (Bulf *et al*., 2013, p. 590) : il correspond à celui de la mise en évidence des relations entre le carré et le rectangle (deux rectangles de mêmes dimensions et demi carrés peuvent donner un carré ; un carré partagé en deux parties superposables selon sa médiane conduit à deux rectangles demi carrés), ou également celui où les points communs et les différences qui existent entre le carré et le rectangle sont explicitées (tous deux ont quatre côtés et quatre sommets, et en plus dans le carré tous les côtés ont la même longueur). Nous illustrons cette analyse Figure 12 en reprenant la schématisation de l'articulation entre les différents niveaux de milieu proposée par Bulf *et al*. (2015, p. 15) et adaptée de Margolinas (2004).

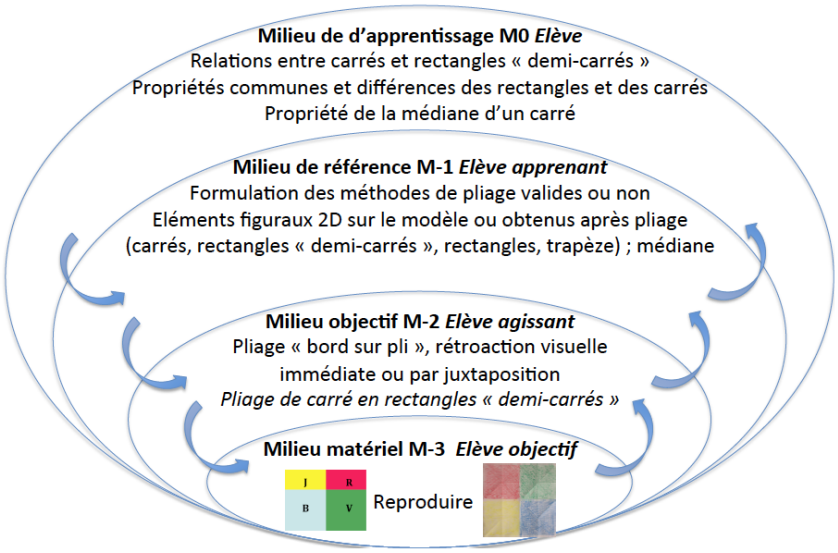


Figure 12 – Analyse a priori de l'articulation des différents niveaux de milieu

L'analyse *a priori* en termes de niveaux de milieu permet ainsi d'envisager les différentes positions possibles des élèves dans l'activité ainsi que les contenus potentiels de milieux avec lesquels les élèves interagissent. De plus, nous constatons que les possibilités de rétroactions du milieu objectif M-2 offrent des conditions favorables à l'émergence du milieu de référence. En revanche le milieu de référence M-1 ne possède pas de potentiel de rétroactions adidactiques, laissant la validation à la charge de l'enseignant. Le paragraphe suivant met en évidence la manière dont ceci a été pris en compte en classe.

Eléments d'analyse a posteriori *concernant la mise en œuvre dans la classe de P*

Les éléments d'analyse sont présentés à partir d'extraits de corpus issus de la quatrième étape de la Séance 2. Le premier épisode correspond à la présentation du modèle :

> P : Allez, vous remettez le PLIOX comme au départ, d'accord ? Ça y est ? Alors on le remet comme au départ, attention, hein ! Allez Fiona, regarde ! Voilà, c'est bien ! Le jaune en haut à gauche et le rouge en haut à droite. Iris !… euh… Nico, voilà ! Est-ce que vous y êtes tous ? Non, Noël, regarde, regarde ! Est-ce que vous y êtes tous ? Oui, bon alors, c'est bon ! Cachez vos yeux et je vous en montre encore une. Allez, regardez, là. // Toujours la même consigne. C'est quoi la consigne, d'ailleurs ? Manuel, tu rappelles la consigne, un peu ? Comment faire ? Julia, qu'est-ce qu'il faut faire ? (…) On n'entend pas ! Nans ?
> Nans : Il faut plier de la même façon que toi.
> P : Voilà, pour avoir la même…
> E : Figure…
> P : … figure que moi.

A travers l'utilisation de verbes d'action (soulignés dans le texte), P incite les élèves à passer d'une position d'élèves objectifs à élèves agissants. Par ailleurs, P agit implicitement sur le milieu matériel en jouant sur la possibilité d'orientation du PLIOX : « le jaune en haut à gauche, le rouge en haut à droite ». Ainsi le modèle et le PLIOX de chaque élève sont orientés de la même manière, ce qui limite la nécessaire modification positionnelle liée au passage au plan fronto-parallèle. Après une phase de recherche dans laquelle il n'intervient pas, P organise une discussion collective portant sur l'analyse d'une production incorrecte comme celle présentée Figure 11 (a) :

> P : Julia, viens au tableau avec ta… avec ton carré de couleur. Viens ici. Viens voir.//Ah, mais tu as changé ! Tu triches alors ! Tu avais fait ça, c'est ça ?

Julia : Oui.
P : Et ensuite, elle a changé. Qu'est-ce que tu as fait quand tu as changé ? // Bon, déjà, ici, est-ce que c'est pareil que moi ? // Qu'est-ce qui change, Julia ? (…)
Julia : C'est plus petit.
P : Qu'est-ce que c'est qui est plus petit ?// Sarah, qu'est-ce que c'est qui est plus petit ?
Sarah : Les carrés.
P : Quels carrés ? (…) Qu'est-ce que c'est qui est plus petit, là ? Lou ?
Lou : Le jaune et le rouge.
P : Et *le jaune et le rouge, ce sont … quoi* ? Line ?
Line : Les deux couleurs qui sont en haut.
P : D'accord que ce soient des couleurs, *mais quelles formes géométriques ?*
Nans : Des carrés !
P [**faisant non de la tête**] : *Le jaune et le rouge, ce sont des carrés qui sont plus petits ?*
Moris : Ce sont des rectangles.
P : **Très bien Moris, le jaune et le rouge ce sont des rectangles**. *Ici, ce sont des rectangles…?*
EE : Oui ! Oui !
P : Ce sont des rectangles. **Et oui, ce sont des rectangles !** [P montre les deux rectangles rouge et jaune de la production de Julia]. Et ici, ce sont des rectangles ?
EE : Oui ! Non ! Si !
P : *Le jaune et le rouge ce sont des/ ?*
Nans : C'est des rectangles fins !
P : **Le jaune et le rouge sont aussi des rectangles.** Par contre…
Nans : Mais c'est des rectangles ! Mais ils sont plus fins !
P : Ici, ils sont plus fins. Ils sont plus petits que ceux en haut.

P utilise des expressions (soulignées dans le texte) incitant les élèves à réfléchir sur leurs actions et à se placer en position d'apprenant. Toujours par des questions, P force ensuite le passage vers le milieu de référence (en italique). Puis P fait basculer les élèves en position d'apprenant en employant une gestuelle et un langage de validation (en gras) : le milieu de référence n'offrant pas de rétroaction sur la formulation de la désignation des formes, c'est en effet à l'enseignant de prendre en charge la validation de ces formulations. Enfin P commence à construire le milieu d'apprentissage en mettant en évidence des rectangles de tailles différentes : « Et ici, ce sont des rectangles ? ». L'épisode suivant clôt la phase et consiste en une discussion collective portant sur la procédure correcte à mettre en œuvre :

P : Donc pour avoir des rectangles qui soient comme les miens, comme sur mon pliage à moi, que fallait-il faire ? (…)
Nina : Moi, je sais, je sais ! (…)
P : Allez, Nina, explique. Viens au tableau et explique. (…)
Nina : Ben là, tu mets la feuille comme ça. Ben là, tu regardes bien au tableau, tu mets la longueur et tu plies à la longueur du tableau.
P : Moi je l'ai vu faire autrement.
Line : Oui ! Moi !
P : Je l'ai vu faire autrement pour avoir deux rectangles exactement comme les miens, jaunes et rouges. Comment tu as fait, Luc ? (…)// comment as-tu fait pour avoir/ des rectangles, des rectangles rouge et jaune de la même taille que les miens/ au tableau ?
Line : Moi, je sais !
P : Noël, tu as trouvé ? (…) Et bien viens au tableau et explique-nous. Vous allez nous dire, vous, si vous avez fait de la même façon.
Noël [désignant la médiane] : En fait, là, il y avait un p'tit trait et là… et là… un pliage. Et là fallait les plier et puis après là j'ai fait comme au tableau.
P : Bon, tu as plié sur le même pli, et on avait exactement la même figure qu'au tableau.
Nans : Maître ! Fallait plier la moitié du carré.
P : Voilà. Fallait plier la moitié du carré. Et on obtient la même figure. D'accord ?

De nouveau, P cherche à placer ses élèves dans une position d'apprenant en utilisant des expressions (soulignées) qui incitent les élèves à réfléchir sur leurs actions. Noël met alors en évidence la médiane du PLIOX qui permet de réaliser le modèle, P reformule mais ne force pas le passage vers le milieu de référence en évoquant une droite. Puis Nans passe en position

d'élève apprenant en identifiant la relation entre le carré et le rectangle demi carré. P enrichit le milieu de référence en reformulant (c'est-à-dire en confirmant). Cependant P ne place pas ses élèves dans le milieu d'apprentissage, même si quelques éléments ont été évoqués, « rectangle » et « demi carré » notamment. Il ne reprend ni les objets géométriques (carré, rectangle, médiane), ni leurs relations (la moitié d'un carré) et n'organise pas d'institutionnalisation, même en fin de séance.

Constats concernant la mise en œuvre dans la classe de P

De même que Bulf *et al*. (2015), nous avons pu constater que le langage de l'enseignant joue un rôle important dans le positionnement des élèves à différents niveaux de milieu et dans leurs changements de niveau dans cette activité. L'étude des interactions langagières lors de l'activité proposée a mis en évidence des effets du langage du maître sur l'évolution de la position des élèves : d'élève objectif à élève agissant en phase de dévolution, d'élève agissant à élève apprenant dans les moments collectifs de formulation. Inversement, nous avons pu constater que l'absence de certains marqueurs langagiers chez l'enseignant (reliés à la phase d'institutionnalisation) a pour conséquence l'absence de positionnement élève. Par ailleurs, le langage employé par l'enseignant dans la phase de dévolution a conduit à une modification du milieu matériel et a participé lors des phases de formulation à l'enrichissement du milieu objectif ainsi que du milieu de référence. Le langage employé par l'enseignant peut également forcer le passage d'un niveau de milieu à un autre (ou pas) : du milieu objectif vers le milieu de référence, mais peu (voire pas) du milieu de référence vers le milieu d'apprentissage. Finalement, par le langage employé, P a fait en sorte que les élèves puissent reconnaître certaines des propriétés géométriques qu'ils ont fait émerger en travaillant sur le PLIOX, mais sans aller jusqu'à l'institutionnalisation.

CONCLUSION

Dans la première étude, nous avons pu relever une corrélation entre le vocabulaire employé par l'enseignant et celui employé par les élèves. Par conséquent, si nous revenons à l'hypothèse selon laquelle « l'évolution souhaitée du regard [sur une figure] s'accompagne d'une évolution du langage dans un processus dialectique : d'une part, le langage participe à l'évolution du regard, d'autre part, le langage évolue avec l'évolution du regard » (Duval & Godin, 2005, p. 11), notre étude met en évidence la corrélation entre le rôle du langage de l'enseignant et cette évolution. En utilisant un grain d'analyse de plus en plus fin, la deuxième étude nous a permis d'aller un peu plus loin. En nous intéressant aux fonctions didactiques du langage nous avons pu mettre en évidence les conséquences du langage de l'enseignant sur les activités des élèves et leurs éventuels apprentissages. Notre étude a mis en évidence un dysfonctionnement qui consiste « à privilégier l'activité, le « faire », les attitudes, aussi bien des élèves que du professeur (…) [et] conduit à reléguer à l'arrière-plan les connaissances et les savoirs » (Margolinas & Laparra, 2008, pp. 10-11), et a ainsi mis en lumière la tension dévolution/institutionnalisation. En interrogeant le rôle du langage dans la dynamique des niveaux de milieu, nous avons pu identifier la position effective des élèves et la nature du niveau de milieu dans lequel ils interviennent : nous avons mis en évidence l'impact du langage de l'enseignant dans les échanges et par suite dans l'évolution des rapports du sujet au milieu. Mais la place de l'enseignant dans ces niveaux de milieu reste à interroger. De plus les résultats présentés dans la deuxième étude portent sur une mise en œuvre particulière d'une phase de la situation. Réaliser l'étude sur plusieurs mises en œuvre de la même phase (enseignants différents ou élèves particuliers), devrait permettre d'enrichir nos résultats concernant le rôle du langage dans les activités des élèves. Par ailleurs, réaliser l'étude sur les

mises en œuvre de différents problèmes avec le même enseignant permettrait d'avoir un point de vue moins local sur les gestes professionnels de cet enseignant ainsi que sur le fonctionnement de sa classe. D'autre part, ce travail pourrait être mis en relation avec la problématique plus générale suivante : « on peut se demander si [les élèves] reconnaissent les propriétés géométriques qu'ils font émerger (…) lorsqu'ils travaillent sur des objets concrets et particuliers que sont les figures, les traits qui en délimitent les contours (…) ou les points (…) » (Mathé, 2008, p. 5). Cette chercheure proposait notamment d'« analyser le rôle du langage via un travail sur la formulation par les élèves des actions engagées, dans [l']intersection entre confrontation aux objets et processus de conceptualisation » (*ibid*., p. 6). Il semblerait que le rôle du langage de l'enseignant dans la dynamique des niveaux de milieu soit une autre piste à suivre…

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERTHELOT, R. & SALIN, M-H. (1999-2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire. *Grand N, 65*, 37–59.

BLOCH, I. (2002). Différents niveaux de modèles de milieu dans la Théorie des Situations. In J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BOSCH, M. & PERRIN-GLORIAN, M-J. (2013). Le langage dans les situations et les institutions. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat & E. Roditi (Eds.), *Actes de la XVIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp 587-621). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. (1986). La relation didactique : le milieu. In *Actes de la IVème école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 54-68). Paris : Irem Paris 7.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, G. & CENTENO, J. (1991). Rôle de la mémoire didactique de l'enseignant. *Recherches en didactique des mathématiques, 11*(2-3), 167-210.

BULF, C., MATHÉ, A-C., MITHALAL, J. & Wozniak, F. (2013). Le langage en classe de mathématiques : regards croisés en TSD et TAD. In A. Bronner, C. Bulf, C. Castela, J.-P. Georget, M. Larguier, B. Pedemonte, A. Pressiat & E. Roditi (Eds.), *Actes de la XVIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp 267-302). Grenoble : La Pensée Sauvage.

BULF, C., MATHE, A-C. & MITHALAL, J. (2015). Langage et construction de connaissances dans une situation de résolution de problème en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques, 35*(1), 7–36.

DUVAL, R. (1988). Approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 57–74.

DUVAL, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Berne : Peter Lang.

DUVAL, R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner : quels « apprentissages premiers » de l'activité mathématique ? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 8*, 13–62.

DUVAL, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation de raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 10 5–53.

DUVAL, R. & GODIN, M. (2005). Les changements de regards nécessaires sur les figures. *Grand N, 76*, 7–27.

DUVAL, R., GODIN, M. & PERRIN-GLORIAN, M.-J. (2005). Reproduction de figures à l'école élémentaire. In C. Castela & C. Houdement (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2004* (pp. 6-89). Paris : IREM Paris 7.

GUILLE-BIEL WINDER, C. (2013). *Reproduction de figures en CP/CE1 : la situation du PLIOX*. Paris : IREM Paris 7.

GUILLE-BIEL WINDER, C. (2014). Etude d'une situation de reproduction de figures par pliage en cycle 2 : le PLIOX. *Annales de didactique et de sciences cognitives, 19,* 103-128.
HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2000). Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20*(1), 89-116.
HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 11*, 175–193.
LABORDE, C. (1982). *Langue naturelle et écriture symbolique. Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fournier, Grenoble.
MARGOLINAS, C. (2004). *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la Théorie des situations didactiques*. Note de synthèse (HDR), Université de Provence.
MARGOLINAS, C. & LAPARRA, M. (2008). Quand la dévolution prend le pas sur l'institutionnalisation, In *Actes du colloque Les didactiques et leur rapport à l'enseignement et à la formation.*
MATHE, A-C. (2008). Confrontation aux objets et processus de conceptualisation en géométrie à la fin de l'école primaire, le rôle des interactions langagières. In colloque *Efficacité et équité en éducation,* Rennes, France.
MATHE, A-C. (2012). Jeux et enjeux de langage dans la construction de références partagées en géométrie. *Recherches en didactique des mathématiques, 32*(2), 195–227.
MAUREL, M., SACKUR, S. (2002). La presqu'île, introduction aux fonctions à deux variables en DEUG, analyse en terme de structuration du milieu d'une situation en classe ordinaire. In J.-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la XIème école d'été de didactique des mathématiques* (pp 167-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.
PERRIN-GLORIAN, M-J., MATHE, A-C. & LECLERC, R. (2013). Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? *Repères-IREM, 90,* 5–41.
SALIN, M.-H. (2008). Du CM2 à la sixième : quelques pistes pour une transition plus efficace (2ème partie). *PLOT, 14,* 2–9.

ANNEXE

TRANSCRIPTION ET ANALYSE M- SEANCE 2 – ETAPE 3

Dans la transcription, en accord avec (Bosch & Perrin-Glorian, 2013), nous avons souligné les éléments de savoir (corrects ou non) apportés par les élèves, nous avons mis en gras ceux apportés ou reformulés par l'enseignant et en italique les questions et les actions de l'enseignant qui visent à définir le problème ou à modifier le milieu. Les interventions structurantes de l'enseignant (appel aux savoirs anciens, structuration du travail des élèves) sont mises en italique gras. Tous les prénoms ont été changés.

Episode 1 –Présentation du modèle

M : Et je vais vous/je vais/faire une autre figure. *Et vous regardez bien. Et vous vous ne touchez pas votre/ Nicolas ! Tu le poses maintenant.* Donc je rouvre [M déplie le PLIOX]. Oh ! Je vais plier. Ohlala. [*M plie devant les élèves en montrant bien comment s'y prendre*].
EE: Oh, c'est pas dur ! C'est super dur !

Episode 2 - Analyse de la figure

M : Ah stop ! On ne touche à rien ! Je voudrais juste/non, non, non, non France. Attends ma grande. *Je voudrais juste qu'on me dise ce qu'on voit, les remarques qu'on peut faire sur ce qu'on voit.* Sonia ?
Sonia : On voit en fait que/que /y a le bleu et le vert qu'on voit, et le jaune et le rouge qu'on voit à la moitié. Et/et t'as/ et t'as plié le/ la moitié du rouge et du jaune.
M : ***Oui***, *est-ce que tout le monde est d'accord avec Sonia ?*
E : Oui.
M : ***Oui, hein***. Euh: Julie ?
Julie : Et ben en fait, ce que t'as fait c'est que tu/tu les as/tu les as remis droits, après tu as/t'as vu que il fal/que/t'as vu qu'il fallait pas qu'on plie tout sinon ça faisait pas cette forme alors t'as plié un peu.
M : ***J'ai plié un peu***, d*onc Sonia elle dit que j'ai plié à ?*
EE : Moitié
M : ***A la moitié/de la couleur jaune et de la couleur rouge***. Thérèse.
Thérèse : Surtout, et beh//, tu as/n'as pas plié le vert et le bleu parce que sinon et beh/, on voy/ on savait pas c'était quoi comme forme ; mais si tu pliais que ça la moitié de l'autre et beh ça faisait une forme.
M : ***D'accord***. Thaïs elle veut. C'est bien Thaïs de prendre la parole, je suis très contente.
Thaïs : Et ben, y a quatre pointes sur/les côtés.
M : ***Oui, oui, oui***. [*M montre le modèle* présenté au tableau] *Et là j'ai quatre pointes aussi* ?
EE : Oui// Non//
M : *Tu veux venir nous montrer les pointes, heu/Thaïs ?* ***Non, mais c'est vrai qu'on a quatre pointes, hein.***
Thaïs [pointe chaque sommet du modèle présenté au tableau] : Un, deux, trois, quatre.
M : **Oui, très très bien**. *Et tout à l'heure, j'avais quatre pointes aussi ?*
EE : Oui, oui.
M : Alex, tu veux parler ?
Alex : Non
M : Tu te réveilles ? Vous avez… oui, Qwang ?
Qwang : Y'a la moitié du rouge/non/du jaune et du rouge , et/et/et le bleu et le vert c'est/tout en entier.
M : Et **la *surface du carré bleu et du vert*** est restée …
EE : Entiers.
M : ***Entière. Est restée la même. Oui.***
Qwang : Et que le jaune et le rouge, ils sont à moitié.
M : D'accord. Et Julie elle veut encore nous dire quelque chose.
Julie : Avant, quand t'avais fait l'autre forme, on voyait que le/que le jaune et le rouge. Maintenant/on voit toutes les couleurs.
M : Voilà, voilà.
Qwang : Et la moitié du jaune et du rouge.
M : On voit toutes les couleurs, mais ***le jaune et le rouge,*** vous venez de le dire, ***on les voit à moitié***. *Bon, alors, vous allez reproduire cette figure*. *Attention, on n'avait qu'un seul pli, hein !*

Episode 3 – Travail individuel

M : Je vais vérifier mais, hé,hé, c'est pas bon ! Regarde un peu, *est-ce que tu es à la moitié, là ?*. XXX. Qu'est-ce que tu dis Rob ? XXX Alors tu nous l'expliqueras/tu nous l'expliqueras après. Thaïs, oui, réfléchis. Est-ce que tu as la moitié, là ? Non, tu n'es pas convaincue. *Comment tu peux faire pour avoir la moitié ?* XXX Ben essaye. XXX *Est-ce que tu as la* **moitié des deux côtés**, *là ?* Non, tu n'es pas convaincu. *Essaie de te débrouiller pour avoir la moitié, alors*. Comment tu as fait, alors ?

M : *Ah, tu as la moitié tu penses tu as la moitié ?* XXX *Mais tu as fait combien de plis, là ? Et moi j'ai dit combien de plis ? Combien j'ai fait de plis, moi, tout à l'heure ?*
Thaïs : Un.
M : Oui, alors *il faut que tu te débrouilles avec un pli.* … C'est bien Thaïs, parce que tu cherches aujourd'hui. [Maël montre sa réalisation (mal pliée)]. C'est pas grave. [Maël ajuste le côté à plier le long de la médiane qui lui est parallèle] Ah, bravo ! Maintenant on se débrouille ! [Maël effectue le pliage correct]

Episode 4 – Mise en évidence collective d'une procédure correcte

M : *Alors vous allez poser sur la table maintenant que vous* avez… Alors je vois qu'il y a des élèves qui s'en sont sor-/qui ont/reproduit sans difficulté, d'autres qui ont tâtonné, et puis certains/non mais attends je t'ai pas interrogé, bon/et puis, beh écoutez, on va/on va/en discuter, et puis comme à ça on va/on va s'entraider. *Moi, je voudrais savoir/comment vous avez fait. Alors déjà, pose bien ta feuille comme moi j'ai posé/j'ai/affiché au tableau. Comment/heu/vous avez fait, réalisé, la même figure que celle affichée au tableau ?* Ben Mat ?
Mat [montre la médiane du carré] : Avec le trait.
M : Le trait. *Alors viens au tableau et explique*/Viens au tableau, viens devant le tableau avec la feuille *et explique ce que c'est que ce trait. Vas-y*.
Mat : Ben le trait/
M : Alors tu/tu vas venir comme ça, tu vois, *tu vas te tourner*. Vas-y, on t'écoute.
Mat [montre la médiane du carré du côté non coloré du PLIOX] : C'est le trait qui nous aide.
M : ***Alors… oui… Alors Mat nous dit quelque chose de bien intéressant, il a fait une bonne remarque***. ***Il dit c'est le trait qui nous aide*** [M pointe la médiane du carré du côté non coloré du PLIOX]. Essaie d'expliquer encore XXX Ce trait, ***il est au dos de ta feuille*** et t'a aidé. *Alors/qu'est-ce que tu peux dire d'autre ?*
Mat [plie en plaçant le côté sur la médiane] : Euh… avec le trait on…on s'aide.
M : *On s'aide pour faire quoi ?*
Mat : Pour faire ça [montre l'ajustement entre le côté et la médiane].
M : *C'est-à-dire ?* XX *Pour ??*
EE : Plier le papier !
M : ***Pour plier le haut de ta feuille*** et *mettre comment ?* XX C'est bien Mat, essaie d'aller/euh/jusqu'au bout./Alors, tu as remarqué qu'il y avait un trait [M montre la médiane côté non coloré du PLIOX] et là, ***ç'a été un repérage pour plier le haut de ta feuille***.
Mat [désigne le côté du PLIOX et la médiane] : Il faut le mettre à la pointe.
M : Il faut le mettre à la pointe, dit-il. Est-*ce que/c'est exactement ça* ? *C'est pas mal hein déjà ! Est-ce que c'est exactement ça ?*
EE : Oui.
Mat : Il faut replier jusqu'au trait.
M : *Alors tu dis que tu replies comment ?* Thérèse ?
Thérèse : Jusqu'au trait.
M : *C'est-à-dire ?*
Thérèse : C'est-à-dire qu'on met là/là/ça/au trait aussi/c'est-à-dire qu'on met ça au trait.
M : Alors on met au trait, comment on dit ? *Comment/on n'a pas des mots, une expression plus/parce que si tu dis ça à une autre classe, les élèves ne vont certainement pas comprendre.* Sonia ?
Sonia : En fait on plie à la ligne, et/et après ça nous aide et/on voit. Après le derrière on voit l'autre couleur/la même couleur.
M : Oui. Julie ?
Julie : Et beh en fait, le trait et ben ça sert à/à bien le plier parce que si tu plies, et ben des fois tu peux plier tordu.
M : Et oui, tu peux plier tordu, donc ce/ce trait comme vous dites, **qui est au milieu,** ***donc/ce trait là qu'on voit au dos,*** c'est ce/c'est ce/***ce trait c'est un pli,*** hein, c'est le/le premier pli qu'on a fait. ***C'est un repère pour replier cette moitié/cette partie de feuille***. Qwang ?
Qwang [refait le premier pliage] : Avant, quand/quand on avait fait ça, ça avait touché la dernière ligne, et que maintenant ça fait ça [montre le pli sur la médiane], ça touche cette ligne-là.
M : Ça touche cette ligne, ça *touche donc on dit qu'on… ?*
E : S'exclame.
M : *Qu'on… ?*
E : S'exclame.
M : Qu'on s'exclame. ***Non !*** Je ne m'exclame pas ! **Qu'on/superpose**. Ç*a vous va pas, ce mot, superpose ? ça vous dit rien ce mot, superpose ?*
EE : Oui !

STÉRÉOTYPES ET COMPLEXIFICATION DE L'IDENTITÉ ENSEIGNANTE

Nathalie **AUXIRE**

Université de Nice Sophia Antipolis, Laboratoire I3DL, EA 6308

auxire@unice.fr

Résumé

A travers deux exemples d'enseignement informel de notions mathématiques dans une discipline technologique du lycée professionnel, nous montrons comment des stéréotypes relatifs aux élèves ou aux objets enseignés contribuent à l'identité professionnelle de l'enseignant (IPE). L'IPE est vue comme processus subjectif de régulation entre la représentation de soi-même et le contexte socio-professionnel où l'on se sait agir, ici la filière productique usinage en lycée professionnel. L'analyse de discours révèle, d'une part, l'interprétation située qu'un enseignant construit de ses pratiques routinières, des objets mathématiques qu'il enseigne dans sa discipline, de la relation de ses élèves aux mathématiques et, d'autre part, le rôle qu'il s'autorise pour mener un enseignement pour lequel il n'est institutionnellement ni désigné, ni préparé. Enfin, nous questionnons la pertinence de la méthode d'analyse de discours pour étudier l'inter-variabilité ou la variabilité des pratiques enseignantes.

Mots clés

Identité professionnelle, stéréotype, enseignement des mathématiques, analyse de discours, lycée professionnel, discipline

INTRODUCTION : LES ENJEUX DE L'IDENTITÉ PROFESSIONNELLE ?

Notre société tente régulièrement (Poucet & Prost, 2016) de réformer tout ou partie du système éducatif pour résoudre différentes tensions : formations professionnelles scolaires et survalorisation des formations générales (Legendre, 2008), orientation différenciée et massification de la population scolaire, culture française et standardisation européenne[1]…
L'évolution rapide des niveaux les plus inclusifs (filière, programme, discipline) sur l'échelle de Chevallard (2006, p. 5) a amené la recherche en éducation et en didactique des disciplines à en étudier le relais au niveau des enseignants. Par exemple, Tateo (2012, p. 346) décrit les tensions exercées sur l'enseignant qui doit répondre aux demandes croissantes d'innovations et Biagioli (2012, p. 3) décrit « le besoin de situer l'évolution des disciplines conçues comme groupes sociaux producteurs et transmetteurs de savoirs dans un contexte mondialisé ».

[1] Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA) en 2000 par l'OCDE ; objectifs d'éducation dans Traité de Lisbonne adopté en 2007 par le Conseil européen

L'effectivité des réformes, la fragilisation ou le renforcement de l'engagement enseignant, la formation de stéréotypes sur les filières, les disciplines ou les corps de métiers spécifiques de l'enseignement apparaissent être les déclinaisons d'une même problématique, celle du changement d'échelle des transformations du système éducatif.

Dans cet article, nous souhaitons contribuer à cette problématique en nous focalisant sur un segment de l'échelle, de la discipline à l'enseignant. Notre objectif est de mettre en évidence la dépendance entre un problème professionnel (enseigner des mathématiques dans une discipline technologique marginalisée : productique usinage ou construction mécanique) et la construction de l'identité professionnelle enseignante (IPE). L'expression IPE ne désigne pas un attribut personnel qui progresserait jusqu'à une forme achevée ; elle désigne le phénomène d'interprétation de soi-même dans un contexte professionnel donné. Selon les auteurs, la fonction de l'IPE est de répondre, dans le cadre de son exercice professionnel, soit au besoin d'équilibration de ses ressentis et de la représentation organisée de soi (valeurs, attitudes) (Beijaard, Meijer & Verloop, 2004, p. 108) soit au besoin d'engagement émotionnel et éthique (Tateo, 2012, p. 349).

Le principe de notre démarche est d'explorer les relations qu'un discours professionnel crée, via un objet d'enseignement caché (Perrenoud, 1994), entre le soi de l'enseignant, un domaine d'activités (la productique usinage), une organisation de travail d'enseignement (technologie, pratiques d'atelier), un cadre mathématique (la géométrie affine euclidienne) et l'environnement sémiotique de la discipline (langage structuré des automates, langage normalisé du dessin technique, langage naturel, code mathématique).

Premièrement, nous justifions le choix de la filière productique usinage en lycée professionnel (LP) comme contexte de recherche.

Deuxièmement, nous présentons le recueil de données et discutons la pertinence des outils d'analyse de linguistique énonciative, mis en œuvre pour dégager l'organisation globale du discours, et cela, pour étudier l'articulation entre le soi de l'enseignant et son contexte d'exercice. Ces outils doivent garantir un recueil de données factuelles et expressives à différents échelons de la conversation[2], indépendamment des registres sémiotiques utilisés. Cet article prétend montrer l'enrichissement méthodologique qu'apporte le recours aux concepts de linguistique énonciative pour les analyses conversationnelles en didactique des mathématiques. Les analyses d'interactions verbales présentées jusqu'alors restent, le plus souvent, linéaire, c'est-à-dire au niveau des tours de paroles. Si l'analyse linéaire reste nécessaire pour appréhender des phénomènes de régulation pas-à-pas entre les actions, les pensées et les communications des acteurs observés (enseignants ou élèves) (Guernier, 2006), pour suivre comment est utilisé l'environnement sémiotique dont le glissement d'un vocabulaire familier au jargon disciplinaire, elle ne suffit cependant pas à rendre compte de la coexistence, plus ou moins concurrentielle, de représentations collectives présupposées, de représentations subjectives acquises et de la représentation de soi en train d'agir en mathématiques au cours de la conversation. La dynamique d'une situation conversationnelle provient en partie du fait que les locuteurs ajustent continument leur position par rapport aux trois niveaux de représentation que nous venons de citer.

Les concepts-outils issus de la linguistique énonciative, une fois importés en didactique, procurent des indicateurs de mouvements d'affiliation/désaffiliation du sujet (ou d'un groupe de sujets) à la discipline. Ils constituent des modèles explicatifs d'engagement/désengagement du sujet dans une activité à forte composante disciplinaire.

Troisièmement et enfin, nous illustrons notre démarche en analysant quelques extraits d'entretien avec deux enseignants particuliers (E-cm et E-pu1). Dans les deux cas, nous montrons que les difficultés en mathématiques des élèves génèrent des ressources identitaires,

[2] Echelons croissants d'une conversation : tour de parole / sous-séquence / séquence / conversation

celles-ci étant révélées par la mise en mots de ses représentations de soi ou de ses pratiques diffuses d'enseignement des mathématiques.

CONTEXTE : LES MATHÉMATIQUES DANS LA FILIERE PRODUCTIQUE USINAGE

La productique usinage est à la fois un champ d'activité industrielle et un champ d'étude technologique. Dans le premier, il s'agit pour l'élève de maîtriser les activités pratiques génériques du monde professionnel : lecture autonome d'un document de fabrication, installation, réglage et maintenance des outils permettant d'usiner, de contrôler, d'assembler les pièces, de mesurer leur qualité… Dans le second, il s'agit pour l'élève de maîtriser les modèles géométriques rendant communicables, fiables et fidèles les processus de fabrication (productique) d'objets centimétriques par enlèvement de matière (principe de l'usinage). L'économie des ressources (humaines, horaires, matérielles, logistiques) est un fondement épistémologique de ce champ d'étude auquel contribuent les mathématiques, la mécanique, les techniques d'information et de communication.
Dans la filière productique usinage au LP, ce sont les disciplines productique usinage (PU) et construction mécanique (CM) qui dispensent les objets de cette technologie à la fois professionnelle et expérimentale (Lebeaume, 2011, p. 7). Notre problématique est ainsi abordée sous un angle à la fois restreint (productique usinage/mathématiques) et contrasté (disciplines professionnelles/enseignement général). En effet, PU et CM s'appuient sur le raisonnement spatial pour introduire les outils mathématiques qui lui sont nécessaires au cours de tâches d'analyse et de fabrication. Elles utilisent la langue naturelle orale ou écrite, certes, mais aussi un support perceptuel par le biais de systèmes mécaniques (montage, démontage), de machines à commandes numériques (écran de contrôle) et de logiciels de simulation mécanique (imagerie numérique des opérations d'usinage-assemblage).
Dans ce contexte technologique et pratique, des techniques portant sur les vecteurs (décomposition analytique, changement de repère, calcul de grandeur, orientation de l'espace), sur les formes géométriques (décomposition de solides complexes, génération de surface) sont enseignées ainsi que sont ré-enseignées des techniques numériques élémentaires (numération, opérations, conversion dans le système décimal). La spécificité de la filière productique usinage est ainsi de pratiquer une technologie cadrée par la géométrie affine euclidienne et, dans le même temps, de combiner des procédés de validation à plusieurs niveaux : par les sens (vérification visuelle, simulation numérique, manipulation), par l'analyse et le calcul vectoriels en mécanique notamment.

En quoi consiste alors le raisonnement spatial en mathématiques dans cette filière ?

De façon générale, un raisonnement est un type de discours dont la fonction principale est épistémique, dont certaines composantes sont scientifiques et qui, comme tout discours, est situé par rapport à un énonciateur, un destinataire, éventuellement collectifs, et des conditions d'énonciation (Grize, 1997).
En sciences cognitives, le raisonnement spatial, ou pensée spatiale (Newcombe, 2013) désigne un ensemble d'habiletés à extraire des informations qualitatives et non exhaustives mais statistiquement stables concernant les relations topologiques (inclusion, contact, adjacence…), d'orientation relative, de proximité. Ces habilités, issues d'une connaissance

familière de l'espace, consistent en projections mentales, déplacements mentaux d'un objet ou de soi-même par rapport à l'objet, descriptions gestuelles ou verbales, interprétation des changements d'échelle perçus (Bouzy, 2001 ; Hudelot, Atif & Bloch, 2006). En atelier ou en laboratoire, elles sont liées aux activités de verbalisation, de lecture de document technique. Le développement de ces habilités semble favoriser le passage à des informations formalisées et exactes telles qu'elles se présentent en sciences, en technologies ou en mathématiques (Newcombe, 2013, pp. 28-29 ; Dehaene, 2012). Dans la filière productique usinage, les enseignants n'hésitent pas à mener de front deux types de discours, l'un intuitif et l'autre plus formalisé. Par exemple, à la question « *les deux surfaces perpendiculaires/ c'est ça l'épaulement/ est-ce que tu vois bien sur le document de phase* ? », l'enseignant accepte que l'élève lui montre simplement avec le doigt sur une pièce matérielle déjà usinée. Pourtant, ce qui est visé par son intervention, est bien que l'élève conceptualise la relation d'épaulement afin d'être capable d'interpréter le document technique et d'anticiper, en autonomie, les réglages à faire sur la machine (référentiel de déplacement).
Ainsi, les composantes scientifiques tiennent à l'existence de données, d'outils conceptuels et de modes de validation sciemment mis en exergue en lien avec une question délimitée. Dans la filière productique usinage, les tâches portent sur le calcul de grandeurs géométriques ou physiques, la spécification des relations entre certains éléments de surface de deux solides, le classement de surfaces invariantes par isométries…
La théorie mathématique sous-jacente est la géométrie affine euclidienne, l'activité géométrique relève d'une géométrie axiomatique naturelle « constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité » (Houdement & Kuzniak, 2006, p. 181). La validation par la perception prédomine (contrôle visuel, mesurage, superposition) dans les activités pratiques mais, du point de vue enseignant, l'effort d'abstraction, bien que très contextualisé, est explicitement visé à travers le modèle vectoriel et la géométrie descriptive, notamment en construction mécanique. Cette géométrie « aspire à être un schéma de la réalité » (Houdement & Kuzniak, 1998, p. 13), schéma dont la mise en forme symbolique et le calcul de grandeurs (physiques ou géométriques) sont réglés par des relations topologiques (contact, intersection, inclusion) ou géométriques (orthogonalité, parallélisme, invariance par translation ou rotation).
Le caractère situé du discours tient aux relations entre l'intention de communication scientifique, l'intention didactique des participants et les conditions d'énonciation : l'alternance contextualisation/décontextualisation et les manipulations symboliques liées à l'activité mathématique sont à considérer dans cette relation.
Or, dans les disciplines technologiques du LP, l'enseignement très spécifique de certains objets mathématiques (vecteur, profil générateur, torseur) présente des difficultés accrues.

Un problème de la profession dans les disciplines technologiques en LP ?

À l'échelon pédagogique, la démarche inductive est préconisée dans les textes officiels[3] du LP, attestée dans les témoignages des enseignants que nous avons interviewés et dans les documents de formation continue[4] : observations, manipulations, études de cas,

[3] Programme de mathématiques-sciences physiques et chimiques de LP (2009, p. 1), disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_2/25/3/mathematiques_sciences_physiques_chimiques_44253.pdf
[4] Voir par exemple :
https://www.pedagogie.ac-aix-marseille.fr/upload/docs/application/pdf/2012-02/didactiquepedagogie.pdf

expérimentations durant environ six semaines précèdent une phase d'institutionnalisation. Les enseignants organisent cette démarche inductive autour d'objets conceptuels à enseigner appelés *centre d'intér*êt. Par exemple, le centre d'intérêt *référentiel de mouvement* met en réseau des activités de réglage théorique ou effectif d'une machine à usiner, des pratiques symboliques (jargon, conventions de notation), des concepts mathématiques (vecteur, origine, repère orthonormé).
Par ailleurs, le Haut Conseil de l'Education (2009) a listé plusieurs difficultés spécifiques à l'enseignement professionnel :

> Les classes sont difficiles à gérer, en particulier dans les disciplines générales qui ont été vécues comme source d'échec au collège. (*Ibid*., p. 9)
>
> Représentations et réalités se nourrissent mutuellement pour dévaloriser la voie professionnelle. (*Ibid*., p. 12)
>
> La prise en charge de ceux qui ne maîtrisent pas les compétences fondamentales complique le fonctionnement de la voie professionnelle. Le dernier maillon de la chaîne ne pouvant pas se défausser sur le suivant, les lacunes de la scolarité antérieure doivent d'abord être comblées pour permettre la réussite. (*Ibid*., p. 14)

L'enseignant doit se débrouiller pour répondre aux attentes de la société à diplômer et insérer les élèves, et ceci en dépit des stéréotypes dépréciatifs relatifs à la vie scolaire au LP et de la *désaffiliation* des élèves des matières générales, phénomène que Biagioli (2010, p. 38) décrit ainsi :

> […] une série d'échecs successifs peut couper d'une discipline et [une] série d'échecs successifs dans plusieurs disciplines peut couper de l'école. Quand une discipline cesse de susciter dans l'imagination de l'élève le désir d'appartenir au groupe de référence qui la fait vivre dans et hors l'école, celui-ci se contente d'en subir l'enseignement dans son groupe d'appartenance : la classe.

Il nous faut ici préciser que la notion de désaffiliation s'applique à une personne envers une discipline quand elle ne se projette plus dans cette discipline, à un objet conceptuel quand, dans un domaine d'activités, le recours à cet objet se spécialise, quand la sémiotique de cet objet se normalise et que l'objet n'est plus reconnu dans son domaine d'origine où il avait une pluralité de significations. Enfin, les disciplines scolaires peuvent également s'affilier/ se désaffilier les unes des autres. Par exemple, le dessin technique, anciennement inclus dans la géométrie descriptive, s'est désaffilié des mathématiques au fur et à mesure que les outils graphiques se sont transformés jusqu'à être affilié, dans le champ des sciences physiques, à la discipline de construction mécanique.
A l'échelon du curriculum de la filière PU, trois faits sont à souligner.
D'abord, les objets mathématiques s'inscrivent dans l'épistémologie du domaine de la PU : ils servent à modéliser et spécifier les surfaces du point de vue de leur génération, de leur orientation, de leurs dimensions, de leur invariance isométrique. Dans l'organisation d'aujourd'hui, ces objets apparaissent spécialisés, désaffiliés des mathématiques. Mais l'étude des définitions de l'objet *vecteur* à travers les manuels de mathématiques de 1960 à nos jours montre que cela n'a pas toujours été (Auxire, 2015, pp. 438–447). La désaffiliation des mathématiques appliquées à la mécanique et au dessin industriel semble corrélée à la montée de la pensée structuraliste dans l'enseignement et à la numérisation des outils de production graphique (*Ibid*., pp. 48–52 ; La Verne & Meyers, 2007).
Ensuite, l'étude des documentations disciplinaires montre que ces objets mathématiques sont stéréotypés au niveau du LP, c'est-à-dire représentés par une symbolique très stable et très codifiée, dans des situations génériques toutefois problématisées.
Par ailleurs, les objets mathématiques permettant de structurer les outils ou les surfaces par classe d'équivalence (vecteur, isométrie, torseur) sont peu reconnus comme étant de nature

mathématique par les enseignants au contraire des objets usuels (numération, calcul, proportionnalité) qui sont spontanément associés à la discipline des mathématiques, vue comme une discipline de service.
Ainsi, aux échelons du LP et des disciplines technologiques, l'enseignement de mathématiques constitue un *problème de la profession* pour l'enseignant au sens de Chevallard (2006) où la profession elle-même ne propose pas de solution, même si l'institution reconnaît des difficultés spécifiques et entérine certains stéréotypes. L'enseignant construit néanmoins une représentation des relations entre les objets mathématiques qu'il doit enseigner, les élèves, caractérisés par lui-même et l'institution, et lui-même engagé dans cette mission d'enseignement. À un instant donné, cette représentation est, pour l'enseignant, une ressource de justification de sa vie professionnelle. Nous nous proposons d'en étudier certains aspects à l'aide de l'analyse de discours.

MÉTHODOLOGIE : DONNÉES ET OUTILS D'ANALYSE

Recueil de données

Dans notre recherche, deux types de conversation ont été recueillis auprès de trois enseignants de disciplines technologiques (productique usinage et construction mécanique) de la même filière dans deux lycées professionnels du même département : deux entretiens enseignant-chercheur (durée : 1h à 1h30 ; 196 et 598 tours de parole) et deux dialogues enseignant-élèves, précédés d'entretiens très courts (durée : 20 à 40 minutes ; 140 et 220 tours de parole en moyenne).
La situation d'énonciation a été construite de la manière suivante : les enseignants ont rencontré le chercheur, suite aux entremises successives de leur chef d'établissement et de l'inspecteur pédagogique régional (IPR) de mathématiques-sciences physiques et chimiques. Chaque enseignant a donné son accord pour plusieurs entretiens semi-dirigés, le motif présenté par le chercheur étant d'étudier les modalités d'un enseignement des mathématiques au sein de ces disciplines technologiques.
Les conversations ont été enregistrées sous forme d'audio ou de vidéogrammes puis transcrites en *verbatim* (sauf pour une séquence où un tableau était plus commode). Les documentations disciplinaires de la filière productique usinage (base nationale des sujets d'examens[5], programme, référentiel, documents pédagogiques fournis par les enseignants) ont été croisées avec les données recueillies.
Pour étudier la construction de l'IPE de chaque enseignant, nous avons sélectionné deux thèmes conversationnels : l'entrée dans le métier d'enseignant et les pratiques d'enseignement des mathématiques. Ils font référence à des moments distincts de la vie professionnelle et contribuent, ensemble, à faire évoluer l'IPE.
Le premier thème qui aborde la question de l'entrée dans le métier d'enseignant, apparaît critique pour engager l'enseignant dans l'entretien parce qu'il s'agira alors de se remémorer, par le discours, différents éléments du noviciat professionnel (parcours et projet professionnel initiaux, motivations, mode de recrutement) et de se positionner par rapport aux mathématiques (formation scientifique, expérience professionnelle en collège ou LP). Le second thème permet d'articuler la relation des élèves aux mathématiques et le rôle de l'enseignant tel qu'il se l'imagine, ces deux sous-thèmes étant apparus après les analyses.

[5] En ligne sur le site : www.crdp-montpellier.fr

Nous avons combiné deux échelles d'analyse : l'une, linéaire, des actes de langage dans l'alternance des tours de paroles et l'autre, délinéarisée, dans la globalité de la conversation. Une conversation se décompose en effet en une mosaïque de séquences thématiques plus ou moins longues et peut être réarrangée non plus chronologiquement mais thématiquement. Outre le lexique, les outils que nous mobilisons sont les concepts de stéréotype, d'éthos et de schéma de discours. Issus de la linguistique énonciative, ces outils permettent de décrire notre objet d'étude (la relation entre un problème professionnel et l'IPE). Présentons les trois outils.

Outils d'analyse

Stéréotype

La stéréotypisation désigne un mode de catégorisation figée d'un groupe d'objets ou d'individus dont « l'observateur social sait [qu'il] n'est pas constitué au hasard » (Morchain, 2006, p. 2), le radical stereos signifiant solide, c'est-à-dire indéformable. Établissant « une relation invariable d'éléments invariables » (Chateau, 2007, p. 149), la stéréotypisation est en soi un mode de constitution de ressource culturelle *a priori*.
Cependant, si un stéréotype satisfait le double besoin de marquer l'altérité (Morchain, 2006 ; Auger, 2010) et de fournir des repères cognitifs par défaut (Vincent, Delozanne, Grugeon, Gélis, Rogalski & Coulange, 2005, p. 306), la stéréotypisation est un mode de catégorisation restrictif, allant à l'encontre de la structuration (recherche d'invariants entre classes d'objets de nature différente). Dans les phénomènes d'enseignement-apprentissage, la stéréotypisation s'applique aux groupes de personnes et aussi aux objets enseignés : ces derniers, éventuellement des concepts mathématiques, rendus socialement communicables par les disciplines, sont réduits soit à une situation, soit à un formalisme, soit à un traitement, soit à une catégorie socio-professionnelle d'usagers. Par ailleurs, concernant les stéréotypes relatifs à un groupe de personnes, les représentations semblent être d'autant plus homogénéisantes que le groupe cible a une situation peu valorisée (Morchain, 2006, p. 2 ; Palheta, 2011, p. 60).

Notion d'éthos

Dans la rhétorique antique, les interactions verbales sont analysées à partir de l'éthos et du pathos. L'éthos est la posture que l'émetteur adopte dans une circonstance prévisible donnée et le pathos désigne l'effet que l'émetteur veut provoquer sur son récepteur. La distinction éthos/pathos souligne qu'un discours est socialisé préalablement à toute action discursive. Ainsi, le code de prise de parole s'adapte aux différents fonctionnements sociaux qu'ils soient privés, professionnels, scolaires ou, à l'intérieur de l'école, disciplinaires (Auxire, 2015, p. 57).
Or, le déroulement de toute conversation passe par une suite de réajustements des attentes sociales dont les interlocuteurs jouent, de façon plus ou moins calculée pour essayer de maîtriser la situation. La linguistique énonciative a redéfini la notion d'éthos, considérant qu'au cours d'un discours ou d'une conversation, différentes facettes du caractère social, moral ou intellectuel d'un sujet parlant se combinent (Plantin, 2011, p. 36). Il n'y a donc une pluralité d'éthos en situation de conversation :

- L'*éthos préalable* correspond à la caractérisation sociale du sujet avant qu'il ne parle, par son apparence « mais aussi sur la base de la représentation collective ou du stéréotype qui circule sur sa personne » (*Ibid*., p. 35).
- L'*éthos auto-construit* correspond à l'image que construit, pendant la conversation, le sujet de lui-même par rapport à son statut d'énonciateur : « en situation argumentative, les participants valorisent systématiquement leurs personnes et leurs actes, afin de légitimer métonymiquement leurs positions » (*Ibid*., p. 36).

- L'*éthos du locuteur* correspond à la caractérisation, par l'interlocuteur, du sujet parlant en tant que source d'énonciation. En réaction et en fonction de ses connaissances et de ses valeurs, l'interlocuteur va accepter ou non ce qu'énonce le sujet parlant (Ducrot, 2000).

À la différence de l'éthos rhétorique qui est toujours intentionnel, les éthos produits en conversation peuvent être intentionnels ou non, le sujet pouvant ne pas avoir conscience de les construire ou les subir. Néanmoins, c'est de sa capacité à en prendre conscience que dépend sa réussite discursive.

Schéma de discours

La notion de schéma de discours, théorisée dans les années 1960-1970, permet de dégager des invariants dans le fonctionnement d'un récit, indépendamment du registre sémiotique (image, texte, parole, mime...) et des modalités d'énonciation (1e ou 3e personne, dialogue…) en séparant le plan du contenu (ce qui est raconté) du plan de l'expression (le racontant). Lors de l'analyse délinéarisée, un schéma de discours permet d'articuler, *a posteriori*, des éléments factuels et des faits expressifs qui surviennent de façon désordonnée, redondante, explicite ou implicite dans un discours. Dans la thèse, nous avons utilisé trois schémas.

Le *schéma argumentatif* permet de modéliser une orientation du discours où « la conclusion, c'est ce qu'on a en vue, ce à quoi on veut en venir quand on énonce l'argument » (Charaudeau & Maingueneau, 2002, p. 68). C'est donc la composition d'arguments plus ou moins modalisés convergeant vers une conclusion qui structure le schéma argumentatif, davantage que d'autres éléments qui, par ailleurs, le renforcent, tels que l'achoppement sur un point de vue controversé, la valeur épistémique des arguments, l'intention plus ou moins efficace d'altérer une représentation (modifier un point de vue, persuader, convaincre).

Le *schéma narratif* est adapté à l'analyse d'un récit, c'est-à-dire à la mise en discours d'un déroulement d'événements, quels que soient la forme et l'ordre de ce récit (*Ibid.*, p. 484). Ainsi, un entretien avec un enseignant suscite au moins deux types de récits : récit de vie et récit d'expérience professionnelle. Le schéma narratif met en évidence les enchaînements significatifs conduisant d'un état initial à un état final : liens de causalité, mises en opposition, mises en convergence, etc. qui ensemble construisent une interprétation de l'enchaînement des événements en fonction de l'énonciateur, du narrateur et de son lien avec les intervenants du récit. Le schéma narratif structure un récit en cinq phases : une situation initiale (phase 1) est perturbée (phase 2), ce qui amène une transformation (phase 3) pour résoudre cette perturbation (phase 4) jusqu'à une situation finale (phase 5).

Le *schéma actantiel* (Hébert, 2006) permet d'analyser la dynamique du déroulement d'une action, réelle ou imaginée, selon six composantes appelées actants : l'objet, le sujet, le destinateur, le destinataire, l'adjuvant et l'opposant. Les actants sont des classes d'équivalence selon la relation d'équivalence « a la même fonction que » vis-à-vis de l'action. Selon le moment, un même élément peut changer de fonction, passer d'opposant à adjuvant ou vice-versa, passer de destinateur à destinataire, etc. En bref, le destinateur définit l'action, le sujet réalise l'action, le destinataire évalue l'action et, enfin, l'objet motive l'action. Tout ce qui facilite ou accélère l'action est un adjuvant, tout ce qui fait obstacle à l'action est un opposant.

RÉSULTATS ET DISCUSSION

Les résultats que nous discutons maintenant proviennent des analyses délinéarisées et des synthèses d'abord d'une conversation en classe avec E-cm puis d'un entretien long avec E-pu1. Cependant, nous ne pouvons pas retranscrire l'intégralité des *verbatim*[6] dans le cadre de cet article : nous avons donc choisi de présenter certains extraits en guise d'illustration, sans nous interdire de citer des actes de langage hors de ces extraits, faute de quoi aucun schéma de discours ne peut être abstrait.

Il s'agit ici de montrer que des représentations sociales stables, extérieures à la situation conversationnelle (des stéréotypes) ne sont pas sans influence sur la représentation du soi professionnel, construite dans cette situation précise. Parmi les outils de la linguistique énonciative, le déictique de personne collective (on, nous, vous), personnelle (je) ou impersonnelle montre la dynamique d'acceptation ou de réfutation des stéréotypes qui concernent le locuteur. Par exemple, le déictique du collectif permet de suivre l'inclusion du locuteur (nous, on) à une communauté professionnelle dont, dans le même temps, il exclut l'interlocuteur (ici le chercheur). Ainsi, si l'on a suffisamment d'informations sur la situation d'énonciation (qui parle à qui, où, quand, dans quelles circonstances), les procédés discursifs (lexique, schéma de discours auxquels nous nous limitons) peuvent indiquer l'expression de la représentation de soi par rapport à un domaine de savoir (expertise ou non), à une ou plusieurs communautés d'enseignants (établissement, lycée, discipline) à travers la mise en mots de l'activité professionnelle.

Les thèmes déjà annoncés sont abordés : l'entrée dans le métier d'enseignant, l'enseignement des mathématiques. Potentiellement ces thèmes révèlent l'IPE car ils suscitent des occasions de réflexion et de reconstruction de ses engagements (émotionnel, éthique, intellectuel) au regard des interprétations faites des conditions d'enseignement.

Stéréotypes et IPE de E-cm, enseignant en construction mécanique

A chacun des enseignants rencontrés, nous avons demandé de décrire les savoir-faire en mathématiques nécessaires pour leur discipline. Répondant d'abord à cette question de façon énumérative, E-cm en vient à improviser une interrogation des élèves présents dont les traces orales et écrites sont transcrites en parallèle dans le tableau ci-après (Figure 1).

> E-cm : y'a d'gros problèmes en maths/ savoir mesurer/ savoir mesurer en millimètre/ c'est la panique en dehors du centimètre// les surfaces/ les volumes/ les densités// dans la plupart des métiers il y a nécessité de métrer // aussi les vecteurs des efforts// la première chose c'est de pas parler des maths/ de s'détacher/ si on peut s'passer des maths/ c'est OK/ c'est l'résultat qui compte// (silence) y'a aussi les volumes/ les intervalles de tolérances/ le calcul de cote moyenne les conversions les échelles//mais je crois qu'vous vous rendez pas compte du niveau qu'i's ont/ tenez on va faire un test [*Cinq élèves travaillent en autonomie sur un logiciel ; l'enseignant appelle les élèves ; l'enseignant va au tableau ; s'adressant aux élèves*] j'vais vous poser dix questions/ vous répondez [Figure 1].

[6] Les *verbatim* sont consultables dans les annexes de la thèse, en ligne : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01251697/document

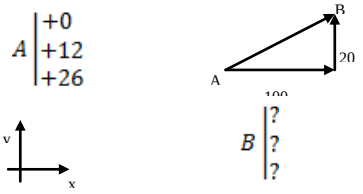
Ce que l'enseignant écrit au tableau	Ce que l'enseignant dit oralement
	je suis sur une commande numérique/ je fais un déplacement on est là/ vu de dessus (l'enseignant pointe le repère qu'il a dessiné avec le bâton de craie)

Figure 1 : la question sur les vecteurs pendant le test de E-cm

Nous observons que la question sur les mathématiques déclenche une réponse massive (l'entretien devient monologue) et complexe, passant d'un diagnostic (*gros problèmes en maths*) à une énumération coopérative puis à une obstruction (*ne pas parler de maths*) qui constitue dès lors la thèse de E-cm. Mais plutôt que d'affirmer sa thèse abruptement, E-cm consent à envisager l'antithèse, assimilant du même coup la question (*quels savoir-faire* ?) à l'antithèse (*parlons de maths*). La marque de modalisation (*je crois qu'vous*…) est typique d'une posture argumentative ayant pour effet de mettre à distance E-cm (le locuteur) de son propre point de vue alors qu'il prend le contrôle de la situation d'énonciation. Nous avons donc là une séquence qui suit le schéma argumentatif. Dès lors, il importe de chercher le ou les actes de langage qui déclenchent ce schéma.

Dans la situation d'entretien, la représentation sociale des mathématiques, celle des élèves en LP et celle de soi à travers la discipline CM, convoquées ensemble, amène E-cm à se positionner : il va affirmer une image de soi (éthos auto-construit) comme expert de son contexte d'exercice. La dimension expressive (émotion et valeurs relatives à soi) est révélée par des indicateurs discursifs qui peuvent être verbaux (expressions figées, exclamation, intensifs, ...), morphologiques (suffixe, temps verbal), syntaxiques (rupture de construction, emphase), pragmatiques (classe d'événements déclencheurs) ou interactionnels (changement de stratégie de discours) (Plantin, 2013, p. 7).

Le lexique (*panique*, *première chose*), l'impératif (*tenez*) traduisent l'intensité des difficultés associées aux mathématiques ; intensité qui, elle, justifie le changement de stratégie de discours (*vous ne vous rendez pas compte*), l'argumentation en acte (*faire un test*) et la thèse : le faible niveau des élèves amène à éluder les mathématiques, de trois manières, d'abord en les faisant disparaître verbalement (*ne pas parler des maths*) puis dans la pensée (*se détacher, se passer de*), enfin, en niant leur épistémologie (*c'est l'résultat qui compte*).

Aucun des cinq élèves ne donnera finalement la réponse correcte, le sens géométrique de la notation positionnelle (abscisse, ordonnée, cote) n'étant pas acquis.

Sur le plan du contenu (Figure 1), E-cm dévolue la question du calcul vectoriel en évoquant le réglage d'une automate d'usinage (*je suis sur une commande*). Il pense probablement que l'évocation de cette situation générique à la PU, est facilitatrice pour les élèves. Il mime la sémiotique de l'écran de l'automate (Figures 1, 2) par l'absence de parenthèses, l'alignement en colonne, l'explicitation du signe +, le format numérique.

Figure 2 : Écran de contrôle d'un automate d'usinage

Enfin, la désaffiliation des élèves des mathématiques est renforcée, au niveau disciplinaire. En effet, alors que les vecteurs de l'espace sont introduits dès la seconde par les enseignants de CM et PU pour les besoins de leur discipline, ceux-ci n'apparaissent qu'en terminale en classe de mathématiques :

> L'objectif de ce module est d'aborder le repérage dans l'espace ainsi que des notions vectorielles simples. Le passage du plan à l'espace se fait de façon intuitive. […]
>
> Connaissances : dans l'espace muni d'un repère orthonormé : coordonnées cartésiennes d'un point ; coordonnées d'un vecteur ; norme d'un vecteur.
>
> (Programme de mathématiques et sciences physiques et chimiques, BOEN spécial n° 2 du 19/02/2009, p. 22)

E-cm s'affirme comme maître d'une situation difficile, sachant « jouer » de la désaffiliation des élèves en mathématiques aussi bien pour sécuriser ses élèves que pour justifier le désœuvrement mathématique qu'il subit. L'exemple suivant montre un autre fonctionnement de l'IPE.

Stéréotypes et IPE dE-pu1, enseignant en productique usinage

Nous avons choisi de présenter des extraits conversationnels relatifs à deux thèmes : l'entrée dans le métier et l'enseignement des mathématiques dans la discipline.
L'entrée dans le métier est un élément initial de l'IPE (Pelini, 2014 ; Biagioli & Torterat, 2012) car il articule deux niveaux de représentation du métier : celui qui est socialement préalable et celui qui, l'entrée étant faite, inclut le soi.

L'entrée dans le métier d'enseignant

> Lors de la séquence de présentation (la première dans le protocole d'entretien), le chercheur (Ch) demande à E-pu1 de témoigner de son entrée dans le métier d'enseignant :
>
> 13 Ch : euh/ comment êtes-vous arrivé au métier d'enseignant ?
>
> 14 E-pu1 : par concours comme tout le monde
>
> 15 Ch : d'accord/mais je veux dire qu'est-ce qui vous en a donné l'idée le choix ?
>
> 16 E-pu1 : euh un remplacement/ euh c'était pas prédestiné mais on m'a proposé un remplacement/ j'ai fait pour rendre service et j'suis resté

Le tour 14 d'E-pu1 se réfère à un fait objectif (*par concours*[7]) mais aussi une réaction émotionnelle (*comme tout le monde*), montrant que l'entrée dans le métier, étant un marqueur du parcours professionnel, est une question sensible qui peut être évaluée comme intrusive ou saugrenue. En effet, la problématique d'entretien (l'enseignement des mathématiques par les disciplines technologiques), la catégorie socio-professionnelle qu'il représente (les enseignants de LP), l'accord de l'entretien par voie hiérarchique (IPR, chef d'établissement), la personne physique de l'interviewer définissent préalablement la situation d'énonciation et les éthos (préalable et locuteur) que construit E-pu1 à propos de Ch : ce dernier est susceptible de porter les stéréotypes des mathématiques, du LP, etc.
Le tour 16, analysé à l'aide du schéma actanciel, donne une autre facette, celle de l'éthos auto-construit de E-pu1 en tant qu'enseignant : il met en avant un engagement fondé sur une valeur positive, celle de l'altruisme, plus apte à légitimer sa position professionnelle que la mention de la réussite au concours. Face à l'objet métier d'enseignant, E-pu1 se présente à la fois comme sujet (il accepte de *faire un remplacement*), adjuvant (*rendre service*) et destinataire (*je suis resté*) (Figure 3). Le tour 18 confirme : au mot vacataire utilisé plus loin par Ch, E-pu1 corrige « *on disait maître auxiliaire à l'époque* ».

Destinateur *On m'a demandé…* Rectorat Enseignant, ami ?	→	**Objet** Enseigner la technologie en collège *Faire un remplacement*	←	**Destinataire** E-pu1 : *Je suis resté* Institution scolaire
		↑		
Adjuvant L'altruisme d'E-pu1 *Rendre service* *Maître auxiliaire*	→	**Sujet** E-pu1	←	**Opposant** L'absence d'intention *Pas prédestiné*

Figure 2 : analyse du tour de parole 16 à l'aide du schéma actanciel

L'entretien montre un ressort positif de construction de l'IPE, accordant le soi d'E-pu1 et à sa discipline. En effet, l'affiliation d'une personne à une discipline apparaît réussie quand plusieurs des critères suivants sont vérifiés à l'évocation de ladite discipline :

> avoir une image de soi positive […], rester fidèle à son projet personnel […], pouvoir maintenir une image de soi stable […], s'auto-définir […], pouvoir s'évaluer […], manifester une expertise dans le discours (Biagioli, 2010, p. 39)

Sans doute l'affiliation d'un enseignant à sa propre discipline est-elle un élément nécessaire de l'IPE Etudions l'influence de l'un de ses champs contributoires, les mathématiques, sur l'IPE.

[7] Il s'agit du CAPET : Certificat d'aptitude au professorat de l'enseignement technique.

L'enseignement des mathématiques

Dans cette section, les résultats proviennent de l'analyse délinéarisée à l'échelle de l'entretien, après avoir réorganisé le récit d'E-pu1 sur les nombres, les formes géométriques, les tâches liées à ces objets, sur leur mobilisation dans son enseignement auprès des élèves. Pour cela, nous restituons d'abord quelques extraits conversationnels représentatifs :

> 84-86 E-pu1 : ça nous pose beaucoup de problèmes là/ euh / sur l'année de seconde/ après euh après ils rattrapent [...] ça nous pose des problèmes sur les calculs de tête à faire/ les calculs de/ quand on a une conversion à faire/ un calcul de tête/ euh un petit profil à générer euh
>
> 100-104 E-pu1 : on a une formation qui est très peu lisible pour qui est en collège (silence) donc on récupère souvent des élèves un petit peu égarés/ et euh il faut prolonger/ pour qu'ils découvrent un métier qui ... est [...] auprès du grand public/ on n'existe pas l'usinage/ c'est très obscur
>
> 406-414 E-pu1 : bouf ! pour faire une circonférence ou une surface/ il nous faut déjà une demi-journée […] ce qui est très problématique pour nous parce qu'on passe notre temps à travailler sur des éléments de géométrie […] plan/ 3D […] pour nous c'est/ c'est/ c'est un énorme frein […] on reprend à la base/ on y va par étape mais c'est très très long/ on gagnerait énormément de temps si on avait ces savoirs-là
>
> 26-430 E-pu1 : dès qu'on passe en 3D/ y'a plus personne […] les systèmes de rotation autour d'un axe aussi/ la génération d'une forme par rotation […] les systèmes d'axe/ pas maîtrisé du tout/ nous on travaille que comme ça/ euh on travaille/ tout est fait par rapport à un axe euh/ orthonormé/ quand on attaque ça en seconde/ ils nous regardent avec des yeux comme ça

Analysons d'abord le déictique de personne. Contrairement aux discours des textes officiels, l'enseignant ne parle pas d'un élève indéterminé, mais d'une pluralité bien réelle d'individus (tours 84, 100, 430 : *ils*) par rapport à laquelle il se positionne soit en tant qu'individu dans un groupe donné, soit en tant qu'enseignant (84 : *ça nous pose* […] *en seconde* ; 100 : *on récupère des élèves* ; 406 : *on reprend à la base* ; 430 : *on attaque en seconde*), soit en tant qu'usineur (100 : *on n'existe pas l'usinage*), soit en tant que technicien (406 : *on passe* ; 426 : *on travaille* […] *orthonormé*). Parlant au nom de différentes communautés, E-pu1 s'accrédite comme représentant de celles-ci (Auxire, 2015, pp. 352–356). Nous conjecturons que la complexification de l'IPE est un élément de renforcement positif.

Concernant les mathématiques propres à la productique usinage, elles sollicitent deux facettes professionnelles d'E-pu1 : celle de l'enseignant parce que leur enseignement pour ce type d'élèves est un problème professionnel (tour 406-414) et celle du technicien parce que les outils (426-430) y sont stéréotypés. Utilisons maintenant les schémas de discours pour faire apparaître comment E-pu1 se positionne en tant que personne vis-à-vis des mathématiques telles qu'elles apparaissent dans sa profession, à la fois problématiques et stéréotypées.

Le schéma narratif montre la relation des élèves aux mathématiques selon E-pu1 (Figure 4). Rappelons que le schéma de la figure 4 est le résultat de l'analyse délinéarisée de la totalité de l'entretien ; certains éléments cités dans le tableau proviennent de séquences autres que celles citées dans cet article. L'élève, d'abord disqualifié au collège, et en particulier laissé incompétent en mathématiques (phase 1), se retrouve égaré dans une discipline inconnue, non demandée, spécialisée (phase 2). Les pratiques pédagogiques du LP (induction, différenciation) transforment l'élève qui recouvre, en mathématiques, des savoir-faire élémentaires mais aussi spécialisés (phase 3) jusqu'à devenir autonome, actif en productique usinage (phase 4). L'élève sort du lycée qualifié et diplômé (phase 5).

Pour E-pu1, l'enseignement des mathématiques se présente comme un problème professionnel dû au manque de maîtrise par les élèves dans les mathématiques :

- de l'école primaire (numération, opérations, forme simple) ;
- du collège (fraction, proportionnalité) ;
- de la productique usinage (axes orthonormés, vecteurs, surfaces de révolution, point générateur). Soulignons qu'il faut attendre la terminale pour que ces objets soient étudiés en classe de mathématiques.

Dans son discours, E-pu1 construit la relation des élèves aux mathématiques au fur et à mesure qu'il raconte la progressive affiliation des élèves à la productique usinage : des élèves désaffiliés du collège acquièrent des capacités en mathématiques à travers la productique usinage, au prix d'une forte stéréotypisation des objets mathématiques (situation, tâches, sémiotique). Ce dernier point, non présenté dans cet article, résulte de l'étude des interactions verbales en classe (Auxire, 2015, pp. 450–470).

Dans le tableau ci-dessous, les mots en italique sont ceux de l'enseignant au cours de l'entretien, dans des passages, cités ou non, dans cet article.

1 Situation initiale	2 Perturbation	3 Transformation	4 Résolution	5 Situation finale
Elèves collégiens - *maternés* au collège - en échec en maths	**Orientation en lycée** - *élèves* égarés - métier *obscur* - concepts nouveaux : systèmes d'axes *pas maîtrisés* - jargon - mise en autonomie	***Rattrapage* en maths** - utiliser un repère 3D - calculer de tête - générer un profil géométrique	**Autonomie** Apprendre en faisant *Découvrir* un métier	**Élèves bacheliers** - qualifiés techniciens d'usinage (stages) - suffisants en maths - avec des compétences reconnues (diplôme)

Figure 4 : la relation des élèves aux mathématiques dans le récit de E-pu1, modélisée par le schéma narratif (Auxire, 2015, p. 393)

De plus, à la difficulté d'avoir à enseigner des outils mathématiques à des élèves d'entrée de jeu désaffiliés par rapport à cette discipline, s'ajoute la conscience du faible rayonnement social de la productique usinage (tours 100-104 : *obscur, récupération*) conduisant à s'auto-attribuer des singularités (324 : *c'est justement notre credo/ apprendre en faisant*), phénomène d'auto-stéréotypie[8] décrit par Dufays et Kervyn (2010, pp. 53–54).

Comment E-pu1 se positionne-t-il personnellement dans cette relation des élèves aux mathématiques ? L'analyse *a posteriori* de la conversation à l'aide du schéma actanciel (Figure 5) propose une représentation articulée de la formation des élèves de lycée professionnel en mathématiques (l'action) où E-pu1 a plusieurs fonctions : il planifie des activités comportant des tâches mathématiques (destinateur) ; il les facilite (adjuvant) en créant pour ses élèves une rupture pédagogique avec le collège (temps d'apprentissage long, routinier s'il le faut, mise en autonomie immédiate, retour aux apprentissages fondamentaux, support perceptuel, organisation non frontale). Dans le discours d'E-pu1, l'organisation chrono-génétique[9] apparaît très cohérente pour contrer les difficultés des élèves en mathématiques (opposant) par différents procédés : l'habituation lente au calcul (tour 376 : *gymnastique* ; 406 : *par étape*), l'évitement de la description verbale des solides (491 : *les représentations mixtes*/ *c'est tout de suite plus intuitif*), l'expérimentation lors du raisonnement spatial (100 : *il faut prolonger/ pour qu'ils découvrent* ; 322 : *des fois on les laisse louper* ; 324 : *voilà ça marche pas / ensuite on se pose / on analyse*).

Enfin, E-pu1 est aussi évaluateur (destinataire) au même titre que les élèves pour lesquels l'autoévaluation est un critère d'affiliation disciplinaire.

[8] Auto-stéréotype : stéréotype externe mais intériorisé par les individus du groupe ciblé par le stéréotype.

[9] La chronogenèse (Reuter, Cohen-Azria, Daunay, Delcambre, Lahanier-Reuter, 2010, p. 27) met en jeu différentes temporalités : celle du curriculum, celle de la prévision enseignante, celle de l'action conjoint enseignant/élèves en classe.

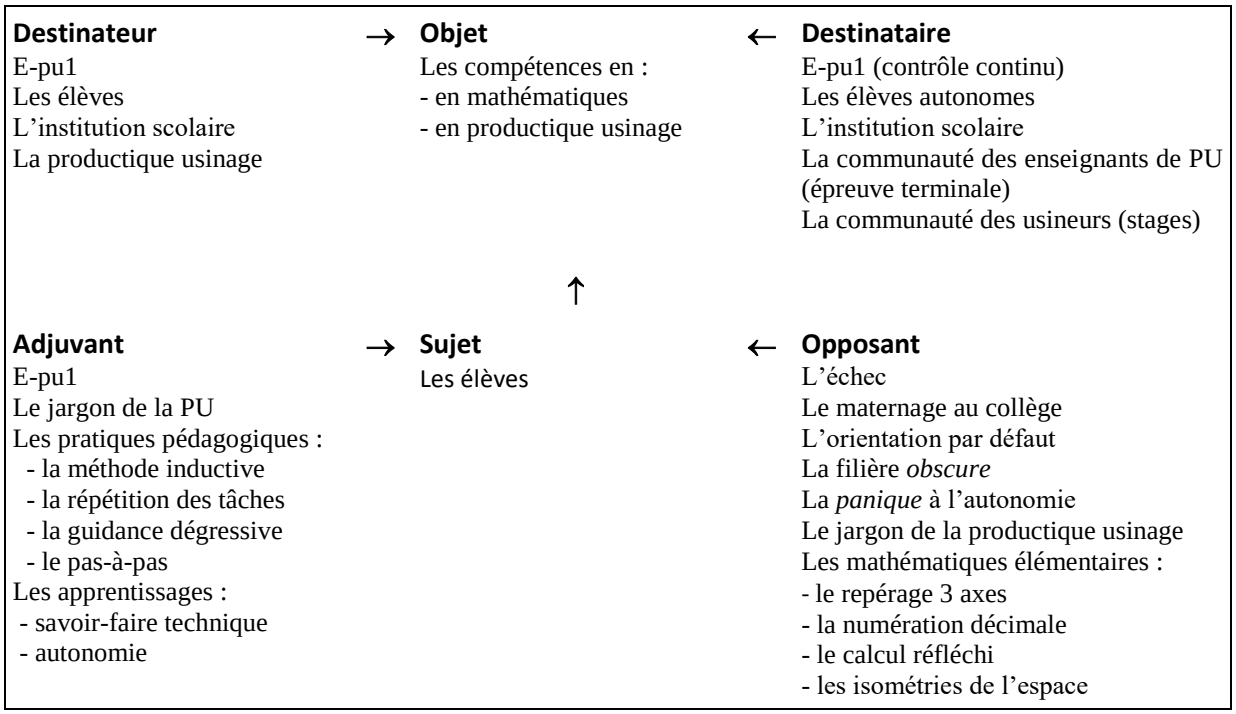


Figure 5: le rôle de l'enseignant dans le discours d'E-pu1 modélisé par le schéma actanciel (Auxire, 2015, p. 393)

CONCLUSION

Notre but était de montrer comment des stéréotypes liés aux élèves, aux objets à enseigner ou à un contexte scolaire contribuent à construire l'IPE d'un enseignant.

Un fonctionnement possible de cette contribution est mis en évidence par l'analyse de discours : l'enseignant utiliserait certains stéréotypes relatifs à son environnement professionnel pour positionner son engagement sur les fronts pédagogique, intellectuel et émotionnel et, par suite, rendre cet engagement durable ou cohérent. Ce positionnement (l'IPE) semble dépendre de valeurs personnelles (par exemple l'humanisme attaché à l'acte d'enseigner), de l'affiliation épistémologique à un champ scientifique dominant et de l'affiliation à plusieurs communautés professionnelles.

Selon que l'enseignant problématise (ou non) ses actes d'enseignement, selon qu'il distancie ou non sa personne des enjeux de sa profession, d'autres valeurs (réussite sociale, élitisme, hiérarchie des savoirs, mémoire d'une culture particulière…) peuvent apparaître. D'autres questionnements interdidactiques, convoquant des disciplines moins autonomes ou moins définies socialement, auraient probablement conduit à une IPE renforcée ou affaiblie. L'IPE apparaît comme une échelle personnelle de cohérence entre le soi et l'enseignant. On peut conjecturer que les IPE d'enseignants d'une même discipline auront des traits communs parce qu'ils partagent ressources disciplinaires et problèmes professionnels.

Ceci amène à questionner les éléments récurrents (versus les éléments de variabilité interindividuelle) pouvant contribuer à expliquer la stabilité (versus la variabilité) des pratiques enseignantes. Les outils d'abstraction de l'analyse de discours qui garantissent la

qualité d'un protocole de recherche sur l'IPE, peuvent être complétés par une approche lexicométrique.

En poursuivant l'approche comparatiste de discours d'enseignants d'une même filière et en la complétant avec une approche quantitative visant à recueillir un échantillon de discours d'enseignants statistiquement représentatif, on peut espérer trouver dans l'étude des IPE des schémas explicatifs de l'intervariabilité ou de la variabilité des pratiques des enseignants et, plus largement, de leur réceptivité à certaines préconisations d'ouverture aux autres disciplines.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AUGER, N. (2010). Le stéréotype en classe et dans les manuels de langues : un outil de réflexion pour la didactique. *Le langage et l'Homme, Revue de didactique du français, XXXXXV(2)*, 77–84.

AUXIRE, N. (2015). *Interdidactique de l'enseignement des mathématiques dans trois disciplines de la filière productique usinage en lycée professionnel*. Thèse de doctorat, Université Nice Sophia Antipolis.
Disponible sur : https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01251697/document

BEIJAARD, D., MEIJER, P.C. & VERLOOP, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education, 20*,107–128.

BIAGIOLI, N. (2012). Les rencontres des chercheurs en interdidactique. In N. Biagioli & R. Lozi (Eds.), *Actes des Deuxièmes rencontres des chercheurs en interdidactique. L'initiation à la recherche dans la formation des enseignants à l'Université* (pp. 3-7). Nice, France.

BIAGIOLI, N. (2010). Le stéréotype, entre didactiques des langues et didactiques des disciplines. *Le langage et l'Homme, Revue de didactique du français, XXXXV(2)*, 1–11.

BIAGIOLI, N. & TORTERAT, F. (2012). La recherche en interdidactique : apports méthodologiques et pratiques. In M.-L. Elalouf, A. Robert, A. Belhadjin & M.-F. Bishop (Eds.), *Les didactiques en question(s) : état des lieux et perspectives pour la recherche et la formation* (pp. 269–278). Bruxelles : de Boeck.

BOUZY B. (2001). Le rôle des concepts spatiaux dans la programmation du jeu de go. *Revue d'Intelligence Artificielle, 15*, 143–172.

CHARAUDEAU, P. & MAINGUENEAU, D. (2002). *Dictionnaire d'analyse du discours*. Paris : Seuil.

CHATEAU, D. (2007). Stéréotype, prototype, archétype. A propos du portrait de Gertrude Stein de Picasso. In B. Darras (Ed.), *Images et sémiotique : sémiotique pragmatique et cognitive* (pp. 147-155). Paris : Publications de la Sorbonne.

CHEVALLARD, Y. (2006). Former des professeurs, construire la profession de professeur. In *Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire*.
Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) : http://yves.chevallard.free.fr

DEHAENE, S. (2012). Intuition en mathématiques et les démarches algorithmiques que sait-on en neurosciences ? In *Conférence nationale sur l'enseignement des mathématiques à l'école primaire et au collège*. Lyon : ENS.
Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) : http://www.canal-u.tv/video/

DUCROT, O. (2000). Quelques raisons de distinguer locuteurs et énonciateurs.
Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) :
http://www.hum.au.dk/romansk/polyfoni/Polyphonie_III/Oswald_Ducrot.htm

DUFAYS, J.-L. & KERVYN, B. (2010). Le stéréotype, un objet modélisé pour quels usages didactiques ? *Education et didactique, 4*, 53–80.

GUERNIER, M.-C. (2006). Introduction. In M.-C. Guernier, V. Durand-Guerrier & J.-P. Sautot (Eds.), *Interactions verbales, didactiques et apprentissages. Recueil, traitement et interprétations didactiques des données langagières en contextes scolaires* (pp. 15-28). Presses Universitaires de Franche Comté.

GRIZE, J.-B. (1997). Sur la nature du discours d'information scientifique. *Aster, 14*, 41–52.

HAUT CONSEIL DE L'EDUCATION (2009). *Bilan des résultats de l'école : l'enseignement professionnel*. France : MEN.

HEBERT, L. (2006). Le modèle actantiel, *Signo* (En ligne), Rimouski (Québec).
Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) :
http://www.signosemio.com/greimas/modele-actantiel.asp

HUDELOT, C., ATIF, J. & BLOCH, I. (2006). Ontologie de relations spatiales floues pour le raisonnement spatial dans les images. In LFA & GET (Eds.), *Rencontres francophones sur la Logique Floue et ses Applications*. Toulouse : Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications.
HOUDEMENT, C. & KUZNIAK, A. (1998). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x, 51*, 15–21.
HOUDEMENT, C. & KUZNIAK A. (2006). Paradigmes Géométriques et Enseignement de la Géométrie. *Annales de didactique et des sciences cognitives, 11*, 175–193.
KAHANE, J.-P. (2000). Rapport d'étape sur la géométrie et son enseignement. Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) : http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/Rapport%20geometrie.pdf
LA VERNE, A. H. & MEYERS, F. (2007). Engineering Design Graphics : into the 21st Century. *Engineering Design Graphics Journal , 71(3)*, 20−34.
LEBEAUME, J. (2011). L'éducation technologique au collège : un enseignement pour questionner la refondation du curriculum et la réorientation des disciplines. *Éducation et Didactique, 5(2)*, 7−22.
LEGENDRE, J. (2008). Un état des lieux du baccalauréat. *Rapport d'information du sénat, 370*.
MORCHAIN, P. (2006). Valeurs et perception stéréotypée des groupes. *Cahiers de l'Urmis, 10-11*. Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) : http://urmis.revues.org/209
NEWCOMBE, N.S. (2013). Seeing Relationships Using Spatial thinking to Teach Science, Mathematics, and Social Studies. *American Educator Spring*, 26−40.
PALHETA, U. (2011). Enseignement professionnel et classes populaires : comment s'orientent les élèves « orientés ». *Revue française de pédagogie, 175*, 59−72.
PELINI, E.S. (2014). Construction de l'identité professionnelle des enseignants. *Recherche & Formation, 74*, 43−56.
PERRENOUD, P. (1994). Curriculum : le formel, le réel, le caché. In J. Houssaye (Ed.), *La pédagogie : une encyclopédie* (pp. 61−76). Paris : ESF.
PLANTIN, C. (2013). *Analyse de l'argumentation* [En ligne, 11 pages]. http://icar.univ- lyon2.fr/membres/cplantin/index.htm (consultée le 30/04/2015).
PLANTIN, C. (2011). *Les bonnes raisons des émotions. Principes et méthode pour l'étude du discours émotionné*. Bruxelles : Peter Lang.
POUCET, B. & PROST, A. (2016). La réforme en éducation au XXe siècle en France. *Carrefours de l'éducation, 41*, 11−15.
REUTER, Y., COHEN-AZRIA, C., DAUNAY, B., DELCAMBRE, I. & LAHANIER-REUTER, D. (2010). *Dictionnaire des concepts fondamentaux des didactiques*. Bruxelles : de Boeck.
TATEO, L. (2012). What do you mean by "teacher" ? Psychological research on teacher professional identity. *Psicologia Sociedade, 24*, 34− 53.
VINCENT, C., DELOZANNE, E., GRUGEON, B., GELIS, J.-M., ROGALSKI, J. & COULANGE, L. (2005). Des erreurs aux stéréotypes : des modèles cognitifs de différents niveaux dans le projet Pépite. Disponible sur (consulté le 13 septembre 2016) : https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00005689

VERS UNE APPROCHE DIDACTIQUE DES ACTIVITES DE DIFFUSION ET VULGARISATION DES MATHEMATIQUES, ET DE LEURS SYNERGIES POSSIBLES AVEC LES ACTIVITES SCOLAIRES

Nicolas **PELAY**
Plaisir Maths
nicolas.pelay@plaisir-maths.fr
Michèle **ARTIGUE**
LDAR, Université Paris Diderot
michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Résumé
Les activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques tendent à se multiplier, mobilisant une multiplicité d'institutions et d'acteurs et interagissant aussi, de plus en plus, avec l'institution scolaire. Contribuant à l'acculturation mathématique des individus, elles constituent un des registres d'action didactique de nos sociétés, et la recherche didactique se doit donc de s'y intéresser. Dans cet exposé, après avoir précisé contexte et enjeux, nous montrerons, en nous appuyant sur un panorama de travaux de didactique des mathématiques menés en France dans ce domaine, que les théories didactiques existantes offrent des potentialités réelles pour aborder les problématiques de diffusion et vulgarisation des mathématiques. Ces potentialités restent cependant encore très largement à concrétiser, et ceci constitue un véritable défi pour notre communauté.

Mots clés
Diffusion des mathématiques, vulgarisation des mathématiques, contrat didactique et ludique, vulgaristique

INTRODUCTION

Les activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques tendent à se multiplier, mobilisant une multiplicité d'institutions et d'acteurs. Elles interagissent aussi, de plus en plus, avec l'institution scolaire, comme le montrent bien par exemple, les activités de la semaine des mathématiques, créée il y a quelques années et aujourd'hui bien installée dans le paysage éducatif[1]. Dans cet exposé, nous partons du principe que ces activités, parce qu'elles contribuent à l'acculturation mathématique des individus, constituent un des registres d'action didactique de nos sociétés, et qu'à ce titre, notre communauté de recherche se doit de s'y intéresser, comme elle doit s'intéresser à leurs synergies possibles avec les activités scolaires. Dans un premier temps, nous allons d'abord préciser les enjeux de cet engagement, et également pourquoi, vues les caractéristiques du contexte actuel, il nous paraît important que

[1] http://eduscol.education.fr/cid59178/semaine-des-mathematiques.html

nous nous y intéressions davantage aujourd'hui que nous ne l'avons fait jusqu'ici. Ensuite, nous voudrions partager avec vous l'état de notre réflexion sur les questions suivantes : quelles sont les potentialités des théories didactiques, et plus généralement des praxéologies de recherche qui sont les plus familières à notre communauté pour aborder ces formes d'action didactique ? Quels sont les défis qu'il faut relever ? Bien sûr, notre conviction est que ces potentialités sont réelles et nous essaierons de le montrer en menant une analyse réflexive de travaux de recherche récents menés en France dans ce domaine. Mais notre conviction est aussi que ces potentialités restent largement à concrétiser, requièrent de nouveaux développements, comme de nouvelles collaborations avec les autres communautés scientifiques qui travaillent sur les questions de diffusion et vulgarisation des connaissances, en mathématiques mais aussi plus largement. Tout ceci représente un défi pour notre communauté. Nous y reviendrons dans la dernière partie de synthèse et conclusion.

CONTEXTES ET ENJEUX

Les activités de diffusion et vulgarisation des mathématiques ne constituent pas une nouveauté. Nicolas Pelay, par exemple, s'est intéressé dans sa thèse (Pelay 2011) au genre des récréations mathématiques, à travers notamment l'étude des récréations mathématiques et physiques de Jacques Ozanam (1694) et a bien montré l'importance prise par ce genre didactique aux 17^{e} et 18^{e} siècles. Il a aussi montré les connexions et complémentarités que l'on pouvait mettre en évidence entre cet ouvrage et ceux que le même auteur a écrits pour l'enseignement. Des associations comme l'association MATh.en.JEANS en France, créée en 1989, les nombreux rallyes mathématiques, organisés notamment par les IREM, réunis d'abord au sein de la Commission inter-IREM Rallyes et maintenant de la Commission inter-IREM Pop'Math, existent depuis des décennies ; le Palais de la Découverte, créé en 1937 par Jean Perrin pour faire sortir la science des laboratoires, propose des ateliers et conférences mathématiques, depuis bien plus longtemps encore. Il est cependant indéniable que ces activités tendent à se multiplier, à l'extérieur ou à la périphérie de l'institution scolaire, et à concerner de plus en plus d'adultes et d'élèves même si, pour ce qui est des élèves, le pourcentage concerné reste encore très faible. Il a existé pendant longtemps chaque année un colloque MATh.en.JEANS national ; vu le nombre croissant d'élèves investis dans ces actions, l'association a été obligée de les multiplier et ils étaient au nombre de cinq en 2016. Le Salon « Culture & Jeux Mathématiques », organisé à Paris chaque année par le CIJM (Comité International des Jeux Mathématiques), voit un grand nombre de visiteurs se presser autour de ses stands. Le programme de conférences de la Bibliothèque nationale de France, « Un texte, un mathématicien », dont le dixième anniversaire a été célébré en mars 2015, lors du forum « Mathématiques vivantes, de l'école au monde »[2], est, aux dires des responsables de la BnF, son cycle de conférences qui attire le plus large public. Non seulement les activités s'étendent, se diversifient, comme le montre bien le site de l'association Animath, mais elles mobilisent de plus en plus d'acteurs ; le forum « Mathématiques vivantes », mentionné plus haut, a reçu, par exemple, l'appui de plus de cinquante institutions, comme en témoigne son dossier de presse. Ces activités sont aussi sources d'institutions nouvelles, comme la MMI (Maison des Mathématiques et de l'Informatique) créée à Lyon en 2012, la toute récente Grange des Maths à Grenoble, ou le Musée des mathématiques qui doit voir le jour à Paris, à côté de l'Institut Henri Poincaré. Elles donnent aussi lieu à de nouvelles formes de reconnaissance, des prix spécifiques comme le prix d'Alembert, créé en 2002 par la SMF (Société Mathématique de France), qui vise à encourager la diffusion de la connaissance des

[2] www.cfem.asso.fr/actualites/**forum-mathematiques-vivantes**

mathématiques vers un large public, ou plus récemment le prix créé en 2015 pour la diffusion des mathématiques par la célèbre Fondation Clay, dont le mathématicien Etienne Ghys, conférencier exceptionnel, fondateur du site « Image des Maths » et co-auteur avec Aurélien Alvarez et Jos Leys des films remarquables « Dimensions » et « Chaos », a été le premier lauréat. Nous pourrions multiplier les exemples, ne serait-ce qu'en France, mais nous arrêterons là l'énumération, pour souligner d'autres éléments importants de contexte, à savoir :

- des évolutions technologiques et sociales qui modifient profondément les modes de communication, de production, d'accès aux et de partage des ressources, qui multiplient la forme possible de ces dernières ainsi que leurs auteurs (cf. les vidéos produites par nombre d'enseignants et mises sur l'internet, par exemple les vidéos « Micmaths » sur YouTube[3]) ;
- une École que les politiques éducatives souhaitent plus ouverte sur le monde qui l'entoure, l'affirmation du potentiel des activités ludiques pour l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques (cf. le point 7 de la « Stratégie Mathématiques »[4] lancée par le Ministère de l'Éducation Nationale en décembre 2014, et les nouveaux programmes de l'école maternelle et du primaire), l'introduction de dispositifs d'enseignement fonctionnant sur la base de projets collaboratifs, qui rapprochent en un certain sens pratiques mathématiques formelles et informelles ;
- une grande porosité des milieux et des acteurs ; dans leur très grande majorité, en effet, les acteurs de la diffusion informelle des mathématiques sont eux-mêmes des enseignants, ou viennent du monde de l'enseignement.

Tout ceci tend à engendrer un continuum entre formes d'action didactique formelles et informelles, à modifier les conditions des relations entre leurs acteurs et les enjeux de ces relations, et à rendre le travail didactique sur ces questions d'autant plus nécessaire. Il faut cependant avouer que, jusqu'à récemment, l'intérêt des chercheurs en didactique pour ces questions est resté limité, en France comme au-delà des frontières. Lors du séminaire, Michèle Artigue a expliqué que c'est lorsqu'elle a participé à la mise en place de l'étude ICMI intitulée « Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom » (Barbeau & Taylor, 2009), à un moment où elle était vice-présidente d'ICMI (International Commission on Mathematical Instruction), qu'elle a pris la mesure du décalage existant entre recherche et action dans ce domaine. Comme son titre l'indique, l'angle d'attaque choisi pour cette étude ICMI était celui des formes d'action didactique capables de permettre aux élèves de rencontrer les mathématiques comme défi, à travers le choix du mot « challenging » ; volontairement, on ne s'y limitait pas aux contextes péri et extra-scolaires pour ne pas renforcer une opposition des deux mondes, le scolaire et l'extra-scolaire, qui prend souvent des formes caricaturales. Les principales questions à l'étude étaient de fait les suivantes :

- Peut-on utiliser ces défis pour motiver les élèves dans leur étude des mathématiques et des sciences ? Pour stimuler le plaisir de faire des mathématiques ?
- Est-ce que cela conduit à une compréhension plus approfondie des concepts et de la nature des mathématiques ? Est-ce que cela facilite la mémorisation et aide à relier concepts et techniques ? Permet plus d'aisance dans leur usage ?

Les contributeurs à l'étude ont essayé de montrer que c'était bien le cas. Ils ont produit des catégorisations, des critères d'analyse combinant les dimensions affectives, cognitives, organisationnelles et institutionnelles ; ils ont présenté de très nombreux exemples et études de cas, situés dans une grande diversité de contextes éducatifs. Cependant, comme souligné dans (Artigue, 2015), l'étude de ce qui se fait ou peut se faire dans la classe d'une part, et de

[3] https://www.youtube.com/user/**Micmaths**
[4] www.education.gouv.fr/cid84398/**strategie-mathematiques**.html

ce qui se fait ou peut se faire hors de la classe d'autre part, ont fait l'objet de chapitres séparés, ce qui n'a pas aidé à mettre en lumière les interactions possibles, ou la façon dont le périscolaire pouvait inspirer le scolaire. De plus, les organisateurs de l'étude soulignent bien dans le chapitre qui conclut l'ouvrage que si les actions, les ressources se multiplient, l'évaluation des impacts reste un problème largement ouvert, et que la recherche didactique s'est jusqu'alors peu intéressée à toutes ces questions.

La préparation du forum « Mathématiques vivantes, de l'école au monde », a été l'occasion d'essayer de dépasser ces limites et d'essayer de mieux mutualiser les acquis d'expérience de ceux qui, souvent depuis très longtemps, sont investis dans des activités périscolaires et extra-scolaires en mathématiques et essaient de créer des synergies. Nous avons préparé un questionnaire qui a été discuté avec les membres du comité scientifique du forum les plus directement concernés, puis mis en ligne, et auquel ont répondu 152 personnes engagées dans dans de telles activités en mathématiques. Nous ne détaillerons pas ici le questionnaire et les résultats qui en ont été tirés, renvoyant le lecteur aux communications (Pelay & Artigue, 2015) et (Artigue, 2015), accessibles en ligne. Les réponses, de fait, confirment la multiplicité des formes d'action existantes et les effets positifs divers identifiés par les acteurs, mais aussi la rareté des évaluations précises d'impact et la difficulté constatée de ces dernières. La majorité des répondants qui sont enseignants affirment avoir essayé de créer des synergies. Ils pointent les difficultés diverses rencontrées : manque de temps, de moyens et très souvent de soutien institutionnel, malgré le discours officiel ; difficulté à concilier la logique propre à ces activités et les attentes curriculaires. Mais ils témoignent aussi des effets positifs ressentis de ces synergies, tant affectifs et relationnels que cognitifs quand on arrive à les créer, même si les évaluations d'impact sont, dans ce cas, encore plus rares.

Pour clore cette première partie sur contextes et enjeux, nous évoquerons le dernier colloque de l'EMF, l'Espace Mathématique Francophone, qui s'est tenu à Alger, en octobre 2015. En effet, l'un des projets spéciaux de ce colloque concernait justement la vulgarisation des mathématiques. Les discussions vives qui ont eu lieu lors des séances de ce projet spécial, les contributions proposées et le compte-rendu établi par les responsables, confirment bien, nous semble-t-il, l'importance pour notre communauté de s'investir sérieusement dans ces questions. Au-delà des narrations plus ou moins réflexives associées à la présentation de pratiques de vulgarisation, trois des contributions notamment développaient une réflexion plus théorique. C'était le cas par exemple de la contribution de Benoît Rittaud (2015). Après avoir écrit que vulgarisation et enseignement « partagent un point de leur structure fondamentale : les deux consistent en une rencontre (au sens large) entre dépositaires du savoir et novices, rencontre dont l'objet est une transmission des connaissances des premiers aux seconds » (p. 957), l'auteur insiste sur les différences entre vulgarisation et enseignement en termes de mise en scène, captivité du public, pérennité du discours, mise en perspective, dimension hiérarchique, adaptabilité du contenu. Elles sont suffisamment fortes selon lui « pour qu'il soit légitime de parler de différences de nature, et non d'une simple différence de degré » (p. 958), puis il se propose de réfléchir aux pistes à partir desquelles il pourrait être possible de réfléchir à la fondation d'une « vulgaristique » qui serait à la vulgarisation ce que la didactique est à l'enseignement, et permettrait de développer les concepts et outils spécifiques que ce champ nécessite. Des affirmations un peu provocantes émaillent le texte, associées à une vision du champ didactique très réductrice et visiblement peu informée. Dans le compte-rendu final des travaux menés dans le cadre de ce projet (Fiorelli-Wilmart, Belbachir, Tanguay & Semri, 2015), ses responsables reviennent sur cette idée de vulgaristique qui, selon eux, mérite d'être travaillée. Par ailleurs, s'appuyant sur la présentation du groupe AlPaGe (Fiorelli-Vilmart, Audin, Belbachir, Cherix & Rittaud, 2015) qui propose un outil pour évaluer et analyser des activités de vulgarisation, *a priori* et a *posteriori*, ils essaient également d'amorcer un dialogue entre didactique et vulgaristique. L'outil d'évaluation est

basé sur la distinction, dans les activités de vulgarisation, entre des phases qui donnent à voir destinées à accrocher le public, des phases qui donnent à chercher au cours desquelles le vulgarisateur rend son public actif, et des phases qui donnent à comprendre qui renvoient aux explications données par le vulgarisateur ou construites en interaction avec le public. Pour amorcer le dialogue, des parallèles sont proposés, entre les phases donnant à voir et les phases de dévolution, les phases donnant à chercher et les phases ou situations d'action et de formulation, les phases donnant à comprendre avec les phases ou situations de validation et l'institutionnalisation (pp. 906-907). L'effort fait ainsi pour établir des connections est sans aucun doute louable mais celles proposées ici, au moins telles qu'exprimées dans l'espace restreint de ce compte-rendu, nous semblent pour l'instant assez peu convaincantes, trop associées à des similarités de surface pour être signifiantes. Il nous semble important, si de tels efforts sont entrepris, de bien prendre en compte ce que nous ont appris les travaux qui se sont fortement développés depuis une dizaine d'années sur les articulations entre cadres théoriques au sein de groupes et projets européens, comme par exemple (Lagrange & Kynigos, 2013) ou (Bikner-Asbahs & Prediger, 2014). Ils montrent bien la nécessité pour établir des connexions productives d'aller au-delà des ressemblances de surface.

Didacticiens et vulgarisateurs doivent sans aucun doute interagir sur des objets d'étude communs mais, si l'on veut que ces discussions soient productives et bénéficient réellement des expertises respectives des uns et des autres, il faut construire soigneusement et en commun les objets d'étude et développer des praxéologies de recherche pertinentes (Artigue & Bosch, 2014). Il faut aussi s'interroger sérieusement sur ce que la didactique a à offrir et comment elle peut contribuer au travail sur ces questions de vulgarisation et diffusion des mathématiques, même si elle n'est pas la seule à pouvoir les éclairer. Dans la suite de ce texte, nous essaierons de poser des jalons dans cette direction, en nous appuyant notamment sur l'étude d'un corpus de travaux didactiques francophones.

ETUDE D'UN CORPUS DE TRAVAUX DIDACTIQUES FRANCOPHONES

Description du corpus

Nous avons constitué ce corpus à partir des recherches :

- qui sont issues de thèses soutenues en France, d'articles de la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques* (RDM), ou d'actes des colloques de l'EMF[5] ;
- qui se revendiquent comme relevant du champ de la didactique des mathématiques ;
- qui touchent le thème de la vulgarisation, par la problématique ou le contexte expérimental choisi.

Les critères choisis pour constituer ce corpus nous ont semblé permettre de se faire une idée des recherches didactiques menées en France traitant des problématiques de vulgarisation des mathématiques.

D'un point de vue méthodologique, ce corpus a été travaillé sur la base des questions suivantes :

- Q1 : Quelle est la place de la vulgarisation dans la recherche ?
- Q2 : Quelles sont les formes de vulgarisation concernées ? (lieux, types d'action, etc.)
- Q3 : Quels sont les approches, cadres théoriques et concepts mobilisés ?
- Q4 : Quels sont les enrichissements conceptuels apportés ?
- Q5 : Quels sont les résultats liés à la vulgarisation ?

Neuf publications seulement correspondent en fait aux critères établis, dont trois thèses et six

[5] Espace Mathématique Francophone, http://emf.unige.ch/

articles de colloques EMF (cf. tableau 1 ci-dessous) :

AUTEUR.E.S	ANNEE	TITRE	STATUT
Karine Godot	2005	Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation	Thèse de doctorat
Caroline Poisard	2005	Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer	Thèse de doctorat
Nicolas Pelay	2011	Jeux et apprentissages mathématiques. Elaboration du contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique	Thèse de doctorat
Karine Godot	2012	Maths et malice, un projet pour faire découvrir les mathématiques aux enfants sur le temps du loisir	Contribution au colloque EMF 2012
Denise Grenier	2012	Rôle des situations de recherche dans la vulgarisation des mathématiques	Contribution au colloque EMF 2012
Christian Mercat et Nicolas Pelay	2012	Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques ?	Contribution au colloque EMF 2012
Karine Godot	2015	Maths à modeler, des jeux pour apprendre à chercher en mathématiques	Contribution au colloque EMF 2015
Christian Mercat	2015	La diffusion : un lieu pour une humanité plus humaine	Contribution au colloque EMF 2015
Alix Boissière et Nicolas Pelay	2015	Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble	Contribution au colloque EMF 2015

Tableau 1 : Corpus de travaux didactiques francophones étudié

Le faible nombre d'articles et de chercheurs recensés, l'absence d'articles publiés dans la revue *Recherches en Didactique des Mathématiques*, confirment que la didactique des mathématiques en France s'est modérément intéressée jusqu'ici à l'étude des contextes de vulgarisation. De plus, même si les contextes de vulgarisation et d'animation sont choisis comme contexte expérimental par les chercheurs, cela ne signifie pas pour autant que la thématique de la vulgarisation soit prise comme objet d'étude principal dans ces recherches. C'est ainsi le cas pour les trois thèses : celle de Poisard est centrée sur l'étude des « objets à calculer », celle de de Godot traite de façon importante de la démarche de recherche, et celle de Pelay traite de la problématique jeu/apprentissage. Le contexte de vulgarisation est choisi parce qu'il offre certaines propriétés, que les chercheurs ne trouvent pas – ou peu – dans le contexte scolaire, et qui favorisent le développement de leur problématique de recherche : pour Poisard, le centre de culture scientifique, qui met la construction et manipulation des objets, au cœur du projet éducatif est un cadre permettant l'étude des instruments à calculer dans l'apprentissage des nombres et du calcul, et pour Pelay qui considère le jeu et le plaisir comme des moteurs de l'apprentissage, les séjours de vacances créent un cadre favorable pour l'étude de la dialectique jeu/apprentissage.

En revanche, tous les chercheurs qui ont réalisé des expérimentations dans ce domaine pointent, décrivent et analysent dans leur travaux une réelle spécificité des contextes de vulgarisation et d'animation, cette spécificité pouvant être source d'émergence de nouvelles conceptualisations, comme par exemple celle du concept de contrat didactique et ludique dans la thèse de Pelay (2011). Nous y consacrons le paragraphe suivant.

Les spécificités des contextes de vulgarisation et d'animation

Poisard, par exemple, explicite en ces termes dans sa thèse les spécificités du contexte dans lequel elle a expérimenté :

> « Pour l'école, il y a un programme à suivre, des sujets à traiter, la classe supérieure à laquelle il faut accéder… Aux Domaines, les objectifs et les contraintes sont d'un autre ordre, examinons-les. Avec les scolaires, chaque enfant construit son objet pendant la demi-journée considérée, si le temps est trop court, la phase d'utilisation et d'explication sera réduite voire mise de côté. L'objectif premier du centre est que l'enfant construise son objet et que celui-ci fonctionne. […] Une grosse part des explications est laissée volontairement à l'école, la démarche du professeur va donc déterminer l'intérêt didactique des séances aux Domaines.
>
> En revanche, pendant les vacances, la contrainte du même nombre d'objets et des mêmes constructions pour chaque enfant disparaît. L'animateur peut donner le choix des réalisations (sur la thématique choisie), proposer des petits montages supplémentaires aux plus rapides et permettre de tâtonner, d'expérimenter : les animations s'adaptent à la demande des enfants. […] Suivant la dynamique du groupe, le stage peut se dérouler de manière bien différente, au fil des idées des enfants. Dans ce cas, la partie explications ne peut pas être laissée à l'école. » (Poisard, 2005, p. 16)

Godot fait, quant à elle, l'hypothèse de modifications profondes des caractéristiques générales du contrat didactique existant au sein de l'institution loisir scientifique :

> « • les activités proposées doivent procurer du plaisir
>
> • on est libre de faire ou de ne pas faire
>
> • on nous invite à apprendre des choses mais ce que l'on apprend ne sera pas évalué
>
> • on peut consacrer le temps que l'on souhaite aux activités proposées.
>
> Le contrat didactique inhérent à l'institution « loisir scientifique », où le plaisir et le libre choix ont une place importante, est donc éloigné de celui habituellement établi dans l'institution scolaire lors de l'enseignement des mathématiques, bien qu'ils aient des points en commun. » (Godot, 2005, p. 320)

Mais le contrat didactique est parfois d'une nature tellement différente, que c'est le concept de contrat didactique lui-même qu'il faut réinterroger. Pelay (2011) montre dans sa thèse qu'il est insuffisant pour décrire et analyser complètement certaines animations mathématiques menées en centre de vacances, et c'est dans cette perspective qu'il élabore le concept de contrat didactique et ludique. Deux arguments principaux sont avancés dans la thèse.
Le premier argument est l'impossibilité observée de rendre compte de certaines phases d'animations en se référant uniquement à un contrat de nature didactique. Pour Pelay, l'animateur est parfois :

> « face à des choix et des décisions qui sont très éloignés des préoccupations qu'aurait un maître dans une situation de classe. Il a certes des éventuels objectifs de diffusion ou d'enseignement, mais il est avant tout pris par la nécessité de faire vivre le jeu. » (Pelay, 2011, p. 261)

Cette priorité donnée au jeu le conduit à identifier des phases non didactiques, dans lesquelles se font des apprentissages mathématiques. Ceci est mis en évidence sur une animation qui est étudiée de façon centrale dans la thèse, la situation des 10 consécutifs. L'animateur y met en place un jeu de course et, contrairement à ses intentions initiales d'engager un débat mathématique après une phase de jeu, il laisse, lors de l'expérimentation, se poursuivre le jeu jusqu'à la fin de l'animation. Il justifie explicitement son choix *a posteriori* en estimant qu'il était trop tard pour engager une phase de débat qui n'aurait pas été comprise par les autres équipes, et il a préféré maintenir le jeu afin non seulement de maintenir l'ambiance, mais aussi pour permettre à l'équipe qui avait trouvé la formule de l'emporter. Il a donc fait le choix de gérer l'animation en donnant la priorité à la dévolution et aux enjeux ludiques, et c'est cette nécessité de faire vivre le jeu qui conduit à penser que cette phase de l'atelier ne

peut pas être modélisée en se limitant à un contrat didactique : aucune intention didactique n'est exprimée par l'animateur, et aucune intention didactique n'est perçue par les enfants. Animateur et enfants sont donc liés par l'intention de jouer ensemble, jouer en faisant et en apprenant des mathématiques peut-être, mais jouer avant tout. Cela rejoint le constat de Poisard qui met aussi en avant que l'objectif premier du centre de culture scientifique où se déroule son expérimentation est que l'enfant construise son objet et que celui-ci fonctionne. Certains enjeux deviennent ainsi tellement prioritaires que les enjeux didactiques peuvent disparaître.

Le second argument est l'absence de la dimension paradoxale du contrat didactique dans certaines animations. Brousseau précise ainsi le caractère paradoxal du contrat didactique dans les situations adidactiques :

> « Le maître souhaite que l'élève veuille ne tenir la réponse que de lui-même, mais en même temps, il a le devoir social de vouloir que l'élève donne la bonne réponse. Il doit donc communiquer ce savoir sans avoir à le dévoiler, ce qui est incompatible avec une relation contractuelle. » (Brousseau, 1998, p. 303)

Or ce caractère paradoxal du contrat didactique, lié à l'obligation sociale d'enseigner, n'existe pas dans de nombreux contextes de vulgarisation ou d'animation, car les animations n'obéissent pas à cette logique. L'animateur peut avoir une intention d'enseigner et les enfants une intention d'apprendre, mais il n'y a aucune obligation d'enseignement. L'animateur peut s'adapter à l'attitude des enfants et à leurs capacités du moment. Ne reposant pas sur une injonction d'enseigner portée par l'institution, le contrat qui s'instaure est donc d'une autre nature car l'animateur peut ainsi se soustraire aux paradoxes habituellement associés au contrat didactique, comme celui de la dévolution : il peut laisser les enfants chercher et refuser de leur donner la solution même lorsque ces derniers le lui demandent à la fin de l'activité. Cela est en partie rendu possible par le fait que, dans ces contextes, la notion d'obligation tend à être remplacée par celle de libre choix, un point souligné dans les trois thèses. Il s'agit en fait d'un véritable renversement vis-à-vis du contrat didactique habituel, puisque la responsabilité didactique est transférée du côté des enfants : c'est leur volonté et leur désir personnel qui deviennent moteurs. L'animateur construit la relation didactique sur la responsabilité d'apprendre que prennent les enfants.

C'est ce qui a conduit Pelay à élaborer, dans sa thèse, le concept de contrat didactique et ludique pour étudier, de façon conjointe et articulée, les enjeux ludiques et les enjeux didactiques. Ce concept, qui vient donc élargir le concept de contrat didactique, est défini de la façon suivante :

> « Le contrat didactique et ludique est l'ensemble des règles et comportements, implicites et explicites, entre un "éducateur" et un ou plusieurs "participants" dans un projet, qui lie de façon explicite ou implicite, jeu et apprentissage dans un contexte donné. » (Pelay, 2011, p. 284)

Les travaux de notre corpus mettent donc bien en évidence une véritable spécificité des contextes de vulgarisation et d'animation, et l'on y perçoit bien que l'étude de ces contextes peut générer des problématiques spécifiques qui sont susceptibles de modifier et renouveler de façon assez importante le travail didactique, et également de générer des extensions ou de nouvelles constructions théoriques originales. La modélisation proposée ci-après en est un autre exemple fourni par le corpus étudié.

Un début de modélisation d'une action de diffusion

Dans le corpus étudié, seuls les deux articles (Pelay & Mercat, 2012) et (Pelay & Boissière, 2015) sont centrés sur la thématique de la vulgarisation. Ils proposent une première tentative de modélisation d'une action de diffusion des mathématiques, qui n'oppose pas enseignement et vulgarisation, mais qui puisse au contraire permettre de penser l'étude d'une action

d'enseignement et d'une action de vulgarisation avec des concepts communs. Leur hypothèse est la suivante :

> « L'hypothèse sous-jacente est qu'il existe des éléments de vulgarisation dans le processus d'enseignement, et des éléments d'enseignement dans le processus de vulgarisation. Ce sont la priorité donnée à certains enjeux plutôt qu'à d'autres, les choix réalisés dans les activités proposées, le discours et le langage utilisé dans les textes et les échanges avec le public, qui vont permettre de caractériser les processus d'enseignement et de vulgarisation mis en œuvre. Aussi, une action de diffusion va pouvoir être étudiée avec une approche théorique globale. » (Pelay & Boissière, 2015, p. 947)

Une action de diffusion des mathématiques est définie dans ce texte de façon assez large « comme la mise en place d'un dispositif mathématique dans un contexte donné, par un acteur de la diffusion et pour un public donné ». Elle peut être représentée par une trajectoire qui se réalise dans différentes zones qui sont définies de la façon suivante :

> « • la zone magique est la zone où le public n'a aucune prise sur ce dont on lui parle. Il ne peut pas faire de référence à des choses déjà connues. Plus la distance est grande, plus les mathématiques paraissent inaccessibles et en quelque sorte magiques pour le public. Le savoir expert est tellement éloigné de celui du public que celui-ci n'a aucune prise sur la réalité mathématique qui lui est proposée : elle lui est même invisible, incompréhensible, inaccessible.
>
> • la zone maîtrisée est la zone où le public a une certaine maîtrise du contenu mathématique. Les connaissances mathématiques évoquées ont du sens, et il peut se « raccrocher » à des choses connues. Il peut toujours y avoir des approfondissements dans cette zone.
>
> • la zone didactique est la zone où une compréhension et un approfondissement sont possibles autour d'une notion, d'un théorème, d'une technique, etc. » (ibid., p. 948)

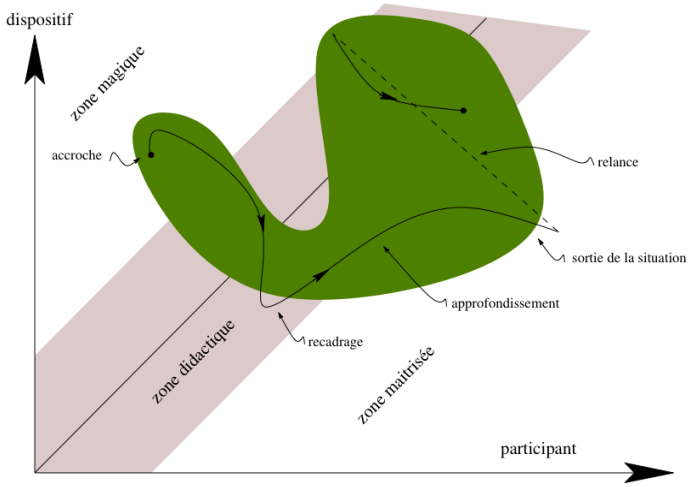


Figure 6 *: Modélisation d'une action de diffusion*

Selon cette perspective, une action d'enseignement pourrait se définir comme une action de diffusion des mathématiques où les intentions didactiques sont prioritaires sur tous les autres enjeux ; et une action de vulgarisation comme une action de diffusion où d'autres enjeux prennent le pas sur les intentions didactiques. En s'appuyant sur cette approche, Pelay et Boissière étudient des actions de diffusion menées autour d'un même thème mathématique, et mettent en évidence par exemple des différences significatives entre deux articles de vulgarisation.

Ce modèle illustre bien, nous semble-t-il, la nécessité, dans une approche didactique des activités de popularisation des mathématiques, de prendre en compte les différents types de rapport aux mathématiques qui s'y engagent. Il montre aussi comment le jeu possible entre ces différents types de rapport ouvre l'espace des dynamiques potentielles par rapport à celles

usuellement étudiées par les didacticiens. Il est cependant clair, à la lecture des textes, qu'il s'agit là d'un objet émergent qui nécessite un travail substantiel pour évoluer vers une construction vraiment convaincante.

Des travaux encore émergents

Notre étude étaye donc le constat fait dans la première partie de ce texte : la didactique des mathématiques n'a pas encore vraiment traité en profondeur l'étude de la vulgarisation. D'ailleurs, parmi toutes les formes possibles de vulgarisation (articles, livres, films, conférences, expositions, pièces de théâtre, ateliers, etc.), peu sont en fait couvertes par les études didactiques de ce corpus : il s'agit quasi systématiquement d'ateliers, ou ateliers-stands. Seul l'article de Pelay et Boissière (2015) déjà cité se singularise, en étudiant deux articles de vulgarisation du site « Image des maths ». Les cadres théoriques mobilisés sont des cadres qui permettent d'étudier ce qui se passe en situation, celui notamment des situations-recherche (Grenier & Payan, 1998) ou la théorie des situations didactiques (Brousseau, 1998) qui, effectivement, s'adaptent bien à ces formes de vulgarisation. La théorie anthropologique du didactique est présente dans la thèse de Poisard (2005) via la notion d'ostensif (Bosch & Chevallard, 1999) par rapport à son travail sur le rôle des objets à calculer mais, contrairement à ce que l'on aurait pu penser, elle n'est mobilisée dans aucun article pour étudier les actions de vulgarisation sous l'angle institutionnel, mieux cerner les hiérarchies de conditions et contraintes qui leur sont associées (Chevallard, 2002), ou approcher les rapports originaux qui s'y nouent entre médias et milieux (Chevallard, 2008).
S'agissant de constructions conceptuelles ou théoriques et de résultats, on trouve finalement peu d'éléments directement liés au contexte de vulgarisation, ce qui s'explique sans doute aussi par le fait que peu de problématiques sont centrées sur la vulgarisation elle-même. Si une ébauche de cadre théorique est proposée dans les articles de Pelay et Mercat (2012) et Pelay et Boissière (2015), comme souligné, celle-ci reste encore très sommaire et à approfondir. C'est ce qui nous conduit, dans la partie suivante, à proposer des pistes de recherche qu'il nous semblerait intéressant d'approfondir.

CONSEQUENCES SUR LE TRAVAIL DE RECHERCHE DIDACTIQUE

Repenser en profondeur l'étude des liens entre vulgarisation et enseignement

Les recherches que nous avons analysées soulignent la spécificité des contextes de vulgarisation, mais une compréhension fine et précise de cette spécificité reste à construire. Cette spécificité doit-elle conduire à créer une « vulgaristique » des mathématiques comme le suggère Rittaud qui serait à la vulgarisation ce que la didactique serait à l'enseignement dans l'article cité plus haut ? Nous sommes sceptiques, et nous défendons plutôt la position que la didactique des mathématiques, qui vise la compréhension des processus de diffusion des mathématiques dans toutes les institutions qui se donnent de tels objectifs, doit se doter des outils théoriques, conceptuels et méthodologiques qui permettent de travailler ces problématiques. Nous considérons aussi qu'elle dispose déjà de moyens substantiels pour s'y attaquer, même si les formes de vulgarisation étudiées jusqu'ici par les didacticiens, qui sont comme nous l'avons noté très limitées, ne permettent pas de prendre l'exacte mesure des besoins.
Il nous semble dans ces conditions qu'il faille éviter deux écueils :

- Le premier serait d'opposer *a priori* enseignement et vulgarisation. Dans le corpus que nous avons étudié, nous avons relevé que les chercheurs ont, pour la plupart d'entre eux, expérimenté la mise en œuvre de mêmes dispositifs ou d'ateliers, à la fois dans des

contextes de vulgarisation et des contextes d'enseignement, et en ont tiré des résultats intéressants. L'étude des différences et des spécificités ne doit pas faire oublier l'existence de proximités, elles aussi pertinentes à identifier et étudier, en particulier pour comprendre comment établir des synergies productives en termes d'apprentissage entre les deux genres.

- Le second serait à l'inverse de sous-estimer les spécificités et de considérer la vulgarisation comme une forme « d'enseignement allégé », « un effort de simplification du contenu d'un savoir, destiné à permettre à un public de non-spécialistes de s'en approprier à bon compte quelques rudiments » (Rittaud, 2015). Cette crainte, exprimée avec force par Rittaud dans son texte, doit être réellement prise en compte. Elle nous montre qu'une approche didactique de la vulgarisation ne pourra être convaincante que si elle capable de se saisir de la spécificité de cette dernière. Les insuffisances dans ce domaine contribuent sans aucun doute au fait que, pour l'instant, les vulgarisateurs dans leur grande majorité ne voient pas dans les perspectives didactiques une ressource.

Mener ce travail implique aussi de ne pas réduire la didactique des mathématiques à l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage. Dans le contexte actuel d'évolution profonde des rapports aux savoirs dans nos sociétés, nous pensons que les formes de diffusion sont de plus en plus articulées et complémentaires, selon les lieux, contextes, publics, dans lesquelles elles se déroulent, et qu'il faut poursuivre le mouvement en cours de développement du champ de la didactique comme étude des phénomènes de diffusion et de dissémination de la culture mathématique sous toutes ses formes. Cela implique bien sûr, d'élargir le corpus des types d'action étudiés qui, comme nous l'avons vu précédemment, est actuellement beaucoup trop restreint et centré sur les actions de type « atelier ». Il s'agit de se doter d'outils conceptuels permettant d'analyser et comprendre les processus en jeu dans tout type d'action de diffusion des mathématiques (conférences, livres, expositions, vidéos, etc.).

Intégrer l'étude des autres enjeux présents dans les problématiques didactiques

Le libre choix, l'absence d'obligation d'enseigner et de programme précis, mis en avant par les recherches, changent, nous l'avons souligné, la nature du contrat didactique. Ils attirent l'attention sur l'existence d'autres enjeux que ceux qui sont usuellement pris en charge par les travaux didactiques et doivent être ici intégrés.
La thèse de Sousa Do Nascimento (1999) nous semble, sur ce point, à considérer de façon très attentive. Elle semble être la première thèse de didactique à traiter de façon aussi centrale et approfondie les questions d'animation et de vulgarisation scientifiques, et constitue un précurseur des travaux didactiques de Poisard, Godot et Pelay qui, d'ailleurs, y font tous trois référence. Cette thèse, soutenue en 1999, s'intéresse à l'animation scientifique en tant que « praxis » ou « pratique consciente », en cherchant à en déterminer les enjeux et les objectifs. S'appuyant sur des travaux sociologiques et anthropologiques sur l'animation socioculturelle, et sur ceux de scientifiques et didacticiens sur la vulgarisation des sciences et l'animation scientifique, Do Nascimento considère que l'animation scientifique trouve son origine dans deux pratiques distinctes : le courant d'animation socioculturelle (spécificité française) et le mouvement de vulgarisation des sciences. Elle dresse une typologie des enjeux et intentions d'une animation scientifique qui révèle bien la multiplicité des enjeux possibles, l'enjeu didactique proprement dit n'en étant qu'un parmi d'autres.

INTENTIONS	ENJEUX	ROLE DE L'ANIMATEUR
Elucidation	Valeurs (conscientisation, démystification)	Militant

Production	Procédures (règles, normes, techniques de fabrication)	Technicien
Médiation	Culture scientifique et technique partagée	Médiateur
Instruction	Connaissances scientifiques	Instructeur
Loisirs	Plaisir, sensibilisation	Amuseur

Tableau 2 : Les modèles d'analyse de l'animation scientifique

On comprend bien que la présence d'autres enjeux, souvent plus importants que les enjeux didactiques, changent la nature du contrat. Or si les enjeux didactiques ne sont plus prioritaires, cela signifie qu'il faut aussi pouvoir intégrer d'autres perspectives de recherche (psychologiques, sociologiques, communicationnelles) de façon cohérente avec les perspectives didactiques. C'est d'ailleurs ce que fait Do Nascimento, puisqu'elle mobilise pour sa problématique plusieurs champs de recherche, la sociologie et l'anthropologie d'une part, la didactique d'autre part, et qu'elle montre aussi la nécessité d'étudier ces contextes avec une fenêtre plus large.
Ce point soulève la question de l'émergence de nouvelles praxéologies de recherche en didactique, probablement beaucoup plus interconnectées avec d'autres champs de recherche, afin de se doter de nouveaux outils d'étude pour repérer, décrire, étudier et comprendre non seulement la nature des enjeux présents mais aussi leur articulation - plus ou moins étroite - avec les enjeux didactiques, qui resteront, eux, au cœur d'une perspective didactique.

Evaluer l'impact des actions de vulgarisation

Rendre l'activité plaisante ou attractive, changer le rapport aux mathématiques sont comme nous l'avons vu des enjeux importants des actions menées dans les contextes de vulgarisation. Intégrer l'étude de nouveaux enjeux dans une problématique questionne aussi sur l'évaluation de la réalisation de ces enjeux dans une action de diffusion.
Caroline Poisard a repéré ou pressenti ce basculement possible vers une autre forme de travail didactique à mener pour prendre en compte ces phénomènes :

> « Pendant les vacances, […] L'instituteur n'intervient plus directement, et ce sont les parents qui sont les premiers témoins des activités réalisées. Même si la portée didactique des ateliers semble plus faible à priori dans ce cas-là, l'intérêt n'est pas nul, il se mesure par contre différemment, mais ce n'est pas l'objet de cette recherche. » (Poisard, 2005, p. 16)

L'article récent de Assude, Feuilladieu et Dunand (2015) est sur ce point intéressant, car il place justement l'évaluation au centre de sa problématique. Il étudie les conditions pédagogiques et didactiques visant la transformation du rapport au savoir mathématique que peut engendrer le dispositif « Hippocampe » chez de jeunes élèves décrocheurs. Son intérêt est de croiser une double perspective théorique, sociologique et didactique, ce qui permet selon les auteurs :

> « d'articuler les dispositions, catégories de perception et compétences des apprenants, diversifiés selon le milieu social d'appartenance (aspect sociologique), avec les contextes de mise en forme et de transmission du savoir (aspect didactique) (Lahire, 2007). La notion de rapport au savoir (Charlot, 1997) croise ces deux aspects. Elle sera appréhendée de deux façons : d'une part, à travers ce que ces stagiaires ont retenu des mathématiques durant leur scolarité antérieure dans le système conventionnel ; d'autre part à travers l'analyse du dispositif et de l'action didactique, à partir de notions telles que le rapport institutionnel et le rapport personnel au savoir mathématique (Chevallard, 1992). » (Assude et al., 2015, § 3)

De manière plus générale, trouver des moyens d'évaluer l'impact des actions de diffusion des mathématiques, qu'elles se situent dans un contexte péri ou extra-scolaire, en prenant en compte la diversité de leurs enjeux et de leurs participants, mais aussi leurs conditions et contraintes spécifiques, reste, comme nous l'avons souligné dès le début de ce texte, un

problème très largement ouvert, qui nécessitera lui aussi sans aucun doute l'élaboration de constructions originales.

SYNTHESE ET CONCLUSION

Au vu de ce qui précède, il est clair que la didactique des mathématiques, conçue comme science de la diffusion des savoirs et pratiques mathématiques dans les sociétés, a un champ d'intervention qui couvre bien *a priori* toutes les formes d'action didactique, scolaires ou non, et que ses constructions offrent un réel potentiel pour le faire. Les travaux analysés le confirment bien, en montrant par exemple les apports de la théorie des situations didactiques à l'analyse fine des potentialités d'apprentissage, de familiarisation avec les pratiques mathématiques, de diverses formes de situations de vulgarisation. L'autre grand pilier didactique qu'est la théorie anthropologique du didactique fournit lui aussi des concepts *a priori* pertinents pour comprendre les conditions et contraintes des situations de vulgarisation, par exemple à travers la hiérarchie des niveaux de codétermination, ou pour prendre en charge les formes éminemment flexibles de rapport à la connaissance portées par les actions de vulgarisation, analyser des dynamiques de travail comme celles portées par les ateliers MATh.en.JEANS par exemple, mais il semble bien que ces outils soient pour l'instant sous-exploités. Ceci étant dit, les travaux analysés montrent bien aussi, comment les contrats didactiques sont modifiés, les pratiques transformées suivant les formes prises par l'action de vulgarisation ou diffusion. Pour rendre la recherche didactique utile, il nous semble qu'il faut effectivement inscrire notre travail didactique dans des praxéologies de recherche nouvelles, tant en termes de problématisation que de méthodologies. Quand cela est effectué, comme par exemple dans la thèse de Pelay (2011), cela produit des résultats qui font émerger des conceptualisations originales comme celle de contrat didactique et ludique. Il faut aussi penser en termes d'éducation mathématique, et non seulement d'enseignement et d'apprentissage, et prendre en charge la différenciation des rapports aux objets de savoir mathématiques, qui est nécessairement en jeu dans cette notion. Même si l'on peut avoir des réserves par rapport à la classification proposée dans (Pelay & Mercat, 2012), et aux terminologies qui y sont adoptées, il y a là un effort fait pour exprimer ces différences de rapport, au-delà de ce qui est par exemple proposé par Robert avec la distinction entre connaissances mobilisables et connaissances disponibles (Robert, 1998), et pour prendre en charge des rapports aux objets mathématiques qui ne sont pas d'ordre opérationnel ou qui sont très faiblement opérationnels. Comme cela a été souligné, il faut, dans les modélisations de l'action didactique, savoir prendre en compte des hiérarchies variables de sensibilités et des enjeux différents de ceux qui nous sont les plus familiers. Il faut savoir prendre en compte les questions de temps, avec la diversité des conditions et contraintes associées aux différentes formes d'action de vulgarisation et diffusion, l'affaiblissement des contraintes sur l'organisation des savoirs, bien mis en évidence dans (Rittaud 2015). Il faut prendre en compte la réduction radicale des contraintes d'évaluation et identifier les effets qui en résultent. Il faut mieux intégrer la dimension affective et esthétique des rapports aux mathématiques que la didactique française n'a tendance généralement à le faire, identifier et exploiter les leviers qui en résultent… Nous arrêterons là. Nous avons des outils qui ne demandent qu'à être exploités et perfectionnés au fil des recherches, mais énormément reste à faire dans un espace de praxéologies de recherche où ces questions sont très faiblement travaillées. Et nous voudrions, pour terminer ce texte, exprimer notre conviction que, pour relever ce défi, nous devons collaborer avec d'autres communautés, apprendre à mieux communiquer et travailler avec elles, comme nous avons su le faire en maintes occasions, aller vers elles, sans sous-estimer la richesse de leurs connaissances et expériences.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M. (2015). Synergies entre activités périscolaires et scolaires : le potentiel didactique des jeux mathématiques. In Commission inter-IREM Pop'Math (Ed.), *Documents du colloque Les mathématiques, une culture pour tous !*, Toulouse, 4-6 juin 2015. http://www.univ-irem.fr/IMG/pdf/synergies_periscolaire_scolaire.pdf

ARTIGUE, M. & BOSCH, M. (2014). Reflection on Networking through the praxeological lens. In A. Bikner-Ahsbahs & S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education* (pp. 249-266). New York : Springer.

ASSUDE, T., FEUILLADIEU, S. & DUNAND, C. (2015). Conditions d'évolution du rapport au savoir mathématique de jeunes « décrocheurs ». *Carrefours de l'éducation, 40*, 167-182.

BARBEAU, E. & TAYLOR, J.P. (2009). *Challeging Mathematics In and Beyond the Classroom. The 16th ICMI Study*. New York : Springer.

BIKNER-AHSBAHS, A., PREDIGER, S. (Eds.) (2014). *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education*. New York : Springer.

BOSCH, M. & CHEVALLARD, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77-124.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectivesapportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

CHEVALLARD, Y. (2002). Organiser l'étude. Ecologie & régulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble : La Pensée Sauvage éditions.

CHEVALLARD, Y. (2008). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. In G. Gueudet & Y. Matheron (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2007* (pp. 344-366). Paris : IREM de Paris.

FIORELLI-VILMART, S., AUDIN, P., BELBACHIR, H., CHERIX, P.-A. & RITTAUD, B. (2015). Evaluer une action de vulgarisation en mathématiques. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – Spé2 (pp. 909-917). https://www.emf.unige.ch/files/9314/6410/3623/EMF2015SP2FIORELLIVILMART.pdf

FIORELLI-VILMART, S., BELBACHIR, H. & TANGUAY, D. (2015). Vulgarisation des mathématiques – Compte-rendu du projet spécial n°2. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – Spé2 (pp. 903-908). https://www.emf.unige.ch/files/3014/6410/3595/EMF2015BILANSP2.pdf

GODOT, K. (2005). *Situations recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation. Exemple de la roue des couleurs*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble 1. https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-00102171

GRENIER, D. & PAYAN, C. (1998). Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18*(1), 59-100.

OZANAM, J. (1694). *Récréations mathématiques et physiques*. Paris : Jombert.

PELAY, N. (2011). *Jeux et apprentissages mathématiques. Elaboration du contrat didactique et ludique en contexte d'animation scientifique*. Thèse de doctorat, Université Lyon 1. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00665076

PELAY, N. & ARTIGUE, M. (2015). Vers des mathématiques vivantes : synergies entre activités périscolaires et scolaires. *Communication au Forum Mathématiques vivantes, de l'école au monde.* Paris, 21-22 mars 2015. http://www.irem.univ-parisdiderot.fr/videos/vers_les_mathematiques_vivantes_synergies_entre_activites_periscolaires_et_/

PELAY, N. & BOISSIERE, A. (2015). Vulgarisation et enseignement des mathématiques dans le jeu Dobble. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – Spé2 (pp. 944-956). https://www.emf.unige.ch/files/6014/6410/3671/EMF2015SP2PELAY.pdfhttps://www.emf.unige.ch/files/6014/6410/3671/EMF2015SP2PELAY.pdf

PELAY, N. & MERCAT, C. (2012). Quelle modélisation didactique de la vulgarisation des mathématiques. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.), *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle — Actes du colloques EMF2012* – Spé4 (pp. 1914-1925). https://www.emf.unige.ch/files/6114/5321/1224/EMF2012SPE4PELAY.pdf

POISARD, C. (2005). *Ateliers de fabrication et d'étude d'objets mathématiques, le cas des instruments à calculer*. Thèse de doctorat, Université d'Aix-Marseille I.

RITTAUD, B. (2015). Pour une « vulgaristique » des mathématiques. In L. Theis (Ed.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015* – Spé2 (pp. 957-962). https://www.emf.unige.ch/files/7114/6410/3683/EMF2015SP2RITTAUD.pdf

ROBERT, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques*, *18*(2), 139-190.

UNE ETUDE DE L'AUTONOMIE EN MATHEMATIQUES DANS LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR

Pierre-Vincent **QUÉRÉ**
CREAD, UBO, France
pierre-vincent.quere@ac-rennes.fr

Résumé
Cet article accompagne le poster éponyme qui traite du thème de l'autonomie en mathématiques pour des étudiants débutant des études menant à un diplôme d'ingénieur. Quelle forme d'autonomie est réellement attendue ? Et quels sont les moyens proposés, et les moyens effectivement utilisés par les étudiants pour le développement de cette autonomie ? Nous étudions ces questions dans le cadre de l'approche anthropologique. Nous avons proposé un questionnaire et réalisé des entretiens avec des étudiants. L'analyse de ces données montre, tout d'abord, que les ressources ou dispositifs proposés sont variés, ce qui représente pour eux une réelle nouveauté. Néanmoins, dans les faits, les étudiants n'en apprécient et n'en utilisent qu'une partie et développent autour de ces propositions leurs propres stratégies de travail autonome.

Mots clés
Autonomie, classes préparatoires, ressources, transition secondaire-supérieur.

INTRODUCTION

Dans la formation d'un étudiant après le bac, la transition entre le secondaire et le supérieur représente un réel défi (Gueudet, 2008). À cette occasion en effet, les bouleversements auxquels il est amené à faire face sont de plusieurs ordres, que l'on peut catégoriser grossièrement : social, méthodologique, cognitif. Dans tous ces domaines, l'étudiant devra faire preuve d'une autonomie croissante et l'injonction à l'autonomie à laquelle il est soumis dans cette transition peut provenir de l'institution elle-même en se déclinant encore sous différents aspects : par exemple dans l'organisation du travail, dans l'utilisation de ressources nouvelles, ou encore, à l'échelle d'une discipline (ici en mathématiques) dans la prise d'initiative pour la résolution d'un problème.
Dans notre travail, nous nous sommes donc intéressé à des étudiants en début de parcours universitaire, plus précisément dans un Cycle Préparatoire Intégré (CPI) correspondant aux deux premières années de la formation au sein d'une école d'ingénieurs. Ce cursus est à distinguer des Classes Préparatoires aux Grandes Ecoles (CPGE) qui correspondent au même niveau de formation, mais dans un lycée indépendant de la future école d'ingénieurs qui sera, en cas de succès, intégrée par l'étudiant après concours. L'organisation du travail personnel en CPGE a été l'objet récent de travaux (Farah, 2015) reprenant ceux de Castela au lycée (Castela, 2008). Nous nous situerons dans le prolongement de ceux-ci, en centrant notre questionnement sur l'autonomie, qui est en lien avec le travail personnel mais ne se limite pas à celui-ci.

QUESTION DE RECHERCHE ET CADRE THEORIQUE

Le point précis sur lequel nous allons étudier le thème de l'autonomie est celui des moyens utilisés pour parvenir à la développer, ce qui nous permet d'énoncer ici la question de recherche suivante : "Quelles sont les ressources, les dispositifs ou les supports à même d'aider le nouvel étudiant à développer ses capacités d'autonomie en mathématiques ?"

Le cadre que nous choisissons pour préciser le sens de cette notion d'autonomie dans le cas des mathématiques est la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 2007). Dans cette théorie, nous nous intéressons plus précisément au concept de praxéologie (ou organisation mathématique) qui permet de modéliser toute activité, vue comme activité d'un sujet d'une certaine institution. Ce modèle est formé de quatre éléments $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où T est un type de tâches, mis en relation avec des techniques τ, pour définir un bloc practico-technique (identifié couramment à un savoir-faire, ou une pratique) auquel nous allons nous intéresser. Nous admettons que seul un petit nombre de techniques sera reconnu par une institution donnée, ce qui en fait un outil adapté à notre travail.

Ce modèle nous permet également une étude de la transition secondaire-supérieur en terme d'autonomie. Étudier les praxéologies utilisées par l'institution peut amener à proposer une définition tenant compte de cette perspective institutionnelle : "l'autonomie, c'est être capable de développer par soi-même une technique adéquate pour effectuer un type de tâches, et de tenir un discours technologique cohérent associé". Nous reviendrons en conclusion sur sa pertinence.

La TAD permet ensuite de se placer à différents niveaux appelés "niveaux de codétermination didactiques" : celui d'une question, pour un exercice particulier (ou d'un thème) ; celui de la discipline mathématique (dans ce cas le type de tâches serait par exemple : "apprendre une démonstration", et une technique possible "recopier la démonstration" ou "refaire la démonstration sans la regarder"), mais aussi celui de la pédagogie (le type de tâches étant par exemple "organiser son travail personnel"). Rappelons ici tous les niveaux définis dans cette échelle :

sujet<>thème<>secteur<>domaine<>discipline<>pédagogie<>école<>société

Pour notre part, nous allons utiliser les praxéologies à plusieurs niveaux : celui d'un sujet, en observant comment les étudiants résolvent des exercices particuliers ; celui de la discipline, en regardant plus généralement comment ils organisent leur travail en mathématiques ; et celui de la pédagogie, concernant plus généralement leur travail en CPI. Nous allons tenter d'identifier à chaque niveau des types de tâches présents dans leur travail personnel. Pour cela, nous nous appuyons tout d'abord sur notre connaissance des étudiants, ainsi que sur le travail de Farah sur les CPGE (Farah, 2015) pour chercher à définir a priori une liste non exhaustive de types de tâches, répertoriés à partir des phases de travail personnel des étudiants.

METHODOLOGIE

Pour répondre à la question formulée, nous avons mis en place une enquête en deux temps sur le thème général de l'autonomie dans deux classes de CPI (première et deuxième année).

La première partie de notre enquête a consisté à faire réagir l'ensemble des 199 étudiants du CPI concerné sur un questionnaire général sur l'autonomie. Ce questionnaire en ligne, anonyme, comportait une partie "Autonomie et dispositifs institutionnels" qui était principalement axée sur la

formation en mathématiques. Il s'agissait d'avoir une première série de données relatives aux moyens les plus utilisés au lycée puis en CPI.
La suite de l'enquête a consisté à nous entretenir avec des étudiants volontaires (nous le leur avions proposé dans le questionnaire). Dans ces entretiens semi-directifs de type ethnologique, nous avons d'abord cherché à approfondir un ensemble de points toujours en rapport avec l'autonomie. De plus, quelques jours avant l'entretien individuel, nous avons remis aux étudiants une liste de trois exercices de mathématiques dans des domaines que nous avions repérés dans le questionnaire comme étant source de différentes mises en pratique de leur autonomie (utilisation de logiciels, travail à plusieurs) : la géométrie avec les nombres complexes, les équations différentielles et le calcul matriciel.

RESULTATS

Au niveau "Pédagogie"

Nous relevons ici deux types de tâches : "Organiser son travail personnel" et "Préparer une évaluation". Pour le premier, certainement moins présent au lycée, les professeurs cadrant plus le travail personnel à effectuer, les techniques utilisées sont "Se donner des moments pour reprendre le cours et les exercices" et "Se donner des moments de travail collectif". Pour le deuxième type de tâches, la technique essentiellement observée est "Reprendre les sujets des examens passés".
Les ressources associées à ce niveau sont donc le polycopié de cours et le travail entre pairs.

Au niveau "Discipline mathématique"

Un type de tâches pourrait être : "Choisir des exercices à faire" en remarquant que la notion d'exercice est centrale en mathématiques, ce qui n'est pas le cas dans d'autres disciplines. Ce type de tâches n'est certainement pas présent au lycée, car il s'agit seulement de faire les exercices donnés par le professeur. En CPI, on constate que les étudiants essayent de travailler de leur propre initiative certains exercices. Et selon les cas, diverses techniques apparaissent dans les réponses au questionnaire : "Refaire les exercices traités en TD" ; "Tenter de faire des exercices de la feuille de TD qui n'ont pas déjà été traités" ; "Chercher des exercices corrigés dans des ressources externes" ;
On peut encore définir un autre type de tâches à ce niveau : "Travailler une démonstration" ou "Apprendre un théorème". Là encore, il semble que ce type de tâches ne soit pas présent au lycée et la technique mise en place alors peut être "Faire des fiches" ou "Poser des questions au professeur".
Les ressources associées sont ici le polycopié des exercices, internet ou le professeur.

Au niveau "Sujet"

L'objectif est ici d'analyser les praxéologies mises en place par les étudiants en terme d'autonomie, dans une situation de résolution de problème, en nous basant sur le modèle des praxéologies présenté plus haut. L'activité que nous décidons d'analyser est la résolution de l'exercice suivant :
"Résoudre l'équation différentielle d'inconnue y suivante :

$$y''(t)-2y'(t)-8y(t)=\sin^2(t)$$

Le premier type de tâches relevé est ici "Identifier le type d'équation" qui peut engager une technique de type "Recherche dans un répertoire d'équations". Apparaît également un autre type de tâches que l'on peut dénommer : "Se souvenir de la méthode générale". La technique alors mise en place est de se tourner vers le polycopié de cours, ne serait-ce que pour vérifier avant de se lancer

dans les calculs. La deuxième possibilité est d'utiliser une de leurs fiches méthodes (rédigée à partir du cours).
Un deuxième type de tâches apparaissant ici est : "Rechercher une solution particulière", et c'est l'idée de la linéarisation de $\sin^2(t)$ qui représentait sans doute la plus grande difficulté de cet exercice. Là encore, en tant que technique, beaucoup ont utilisé leur cours qui contient une liste de seconds membres à connaître par cœur. Cependant, pour la formule de linéarisation, qui nécessite une réelle autonomie mathématique, il est opportun de constater que deux d'entre eux ont utilisé le moteur WOLFRAM ALPHA (qui permet d'obtenir des formules, et pas seulement d'effectuer des calculs).
Un troisième type de tâches peut être enfin mis en avant ici, que l'on peut dénommer "Effectuer les calculs". Pour tous les étudiants, la technique principale est de les effectuer à la main. A ce dernier type de tâches, on peut même en ajouter un ultime, celui de "Vérifier ses résultats". Seuls deux étudiants n'ont pas estimé nécessaire de le faire, et la technique la plus commune a été d'utiliser un logiciel ou une calculatrice.
Notons que certains étudiants n'ont pas hésité à se renseigner auprès de leurs camarades pour obtenir de l'aide, ce qui représente une technique mobilisable à tous les niveaux, et qu'ils ont tout fait pour parvenir à résoudre ce problème, en réfléchissant parfois sur plusieurs jours, ce qui représente également une technique possible ("Laisser passer du temps pour la réflexion").
Avec toutes les observations que nous avons relevées dans cette activité, pour laquelle le type de tâches peut être défini comme "résoudre une équation différentielle du second ordre à coefficient constant", nous pouvons donc conclure que les techniques utilisées se développent à l'interieur de plusieurs sous-niveaux en relation avec des sous-tâches. Tout d'abord, il leur faut connaître ou retrouver la méthode générale de résolution d'un tel problème. Pour cela une technique est de rechercher dans son cours ou ses fiches, ou bien éventuellement de se diriger vers une source extérieure comme internet ou un camarade.

DISCUSSION – CONCLUSION

Au moment de la transition secondaire-supérieur, c'est peut-être suite à la rencontre de premières difficultés que les étudiants mettent en place des nouvelles stratégies et méthodes d'apprentissage dans leur travail personnel. Ceci se passe à différents niveaux, et bien qu'ils utilisent diverses ressources et divers dispositifs, on peut y déceler différents degrés d'autonomie. En effet, certaines de ces ressources (polycopié notamment) peuvent être mises à leur disposition par l'institution, mais, certains étudiants les utilisent peu pour des raisons d'organisation personnelle. Ces ressources peuvent alors être d'une toute autre nature, comme par exemple l'aide précieuse d'un camarade ou d'un logiciel. Étudier les praxéologies développées par les étudiants peut amener à formuler une définition tenant compte de cette perspective institutionnelle : "l'autonomie, c'est être capable de développer par soi-même une technique adéquate pour effectuer un type de tâches, et de tenir un discours technologique cohérent associé".
Pour aller plus loin dans ce travail, nous pourrions chercher à identifier, toujours dans le cadre de la TAD, des parties du bloc technologico-théorique $[\theta, \Theta]$ développées au sein de l'institution et réellement utilisé par les étudiants dans les différents niveaux de codétermination mathématiques et didactiques. Ceci fournirait sans nul doute un aspect supplémentaire à notre analyse. De plus, nous tenons à souligner que le travail engagé ici ne saurait être considéré comme exhaustif, mais bien comme l'amorce de notre travail en thèse de doctorat.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CASTELA, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques, 28(83),* 135-182.

CHEVALLARD Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In L. Ruiz-Higueras, A. Estepa, & F. Javier García (Eds.) *Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico* (pp.705-746). Universidad de Jaén, Espagne.

FARAH, L. (2015). *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. (Thèse de doctorat). Disponible sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01195875.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics, 67(3),* 237-254.

ÉTUDE ET MISE A L'ETUDE DES MATHEMATIQUES EN CLASSES PREPARATOIRES ECONOMIQUES ET COMMERCIALES

Lynn **FARAH**

LDAR, Docteure de l'Université Paris Diderot

lgf00@mail.aub.edu

Résumé

Ce texte présente une partie de la recherche d'une thèse portant sur l'étude des mathématiques en classes préparatoires aux écoles de commerce. Dans ce qui suit, il s'agit de repérer les principaux dispositifs institutionnels mis en place par les professeurs dans leurs classes afin d'agir sur les façons de travailler des étudiants. Pour notre cadre conceptuel, nous empruntons des éléments à la TAD ainsi qu'à des travaux de sociologie de l'éducation.

Mots clés

Classes préparatoires, dispositifs institutionnels, mathématiques

INTRODUCTION – CONTEXTE

L'échec, pouvant aller jusqu'à l'abandon, des étudiants au cours des premières années universitaires est un phénomène bien connu en France. Toutefois, les différentes institutions de l'enseignement supérieur français ne se valent pas sur ce plan. En effet, les étudiants de filières parallèles sélectives (IUT, STS et CPGE – Annexe 1) semblent en grande majorité réussir beaucoup mieux que ceux de l'université, comme le mettent en avant les données officielles renseignées par le ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche (Annexe 2). Ceci semble jouer un rôle important dans l'attractivité de ces dernières.

Les causes de l'échec universitaire relèvent d'une accumulation de facteurs qui dépasse le diagnostic usuel expliquant l'échec par le manque de travail. Parmi les facteurs contribuant de manière importante à cet échec et identifiés par les nombreux travaux en didactique des disciplines et sciences de l'éducation qui se sont intéressés à ce thème (voir Farah, 2015), nous retiendrons les deux suivants, qui apparaissent massivement : la rupture secondaire/supérieur au niveau des contenus et de l'activité d'étude requise, notamment pour les mathématiques ; le faible encadrement des étudiants dans les filières non sélectives. En effet, dans l'enseignement supérieur, il est attendu que les étudiants développent en dehors de la présence des enseignants et en plus des tâches qui leur sont prescrites un travail personnel autonome important. Or celui-ci ne se situe pas nécessairement dans le prolongement de celui qui assure une certaine réussite au lycée.

Les CPGE, sur lesquelles est centré notre travail de recherche dans la continuité de celui de Castela (2011), se distinguent largement de l'université sur les points

considérés couramment comme causes d'échec. Les étudiants intègrent cette filière de premier cycle d'enseignement supérieur après le baccalauréat par sélection sur dossier afin d'y préparer pendant deux ans (ou éventuellement trois ans en cas de redoublement par exemple) les concours d'entrée aux grandes écoles (écoles de commerce, écoles d'ingénieurs et écoles vétérinaires, notamment). Les CPGE sont connues pour leur sélectivité dans le recrutement des étudiants. En effet, les préparationnaires sont d'habitude les meilleurs bacheliers et les CPGE sont communément décrites comme visant la production des élites, ce qui leur garantit une certaine stabilité au cours du temps et leur attribue un grand prestige au sein du système éducatif français. Non seulement elles sont fréquentées par des étudiants ayant eu au lycée des résultats nettement au dessus de la moyenne, mais de plus les CPGE sont caractérisées par l'existence d'un encadrement important, plus proche des étudiants, plus constant, qu'il ne l'est à l'université. À ceci s'ajoute un fonctionnement par classe stable, d'effectif relativement modéré, au sein de laquelle le travail collectif est bien promu (Darmon, 2013 ; Daverne & Dutercq, 2013 ; Rauscher, 2010). Ces institutions, considérées tant du point de vue des contraintes qu'elles font peser sur les étudiants que du point de vue des ressources qu'elles leur apportent, constituent un terrain d'observation dont nous avons étudié de près le fonctionnement dans le cas des mathématiques.

Dans ce texte, nous nous intéressons en particulier à la façon dont ces institutions procèdent pour aider les étudiants à construire un nouveau mode de travail en mathématiques adapté aux exigences des CPGE. Le changement d'institution, du lycée à la CPGE, représente une rupture marquée pour les étudiants, notamment au niveau du travail personnel qu'ils doivent réaliser pour réussir, thème auquel nous avons consacré notre travail de thèse (Farah, 2015). Par ailleurs, il faut préciser que l'évaluation en classes préparatoires est entièrement conditionnée par la nature des épreuves des concours d'entrée dans les écoles. En mathématiques, les épreuves du concours portent donc sur l'intégralité du programme des deux années, ce qui n'est jamais le cas à l'université, ni au lycée d'ailleurs. Nous faisons l'hypothèse que ceci suppose le développement d'une organisation praxéologique mathématique permettant aux étudiants, en toute autonomie, de convoquer à bon escient et d'utiliser les praxéologies pertinentes, selon les questions à traiter (Castela, 2011). Ceci suppose en particulier la construction de savoirs pratiques relatifs aux différentes techniques[1]. Nous nous centrons dans ce qui suit sur les liens entre l'organisation institutionnelle de l'étude en classes préparatoires et l'organisation personnelle, afin de cerner en quoi ces institutions assurent concrètement l'étayage des étudiants. Nous recherchons des dispositifs mis en place par l'institution, en particulier par les professeurs, qui contribuent à faire évoluer les modes de travail personnel des étudiants et qui pourraient éventuellement être transposés à l'université.

Les CPGE se répartissent en trois filières : scientifique (S), économique et commerciale (EC) et littéraire (L). La filière EC qui prépare les étudiants aux écoles de commerce, et sur laquelle nous nous centrons ici, se décline en trois voies : la voie

[1] Castela (2011) affirme que les savoirs pratiques relèvent *« des savoirs sur le fonctionnement mathématique d'une part et d'autre part des savoirs concernant l'activité de résolution proprement dite, considérée comme dotée de traits relativement invariants, d'une situation de recherche à l'autre et d'un sujet à l'autre »* (p. 37). Selon elle, ces savoirs *« débordent largement du cadre du savoir savant »* (2000, p. 331), ils ne sont pas totalement pris en charge par le savoir essentiellement théorique explicitement enseigné et institutionnalisé. Ainsi, ils *« n'apparaissent quasiment pas en tant qu'enjeux explicites de l'enseignement alors que leur acquisition est une condition de la réussite »* (ibidem, p. 331).

économique (ECE) accueille des élèves issus principalement du baccalauréat Économique et Social, la voie technologique (ECT) est destinée aux élèves issus du baccalauréat Sciences et Technologies du Management et de la Gestion, et la voie scientifique (ECS) majoritaire est réservée aux élèves issus du baccalauréat Scientifique. Notre recherche porte sur la première année de classes préparatoires aux écoles de commerce (filière EC) de voie Scientifique[2].

CADRE DE REFERENCE

Nous nous intéressons aux institutions que sont les classes préparatoires aux écoles de commerce, à leur fonctionnement et leur rôle, ainsi qu'à l'assujettissement des étudiants, sujets de ces institutions particulières, et son effet sur leurs activités, leurs façons de faire et de penser. Nous avançons l'hypothèse qu'à travers leur mode de fonctionnement, ces institutions aident leurs étudiants à construire un nouveau mode de travail adapté aux exigences des classes préparatoires. Pour cette dimension, nous faisons d'abord référence aux fondements de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD), en considérant le poids et l'action des institutions (Chevallard, 1992, 2003). Nous adoptons la définition de Chevallard (2003) qui décrit une institution *I* comme « *un dispositif social total, qui peut certes n'avoir qu'une extension très réduite dans l'espace social (il existe des "micro-institutions"), mais qui permet – et impose – à ses sujets, c'est-à-dire aux personnes x qui viennent y occuper les différentes positions p offertes dans I, la mise en jeu de manières de faire et de penser propres* » (p. 82). Pour notre étude, nous considérons d'abord à un niveau global l'institution CPGE au sein de laquelle les individus viennent occuper les positions d'étudiant, de professeur, de colleur[3], d'administratif… Au niveau local, nous nous focalisons en premier lieu sur l'enseignement des mathématiques dans les sous-institutions qui correspondent à la filière EC et ensuite à la voie ECS. En second lieu, nous considérons l'enseignement des mathématiques dans l'institution que représente chaque établissement. Enfin, nous nous penchons sur l'institution classe de chaque professeur avec deux positions essentielles, celles de professeur et d'étudiant.

Quelle que soit l'institution en question, il est nécessaire de mettre en avant l'idée de stabilité de l'organisation, soulignée notamment par Darmon (2013) et Rauscher (2010). Darmon met en évidence des dispositifs institutionnels partagés dans les CPGE, qui mettent les étudiants au travail et les encadrent : « *l'institution préparatoire contrôle par redondance, par la répétition d'une même injonction ou d'un faisceau remarquablement parallèle d'injonctions homologues. Divisés, voire en lutte explicite sur bien des points, les professionnels de l'institution préparatoire donnent néanmoins à voir une entreprise institutionnelle unifiée et concordante dans*

[2] Pour un descriptif détaillé de la structure et du fonctionnement des CPGE, se référer à Farah (2015, pp. 27-35).

[3] Une colle est un dispositif d'évaluation spécifique aux classes préparatoires. Elle a lieu toutes les deux à trois semaines. Elle prend en mathématiques la forme d'une interrogation orale d'une heure par groupe de trois étudiants qui travaillent individuellement mais simultanément au tableau pour répondre à des questions de cours et/ou résoudre des problèmes proposés par un professeur présent appelé "colleur". Une colle de mathématiques peut admettre des variantes de forme et de contenu selon les voies et/ou les lycées.

sa volonté d'émulation des troupes scolaires » (p. 60). Conformément aux hypothèses de la TAD, Rauscher souligne que les sujets de l'institution CPGE en position de professeur (de chaque discipline, donc en particulier de mathématiques) partagent majoritairement des traits communs d'origine et d'expérience. Ils forment ainsi un groupe social particulier, résultat de plusieurs mécanismes en interaction, et prennent des décisions en tant qu'équipe. Ceci permet de réduire la variabilité des classes qui reste alors contrôlée malgré les différences personnelles entre les professeurs. Cette continuité et stabilité postulées des CPGE, au niveau des normes du métier de professeur de CPGE et au niveau de l'organisation d'étude créée par chaque professeur, nous permettent d'envisager l'influence de l'institution globale CPGE sur le travail des étudiants.

Par ailleurs, la TAD ne s'est pas vraiment jusqu'à présent attardée sur la façon dont les institutions exercent ces actions d'assujettissements et de soutien au travail personnel des étudiants. En effet, selon Chevallard (2003), lorsqu'un individu *x* vient occuper une position *p* au sein d'une institution *I*, on dit qu'il est assujetti à - « *c'est-à-dire à la fois soumis à et soutenu par* » (p. 82) - l'institution dont il devient un sujet. En d'autres termes, l'institution *I* soumet les activités de ses sujets à un ensemble de contraintes, règles, normes et rituels qui précise les attentes institutionnelles envers les individus agissant au sein de *I*. Les individus doivent satisfaire ces attentes en adaptant, au moins en partie, leurs actions aux exigences institutionnelles. Or, la TAD ne s'est pas intéressée aux processus par lesquels tous les rapports des sujets entrant dans une institution *I* se transforment de façon à être conformes aux attentes de cette dernière. En particulier, si la TAD prend en compte des configurations particulières de transmissions de praxéologies mathématiques, elle ne s'occupe pas des dispositifs qui aident les sujets à adapter leurs rapports à des objets non-disciplinaires. Ceci permettrait de comprendre comment les institutions peuvent atteindre leurs enjeux d'apprentissage "pédagogiques" ou "éducatifs", en plus des objectifs didactiques disciplinaires. Ainsi, notre cadre s'étend au-delà de celui de la TAD, pour incorporer le travail en sociologie mené par Darmon (2013) qui permet d'éclairer certains aspects importants du fonctionnement et du rôle de l'institution CPGE. Darmon définit un type particulier d'institution à partir des fonctions socialisatrices de l'institution CPGE que, dans une perspective bourdieusienne, elle étudie comme un lieu de « sociogenèse des habitus », c'est-à-dire comme institution de fabrication d'un type particulier de personnes. Selon elle, les CPGE, ces institutions « *enveloppantes* », travaillent les élèves, elles les forment et transforment à travers des « *processus de socialisation institutionnelle préparatoire* » (p. 16). Ainsi, elle analyse les différents dispositifs du fonctionnement quotidien qui permettent à l'institution d'exercer ses effets sur les élèves.

Du point de vue de la TAD, nous pouvons faire appel à l'échelle de codétermination didactique, notamment en différenciant les dispositifs qui relèvent de l'organisation globale de l'institution CPGE, soit au niveau Ecole, les dispositifs ou types de tâches qui sont communs aux CPGE et aux disciplines, qui concernent les conditions et contraintes au niveau Pédagogie, et enfin les éléments spécifiques aux savoirs au niveau de la Discipline mathématique. Darmon considère qu'afin de faire en sorte que l'assujettissement ait lieu dans toute l'institution, chez tous les professeurs, l'institution CPGE produit des techniques pour un certain nombre de types de tâches qui ne sont pas didactiques et qui ne visent pas des enjeux d'instruction, pour lesquelles le changement de rapport peut s'exercer à un niveau didactique ou à niveau plus générique. Elle s'intéresse à un certain type de processus d'assujettissement à travers l'analyse des différents dispositifs du fonctionnement quotidien qui permettent

à l'institution d'exercer ses effets sur les élèves, en les transformant mais aussi en les soutenant. Ainsi, Darmon repère des techniques (disciplinaires) de surveillance, de sanction, d'examen et d'empressement[4]. La surveillance de la conduite et de l'assiduité est d'abord assurée par l'administration et les enseignants à travers le contrôle des absences et des retards, et ensuite par les colleurs. Les sanctions portant sur la conduite, le manque de sérieux ou l'inadéquation du travail ont une visée stratégique de mise au travail des élèves plutôt qu'une approche punitive. Il s'agit en effet de « *sanctions normalisatrices* » (p. 46) qui assurent l'efficacité de la surveillance. L'examen en classes préparatoires suit le travail de chaque élève individuellement ; sa forme la plus visible est le rang du classement. Il vise une singularisation et une différenciation des élèves, sans toutefois se limiter aux questions scolaires puisqu'il porte aussi sur le comportement et s'intéresse à l'élève comme une personne qui peut être en souffrance. L'institution CPGE a aussi recours à une quatrième technique de contrôle : « *la mise sous pression d'une population qu'il ne s'agit pas tant de faire obéir que de faire travailler* » (p. 51). En effet, les classes préparatoires mettent les élèves sous pression afin d'assurer leur formation intellectuelle et leur réussite aux concours. Il existe un ensemble de techniques « *qui constitue ce qu'on peut appeler un travail de l'empressement : faire en sorte que la pression, que le rythme se maintiennent* » (p. 54). Les dispositifs de surveillance, sanction et examen contribuent à cette mise sous pression en même temps qu'ils façonnent les modes de travail et informent l'enseignant sur les élèves. Il s'avère que le processus d'assujettissement se réalise à travers une prise en compte des individus, ce qui n'est pas un cas général et semble fortement paradoxal. En effet, Darmon met l'accent sur le fait que l'institution des classes préparatoires travaille à adoucir la violence préparatoire tout en en étant « *soucieuse* » (p. 73) du bien-être des étudiants. Elle décrit alors l'institution des classes préparatoires comme étant « *puissante mais non totalitaire, violente mais soucieuse du bien-être de ses membres, elle opère en individualisant à l'extrême plutôt qu'en homogénéisant, renforçant de fait sa prise sur les individus qui en sont membres* » (pp. 28-29).

Ces résultats convergent avec ceux de Daverne et Dutercq (2013) qui s'intéressent aux stratégies des lycéens et des élèves de CPGE, visant à assurer leur réussite scolaire, ainsi qu'aux approches pédagogiques des établissements et enseignants qui les accueillent. Les auteurs cherchent d'abord à déterminer qui sont les "bons élèves" de CPGE de nos jours qu'ils décrivent comme « *une nouvelle population de bons élèves, motivés, intéressés, mais forts éloignés du modèle d'excellence* » (p. 7), en les comparant notamment avec les "héritiers" de Bourdieu. Ensuite, ils se penchent sur les exigences des CPGE ainsi que sur les conditions de travail des élèves qui intègrent ces filières sélectives, en se focalisant sur les relations "démystifiées" qui se développent entre les élèves et les professeurs, afin de repérer ce qui favorise la réussite des bons élèves. Daverne et Dutercq mettent en avant la « *pression regrettée et acceptée* » (p. 90) que subissent les préparationnaires, ainsi que l'adaptation individualisée de l'enseignement, caractéristiques qui permettent une « *socialisation par conversion* » (p. 8). Ils s'intéressent en particulier aux dispositifs institutionnels qui permettent de mettre les élèves au travail tout en assurant un encadrement personnalisé et un accompagnement psychologique. Ils soulignent le fait que les professeurs font preuve d'une grande flexibilité et d'adaptation face à un public qui évolue rapidement avec les politiques de démocratisation de l'éducation, pour devenir

[4] Darmon emprunte les trois premiers termes à M. Foucault. Il faut préciser que "disciplinaire" ici ne fait pas référence à UNE discipline mais à LA discipline.

de plus en plus hétérogène en termes de bagage académique mais aussi de milieu social.

Nous avons cherché à développer la dimension institutionnelle de notre recherche du point de vue des professeurs impliqués dans l'étude. Nous considérons alors deux niveaux : le premier concerne la façon dont les professeurs sont assujettis à l'institution CPGE et intériorisent les déterminations qui en sont issues ; le deuxième concerne la classe de mathématiques de chaque professeur, institution locale que ce dernier crée avec des dispositifs stables que nous cherchons à identifier. Nous avançons que les assujettissements aux CPGE créent un cadre dans lequel chaque professeur dispose d'une autonomie où il peut donner libre cours à son individualité, celle-ci étant toutefois limitée par la culture commune des professeurs de classes préparatoires mise en évidence par Rauscher. En prenant appui sur l'ouvrage de Darmon, sur son analyse d'un certain type d'institutions et d'un certain type de processus d'assujettissement, nous mettons en avant l'analyse du fonctionnement de l'institution CPGE afin d'explorer comment s'exerce sa fonction socialisatrice. Son travail nous amène à prendre en compte des formes de dispositifs qu'une trop forte centration sur les dispositifs contraignants nous aurait amenée à négliger. Nous formulons alors la question de recherche suivante que nous traitons dans ce texte : par quels dispositifs institutionnels, à deux niveaux d'une échelle d'institutions, CPGE d'une part, classe d'un professeur d'autre part, s'exerce la transformation du mode de travail personnel, ces dispositifs étant recherchés dans les catégories des techniques définies par Darmon ?

METHODOLOGIE

Pour répondre à cette question, nous nous appuyons essentiellement sur une analyse de données qualitatives collectées auprès de deux professeurs de mathématiques enseignant en première année de classes préparatoires ECS dans deux lycées de région parisienne. Il s'agit d'abord d'entretiens semi-structurés menés avec ces deux professeurs pour lesquels des questions spécifiques à chacun ont été construites à partir de nos questionnements et hypothèses concernant sa classe. Ces entretiens visent essentiellement à obtenir des précisions concernant les dispositifs institutionnalisés dans les classes. À cela s'ajoutent deux questionnaires que les professeurs ont complétés : le premier inspiré de celui de la thèse de Rauscher (2010) concerne leur parcours professionnel et le choix d'enseigner en CPGE ; le second inspiré de l'ouvrage de Darmon (2013) porte sur les dispositifs d'évaluation et d'empressement que les professeurs instaurent dans leurs classes respectives afin de mettre les étudiants au travail, ainsi que sur les façons d'adoucir la violence préparatoire en termes de soutien ou réconfort que les professeurs apportent aux étudiants.

Il faut cependant préciser que notre étude comportait initialement une composante étudiants importante dont nous ne rendons pas compte dans ce texte, mais sur laquelle nous nous appuyons afin d'élaborer certaines hypothèses et construire les outils destinés aux professeurs. En effet, en raison de plusieurs obstacles du terrain rencontrés au cours de notre recherche doctorale, nous avons été obligée de repenser notre problématique, initialement centrée sur le travail personnel des étudiants, afin de nous pencher sur les pratiques des professeurs. Nous avions en premier lieu recueilli

des données concernant le travail personnel des étudiants encadrés par les deux professeurs en question, ainsi que l'organisation et le déroulement du cours de ces derniers, les épreuves qu'ils mettent en place et les diverses ressources qu'ils fournissent aux étudiants. Pour ce faire, nous avons eu recours à des questionnaires étudiants de type pré-post afin de produire des faits quantitatifs sur les classes, ainsi qu'à divers échanges avec les étudiants (discussions informelles, entretiens et échanges par mails). Ainsi, nous adoptons une approche particulière en regardant les pratiques enseignantes à travers les lunettes des informations obtenues grâce aux divers outils destinés aux étudiants.

Une limite évidente dont nous sommes consciente est que nous n'avons pas analysé de séances effectives de cours afin de valider les informations obtenues à travers les divers échanges avec les étudiants et les professeurs concernant les pratiques, discours et dispositifs de ces derniers. Cette limite est avant tout imputable aux contraintes temporelles d'un travail de thèse, d'autant plus que nous ne cherchions initialement à approcher les pratiques des professeurs que pour éclairer les résultats du questionnaire étudiant. Cependant, nous avons par la suite réussi à nous rapprocher des pratiques des professeurs en dépassant l'obstacle du déclaratif grâce à l'analyse de notes de cours de quelques étudiants sélectionnés. En effet, dans une dernière phase de notre étude, nous avons cherché à confirmer les assertions des professeurs concernant leurs cours et l'organisation de l'étude dans leurs classes. Nous avons alors cherché à reconstituer la version la plus fidèle possible du texte écrit et de la partie orale du cours entier de chaque professeur pour deux chapitres de mathématiques en nous intéressant particulièrement à la structure du texte du cours et à ce qui transparaît du processus d'étude du cours en classe institué par le professeur. Notre objectif était de rechercher des indications sur ce que font ou disent les professeurs pendant le cours pour influencer le travail des étudiants. Nous sommes partie des polycopiés de cours des professeurs que nous avons complétés à travers les notes des étudiants. Nous devons préciser que nous ne pouvions être certaine de la complétude des notes des étudiants, même si elles semblaient être exhaustives et si les étudiants sélectionnés étaient désignés par leurs professeurs comme preneurs de notes. Néanmoins, le degré de proximité entre les notes des divers étudiants sélectionnés laissait supposer que la quasi-totalité vient du professeur. Nous postulons que les mots identiques proviennent de ce qui est écrit puis recopié du tableau, tandis qu'une même idée représentée dans deux productions avec des formulations légèrement différentes vient d'un commentaire au moins oral de la part du professeur. De plus, nous ne pouvions pas savoir si les étudiants avaient bien noté tout ce qui a été dit à l'oral.

PRINCIPAUX RESULTATS

Nous avons cherché à approcher les pratiques des enseignants, en nous intéressant notamment aux dispositifs qu'ils mettent en place et à leur « *discours méta* »[5] (Robert & Robinet, 1993, p. 1), à partir des informations recueillies grâce aux entretiens et questionnaires qui leur sont destinés. Nous devons préciser que nous avons peu

[5] Selon Robert et Robinet (1993), le discours du professeur contient des éléments dits méta sur les mathématiques et sur les façons de faire et d'apprendre les mathématiques.

d'éléments qui permettent de déterminer quelle est la proximité des propos des professeurs avec ce qui a effectivement eu lieu en classe, hormis ce qui converge avec les déclarations de leurs étudiants dans certain cas. Cependant, nous notons une cohérence interne forte dans le discours de chaque professeur. Il s'avère que les professeurs cherchent à mettre les étudiants au travail et à façonner leurs modalités d'étude à travers plusieurs dispositifs collectifs qu'ils instaurent pour la classe. De plus, ils suivent de près le travail de chaque étudiant à travers des dispositifs individualisés. Grâce à ces derniers, les professeurs développent et appliquent divers types de techniques d'empressement. Cette mise sous pression des étudiants a pour objectif d'assurer leur formation intellectuelle et leur réussite aux concours, mais elle est modérée grâce à un aspect relationnel très présent.

Le cours du professeur et le suivi au-delà

L'organisation et le déroulement du cours du professeur constituent le premier aspect de l'encadrement du travail des étudiants. Nous avons repéré plusieurs dispositifs communs aux deux professeurs, que nous pouvons attribuer à l'institution CPGE de voie ECS. Pendant l'explication du cours de mathématiques en classe, les professeurs essayent de retenir l'attention des étudiants en encourageant leur participation active dans l'élaboration du cours et en les incitant à poser des questions fréquemment. Le cours est complété et illustré par des exemples et exercices travaillés en classe ou à la maison puis corrigés en classe. Les séances de cours sont aussi l'occasion de continuer le travail entamé lors des Travaux Dirigés (TD), assurés par le même professeur, lorsque cela est nécessaire. Ces TD permettent aux étudiants de travailler des exercices au sein d'un groupe à effectif réduit, favorisant ainsi les échanges avec le professeur ainsi qu'avec les camarades. Les deux professeurs en question ont recours à un polycopié qui constitue la base de l'explication du cours et qu'ils distribuent systématiquement ou occasionnellement, selon les séances, aux étudiants. Selon le professeur, la promotion ou le chapitre, ce polycopié peut être complet ou abrégé, sachant que chaque professeur modifie son polycopié régulièrement afin de l'adapter au niveau des étudiants et à leurs capacités de suivi (concentration, compréhension et prise de notes). De même, le rythme du cours est ralenti ou accéléré en conséquence.
En plus du temps consacré en classe à l'explication du cours et la résolution et correction d'exercices, les professeurs se montrent toujours disponibles pour aider les étudiants en dehors de la classe. Ils sont prêts à répondre aux questions, fournir des explications et proposer, voire même corriger, un travail supplémentaire à ceux qui en demandent. Toutefois, les deux professeurs disent donner suffisamment de travail à leurs yeux (des fiches d'exercices régulières ainsi que des fiches supplémentaires dans certains cas avec leurs corrigés) et déconseillent le recours aux ressources complémentaires notamment par manque de temps. De plus, les professeurs organisent des cours de soutien hebdomadaires, facultatifs ou obligatoires selon le cas, en espérant ainsi garantir que les étudiants reçoivent toute l'aide envisageable au sein de l'institution.

Les discours constants du professeur sur la façon de travailler des étudiants

À travers les discours des professeurs, nous avons repéré plusieurs éléments d'aide communs aux deux professeurs, à des niveaux plus ou moins génériques. Nous conjecturons que ces éléments de discours sont intériorisés par plusieurs étudiants

puisque nous les retrouvons explicitement dans les échanges avec eux, ce qui met ainsi en avant leur intégration par ces derniers.
Une première catégorie d'éléments concerne des façons de travailler attendues des étudiants et communes aux deux professeurs de la voie ECS. Par exemple, les professeurs encouragent les étudiants à travailler régulièrement afin d'apprendre leur cours et de préparer les exercices donnés (pour les TD ou les séances de cours normales) ; ils insistent beaucoup sur ce point du début à la fin de l'année. Ou encore, ils les invitent à privilégier l'écoute à la prise de notes pour les commentaires qu'ils font oralement pendant le cours, en expliquant que tous les éléments mathématiques importants à retenir sont fournis dans le polycopié ou à travers ce qui est noté au tableau. De plus, les professeurs donnent des instructions très précises concernant la préparation des colles ou des Devoirs Surveillés (DS - soit les épreuves notées réalisées en classe), en termes de temps de préparation, de ressources à utiliser, voire même de démonstrations ou d'exercices à préparer dans certains cas.
Ensuite, nous avons identifié des éléments d'aide communs qui se rapportent à des savoirs pratiques relatifs aux techniques, qui « *peuvent contribuer à faire gagner des connaissances aux élèves en relation avec la tâche attendue* » (Robert & Vandebrouck, 2014, p. 252). Par exemple, les professeurs expliquent régulièrement aux étudiants la façon de procéder pour apprendre un cours de mathématique. Ils insistent sur l'importance d'une lecture active et réflexive suivie d'une restitution de tous les éléments importants du cours, de préférence par écrit. De plus, ils mettent en avant le rôle de la décontextualisation dans l'apprentissage mathématique. Ils soulignent autant l'importance des résultats qu'apportent les démonstrations que l'utilité de leurs éléments génériques de raisonnement. Ils mettent aussi l'accent sur les techniques utilisées dans l'élaboration des exercices (types). Pour les professeurs, il s'agit éléments que les étudiants doivent être capables d'acquérir et de réinvestir dans d'autres situations. Par ailleurs, les professeurs insistent sur la nécessité de multiplier les essais face aux difficultés lors de la résolution de tout exercice jusqu'à la maîtrise. Ils encouragent les étudiants à éviter de limiter leur travail de retour sur les exercices déjà résolus à une simple lecture de la solution, en favorisant toujours une résolution par écrit qui permet une validation de l'apprentissage. Nous pouvons faire ici référence à la notion « *d'aides constructives* » (Robert, 2008, p. 51) que proposent les professeurs aux étudiants concernant l'étude du cours, le travail autour des exercices et la décontextualisation dans les démonstrations et exercices, notamment lors de la préparation des DS, mais aussi pour le travail ordinaire entre deux séances de mathématiques.

Le discours technologique du professeur sur les mathématiques

Le discours d'un des deux professeurs a la particularité de contenir de nombreux éléments technologiques, avec l'étendue que donne Castela à la notion de technologie de la TAD (Castela, 2011, ch.1). Nous les repérons grâce à l'analyse de notes de cours des étudiants de cette classe. Nous nous situons alors au niveau local de la classe de ce professeur. En reconstituant le cours de ce professeur, nous avons observé que les notes des étudiants ne reprennent pas le contenu du polycopié ; elles le complètent plutôt par certaines démonstrations manquantes, par d'autres exemples, en particulier comme substitut à certaines démonstrations, par les solutions des exercices et applications proposés dans le polycopié, ainsi que par plusieurs remarques qui ne concernent pas uniquement le savoir théorique. Nous nous intéressons

particulièrement aux éléments qui constituent ces remarques et qui nous permettent de restituer les gestes relevant du discours technologique du professeur.
Certains de ces éléments, directement liés aux contenus mathématiques, jouent le rôle d'un catalyseur dans l'acquisition des savoirs théoriques. Nous retenons par exemple les changements de registres, les allers-retours non-linéaires entre définitions et propositions, le recours aux exemples numériques pour illustrer toutes les notions du cours et les liens établis entre des thèmes mathématiques différents. Le professeur a recours à ces derniers soit pour motiver l'introduction d'un objet de savoir, soit pour repérer des analogies de notions et de résultats avec des chapitres différents antérieurs ou annoncer ceux des chapitres postérieurs. Par ailleurs, d'autres éléments, essentiellement des éléments en rapport avec des savoirs pratiques que l'on pourrait qualifier de "discours méta", se traduisent par des phrases dont les fonctions sont diversifiées : inciter les étudiants à la réflexion ; annoncer des éléments de technologie pratique à suivre ; attirer l'attention des étudiants sur des points du cours ou des exercices en les plaçant sur une échelle d'importance (se référant aux mathématiques mais aussi aux épreuves des concours) ; motiver l'intérêt d'une notion ou d'une technique et faciliter sa mise en œuvre afin d'éviter des erreurs fréquentes ; évaluer une technique par comparaison avec d'autres ; signaler des éléments de généricité et de décontextualisation d'une technique ; fournir des moyens pour contrôler la mise en œuvre d'une technique, ainsi que des moyens mnémotechniques qui facilitent la mémorisation de définitions et formules. Ces divers éléments confirment l'hypothèse de Castela (2011) qui postule « *qu'au moins dans certaines classes, il est impossible que le professeur taise totalement les enjeux d'apprentissage visés par le curriculum praxique. Il doit pouvoir développer un discours relatif à l'utilisation des techniques qui lui permette pour le moins de donner une idée aux élèves des types de connaissances pratiques qu'ils peuvent envisager de construire* » (p. 50).
Nous illustrons l'emploi de ces éléments par le professeur à travers un extrait de son polycopié sur le chapitre des matrices complété par les notes des étudiants que nous analysons. Le professeur commence par définir ce qu'est une matrice (partie 1) et présenter les différentes matrices particulières (partie 2 : matrices nulles, matrices identité, matrices diagonales, matrices triangulaires, matrices transposées). Il s'intéresse ensuite au calcul matriciel (partie 3), en définissant d'abord un espace vectoriel de matrices (sous-partie 3.1) puis s'attarde sur le produit de deux matrices (sous-partie 3.2), que nous présentons ci-dessous. Dans ce qui suit, nous adoptons une disposition en deux colonnes, avec dans la première les extraits du polycopié du professeur, dans la deuxième les extraits des notes des étudiants (si pertinents), suivies de nos commentaires.

3.2 produit de deux matrices

DÉFINITION 8 *Soient* $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. *Le produit de* A *par* B, *noté* $A \times B$ *ou* AB, *désigne la matrice* P *de* $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ *de terme général :*

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

obtenue dans la pratique comme produit des lignes de A *par les colonnes de* B :

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & \dots & L_1 \times C_n \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & \dots & L_2 \times C_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_q \times C_1 & L_q \times C_2 & \dots & L_q \times C_n \end{pmatrix}$$

où $L \times C = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_p \end{pmatrix} \times {}^t\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{pmatrix} = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \dots + \ell_p c_p$.

Pour cette sous-partie « 3.2 Produit de deux matrices », le titre noté par les étudiants, « *calcul pratique du produit de 2 matrices* », annonce d'ores et déjà les différents éléments de technologie pratique que nous retrouvons dans la suite.
Le professeur fait des allers-retours entre la définition et la proposition qui suit de façon non-linéaire, en intégrant des exemples numériques.

PROPOSITION 2

1. *Soit* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   On a $A \times I_p = A = I_n \times A$ *et* $A \times 0_p = 0_n \times A = 0_{n,p}$.

2. *pour* B *et* C *matrices de tailles « compatibles », on a :*
   $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$ *(sans modifier l'ordre !)*
   $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ *et* $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
   $\lambda.(A \times B) = (\lambda.A) \times B = A \times (\lambda.B)$

3. ATTENTION !
   On n'a pas en général de lien entre AB *et* BA.
   $AB = 0$ *n'entraine pas la nullité d'une des deux matrices.*
   $AB = AC$ *ne se simplifie pas en général.*

La remarque « Attention… » sert à faciliter l'emploi de la technique en permettant d'éviter une erreur fréquente.

	$A \times B = \begin{pmatrix} \overleftarrow{1 & 2 & 3} \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times\updownarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ Si les $\leftrightarrow\updownarrow$ ne sont pas de même taille, c'est impossible. (Suggestion : préparer lignes – colonnes) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 \\ L_2C_1 & L_2C_2 \end{pmatrix}$ $L_1C_1 = 1 \times 1 + 2 \times 0 + 3 \times 2$ $A \times B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 16 & 22 \end{pmatrix}$
Pour illustrer la définition du produit de deux matrices exprimée avec un registre algébrique puis un registre tableau, le professeur a recours à un exemple. Nous nous intéressons à la forme de sa présentation et les commentaires qui l'accompagnent. Nous pouvons voir qu'il s'agit ici de faciliter l'emploi de la technique relative au type de tâche « calculer un produit de deux matrices » avec efficacité.	

Exercice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer AB et BA. Commenter.	
Suite au calcul de ce premier produit, l'exercice suivant est traité. Cet exercice permet d'illustrer certains points de la proposition 2 qui n'est pas démontrée.	

	L'exercice est suivi de la formulation des résultats suivants dans les notes des étudiants : On constate que AB≠BA. Attention à ne pas modifier l'ordre dans les produits. ex : ABA ne vaut pas A^2B On constate que $AB = 0 \nRightarrow$ (A=0 ou B=0).
La remarque « Attention… » sert à attirer l'attention des étudiants sur ce point (il s'agit d'une mise en relief au sein d'un texte), ainsi qu'à faciliter l'emploi de la technique en permettant d'éviter une erreur fréquente.	

DÉFINITION 8 *Soient $A \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Le produit de A par B, noté $A \times B$ ou AB, désigne la matrice P de $\mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$ de terme général :*

$$p_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

obtenue dans la pratique comme produit des lignes de A par les colonnes de B :

$$AB = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \dots \\ L_q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & \dots & C_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \times C_1 & L_1 \times C_2 & \dots & L_1 \times C_n \\ L_2 \times C_1 & L_2 \times C_2 & \dots & L_2 \times C_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_q \times C_1 & L_q \times C_2 & \dots & L_q \times C_n \end{pmatrix}$$

où $L \times C = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \dots & \ell_p \end{pmatrix} \times {}^t\begin{pmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_p \end{pmatrix} = \ell_1 c_1 + \ell_2 c_2 + \dots + \ell_p c_p$.

Le professeur revient ensuite sur la définition 8 du produit deux matrices.

On prend A et B $\in$ $M_{p,n}(IK)$.

On effectue le produit *AB*.

On a besoin des lignes de *A* et des colonnes de *B*.

On calcule

$$\begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_3 \end{pmatrix} \times (C_1, C_2, \dots, C_n) = \begin{pmatrix} L_1C_1 & L_1C_2 & \dots & L_1C_n \\ L_2C_1 & L_2C_2 & \dots & L_2C_n \\ L_qC_1 & L_qC_2 & \cdots & L_qC_n \end{pmatrix}$$

On constate que AB $\in$ $M_{q,n}(IK)$.

Le coefficient de *AB* en ligne i colonne j est L_iC_j

$$L_iC_j = (a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,p}) \times \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{p,j} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i,1} \times b_{1,j} + a_{i,2} \times b_{2,j} + \cdots + a_{i,p \times b_{p,j}}$$

$$(AB)_{i.j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$$

(Formule à savoir, 1 minute maxi

Le professeur cherche à expliciter la « *formule pour les coefficients de AB* » (de la définition 8) en proposant une étude qui joue sur plusieurs registres. Nous repérons alors, entre le polycopié du professeur et les notes des étudiants, quatre registres différents utilisés pour la formule L_iC_j : produit colonne×ligne, ligne×^{t}(colonne), formule littérale avec des pointillés et formule avec le symbole de la somme Σ.

Ensuite, il place cette formule dans une sorte d'échelle d'importance en pointant qu'il faut la connaître, mais il rappelle aussi qu'il faut surtout être capable de la retrouver, ce qu'est censé permettre de faire tout le travail réalisé sur les ostensifs. Il s'agit à la fois d'un savoir sur le savoir dans le cadre de l'institution locale mais aussi dans le cadre du concours en CPGE.

PROPOSITION 2

1. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.*
   On a $A \times I_p = A = I_n \times A$ et $A \times 0_p = 0_n \times A = 0_{n,p}$.

Le professeur revient sur la démonstration du premier point de la proposition 2 qui est accompagnée d'un exemple numérique et de la remarque suivante : *« règle entre nous : $M_{n,p}(IR) \times M_{p,q}(IR)$ donne $M_{n,q}(IR)$ »*.

Cette remarque ne renvoie pas à une notation mathématique légitime, mais plutôt à un savoir pratique spécifique de l'institution que constitue la classe de ce professeur. Elle a pour fonction de faciliter la mise en œuvre par les étudiants de la technique pour le type de tâches écrire de manière générique les indices des termes du produit. Nous pouvons aussi dire qu'elle sert à faciliter la mémorisation de la définition du produit. Cela paraît donc être un moyen mnémotechnique pour des énoncés sur les matrices de dimensions génériques.

Comme nous pouvons le voir dans cet extrait que nous prenons pour exemple, le discours de ce professeur lui permet d'accompagner ses étudiants dans l'étude du polycopié pendant la séance en y mettant du relief. Nous considérons qu'il suggère ainsi aux étudiants des gestes d'étude d'un cours théorique qu'ils pourraient reprendre à leur compte pour étudier des cours de manière autonome. Nous citons les principaux gestes repérés : particulariser (à travers des exemples faciles, y compris pour les démonstrations que le professeur fait parfois seulement comme préalable à la généralisation par exemple), jouer sur les registres (pour expliciter ou simplifier une notion), faire des liens avec ce qui précède et aussi dans un travail *a posteriori* à plus long terme avec ce qui suit (domaines d'application). Cependant, nous n'avons aucune trace de reprise effective de ces suggestions dans les déclarations des étudiants sur leur travail, ce qui peut laisser penser qu'ils n'ont pas conscience de cette dimension. Toutefois, nous ne pouvons pas savoir s'ils réinvestissent ce genre de pratiques puisque nous ne les avons pas regardés travailler en autonomie. De plus, nous n'avons aucune indication que ce professeur tient réellement un discours qui explicite cette dimension puisqu'il ne nous en parle pas et que nous n'en retrouvons pas trace dans les notes des étudiants.

Les dispositifs d'évaluation

Par ailleurs, afin de vérifier que les étudiants effectuent le travail demandé autour du cours et des exercices et afin d'identifier leurs lacunes et difficultés avant les évaluations notées, les professeurs ont recours à des techniques de contrôle individualisées informelles pendant les séances de cours et/ou de TD. En termes de niveau d'institution en question, on pourrait les situer au niveau de la voie ECS, voire même de la filière EC. Les professeurs utilisent souvent des interrogations orales concernant le cours en interpellant des étudiants aléatoirement ou en choisissant ceux qui bavardent ou décrochent. De plus, lorsque les étudiants travaillent les exercices en classe, les professeurs circulent parmi eux afin de voir ce que fait chacun, d'évaluer son niveau de compréhension et de l'aider en cas de besoin. Ensuite, les professeurs encouragent les étudiants à s'engager dans des discussions autour des solutions des exercices avant de les corriger eux-mêmes ou de solliciter un étudiant pour le faire. Un professeur se distingue de l'autre par l'importance particulière qu'il accorde à la préparation des exercices. Ainsi, il a recours aux passages périodiques au tableau, non notés mais très valorisés, par lui-même et en conséquence par les étudiants, ainsi qu'au ramassage non annoncé du travail des étudiants lorsqu'il détecte un manque de préparation afin d'inciter ces derniers à maintenir un travail régulier.
Les professeurs disposent de plusieurs types de dispositifs, plus "formels" et institutionnalisés au niveau de l'institution globale CPGE, qui leur permettent d'évaluer le degré d'investissement et de compréhension des étudiants. Il s'agit d'abord des évaluations écrites de tous genres : brèves interrogations écrites portant sur le cours que les professeurs organisent surtout en début d'année afin de pousser les étudiants à apprendre leur cours mais dont ils ne réussissent pas à maintenir le rythme en cours d'année ; DS à un rythme moyen mensuel ; concours blancs bi ou tri-annuels cumulatifs et portant sur des épreuves de type concours. De plus, un professeur met en place un dispositif particulier d'interrogations portant sur les corrections des DS. Il s'agit pour les étudiants de retravailler deux ou trois questions qu'ils n'ont pas traitées ou qu'ils ont mal réussies à l'issue de chaque DS. Les étudiants disent apprécier largement ces interrogations qui leur permettent de pallier

leurs lacunes. À ces diverses interrogations s'ajoutent des "Devoirs Maison", en général mensuels, et pour lesquels les professeurs encouragent le travail collaboratif.
Enfin, les professeurs ont recours aux colles, un dispositif spécifique de l'institution globale des classes préparatoires dont la fonction principale est la préparation à l'oral des concours. La forme "classique" connue pour ce dispositif n'est pas dictée par des instructions officielles, il s'agit plutôt de normes officieuses transmises entre les professeurs et "modernisées" au cours des années pour admettre plus de flexibilité. Une colle de mathématiques "classique" se déroule de la façon suivante. Plusieurs étudiants (trois d'habitude) passent leur colle en même temps. Ils sont devant le tableau qu'ils divisent en plusieurs parties égales. Le colleur dicte une question (différente ou pas) à chaque étudiant qui note l'énoncé au tableau. Ensuite les étudiants travaillent individuellement et en parallèle. Après un moment de réflexion et de résolution, dont la durée n'est pas prédéfinie mais dépend du rythme et l'avancement des étudiants, le professeur commence ses interventions individuelles. Celles-ci visent à interroger les étudiants, les aider en signalant des erreurs à corriger ou en donnant des directives/astuces afin de faire avancer le travail, valider le travail et/ou poser d'autres questions. Le programme d'une colle porte d'habitude sur la dernière leçon (ou chapitre) achevée et/ou celle en cours au moment de la colle. Il inclut les démonstrations vues en cours, les définitions, les formules, les exercices d'application directe du cours et certains exercices plus poussés, en résumé tout ce qui a été fait côté cours pendant les deux semaines précédant la colle. En général, une colle débute par une démonstration courte ou une question de cours (restitution de théorème, propriété, définition…) et enchaîne sur un exercice qui met en application une ou plusieurs notions de cours, inspiré de ceux qui sont traités en classe ou extrait du polycopié de cours le cas échéant. Le nombre de questions ou d'exercices dépend de la rapidité des étudiants et de leur capacité à les traiter. Il faut noter que chaque colleur organise sa colle comme il le souhaite et choisit son contenu (type et complexité des questions posées) dans le cadre du programme annoncé de la colle, en suivant les consignes du professeur de mathématiques. Ainsi, le déroulement des colles peut varier légèrement selon le colleur qui la fait passer. À la fin de la séance, le travail est noté individuellement. Après une colle, le colleur remet un compte-rendu informel écrit ou discute avec le professeur afin de l'informer du niveau de chaque étudiant et de signaler les cas problématiques le cas échéant.
Étant donné sa forme et son fonctionnement, ce dispositif permet aux professeurs d'évaluer les étudiants de manière très personnalisée, habituellement sous le regard d'un professeur externe à la classe. Les nombreux avantages cités par les professeurs et les étudiants convergent. Pour résumer l'essentiel, les colles imposent aux étudiants une régularité dans le travail et l'étude du cours, ce qui peut s'avérer stressant et fatigant pour plusieurs, mais cette pression est considérée comme bénéfique par la majorité. De plus, les séances de colles s'apparentent, selon les étudiants, à des cours particuliers durant lesquels ils découvrent leurs lacunes, posent des questions, obtiennent des explications supplémentaires avec un nouveau point de vue et s'entraînent à travailler des exercices supplémentaires. En plus des divers aspects de l'apprentissage mathématique, ce dispositif se caractérise par ses apports en termes de savoir-faire (gestion de stress, présentation orale, renforcement de la confiance en soi) qui dépassent le cadre de la classe, voire même du lycée, ainsi que par un aspect relationnel que nous évoquons dans la suite. Ainsi, ce dispositif constitue « *un condensé de ce que les CPGE offrent de meilleur en termes de cadre de formation à leurs étudiants* » (Daverne & Dutercq, 2013, p. 182). Il est considéré par de nombreux professeurs comme étant « *le secret de la réussite de la scolarité en classe*

préparatoire » (ibidem, p. 182), et la majorité des étudiants en sortent satisfaits malgré les difficultés et contraintes auxquelles ils peuvent faire face.

Les relations sociales

Il existe plusieurs types de relations sociales qui se développent entre les différents acteurs de l'institution CPGE. Nous nous intéressons en particulier aux relations sociales qu'entretiennent les professeurs avec les étudiants, partant de la conjecture selon laquelle ces relations constituent une composante inhérente aux dispositifs de mise à l'étude instaurés par les professeurs. En effet, en plus d'être engagés pour la réussite académique de leurs étudiants grâce à l'ensemble des dispositifs qu'ils mettent en place pour organiser et contrôler l'étude, les professeurs sont aussi soucieux de leur bien-être physique, social et psychologique. Il semble donc, en reprenant les mots de Darmon (2013), que les professeurs cherchent à obtenir une adhésion de la part des étudiants vis-à-vis de ce qu'ils leur demandent de faire, plutôt qu'une obéissance sur le travail, mais surtout à les faire travailler dans de bonnes conditions, en s'assurant qu'ils "vont bien". Ainsi, les relations professeur-étudiants révèlent un aspect humain dont le but est d'adoucir la violence préparatoire.
Les professeurs s'intéressent aux étudiants comme des personnes qui peuvent être en souffrance. Ils apprennent à les connaître et se penchent sur les détails de leur vie hors-classe (santé, situation familiale, lieu d'hébergement…) qui peuvent avoir des conséquences sur leur performance. Ils cherchent à créer une ambiance saine et amicale au sein de leur classe, en rejetant toute forme de tension ou de compétition. Ils encouragent les plus faibles et les incitent au travail, félicitent les meilleurs et promeuvent la collaboration entre les étudiants pour le travail ainsi que pour le soutien moral. Certes, on pourrait voir dans les différentes déclarations des professeurs sur cette dimension un souci de défendre leur institution, en particulier contre certaines accusations portant sur la pression (voire l'oppression) exercée sur les étudiants, un souci également de donner de leurs pratiques personnelles une image humaine valorisante. Néanmoins, ce qui nous permet d'attribuer une crédibilité à ces propos est la convergence avec les autres travaux sur les CPGE dans lesquels les professeurs insistent sur la nécessité de préserver la dimension humaine, notamment pour ne pas perdre des étudiants en cours d'année (injonctions politiques évoquées par Darmon, 2013). De plus, les colles dans cette filière se distinguent par leur dimension relationnelle majoritairement évoquée par les étudiants ainsi que les colleurs, qui permet d'atténuer le stress et de rassurer les étudiants afin de maximiser leur apprentissage. En effet, les colles semblent favoriser l'établissement d'un rapport particulier entre le colleur et les étudiants, qui permet un dialogue libre et apporte un soutien moral à ces derniers.

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

La première préoccupation de notre recherche, qui n'est pas l'objet d'étude dans ce texte, fut de s'interroger sur l'évolution des divers aspects du travail personnel des étudiants au cours de la première année de classe préparatoire aux écoles de commerce. Nous nous sommes ensuite penchée sur les facteurs qui contribuent à cette évolution. Afin de répondre à ce questionnement, nous nous sommes focalisée sur le

fonctionnement de l'institution, d'abord au niveau macro de l'institution des classes préparatoires filière EC et ensuite au niveau plus local de la classe de deux professeurs, en recherchant comment l'institution détermine et transforme les façons de travailler de ses étudiants. Que peut-on alors dire, au terme de cette recherche, pour répondre aux questions qui l'ont orientée ? L'analyse de l'ensemble des données provenant des étudiants et professeurs nous permet d'identifier des facteurs qui influencent le travail personnel des étudiants assujettis aux diverses institutions considérées, tant au niveau des dispositifs d'encadrement de l'étude qu'à celui des relations sociales établies entre les individus.

Nous pouvons d'abord conclure que les professeurs concernés par notre étude semblent intervenir auprès de leurs étudiants pour apporter bien plus qu'une "aide à l'étude". Pour s'adapter aux besoins et au niveau de cette "nouvelle population" d'étudiants de CPGE, ils doivent redéfinir les modalités et dispositifs pédagogiques d'enseignement et adapter le niveau de leurs exigences, comme l'affirment Daverne et Dutercq (2013, p. 8) : « *si quelques jeunes ont déjà de bonnes habitudes de travail quand ils intègrent les CPGE, aucun n'a encore la culture générale ni la confiance en soi suffisantes pour affronter les épreuves des concours, ce qui nécessite de la part des enseignants un grand engagement à leur égard et une attention constante à leur moral* ». Ainsi, les professeurs participent activement à l'organisation didactique de l'étude autonome des étudiants grâce à leurs conseils et dispositifs qu'ils adaptent régulièrement en fonction des besoins et capacités de ces derniers. Les professeurs sont donc clairement engagés pour la réussite de leurs étudiants, ce qui est aussi reflété à travers la proximité des relations professeurs/étudiants.

Par ailleurs, si l'utilisation des diverses techniques d'empressement varie selon les professeurs et les dispositions des étudiants, elles restent cependant constantes d'un professeur à l'autre et d'une classe à l'autre, ce qui souligne leurs généralité et continuité au sein de l'institution CPGE voie ECS dont elles deviennent une caractéristique. En effet, nous retrouvons dans le discours des professeurs des éléments communs soulignant la cohérence des pratiques des différents professeurs par classe ainsi que la stabilité des pratiques au sein de chaque lycée, de la voie ECS, voire de la filière EC. Ainsi, la cohérence des pratiques mise en évidence chez les deux professeurs de notre recherche converge avec celle qu'ont notée les recherches sociologiques de Darmon (2013), Daverne et Dutercq (2013) et Rauscher (2010). Ces résultats s'opposent point par point à ceux mis en avant par diverses études menées en didactique des mathématiques, sciences de l'éducation et sociologie de l'éducation en France, concernant le fonctionnement et l'organisation des études à l'université (voir Farah, 2015, ch.II). Ces travaux mettent en avant le fait qu'à l'université, les normes et leur transmission sont particulièrement brouillées, renforçant ainsi la différence qui existe entre les deux institutions à un niveau global. En effet, l'absence d'organisation institutionnelle des études et de la transmission des pratiques à l'université, principale source de difficulté des étudiants, est attribuée en grande partie à la diversité des attentes des enseignants et au fait qu'ils ont peu de moyens de pression sur les étudiants. Il en résulte chez les étudiants de nombreuses interrogations sur le travail à réaliser qui se traduisent par des modalités de travail individualisées qui proviennent de leur passé scolaire mais qui semblent renforcer les échecs.

Ainsi, dans le prolongement de ce travail, il serait sans doute intéressant de regarder de plus près les conditions et contraintes des dispositifs de mise à l'étude et d'accompagnement des étudiants, dans une perspective de transfert à l'université. En effet, on pourrait y rechercher ce qui est applicable à l'université avec les moyens

disponibles dans ces institutions, et sans devoir changer le système universitaire. Par ailleurs, ce que nous avons pu identifier à travers nos analyses autour des pratiques des professeurs souligne l'intérêt qu'il peut y avoir à les étudier in vivo. Nous rappelons que nos résultats, hormis les informations qui proviennent de l'analyse des notes de cours des étudiants, s'appuient principalement sur les déclarations des professeurs issues des questionnaires et entretiens qui les poussent à expliciter des choix de pratiques et un rapport au savoir. On pourrait en particulier prendre comme objet spécifique de travail le processus d'étude du cours, en y recherchant les éléments de discours technologique et les gestes d'étude proposés par le professeur. De plus, il semblerait envisageable d'étudier des séances de colles, ce dispositif exceptionnel des CPGE, en nous focalisant sur les pratiques des colleurs ainsi que le travail des étudiants.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CASTELA, C. (2000). Un objet de savoir spécifique en jeu dans la résolution de problèmes : le fonctionnement mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 20(3),* 331-380.

CASTELA, C. (2011). *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets / Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques.* Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches, Université Paris Diderot. Paris : Irem 7.

CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12(1)*, 73-112.

CHEVALLARD, Y. (2003). Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In S. Maury & M. Caillot (Eds), *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Éditions Fabert.

DARMON, M. (2013). *Classes Préparatoires. La fabrique d'une jeunesse dominante.* Paris : La Découverte.

DAVERNE, C. & DUTERCQ, Y. (2013). *Les bons élèves, expériences et cadres de formation*. Paris : PUF.

FARAH, L. (2015). *Étude et mise à l'étude des mathématiques en classes préparatoires économiques et commerciales : point de vue des étudiants, point de vue des professeurs*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot. Disponible sur https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01195875.

RAUSCHER, J.-B. (2010). *Les professeurs des classes préparatoires aux grandes écoles*. Thèse de doctorat, Institut d'études politiques de Paris.

ROBERT, A. (2008). Problématique et méthodologie commune aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 31-59). Toulouse : Octarès.

ROBERT, A. & ROBINET, J. (1993). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques, *Cahier de DIDIREM n°21*.

ROBERT A. & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyse de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(2-3),* 239-284.

ANNEXES

[1] Institut Universitaire de Technologie, Sections de Techniciens supérieurs et Classes Préparatoires aux Grandes Écoles respectivement.
En France, les études supérieures prennent une forme particulière, avec de nombreuses formations hors des universités (voir figure 1 ci-dessous). Les trois formations majeures d'études supérieures (hors spécialités) préparent les étudiants après le baccalauréat (ou bac) à la Licence, au Diplôme Universitaire de Technologie (DUT) ou au Brevet de Technicien Supérieur (BTS). La quatrième formation principale se déroule dans les CPGE qui sont généralement hébergées dans des lycées. Les CPGE sont communément appelées classes prépas ou prépa(s), cette désignation familière est désormais institutionnalisée.

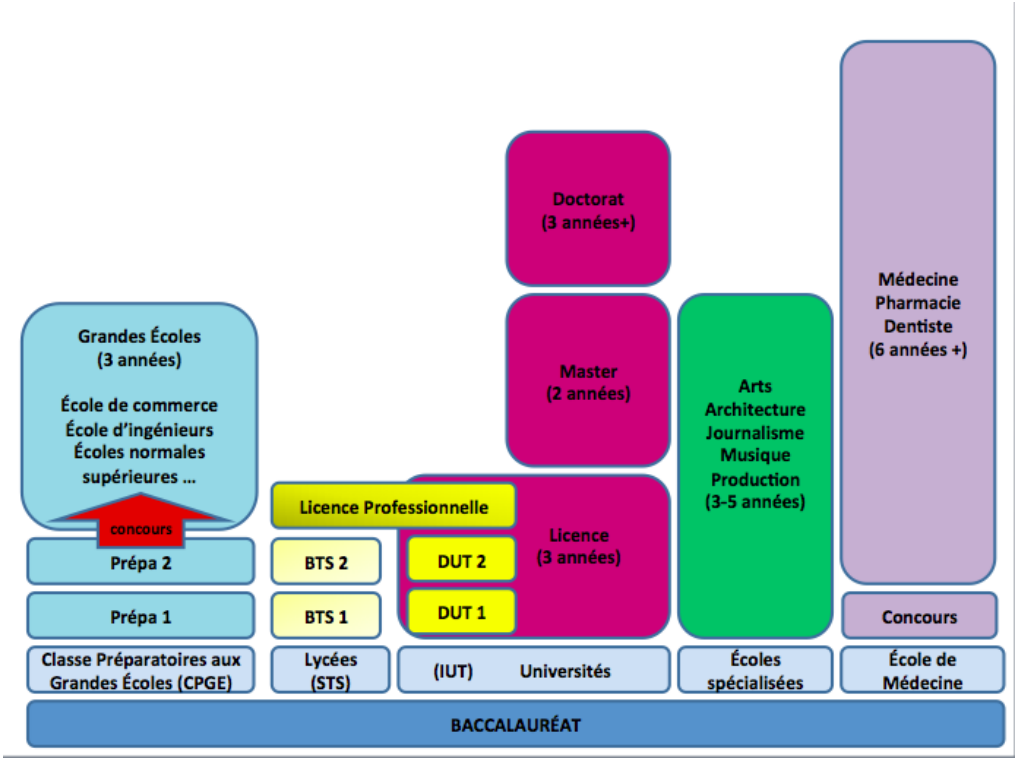


Figure 1 : Schéma simplifié de la structure de l'enseignement supérieur en France

[2] Pour donner une idée des taux de réussite dans les principales formations post-baccalauréat en France, nous faisons référence aux données officielles renseignées par le ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche (http://www.enseignementsup-recherche.gouv.fr/cid75181/reussite-et-echec-en-premier-cycle.html):
« Le parcours des étudiants en premier cycle est ponctué de réorientations et de redoublements.
Seul un étudiant sur deux passe directement en deuxième année de Licence (un sur quatre redouble et un sur quatre se réoriente ou abandonne ses études supérieures), alors que parmi ceux qui parviennent en troisième année de Licence générale, près de sept étudiants sur dix obtiennent le diplôme en un an.
En DUT, le passage en seconde année est élevé : il concerne sept étudiants sur dix. Le taux de réussite en seconde année l'est également : près de neuf étudiants sur dix ont obtenu leur diplôme à la session 2011.
En STS, le taux de passage en seconde année est de 85%. À la session 2011, le taux de réussite au BTS est de 72%. Ces taux varient selon les caractéristiques des étudiants et l'établissement dans lequel ils effectuent leurs études.
Parmi les inscrits de première année en 2010-2011, 71,7% sont inscrits en seconde année de CPGE en 2011-2012. La seconde année de CPGE n'est pas sanctionnée par un diplôme, il est donc assez difficile de déterminer la réussite des étudiants inscrits en classe préparatoire. On peut cependant, par le biais d'appariements entre les différentes sources d'informations sur les inscriptions des étudiants dans l'enseignement supérieur, connaître le parcours des inscrits en seconde année de CPGE un an plus tard. Ainsi, parmi les 31 700 inscrits en seconde année de CPGE en 2010-2011, on retrouve 87% des étudiants dans les fichiers d'inscriptions à un diplôme d'enseignement supérieur en 2011-2012.

Parmi les entrants en seconde année de CPGE, un sur cinq est à nouveau inscrit en CPGE l'année suivante (redoublement). Pour les autres, deux tiers des élèves de CPGE économique intègrent une école de commerce à l'issue de la seconde année de CPGE, la proportion correspondante est de 50,7% pour les élèves de CPGE scientifique en direction des écoles d'ingénieurs. L'université (Institut d'Études Politiques compris) est le débouché principal des CPGE littéraires, même si près de 10% d'entre eux obtiennent une école (École Normale Supérieure ou école de management) au bout de deux ans. Environ un élève de CPGE sur huit intègre après la seconde année une autre formation, parmi lesquelles figurent, entre autres, les écoles artistiques et culturelles et les écoles de journalisme. »
Ces chiffres permettent de mettre en évidence une différence majeure relativement à l'échec entre l'université d'une part et les autres filières d'autre part.

ANCIENNES ET NOUVELLES QUESTIONS SUR L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
UN EXEMPLE DE RECHERCHES ACTUELLES SUR L'EXPOSITION DES CONNAISSANCES

Stéphanie **BRIDOUX**
Université de Mons, LDAR
stephanie.bridoux@umons.ac.be
Nicolas **GRENIER-BOLEY**
Université de Rouen, LDAR
nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
Christophe **HACHE**
Université de Paris Diderot, LDAR
christophe.hache@univ-paris-diderot.fr
Aline **ROBERT**
Université de Cergy Pontoise, LDAR
aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Résumé
Dans cette intervention, nous rappelons d'abord dans quoi s'inscrivent nos travaux en remontant aux recherches sur l'enseignement supérieur des années 80-90 dont ils sont en partie issus. Puis nous précisons nos inscriptions théoriques actuelles. Nous présentons ensuite des développements récents, intégrant l'étude des déroulements des séances, notamment pendant des moments de « cours » en première année d'université (exposés des connaissances/savoirs aux étudiants). C'est sur l'exemple précis de la convergence des suites et fonctions que nous nous appuyons pour cette dernière présentation, en reprenant successivement des éléments de relief (renouvelés par une étude très précise du symbolisme), des caractéristiques des contenus mathématiques des cours, des proximités (rapprochements discursifs) possibles repérées pendant les cours et en discutant sur d'autres occasions de proximités. Nous terminons par des perspectives.

Mots clés
Enseignement supérieur, exposition des connaissances, cours, contenus des cours, déroulements des cours, proximités.

Les recherches particulières présentées aujourd'hui comme exemples de travaux sur le supérieur héritent d'une longue tradition de recherches, développées notamment autour du « Groupe Sup » (créé dans les années 84-87). C'est un petit collectif de chercheurs, qui se réunissent plus ou moins régulièrement à Paris, pour partager et discuter soit leurs propres travaux soit d'autres, sur l'enseignement des mathématiques, au début de l'université ou plus récemment à la transition secondaire-supérieur, voire même très récemment sur les sciences expérimentales à ces niveaux d'enseignement. Un des interlocuteurs privilégiés de ce groupe est la Commission Inter-IREM Université (CI_2U), créée dans les mêmes années.
Nous commençons par résumer quelques traits saillants de ces anciennes recherches puis nous présenterons des exemples actuels.

REVUE PARTIELLE DE TRAVAUX SUR LE SUPERIEUR DONT NOUS « HERITONS »

Anciens travaux (80-90) : bref aperçu et questions (en France)

Avant de caractériser plus globalement l'ensemble de ces premiers travaux, nous en donnons des exemples précis, regroupés par catégories hétérogènes : il y a eu ainsi des thèses, mais aussi des expériences de plusieurs années d'enseignement en première année d'université, et un certain nombre d'articles, livres et brochures, publiées par les IREM notamment, relatant tel ou tel aspect de ces activités de recherche ou liées aux recherches.

Premiers exemples

Il y a eu un certain nombre de thèses soutenues en France (et souvent, de fait, à Paris, et Grenoble-Lyon), portant sur les apprentissages des étudiants sur des contenus précis enseignés en début d'université, suivies par des articles les complétant souvent (référés de préférence aux thèses ici) : citons les travaux sur les statistiques (Blanchard-Laville, 1980), sur la convergence des suites (Robert, 1982, 1983), sur la convergence uniforme (Robinet, 1984), sur les débuts de l'algèbre linéaire (Dorier, 1991).
En général une étude des notions en jeu est présentée, croisant des spécificités mathématiques et épistémologiques, plus ou moins développées, avec ce qui est à enseigner à ce niveau et des grandes lignes de l'enseignement effectif (où seuls les contenus interviennent). Puis des éléments sur les apprentissages des étudiants sont discutés, basés souvent sur des questionnaires ou des tests, voire des post-tests, mettant en évidence les difficultés initiales, celles qui persistent, voire certaines évolutions. On peut parler ainsi de diagnostics partiels de ce que nous appelons maintenant le relief sur les notions : les aspects cognitifs ne sont obtenus qu'au cours du travail, alors que les aspects mathématico-épistémologiques et curriculaires sont établis dès le début. Les résultats sont mis en regard de l'étude préalable et permettent d'envisager des pistes pour l'enseignement – en termes de prérequis à restituer, ou de types d'exercices à ne pas manquer, voire même d'introductions spécifiques liées au type de notion visé. Dans ce dernier cas, les modalités de travail sont précisées pour les étudiants et pour les enseignants, en termes de nature et de moment des interventions.
Ces diagnostics mettent en œuvre des descriptions (analyses) outillées par les travaux didactiques de l'époque, par exemple les caractères outil/objet des notions, les cadres, registres, points de vue et jeux entre eux, y compris dans les prérequis, mais introduisent aussi, notamment, les modèles exprimés par les étudiants ou encore les types de notion en jeu

et les commentaires « méta ». Ces derniers outils sont la conséquence du constat de la difficulté, dans certains cas, d'adapter la dialectique outil/objet (Douady, 1987) ou de trouver, dans le cadre de l'enseignement pratiqué, une situation fondamentale (Brousseau, 1998). Les chercheurs voulaient néanmoins mettre au point des introductions qui faciliteraient une certaine prise de sens, jugée souvent insuffisante, pour les étudiants, ces séquences étant déjà élaborées dans la thèse ou ayant suivi.
Les recherches restent essentiellement qualitatives, même si dans certains cas de nombreux questionnaires sont étudiés (plusieurs centaines, voire 1250 dans Robert, 1982).
Une deuxième catégorie de travaux, moins publiés mais travaillés dans le Groupe Sup, est liée à des expériences d'équipes d'enseignement, parfois nourries et/ou nourrissant des travaux ci-dessus, ayant duré au moins deux ans ou plus : par exemple l'enseignement en première année d'université Paris 7 organisé conjointement par les matheux et les physiciens (Artigue, 1989), le débat scientifique organisé en amphi à Grenoble (Legrand, 1993), l'enseignement magistral en mathématiques en bi-groupes en première année d'université Paris 6 (Robert, 1985), réunissant deux groupes de TD, souvent après une première séance en TD, l'enseignement expérimental de première année d'université à Lille… Dans ces deux derniers cas, il faut insister sur le travail en équipe des enseignants (réunions hebdomadaires !), et, pour Lille, souligner la production de projets (mémoires) d'étudiants, à la fin de l'année (Rogalski, 1994), et surtout l'édition de très nombreuses fiches de TD, extrêmement riches. On peut noter que ce sont les cours magistraux qui sont souvent le lieu des changements : supprimés, ou au moins modifiés. Le travail en TD en petits groupes, l'enseignement de méthodes, les discours « méta » sont également très présents dans beaucoup de ces expériences (Robert, 1987). Des premières séances de travail sur micro-ordinateur sont également apparues (Jarraud, 1987). Il y a cependant peu d'évaluations quantitatives, signalons celles de Lille, notamment sur des étudiants l'année d'après l'expérience, qui sont positives (Rogalski, non publié).
La brochure de la CI_2U « Enseigner en DEUG autrement », écrite par des chercheurs, et publiée en 1990 par l'IREM Paris Sud, est un très bon reflet de ces deux catégories de travaux (sommaire en annexe 1).

Un zoom sur les travaux en algèbre linéaire et en analyse et leurs développements

En algèbre linéaire, une équipe de chercheurs, Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, a poursuivi le travail et cela a abouti à plusieurs articles (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 1994) et surtout à 2 livres, édités par Dorier (1998, 2000), en français et en anglais. Y sont présentés successivement une étude épistémologique très consistante et la mise en évidence de spécificités de la notion à prendre en compte pour l'enseigner, avec son Formalisme Unificateur et Généralisateur (FUG) – certes Simplificateur mais ce caractère s'avérant non efficace pour les étudiants ne sera pas retenu pour l'enseignement ; puis une étude des difficultés des étudiants, dont les prérequis en logique, théorie des ensembles et avec l'écriture formalisée ; et un scénario (ingénierie mise au point par Rogalski (1994), et testée notamment à Lille). Ce scénario, inspiré des études citées et de l'adaptation des travaux didactiques précédents, propose des problèmes préliminaires, qui seront à unifier par les étudiants, la mise en œuvre explicitée et planifiée, par l'enseignant, du levier méta (dont un enseignement de méthodes), et un travail des étudiants organisé sur des tâches riches avec notamment des changements de points de vue, de cadres et de registres planifiés précisément.
En analyse, après le diagnostic des types des notions visées, des difficultés et modèles successifs des étudiants sur les suites et sur la convergence uniforme, des séquences d'introduction ont été élaborées, souvent testées, mais peu évaluées (Robert, 1983 ; Robinet, 1984). Le travail d'Artigue (1988) sur les procédures différentielles propose une ingénierie

basée sur une collaboration mathématique-physique. C'est dans le cadre du débat scientifique que doit se dérouler la séquence d'introduction à l'intégrale (Legrand, 1986).
Par ailleurs, le caractère limité des ingénieries proposées a amené quelques chercheurs à élargir l'étude à l'enseignement des débuts de l'analyse sur R. Dans ce cadre plusieurs études sur les nombres réels ont été menées (par exemple Robinet, 1986) ainsi que des diagnostics des connaissances des étudiants à différents moments de la première année d'université. Cela a permis notamment une confirmation de « l'hypothèse des blocs » sur l'importance de prérequis, même partiels, dans plusieurs cadres comme condition nécessaire de progrès (Boschet & Robert, 1984 ; Authier, 1986, 1987). Cette hypothèse est inspirée de l'importance des changements de cadres dans les apprentissages, qui repose cependant sur la possibilité de s'appuyer sur des connaissances, certes « inégales », mais dans divers cadres, pour faire travailler les élèves en provoquant des déséquilibres (Douady, 1987). Elle a d'ailleurs été reprise en algèbre linéaire.

Bilan partiel : et alors ?

Après 1990, les expériences n'ont pas été renouvelées (on a noté un certain épuisement des équipes). Et même les recherches de ce type se sont arrêtées ! Il aurait sans doute fallu, au moins, que d'autres professeurs expérimentent dans d'autres lieux. De plus la création des IUFM a amené un certain nombre de chercheurs à réorienter leurs travaux vers les pratiques et les formations – notamment pour le secondaire. On voit là encore comment des conditions externes peuvent peser sur les recherches.
Cela dit, mise à part la difficulté objective pour un universitaire de consacrer beaucoup de temps à l'enseignement, un autre obstacle est peut-être dû aux évaluations des expériences, voire même des recherches, qui ne « suivent » pas. Il faudrait, on le sait bien en didactique, des évaluations différentes des étudiants pour des enseignements différents. Sinon nos résultats « internes » ne sont pas probants pour les collègues. Mais pour mettre en place ces évaluations il faut des enseignants déjà un peu convaincus ! On a même rencontré des enseignants qui ne jouaient pas le jeu de nos évaluations, en prévenant leurs étudiants de ce qui allait leur être proposé, sous le prétexte que c'était des exercices inhabituels. Il y a donc un cercle vicieux.
De plus, ces évaluations se heurtent à des problèmes méthodologiques, si ce n'est théoriques : en effet autant nous sommes outillés pour des analyses locales de séances et pour élaborer des hypothèses sur les scénarios globaux, donnant lieu à des prévisions pointues pouvant être vérifiées, autant pour apprécier vraiment ce qui est en jeu, à savoir des projets longs, nous sommes moins armés (Robert, 1992).
Ainsi nous suggérons que ces travaux, pour être poursuivis, auraient nécessité, outre la disponibilité de suffisamment de chercheurs et d'enseignants, des changements d'échelle. Ils auraient pu :

- Être pensés sur le temps long, avec un projet long, méthodologiquement valide
- Être organisés pour faire travailler les étudiants sur un contenu « consistant » et pas seulement sur l'introduction d'une notion par exemple (cf. projet AHA en Belgique, Schneider, 1991)
- Donner lieu à diffusion et expérimentation large. On retrouve la question posée par les évaluations, avec le fait de pouvoir passer du qualitatif au quantitatif. Cela rejoint les aspects écologiques développés par Artigue dans son exposé récent à INDRUM (International Network for Didactic Research in University Mathematics, Artigue, 2016).

Depuis et ailleurs : divers élargissements, sur les thèmes travaillés, les publics…

A Paris, si la thèse sur l'enseignement de la topologie (Bridoux, 2011) reprend en l'enrichissant le schéma des travaux précédents, d'autres travaux se sont intéressés à des publics d'étudiants différents. Ainsi a été établi (Pian, 1999) un diagnostic des connaissances et difficultés des étudiants capesiens (en quatrième année d'université), en relation avec leurs prérequis, confirmant à ce niveau les résultats précédents.

Des expériences de formation des moniteurs, avec des équipes de formateurs universitaires (Mac Aleese, Pian, Robert, Rogalski & Viennot, 2009), ont remplacé les expériences d'enseignement précédentes. Avec beaucoup d'efforts de la part des universitaires investis, et un questionnement encore plus grand sur leur impact.

Récemment une HDR sur « des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignant » a élargi le domaine d'étude, le public (transition) et introduit l'analyse des artefacts (Vandebrouck, 2011).

Divers travaux à Lyon, Montpellier et Grenoble ont encore élargi les champs d'étude, en s'intéressant à la logique, au formalisme, au débat scientifique, aux démonstrations et à la géométrie discrète (Grenier & Legrand, 1986 ; Legrand, 1993 ; Arsac 1999 ; Durand-Guerrier & Arsac, 2003 ; Grenier 2012).

À l'école d'été 13 de l'ARDM (Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques), une synthèse sur les travaux sur la transition secondaire-supérieur a été présentée par Gueudet (2005), témoignant de l'élargissement des problématiques à ce moment de l'enseignement.

A l'étranger, et depuis fort longtemps, les congrès PME (et sa section AMT), ICME sup, EMF, ont permis la diffusion de travaux de recherches sur l'enseignement supérieur en mathématiques (parmi d'autres). Très récemment, citons le premier colloque INDRUM pour le seul enseignement supérieur (2016, cité plus haut).

Grossièrement on pourrait classer les travaux, que nous ne pouvons évidemment pas citer ici, en suivant de fait une certaine chronologie, en :

1) des travaux sur des notions précises, comme dans le cas APOS (Action-Process-Object-Schema, Arnon et al., 2013),

2) des travaux sur la forme spécifique du travail mathématique dans le supérieur - AMT : avec des thèmes comme le symbolisme, la généralisation, les démonstrations, les flexibilités indispensables… (Tall, 1991),

3) des études des transitions (ruptures et continuités),

4) des études des pratiques des professeurs (et de leurs prises de conscience éventuelles de certaines difficultés des étudiants), par exemple, récemment, Petropoulou et al. (2016) sur les cours magistraux.

On pourrait schématiser ces tendances entre travaux diagnostics (difficultés des étudiants, spécificités des notions avec les transitions comme révélateurs de certains aspects, pratiques « effectives ») et travaux prescriptifs (sous forme de scénarios particuliers)… Soulignons que la plupart de ces recherches restent qualitatives, quels que soient les cadres théoriques mobilisés, très divers.

Pour conclure je retiendrais quelques conclusions de la conférence synthétique d'Artigue à INDRUM (ibidem), adaptées à notre propos. Elle signalait des faiblesses des recherches sur le supérieur, que je reprends : il y a un manque de prise de conscience du fait qu'on ne forme pas seulement des futurs matheux ; les analyses restent trop locales ; il y a un manque de diffusion… Parmi les défis, j'en retiens particulièrement un : comment faire expérimenter à nos étudiants le jeu subtil entre approche expérimentale et approche déductive grâce aux évolutions de la technologie ?

La question des besoins théoriques à développer chez nos étudiants est pour moi en effet première à ce niveau, qu'ils soient ensuite matheux ou non. On doit en particulier s'interroger sur l'émergence de ces besoins (ou au moins questionnements) à partir de l'utilisation de logiciels qui embarquent déjà les connaissances visées, qui ne travaillent que sur du discret, etc... et cela demande un travail spécifique d'élaboration de situations ne réduisant pas le questionnement théorique des étudiants. Cela nous ramène directement à la définition formelle de la convergence qui va être un des exemples actuels travaillés !

NOS TRAVAUX ACTUELS : UN EXEMPLE

Le Groupe sup continue d'exister ! Avec plusieurs sous-groupes, l'un travaillant sur une recherche inter-disciplinaire pour étudier les pratiques des enseignants du supérieur, l'autre travaillant sur la notion de vecteur en math et en physique, et nous. Nous présentons ici un exemple de nos travaux actuels.

Un certain nombre de travaux actuels portent sur l'étude des déroulements en classe pendant les moments de « cours » (moments d'exposition des connaissances) et nous nous inscrivons dans cette direction de recherche. Dans cette partie, nous commençons par donner quelques généralités sur l'inscription théorique de ces recherches en les spécifiant à nos travaux, notamment en référence à une hypothèse théorique en termes de pseudo-concepts. Puis, nous présentons un exemple précis de nos analyses didactiques sur l'étude des moments d'exposition des connaissances dans l'enseignement de la notion de limite de suites et de fonctions en première année d'université.

Nous parlons de « moments d'exposition des connaissances » pour caractériser ces moments où l'enseignant expose en classe (à l'oral ou à l'écrit), des connaissances générales qui constituent le « cours », par opposition aux exercices où l'utilisation des connaissances est contextualisée.

Nous cherchons à apprécier ce que peut apporter l'exposition des connaissances dans les acquisitions des élèves ou étudiants, quel que soit le dispositif d'enseignement.

L'étude des moments de « cours » fait actuellement l'objet de recherches au lycée et à l'université (Bridoux et al., 2016). Nous présentons ici une étude spécifique sur l'enseignement des limites en L1.

Cette étude sur l'enseignement des limites est motivée par un questionnement général, spécifique à l'Université, sur l'utilité, pour les étudiants, des cours magistraux (CM) donnés en amphi, pratique usuelle dans tout l'enseignement supérieur. En effet, nous savons qu'il y a sans doute probablement encore moins qu'au lycée d'exercices à résoudre et d'interactions entre l'enseignant et les étudiants pendant les cours en amphi, notamment en raison du nombre important d'étudiants qui sont présents. Les étudiants ont aussi accès à de nombreuses ressources qui leur délivrent le texte du savoir, comme les polycopiés, les livres ou les vidéos de cours en ligne. Enfin, les CM magistraux ne sont pas obligatoires. Il nous a donc semblé pertinent de nous demander à ce niveau d'enseignement ce que peuvent retirer les étudiants durant les CM et ce qui peut se jouer dans ces moments en termes d'apprentissages. Il y a encore une autre motivation à l'origine de cette problématique, notamment dans le cas des limites (avec leur formalisme). Nous avons évoqué dans la première partie de ce texte que beaucoup de notions enseignées en L1 sont des notions FUG (en analyse et en algèbre linéaire notamment), donc difficiles à introduire de but en blanc, y compris en TD. Il y a donc également lieu de regarder comment l'enseignant en amphi tente de mettre du sens sur la (nouvelle) notion, introduite directement, d'où un intérêt supplémentaire à l'étudier.

Nous précisons maintenant avec quels outils théoriques nous abordons notre questionnement.
Notre inscription dans la Théorie de l'Activité (Vandebrouck, 2012, Abboud-Blanchard et al. 2017) nous amène à postuler que les activités des élèves[1] sont déterminantes pour leurs apprentissages, même si cela reste partiel[2]. Il s'agit donc d'apprécier ces activités, au regard des notions visées, des contextes précis en jeu, et de nos connaissances didactiques, dont les hypothèses générales que nous adoptons sur les apprentissages. Plus précisément, dans la mesure où n'en sont accessibles à l'observation que des traces, nous étudions les activités possibles des étudiants[3] et tentons de faire des inférences sur les relations entre les différents facteurs qui interviennent. Rappelons que, de façon générale et schématique, nous postulons que, pour favoriser l'apprentissage, l'enseignant doit à la fois ménager et développer une certaine autonomie des élèves, à des moments bien choisis, sur des tâches adaptées (hypothèse piagétienne adaptée au contexte scolaire et aux mathématiques) et proposer un travail accompagné et / ou collectif pas trop éloigné de leurs connaissances « déjà là ». Il s'agit de viser le plus possible, notamment dans les interventions mathématiques et méta-mathématiques, les zones proximales de développement – ZPD (hypothèse vygotskienne).
Or, en classe, les activités des élèves sont essentiellement provoquées par les choix de l'enseignant (tâches proposées, accompagnement mis en place, discours, modalités de travail, organisation du déroulement, etc.). Pendant les phases d'exercices, où on peut entendre les élèves ou deviner (à partir de ce que dit l'enseignant), si ce n'est voir et accéder partiellement à, leurs productions, on peut les étudier en référence aux activités attendues, analysables *a priori*. Mais pendant les phases d'exposition des connaissances qui nous intéressent ici, les activités des élèves sont encore moins observables. Nous nous centrons donc dans ce cas sur le discours de l'enseignant pour percevoir ce qui peut être en jeu. Cela comprend certains gestes et, si cela se produit, les interactions avec des étudiants, les questions de l'enseignant, les réponses ou questions d'étudiants, etc. Les répétitions et reformulations, les silences, les implicites (à nos yeux) sont autant d'indicateurs à prendre en compte pour inférer, dans le discours proposé par l'enseignant, ce qui peut « rapprocher » (ou non) les élèves des connaissances visées.
Reste la question de la référence à utiliser pour l'étude des cours, qui remplacerait l'analyse *a priori* des tâches proposées. Là encore, nous nous basons sur une étude *a priori* de ce que nous appelons le « relief » de la notion. Cette étude a trois dimensions imbriquées : épistémologique (nature des notions), curriculaire (institution, programmes) et cognitive (difficultés des élèves). Elle permet de circonscrire ce qui constitue le corps des connaissances visées sur la notion au niveau de conceptualisation concerné : l'ensemble des tâches dont la résolution peut être demandée, les objets et outils avec les cadres, registres, points de vue dont on attend des étudiants une certaine disponibilité, le niveau de rigueur exigible, la flexibilité et l'organisation des connaissances déjà-là et nouvelles nécessaires… Elle donne aussi accès aux difficultés connues des élèves, plus ou moins répertoriées. Enfin une étude de l'évolution de la présentation de la notion dans les programmes antérieurs, voire un éclairage épistémologique s'il y a lieu, permettent de bien cibler ce qui est nouveau, son sens, et, en particulier, de réfléchir à des introductions appropriées ou à des problèmes transversaux. Autant d'éléments qui permettent d'apprécier les contenus des cours, mais aussi leurs déroulements, dans la mesure où sont précisés les obstacles éventuels, à étudier précisément, ainsi que les dynamiques possibles en jeu entre cours et exercices, entre objets et outils, ou entre exemples, exercices résolus, méthodes et concepts...
Dans le déroulement des cours, on l'aura compris, nous spécifions nos hypothèses en postulant l'importance des liens explicites, des mises en relation entre ce que l'enseignant

1 Ce qu'ils pensent, disent ou non, font ou non, écrivent ou non… en partie inaccessibles.
2 Des facteurs personnels et liés aux contextes sont aussi en jeu.
3 Dont nous pensons qu'elles sont effectives pour un certain nombre d'entre eux.

expose, les définitions, théorèmes, propriétés, formules, démonstrations, méthodes, exemples, vocabulaire général… et les activités (passées, actuelles, à venir) des étudiants (cf. Bridoux et al., 2016). Cela prend essentiellement la forme de reprises, de commentaires, d'explications, prévus ou improvisés, notamment à l'occasion de réponses aux étudiants. La métaphore théorique que nous filons est très adaptée de ce que développe Vygotski pour l'apprentissage des concepts quotidiens par l'intermédiaire des mots et des actions des enfants, supervisées par l'adulte. C'est celle du cours comme réservoir de pseudo-concepts : le cours donnerait aux étudiants une familiarisation avec le concept visé très partielle, liée aux mots, aux formules… qu'on pourrait comparer à une enveloppe adressée mais presque vide. Ce serait par l'association, soulignée et commentée par l'enseignant, de ces mots, formules... aux activités des étudiants organisées de manière adéquate, et corrigées, que le sens s'installerait, petit à petit.

Compte tenu de cet enjeu des moments d'exposition des connaissances, en termes de dynamique à établir entre les caractères objet et outil de la notion enseignée, nous nous attachons particulièrement aux liens qui peuvent la concerner et rapprocher ainsi les étudiants de la connaissance visée. Ainsi avons-nous distingué dans le discours des enseignants trois types de proximités discursives (explicites). Elles précisent les proximités-en-acte définies dans Robert et Vandebrouck (2014), qui sont attachées aussi bien à des décisions qu'à des discours, y compris pendant les exercices. Il s'agit ici de fragments de discours, d'énoncés de l'enseignant, éventuellement accompagnés de gestes ostensifs, dont nous analysons qu'ils peuvent contribuer à la compréhension des étudiants :

- soit de la généralisation d'un exercice qui aboutit à l'expression, la définition, voire la démonstration d'une propriété générale (proximité ascendante),
- soit de la manière dont on peut utiliser dans un exercice, voire dans une démonstration, une propriété (ou définition) générale (proximité descendante),
- soit du travail local sur une formule par exemple ou sur le sens d'un théorème, qui n'amènent pas de changement de niveau de généralité (proximités horizontales).

Ces phrases sont repérées par le chercheur, qui distingue des occasions de proximités (*a priori*), à partir du relief, et, dans le discours tenu, des proximités possibles – ou inexistantes (*a posteriori*). Il peut y avoir des proximités possibles imprévues. Toutes restent seulement possibles, tout comme les activités des élèves… Cependant on peut déjà noter que ces outils didactiques restent locaux, alors que l'apprentissage du cours ne peut être qu'un processus long : il y a une hypothèse de cumul que nous nous autorisons, compte tenu de la stabilité des pratiques d'un enseignant donné, déjà soulignée dans nos travaux (Robert, 2007)…

Des exemples précis de proximités suivent.

Relief

Nous allons ici développer des résultats concernant l'enseignement d'une notion précise : les définitions de la notion de limite de suite et de fonction en première année d'Université.

Nous commençons par présenter ce qui est travaillé dans le secondaire en France. Les documents qui accompagnent les programmes de la filière scientifique de la fin du secondaire disent : « La pratique du calcul commence sur des objets encore mal formalisés. Son rôle est décisif pour familiariser les élèves avec ces objets. Leur manipulation permettant ainsi d'en construire une représentation efficace. C'est particulièrement vrai lorsque la définition de ces objets n'est pas étudiée ». Et les programmes citent la notion de limite comme exemple. En classe de première la notion de dérivée est par exemple abordée à travers la notion de limite du taux d'accroissement, mais avant la notion de limite. Le détail des programmes parle « d'appréhension du concept de limite » [fonctions], « d'approche intuitive » [fonctions], de

« première approche » [suites], d'« Approche à partir d'exemples » [suites], « d'approche expérimentale » [suites].
Les élèves ont donc une idée approximative de la notion de limite en sortant de 1re. On peut souligner dans ce contexte l'importance des mots pour le dire : sans définition mathématique, ce sont les descriptions verbales et les références au graphique qui vont permettre de donner un contour à la notion de limite. Or on croisera ci-dessous plusieurs expressions classiques qui renforcent des conceptions erronées des élèves (comme par exemple le fait que la variable pourrait tendre vers une valeur indépendamment de la suite ou de la fonction).

Dans la classe de terminale de la série scientifique, les notions de limite sont approfondies. D'une part, pour définir le fait qu'une suite (u_n) tend vers un réel l quand n tend vers $+\infty$, le programme autorise par exemple la formulation « tout intervalle ouvert contenant l contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang » ; le fait que (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ s'exprime par « tout intervalle de la forme $]A;+\infty[$ contient toutes les valeurs u_n à partir d'un certain rang ». D'autre part, les notions de limite finie ou infinie d'une fonction en un point ou en l'infini sont introduites pour lesquelles une traduction similaire en termes d'intervalles est proposée. On peut cependant penser que les définitions proposées par les programmes pour les limites en terminale (cf. ci-dessus) sont très difficiles à faire comprendre : notion d'intervalle, quantification sur les intervalles, notion de rang, idée de « à partir d'un certain rang » pour les limites de suites (ce « certain rang » dépendant de l'intervalle), etc. De nombreux résultats sont évoqués par les programmes sur les propriétés des limites (comparaisons, opérations, composition de fonction, limites classiques, etc.). La plupart des exercices font appel à ces propriétés, mais très rares sont ceux nécessitant une connaissance de la définition.

À l'université, en revanche, les définitions formelles en (ε, N) de limite de suite et en (ε, α) de limite de fonction apparaissent rapidement dans les cours. Même si plusieurs caractérisations sont possibles (écrire les quantifications dans la langue naturelle ou avec des symboles, présence explicite ou non d'une implication,...), c'est souvent en termes d'inégalités que la définition est donnée, comme dans les exemples suivants. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel *l* si

$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geq N \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon)$.
Une fonction f admet une limite finie l en $a \in \mathbb{R}$ si
$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0\ \forall x \in Df, (|x - a| \leq \alpha \Longrightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$.

La distance entre le nouveau de ces définitions et les connaissances antérieures est grande :

- Relier cette définition sous forme symbolique et la définition en terme d'intervalle des programmes du secondaire est un exercice ardu (il y a même un travail mathématique : une des définitions parle de tous les intervalles alors que l'autre, une fois décortiquée, parle uniquement des intervalles centrés en *l*).
- Par ailleurs la nécessité de formalisme ne s'est pas fait sentir au lycée (on peut même dire d'une certaine façon qu'il est demandé d'éviter qu'elle se fasse sentir).

Par ailleurs, compte tenu des connaissances des élèves à ce moment-là, les définitions de la limite ne peuvent donner lieu qu'à très peu d'exercices spécifiques simples.
Tous ces éléments concourent à caractériser les notions de limite en début d'Université comme des notions FUG : introduction d'un formalisme qui unifie et généralise ce qui a déjà été vu, mais qui ne peut pas donner facilement lieu à un problème permettant de lier naturellement ce formalisme aux connaissances antérieures.
En outre, les pratiques langagières pour formuler une définition qui introduit un nouveau formalisme sont complexes, en partie implicites, souvent même pour les locuteurs eux-mêmes. La lecture même de la définition symbolique par l'enseignant pose problème, de

même la formulation par les étudiants (lecture pour soi, discussion, participation au TD, etc.). Pour les limites de suites par exemple :

- Dire la suite. Pour lire « La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite 2 » on prononce « la suite *u n* a pour limite 2 » voire « *u n* a pour limite 2 » confondant ainsi la suite et un de ses termes, dans un contexte où on parle d'une propriété de la suite définie par des propriétés d'une infinité de ses termes.
- Quantifications implicites. On peut citer l'exemple d'un enseignant qui verbalise la définition symbolique écrite au tableau « pour tout epsilon [main sur ∀] il existe un entier [un pas, main sur ∃] naturel grand *N*, tel que [deux pas, main sur « ($n \geq N$ »] si petit *n* est plus grand que *N* alors [un pas, main sur « ⇒ »] valeur absolue de [recule] *u n* moins *l* est plus petit que epsilon [positionnement loin de l'écrit] ». Il ne dit pas, de façon tout à fait naturelle et usuelle, la quantification sur *n* alors qu'elle est écrite et qu'il passe la main dessus en lisant.
- Usage d'expressions « à déplier ». On peut citer l'exemple de « à partir d'un certain rang » qui apparaît dans les programmes de lycée : cette expression cache un jeu complexe de quantifications des variables. Selon les contextes (« nulle à partir d'un certain rang », « constante à partir d'un certain rang », « proche de *l* à partir d'un certain rang ») les quantifications sous-jacentes sont différentes. On peut étudier de même les expressions : « suffisamment grand », « suffisamment proche », etc.
- Apparition d'expressions qui pourraient être trompeuses. On peut citer l'exemple de « tendre vers » qui donne une certaine autonomie à « *x* tend vers *a* ».

Dans le contexte d'étude de l'introduction des définitions de limite ces considérations renforcent l'intérêt de la question posée : comment l'enseignant fait-il pour aménager certaines proximités entre ce que savent les étudiants, ce dont ils peuvent avoir besoin et ce qu'ils doivent apprendre dans ce contexte particulièrement peu propice ?

Problématique et méthodologie

Compte tenu de l'analyse qui vient d'être résumée du relief sur la notion de limite, nous admettons que le rôle de l'enseignant est particulièrement important au moment de l'introduction de la notion, notamment pour expliquer aux étudiants ce que la définition traduit et ce dont on a besoin pour l'utiliser. Cela comprend aussi l'objectif d'appropriation par les étudiants du (nouveau) formalisme que la définition contient. Nous nous sommes donc demandé ce qui est explicité par l'enseignant, dans le cours magistral, lorsqu'il introduit la définition en tant qu'objet. Reformule-t-il la définition avec d'autres mots pour rester « proche » des connaissances, même approximatives, du plus grand nombre possible d'étudiants ou pour lui donner un certain sens ? Donne-t-il des commentaires méta sur son utilisation ? Essaie-t-il de prendre en compte les connaissances déjà-là des étudiants ou la structure logique, singulièrement compliquée à ce stade, de la définition ?

Cette problématique est complètement pilotée par l'étude du relief et par notre inscription théorique en termes d'apprentissages présentées précédemment et elle est, selon nous, l'occasion de repérer des premiers exemples de proximités dans le discours de l'enseignant.

Notre méthodologie repose sur des analyses de cours sous différentes formes : une analyse de manuels, une analyse de capsules vidéo et une analyse de cours donnés en amphi. Nous tentons de repérer, dans chaque média, les diverses reformulations de la définition, la prise en compte de la structure logique globale de la définition, les tentatives de rapprochements avec les connaissances déjà-là des étudiants et différents types de proximités. Le fait d'étudier un média où il n'y a pas d'enseignant, en l'occurrence les manuels, donne un double éclairage sur la présence de proximités potentielles qui pourraient émerger ou non dans un cours « réel » et met aussi en valeur les spécificités du discours de l'enseignant lorsqu'il est là.

Nous avons choisi ici d'étudier deux moments dans les « cours » : l'introduction de la définition et les premiers exemples. Pour avoir une vue globale du scénario, d'autres moments comme les premiers théorèmes et leurs démonstrations sont étudiés dans (Bridoux et al., 2015).

Malgré les différences notables entre les définitions de limite de fonction et de limite de suite, nous faisons l'hypothèse qu'elles restent comparables au regard de nos objectifs puisque nous étudions des moments de première rencontre avec la définition formelle, moments dont on sait qu'ils sont particulièrement difficiles dans le cas de notions FUG (voir étude du relief).

Dans ce texte, nous présentons une étude comparative entre le chapitre sur les limites de fonctions dans le manuel *Mathématiques Tout-En-Un* (Dunod, 2007)[4], une capsule issue du site Exo7 sur les limites de suites et un cours en amphi sur les limites de fonctions donné à environ 200 étudiants en 2014 à l'Université Paris Diderot.

Avant de nous lancer dans cette étude, nous donnons, pour illustrer notre propos, des exemples de proximités possibles, qui pourraient être repérées dans le discours d'un enseignant dans le contexte précis de l'enseignement des limites.

Nous avons repéré une tentative de proximité ascendante chez un enseignant qui utilise une ingénierie didactique élaborée par Robert (1983) pour introduire la définition formelle de la convergence d'une suite numérique. Dans la première partie de l'ingénierie, les étudiants ont travaillé dans le registre graphique et se sont forgé une première représentation (erronée car trop partielle) de la convergence en termes de « bandes » autour du candidat limite dans lesquelles tous les éléments de la suite rentrent à partir d'un certain rang. Dans cette partie, les étudiants travaillent avec des largeurs de 1/10 et 1/100 pour les bandes. Dans la partie suivante de l'ingénierie sont proposées deux affirmations dont l'appréciation (vrai ou faux) met en défaut le fait que la convergence puisse uniquement se définir avec quelques bandes. L'enseignant amène alors l'idée que la définition choisie par les mathématiciens est de travailler avec toutes les bandes, quelle que soit leur largeur. Il y a donc là un processus de généralisation qui amène une proximité de nature ascendante.

Nous avons repéré une tentative de proximité descendante dans le discours d'un enseignant traitant l'exemple de la limite $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}$ après avoir introduit la définition. Pour montrer que cette limite vaut zéro en utilisant la définition, l'enseignant explique comment utiliser celle-ci en prenant en compte l'ordre des quantificateurs, en expliquant comment trouver un réel *A* tel que présent dans la définition. Des liens avec la définition précédente sont explicitement dits, voire même écrits pour certains d'entre eux, par l'enseignant, d'où la nature descendante de la proximité.

Nous avons repéré une tentative de proximité horizontale chez un enseignant qui commente les équivalences suivantes : $|u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon \Leftrightarrow u_n \in]l - \varepsilon, l + \varepsilon[$.

Dans son discours, l'enseignant explique oralement et à l'écrit comment on passe de l'inégalité avec valeur absolue à la double inégalité et il reformule ensuite celle-ci pour amener l'idée d'appartenance à un intervalle ouvert. La présence de reformulations d'énoncés d'un même niveau de généralité témoigne de la nature horizontale de ces proximités.

Le manuel

Dans le manuel étudié, le chapitre sur les limites de fonctions vient après celui sur les limites de suites. Dans le chapitre visé, on trouve tout d'abord une définition de la notion de voisinage. La notion de limite d'une fonction f en un réel x_0 est ensuite introduite « brutalement » par la définition suivante :

4 GAUTIER C., WARUSFEL A., CAMINADE B., FONTAINE H. & NICOLAS S. (2007) *Mathématiques Tout-En-Un, ECS 1re année,* Éditions Dunod.

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 et l un réel. On dit que f a pour limite l en x_0 si $\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \forall x \in D_f \ (|x - x_0| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon)$.
La caractérisation choisie pour cette définition s'appuie sur le registre symbolique. Il n'y a aucun commentaire explicatif sur la construction de cette définition. En ce sens, il n'y a ici aucune tentative de rapprochement avec les connaissances antérieures que pourrait avoir un étudiant d'université.
Une remarque suit néanmoins la définition : « *La définition signifie qu'on peut obtenir f(x) aussi proche que l'on veut de l pourvu que x soit assez proche de* x_0 ».
Cette reformulation pourrait être l'occasion de tenter une proximité horizontale (locale), sur la transformation de la formulation, mais il n'y a aucune explication sur le passage de la définition aux expressions utilisées ici. Que signifie en effet l'expression « aussi proche que l'on veut » ou « être assez proche de » et en quoi la définition précédente écrite dans le registre symbolique traduit-elle cette idée de rapprochement mathématique ? La réponse à ces questions est complètement laissée à la charge du lecteur.
Regardons maintenant le premier exemple traité après l'introduction de la définition. Nous le recopions ici tel qu'il est écrit dans le manuel :
Montrons que $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$. *Soit* $\varepsilon > 0$. *Pour* $x \geq 0, \sqrt{x} \leq \varepsilon$ *équivaut à* $x \leq \varepsilon^2$. *On a donc* $\forall x \in R_+, (|x| \leq \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{x} \leq \varepsilon)$, *ce qui démontre le résultat, puisque la fonction racine est définie sur* R_+.
Nous remarquons tout d'abord que le raisonnement qui est développé ne prend pas en compte la structure logique de la définition puisque rien n'est dit sur le choix de η. De plus, aucune justification n'est donnée sur l'équivalence ni sur l'implication qui en découle.
Le traitement de cet exemple serait l'occasion de repérer des proximités descendantes en expliquant comment la définition est utilisée ici mais ces occasions sont selon nous manquées.

La capsule vidéo

On a aussi étudié un autre dispositif de cours : les capsules vidéo. Nous avons choisi d'analyser certaines vidéos du site http://exo7.emath.fr/. Elles mettent en scène un enseignant universitaire filmé devant un diaporama correspondant au cours. Il existe par ailleurs sur le même site un cours écrit téléchargeable, la vidéo s'éloigne peu du cours écrit. Elle permet cependant *a minima* au moins une reformulation : formulation orale du texte écrit, accompagnement de gestes. On a cependant observé que les reformulations peuvent être très nombreuses avec par exemple sept reformulations de la définition en une minute dans la scène d'introduction de la définition de la limite de suite (voir Bridoux et al., 2015).

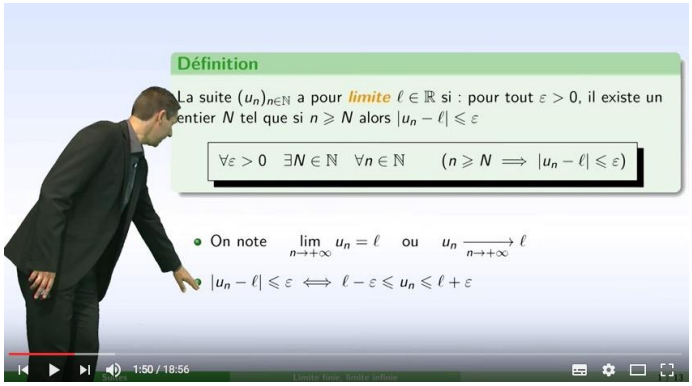


Figure 1 – capture d'écran du site Exo7

On peut voir la multiplication de ces reformulations comme des tentatives de rapprochement par l'enseignant entre d'une part ce dont il est question et d'autre part ce que les élèves peuvent entendre. Les reformulations ne sont cependant pas commentées. La dernière reformulation est signalée par un « autrement dit » : « autrement dit *u n* est aussi proche que l'on veut de *l* à partir d'un certain rang ».
On a montré que la capsule vidéo va plus loin que le texte écrit (Bridoux et al., 2015). La formulation orale et les reformulations, les gestes sont autant de proximités potentielles. Potentielles parce que les choses restent complexes (voire très complexes) et à la charge de l'étudiant.

Le cours d'amphi

Enfin, pour mesurer l'importance du rôle de l'enseignant – et des étudiants ! – lors de l'introduction de la notion de limite de fonction, nous étudions une vidéo de cours magistral en L1.
L'enseignant débute son cours par une introduction au cours de laquelle il obtient d'un étudiant une première reformulation intuitive de la définition de limite : « *OK, f(x)doit se rapprocher autant que l'on veut de l mais quand x se rapproche de* x_0 ». En se basant sur divers éléments (graphique, gestes, flèches), il la fait évoluer en une seconde reformulation : « *f(x)est aussi proche que l'on veut de l si x est suffisamment proche de* x_0 ». Si cette phase témoigne selon nous de la volonté de l'enseignant de partir des représentations des étudiants, la seconde reformulation reste encore éloignée de la définition symbolique[5].
L'enseignant écrit ensuite la définition formalisée symbolique de limite de fonction en un point, bloc par bloc, en se basant sur une chronologie liée à la seconde reformulation, en commentant, en continuant à reformuler oralement. Après quelques éléments de cours sur les voisinages, il écrit la définition suivante au sein de laquelle une troisième reformulation est également présente :
Soit $x_0 \in R$*, f une fonction définie sur un voisinage de* x_0*. f a pour limite* $l \in R$ *en* x_0 *si et seulement si* $\forall\, \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0$ *tel que* $\forall x \in D_f\ (|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$.
Autrement dit, aussi petit que soit ε *on peut trouver un intervalle suffisamment petit autour de* x_0 *sur lequel la distance de f(x) à l est inférieure à* ε*.*
Selon nous, le travail de l'enseignant témoigne de sa volonté d'introduire la définition de limite en travaillant à la fois sur son formalisme et sa structure logique par le biais d'un réseau de proximités horizontales basées sur de nombreuses reformulations de certaines parties de la définition : avec des mots (oral, écrit), en termes de distances (oral, écrit), d'inégalités impliquant des valeurs absolues (écrit) ou d'intervalles et de voisinages (oral, écrit). Une fois encore, cette tentative nous semble à relativiser compte tenu du fait que certaines de ces reformulations sont orales et non écrites et qu'elles ne prennent pas encore en charge toute la structure logique de la définition.
Après avoir défini (et reformulé) la définition d'une fonction en l'infini, l'enseignant propose de traiter l'exemple suivant : $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x}$.
Pour la démonstration elle-même, il met en valeur le formalisme de la définition en reformulant certains éléments logiques (implication, équivalence, quantificateur) et se base sur certaines connaissances anciennes des étudiants (valeur absolue, fonction inverse). En fin de démonstration, il revient oralement sur une méthode générale et féconde (annoncée) pour

5 Entre autres choses, elle est porteuse d'une inversion possible de l'ordre et de la nature des quantificateurs, les propositions contenant « aussi proche » et « suffisamment proche » dites similairement seront quantifiées différemment.

prouver ce type de résultat : partir d'un epsilon quelconque, chercher une condition suffisante d'une certaine forme sur *x*.
Selon nous, l'enseignant a donc introduit les définitions formalisées par le biais de diverses reformulations (proximités horizontales) et la preuve qu'il fournit pour l'exemple ci-dessus demande une démonstration formelle qu'il tente de « rapprocher » (proximité descendante) d'un usage procédural de ces définitions, lié à certaines connaissances anciennes des étudiants.

Résultats

Cette étude comparative d'un manuel, d'une capsule vidéo et d'un cours en amphi, toute limitée qu'elle soit, nous permet tout d'abord de mieux appréhender les (non-)occasions de proximités *a priori*, dans le manuel et la capsule, et celles qui sont tentées ou non par l'enseignant en amphi. Répétons que même si elles sont tentées, elles ne sont que possibles, au sens où nous ne nous sommes pas donné de moyen pour vérifier que les rapprochements potentiels qu'elles portent deviennent effectifs pour les étudiants qui écoutent.
Un premier résultat commun aux trois types de média concerne l'absence de proximités ascendantes. Une explication possible, qui n'est sans doute pas la seule, peut être liée à la nature FUG de la notion enseignée et par le fait qu'il est difficile de trouver un problème initial duquel les étudiants pourraient déduire de manière autonome la définition visée. Il n'y a donc pas d'activité d'introduction dans les trois cas.
L'analyse du manuel montre que les occasions de proximités que nous avons repérées y sont selon nous manquées. Comme nous l'avons expliqué, la remarque et l'exemple qui suivent la définition ne contiennent aucun lien explicite avec la caractérisation choisie pour la définition, que ce soit par les reformulations données ou dans la structure du raisonnement développé dans l'exemple.
Les proximités possibles sont plus nombreuses dans la capsule mais notre analyse révèle que pour ce média également, ces proximités sont selon nous manquées (voir ci-dessus et Bridoux et al., 2015).
Dans le cours en amphi, les proximités horizontales sont davantage présentes, majoritairement sous la forme de reformulations. Nous avons aussi montré la présence de proximités descendantes dans le passage de la définition aux premiers exemples. Toutefois, ce résultat doit être relativisé par le fait que la plupart de ces tentatives de proximités sont orales et pas écrites. Nous pouvons donc nous demander ce que les étudiants en retirent et quelle trace écrite ils gardent éventuellement de ces commentaires oraux.
Nos analyses nous permettent dans un second temps de formuler des résultats plus indirects par rapport à ceux qui visent directement l'étude des proximités. Nous avons montré que le manuel et la capsule ne prennent pas en compte la structure logique de la définition dans les premiers exemples alors qu'il y a des tentatives réelles en ce sens dans le cours en amphi. Nous pointons donc ici une différence essentielle dans le cours où l'enseignant et les étudiants sont physiquement présents en même temps. On peut ainsi supposer que la vue des étudiants en train d'écouter inspire certaines explicitations à l'enseignant. Un résultat semblable peut être formulé à propos de la prise en compte des connaissances antérieures où il semble qu'elles soient davantage sollicitées dans le cours en amphi, où cela peut être régulé par l'enseignant.
Enfin, les raisonnements développés dans le manuel ne sont en outre pas tous rédigés avec la rigueur attendue à ce niveau d'enseignement mais nous comprenons que ce n'est sans doute pas l'objectif premier de ce type de média.

BILAN ET PERSPECTIVES

Dans cette étude, nous avons présenté des analyses théoriques qui fournissent des indicateurs permettant d'apprécier les déroulements des moments de cours (en termes de rapprochements, interprétés en termes de ZPD) se référant à une analyse des contenus, générale et particulière (utilisant le relief attribué à l'enseignement de ces notions). En ce sens, la mise en regard des occasions de proximités – déterminées par le chercheur *a priori* à partir du relief, dans les manuels – et des proximités possibles – repérées par le chercheur *a posteriori* dans le discours tenu par l'enseignant en cours – permet de repérer ce qui est implicite, ou au contraire les « ajouts », dans l'un ou l'autre média. Dans le cours magistral étudié, nous avons pu voir que les proximités possibles ont au moins trois origines : elles sont dues aux anticipations de l'enseignant, aux interactions visibles ou invisibles entre l'enseignant et les étudiants (regards, attitudes…) ou encore liées à des questions explicites d'étudiants, éventuellement inattendues, qui entrainent des improvisations. Contrairement à ce que l'on pourrait croire, il se passe donc des choses en cours, la présence des étudiants semblant avoir un effet sur le contenu des liens discursifs que l'enseignant tente d'organiser entre les étudiants et la connaissance visée (voir les différences entre les analyses de la capsule vidéo et du cours magistral).

Cette étude est un travail en cours, qui admet donc un certain nombre de limites. En particulier, elle porte sur un petit nombre de vidéos et les effets du cours sur les apprentissages des étudiants durant les moments d'exposition des connaissances sont encore hors de portée. Cependant, il nous semble que la méthodologie qui y est mise en œuvre offre certaines perspectives.

En premier lieu, elle peut permettre de comparer différents cours sur le même sujet, de comparer des prévisions de chercheurs et des cours effectifs d'enseignants. Plus précisément, on peut envisager de baliser une palette de possibles, à partir des régularités et des diversités des déroulements de cours réels, en fonction des notions et en référence à une étude didactique.

En second lieu, elle pourrait aussi permettre de prendre en compte l'évolution des modalités de cours, l'analyse de nouvelles ressources (en lien avec les pédagogies inversées comme les capsules (Allard et al., 2016) ou les MOOC).

Enfin, dans quelle mesure un cours dépend de la notion enseignée ? Quelles en sont les variables ? A ce titre, il pourrait être intéressant d'étudier des cours portant sur d'autres notions, comme celles du début de l'algèbre linéaire toujours en première année d'université. Dans ce cadre, une recherche avait montré l'existence de liens étroits entre les moments de cours, leur but (objet ou outil) et l'autonomie laissée aux étudiants lors des premiers travaux dirigés en algèbre linéaire (Grenier-Boley, 2009, 2014). Une idée serait de la prolonger en comparant les moments de cours donnés en travaux dirigés à ceux donnés en amphi.

De plus, lorsque les observations s'y prêtent (temps long) nous essayons aussi de dégager des logiques globales repérables dans plusieurs cours d'un même enseignant – traduisant une certaine cohérence et traduites par des récurrences dans les choix étudiés des enseignants. De manière caricaturale, on peut détecter deux logiques « en tension », opposées, qui traversent les manières d'exposer les cours devant les élèves, activant deux niveaux de pensée :

- une logique un peu globale, liée au sens, à l'organisation des idées entre elles, au mode de fonctionnement en mathématiques (vrai/faux etc.)
- et une autre plus locale, plus liée à la volonté de faire mémoriser les mots et les phrases, de faire suivre localement les justifications, et aussi d'armer les futures utilisations (y compris techniques), mettant aussi plus en jeu les contrats.

De manière plus générale, ainsi complétée, l'étude des cours pourrait aider à mieux comprendre les pratiques ordinaires d'enseignement dans le supérieur, ce qui est d'autant plus crucial qu'il n'existe pas (ou peu) de formation des enseignants à ce niveau. En ce sens, une recherche a débuté au LDAR pour tenter d'éclaircir l'empreinte de la discipline de recherche sur les pratiques enseignantes des enseignants-chercheurs, avec une vision comparatiste entre les disciplines concernées (chimie, géographie, mathématiques, physique).

D'autres possibilités pour étudier les moments de cours existent, par exemple celle de Petropoulou et ses collègues (2016). Si ce travail a en commun de porter aussi sur l'analyse du discours des enseignants universitaires en cours, l'approche qui y est développée diffère de la nôtre. Ainsi, l'analyse du relief des notions sous-jacentes y est moins précise, il y a moins de références aux notions mathématiques visées par les cours étudiés. Par contre, l'étude se focalise sur la manière dont les enseignants prennent ou pas en compte les besoins des étudiants, y sont sensibles.

Si nous reprenons ce qui a été évoqué au début de ce séminaire, d'une part les changements d'échelle et d'autre part les ouvertures suggérées par Michèle Artigue notamment (Artigue, 2016), il nous semble que l'enseignement en Master MEEF mathématiques est un lieu à investir, en transposant des résultats de recherche comme ceux qui précèdent. D'une part, cela pourrait favoriser un travail commun entre les mathématiciens et les didacticiens qui y interviennent et d'autre part permettre de diffuser des résultats de recherche aux étudiants. C'est aussi un lieu où il y a des besoins (affirmés ou non) de la part des étudiants qui deviendront les futurs enseignants du secondaire.

Une dernière perspective concerne les questions liées au renouvellement des enseignements supérieurs, en lien avec les TICE et aux nouvelles possibilités d'investir la dynamique expérimental/déductif restent difficiles : il semble encore difficile de concilier l'émergence souhaitée de besoins théoriques chez les étudiants et une utilisation de logiciels qui embarquent tellement de mathématiques qu'il ne reste plus qu'à s'en servir…

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABBOUD, M., ROBERT, A., ROGALSKI, J. & VANDEBROUCK, F. (2017). Pour une théorie de l'activité en didactique des mathématiques, un résumé des fondements partagés, des développements récents et des perspectives. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* 18, IREM Paris Sud.

ALLARD, C., ASIUS, L., BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIES, M., PILORGE, F. & ROBERT, A. (2016). Quand le prof de mathématiques est sur Youtube… Quelques réflexions sur les moments d'exposition des connaissances et les capsules pour des classes inversées. *Cahier du Laboratoire de Didactique André Revuz* 16, Septembre 2016.

ARNON, I., COTTRILL, J., DUBINSKY, E., OKTAÇ, A., ROA FUENTES, S., TRIGUEROS, M. & WELLER, K. (2013). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer Science & Business Media.

ARTIGUE, M. (1988). Procédures différentielles dans la mise en équation de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 2*, 173-190.

ARTIGUE, M. (1989). Une recherche d'ingénierie sur l'enseignement des équations différentielles en DEUG première année. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques et de l'Informatique.* Grenoble : IMAG.

ARTIGUE, M. (2016). Mathematics Education Research at University Level: Achievements and Challenges. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, 11-27.

ARSAC, G. (1999). Variations et variables de la démonstration géométrique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19(3)*, 357-390.

AUTHIER, H. (1986-1987). Connaissances en mathématiques des étudiants issus des bac F. *Cahiers de didactique* n°31 et n°46, IREM Paris Sud.

BLANCHARD-LAVILLE, C. (1980) *Les étudiants de psychologie face à l'enseignement de statistiques (analyse) des réponses à un test de mathématiques et à des questionnaires d'opinion*. Thèse de troisième cycle, Paris 7.

BOSCHET, F. & ROBERT, A. (1984). Acquisition des premiers concepts d'analyse sur R dans une section ordinaire de première année de Deug. *Cahier de didactique* 7, IREM Paris Sud.

BROUSSEAU, G. (1998). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BRIDOUX, S. (2011). *Enseignement des premières notions de topologie à l'université – Une étude de* cas. Thèse de doctorat de l'Université Paris Diderot (Paris 7).
BRIDOUX, S., CHAPPET-PARIES, M., GRENIER-BOLEY, N., HACHE, C. & ROBERT, A. (avec la collaboration de LEVI, M.C. et PILORGE, F.) (2015). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques (secondaire et début d'université). *Cahier du laboratoire de didactique André Revuz*, 14, Juillet 2015.
BRIDOUX, S., HACHE, C., GRENIER-BOLEY, N., & ROBERT, A. (2016). Les moments d'exposition des connaissances en mathématiques, analyses et exemples. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 21*, 187-233.
DORIER, J.-L. (1991). Sur l'enseignement des concepts élémentaires d'algèbre linéaire à l'université. *Recherches en didactique des mathématiques, 11(2/3)*, 325-364.
DORIER, J.-L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia mathematica, 22(3)*, 227-261.
DORIER, J.-L. (1998). État de l'art de la recherche en didactique à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire. *Recherches en didactique des mathématiques, 18(2)*, 191-230.
DORIER, J.-L. (Ed.) (1998). *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
DORIER, J.-L. (Ed.) (2000). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht : Kluwer Academic Publisher.
DORIER, J.-L., ROBERT, A., ROBINET, J. & ROGALSKI, M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en DEUG première année, essai d'évaluation d'une ingénierie longue et questions. In M. Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de Didactique des Mathématiques en France* (pp. 328-342). Grenoble : La Pensée Sauvage.
DOUADY, R. (1987). Jeu de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2)*, 5-31.
DURAND-GUERRIER, V. & ARSAC, G. (2003). Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spéficités de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques, 23(3)*, 295-342.
GRENIER, D. & LEGRAND, M. (1986). Une séquence d'enseignement sur l'intégrale en DEUG A première année. *Cahier de didactique* n° 22, IREM Paris Sud.
GRENIER, D. (2012). Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x, 88*, 27-47.
GRENIER-BOLEY, N. (2009). Un exemple d'étude de gestion des déroulements en travaux dirigés de Mathématiques à l'Université. *Cahier de DIDIREM* n°59.
GRENIER-BOLEY, N. (2014). Some issues about the introduction of first concepts in linear algebra during tutorial sessions at the beginning of university. *Educational Studies in Mathematics, 87(3)*, 439-461.
GUEUDET, G. (2005). Perspectives en didactique des mathématiques. La transition secondaire-supérieur : résultats et perspectives des recherches didactiques. In A. Rouchier & I. Bloch (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques, école d'été XIII* (pp. 159-175). Grenoble : La Pensée Sauvage.
HOLTON, D. (Ed.). (2001). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (Vol. 7). Springer Science & Business Media.
JARRAUD, P. (1987). Travaux dirigés de mathématiques sur micro-ordinateurs en DEUG SSM. *Cahiers de didactique* n°27, n°35 et n°45, IREM Paris Sud.
LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécificité de l'analyse. *Repères IREM, 10*, 123-158.
MAC ALEESE, J., PIAN, J., ROBERT, A., .ROGALSKI, M. & VIENNOT, L. (2009). Propositions pour une formation des moniteurs en mathématiques. *Documents pour la formation* n°12, IREM Paris-Diderot.
PETROPOULOU, G., JAWORSKI, B., POTARI, D. & ZACHARIADES, T. (2016). Addressing large wohorts of first year mathematics students in lectures. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Montpellier, 390-399.
PIAN, J. (1999). Diagnostic des connaissances de mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *Cahier de Didirem* n°34, IREM Paris Diderot.
ROBERT, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en didactique des mathématiques, 3(3)*, 307-341.
ROBERT, A. (1983). L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG. *Bulletin de l'APMEP, 340*, 431-449.
ROBERT, A. (1985). Rapport enseignement/apprentissage (débuts de l'analyse sur R) : connaissance des élèves, analyse d'une section de Deug A première année (connaissance antérieures et procédures en cours d'apprentissage), évaluation. *Cahiers de didactique* n°18.0, 18.1, 18.2, 18.3, IREM Paris-Sud.
ROBERT, A. (1987). De quelques spécificités de l'enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire (EPO). *Cahier de didactique* n°47, IREM Paris-Sud.
ROBERT, A. (1992). Projets longs et ingénieries pour l'enseignement unviersitaire : questions de problématiques et méthodologie. *Recherches en didactique des mathématiques, 12(2/3)*, 181-220.
ROBERT, A. (2007). Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques du second degré. *Recherches en didactique des mathématiques, 27(3)*, 271-312
ROBERT, A. & VANDEBROUCK, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves : analyses de séances sur des tâches complexes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 34(2/3)*, 239-285.
ROBINET, J. (1984). *Ingénierie didactique de l'élémentaire au supérieur*. Thèse d'état, Paris 7.
ROBINET, J. (1986). Les réels : Quels modèles en ont les élèves ? *Cahier de didactique* n°21, IREM Paris Sud.

ROGALSKI, M. (1994). L'enseignement de l'algèbre linéaire en première année de DEUGA. *La gazette des mathématiciens, 39-62*.
SCHNEIDER, M. et al., groupe AHA (1991). *Vers l'infini pas à pas, approche heuristique de l'analyse, manuel pour l'élève*. Bruxelles : De Boeck.
TALL, D. (1991). *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11). Springer Science & Business Media.
VANDEBROUCK, F. (2011). *Des technologies pour l'enseignement et l'apprentissage des fonctions du lycée à l'université : activités des élèves et pratiques des enseignants*. Note de synthèse pour une HDR, Université Paris Diderot.
VANDEBROUCK F. (Ed.) (2012). *Mathematics classrooms students' Activities and Teachers' Practices*. Rotterdam: Sense Publishers.

ANNEXE 1 : SOMMAIRE DE LA BROCHURE « ENSEIGNER EN DEUG AUTREMENT »

TABLE DES MATIERES

		Page
PREFACE		1
I	ADAPTER L'ENSEIGNEMENT DU DEUG A	3
	Quels étudiants, quels objectifs d'enseignement ?	4
	Nouveaux programmes, nouveaux élèves	9
	Variété des acquis des bacheliers C, D, E, F.	16
II.	QUELQUES PRINCIPES DIRECTEURS	31
	Aspects didactiques	33
	Travail en petits groupes en première année de DEUG	49
	L'évaluation des connaissances	57
	Enseigner des méthodes en mathématiques	65
	Questionner les étudiants sur l'enseignement	81
	Le débat scientifique en cours de mathématiques	91
III.	DES EXEMPLES D'ENSEIGNEMENTS QUI SEMBLENT MARCHER	111
	Enseigner autrement les équations différentielles en DEUG	113
	"Circuit" ou les règles du débat mathématique	129
	Les nombres réels : comment en faire parler en T.D. avant de les enseigner en cours ?	163
	Deux exemples d'introduction à la convergence des suites numériques	171
	L'enseignement de la convergence des suites numériques en DEUG	175
	Comment étudier la convergence d'une suite réelle ? un exemple de méthode	197
	Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale	205
	Utilisation pédagogique de l'informatique : mathématiques et micro-ordinateurs, gadget ou outil pédagogique ?	221
	Un exemple de pratique des mémoires en DEUG A première année	233
	Deux exemples de discours sur les mathématiques et leur apprentissage à l'usage des étudiants	251
IV	DES QUESTIONS PROSPECTIVES	277
	Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire ?	279
	De l'utilisation de l'histoire des mathématiques	293
	L'interdisciplinarité	319

DEVELOPPEMENT DES CONNAISSANCES MATHEMATIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT AU COURS D'UN PROCESSUS DE *LESSON STUDY*

Stéphane **CLIVAZ**
Laboratoire Lausannois Lesson Study et UER MS, HEP Vaud, Suisse
stephane.clivaz@hepl.ch

Résumé
Ce texte présente une recherche en cours portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement utilisées et développées au cours d'un processus de lesson study mené avec des enseignants de l'école primaire. Notre modèle d'analyse intègre les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement, les niveaux d'activité du professeur et les phases du cycle de lesson study. Plusieurs extraits d'un cycle consacré à la numération décimale de position sont analysés à l'aide de ce modèle.

Mots clés
Lesson study, connaissances mathématiques pour l'enseignement, numération, développement professionnel

Ce texte et la présentation faite au séminaire national de l'ARDM sont inscrits dans une rubrique traditionnellement intitulée « travaux en cours ». Ils visent à présenter quelques extraits des recherches que nous menons actuellement au sein du Laboratoire Lausannois Lesson Study dans le cadre d'un processus de *lesson study* (LS) accompli par un groupe d'enseignants lausannois à propos de leçons de mathématiques dans les degrés 5H-6H[1]. Les LS seront tout d'abord présentées, du point de vue de leur développement historique et de leur déroulement. Nous présenterons ensuite le travail réalisé par ce groupe LS et terminerons la première partie par la présentation du cadre théorique utilisé pour analyser les connaissances mathématiques pour l'enseignement en jeu lors d'un processus LS. La deuxième partie illustrera l'utilisation de ce modèle théorique par des extraits d'analyses portant sur plusieurs extraits d'un cycle LS consacré à l'enseignement de la numération décimale de position. La conclusion ouvrira enfin quelques pistes de réflexion.

[1] Le degré 5HarmoS correspond au CE2 en France et donc à des élèves de 8 à 9 ans. Le degré 6HarmoS correspond au CM1 en France, et donc à des élèves de 9 à 10 ans.

1 CADRE

Les *lesson study*, de Tokyo à Lausanne

Les *Jugyo Kenkyu*, littéralement études de leçons ou *lesson study* (LS), sont nées au Japon dans les années 1890. Dans le mouvement d'occidentalisation du Japon caractéristique de l'ère Meiji (1868-1912), les écoles se sont elles aussi occidentalisées. Des milliers d'étudiants ont été envoyés en Europe et aux USA et plus de 3'000 enseignants et formateurs occidentaux ont été recrutés. Pris dans ce courant de réformes, des enseignants des écoles primaires attachées aux écoles normales nouvellement crées ont commencé à se réunir afin d'observer des leçons, en particulier de mathématiques, et de les examiner de manière critique (Inagaki, 1995, cité par Shimizu, 2014, p. 359). Ces LS se sont ensuite généralisées dans l'ensemble du Japon. Dans les années 1990, suite aux études internationales montrant les bonnes performances des élèves japonais en mathématiques, l'étude TIMSS[2] a comparé en détail les leçons de mathématiques de 8ème année[3], notamment japonaises et étatsuniennes. Les chercheurs ont été frappés de constater que ces leçons variaient énormément d'un pays à l'autre, mais fort peu à l'intérieur d'une même culture. Stigler et Hiebert (1999) ont ainsi parlé d'un *Teaching Gap*, un fossé en matière d'enseignement, en particulier entre le Japon d'une part, et l'Allemagne et les USA d'autre part. Ils ont par exemple mis en évidence (voir Figure 1) la part du temps de travail passé par les élèves à entraîner des techniques (*practice*), à appliquer des stratégies apprises auparavant (*apply*) et à inventer des stratégies (*invent/think*).

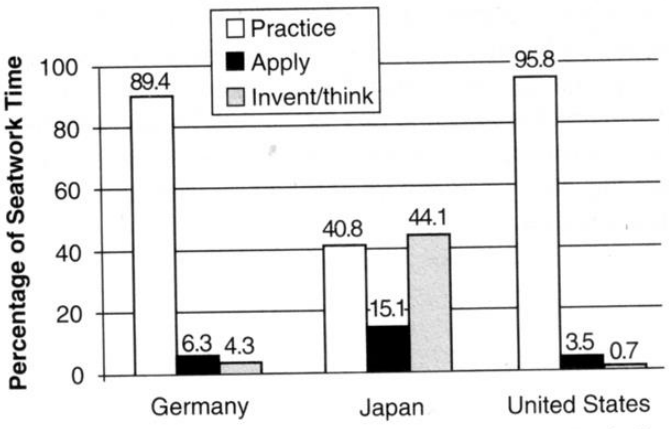


Figure 4.4. Average percentage of seatwork time spent in three kinds of tasks. *Source:* U.S. Department of Education, National Center for Education Statistics, Third International Mathematics and Science Study, Videotape Classroom Study, 1994–95.

Figure 1 : Comparaison du type de travail des élèves (Stigler & Hiebert, 1999, p.71)

En se basant sur les travaux de Yoshida (thèse qui sera publiée ultérieurement: Fernandez & Yoshida, 2004), Stiegler et Hiebert ont décrit ce qui, selon eux, expliquait pourquoi, par contraste avec l'enseignement essentiellement procédural aux USA, les enseignants japonais avaient un enseignement des mathématiques à la fois efficace et essentiellement axé sur la compréhension des mathématiques et la résolution de problème : la pratique des *Jugyo*

[2] Voir http://www.timss.org

[3] La 8ème année (degré international), 10ème HarmoS en Suisse, 4ème en France correspond à des élèves de 13 à 14 ans.

Kenkyu. Fort de cette promotion, et grâce en particulier aux travaux de Lewis qui a formalisé et popularisé les LS aux USA (Lewis, 2002, 2015; Lewis & Hurd, 2011), ce mode de développement professionnel s'est développé aux USA. Dans la méta analyse de Gersten, Taylor, Keys, Rolfhus et Newman-Gonchar (2014) un programme LS (Perry & Lewis, 2011) a par exemple été jugé comme un des deux seuls programmes de développement professionnel en mathématiques (sur 643) amenant une amélioration significative des résultats des élèves selon les critères du US Department of Education Institute of Education Sciences. Cette expansion est aussi visible en Europe du Nord et dans le reste de l'Asie. En Suisse romande, un laboratoire de recherche et de formation autour des LS, le Laboratoire Lausannois Lesson Study (3LS[4]) a été fondé à Lausanne en 2014.

Dans le modèle notamment pratiqué à Lausanne, les LS démarrent à partir d'une difficulté d'enseignement ou d'apprentissage identifiée par un groupe d'enseignants. Les enseignants analysent l'apprentissage visé, étudient la notion, consultent les divers manuels, étudient des articles de revues professionnelles, etc. Cette étude leur permet de planifier ensemble une leçon.

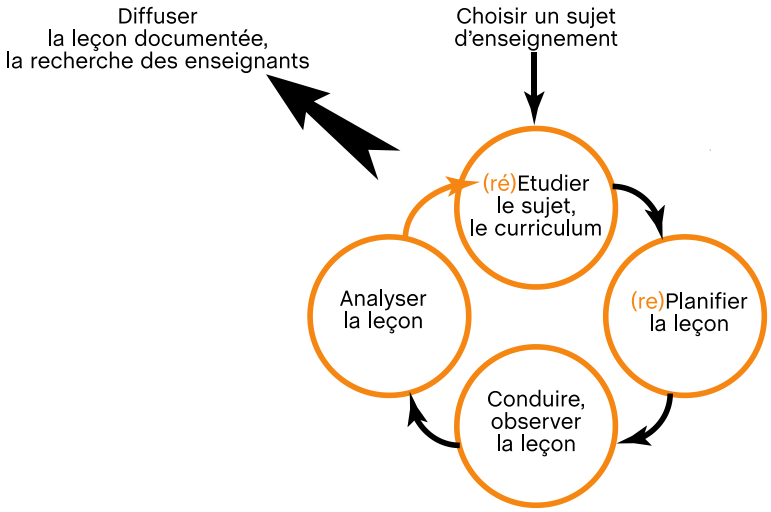


Figure 2 : Le processus LS (d'après Lewis & Hurd, 2011, p.2)

Même si les LS connaissent un certain nombre de variations au Japon et surtout dans leurs adaptations hors du Japon (Takahashi & McDougal, 2016), le processus reste codifié autour de ce schéma dont le cœur est la conduite et l'observation de la leçon de recherche (Shimizu, 2014), véritable phase expérimentale d'un processus de recherche. Les auteurs considèrent ainsi qu'une LS est

> un travail de recherche : elle procède à partir de travaux documentés antérieurs, ainsi que de questions et de buts précis; elle implique la formulation explicite d'hypothèses, ainsi que des points et des conditions d'observations pour les tester; elle organise des expérimentations avec un dispositif concret (la leçon) qui « intègre» les hypothèses et permet de les tester, et qui est évalué de façon souvent très rigoureuse; elle rend public (ou, au moins, partageable) ses résultats sous forme de document sous une forme standardisée, et permet donc en principe aux collègues de refaire l'expérience sous des conditions déterminées (Miyakawa & Winsløw, 2009b, p.83).

Au Japon notamment, cette leçon de recherche, ainsi que la discussion qui suit, sont souvent ouvertes à l'ensemble des enseignants de l'école, voire d'un district scolaire, permettant ainsi

[4] Voir www.hepl.ch/3LS

une diffusion de pratiques innovantes, voire une exploration de nouvelles leçons ou de nouveaux sujets d'enseignements lors de réformes curriculaires (Lewis & Takahashi, 2013).

Le groupe LSM et la recherche en cours

En suivant le modèle décrit plus haut, un groupe de huit enseignants de 5H-6H de deux établissements primaires de la région lausannoise a travaillé durant deux ans autour de leçons de mathématiques. Encadré par deux facilitateurs[5], qui sont pour l'un didacticien des mathématiques (l'auteur de cet article) et pour l'autre spécialiste des processus d'enseignement-apprentissage, le groupe *Lesson Study en Maths* (LSM) a effectué quatre cycles de leçons de mathématiques consacrées à la numération décimale, aux transformations géométriques et à la résolution de problèmes (deux cycles). Les deux facilitateurs ont plusieurs rôles : un rôle d'animateur dans lequel ils organisent les séances et les conduisent, un rôle de formateur d'enseignants, un rôle d'expert dans lequel ils amènent du contenu mathématique, didactique ou pédagogique et un rôle de participant à l'intérieur du dispositif avec l'écriture de plans de leçons finaux (disponibles sur le site du laboratoire 3LS) ou d'articles dans des revues professionnelles (voir par exemple Baetschmann *et al.*, 2015). Leur rôle a d'ailleurs évolué au cours du dispositif et selon les sujets abordés. Pendant les séances collectives, ils orientent, parfois imposent des choix didactiques, parfois laissent les enseignants faire leurs choix puis expérimenter lors des leçons de recherche (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016). Les facilitateurs ont attendu la fin du dispositif LS pour analyser les données de recherche et pour séparer leur rôle de facilitateurs et de chercheurs. En ce qui concerne le didacticien, ces analyses visent à décrire les connaissances mathématiques pour l'enseignement en jeu dans le processus LS et nous allons maintenant décrire le modèle d'analyse de ces connaissances.

Le modèle d'analyse

Les connaissances mathématiques pour l'enseignement

À partir des travaux fondateurs de Shulman (1986 / 2007), de nombreuses recherches internationales ont été menées concernant les connaissances mathématiques des enseignants, la catégorisation de ces connaissances et leurs effets sur les résultats des élèves (Bednarz & Proulx, 2009; Tchoshanov, 2011). Ainsi que le mentionne la revue du National Mathematics Advisory Panel (2008), la plupart des recherches antérieures ont tenté de montrer un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants primaires et les résultats en mathématiques des élèves. Ces liens ont été étonnement difficiles à exhiber et cette difficulté a conduit à de nombreuses catégorisations de ces connaissances (Clivaz, 2011, pp.23-41). La catégorisation la plus couramment utilisée est celle de Ball, Thames et Phelps (2008) qui proposent de classifier les différentes Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement[6] (CME) selon le découpage présenté à la Figure 3.

[5] Les deux formateurs-chercheurs du dispositif LS sont nommés, comme c'est souvent le cas en anglais, les facilitateurs (Clerc-Georgy & Clivaz, sous presse).

[6] Les termes de Ball *et al.* (2008) sont : Mathematical Knowledge for Teaching / Subject Matter Knowledge / Common Content Knowledge / Horizon Knowledge / Specialized Content Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Knowledge of Content and Teaching / Knowledge of Content and Students / Knowledge of Content and Curriculum.

La traduction est la mienne, comme toutes celles de cet article.

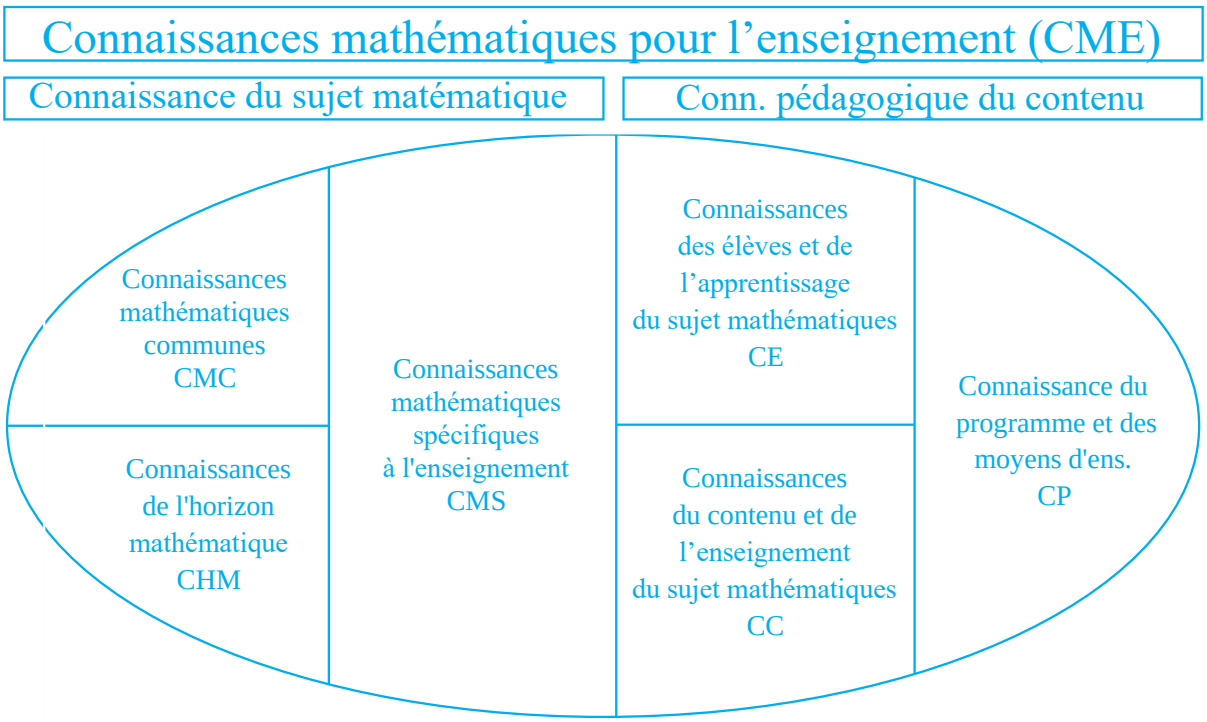


Figure 3. – Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (Ball et al., 2008, p.403)[7]

Une des particularités de cette classification est la mise en évidence de Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement (CMS). Les CMS sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. Ces CMS se distinguent des Connaissances Mathématiques Communes (CMC), mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking. (Ball, Hill & Bass, 2005, p.21)

Cette classification a permis de montrer l'influence des CMS sur les résultats des élèves (Hill, Rowan & Ball, 2005). Elle a également été utilisée pour tenter de décrire la *mathematical quality of instruction* au moyen d'observations de classes (Hill *et al.*, 2008). Toutefois, ainsi que le reconnaissent Ball et ses collègues (2008, p.403), cette classification demeure statique et n'est pas centrée sur *comment* les connaissances mathématiques de l'enseignant influencent l'enseignement et l'apprentissage. De fait, comme l'ont relevé Steinbring (1998) et Margolinas (2004) à propos de la classification de Shulman, ces catégories sont figées et ne sont pas « a good model for teacher's activity, which is more complicated » (Margolinas, Coulange & Bessot, 2005, p.107). Comme l'affirment Davis et Renert, « this will require more fine-grained analyses than large-scale assessments » (2013, p.20). Cette finesse dans le grain d'analyse et une certaine mobilité dans l'analyse des activités du professeur sont présentes dans le modèle des niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 1995).

[7] Ma traduction des termes de Ball *et al.*: Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) / Subject Matter Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Common Content Knowledge (CCK) / Horizon Knowledge HK) / Specialized Content Knowledge (SCK) / Knowledge of Content and Teaching (KCT) / Knowledge of Content and Students (KCS) / Knowledge of Content and Curriculum (KCC).

Les niveaux d'activité du professeur

Ce modèle a été développé par Margolinas (1995) qui a enrichi la structuration du milieu de Brousseau (1990) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

+3	Niveau noosphérien ou idéologique	[…] activité du professeur qui réfléchit de façon très générale à l'enseignement, ou bien, toujours en général, à l'enseignement des mathématiques. À ce niveau, l'activité du professeur n'est pas finalisée.
+2	Niveau de construction ou de conception d'un thème	[…] activité du professeur est de concevoir les grandes lignes de l'enseignement d'un thème. Du point de vue de l'ingénierie didactique, c'est à ce niveau qu'intervient de façon caractéristique la recherche d'une situation fondamentale. Si l'on considère l'observation des pratiques ordinaires, on pourrait parler à ce niveau de recherche de problématique.
+1	Niveau de projet de leçon	[…] activité du professeur qui détermine le scénario d'une leçon.
0	Niveau de la situation didactique	[…] action du professeur en classe. Il s'agit du *niveau de base* dans lequel les élèves et le professeur interagissent es-qualité ; et c'est pourquoi il reçoit le numéro zéro.
-1	Niveau d'observation ou de dévolution	[Niveau] de la dévolution ou de l'observation de l'activité des élèves.

Tableau 1 : Niveaux d'activité du professeur, d'après (Margolinas, 2002, p.142)

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas, 1995, p.96) et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur.

Notre modèle d'analyse des CME durant un cycle LS

En vue d'analyser les connaissances mathématiques que les enseignants utilisent et développent lors du processus LS, les catégories développées par Ball *et al.* (2008) offrent une catégorisation de ces connaissances à chaque étape du processus. Dans une autre direction, les niveaux d'activité du professeur (Margolinas, 2002) permettent de décrire les activités de l'enseignant lors de la leçon de recherche, mais aussi hors de la classe. Deux séries de travaux nous ont conduit à proposer un modèle d'analyse des CME en jeu lors du processus LS (Clivaz & Ni Shuilleabhain, 2016). Nous nous sommes basés tout d'abord sur les travaux de Ni Shuilleabhain (2015, 2016) qui a analysé les CME utilisées par des enseignants dans un cycle LS. Nous avons également pris appui sur la combinaison, au sens de Prediger, Bikner-Ahsbahs et Arzarello (2008), de la catégorisation des CME et des niveaux d'activité du professeur. Cette combinaison s'est révélée fructueuse (Clivaz, 2015a) dans nos recherches précédentes (Clivaz, 2011, 2014, 2016).
Ce modèle (voir Figure 4) vise à repérer et à catégoriser les CME utilisées par les enseignants à chaque étape lors du processus LS et à situer à quel niveau d'activité elles s'expriment. Il vise également à suivre ces connaissances au cours du processus et à tenter de percevoir leur développement.

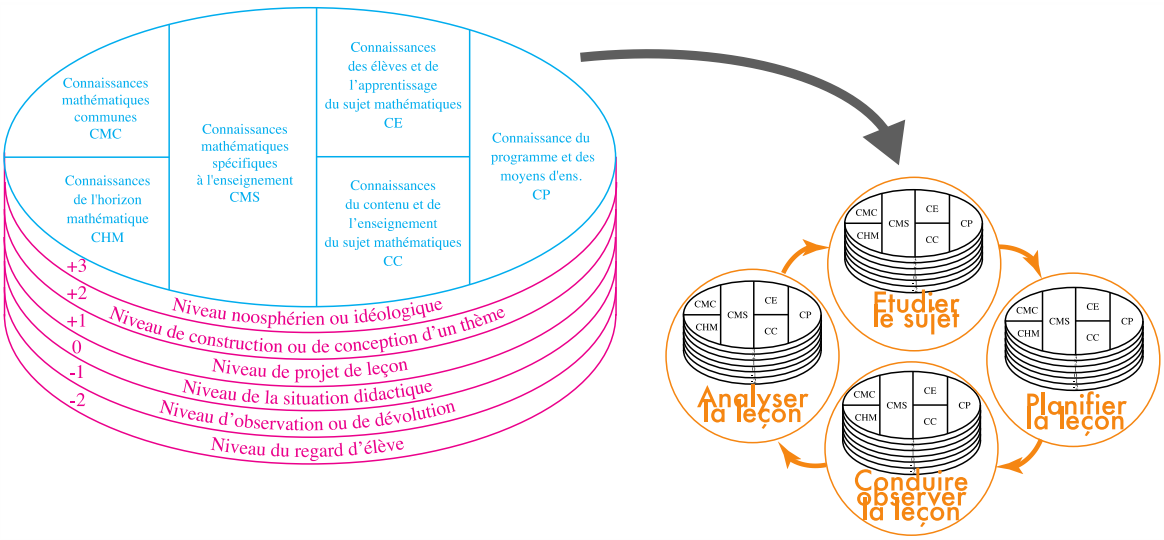


Figure 4. – Notre modèle d'analyse des CME durant un cycle LS

Il existe plusieurs types de groupes ou de communautés de pratiques dans lesquels les enseignants s'expriment à propos de leurs valeurs ou de questions générales concernant l'enseignement et l'apprentissage de manière générale ou à propos des mathématiques (niveau +3) ou à propos de l'enseignement et de l'apprentissage du sujet mathématique donné (niveau +2). Le processus LS a toutefois la particularité de permettre de recueillir également des données sur la préparation de la leçon (niveau +1). Le processus LS permet de plus d'analyser ce que fait l'enseignant en classe quand il enseigne (niveau 0) ou observe ses élèves (niveau -1), mais aussi de recueillir les réflexions et les observations des enseignants quant à ces niveaux +1, 0 et -1, tant durant les phases de planification ou d'analyse que durant la leçon de recherche elle-même. De plus, lors du processus LS et comme relevé par Fernandez, Cannon et Chokshi (2003) et repris par Ni Shuilleabhain (2015), les enseignants voient parfois certains éléments de la leçon « through the eyes of their students » (Fernandez *et al.*, 2003, p.176), s'exprimant même comme des élèves. Ce « student lens » nous semble être situé à un niveau encore en-dessous du niveau d'observation et nous en avons donc fait un niveau -2.
Ce modèle permet ainsi de suivre une CME à la fois durant les diverses étapes du processus et de la situer aux divers niveaux d'activité du professeur, comme nous allons le voir dans les analyses suivantes. Les CME sont ici considérées comme appartenant collectivement au groupe effectuant le processus LS et les individus ne sont pas distingués.

2 ANALYSES POUR UN CYCLE LS

Méthodologie

Le cycle LS dont nous présentons quelques analyses était le premier de la série et était consacré à la numération décimale de position. Il concerne sept réunions et deux leçons de recherche. Toutes les réunions du processus ainsi que les leçons de recherches ont été filmées, transcrites et codées dans un logiciel qualitatif d'analyse de données (NVivo). La durée totale transcrite est de plus de 17 heures. Les notes d'observation des enseignants (prise sur tablette

avec l'application LessonNote[8]) ainsi que les plans de leçon produits par le groupe ont également été recueillis et codés. Nous allons présenter quelques extraits de l'analyse de ces données durant plusieurs phases du processus afin de mettre en évidence les CME utilisées et développées par les enseignants à divers niveaux d'activité. Nous faisons le choix de suivre la connaissance mathématique liée à l'aspect décimal (Serfati, 2005; Tempier, 2013) de la numération décimale de position.

Étude du sujet et du curriculum, planification de la leçon

Lors de la première réunion, les enseignants ont été encouragés à proposer des sujets pour les cycles LS à venir. Ce qui semblait leur poser le plus de problèmes, c'est justement la résolution de problèmes. Viennent ensuite les passages de centaines ou de milliers dans le système de numération et les transformations géométriques. Afin d'éviter de débuter le processus par le sujet le plus délicat, le groupe a retenu la numération pour le premier cycle.

Afin de mieux cerner le sujet, les facilitateurs ont lancé une discussion pour mieux savoir où étaient situées les difficultés liées à la numération et ont posé la question de savoir ce qui était délicat dans la numération.

Océane[9]	Le passage des dizaines.
Caroline	Mais chaque passage, chaque passage...
F-Stéphane	Qu'est-ce qui se passe dans le passage des dizaines?
Caroline	C'est qu'on a plus de choses pour écrire là-dessus quoi on est obligé d'utiliser les chiffres qui existent déjà. Donc on, on fait un passage pour revenir à un... En fait... Bah oui, c'est le boulier en fait, on doit déplacer de un à chaque fois qu'on arrive à un... un neuf à la fin. On doit déplacer d'un.
Océane	On échange un paquet de dix…

Dans ce passage, situé durant la phase d'étude du sujet, les enseignants se situent au niveau de la construction du thème (+2) et désencapsulent la connaissance mathématique de la numération décimale de position en base dix (*CMS*) en faisant référence à la fois à l'aspect décimal et à l'aspect positionnel de la numération. Afin de rendre plus concrète cette observation des difficultés liées à la numération, le groupe a décidé de travailler sur des erreurs d'élèves amenées à la fois par les enseignants et par les facilitateurs. L'une de ces erreurs était

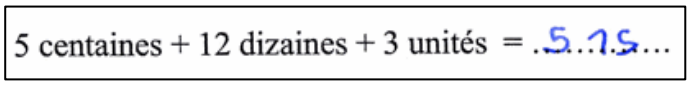


Figure 5. – Erreur d'élève[10]

Au cours de ce travail sur les erreurs d'élèves, les enseignants ont effectué les tâches semblables à celle de la Figure 5 de la même manière que s'ils avaient été des élèves, se plaçant au niveau du *regard d'élève (-2),* leur permettant de décortiquer encore plus la CMS liée à la numération décimale de position durant la phase de construction du thème. La conclusion, apportée par les facilitateurs remonte ensuite au niveau +2 :

F-Anne	Ouais. C'est pas l'échange en soit... c'est un échange qui est particulier parce que c'est l'échange dans le système décimal, donc on voit bien y a les deux dimensions. Y a la dimension de position et y a la dimension décimale qui est révélée en échange.
F-Stéphane	Moi j'aime mieux parler de groupement que d'échange.

[8] Voir http://lessonnote.com

[9] Les prénoms des enseignant-e-s sont fictifs. Les facilitateurs, Anne et Stéphane, sont désignés par leur vrai prénom précédé de F- .

[10] Tirée de http://numerationdecimale.free.fr/index.php?option=com_content&view=article&id=133&Itemid=148

Océane Ah d'accord.

C'est sur cette analyse d'erreur permettant de découvrir, au travers des erreurs des élèves (CE) les deux aspects de la numération décimale de position (CMS) que le groupe va proposer et analyser une tâche permettant de travailler l'aspect décimal de la numération de position. Cette tâche, sous forme de jeu de l'oie tirée de CapMath (Charnay, Combier, Dussuc, Madier & Madier, 2007), mettait en jeu des échanges de cartes « 1 centaine », « 1 dizaine » et « 1 unité » (Batteau & Clivaz, 2016).

Conduite et observation de la leçon, analyse de la leçon

Une première leçon de recherche a eu lieu dans la classe d'une enseignante du groupe. Durant la discussion suivant la leçon et en basant leur analyse sur leur observation des élèves, les membres du groupe ont déterminé que les échanges visés n'avaient pas vraiment eu lieu et que la tâche devait être modifiée pour conduire les élèves à vraiment pratiquer les échanges de centaines, de dizaines et d'unités. Cette tâche révisée (voir annexe et Batteau & Clivaz, 2016) a été conduite dans la classe d'une seconde enseignante dans sa classe.
Au début du jeu, lors d'un blocage dans un groupe, l'enseignante Édith (P) intervient auprès d'une élève, Julie (e). Cette élève n'a pas suffisamment de cartes « 1 dizaine » et « 1 unité » pour pouvoir donner 35. Elle propose alors d'échanger deux centaines.

Édith (P) alors, deux centaines, ça fait combien ?
Julie (e) deux cents.
Édith (P) ça fait deux cents. [...] Trois dizaines, ça fait combien ?
Julie (e) trente.
Édith (P) tu m'as dit trois dizaines ça fait trente. Et pis deux unités ?
Julie (e) deux.
[...]
Édith (P) On échange une centaine. C'est à dire que maintenant, là-dedans tu vas devoir récupérer combien de points ?
Julie (e) euh dix dizaines.

Ce passage est situé au niveau 0 de la situation didactique. Dans ses interventions, Édith s'exprime en *nombre naturalisé* et demande à l'élève de traduire les nombres exprimés en unités de numération (Chambris, 2008) en nombre naturalisé, par exemple lorsqu'elle demande à Julie « deux centaines ça fait combien ? ». Pour sa part, l'élève s'exprime directement en unités de numération (sans repasser par le nombre en unités simples, par exemple lorsqu'elle dit « dix dizaines »). Dans ce cas, la CME est catégorisée de deux manières. Tout d'abord en tant que CE problématique, dans la mesure où Édith ne remarque pas, ou ne parvient pas à interpréter le raisonnement mathématique de Julie. Elle est également catégorisée comme CMS dans la mesure où Édith ne parvient pas à décortiquer la CMC de la numération décimale. De fait, le raisonnement expliqué par Édith revient au raisonnement suivant :

1 centaine = 100
et 10 dizaine = 100
donc 1 centaine = 10 dizaines

Cette manière d'éviter les échanges en passant par les unités, justement pour expliquer les échanges, est analysée dans le plan de leçon diffusé sur le site du laboratoire 3LS :

> Souvent d'ailleurs, les échanges ne sont plus vraiment effectués et on passe par le nombre. Par exemple, si on demande d'échange 12 centaines en dizaines, beaucoup d'élèves (et d'adultes) vont passer par le nombre 1200, c'est-à-dire 1200 unités, pour dire que cela donnera 120 dizaines, sans parvenir à faire directement l'échange. C'est également de cette manière que souvent les enseignants expliquent cet échange à leurs élèves. Dans ce cas, nous sommes dans un cercle vicieux, puisque cela signifie qu'il faut avoir compris le système de numération pour comprendre les échanges !

Cette synthèse de la CMS reprend donc à la fois les observations faites par les enseignants et relevées dans leurs notes écrites durant la leçon de recherche (phase de conduite et d'observation de la leçon, niveau 0) et les discussions durant la phase d'analyse en les généralisant et en les décontextualisant au niveau de la conception du thème (+2).

Suite à la rédaction de ce passage du plan de leçon, une des enseignantes du groupe, Valentine, réalise qu'elle a observé par le passé le même type de difficultés chez ses élèves. À la fin de l'ensemble du processus, elle réalise ainsi que certaines erreurs de ses élèves sont probablement dues à sa façon d'expliquer l'échange de dizaines en unités.

> Valentine moi, j'ai une autre question par exemple dans neuf cent soixante-trois, combien il y a de dizaines? Nonante-six. Moi, les miens d'élèves ils ont appris un truc entre guillemets. C'est que pour dire il y a nonante-six parce que, ils vont jusqu'à après le chiffre des dizaines et ils disent ce qu'il reste. Mais, j'ai pas su, j'ai pas dû savoir, je suis sûre qu'ils utilisent que le truc. Personne ne doit savoir pourquoi. Je ne sais pas comment leur faire. […] Moi, je transforme beaucoup en argent. Je dis en pièces de un franc. Y aura neuf cent soixante-trois pièces de un franc. Si on doit avoir que des billets de dix, et là qu'ils comprennent qu'il y en ait nonante-six des billets de dix. Enfin je veux dire.

Même si cette observation n'est pas directement reliée à une leçon, Valentine est au niveau d'observation (-1), même virtuelle, de ses élèves. Elle utilise la CMS développée dans le plan de leçon pour analyser les réponses de ses élèves (CE) en contraste avec la CMC consistant à passer par les unités de numération en nombre naturalisé. Cet effet de l'observation de la leçon de recherche et de son analyse sur l'analyse de Valentine sur sa propre pratique nous semble particulièrement intéressant.

Une analyse quantitative des codes obtenus

Les codes obtenus pour ce cycle LS consacré à la numération sont actuellement en cours d'analyse, mais leur nombre (2857) permet déjà d'envisager de représenter graphiquement quel type de CME apparaît à quelle phase du cycle et à quel niveau d'activité du professeur. Le Tableau 2 permet de voir que, sur l'ensemble du cycle, tous les types de CME sont présents dans le travail des enseignants quand ils étudient le sujet, planifient, enseignent, observent et discutent la leçon. Il permet aussi de montrer que, si tous les niveaux d'activité sont représentés, le niveau +1 du projet de leçon est le plus présent, mais aussi que certains types de CME sont plus liés à certains niveaux d'activité. Par exemple les CMS sont particulièrement présentes aux niveaux +2 et +1 alors que les connaissances liées à l'enseignement du sujet mathématique (CC) sont très développées au niveau +1, -1 et 0.

	CMC	CHM	CMS	CE	CC	CP
+3	0.0	0.2	1.1	0.1	1.0	0.5
+2	0.0	0.5	8.3	3.6	1.9	3.3
+1	5.7	0.0	7.7	0.7	20.3	6.6
0	0.1	0.0	2.0	1.4	10.2	0.3
-1	0.0	0.0	0.4	6.6	14.4	0.9
-2	0.9	0.0	0.0	0.8	0.5	0.0

Tableau 2 – Pourcentages de catégories de CME par niveau d'activité pour l'ensemble du cycle LS (total 100 pour l'ensemble du cycle)

La représentation graphique proposée à la Figure 6 permet, avec les mêmes codes couleur, de représenter également pour chaque phase du cycle les CME en jeu en fonction des niveaux d'activité. Il sera probablement intéressant de comparer ces répartitions sur plusieurs cycles LS afin de voir comment elles varient selon le sujet traité ou selon les habitudes de groupes. Nous comparerons également plusieurs groupes entre eux, en particulier ce groupe lausannois avec un groupe irlandais donc le cycle LS a été analysé par Ni Shuilleabhain (2016).

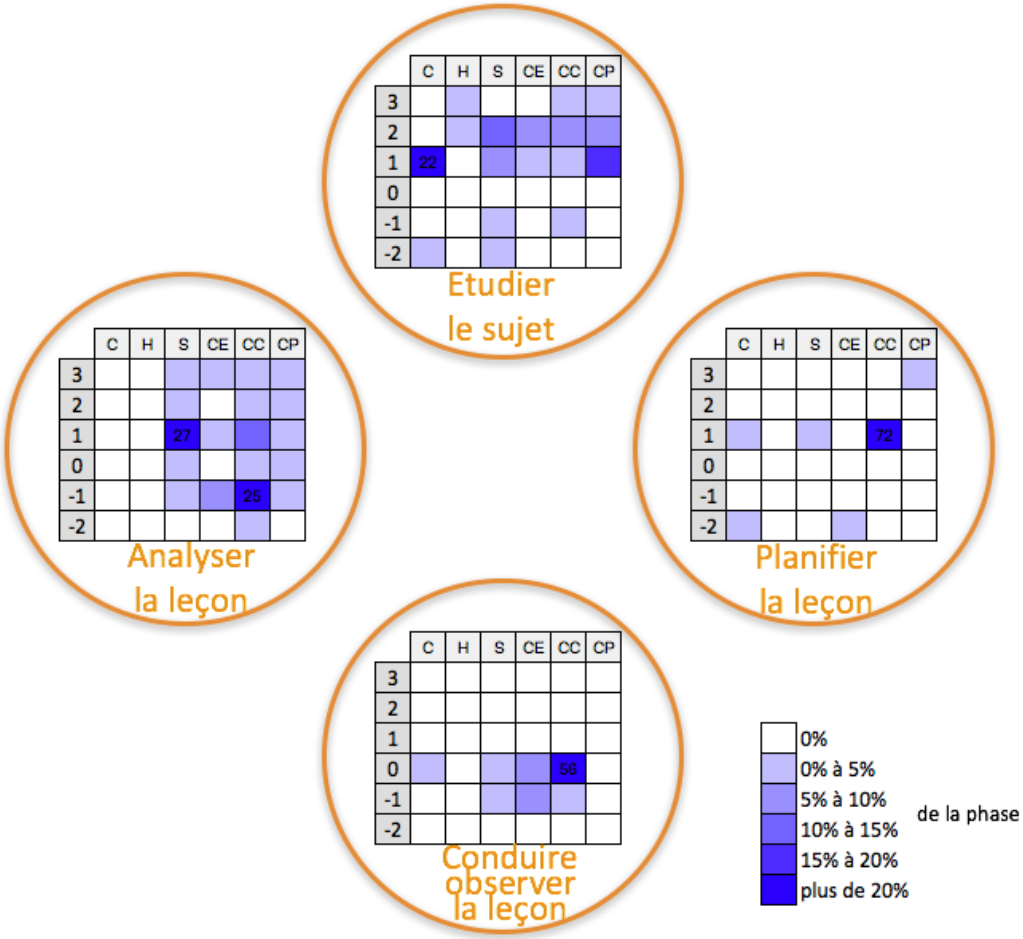


Figure 6. – Pourcentages de catégories de CME par phase du cycle LS et par niveau d'activité (total 100 par phase).

3 PISTES DE REFLEXION ET CONCLUSION

Nous utilisons des modèles propres à la *mathematics education* et à la didactique francophone des mathématiques pour analyser certains éléments d'un processus LS en mathématiques et nous sommes ainsi les acteurs d'un apport réciproque : d'une part les cadres théoriques utilisés permettent une meilleure compréhension des processus en jeu dans les LS et répondent à une demande récurrente de théorisation du processus LS (voir par exemple Clivaz, 2015b; Miyakawa & Winsløw, 2009a; Potari, 2011) ; d'autre part les processus LS fournissent une source d'observation privilégiée sur le travail des enseignants et permettent une interaction authentique entre recherche et profession enseignante.

> Each approach takes into account different dimensions of mathematics education, and each of them could support the other, in order to develop a body of scientific knowledge in our domain on the one hand and to develop the practice of teaching mathematics in a specific culture on the other (Miyakawa & Winsløw, 2009a, p.200).

Un intérêt réciproque croissant entre la communauté des LS[11] et la communauté de *mathematics education* est d'ailleurs marqué notamment par de nombreuses contributions dans les colloques internationaux (ICMI, PME, CERME), par l'ouvrage collectif autour de Hart (Hart, Alston & Murata, 2011), par les articles de Shimizu (2014) et Runesson (2014) dans l' *Encyclopedia of Mathematics Education* (Lerman, 2014) ou encore par un numéro spécial de ZDM (Huang & Shimizu, 2016). Du point de vue francophone, des interactions entre didactique des mathématiques et LS sont mises en évidence notamment par Miyakawa et Winsløw (2009b) et par Clivaz (2015b). Nous poursuivrons ce dialogue que nous espérons fructueux au sein des deux communautés.

Le travail d'analyse des données issues du groupe LSM est également effectué selon d'autres points de vue, avec d'autres questions et avec d'autres cadres théoriques. Ces analyses en cours, du point de vue historico-culturel ainsi que du point de vue de la double approche didactique et ergonomique en didactique des mathématiques ont été présentées à la 18e école d'été de didactique des mathématiques (Clivaz, Clerc-Georgy & Batteau, 2016). Elles ont notamment permis de mettre en évidence une évolution dans les rôles des formateurs et des enseignants quant au partage des savoirs (Clerc-Georgy & Clivaz, 2016), un travail d'adaptation des tâches mathématiques ou une prise de conscience des effets de l'enseignement sur l'apprentissage des élèves (Batteau & Clivaz, 2016). Les conclusions des analyses en termes d'évolution des CME sur les quatre cycles LS pourront donc être croisées avec ces résultats. La question notamment du rôle des facilitateurs dans l'évolution des CME devra être comparée avec les travaux étatsuniens et japonais à ce sujet (Takahashi, 2014; Takahashi & McDougal, 2016) et ces comparaisons nous conduiront probablement à préciser ce rôle dans les futurs projets menés au sein de laboratoire 3LS. Ces projets helvétiques tenteront aussi d'étendre ce type de développement professionnel à l'échelle d'une école et d'analyser l'influence au niveau de la culture des établissements scolaires, voire du système scolaire (Lewis, Perry & Hurd, 2009).

[11] Communauté représentée notamment par la World Association of Lesson Studies, WALS, voir www.walsnet.org

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BAETSCHMANN, K., BALEGNO, M., BAUD, E., CHEVALLEY, M., CLERC-GEORGY, A., CLIVAZ, S. et al. (2015). Une expérience de Lesson Study en mathématiques en 5-6 Harmos. *L'Educateur, 11*, 32-34. Consulté le 10 mai 2016, à http://www.hepl.ch/files/live/sites/systemsite/files/laboratoire_3ls/EducateurLessonStudy11_2015.pdf

BALL, D. L., HILL, H. C., & BASS, H. (2005). Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 3 janvier 2015, à http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf

BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. Consulté le 24 janvier 2017, à http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389

BATTEAU, V., & CLIVAZ, S. (2016). Le dispositif de formation continue lesson study : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N, 98*, 27-48.

BEDNARZ, N., & PROULX, J. (2009). Knowing and using mathematics in teaching conceptual and epistemological clarifications. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17. Consulté le 3 janvier 2015, à http://flm-journal.org/Articles/90007B35446B191D39748441966D2.pdf

BROUSSEAU, G. (1990). Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(9.3), 309 - 336. Consulté le 3 janvier 2015, à http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00686012

CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels.* Université Paris-Diderot-Paris VII,

CHARNAY, R., COMBIER, G., DUSSUC, M.-P., MADIER, D., & MADIER, P. (2007). *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant, manuel de l'élève et matériel photocopiable*. Paris: Hatier.

CLERC-GEORGY, A., & CLIVAZ, S. (2016). Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study: quel partage des savoirs? In F. Ligozat, M. Charmillot & A. Muller (Eds.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation* (pp. 189-208). Série Raisons Educatives, n°20. Bruxelles: De Boeck.

CLERC-GEORGY, A., & CLIVAZ, S. (sous presse). Evolution des rôles entre chercheurs et enseignants dans un processus lesson study: quel partage des savoirs? In F. Ligozat, A. Muller & M. Charmillot (Eds.), *Le partage des savoirs dans les processus de recherche en éducation*. Bruxelles: De Boeck, Raisons Educatives.

CLIVAZ, S. (2011). *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève, Genève. Consulté le 3 janvier 2015, à http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047

CLIVAZ, S. (2014). *Des mathématiques pour enseigner? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire?* Grenoble: La Pensée Sauvage.

CLIVAZ, S. (2015a). Des mathématiques pour enseigner? Quelques réflexions à partir d'un cas de combinaison de cadres théoriques. In L. Bacon, D. Benoit, C. Lajoie & I. Oliveira (Eds.), *Croisements variés de concepts, d'approches et de théories: les enjeux de la création en recherche en didactique des mathématiques. Colloque du groupe de didactique des mathématiques du Québec 2014.* (pp. 1-10). UQAM, Montréal. Consulté le 15 juin 2015, à https://www.academia.edu/12352746

CLIVAZ, S. (2015b). French Didactique des Mathématiques and Lesson Study: a profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies, 4*(3), 245-260. Consulté le 15 juin 2015, à http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/IJLLS-12-2014-0046

CLIVAZ, S. (2016). Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. *Recherche en didactique des mathématiques, 36*(2), 231-261.

CLIVAZ, S., CLERC-GEORGY, A., & BATTEAU, V. (2016). Lesson study en mathématiques : un dispositif japonais de développement professionnel des enseignants à l'épreuve du contexte suisse-romand. In Y. Matheron & G. Gueudet (Eds.), *Actes de la 18e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 487-502). Grenoble: La Pensée Sauvage.

CLIVAZ, S., & NI SHUILLEABHAIN, A. (2016, 26 juillet). *Developing Mathematical Knowledge for Teaching in Lesson Study: Propositions of a Theoretical Framework.* Texte présenté au ICME 13, Hamburg

DAVIS, B., & RENERT, M. (2013). Profound understanding of emergent mathematics: broadening the construct of teachers' disciplinary knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 82*(2), 245-265. Consulté le 3 janvier 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s10649-012-9424-8

FERNANDEZ, C., CANNON, J., & CHOKSHI, S. (2003). A US–Japan lesson study collaboration reveals critical lenses for examining practice. *Teaching and teacher education, 19*(2), 171-185.

FERNANDEZ, C., & YOSHIDA, M. (2004). *Lesson study: A case of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

GERSTEN, R., TAYLOR, M. J., KEYS, T. D., ROLFHUS, E., & NEWMAN-GONCHAR, R. (2014). Summary of research on the effectiveness of math professional development approaches. *Tallahassee, FL Southeast Regional Educational Laboratory at Florida State University*, 3-15.

HART, L. C., ALSTON, A. S., & MURATA, A. (Eds.). (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherland

HILL, H. C., BLUNK, M., CHARALAMBOUS, C., LEWIS, J., PHELPS, G., SLEEP, L. et al. (2008). Mathematical knowledge for teaching and the mathematical quality of instruction: An exploratory study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511.

HILL, H. C., ROWAN, B., & BALL, D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.
HUANG, R., & SHIMIZU, Y., (ED.). (2016). Improving teaching, developing teachers and teacher educators, and linking theory and practice through lesson study in mathematics: an international perspective. *ZDM, 48*(4). Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/s11858-016-0795-7
INAGAKI, T. (1995). Meiji kyouju rironshi kenkyu [A historical research on teaching theory in Meiji-era]. *Tokyo: Hyuuron-Sya*
LERMAN, S. (Ed.). (2014). *Encyclopedia of Mathematics Education*. Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8
LEWIS, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Philadelphia: Research for Better Schools.
LEWIS, C. (2015). What Is Improvement Science? Do We Need It in Education? *Educational Researcher, 44*(1), 54-61.
LEWIS, C., & HURD, J. (2011). *Lesson study step by step: How teacher learning communities improve instruction*. Portsmouth, NH: Heinemann.
LEWIS, C., PERRY, R., & HURD, J. (2009). Improving mathematics instruction through lesson study: a theoretical model and North American case. *Journal of Mathematics Teacher Education, 12*(4), 285-304. Consulté le 2 novembre 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s10857-009-9102-7
LEWIS, C., & TAKAHASHI, A. (2013). Facilitating curriculum reforms through lesson study. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 2*(3), 207-217.
MARGOLINAS, C. (1995). La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In C. Margolinas (Ed.), *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994* (pp. 89-102). Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 3 janvier 2015, à http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00418815/fr/
MARGOLINAS, C. (2002). Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In J.-L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot & R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 141-155). Grenoble, France: La Pensée Sauvage. Consulté le 3 janvier 2015, à https://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00421848
MARGOLINAS, C. (2004). Modeling the Teacher's Situation in the Classroom. In H. Fujita, Y. Hashimoto, B. Hodgson, P. Lee, S. Lerman & T. Sawada (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Congress on Mathematical Education* (pp. 171-173). Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-010-9046-9_38
MARGOLINAS, C., COULANGE, L., & BESSOT, A. (2005). What Can the Teacher Learn in the Classroom? *Educational Studies in Mathematics, 59*, 205-234.
MIYAKAWA, T., & WINSLØW, C. (2009a). Didactical designs for students' proportional reasoning: an "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics, 72*(2), 199-218.
MIYAKAWA, T., & WINSLØW, C. (2009b). Un dispositif japonais pour le travail en équipe d'enseignants: Etude collective d'une leçon. *Education et Didactique, 3*(1), 77-90. Consulté le 17 février 2016, à http://education-et-didactique.bretagne.iufm.fr/IMG/pdf/Miyakawa_Winslow.pdf
NATIONAL MATHEMATICS ADVISORY PANEL. (2008). *Fundation for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel*. Washington, DC: U.S. Department of Education. Consulté le 3 janvier 2015, à http://www.ed.gov/about/bdscomm/list/mathpanel/report/final-report.pdf
NI SHUILLEABHAIN, A. (2015). *Developing Mathematics Teachers' Pedagogical Content Knowledge through Lesson Study: A Multiple Case Study at a Time of Curriculum Change.* Doctor of Philosophy Ph.D. Trinity College Dublin, Trinity College Dublin Library
NI SHUILLEABHAIN, A. (2016). Developing mathematics teachers' pedagogical content knowledge in lesson study: Case study findings. *International Journal for Lesson and Learning Studies, 5*(3), 212-226. Consulté le 24 janvier 2017, à http://www.emeraldinsight.com/doi/abs/10.1108/IJLLS-11-2015-0036
PERRY, R., & LEWIS, C. (2011). *Improving the mathematical content base of lesson study summary of results* Consulté le 24 août 2016, à http://www.lessonresearch.net/IESAbstract10.pdf
POTARI, D. (2011). Response to Part II: Emerging Issues from Lesson Study Approaches in Prospective Mathematics Teacher Education. In L. C. Hart, A. S. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 127-132). Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_10
PREDIGER, S., BIKNER-AHSBAHS, A., & ARZARELLO, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, 40*(2), 165-178. Consulté le 3 janvier 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s11858-008-0086-z
RUNESSON, U. (2014). Learning Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 356-358). Dordrecht: Springer Netherlands. Consulté le 24 janvier 2017, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_90
SERFATI, M. (2005). *La révolution symbolique: la constitution de l'écriture symbolique mathématique*: Editions Petra.
SHIMIZU, Y. (2014). Lesson Study in Mathematics Education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 358-360). New York: Springer. Consulté le 17 février 2016, à http://dx.doi.org/10.1007/978-94-007-4978-8_91
SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. Consulté le 24 janvier 2017, à http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4

SHULMAN, L. S. (2007). Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy & C. Amade-Escot, trad.). *Education et didactique, 1*(1), 97-114. (Original publié 1986). Consulté le 3 janvier 2015, à http://educationdidactique.revues.org/121

STEINBRING, H. (1998). Elements of epistemological knowledge for mathematics teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(2), 157-189. Consulté le 26 février 2014, à http://dx.doi.org/10.1023/A:1009984621792

STIGLER, J., & HIEBERT, J. (1999). *The teaching gap. Best ideas from the worlds teachers for improving education in the classroom*. New York: The Free Press.

TAKAHASHI, A. (2014). The role of the knowledgeable other in lesson study: Examination of comments of experienced lesson study practitioners. *Mathematics Teacher Education and Development, 16*(1), 4-21.

TAKAHASHI, A., & MCDOUGAL, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM*, 1-14. Consulté le 17 février 2016, à http://dx.doi.org/10.1007/s11858-015-0752-x

TCHOSHANOV, M. (2011). Relationship between teacher knowledge of concepts and connections, teaching practice, and student achievement in middle grades mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 141-164. Consulté le 3 janvier 2015, à http://dx.doi.org/10.1007/s10649-010-9269-y

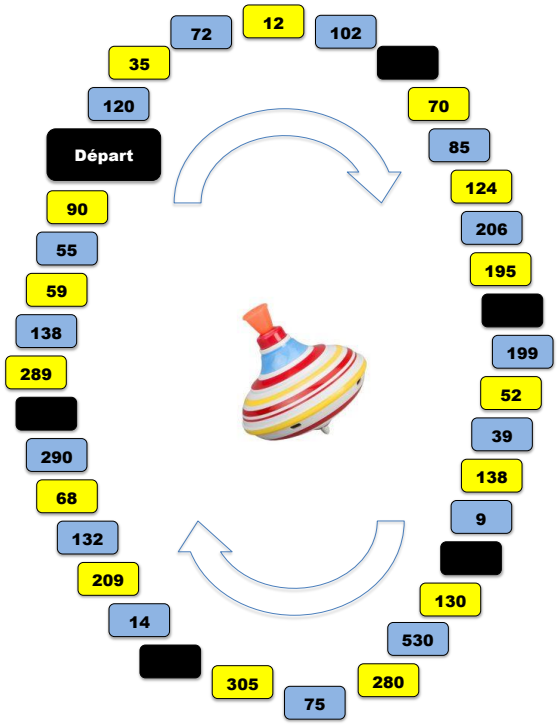
TEMPIER, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource.* Université Paris-Diderot - Paris VII. Consulté le January 3rd, 2015, à http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00921691

ANNEXE : JEU DE LA TOUPIE

Matériel : 1 plan de jeu, 1 dé,
1 pion par joueur,
1 sachet d'unités, 1 sachet de dizaines,
1 sachet de centaines

Au départ, chaque joueur prend
3 cartes «1 unité»
3 cartes «1 dizaine»
4 cartes «1 centaine»

Les pions sont sur la case départ.



Jouer

Le premier joueur lance le dé. Il avance son pion du nombre de points indiqué.

Si le pion arrive sur :

	Le joueur doit donner au joueur suivant (à sa gauche) exactement le nombre de points indiqué dans la case.
	Le joueur doit donner au joueur précédent (à sa droite) exactement le nombre de points indiqué dans la case.
	Le joueur ne donne rien.

Les cartes dans les sachets permettent de faire des échanges.

Le jeu s'arrête quand la maîtresse donne le signal.

Le gagnant est celui qui a le plus de points.

LE TRANSFERT DE MANUELS DE MATHEMATIQUES FRANÇAIS AUX ÉTATS-UNIS ET LA PULSATION DU MARCHE DE L'EDITION AMERICAIN (1800-1850)

Thomas **PREVERAUD**

Université d'Artois / EPSE Lille Nord-de-France

thomas.preveraud@espe-lnf.fr

Résumé

Au début des années 1810, l'université Harvard et l'académie militaire des États-Unis basée à West Point souhaitent réformer leur enseignement des mathématiques qui repose, depuis que la discipline y est enseignée, sur les méthodes et manuels britanniques. Après une décennie d'hésitations sur les nouveaux *curricula* à adopter, les deux institutions produisent et utilisent une série de traductions de manuels français en arithmétique, en algèbre, en géométrie ou en analyse. Il s'agit, pour la plupart d'entre elles, des premières publications, en langue anglaise, des bestsellers rédigés en France, entre 1794 et 1815, par Bézout, Lacroix, Monge et Legendre.

La communication explore la question de la création des conditions d'un tel changement de *curricula* dans le contexte du paysage éditorial domestique, essentiellement calqué sur des manuels parus à Londres ou Édimbourg, et dont la présentation des mathématiques et les méthodes pédagogiques associées divergent alors très sensiblement de celles des ouvrages français. Nous montrerons combien ces entreprises éditoriales portent en elle une forme une radicalité non sans conséquences sur leur propre devenir à Harvard et West Point, mais aussi, à la manière d'un rétro-effet, sur le marché de l'édition américain de la première moitié du XIXe siècle.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALDRICH KIDWELL, P., ACKERBERG-HASTINGS, A. & LINDSAY ROBERTS, D. (2008). *Tools of American Mathematics Teaching, 1800-2000*. Baltimore : The Johns Hopkins University Press.

BARBIER, F. (2000). *Histoire du livre* (réed. 2009). Paris : Colin.

CAJORI, F. (1890). *The Teaching and History of Mathematics in the United States*. Washington, DC, Bureau of Education.

LES PRATIQUES ENSEIGNANTES CONCERNANT LA DERIVEE DANS LE SECONDAIRE

Monica **PANERO**

S2HEP-Ifé, ENS de Lyon ; Dipartimento di Matematica, Università di Torino

monica.panero@ens-lyon.fr ; monica.panero@unito.it

Résumé

Cet article porte sur ma thèse (Panero, 2015) que j'ai soutenue en 2015 à l'Université de Turin, en Italie. Cette recherche s'intéresse aux pratiques enseignantes relatives à la notion de dérivée lorsqu'elle est considérée en tant qu'outil pour étudier une fonction ou bien en tant que fonction elle-même. J'ai examiné comment l'étude des propriétés ponctuelles, globales et locales des fonctions est gérée dans l'enseignement secondaire de la dérivée, dans le contexte italien. Pour mes analyses, j'ai coordonné trois éléments théoriques : les praxéologies (Chevallard 1999), les perspectives sur les fonctions (Vandebrouck 2011) et le faisceau sémiotique (Arzarello 2006). Cette étude qualitative de la transposition didactique de la dérivée s'appuie principalement sur l'analyse de deux manuels et des praxéologies de trois enseignantes italiennes de la classe de terminale scientifique (élèves de 18-19 ans). Un des résultats principaux est l'identification de deux praxéologies enseignantes différentes pour introduire le nombre dérivé qui sont fondées sur des définitions différentes de droite tangente à la courbe d'une fonction. De plus, j'ai repéré un point critique dans les pratiques enseignantes au moment de l'introduction de la fonction dérivée : une perspective globale sur la dérivée en tant que fonction est à construire alors qu'on part d'une perspective ponctuelle donnée par la définition de nombre dérivé.

Mots clés

Fonctions, dérivée, perspectives, pratiques enseignantes

POURQUOI CETTE ETUDE SUR LA DERIVEE ?

Cette étude porte sur la transposition didactique de la notion de dérivée dans le secondaire : une notion cruciale à l'articulation entre Algèbre et Analyse. De nombreuses recherches considèrent la conceptualisation de la dérivée à la fois comme centrale et comme critique dans l'étude d'une fonction, aussi bien dans le secondaire (Maschietto, 2002, Yoon et al., 2011) qu'à la transition entre secondaire et supérieur (Gueudet, 2008, Vandebrouck, 2011, Park, 2015). En effet, ce concept représente un des fondements de l'Analyse impliquant cependant des compétences, des notions et des registres qui relèvent des domaines soit algébrique, soit géométrique. Son acquisition implique un travail algébrique sur les fonctions et sur leurs propriétés, sur les limites, mais aussi sur des objets géométriques comme la droite tangente. Plus particulièrement, comme nous le mettons en évidence dans cet article, la notion de dérivée a la spécificité d'être à la fois un outil pour étudier les variations d'une fonction et un

objet en tant que fonction à étudier pour elle-même. Cette caractéristique rend complexe l'activité mathématique des élèves et des étudiants. Par suite, il est indispensable de confronter les élèves et les étudiants à cette dialectique outil-objet (Douady, 1986) autour de la dérivée pour qu'ils parviennent à conceptualiser et maitriser la dérivée de façon complète et réfléchie. L'intérêt pour l'étude de cette dialectique est dû aussi à un facteur linguistique-culturel : en italien, il n'existe pas d'expression équivalente à « nombre dérivé ». Comme les anglophones, par exemple, on n'utilise que la locution « *derivata di una funzione in un punto* »[1] (dérivée d'une fonction en un point). Le langage a surement un effet sur la conceptualisation d'un objet mathématique. En particulier, lorsque les élèves interagissent avec un objet mathématique, la manière dont ils le nomment peut jouer un rôle important sur les images qu'ils s'en construisent (Tall & Vinner, 1981). Dans ce cas, l'expression française « nombre dérivé » explicite qu'il s'agit d'un nombre. Au contraire, en italien, la locution "*derivata di una funzione in un punto*" cache cette propriété. Une remarque similaire peut être faite pour ce qui concerne le coefficient directeur de la droite tangente, grâce auquel on définit le nombre dérivé. En fait, en italien on parle de « *coefficiente angolare* » (coefficient angulaire) et là aussi on peut retrouver un possible obstacle linguistique à la conceptualisation de la dérivée comme direction de la droite tangente.

Encore une précision est nécessaire pour mieux rentrer dans le contexte scolaire italien. En Italie, la dérivée est introduite en dernière année de lycée (élèves de 18-19 ans) après avoir travaillé formellement le concept de limite et pendant un temps long sur les coniques deux années plus tôt. Cette différence au niveau des programmes scolaires implique que certains outils sont à disposition des élèves italiens lorsque la dérivée leur est introduite.

Sur la conceptualisation de la dérivée

Les concepts que nous rencontrons en mathématiques ont été rencontrés sous d'autres formes avant d'être formellement définis et une structure cognitive complexe existe dans la tête de chaque individu. Une variété d'images mentales personnelles sont produites lorsqu'un concept est évoqué : c'est ce que Tall et Vinner (1981) appellent image d'un concept (« *concept image* »). De nombreuses recherches se sont focalisées sur le nombre dérivé et plus précisément sur le *concept image* de la tangente et sur son influence et sa persistance dans le processus de recherche de la pente de la courbe d'une fonction générique. Les études de Vinner (1982) puis de Tall (1987) ont montré que les expériences de la tangente au cercle amènent les élèves à croire que la tangente est une droite qui touche le graphique en un seul point et ne le traverse pas. Cette idée persiste dans la tête des élèves et elle est source d'obstacles lorsque plus tard ils sont confrontés au cas d'une courbe générique. Sierpinska repère des difficultés chez les élèves pour attribuer du sens à l'image « limite de sécantes ». Dans une étude sur les obstacles épistémologiques concernant les limites (1985), elle constate que la définition de la dérivée en passant par l'image de la tangente comme limite de droites sécantes n'est pas facilement accessible par les élèves. Dans cet article, publié en français dans la revue *Recherche en Didactique des Mathématiques*, elle remarque que :

> « La notion de tangente est un concept nouveau pour les élèves qui demandent le franchissement de beaucoup d'obstacles. On ne peut pas compter sur le fait que l'interprétation de la dérivée comme le coefficient angulaire de la tangente puisse approcher cette notion si elle est introduite d'abord comme limite de la suite de quotients différentiels » (Sierpinska, 1985, p.58).

Castela (1995) choisit précisément cette situation comme un exemple significatif de « apprendre avec et contre ses connaissances antérieures ». Des recherches plus récentes

[1] Traduit comme « dérivée d'une fonction en un point » : nous allons utiliser cette locution lors de notre discussion des études de cas pour garder une liaison plus forte avec le discours original.

impliquant des étudiants en licence de mathématiques (Biza & Zachariades, 2010) et des enseignants de mathématiques dans le secondaire en formation continue (Paéz & Vivier, 2013) ont confirmé que même ceux qui maitrisent les concepts de tangente et de courbe peuvent être déstabilisés par une investigation plus profonde et sentir la nécessité de réorganiser leurs images du concept, remettant en question leur structure cognitive. L'enseignement-apprentissage de la tangente ne peut pas être réduit à une simple généralisation expansive (Harel & Tall, 1991). Autrement dit, il ne s'agit pas simplement d'étendre la structure cognitive de l'élève mais cela demande des changer des images fondamentales. On parlera plutôt de généralisation reconstructive (Harel & Tall, 1991) où les élèves changent radicalement les anciennes images du concept pour qu'elles puissent être réinvesties dans un contexte plus large.

Si l'introduction du nombre dérivé évoque des images du concept de tangente, l'introduction de la dérivée en tant que fonction remet en cause les conceptions des élèves sur les fonctions. Les études sur la fonction dérivée, moins diffusées en littérature, portent principalement sur la relation entre une fonction et sa fonction dérivée et s'intéressent plus particulièrement à cette relation dans le registre graphique. Nemirovsky et Rubin (1992) ont souligné que les élèves ont tendance à supposer une certaine ressemblance entre le graphique d'une fonction et celui de sa dérivée. Dans cette mise en relation des propriétés d'une fonction et celles de sa dérivée, ont un rôle important les processus de visualisation (Haciomeroglu et al., 2010) aussi bien que les gestes et autres ressources sémiotiques (Yoon et al., 2011). Le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée signifie passer de considérer la fonction en un point spécifique à la considérer sur un intervalle et cette transition n'est pas triviale pour les élèves (Monk, 1994). S'appuyant sur ces résultats, Park (2013, 2015) a récemment étudié le discours des étudiants et des professeurs sur la dérivée dans le contexte de l'enseignement supérieur. Elle a remarqué que le changement de point de vue (d'un point spécifique à un intervalle) est fondé principalement sur des notations symboliques avec très peu d'explications sur comment la valeur de la dérivée change. Les étudiants montrent « une notion mélange de dérivée, comme fonction sur un intervalle et comme objet ponctuel au même temps, sans apprécier pleinement leur relation » (Park, 2013, p. 637).

La problématique visée

Cette recherche s'intéresse à la transposition didactique (Chevallard, 1985) de la notion de dérivée dans le secondaire. Le premier pas a donc été celui d'étudier la définition de dérivée dans le savoir savant. Sur les manuels plus utilisés à l'université nous retrouvons deux grandes approches à la notion de dérivée.

> Déf. 1 – Soit $f :]a,b[\rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f possède une dérivée en x_0 appartenant à $]a,b[$ si
>
> $$\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0+h)-f(x_0))/h$$
>
> existe et est finie. Cette limite est nommée dérivée première de f à x_0 et est notée $f'(x_0)$. La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ s'appelle droite tangente au graphique de f au point $(x_0,f(x_0))$. (Bramanti et al., 2000, p.171)

Dans la définition 1, la dérivée est présentée comme le coefficient directeur de la droite tangente, définie comme la position limite d'une sécante à la fonction. Cette définition compare les infinitésimaux PA et XX_0 (Fig. 1) : leur rapport est le coefficient directeur de la sécante, la limite de ce rapport est $f'(x_0)$.

> Déf. 2 – Soit f une fonction réelle à valeurs réelles définie dans l'intervalle [ouvert] I (qui ne se réduit pas à un seul point) et soit x_0 un point de I. On dit que f est différentiable à x_0 avec dérivée λ appartenant à $\mathbb{R}$ si et seulement si on a
>
> $$f(x) = f(x_0) + \lambda\,(x-x_0) + o(x-x_0) \quad \text{pour } x \rightarrow x_0 \quad \text{([dénotée ensuite par] *).}$$
>
> [...] La droite par $P_0\,(x_0, f(x_0))$ d'équation $y = f(x_0) + \lambda\,(x-x_0)$ où λ se déduit de * s'appelle droite tangente au graphique de f au point P_0. (Geymonat, 1981, p.188)

Dans cette deuxième définition, la dérivée est présentée comme nombre réel λ, qui est le coefficient d'un développement limité au premier ordre de la fonction f en x_0. Ce nombre est le coefficient directeur de la droite tangente, définie comme la droite qui approche le mieux le graphique de la fonction dans le voisinage du point x_0. Autrement dit, en remplaçant la courbe par la droite, l'erreur faite est un infinitésimal d'ordre supérieur par rapport à l'incrément x-x_0 quand x tend vers x_0 (on compare QP et XX_0 en Fig. 2). Par conséquent, la fonction devient « quasi-linéaire » dans un voisinage de x_0. Geymonat (1981) rajoute en fait :

> « [L'expression] * signifie que pour x près de x_0 la fonction f peut être approximée avec une fonction affine, c'est-à-dire que le graphique de f est bien approximé par le graphique de sa tangente. Intuitivement, on peut dire que le graphique de f dans le voisinage de P_0 est 'quasi-linéaire' (ou 'quasi-droit') ». (Geymonat, 1981, p.188)

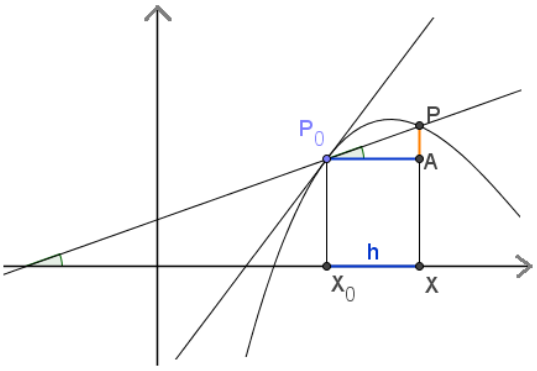


Fig. 1 : Selon Déf. 1, le rapport des deux infinitésimaux PA et XX_0 tend vers $f'(x_0)$.

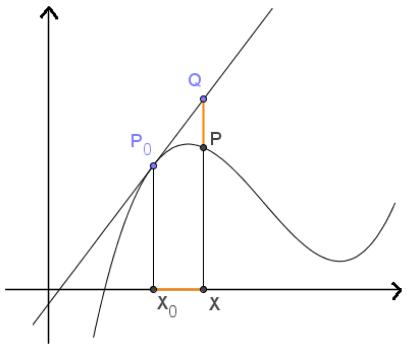


Fig. 2 : Selon Déf. 2, l'infinitésimal QP est d'ordre supérieur à l'infinitésimal XX_0.

Il est très simple de prouver que ces deux définitions sont équivalentes. De plus, toutes les deux et leurs possibles variantes mettent en jeu une dimension locale sur la fonction f. Cependant elles peuvent générer de différentes conceptualisations de dérivée et de droite tangente. Nous remarquons que, d'un point de vue didactique, les deux définitions sont *a priori* transposables dans l'enseignement secondaire.

En résumé, avec l'introduction du nombre dérivée, le travail sur les fonctions s'enrichit d'une dimension locale, car il faut apprendre à raisonner en termes de voisinage et de limite. De plus, une dialectique outil-objet s'engendre sur cette nouvelle notion : la dérivée est ponctuellement un outil pour étudier les variations d'une fonction et globalement un objet en tant que fonction elle-même. Notre problématique de l'introduction de la dérivée dans l'enseignement-apprentissage des fonctions au niveau secondaire se divise ainsi en deux sous-problématiques liées : l'introduction de la dérivée au point x_0 (nombre dérivé) et la dimension locale du travail sur f ; le passage du nombre dérivé à la fonction dérivée et le jeu ponctuel-global dans le travail sur f'.

La question qui a guidé l'étude de chacune de ces sous-problématiques est comment les différentes dimensions du travail sur les fonctions (ponctuelle, globale et locale) sont-elles gérées, notamment dans le savoir à enseigner et dans le savoir enseigné ?

CADRE THEORIQUE

La transposition didactique (Chevallard, 1985) est un processus fondamental de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD) (Chevallard, 1999). Comme Chevallard l'explicite et des recherches successives le confirment, la transposition didactique n'est pas

> « […] un simple 'transfert', adaptation ou simplification, au contraire c'est un processus de déconstruction et de reconstruction de différents éléments du savoir, dans le but de le rendre 'enseignable', tout en gardant son pouvoir et son caractère fonctionnel. » (Bosch & Gascón, 2006, p.53).

Pour investiguer les dimensions ponctuelle, globale et locale dans le travail sur les fonctions, je coordonne trois éléments théoriques qui viennent de trois approches théoriques différentes.

- La notion de praxéologie (Chevallard, 1999), qui est centrale dans la TAD comme modèle pour décrire toute activité humaine à l'intérieur d'une institution donnée, incluant donc les pratiques enseignantes dans les différentes étapes de la transposition didactique.
- Les différentes perspectives (ou points de vue) sur les fonctions (Rogalski, 2008, Maschietto 2002, Vandebrouck, 2011), qui dépendent du caractère ponctuel, global ou local des propriétés des fonctions qui sont considérées à un moment donné du travail.
- Le faisceau sémiotique (*semiotic bundle* : Arzarello, 2006), qui rend compte de toutes les ressources sémiotiques utilisées pour identifier une propriété donnée de la fonction en jeu, ainsi que les relations entre ces ressources.

Dans les paragraphes suivants je présente chaque élément du cadre théorique pour enfin justifier leur coordination.

Praxéologie mathématique et moments didactiques

Une praxéologie se compose d'un type de tâche, de techniques pour le résoudre, de justifications de l'efficacité de ces techniques (discours justificatifs qui constituent la technologie) et d'arguments théoriques qui soutiennent ces justifications. Parmi les types de tâches liés aux deux sous-problématiques identifiées, cette étude s'intéresse plus particulièrement à :

- Déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction générique en un point ($T_{tangente}$ dans la suite) ;
- Donner une expression algébrique de la fonction dérivée ($T_{f'}$ dans la suite).

L'aspect intéressant des praxéologies liées à ces deux types de tâches est la dialectique entre les dimensions ponctuelle, globale et locale qu'ils engendrent dans le travail sur les fonctions. En effet, le type de tâche $T_{tangente}$ a déjà été travaillé avec les coniques (selon les programmes italiens) avec des techniques et des justifications dont la validité ne peut pas être étendue à une courbe générique. Du point de vue didactique, retravailler cette praxéologie permet

d'introduire la dérivée comme outil fondamental pour résoudre le type de tâche dans le cas générique. Construire une praxéologie pour le type de tâche $T_{f'}$ conduit à établir une dialectique entre la dimension ponctuelle et la dimension globale sur la fonction dérivée, ainsi qu'une dialectique entre les différentes propriétés des fonctions en jeu, dans la mise en relation d'une fonction avec sa fonction dérivée. Du point de vue didactique, travailler cette praxéologie permet d'introduire la dérivée comme objet en relation avec la fonction qui l'a générée.

Nous distinguons deux plans :

- la praxéologie mathématique à construire pour T_{tangente} et $T_{f'}$;
- la praxéologie didactique qui comprend l'organisation et la gestion du développement de la praxéologie mathématique par l'enseignant, à travers différents moments didactiques.

Chevallard (1999) identifie six moments didactiques dans l'intervention de l'enseignant lorsque sa tâche didactique est celle de transposer aux élèves la praxéologie mathématique pour un type de tâche donné. De ces moments, je considère les trois qui constituent le groupe « Activités d'étude et de recherche » :

- le moment de la (première) rencontre avec le type de tâche T, vu comme rencontre significative qui pose T comme type de tâche problématique ;
- le moment de l'exploration de T et de l'émergence de la technique, qui implique la construction d'une technique (au moins embryonnaire) pour accomplir T ;
- le moment de la construction du bloc technologico-théorique, qui a pour objectif de produire des justifications et des éléments de théorie qui soutiennent la technique.

Perspectives sur les fonctions

Les perspectives (ou points de vue) sont les différentes façons de regarder une fonction quand on travaille sur elle, selon les propriétés qui sont prises en considération. On peut s'intéresser à une propriété ponctuelle de *f* qui n'est valide qu'en un point (comme par exemple, $f(2)=4$, ou $x=3$ est un zéro de *f*) ou sur un ensemble fini de points. Dans ce cas, une perspective ponctuelle est activée sur la fonction. On peut considérer la fonction comme un tout ou des propriétés globales qui sont valides dans un intervalle donné (comme par exemple, *f* est paire, *f* est croissante dans [0,1]). Dans ce cas, une perspective globale est activée sur la fonction. On peut se concentrer sur une propriété locale de *f* qui est valide dans le voisinage d'un point donné (comme par exemple, *f* est discontinue en $x=2$, *f* a un point de maximum en $x=1$). Dans ce cas, une perspective locale est activée sur la fonction, mettant en avant des propriétés de *f* qui sont valides sur une famille de voisinages contenant le point donné. Il ne suffit pas de connaitre la valeur de la fonction à ce point et il n'est pas nécessaire de choisir un intervalle particulier : une propriété locale est valide sur une infinité d'intervalles contenant le point.

Semiotic bundle

Le concept de faisceau sémiotique a été introduit par Arzarello (2006) pour étudier les relations entre les ressources sémiotiques qui sont employées dans une activité mathématique. La définition donnée par Arzarello comprend la variété de ressources utilisées par les élèves et par les enseignants, incluant aussi les gestes, les dessins et les modes extralinguistique d'expression. De plus, le faisceau sémiotique permet d'étudier la relation entre les registres qui sont activés en même temps et leurs dynamiques, vu la multi-modalité de leur activation.

Un ensemble sémiotique est compose de trois éléments :

- un ensemble de signes (dans le sens de Peirce[2]) produits par différentes actions intentionnelles ;
- un ensemble de modes de production et transformation de ces signes ;
- un ensemble de relations entre les signes et leurs significations respectives.

Un faisceau sémiotique ou faisceau d'ensembles sémiotiques, à son tour, est composé d'une collection d'ensembles sémiotiques et un ensemble de relations entre eux. Selon Arzarello, par exemple, « le discours, les gestes et les représentations écrites (des croquis et des diagrammes jusqu'aux symboles mathématiques) » sont des exemples de « trois types différents d'ensembles sémiotiques » et tous ensemble, y compris les relations entre eux, « constituent un faisceau sémiotique, qui évolue dynamiquement avec le temps » (Arzarello, 2006, p.284).

La coordination des trois éléments théoriques

Dans l'étude de la transposition didactique de la notion de dérivée dans le secondaire, je considère les deux types de tâches $T_{tangente}$ et $T_{f'}$. Plus précisément, je m'intéresse aux praxéologies mathématiques qui sont développées pour résoudre ces types de tâches et qui sont proposées dans le curriculum *attendu* et dans le curriculum *implémenté* dans les classes (Mullis & Martin, 2007)[3]. Les techniques employées pour résoudre $T_{tangente}$ et $T_{f'}$ reposent sur des propriétés ponctuelles, globales et locales des fonctions en jeu, qui constituent le bloc technologico-théorique des praxéologies. Les arguments développés pour justifier les techniques à utiliser en effet se réfèrent explicitement ou implicitement à ces propriétés. Pour identifier si le sujet qui développe et utilise une certaine praxéologie (auteur des programmes, auteur des manuels, enseignant ou élève) a activé une perspective spécifique sur les fonctions en jeu, il est évidemment important de considérer ce qui est déclaré (dit ou écrit) à propos de la fonction. Cependant, c'est la coordination avec d'autres ressources sémiotiques, différentes du discours oral ou écrit, qui peuvent nous renseigner effectivement sur la perspective adoptée par le sujet. Autrement dit, c'est l'analyse en termes de faisceau sémiotique qui nous donne des informations sur la perspective en jeu.

Une grande variété de ressources sémiotiques peuvent être utilisées par le sujet (qu'il soit l'enseignant ou l'élève) lorsqu'il travaille sur $T_{tangente}$ ou $T_{f'}$: discours oral ou écrit, symboles, gestes, croquis ou dessins. Elles peuvent exploiter différents registres de représentation (algébrique, symbolique, graphique, etc.) sur les fonctions et révéler ou cacher une perspective donnée sur ces fonctions. Si les différentes ressources sémiotiques utilisées (comme par exemple, le discours et les gestes) concourent à mettre en évidence la même perspective sur la fonction en question, cette unité peut encourager l'activation de cette perspective. Mais il est aussi possible que plusieurs ressources sémiotiques utilisées simultanément mettent l'accent sur des perspectives différentes. Par exemple, si l'affirmation

[2] Dans une lettre à Lady Welby, Peirce écrit : "I define a Sign as anything which is so determined by something else, called its Object, and so determines an effect upon a person, which effect I call its Interpretant, that the latter is thereby mediately determined by the former" (Peirce, 1977, pp.80-81; Letter to Lady Welby, 1908).

[3] Cette terminologie a été introduite par le *Second International Mathematics Study* (*SIMS*) dans les années '80. Le curriculum *attendu* se réfère aux objectifs des programmes et aux intentions que le pays a pour ces élèves : documents officiels du ministère, programmes et manuels qui explicitent le savoir à enseigner dans le classe ainsi que des indications méthodologiques. Le curriculum *implémenté* concerne tout ce qui est effectivement enseigné à l'école.

locale « *f* est discontinue en x_0 » est accompagnée par un geste ponctuel sur le graphique de *f* au point (x_0, $f(x_0)$), le faisceau sémiotique composé de discours, graphique et gestes montre quelques relations internes conflictuelles par rapport à la perspective adoptée. Une telle contradiction, qui souvent se produit inconsciemment, peut interférer avec l'intention d'évoquer une perspective locale sur la fonction. Ainsi, dans l'analyse du développement d'une praxéologie pour $T_{tangente}$ et $T_{f'}$ deux aspects semblent essentiels à identifier et à discuter : quelles ressources sémiotiques sont utilisées ensemble pour évoquer une perspective donnée et s'il y a concordance ou discordance entre les perspectives activées par les différentes ressources constituant le faisceau sémiotique.

Les questions de recherche auxquelles cette étude se propose de répondre peuvent être ainsi reformulées dans ce cadre théorique : Comment la perspective locale est-elle gérée dans le développement d'une praxéologie pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe d'une fonction en un point ($T_{tangente}$) ? Comment les perspectives ponctuelle et globale sont-elles gérées dans le développement d'une praxéologie pour représenter algébriquement la fonction dérivée ($T_{f'}$) ?

METHODOLOGIE

Concernant le savoir à enseigner, j'ai considéré le curriculum attendu en adoptant un point de vue global sur les programmes italiens pour les lycées (*Indicazioni Nazionali per i Licei* : MIUR, 2010). Plus précisément, j'ai analysé les indications impliquant la dérivée dans les programmes des lycées scientifiques. Ensuite j'ai restreint mon point de vue pour analyser deux manuels italiens (Bergamini et al, 2013, Sasso, 2012) qui se sont révélés parmi les plus utilisés en cinquième année de lycée scientifique en 2013 dans la région de Turin. Pour investiguer le savoir enseigné, je me suis appuyée sur des études de cas. Trois enseignantes ont participé à cette recherche sur la base du volontariat : Vittoria, Martina et Margherita. Elles ont été contactées car elles suivaient un des manuels analysés et leur expertise était différente : Vittoria et Martina sont enseignantes depuis une vingtaine d'années et depuis plusieurs années elles travaillent dans le même établissement ; Margherita est une jeune enseignante qui travaillait au lycée scientifique en 2012-2013 comme précaire et pour la première fois avec des élèves en cinquième année.

J'ai interviewé les enseignantes avant qu'elles introduisent la dérivée en classe, je les ai observées en classe pendant une dizaine d'heures de cours, j'ai proposé deux tâches aux élèves. Les entretiens étaient du type semi-structuré, selon une liste de sujets à aborder (utilisation du manuel, introduction habituelle ou prévue du concept de dérivée et de fonction dérivée, influences possibles de pratiques précédentes notamment sur les coniques et sur les limites). Au-delà des interviews préliminaires, durant et après la phase d'observation en classe, j'ai eu l'opportunité de discuter informellement avec les enseignantes de ce qui s'était passé en classe, de leurs commentaires et leur bilan. Du point de vue de la recherche, ces entretiens m'ont donné des éclairages sur les pratiques déclarées ou projetées par les enseignantes et ont étayé mes interprétations des décisions et des choix des enseignantes en phase d'analyse. Dans la phase d'observation, j'ai pris des vidéos du travail de classe que j'ai pu aussi utiliser comme support pour mes entretiens plus informels avec les professeurs. Mon rôle d'observateur dans la classe peut se définir comme une « participation modérée » c'est-à-dire « l'observateur est présent sur la scène de l'action mais ne participe pas activement, n'interagit pas, ou il le fait seulement occasionnellement, avec les personnes sur scène »

(DeWalt et al., 1998, p.262). Enfin, j'ai conçu deux tâches pour les élèves afin d'avoir un aperçu à chaud sur leurs acquis en termes de perspectives sur les fonctions et de conceptualisation de fonction dérivée. L'observation et l'analyse de l'activité des élèves a été conduite aussi pour repérer des possibles influences des praxéologies des enseignantes sur les praxéologies mathématiques développées chez les élèves. Cette partie de l'étude mériterait d'être approfondie ultérieurement et elle ne fait pas l'objet de cet article.

De mon côté, j'ai donné aux enseignantes des informations sur le contexte et les objectifs de la recherche, sur mon rôle dans la classe, sur le traitement des sons et des vidéos. Je ne suis pas rentrée tout de suite dans les détails des tâches que je projetais de proposer aux élèves, pour ne pas influencer leurs pratiques habituelles qui étaient l'objet de mon observation ; j'en ai discuté plus tard avec chaque enseignante avant leur mise en œuvre dans la classe.

ANALYSE DES MANUELS

Les Indications Nationales italiennes (MIUR, 2010) mentionnent la différentiabilité d'une fonction comme un des concepts fondamentaux du calcul infinitésimal, avec la continuité et l'intégrabilité. Cependant ce n'est pas explicité que ce groupement est dû au caractère local de ces propriétés. Les indications laissent aux enseignants une grande liberté d'aborder le concept. De plus, il n'a pas de référence explicite à la définition de fonction dérivée.

Dans les manuels analysés, en revanche, les sous-problématiques identifiées dans cet article sont approchées aussi bien algébriquement que graphiquement et la notion de fonction dérivée apparaît comme essentielle pour résoudre les problèmes de *maturità* (baccalauréat italien) : les élèves sont censés avoir conceptualisé la dérivée en tant que fonction, avec ses propriétés en relation avec les propriétés des fonctions primitives (Derouet & Panero, 2014).

Concernant $T_{tangente}$, dans les manuels analysés, nous pouvons reconnaitre la transposition didactique de la définition « savante » Déf.1. En effet, au début du chapitre sur la dérivée, aussi bien Bergamini et al (2013) que Sasso (2012) développent les phases suivantes. D'abord, ils introduisent le problème de la tangente à la courbe d'une fonction générique et la droite tangente est vue comme limite d'une droite sécante dynamique ou d'une suite de droites sécantes (voir Fig. 3).

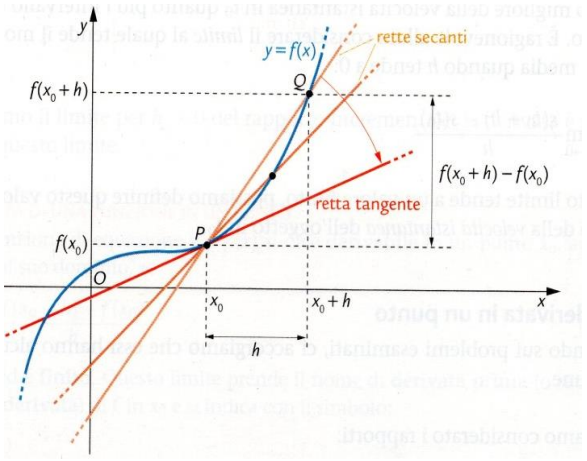


Fig. 3 : La tangente comme limite d'une séquence de sécantes (Sasso, 2012, p. 259).

Cette figure est accompagnée avec des descriptions comme « Q s'approche de P » et « lorsque Q devient de plus en plus proche de P ». Ensuite, le coefficient directeur de la droite sécante *PQ* est écrit en fonction de x_0 et *h* et on lit : « Imaginons maintenant que *h* tend vers *0* » et le symbole de limite est introduit. Enfin, la dérivée de la fonction *f* au point x_0 est définie par cette limite si elle existe et est finie.

Pour ce qui concerne les perspectives, nous pouvons remarquer que dans une première phase un travail important est fait sur la droite sécante, ce qui active les perspectives ponctuelle et globale sur la fonction. Puis le symbole de limite est introduit assez soudainement impliquant une perspective locale sur la fonction *f*. À travers le faisceau sémiotique *mots + graphique + symboles*, nous pouvons reconnaitre une activation potentielle, mais plutôt implicite, de la perspective locale. Cependant, il est difficile d'établir des relations parmi les mots qui décrivent dynamiquement un graphique statique et le symbolisme introduit « $\lim_{h \to 0}$ ».

Concernant $T_{f'}$, les manuels partent de la dérivée d'une fonction en un point x_0 d'une fonction *f* et remplacent x_0 par *x*.

> « On peut aussi calculer la dérivée d'une fonction en un point générique. Dans ce cas, la valeur obtenue $f'(x)$ est une fonction de *x* et, pour cette raison, nous parlons aussi de fonction dérivée. […] La fonction dérivée, lorsque *x* varie, donne le coefficient directeur de toutes les droites tangentes à la fonction donnée. » (Bergamini et al. 2013, p. 1621)

Quelques lignes après on trouve la formule symbolique $f'(x) = \lim_{h \to 0} [(f(x+h)-f(x))/h]$ appliquée dans un exercice guidé. La technique consiste ici à remplacer x_0 par *x* et elle est fondée sur l'idée de considérer un point générique *x* (Panero et al. 2016).

Pour ce qui concerne les perspectives, nous pouvons remarquer que le passage d'une perspective ponctuelle à une perspective globale sur la fonction dérivée est implicitement proposé de façon très concise. La formule globale qui exprime $f'(x)$ est ensuite immédiatement utilisée dans un exercice guidé. À travers le faisceau sémiotique, nous pouvons reconnaitre que les ressources utilisées pour montrer ce passage de perspectives sont les mots et les symboles. La technique proposée est presque totalement exprimée en symboles.

Nous pouvons conclure que, en termes de curriculum attendu, le caractère local de la propriété de différentiabilité est implicitement reconnu, peu travaillé, mais parfois demandé dans les tâches que l'élève est censé savoir résoudre. Lorsque la dérivée est introduite, la perspective locale sur les fonctions est potentiellement activable par un élève qui dispose de ce matériel, mais cela pourrait être difficile sans une médiation. Au moment du passage à la fonction dérivée, les manuels examinés n'approfondissent pas la justification de la technique consistant à remplacer x_0 par *x*. Le focus se déplace alors naturellement sur les enseignants qui ont la tâche de transposer ce savoir à enseigner : Comment les enseignants gèrent-ils les perspectives sur les fonctions dans le développement des praxéologies pour T_{tangente} et $T_{f'}$?

RESULTATS DES OBSERVATIONS EN CLASSE

Martina et Margherita ont essentiellement suivi la même praxéologie, celle du manuel (notamment Sasso, 2012). Je vais présenter ici le cas de Vittoria qui a introduit avec ses élèves une praxéologie différente, surtout au niveau du bloc technologico-théorique.

Vittoria enseigne mathématiques et physique dans un lycée scientifique de Turin. Elle travaille dans cet établissement depuis plusieurs années, et en particulier avec les élèves de la classe observée (élèves de 18-19 ans) depuis deux années. Les enseignants de mathématiques de l'établissement ont adopté le manuel de Bergamini et al (2013), mais Vittoria préfère s'appuyer sur ses notes pour préparer les cours et n'utilise le manuel que pour les exercices. Elle a obtenu un doctorat en Analyse et donnait des TD : ses notes sont en fait une transposition de ces travaux. Concernant le background des élèves observés, ils ont étudié la tangente aux coniques deux années plus tôt, en utilisant des techniques ponctuelles. Par exemple, une des techniques étudiées consiste à imposer Δ égal à zéro dans l'équation de second degré permettant de résoudre le système entre l'équation de la courbe et l'équation du faisceau de droites sécantes au point donné. Au moment de l'introduction de la dérivée les élèves venaient de travailler sur les limites : leur définition formelle (« ε – δ »), leur calcul et leur utilisation pour étudier le comportement du graphique d'une fonction dans le voisinage d'un extremum ou à l'infini. En particulier, Vittoria a travaillé avec ses élèves la propriété d'équivalence asymptotique de deux fonctions dans le voisinage d'un point. Voici ci-dessous la définition qu'elle a donné dans la classe et sur laquelle les élèves se sont appuyés pour résoudre les « limites remarquables » tels que $\lim_{x\to 0} [\sin x / x] = 1$.

> Déf. [équivalence asymptotique] Soient f et g deux fonctions qui tendent vers zéro lorsque $x\to a$. Nous disons que f et g sont asymptotiquement équivalentes pour $x\to a$, si $\lim_{x\to a} [f(x) / g(x)] = 1$.

En particulier, les élèves ont visualisé graphiquement cette propriété en utilisant GeoGebra et en zoomant sur les deux courbes dans le voisinage du point a ; puis ils l'ont employée comme outil pour le calcul de limites, en remplaçant une fonction par son équivalente asymptotique[4].

Praxéologie mathématique pour $T_{tangente}$

Au cours de l'entretien préliminaire, Vittoria a expliqué que d'habitude elle commence par la définition de droite tangente. En fait, dans la classe elle pose tout de suite le problème de définir la tangente à une fonction générique en un point donné. Plus spécifiquement elle demande aux élèves : « Quelles propriétés doit avoir la droite tangente ? ». Une discussion ouverte se met en place et les élèves, comme Vittoria l'avait prévu, rappellent toutes les définitions opérationnelles et les techniques utilisées avec les coniques. En termes de moments didactiques, la première phase de la séance est dédiée à une discussion technologico-théoretique sur le problème de la tangente dans le cas d'une fonction générique. L'intérêt est en fait celui de définir l'objet mathématique avec lequel ils vont travailler et d'expliquer pourquoi toutes les techniques reliées aux coniques ne marchent plus. Comme elle l'a déclaré avant le cours, Vittoria a l'intention de désarmer les élèves de toutes leurs techniques précédentes et d'introduire la dérivée comme un outil pour résoudre le type de tâche $T_{tangente}$ dans le cas générique. Cependant, la discussion produit chez les élèves non seulement du désarroi, mais aussi une définition inattendue mais correcte de tangente. Je vais présenter l'analyse de quelques épisodes saillants de ce débat de classe.

La première définition proposée par un élève (E1) est : « La tangente intersecte la courbe en un seul point ».

1 E1 : [La tangente] doit intersecter [la fonction] en un seul point.

2 E2 : […] Mais, si c'est ça, tous les points n'ont pas de tangente. J'imagine une fonction pentue (il penche sa main) alors peut-être la tangente dans ce cas pourrait intersecter la fonction en un autre point, n'est-ce pas ?

[4] Exemple : $\lim_{x\to 0} [\tan x / x] = \lim_{x\to 0} [(\sin x / \cos x) / x] = \lim_{x\to 0} [(x / (1-x^2)) / x] = \lim_{x\to 0} [1 / (1-x^2)] = 1$.

3 V : […] Donc, tu es en train de penser à une chose pareille ? (Elle trace le graphique en Fig. 4)

4 E2 : Oui, il y a une tangente mais elle touche d'autres points de la fonction.

5 V : Par exemple, si je cherche la tangente ici ? (Elle indique le point maximum sur la courbe, voir Fig. 4) Comment je l'imagine ?

Cette première définition (ligne 1) met en avant une perspective ponctuelle sur la fonction, exaltée par l'indicateur discursif ponctuel « en un seul point ». S'appuyant sur la remarque globale de E2 (ligne 2), Vittoria propose un contre-exemple graphique (ligne 3, Fig. 4). Son dessin global d'une partie du graphique sur un intervalle contextualise son geste ponctuel (« ici » à la ligne 5, Fig. 4), afin d'encourager les élèves à regarder tout le graphique de la fonction dans une perspective globale.

Un autre élève (E3) propose de circonscrire cette définition en rajoutant « dans un intervalle approprié », mais la définition donnée reste ponctuelle.

6 E3 : Pour éviter ce que disait E2, on pourrait choisir un intervalle approprié (il bouge ses doigts vers le haut puis le bas comme en Fig. 5) où la tangente satisfait nos conditions.

7 V : Donc, on limite la zone. […] Dans une zone proche du point, au lieu de considérer entièrement la fonction.

8 E4 : Un voisinage […]

9 V : Prenons un point, celui-ci (x_0, y_0), on se met dans un voisinage approprié (elle dessine la situation au tableau, Fig. 6) et là qu'est-ce qu'on demande ?

10 E5 : Là, que la tangente intersecte seulement en ce point.

11 E4 : Ça suffit pas […] Elle pourrait faire ça (il penche son bras).

12 V : Elle pourrait faire ça (Fig. 7).

L'élève E3 accompagne ses mots (ligne 6) avec un petit geste de ses doigts (Fig. 5) et l'enseignante le reproduit au tableau sous forme de deux droites verticales autour du point (Fig. 6). Bien que le geste de l'élève, renforcé par le signe de l'enseignante, a déjà l'intention d'élargir la perspective ponctuelle de la première définition, les indicateurs discursifs à ce stade sont globaux pour l'élève (« un intervalle approprié », ligne 6 ; « dans cet intervalle », ligne 8) et locaux seulement pour l'enseignante (« dans un voisinage approprié », ligne 9). La définition proposé (ligne 10) corrigée par l'ajout de « là » qui signifie « dans cet intervalle » retombe dans une perspective ponctuelle. La « prise » locale est encore trop faible pour faire bouger la perspective des élèves. En tout cas, E5 reconnait que cette propriété n'est pas suffisante (ligne 11) et, en s'appuyant sur son intervention, Vittoria présente un contrexemple graphique qui exalte le caractère ponctuel de la définition donnée (Fig. 7).

Fig. 4 : Contre-exemple de Vittoria.

Fig. 5 : Geste de E2 pour « un intervalle

approprié ».

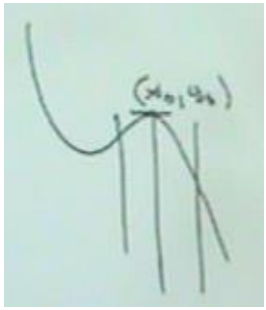


Fig. 6 : Vittoria utilise le signe | | en reprenant le geste de E2.

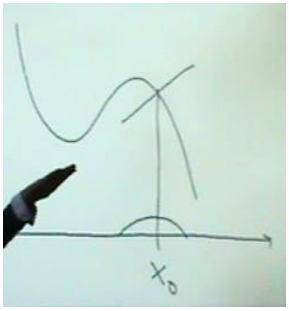


Fig. 7 : Contre-exemple de Vittoria.

La troisième définition proposée par E4 est encore une fois ponctuelle : la tangente est perpendiculaire au rayon du cercle. Elle est complétée localement par une autre élève qui rajoute « du cercle qui approxime le mieux la courbe ». L'enseignante alors reconnait que cela peut être une approche correcte, mais techniquement trop difficile pour eux.

Un autre élève (E6) propose une définition globale en relation avec celle donnée pour les coniques : la tangente doit rester entièrement dans une même région de plan détectée par la fonction donnée. Stimulé par l'enseignante, il spécifie « dans l'intervalle » en répétant le geste de son camarade E3 (Fig. 8) repris encore une fois sous forme de deux droites verticales sur le graphique par Vittoria.

13 V : D'accord, E6. Et si je dessine une fonction comme celle-ci (elle dessine la courbe en Fig. 9) et je te demande de trouver la tangente à ce point (elle indique le point d'inflexion). Y a-t-il la tangente à ce point ou pas ?

14 E5 : Elle tend à coïncider avec la fonction.

15 E3 : C'est comme quand on a étudié sin$x$ qui était asymptotiquement équivalent à $y = x$, n'est-ce pas ?

16 V : On avait la tangente dans ce cas-là ?

17 E4 : On l'avait mais le raisonnement fondé sur les régions de plan ne tient pas.

A la définition globale proposée par E6, Vittoria répond avec un contrexemple graphique local lorsque le point de tangence est un point d'inflexion (Fig. 9). Ce graphique non seulement encourage les élèves à rejeter la nouvelle définition (ligne 17), mais aussi il évoque la propriété d'équivalence asymptotique entre $y = \sin x$ et $y = x$ (lignes 14-15).

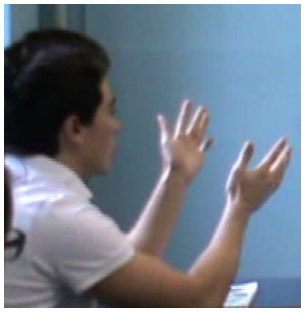


Fig. 8 : Geste de E6 pour « dans l'intervalle ».

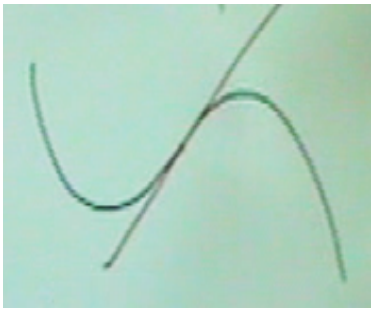


Fig. 9 : Contrexemple de Vittoria.

Ainsi, finalement, un autre élève encore propose une définition locale correcte : la tangente est la droite qui approxime le mieux la courbe donnée dans le voisinage du point. L'élève E6 inspiré par cette définition écrit une égalité au tableau (Fig. 10). Nous pouvons l'interpréter

comme une technique précédente (liée à la propriété de l'équivalence asymptotique et aux limites remarquables), remployée au niveau justificatif en relation avec la définition proposée.

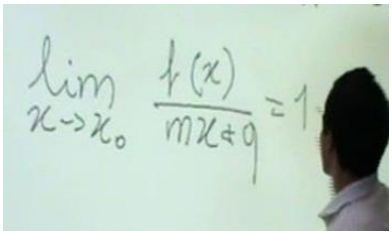


Fig. 10 : Egalité proposée par E6 pour exprimer l'équivalence asymptotique de f(x) et mx+q.

Vittoria, confrontée à cet ultérieur développement inattendu des élèves, avoue : « C'est une approche que je n'ai jamais essayée auparavant. Essayons ensemble maintenant ». La définition et l'égalité données par les élèves mènent à la technique visée pour $T_{tangente}$ (définition du nombre dérivé), mais à travers un discours justificatif que l'enseignante n'a pas préparé. Pour la séance suivante, Vittoria retravaille sur la justification de E6 et une reformulation graphico-symbolique du type de tâche lui permet de trouver la technologie correcte, d'où on peut enfin déduire le coefficient directeur de la tangente. Plus spécifiquement, elle effectue une translation verticale de l'axe des abscisses de vecteur (0, $f(x_0)$) qui lui permet de comparer les infinitésimaux CB et AB lorsque x tend vers x_0 (Fig. 11). Elle accompagne cette action sur le graphique en disant : « Pourquoi l'égalité proposée par E6 (Fig. 10) ne donne pas l'idée d'équivalence asymptotique ? Parce que l'équivalence asymptotique est valide pour des quantités infinitésimales, qui vont à zéro. Donc, ici, tout d'abord j'ai besoin d'une forme indéterminée du type 0 sur 0, les deux quantités doivent tendre à zéro, et après je compare la vitesse avec laquelle elles tendent vers zéro. » Enfin, en exprimant CB et AB en symboles, Vittoria peut écrire l'égalité en Fig. 12.

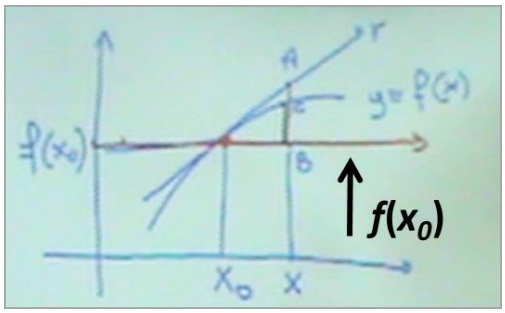


Fig. 11 : Reformulation graphique de $T_{tangente}$.

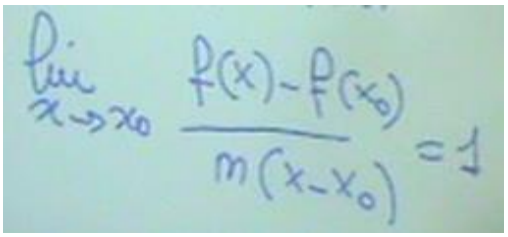


Fig. 12 : Technologie corrigée.

A travers la loupe du faisceau sémiotique, nous pouvons remarquer que les mots, les graphiques et les symboles locaux de Vittoria pour produire l'égalité en Fig. 12 peuvent être interprétés comme la justification de la technique pour trouver le coefficient directeur de la tangente m. Cette technologie est supportée, au niveau théorique, par la propriété locale d'équivalence asymptotique. En termes de moments didactiques, cette deuxième phase du travail peut être interprétée comme une étroite interrelation entre le moment technologico-théoretique et celui d'élaboration d'une technique pour déterminer le coefficient directeur de la tangente et ensuite pour en trouver l'équation. S'appuyant sur la définition théorique de la tangente et sur la propriété d'équivalence asymptotique, la technologie est formulée en utilisant le graphique (Fig. 11), le discours (« l'équivalence asymptotique est valide pour les quantités infinitésimales, qui vont à zéro », « une forme indéterminée 0 sur 0, les deux quantités doivent tendre vers zéro ») et les symboles (Fig. 12) afin de trouver la technique visée pour $T_{tangente}$: équation $y = f(x_0) + m\,(x-x_0)$ avec $m = \lim_{x \to x0} [(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)]$.

La praxéologie pour $T_{tangente}$ construite par Vittoria et sa classe est résumée dans le Tableau 1.

$T_{tangente}$	Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f au point x_0.
Technique	tg : $y = f(x_0) + m\,(x-x_0)$ avec $m = \lim_{x \to x0} [(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)]$.
Technologie	Parmi toutes les droites qui passent par $(x_0, f(x_0))$, la tangente est celle qui approxime le mieux la fonction. La quantité infinitésimale $f(x)-f(x_0)$ est asymptotiquement équivalente à la quantité infinitésimale $m(x-x_0)$ (Fig. 11-12). Condition satisfaite : $\lim_{x \to x0} [(f(x)-f(x_0)) / (m(x-x_0))] = 1$. Puisque m est une constante on peut l'extraire du signe de limite : $1/m \quad \lim_{x \to x0} [(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)] = 1 \leftrightarrow m = \lim_{x \to x0} [(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)]$.$\frac{1}{m} lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{m(x-x_0)} = 1 \Leftrightarrow m = lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
Théorie	Définition de tangente comme *meilleure approximation affine de la courbe dans le voisinage du point* ; Propriété d'équivalence asymptotique ; Équation analytique d'une droite ; Théorie des limites.

Tableau 1 : La praxéologie mathématique de Vittoria pour $T_{tangente}$

Praxéologie mathématique pour $T_{f'}$

Au démarrage de la troisième séance, Vittoria donne aux élèves une technique équivalente pour trouver le coefficient directeur de la tangente à la courbe d'une fonction f au point x_0 :

$f'(x_0) = \lim_{x \to x0} [(f(x)-f(x_0)) / (x-x_0)]$

$\leftarrow [x-x_0 = h] \rightarrow f'(x_0) = \lim_{h \to 0} [(f(x_0+h)-f(x_0)) / h]$ (dénotée par ** dans la suite).

Ensuite, Vittoria propose aux élèves une tâche qui est ponctuelle sur f' : déterminer la dérivée de la fonction $y = x^2$ au point d'abscisse $x_0 = 2$. Les élèves travaillent individuellement pendant quelques minutes puis l'enseignante corrige au tableau. Ils trouvent $f'(2) = 4$. Vittoria alors propose une variante de la tâche : déterminer la dérivée de la fonction $y = x^2$ en un point quelconque x_0. Les élèves travaillent seuls puis Vittoria corrige : ils trouvent $f'(x_0) = 2x_0$.

Ces exercices pourraient être considérés comme une mise en pratique de la praxéologie (qui est encore un autre moment didactique de Chevallard), mais derrière on reconnait l'intention de l'enseignante d'introduire la fonction dérivée. La tâche donnée en effet vise à stimuler une perspective ponctuelle générique sur f' (« un point quelconque x_0 ») alors que la technique dont les élèves disposent (voir **) est ponctuelle sur f'. Nous rentrons ainsi dans le développement d'une autre praxéologie mathématique dans la classe : celle pour résoudre $T_{f'}$ (représenter la fonction dérivée, dans le registre algébrique). Vittoria commente le travail fait :

1 V : Qu'est-ce qu'on a découvert ? On a découvert que quand on a la fonction x^2, sa dérivée est, point par point, $2x_0$.

2 V : Donc, si j'écris ici la fonction, et ici sa dérivée (elle commence à remplir un tableau « $f \mid f'$ »). J'ai découvert que la dérivée de la fonction x^2 est $2x$. (Elle écrit $x^2 \mid 2x$ dans la première ligne du tableau).

3 V : Ce processus est automatique, car si j'ai x^2, à partir de maintenant, je ne calculerai plus jamais la limite du rapport incrémental. Je sais que sa dérivée est $2x$. Je l'ai calculée une fois pour toutes, dans le cas général d'un point quelconque x_0, donc je l'ai.

Lorsque Vittoria trouve le résultat $2x_0$, elle l'interprète comme « la dérivée point par point » [ligne 1] ce qui implique une perspective ponctuelle générique sur f'. De façon implicite, sans donner plus de détails, Vittoria remplace x_0 par la variable globale x [ligne 2]. Il s'agit de la technique pour représenter la fonction dérivée (remplacer x_0 par x dans l'expression du nombre dérivé à x_0). Cependant, cette technique et sa justification reste implicite dans le changement de signes de la ligne 1 à 2. En termes de perspectives, x_0 est utilisé par Vittoria

comme signe ponctuel générique, représentant toute abscisse x_0 du domaine, tandis que x a le sens global de variable. Mais ce changement de x_0 à x parait drastique aux yeux des élèves.

4 E4 : Est-ce que la variable indépendante change de f à f' ? Est-ce toujours x_0 ou est-ce toujours la même ?

5 V : C'est un point x. […] Prenons $f(x) = x^2$, que je sais dessiner, car c'est une parabole (elle trace la courbe en Fig. 13). Qu'est-ce que j'ai découvert et prouvé ? Que si je prends n'importe quel point x_0 (elle choisit un point x_0 sur l'axe des abscisses), alors le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 [...] est $2x_0$. Donc, si je trace la tangente ici (elle trace la tangente au point correspondant sur la parabole), cette droite a $2x_0$ comme coefficient directeur (elle écrit « $m = 2x_0$ »).

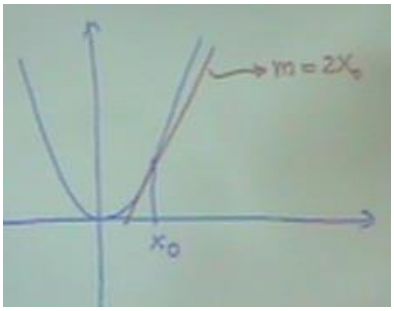


Fig. 13 : Exemple de la parabole proposé pas Vittoria au tableau.

6 V : Ça veut dire que je peux faire varier x_0 comme je veux (elle bouge sa main comme en Fig. 14). Donc, je peux écrire x à la place de x_0, pour des raisons pratiques.

7 V : Et point par point j'ai une formule, qui est la suivante (elle écrit « $f'(x) = 2x$ »), qui point par point (elle bouge la baguette comme en Fig. 15) me donne la valeur du coefficient directeur de la tangente.

8 E4 : […] $f'(x)$ me donne le coefficient directeur.

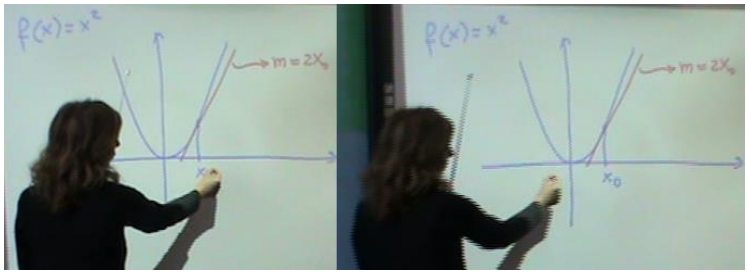


Fig. 14 : Vittoria accompagne avec ce geste les mots «je peux faire varier x_0 comme je veux » (ligne 6)

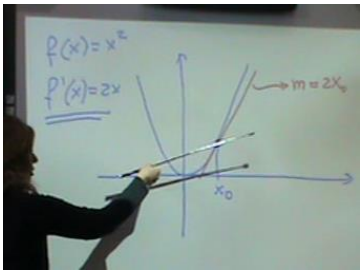


Fig. 15 : Geste continu de Vittoria sur le graphique de f.

9 V : Oui, lorsque x varie. Donc, la variable est la même. Point par point, ici j'ai une fonction qui point par point automatiquement, comme une machine, me donne le coefficient directeur de la tangente.

10 E4 : Seulement, je ne comprends pas ce passage. Si nous savons que m est $2x$, $f(x)$ correspond à y, tandis que m correspond à la tangente, comment peuvent-ils être équivalents ? Je ne comprends pas.

L'intervention de E4, qui est un bon élève [ligne 4], montre que la technique introduite par Vittoria est source de doutes sur les variables en jeu chez les élèves. L'enseignante clarifie dans son discours le rôle générique de x_0 et explicite le passage de x_0 à x. Sur le graphique

(Fig. 13, ligne 5), nous pouvons remarquer une discordance qui se produit fréquemment quand on utilise un graphique pour parler de quelque chose de générique. On déclare considérer un point générique sur la courbe, une valeur quelconque de l'abscisse x_0. Pourtant, lorsque nous l'identifions sur le dessin, le point ou l'abscisse devient forcément un point spécifique sur la courbe ou une valeur spécifique de l'abscisse. Afin de regagner en généralité et variabilité, Vittoria utilise le discours (« Je peux faire varier x_0 comme je veux [...] Je peux écrire x à la place de x_0 » [ligne 6]) et les gestes continus sur le graphique (voir Fig. 14-15). La technique est un petit peu plus développée maintenant : Vittoria est en train de donner au signe ponctuel générique x_0 le statut global de variable. Grace à la coordination du discours et des gestes continus sur le graphique, la perspective sur la fonction f (la parabole, dans ce cas) est globale. Par contre, sur la fonction f' à ce stade Vittoria n'utilise que les mots et les symboles, en exploitant la formule $f'(x) = 2x$ qui « point par point me donne la valeur du coefficient directeur de la tangente » [ligne 7]. La fonction dérivée est donc définie comme « la fonction qui point par point automatiquement, comme une machine, me donne le coefficient directeur de la tangente » [ligne 9]. La perspective sur f', à travers l'utilisation de ces ressources sémiotiques, reste ponctuelle générique (« point par point »). Elle est certainement susceptible de devenir globale, mais cela n'est pas spontané chez les élèves : on le voit dans le doute de E4 qui persiste sur les variables en jeu et en particulier sur le statut de fonction de f' [ligne 10]. E4 a activé une perspective globale sur la fonction f, supportée par le registre graphique que l'enseignante utilise, mais il n'arrive pas à comprendre comment le coefficient m (et donc f'), lui aussi, pourrait se comporter comme une fonction.

La praxéologie pour $T_{f'}$ construite par Vittoria et ses élèves est résumée dans le Tableau 2. Elle reste un peu faible au niveau du bloc technologico-théorique pour permettre aux élèves de donner à f' le statut de fonction globale comme celui de f.

$T_{tangente}$	Représenter la fonction dérivée (dans le registre algébrique).
Technique	Dans la formule $f'(x_0) = \lim_{h \searrow 0} [(f(x_0+h)-f(x_0))/h]$, on « écrit x à la place de x_0 ».
Technologie	On peut « faire varier x_0 comme on veut » : x_0 acquiert le statut de variable.
Théorie	La définition et la formule de la dérivée en un point x_0. La définition de fonction dérivée comme « une machine » qui point par point automatiquement, donnée une valeur de x, nous donne la valeur du coefficient directeur de la tangente au point x.

Tableau 2 : La praxéologie mathématique de Vittoria pour $T_{f'}$

DISCUSSION ET CONCLUSIONS

Cette étude de cas nous permet de parcourir les moments didactiques qui mènent au développement d'une praxéologie mathématique pour déterminer l'équation de la droite tangente à la courbe d'une fonction en un point spécifique ($T_{tangente}$) et représenter la fonction dérivée dans le registre algébrique ($T_{f'}$). Concernant ces deux types de tâches, liés à la dérivée, nous étions intéressés à la gestion des perspectives sur la fonction, notamment de la perspective locale sur la fonction à dériver dans le cas de $T_{tangente}$ et des perspectives ponctuelle et globale sur la fonction dérivée dans le cas de $T_{f'}$. Relativement à ces deux questions de recherche, je vais discuter les résultats dans les paragraphes suivants.

Gestion de la perspective locale lors de l'introduction du nombre dérivée

En analysant le cas de Vittoria, émerge une transposition didactique de la dérivée qui n'est pas transposée du manuel. Elle consiste plutôt à une transposition directe de la définition « savante » Déf.2 (Geymonat, 1981). La perspective locale sur la fonction à dériver est présente dans le discours (par exemple, « l'équivalence asymptotique est valide pour des quantités infinitésimales, qui vont à zéro »). Cette perspective est aussi marquée par les gestes des élèves (Fig. 5 et 8) et par le signe « | | » de Vittoria qui les reproduit sur le graphique au tableau (Fig. 6). La relation entre les ressources sémiotiques utilisées dans ce cas est encore plus complexe que dans un jeu sémiotique[5]. En effet, l'enseignant exploite un des gestes partagés dans la classe, mais sans le répéter ; elle change de ressources sémiotique (signe sur le graphique) et convertit ce geste dans le signe écrit « | | » en l'accompagnant avec un discours riche en sens mathématiques, pour encourager les élèves à passer d'une perspective globale « dans l'intervalle » à une perspective locale « dans le voisinage ». Cette conversion se révèle une stratégie importante pour promouvoir la perspective locale. Vittoria part de la façon dont les élèves se réfèrent à un intervalle sans spécifier si leur perspective est globale ou locale sur la fonction, et construit sur cette base le raisonnement dans le voisinage du point.

Un moment décisif dans le travail de la classe est le contrexemple local de la tangente en un point d'inflexion (Fig. 9). A travers cette ressource graphique, Vittoria évoque inconsciemment dans la tête des élèves le cas de $y = \sin x$ qui est asymptotiquement équivalent à $y = x$ lorsque x va à 0. Le rappel de cette propriété et de la praxéologie relative conduit les élèves à proposer une définition complétement locale de tangente en enrichissant les fondements théoriques de la praxéologie en construction pour $T_{tangente}$. De plus, un élève propose une technologie en introduisant une possible formalisation symbolique (égalité en Fig. 10) qui n'est pas adaptée, mais en tout cas une tentative remarquable d'utiliser la propriété d'équivalence asymptotique de façon opérationnelle. C'est seulement à partir de ce moment que l'enseignante commence à manipuler les symboles. La perspective locale, qui a été graduellement développée et renforcée par la définition de tangente, est ainsi transférée aux symboles *lim* et $x \rightarrow x_0$ que les élèves empruntent à une autre praxéologie, elle aussi locale, celle des limites remarquables. La dimension locale sur la fonction générique f est donc activée par le raisonnement dans le voisinage du point, qui est à la base de l'idée de meilleure approximation affine. La perspective locale sur la fonction imprègne chaque partie de la praxéologie de Vittoria. Il n'y a pas d'allusion à des aspects ponctuels ou globaux de la fonction, différemment de la transposition « traditionnelle » avec le raisonnement sur la sécante ou les incréments globaux qui doivent être réduits.

En conclusion, cette transposition didactique de la notion de dérivée peut représenter un défi mais aussi une alternative puissante pour les enseignants par rapport à la transposition traditionnelle (celle des manuels), dont la procédure parait parfois obscure et artificielle.

Gestion des perspectives ponctuelle-globale lors de l'introduction de la fonction dérivée

Vittoria commence par la tâche qui consiste à calculer la dérivée de la fonction $f(x) = x^2$ au point $x_0 = 2$ et emploie la technique « remplacer x_0 par x afin d'obtenir $f'(x) = 2x$ ». Dans le discours de l'enseignante, cette technique s'exprime à travers les mots « Je peux faire varier x_0 comme je veux [...] Je peux écrire x ». Vittoria fonde la justification de cette technique sur l'idée de considérer un point x_0 générique en lui donnant ensuite le statut de variable. Sur la fonction f la perspective globale est renforcée à travers la coordination du registre graphique avec des gestes continus sur le graphique pour illustrer les variations de la tangente. Sur la fonction f', on passe d'une perspective ponctuelle à une perspective ponctuelle générique :

[5] Un jeu sémiotique se produit lorsque « l'enseignant utilise une des ressources partagées (gestes) pour rentrer dans une attitude de communication consonante avec ses élèves et un autre (discours) pour les emmener vers le sens scientifique de ce qu'ils sont en train de considérer » (Arzarello & Paola, 2007, p.23).

essentiellement sont utilisés discours et symboles de nature ponctuelle générique (« un point quelconque », « point générique », « point par point », etc.). La définition de fonction dérivée dans le registre algébrique est déléguée à la formule symbolique $f'(x) = \lim_{h \to 0} [(f(x+h)-f(x)) / h]$ accompagnée par la formulation verbale : « la fonction qui point par point automatiquement, comme une machine, me donne le coefficient directeur de la tangente ». Nous pouvons remarquer qu'il s'agit d'une définition ponctuelle générique qui est susceptible de devenir globale mais, comme il a été fait pour la fonction *f*, d'autres ressources sémiotiques devraient être utilisées d'un point de vue global, notamment le graphique et les gestes sur ce graphique. Toutefois il sera nécessaire d'établir des relations entre les nouvelles ressources sémiotiques (graphique et gestes) et les symboles et les mots utilisés auparavant pour introduire algébriquement la fonction dérivée. Ces relations peuvent assurer la création d'un faisceau sémiotique fort qui pourra supporter la construction de sens pour les signes et les variables utilisés, exactement comme on l'a pu observer sur la fonction *f* dans le cas de Vittoria.

Potentiel ponctuel, global et local d'une technique ou d'une ressource sémiotique

D'après les résultats de cette recherche, j'introduis l'idée de « potentiel ponctuel, global ou local » d'une technique ou d'une ressource sémiotique utilisée dans l'étude de fonctions. Il est défini comme le degré d'adéquation d'une certaine technique ou d'une certaine ressource sémiotique à activer une perspective donnée.

Une technique donnée peut avoir un potentiel ponctuel, global ou local. Premièrement, la technique utilisée dans la transposition didactique faite par les manuels a un potentiel local. En effet, elle s'appuie sur l'idée de s'approcher d'un point P sur une courbe avec une suite d'autres points $\{Q_n\}_{(n \in N)}$ de cette courbe, qui pour *n* suffisamment grand se situent dans un voisinage de P. Deuxièmement, la technique utilisée par Vittoria a aussi un potentiel local, car elle se fonde sur l'idée de zoomer sur un graphique et sa tangente jusqu'à ne pouvoir plus les distinguer et cela se produit dans le voisinage du point de tangence (équivalence asymptotique). Les deux techniques promeuvent donc un travail sur le graphique de la fonction dans le voisinage d'un point. Cependant, cette recherche a montré que la deuxième technique a un potentiel local plus élevé car l'idée de zoomer sur un graphique et sa tangente permet de travailler directement les propriétés locales de tangence. Elle évite en fait l'introduction artificielle d'une sécante qui intervient comme une sorte de *deus ex machina* et déplace l'attention vers des propriétés ponctuelles et globales de la fonction.

Une certaine ressource sémiotique peut avoir un potentiel ponctuel, global ou local. Par exemple, le graphique a un fort potentiel global. En effet, quand on trace un graphique il s'agit forcément d'une portion du graphique de la fonction qui a donc certaines propriétés dans l'intervalle choisi, même quand le choix n'est pas fait consciemment. Selon le cadre théorique du faisceau sémiotique, les ensembles sémiotiques ne vivent pas isolés, mais en relation mutuelle avec d'autres ensembles sémiotiques. D'après les résultats de cette recherche, nous pouvons remarquer que pour être sûr de l'activation du potentiel d'une certaine ressource sémiotique, et donc de la perspective associée, il faut l'étudier dans ses relations avec les autres ressources sémiotiques utilisées pour activer la même perspective. Le potentiel global d'un graphique, par exemple, peut être activé seulement si d'autres ressources mettant en avant des aspects globaux de la fonction sont efficacement coordonnées avec le graphique. Il peut s'agir d'un indicateur discursif (tel que « la fonction entièrement », « pour tout *x* », « toujours ») ou d'un geste continu tout le long du graphique (tel que parcourir le profil du graphique). De façon similaire, si la propriété que l'on veut montrer sur le graphique est ponctuelle, on peut indiquer un point spécifique : ce geste active le potentiel ponctuel du graphique et en conséquence une perspective ponctuelle sur la fonction. En conclusion, le

potentiel ponctuel (ou global ou local) d'une ressource sémiotique est activable seulement grâce à la coordination de cette ressource avec au moins une autre ressource sémiotique mettant en avant la perspective ponctuelle (ou globale ou locale).

En particulier, cette étude a montré que le graphique possède aussi un haut potentiel local. Toutefois, son activation doit être opportunément conduite par l'enseignant, à travers la coordination d'autres ressources sémiotiques. Les élèves en fait doivent être guidés dans le raisonnement sur un graphique dans le voisinage d'un point. L'idée de potentiel ponctuel, global et local peut être utile aux enseignants pour une double raison : d'une part, pour choisir les ressources sémiotiques les plus adaptées pour introduire une perspective donnée sur les fonctions ; d'autre part, pour reconnaitre si un élève a activé cette perspective et s'il est en train de l'utiliser.

Comme remarque conclusive, je voudrais ajouter que, bien que les élèves de Vittoria ont été exposés à une praxéologie qui favorise davantage la dimension locale, ils n'ont pas montré une perspective locale très forte sur les fonctions comme on l'aurait pu croire. L'éducation à la perspective locale, ainsi que l'attribution d'un sens global à la fonction dérivée, nécessitent du temps et du travail dans des contextes différents et avec des différents types de tâches. L'étude des effets des praxéologies dans la perspective locale sur les apprentissages des élèves, tout au long du parcours des élèves en Analyse, pourrait constituer un développement futur de cette recherche.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARZARELLO, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 9(1), 267–300.

ARZARELLO, F., & PAOLA, D. (2007). Semiotic games: the role of the teacher. In W. Jeong-Ho, L. Hee-Chan, P. Kyo-Sik & S. Dong-Yeop (Eds.), *Proceedings of PME31* (Vol. 2, pp. 17–24). Seoul: PME.

BIZA, I., & ZACHARIADES, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218–229.

BOSCH, M., & GASCÓN, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, 58, 51–63.

CASTELA, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures : un exemple concret, celui de la tangente. *Recherches en didactique des mathématiques*, 15(1), 7–47.

CHEVALLARD, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble: La pensée sauvage.

CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221–265.

DEROUET, C., & PANERO, M. (2014). *Etude comparative sur l'enseignement des fonctions dans le secondaire en France et en Italie.* Cahiers du LDAR, n.11. IREM, Université Paris Diderot.

DEWALT, K., DEWALT, B., & WAYLAND, C. (1998). Participant observation. In H. R. Bernard (Ed.), *Handbook of methods in cultural anthropology* (pp. 259–299). Walnut Creek, CA: AltaMira Press.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 5–31.

GUEUDET, G. (2008). Investigating the secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237–254.

HACIOMEROGLU, E. S., ASPINWALL, L., & PRESMEG, N. C. (2010). Contrasting cases of calculus students' understanding of derivative graphs. *Mathematical thinking and learning*, 12(2), 152–176.

HAREL, G., & TALL, D. O. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 11(1), 38–42.

MASCHIETTO, M. (2002). *L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global/local dans l'environnement de calculatrices.* Thèse de Doctorat, Université Paris 7 et Università di Torino.

MIUR (MINISTERO DELL'ISTRUZIONE, DELL'UNIVERSITÀ E DELLA RICERCA). (2010) *Schema di regolamento recante indicazioni nazionali riguardanti gli obiettivi specifici di apprendimento concernenti le attività e gli insegnamenti compresi nei piani degli studi previsti per i percorsi liceali.* D.M. 7 ottobre 2010, n. 211. http://nuovilicei.indire.it/content/index.php?action=lettura&id_m=7782&id_cnt=10497.

MONK, G. S. (1994). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Journal*, 1(9), 21–27.

MULLIS, I. V., & MARTIN, M. O. (2007). TIMSS in perspective: Lessons learned from IEA's four decades of international mathematics assessments. In T. Loveless (Ed.) *Lessons learned: What international assessments tell us about math achievement* (pp.9-36). Brookings Institution Press.

NEMIROVSKY, R., & RUBIN, A. (1992). *Students' tendency to assume resemblances between a function and its derivative.* Cambridge, Massachusetts: TERC Working Paper.

PÁEZ MURILLO, R. E., & VIVIER, L. (2013). Teachers' conceptions of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 209–229.

PANERO, M., ARZARELLO, F. & SABENA, C. (2016). The mathematical work with the derivative of a function: teachers' practices with the idea of "generic". In I. M. Gómez-Chacón, L. Vivier (Eds.), *Mathematical work: the role of teacher, knowledge and interactions* (*BOLEMA*), 30(54), 265–286.
PARK, J. (2013). Is the derivative a function? If so, how do students talk about it?. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 624–640.
PARK, J. (2015). Is the derivative a function? If so, how do we teach it?. *Educational Studies in Mathematics*, 89, 233–250.
PEIRCE, C. S. (1977). *Semiotics and significs: the correspondence between Charles S. Peirce and Lady Victoria Welby*. Indiana University Press.
ROGALSKI, M. (2008). Les rapports entre local et global : mathématiques, rôle en physique élémentaire, questions didactiques. In L. Viennot (Ed.), *Didactique, épistémologie et histoire des sciences* (pp. 61–87).
SIERPINSKA, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathématiques*, 6(1), 5–67.
TALL, D. O., & VINNER, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151–169.
TALL, D. O. (1987). Constructing the concept image of a tangent. In J. C. Bergeron et al. (Eds.) *Proceedings of PME11* (Vol. 3, pp. 69–75). Montreal: PME.
VANDEBROUCK, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. Dans les *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 149–185.
VINNER, S. (1982). Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of PME6* (pp. 24–28). Antwerp: PME.
YOON, C., THOMAS, M. O., & DREYFUS, T. (2011). Grounded blends and mathematical gesture spaces: developing mathematical understandings via gestures. *Educational Studies in Mathematics*, 78(3), 371–393.

MANUELS UNIVERSITAIRES ET SCOLAIRES

BERGAMINI, M., TRIFONE, A., & BAROZZI, G. (2013). *Matematica.blu 2.0*, Vol.5, Libro digitale multimediale. Bologna: Zanichelli.
BRAMANTI, M., PAGANI, C. D., & SALSA, S. (2000). *Matematica: calcolo infinitesimale e algebra lineare.* Bologna: Zanichelli.
GEYMONAT, G. (1981). *Lezioni di Analisi Matematica 1.* Torino: Levrotto & Bella.
SASSO, L. (2012). *Nuova Matematica a colori.* Edizione BLU per la riforma. Quinto anno. Vol.5. Novara: Petrini, De Agostini Scuola.

LE RESEAU DES IREM ET LA COMMUNAUTE DES DIDACTICIENS : QUATRE EXPERIENCES D'INTERACTIONS FRUCTUEUSES

Fabrice **VANDEBROUCK**
IREM de Paris, LDAR, Université Paris Diderot
vandebro@univ-paris-diderot.fr
Luc **TROUCHE**
Institut français de l'éducation, Ecole normale supérieure de Lyon
luc.trouche@ens-lyon.fr
Hussein **SABRA**
IREM de Reims, Cérep EA 4692 - URCA
hussein.sabra@univ-reims.fr
Christine **CHAMBRIS**
IREM de Paris, LDAR, ESPE de Versailles, Université Cergy-Pontoise
christine.chambris@u-cergy.fr
Mariam **HASPEKIAN**
IREM de Paris, EMA, Université Paris Descartes
mariam.haspekian@parisdescartes.fr
Valentina **CELI,** Lalina **COULANGE,** Grégory **TRAIN**
IREM et ESPE d'Aquitaine, Université de Bordeaux
valentina.celi@u-bordeaux.fr ; lalina.coulange@gmail.com ; gerg.train@gmail.com

Résumé
Les IREM – Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques – sont des composantes universitaires originales, uniques dans le paysage des disciplines, à l'interface entre les mathématiciens, les didacticiens, les formateurs d'enseignants en poste dans les ESPE et les enseignants de terrain. Sans cesse attaquées à cause de cette spécificité, elles ont pourtant apporté à chacune des communautés, notamment celle des didacticiens. Les quatre contributions développées dans cet article en sont des témoignages.

Mots clés
Ressources, Numération, Calcul, Formation des enseignants

INTRODUCTION

Ce texte reprend les contributions à la table ronde qui s'est déroulée au séminaire national de novembre 2016. Les IREM ont contribué au développement de la didactique des mathématiques comme discipline à part entière, reconnue par la communauté des mathématiciens (au sein du Conseil National des Universités 26 par exemple). Le COREM, au début des années 70, était associé à l'IREM de Bordeaux et a été un laboratoire pour le développement de la Théorie des Situations Didactiques par Guy Brousseau. L'équipe DIDIREM a émergé dans les années 80 au sein de l'IREM de Paris 7 (IREM de Paris maintenant). Partout encore, de nombreuses recherches didactiques se développent dans le cadre des IREM, qui permettent les interactions et la collaboration fructueuse avec les enseignants de terrain.

Ces structures ont été menacées à de nombreuses reprises depuis leur naissance, au début des années 70, mais elles ont toujours perduré, notamment défendues par les différentes communautés qu'elles mettent en synergie : mathématiciens, didacticiens, formateurs (ESPE…) et enseignants (APMEP notamment). Plus que jamais, il est important que les didacticiens identifient la richesse que leur apporte le réseau des IREM, aussi bien en termes de lieux de recherche au plus proche de la communauté mère des mathématiciens, des formateurs et des enseignants de mathématiques – moins isolés peut-être que dans certains grands laboratoires – de lieux de communications – qui n'est jamais intervenu dans un colloque du réseau des IREM, notamment la COPIRELEM ou la CORFEM ? – ou encore de lieux de publications dans des brochures locales ou nationales, des revues d'interface (Petit *x,* Grand N à l'IREM de Grenoble, Repères-IREM pilotée par la commission inter IREM Repères) ou même dans la revue de premier plan du réseau que sont les Annales de Didactique et de Sciences Cognitives de l'IREM de Strasbourg. Ce bien est précieux. Cette contribution est une façon de le rappeler et d'inviter les collègues à s'investir dans des groupes IREM, pour développer dans ce cadre des recherches brutes, ancrées dans des problématiques de terrain et associant leurs acteurs, permettant facilement ensuite l'émergence de recherches plus académiques.

Quatre exemples de ces interactions fructueuses sont donnés. Dans la première partie, Luc Trouche expose l'expérience critique du SFoDEM à l'IREM de Montpellier et le rôle des IREM pour penser le développement des ressources des professeurs de mathématiques. Dans la seconde, Hussein Sabra, de l'IREM de Reims, met en évidence le rôle des IREM comme structures offrant un accès au terrain d'enseignement des mathématiques et comme cadres « incubateurs » de projets didactiques. Dans la troisième partie, Christine Chambris, Mariam Haspekian et Valentina Céli exposent le fonctionnement de leur groupe primaire-collège à l'IREM de Paris. Elles mettent en valeur la façon dont l'articulation IREM-didacticiens agit à tous les niveaux du développement du groupe. Enfin Lalina Coulange et Grégory Train parlent du tout nouveau groupe CORFEM de l'IREM d'Aquitaine.

L'EXPERIENCE CRITIQUE DU SFODEM (PAR LUC TROUCHE)

Je voudrais aborder cette communication sous l'angle du don et du contre-don : qu'est-ce que la communauté de didactique des mathématiques a appris des IREM, que leur a-t-elle

apporté ? Cette question, on pourrait aussi la poser pour d'autres communautés voisines de, ou qui rencontrent, la communauté de didactique. C'est une question importante, sur le plan scientifique autant que pratique : les acteurs de l'enseignement des mathématiques bénéficient de l'existence d'un réseau d'associations, de communautés professionnelles et scientifiques, la CFEM en est l'une des expressions, et de tels réseaux ne peuvent vraiment se développer que dans des dynamiques de reconnaissances mutuelles.

Le SFoDEM, le produit d'une synergie entre didactique et IREM

Le SFoDEM (Suivi de Formation à Distance des Enseignants de Mathématiques) est un dispositif, produit de l'expérience de toutes les équipes de l'IREM de Montpellier, qui a bénéficié d'un temps long (de 1999 à 2006), ce qui est très rare dans le contexte des IREM, et même, plus largement, des recherches en éducation. Il a aussi bénéficié de la mobilisation de la quasi-totalité des ressources de cet IREM : les ressources en termes d'expérience sur des questions clés (l'intégration des calculatrices graphiques et symboliques, le passage de l'arithmétique à l'algébrique, la prise en compte des logiciels de géométrie dynamique, ou encore la résolution collaborative de problèmes), les ressources aussi en termes de moyens horaires attribués aux enseignants impliqués. Une telle mobilisation reposait sur des choix forts de la directrice de l'IREM de l'époque, Dominique Guin, qui avait su convaincre les équipes de l'intérêt de développer une telle synergie. Le produit de cette mobilisation est encore en ligne (http://www.math.univ-montp2.fr/sfodem/), et cette histoire a été décrite dans deux articles publiés dans Repères-IREM (Guin & Trouche, 2004, 2008).

Le SFoDEM était un dispositif de formation d'enseignants de mathématiques, visant à développer une pensée didactique de l'intégration d'outils pour l'enseignement des mathématiques, sur la base de processus réfléchis de conception collaborative de ressources pédagogiques. Plus profondément, il visait un objectif de modélisation : modélisation de dispositifs pour le développement professionnel des enseignants, modélisation de la notion de ressource pédagogique (deux objectifs qui apparaissent bien dans la structure du SFoDEM en ligne, composée de deux branches : parcours de conception de dispositif, et médiathèque des ressources produites). Le pilotage était assuré par une petite équipe composée de deux didacticiens des mathématiques et d'une informaticienne. Le dispositif lui-même était composé d'une cellule de formation, rassemblant une vingtaine de personnes (formateurs, didacticiens de mathématiques et mathématiciens), et de quatre groupes de formation (sur les thèmes cités plus haut), rassemblant chacun une vingtaine de stagiaires, dont beaucoup ont poursuivi leur implication plusieurs années durant. Ce sont, en fait, quatre équipes de l'IREM qui se retrouvaient dans la cellule de formation et animaient chacun des groupes de stagiaires.

Le projet était basé sur plusieurs hypothèses : une formation efficace doit être pensée autour des ressources manquantes de la profession ; une formation efficace doit aussi alterner des phases de conception de ressources, des phases d'implémentation en classe, et des phases de révision ; une formation efficace enfin doit stimuler des postures réflexives et la collaboration des enseignants. La recherche de modèles se basait sur la confrontation des processus de développement et des productions des quatre groupes de formation, dans une perspective de recherche d'invariants.

Le SFoDEM a eu des effets différés dans le réseau des IREM, bien après la fin du dispositif. Je me rends compte qu'il a constitué la matière des interventions dans lesquelles j'ai été impliqué, dans les manifestations nationales du réseau, jusqu'à aujourd'hui (Trouche, 2014 ; Trouche, 2016a). La recherche SFoDEM, sur Publimath (http://publimath.irem.univ-mrs.fr), donne accès à douze articles écrits par les acteurs du dispositif, qui éclairent les principaux résultats de cette expérience.

Qu'avons-nous appris, didacticiens, de cette expérience ?

Cette expérience s'est nourrie de questionnements issus de la communauté de didactique des mathématiques, par exemple sur l'intégration et la viabilité des objets informatiques (Chevallard, 1992), mais aussi de questionnements venus d'autres champs : le champ des communautés de pratique (Wenger, 1998), ou encore du praticien réflexif (Schön, 1993). Elle a produit trois types de résultats.

Le premier type de résultat concerne la nature de la formation didactique des enseignants, en concevant celle-ci comme réponse à des problèmes. Ainsi la branche « médiathèque » du SFoDEM met-elle en relation des ressources pédagogiques et les notions didactiques qui permettent de comprendre leur structure. La médiathèque comporte en fait quatre rubriques : ressources pédagogiques, documents de référence, témoignages et outils. Par exemple, on peut lire, dans la ressource « Des chaises et des tables » :

> Dans la partie I, l'objectif du problème est d'amener les élèves à utiliser une lettre pour généraliser un procédé de calcul. C'est la variation du nombre de tables (3 ; 6 ; 9 ; 126, puis un nombre non donné) qui oblige les élèves à itérer un procédé de calcul, qui peut les amener à modifier leurs procédures avec le nombre 126 et à introduire la lettre pour généraliser le procédé de calcul avec la question 2. Le nombre de tables est, ici, une variable didactique (lien).

Le lien sur variable didactique renvoie sur la définition de cette notion, intégrée dans la rubrique « documents de référence » :

> On qualifie de variable didactique d'une situation ou d'un problème une variable, pouvant être modifiée par l'enseignant, et dont les modifications (même légères) peuvent infléchir sensiblement le comportement des élèves et provoquer des procédures ou des types de réponses différentes. C'est en jouant sur des choix adéquats de ces variables que l'on peut provoquer de nouveaux apprentissages, en visant à faire émerger chez les élèves de nouvelles connaissances comme des outils nécessaires pour résoudre un problème. En fait, la notion de variable didactique traduit la nécessité de distinguer, classer et modéliser les situations dans une perspective didactique.

Un autre lien renvoie alors sur les ressources exploitant cette notion de variable didactique. Il s'agit ainsi d'un développement en miroir d'un répertoire de ressources pédagogiques et d'un système de connaissances didactiques qui soutiennent leur conception et leurs usages.

Le deuxième type de résultats concerne *les modèles pour la conception, l'usage et le partage* de ressources pédagogiques. Nous n'allons pas entrer dans une description détaillée du modèle qui émerge à la fin du SFoDEM (Figure 1) ; on pourra se reporter pour cela, par exemple, à l'article de Guin et Trouche (2008). On relèvera simplement des résultats qui, à l'époque, n'étaient pas largement partagés dans la communauté des IREM : l'importance des métadonnées ; la notion de modèle émergent, reflet de l'histoire et des besoins d'une communauté ; la notion de modèle comme assistant méthodologique, pas comme carcan.

Finalement, c'est la notion de ressource vivante, intégrant et nourrissant l'expérience des utilisateurs/concepteurs qui émerge ici. La présence, dans ce modèle, d'un CV (curriculum vitae) d'une ressource témoigne de cette intention de faire, de tout utilisateur d'une ressource, un maillon dans une chaîne d'utilisateurs-concepteurs.

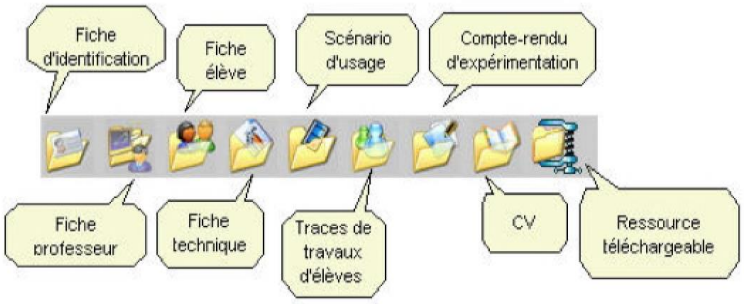


Figure 1. Le modèle 2006 de ressources du SFoDEM

Le troisième type de résultats concerne les *modèles de dispositif*, du point de vue de leur genèse (structurée par les activités *d'exploration*, de *définition*, de *réflexion*, *d'échange* et de *révision*), des formes d'organisation (Figure 2, la forme initiale de l'organisation du SFoDEM), et des formes d'engagement (mobilisant des *chartes* pour les pilotes, les formateurs et les stagiaires).

Le modèle propose aussi des outils d'évaluation du dispositif, sous la forme de *baromètres*, permettant aux acteurs (pilotes, formateurs et stagiaires) de faire évoluer le dispositif pour qu'il réponde mieux à leurs attentes.

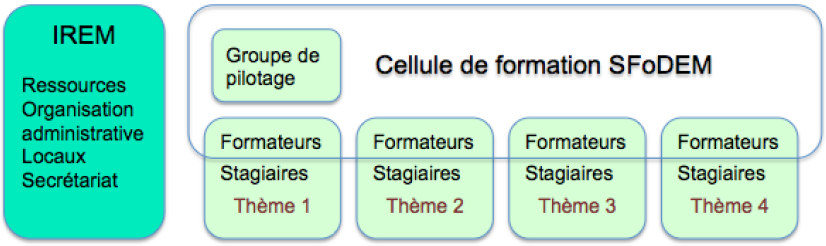


Figure 2. L'organisation du SFoDEM, en synergie avec l'IREM

Cette expérience a aussi contribué à nourrir le développement d'autres dispositifs, ce que nous allons décrire dans la section suivante.

Le SFoDEM, matrice de dispositifs, reposant sur la mobilisation des IREM et nourrissant en retour leur réflexion

Le SFoDEM a contribué à nourrir de nouveaux projets de conception collaborative de ressources, et a constitué aussi une matrice conceptuelle de nouvelles approches théoriques et méthodologiques.

Du point de vue des projets de conception collaborative de ressources, on peut évoquer le programme Pairform@nce, le dispositif M@gistère ou encore le MOOC eFAN maths. Je concentrerai mon propos ici sur le programme Pairform@nce, dont nous avions souligné, lors d'un colloque DIDIREM, la filiation avec le SFoDEM (Gueudet, Soury-Lavergne & Trouche, 2009). Le programme Pairform@nce visait la mutualisation en ligne de parcours de formation, susceptibles de nourrir des formations locales basées sur la conception collaborative de ressources. Dans le cadre d'une convention avec le MENESR, un projet d'accompagnement, par la recherche, de ce programme a été monté, coordonné par l'INRP et impliquant les IREM de Montpellier et de Rennes.

La structure de ce projet (Figure 3) rappelle fortement la structure du SFoDEM (Figure 2), avec un étage de plus (de la conception des parcours à leur mise en œuvre dans des stages de formation, puis à l'implémentation des ressources produites dans les classes des stagiaires). Plus qu'une structure, c'est un point de vue méthodologique qui s'exprime, celui d'une continuité entre phases de conception et phases d'usages, les deux phases se nourrissant mutuellement.

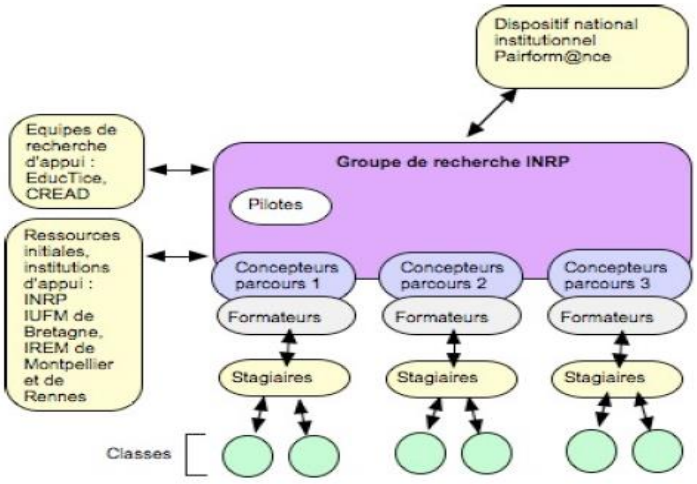


Figure 3. L'organisation du dispositif d'appui à Pairform@nce

La méthodologie s'inspire aussi du SFoDEM du point de vue de la recherche d'invariants : le dispositif s'appuie en effet sur la conception de parcours sur des thèmes différents, dans la perspective de mise en évidence d'éléments communs et donc de modèles de parcours de formation mutualisés. Une réflexion particulière avait été portée à la conception *d'assistants méthodologiques* soutenant l'appropriation des parcours par des formateurs n'ayant pas contribué à leur fabrication initiale. Signalons enfin que ce projet, comme le SFoDEM, a bénéficié d'un temps long (5 ans) permettant l'analyse fine du travail des concepteurs, des formateurs et des stagiaires et la conception dans la perspective de modèles de parcours et de dispositifs de formation (Soury-Lavergne, Trouche, Loisy & Gueudet, 2011).

On retrouvera aussi des effets de cette réflexion dans l'organisation du MOOC eFAN Maths, qui a mobilisé, avec l'IFÉ, les IREM de Lyon, Paris et Rennes (Aldon, 2015) et dans la mise en œuvre de la Stratégie mathématiques qui a mobilisé l'ensemble des acteurs de l'enseignement des mathématiques (Trgalova & Trouche, 2015).

Le SFoDEM a aussi constitué une matrice conceptuelle. La réflexion autour des « ressources vives » a débouché sur *l'approche documentaire du didactique* (Gueudet & Trouche, 2010) ; la réflexion autour des dispositifs a facilité sans doute l'émergence du collectif comme thématique d'étude didactique (Pepin, Gueudet & Trouche, 2013), comme en a témoigné le deuxième thème de la 18e école d'été de didactique des mathématiques (Gueudet & Matheron, 2015).

Dix ans après la fin du SFoDEM, les choses ont un peu bougé, à la lumière des expériences antérieures, sur au moins trois questions :

- la question des lieux de collaboration des enseignants : l'expérience des Lieux d'éducation Associés à l'IFÉ (http://ife.ens-lyon.fr/lea) a mis en évidence la nécessité de prendre aussi en compte ce niveau élémentaire des collectifs enseignants, si l'on veut développer des dispositifs qui combinent phases de conception et de mise en œuvre des ressources ;
- la question des modèles de ressources. La réflexion en cours dans le programme ANR ReVEA (www.anr-revea.fr) a mis en évidence la nécessité de prendre en compte le niveau des *systèmes de ressources* des enseignants, articulant différents modèles de ressources, certaines pouvant jouer le rôle de pivots ;
- la question des modèles de dispositifs. Au lieu de dispositifs pyramidaux (Figures 2 et 3), émergent des dispositifs en réseaux, avec plusieurs nœuds (Figure 4) articulant équipes de recherche, établissements scolaires et associations d'enseignants.

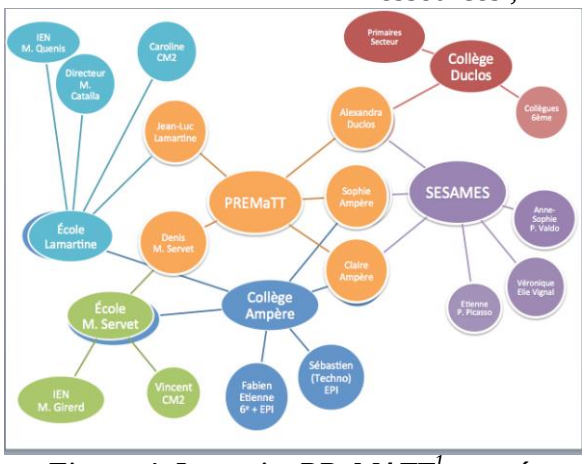


Figure 4. Le projet PREMATT[1], un réseau à plusieurs nœuds

Ces interactions fructueuses entre communauté de didactique des mathématiques et réseau des IREM, ne sont pas réduites au SFoDEM. En reprenant, pour un ouvrage récent (Trouche, 2016b), l'étude de ces interactions depuis l'origine du réseau, je réalisais combien on pouvait parler de double germination de la didactique et des IREM en France… Une double germination à cultiver !

[1] PREMaTT, Penser les ressources de l'enseignement des mathématiques dans un temps de transition, projet lyonnais mobilisant des chercheurs et des enseignants de l'IFÉ, de l'IREM, de l'ESPÉ, des équipes de recherche et des établissements en tant que tels.

UN TEMOIGNAGE DE L'IREM DE REIMS (PAR HUSSEIN SABRA)

Les didacticiens des mathématiques développent depuis longtemps leurs travaux de recherche en collaboration avec les enseignants des mathématiques. Les IREM sont un exemple emblématique de cette collaboration. Nous allons présenter dans cette partie deux formes de collaboration issues d'une expérience propre. Nous mettrons en évidence que la participation des didacticiens des mathématiques aux groupes permet le maintien d'une interaction continuelle avec le terrain comme elle permet la maturation de certains projets didactiques.

Les groupes IREM, cadre d'interaction avec les acteurs de l'enseignement des mathématiques

Notre expérience dans le cadre des groupes IREM montre des rôles que les groupes IREM peuvent jouer pour la mise en place des expérimentations et pour le développement des projets de recherche nationaux, européens et internationaux. Voici deux exemples :

- Notre participation aux travaux du groupe « Intégration des Outils Informatiques » (IOI) de l'IREM de Montpellier qui a contribué fortement au développement du projet Comenius européen « Edumatics »[2] (2008-2012).
- Notre participation actuelle aux travaux du groupe « Lycée-TICE » de l'IREM de Reims. Cette participation constitue une contribution pour le développement du projet ANR « Ressource Vives pour l'Enseignement et l'Apprentissage »[3] (ReVEA).

Notre arrivée à l'Université de Reims Champagne Ardenne est tombée au moment de l'acception du projet ANR « RevEA » (en 2013). Après notre expérience avec le groupe « IOI », un des premiers réflexes était de contacter l'IREM de Reims pour rencontrer des enseignants avec qui pouvoir collaborer, d'où notre participation au groupe « Lycée-TICE ». Les enseignants impliqués dans les deux groupes « IOI » de l'IREM de Montpellier et « Lycée-TICE » de l'IREM de Reims partagent une culture et des valeurs proches autour de l'enseignement des mathématiques, ce qui facilite l'implication des nouveaux membres. Par ailleurs, les intérêts d'implication dans les groupes IREM ne sont les mêmes pour tous les enseignants ; chacun joue un rôle dans son groupe en fonction de ses représentations et de ses conceptions sur les mathématiques et leur enseignement. Dans l'encadré 1, nous présentons des profils des enseignants impliqués dans le groupe « Lycée-TICE » de l'IREM de Reims, avec des extraits de témoignages.

M. C, Enseignant, classes préparatoires (Marne), agrégé, docteur en mathématiques : *« je suis entré à l'IREM à l'occasion de l'organisation d'une formation autour du logiciel Scilab […] je suis allé puisque j'étais intéressé et je connaissais le logiciel scilab […] je suis entré à ce moment et après, j'ai poursuivi le travail dans le groupe lycée-TICE ».*
M. S : Enseignant, Lycée (Marne) : *« la culture de l'IREM a un avantage c'est que… on peut se poser des questions, avoir du recul par rapport au programme, etc. ».*
Mme A : Enseignante, Lycée (Marne), agrégée, docteure en didactique des mathématiques : *« Au départ, je ne savais pas ce qu'il fallait faire pour être à l'IREM. J'entendais les collègues parler de l'IREM […] Au départ, j'ai assisté aux réunions sans faire partie du groupe ».*

[2] http://www.edumatics.mathematik.uni-wuerzburg.de/fr/
[3] https://www.anr-revea.fr/

Encadré 1. Profil des enseignants dans le groupe « Lycée-TICE » et témoignage sur les raisons ou circonstances de leur implication dans les groupes IREM

On peut identifier dans l'encadré 1 des raisons d'implication différentes dans les groupes IREM : la liberté de réflexion, le développement d'un regard critique sur l'enseignement des mathématiques et les curricula, etc. Certains témoignages montrent que des initiatives ponctuelles ou bien des sollicitations limitées dans le temps peuvent faciliter l'implication de certains nouveaux membres.

Dans une des tâches du projet « ReVEA », il s'agit de suivre le processus de conception collective de ressources pour l'enseignement des mathématiques. Nous avons fait le choix de suivre ce processus dans le cadre d'un groupe IREM (le groupe « Lycée-TICE »). Le groupe « Lycée – TICE » avait comme projet de concevoir des ressources pour la mise en place des démarches d'investigation au lycée (avec les TICE comme outils à disposition), ainsi que des ressources pour le développement de ce qu'on a appelé « culture de recherche » en classe.

La thématique du groupe « Lycée-TICE » suppose une réflexion sur une progression tout au long des différents niveaux d'enseignement au lycée, les modes d'enseignement, les domaines et les notions mathématiques à aborder ainsi que la façon dont on les aborde (comme *outils* ou comme *objets* (Douady, 1986)). Tous ces éléments déterminent la structuration d'un *système de ressources* (Gueudet & Trouche, 2010), qui reflète certains choix mathématiques et didactiques collectifs. Des complexités sont apparues pour la réalisation du projet commun, nous les avons identifiées par :

- l'organisation et l'indexation des ressources dans un dossier Dropbox entre les membres (*cf.* Figure 5) ;
- les interrogations posées par les membres du groupe : Comment sélectionne-t-on les premières ressources ? Quels appuis sur les travaux antérieurs autour des problèmes ouverts ? Quelles « ressources transversales » peut-on concevoir pour initier le développement d'une « culture de recherche » dans les classes de mathématiques ?

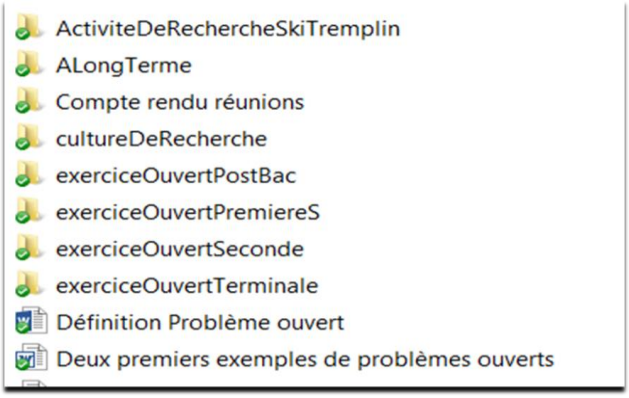


Figure 5. Structuration et organisation première des ressources dans le dossier Dropbox partagé par les membres du groupe « Lycée-TICE »

Aborder le travail collectif de conception de ressources dans un groupe IREM pousse le didacticien à associer le suivi du processus de conception de ressources et l'analyse des ressources existantes. Le groupe « Lycée-TICE » illustre l'exemple d'un collectif d'enseignants qui essaie de concevoir des ressources pour l'enseignement d'un « objet complexe ». Les cadres de référence (didactiques et institutionnels) sur lesquels les membres du groupe peuvent s'appuyer ne font pas consensus : les rapports entre « démarche d'investigation », tâche complexe, prise d'initiative par les élèves, démarche de recherche, résolution de problème, etc., ne sont pas explicites. Le suivi de ce collectif pourrait représenter l'étude de cas d'un collectif d'enseignants, qui essaie de répondre à un « problème professionnel » lié aux mathématiques et à un manque repéré de ressources.

On peut expliquer les attentes mutuelles entre didacticien et enseignants membres du groupe en termes de *contrat méthodologique* (Sabra, 2016). Nous tenons à préciser que l'élaboration d'un contrat méthodologique s'inscrit dans un processus qui s'initie naturellement à partir des premiers échanges entre les membres du collectif et le chercheur (didacticien). L'explicitation des attentes réciproques entre enseignants et didacticien, peut contribuer à la mise en place d'une collaboration qui alimente des intérêts mutuels. Pour le groupe « Lycée-TICE », l'intérêt d'une collaboration avec un didacticien réside dans l'occasion offerte pour valoriser l'activité des membres autour d'une thématique d'actualité pour les enseignants, les formateurs et les chercheurs.
L'IREM comme institut, constitue, pour un didacticien, une plateforme pour donner accès aux terrains. Il assure une réponse à la nécessité de collaborer avec des enseignants.

Les groupes IREM comme incubateurs des projets didactiques

Le groupe « Enseignement Supérieur » est né à l'IREM de Reims à partir d'une initiative de collaboration entre l'Université de Technologie de Troyes (UTT) et l'Université de Reims Champagne Ardenne.
Les collègues de l'UTT (Ecole d'ingénieurs) ont identifié plusieurs problématiques, notamment autour du rôle de la démonstration dans la formation des ingénieurs. Des questions pragmatiques ont été posées : est-ce qu'il faut vraiment faire la démonstration dans une formation d'ingénieurs ? Avec quel(s) objectif(s) ? La réponse à ces questions ne fait pas unanimité entre enseignants (enseignants de mathématiques à l'UTT) :

- Certains (les ingénieurs notamment) pensent qu'il n'est pas « utile » de faire les démonstrations compliquées de certains théorèmes. Ils proposent de les remplacer par une illustration du théorème à partir de deux exemples.
- D'autres (mathématiciens notamment) pensent que faire la démonstration est essentiel, car en faisant la démonstration on transmet des outils de base, éléments fondamentaux pour utiliser et manipuler les objets mathématiques.

Le rapprochement avec les didacticiens de mathématiques[4] dans la région (Champagne Ardenne) leur a paru naturel pour réfléchir à la place de la démonstration dans la formation des ingénieurs. Les travaux en didactique des mathématiques sur la démonstration et la preuve sont nombreux. En revanche, il y a peu de travaux en didactique des mathématiques autour de la formation des ingénieurs, même au niveau international. Ce qui nous a paru intéressant du point de vue didactique pour initier un projet collaboration.
L'IREM nous a paru un cadre privilégié pour institutionnaliser cette collaboration et préparer les réflexions dans un contexte favorable. Nous avons monté un groupe « Enseignement Supérieur » qui a comme objectif premier de formaliser cette collaboration. Les premières discussions nous ont permis de développer un projet commun qui porte plus particulièrement sur le raisonnement et les démarches de preuves en mathématiques dans la formation des ingénieurs. Le projet consiste en l'élaboration de problèmes mathématiques pour les ingénieurs (en termes d'applications) dans le but de mettre en évidence l'intérêt des démonstrations et des preuves dans la formation d'ingénieurs. Dans le cadre de ce projet, l'UTT constitue un terrain pour expérimenter des séquences d'enseignement de différents types de raisonnements mathématiques et des séquences d'enseignement de certaines notions permettant d'enrichir la pratique mathématique.

[4] Le développement de ces travaux a lieu en étroite collaboration avec Cécile Ouvrier-Buffet (Professeur des universités en didactique des mathématiques).

Quelle est la plus-value pour les didacticiens de cette collaboration ?

Le projet du groupe « Enseignement Supérieur » répond à des besoins d'un établissement (UTT), mais touche aussi des problématiques d'actualité dans les recherches en didactique des mathématiques : la problématique de la définition de contenus d'enseignement cohérents dans la formation des ingénieurs (des non-mathématiciens). Il s'agit dans ce type de problématique de prendre en compte d'une part, l'évolution que subissent le métier d'ingénieurs et les mathématiques grâce à l'évolution de la technologie ; et d'autre part, l'évolution de l'enseignement grâce à l'évolution du numérique. D'où des questionnements qui permettent d'explorer des chantiers de recherches en didactique :

- Comment enseigner la preuve et différents types de raisonnement dans la formation de futurs ingénieurs ?
- Quels dispositifs et quelles ressources peut-on mobiliser pour la formation mathématique des futurs ingénieurs ?

Cette réflexion s'inscrit dans un défi actuel à relever par les recherches sur l'enseignement supérieur (Artigue, 2016) : faire connaître aux étudiants des mathématiques originales offertes par l'aspect expérimental de cette discipline grâce à l'évolution de la technologie. Ce travail ouvre des pistes intéressantes pour l'approche de la conception collective des ressources comme support pour transformer et harmoniser des pratiques. Cette piste nous semble importante à développer surtout dans le contexte de l'université où le travail d'enseignement semble être rarement un travail collectif (Gueudet, 2016).

Les travaux développés dans le groupe « Enseignement Supérieur » constituent un cadre exploratoire qui nous permet d'effectuer des choix pour répondre à des appels à projets. Nous déterminons des besoins pour les acteurs (enseignants et praticiens) et pour les recherches en didactique (développements théoriques et méthodologiques). Les travaux du groupe IREM constituent alors pour nous (didacticiens) un terrain de réflexions pour initier des collaborations et rejoindre la dynamique de construction d'un réseau de recherche sur l'enseignement supérieur : le réseau DEMIPS (Didactique et Epistémologie des Mathématiques, et liens Informatique et Physique dans le Supérieur).

Les groupes IREM permettent d'entretenir des relations avec des praticiens (mathématiciens professionnels et enseignants de mathématiques) et utilisateurs des mathématiques (ingénieurs par exemple). Ils forment aussi un cadre pour la maturation des projets des didacticiens.

LA NUMERATION, LE CALCUL ET LA CALCULATRICE, DU CM A LA 6E (PAR MARIAM HASPEKIAN, CHRISTINE CHAMBRIS ET VALENTINA CELI)

Le lien IREM-Didacticiens se traduit pour nous par l'animation d'un groupe intitulé Primaire-Collège, dont nous présentons par la suite la naissance et le travail. Nous avons souhaité commencer notre réflexion par une illustration schématique du thème de l'intervention :

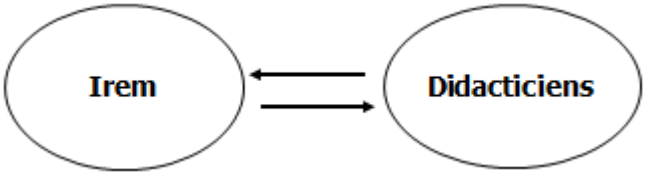


Figure 6. Schéma d'interactions entre IREM et didacticiens

Le groupe étant relativement nouveau au regard d'autres présentés lors de cette table ronde, les liens IREM-Didacticiens ne se traduisent pas encore chez nous, comme cela peut être le cas pour d'autres, par une production forte de ressources, d'activités, pensées conjointement par des enseignants et des chercheurs, publiées dans des brochures, apportant des résultats fruits de cette réflexion conjointe. Pourtant ces liens sont déjà bien présents.
En effet, la jonction IREM-Didacticiens des mathématiques est aussi pour nous celle des liens entre le monde de la Recherche d'une part et le « Terrain », c'est-à-dire le monde de l'enseignement, avec la formation et les enseignants.

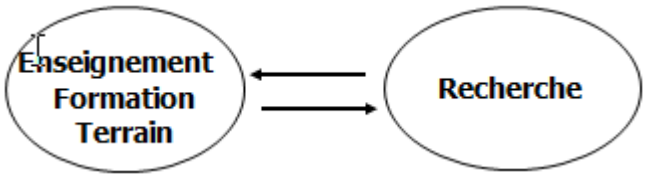


Figure 7. Schéma d'interactions retravaillé

Ces deux mondes se nourrissent l'un l'autre et c'est aussi ce qui fait la cohérence des groupes IREM. Notre présentation se veut alors refléter cette articulation en montrant qu'elle a eu lieu à chaque étape du développement de notre groupe : à sa naissance déjà, puis dans le travail du groupe, enfin au-delà du groupe, c'est-à-dire dans les activités qui se développent autour.

Articulation Recherche-Terrain à la naissance du groupe

En amont…

L'articulation entre le monde la Recherche et le Terrain se trouve en amont même de la naissance du groupe. Côté Recherche et côté Terrain, des préoccupations existaient. Elles ont ainsi trouvé une façon de se cristalliser dans le groupe IREM.
Côté Recherche, il y avait des discussions entre deux des chercheures (V. Celi et M. Haspekian, notées V et M dans la suite) sur la calculatrice à l'école élémentaire, et des préoccupations de la troisième (C. Chambris, notée C dans la suite) sur la calculatrice et la numération.
La calculatrice trouve sa place dans les textes officiels depuis le début des années 90, ce qui n'est pas sans avoir créé des polémiques nombreuses sur le rôle qu'elle peut avoir dans les apprentissages des élèves de l'école élémentaire. Les craintes que les élèves ne sachent plus calculer par exemple ont été émises, jugeant que la calculatrice pourrait aller contre ce que les élèves doivent apprendre. Dans la littérature spécialisée, dès les années 90, des articles proposent des exemples d'activités pour les élèves qui doivent leur permettre d'apprendre à se servir de la calculatrice non seulement pour vérifier ou effectuer des calculs mais aussi comme source de problèmes, ainsi que pour découvrir des faits numériques. Les documents qui accompagnent les programmes de 2002, en s'appuyant aussi sur ces travaux, comptent une partie consacrée aux divers usages que l'on peut faire de la calculatrice à l'école. Malgré cela, dans les pratiques, encore aujourd'hui, de nombreux enseignants méconnaissent (voire ne connaissent pas du tout) les divers usages de la calculatrice et les liens qui peuvent s'opérer entre le calcul instrumenté, le calcul mental et la numération. Ces constats sont faits lors de la formation continue que nous dispensions en IUFM et en ESPE depuis quelques années.
Les réflexions de M et V concernaient alors l'intégration de la calculatrice à l'école primaire, en particulier la question de l'application à l'enseignement primaire du cadre de l'approche instrumentale (Artigue, 2002 ; Guin & Trouche, 2002 ; Lagrange, 2000 ; Trouche, 2005) qui, pour comprendre les phénomènes d'intégration et d'instrumentation en mathématiques, s'est montré fructueux dans le secondaire. Certaines difficultés liées à l'introduction de la

calculatrice semblaient en effet analogues. Les travaux de recherche de C (Chambris, 2008) suggèrent l'intérêt de reconsidérer le rôle d'un registre particulier pour l'expression des nombres, celui des unités (les dizaines, les centaines…) dans l'étude de la numération, et ceux de Tempier (2013) montrent la difficulté pour les enseignants d'intégrer ce registre. Or il se trouve que ce registre d'expression des nombres n'existe pas dans la calculatrice. Il y a donc un double problème à considérer pour arriver à faire vivre ensemble l'outil et les unités : sémiotique et instrumental. C avait alors envie de réfléchir à l'intégration des outils actuels du calcul, et l'envie de travailler avec M et V pour mettre « la calculatrice au défi » dans l'enseignement de la numération.
Côté Terrain, à travers le réseau des IREM, il y avait la volonté de créer des groupes inter-degrés, en réponse à une demande institutionnelle liée à la création du « nouveau cycle 3 ». Il y avait aussi la sortie de la nouvelle calculatrice chez Texas Instruments, dédiée à la fin du primaire et au début du collège. TI avait contacté l'IREM et l'IFé pour équiper des classes de ces nouveaux outils et avoir en retour des ressources produites pour les enseignants. Le réseau des IREM a lancé un appel à création de groupes et l'IFé un projet de recherche, appuyé sur les IREM, baptisé « CaPriCo » (CAlculatrices PRImaire-COllège), sur l'une de nos propositions.

A la naissance…

Dans le cadre du projet national CaPriCo, chaque classe participant à l'expérimentation a été dotée d'un lot de 30 calculatrices et d'un des deux livrets d'activités édités par Hatier – soit CM1-CM2, soit 6e-5e. Notre groupe a ainsi démarré sur la base d'un projet de « recherche-action », en novembre 2014, avec 6 enseignants du « nouveau cycle 3 » et les élèves ont vite adopté ces « calculatrices bleues » (figure 6).
Du côté terrain, le travail du groupe avec les enseignants et les ressources consiste à concevoir ou co-concevoir avec les enseignants des tâches pour travailler la numération intégrant les unités de numération (à la calculatrice, sans la calculatrice), formuler et communiquer les savoirs mathématiques en jeu (dans le champ des nombres entiers et des nombres décimaux), formuler et communiquer les savoirs en jeu sur la calculatrice en dégageant éventuellement les spécificités de la TI Primaire+.

Figure 8. La « calculatrice bleue » - TI-Prim+ et son fichier d'activités dédiées, « Mosaïque »

Du côté Recherche, ce groupe IREM constitue un terrain pour étudier nos questions qui portent à la fois sur l'instrument et les unités de numération :

- Les enseignants de fin d'école et de collège intègrent partiellement la calculatrice dans leurs pratiques. Quelles seraient des conditions pour qu'ils l'intègrent pleinement comme un environnement de travail ?
- Alors qu'elle ne présente que le seul registre de l'écriture chiffrée, quelles seraient des conditions pour que la calculatrice contribue à restaurer le registre des unités numération dans les pratiques des enseignants ?

Le lien originel IREM-Didactique, dans le cas de notre groupe, consiste ainsi à s'intéresser aux pratiques enseignantes du double point de vue de l'intégration d'un instrument – la calculatrice – et d'un objet mathématique – les unités de numération i.e. unités, dizaines,

centaines… – ainsi qu'à la conception ou co-conception avec les enseignants de ressources impliquant ces objets.

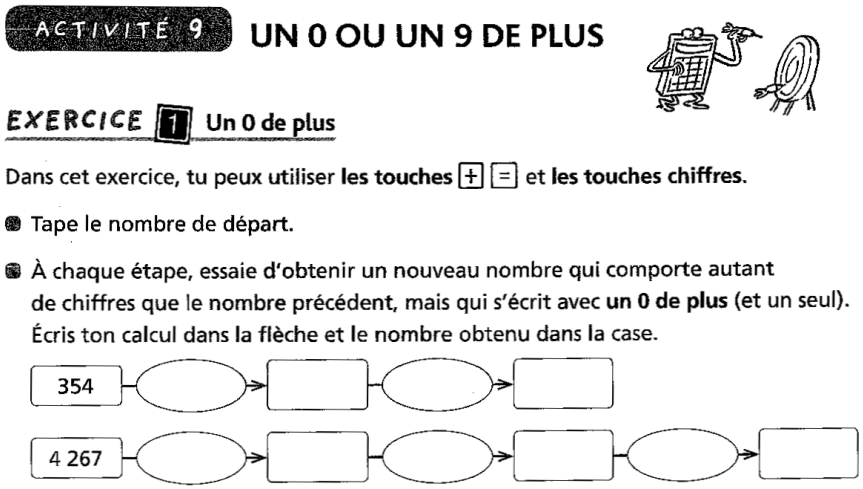
Articulation Recherche-Terrain dans le travail « au quotidien » du groupe

Le travail avec et par les enseignants aidés des didacticiens…

L'expression « au quotidien » souligne que les réunions, dont la fréquence est d'au moins 6 par an, impactent de façon conséquente le quotidien des enseignants. On y discute des activités du fichier, d'autres activités apportées par les enseignants eux-mêmes, des liens avec des thèmes d'enseignement des mathématiques, des pratiques sont échangées (travail en amont, difficultés, réussites…), des ressources sont soumises au regard des uns et des autres, analysées, critiquées, améliorées. Des séances testées, des activités partagées se retrouvent dans le quotidien des classes**.** Des partenariats se mettent en place : deux binômes d'enseignants créent une liaison CM-6^{e} fondée sur l'utilisation de la calculatrice.
Tous ces fruits du travail conçu dans le groupe impactent les classes, structurent les progressions, par exemple pour monter une liaison CM-6^{e}, mais plus encore à partir de la deuxième année, quand les enseignants commencent à prendre de la distance et cherchent davantage à intégrer la calculatrice dans les projets ordinaires de la classe, ce qui impacte aussi les représentations des enseignants sur la numération et son apprentissage.
Le groupe IREM a aussi ainsi une dimension « formation » des enseignants, des didacticiens vers les enseignants du groupe. Les premières séances ont été pilotées par V, autour de la présentation de tâches « calculatrice ». Plus tard, une réunion, pilotée par C, a été consacrée à l'enseignement de la numération et a constitué une sorte de formation « aux unités de numération », avec l'introduction des unités dans des tâches « hors calculatrice », et la proposition d'un « corrigé » avec unités pour une activité calculatrice sans unités. Se posait ainsi la question de leur intégration dans le travail « avec calculatrice ».
L'expérimentation CaPriCo, côté Recherche, a donc fonctionné comme un levier pour le travail sur le terrain des enseignants, autour de trois axes principaux qui se retrouvent aussi bien du côté de la recherche que de celui du terrain, montrant des intersections non vides :

- l'intégration de cette calculatrice dans les pratiques (Quelle utilité ? Quelles différences avec les autres calculatrices ? Quels enjeux d'apprentissage ?),
- la numération (thème central dans les activités avec la calculatrice),

La liaison CM-6^{e} dans laquelle la calculatrice a été vue comme outil « fédérateur » : défis calculs, échanges inter-classes… Nous donnons ici l'exemple d'une activité testée plusieurs fois sur le « terrain », qui sera reprise dans la section suivante côté « recherche », emblématique de l'articulation entre les deux mondes. Il s'agit de l'Activité 9 du fichier *Mosaïque* CM1-CM2 (Charnay & Treffort, 2014, p. 17).
Cette activité a été perçue comme difficile à mettre en œuvre par la première enseignante à l'avoir testée. Elle a été longuement travaillée car elle posait de nombreuses questions. Par exemple, les enseignants considéraient que la calculatrice avait un rôle ambigu. A-t-on le droit d'utiliser d'autres touches que les touches + et − pour la recherche ? Et puis, cette activité ne va-t-elle pas *contre* la prescription des programmes d'« utiliser la calculatrice à bon escient » ? Dans quelle mesure le travail de numération est-il un enjeu de cette activité ? Et aussi des questions, en termes de gestion de classe : par exemple comment mener la phase de correction, la calculatrice faisant « exploser » le nombre de solutions possibles.



ACTIVITÉ 9 **UN 0 OU UN 9 DE PLUS**

EXERCICE 1 Un 0 de plus

Dans cet exercice, tu peux utiliser **les touches** [+] [=] et **les touches chiffres.**

- Tape le nombre de départ.
- À chaque étape, essaie d'obtenir un nouveau nombre qui comporte autant de chiffres que le nombre précédent, mais qui s'écrit avec **un 0 de plus** (et un seul). Écris ton calcul dans la flèche et le nombre obtenu dans la case.

354 → ☐ → ☐ → ☐

4 267 → ☐ → ☐ → ☐ → ☐ → ☐

Figure 9. Activité 9, version initiale (Mosaïque CM1-CM2, 2014, p. 17)

Le travail des didacticiens aidé par les enseignants…

L'articulation IREM-Didactique a aussi joué tout le long du travail du groupe en direction de la recherche. En premier lieu, les groupes IREM, de par le climat de confiance qui s'instaure, constituent bien évidemment une formidable source pour recueillir des données : vidéos, cahiers d'élèves, préparations des enseignants, observations d'activités en classe avec la calculatrice, et de séances qui se sont élargies à d'autres classes, d'autres thèmes, avec ou sans la calculatrice. C et M ont ainsi pu recueillir en allant observer des enseignants du groupe dans leurs classes de nombreuses données (observations, vidéos, cahiers élèves) sur :

- l'intégration de cette calculatrice dans les pratiques
- la numération (thème central dans le fichier)
- la liaison CM-6^{e} (la calculatrice vue comme outil « fédérateur »)

En second lieu, elle a également permis de nourrir le travail de recherche d'une enseignante du groupe engagée dans un master[5] qui s'est précisément penchée sur l'activité 9 (figure 9). La dimension « recherche en didactique » a alors donné lieu à un élargissement du travail sur l'activité 9, avec l'introduction d'un jeu sur les systèmes d'écriture**.** L'analyse *a priori* et les enjeux épistémiques dans l'apprentissage de la numération ont abouti à une nouvelle version de cette activité (figure 10).

Le rôle de la calculatrice y est par exemple modifié par rapport à l'activité initiale : elle retrouve une fonction « première » à l'école qui est de pouvoir vérifier des résultats. Elle joue un autre rôle tout aussi essentiel, mais plus discret : elle impose une conversion entre systèmes sémiotiques car pour « vérifier », il faut à un moment ou un autre convertir, des unités en écritures chiffrées.

De façon plus ponctuelle, les enseignants de notre groupe ont contribué au projet CaPriCo : au total, quatre enseignants et deux animatrices ont participé à la journée nationale CaPriCo, à Lyon, en 2015 et 2016, ils ont répondu au questionnaire lancé par l'IFé sur l'utilisation de la calculatrice et soumis des fiches d'activité.

[5] Master 2 Sciences de l'Education, Parcours « Formation, Evaluation et Encadrement en milieu scolaire », de l'Université de Paris Descartes. Mémoire soutenu en juin 2016, par Marie Audoly Lamiaux.

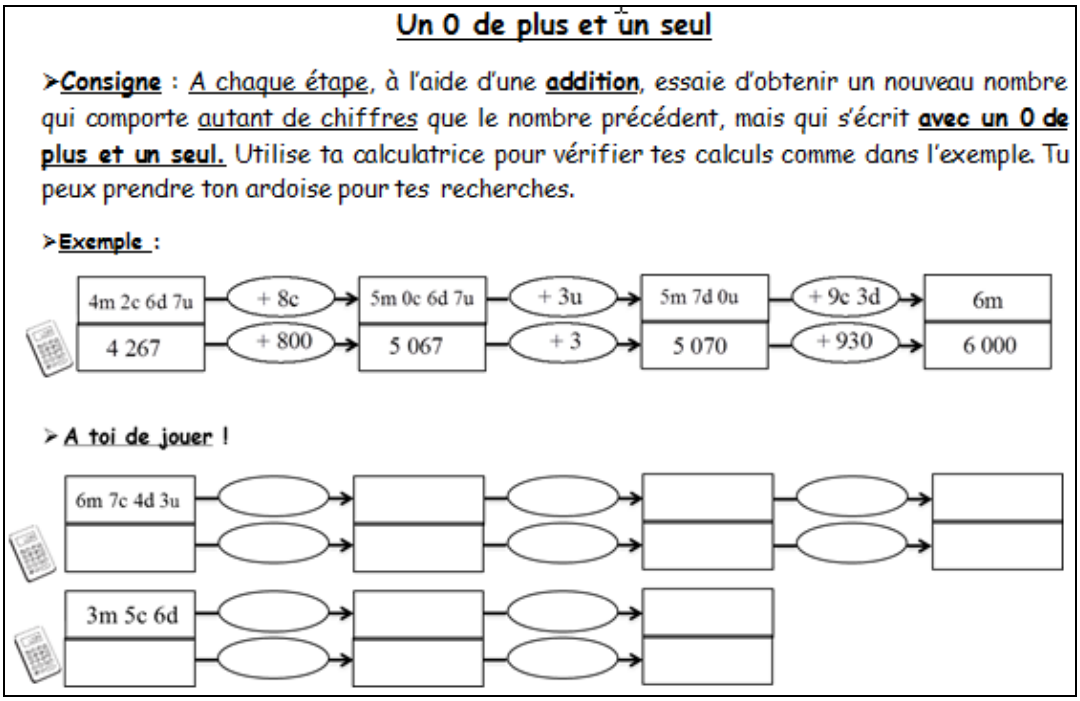


Figure 10. Troisième version de l'activité 9 (Lamiaux, 2016, p. 103).

Articulation Recherche-Terrain dans le travail au-delà du groupe

En conclusion, au-delà du groupe IREM, nos travaux se poursuivent, ils s'appuient sur les données recueillies. La calculatrice, en primaire, au collège ou dans la liaison primaire-collège, induit une complexité et différentes difficultés. Certaines sont relatives à l'outil lui-même, aux savoirs qu'il met en jeu et aux ressources pédagogiques qu'il rend nécessaires ; d'autres sont relatives aux acteurs impliqués (les professeurs et les élèves) et aux genèses instrumentales. En effet, les outils de nos cadres théoriques, notamment l'idée le dédoublement de l'instrument (Haspekian, 2006) qui mène chez l'enseignant à une double genèse instrumentale personnelle et professionnelle, nous permet d'analyser une évolution de la genèse instrumentale professionnelle des enseignants. On constate par exemple une évolution entre la première et la deuxième année : les professeurs ont modifié leur conception de la séance « prise en main », dans le sens d'une simplification des fonctionnalités présentées aux élèves, et évitant une séance « dédiée », avec fiche, par exemple.

Cela se traduit aussi par l'émergence de questions sur les finalités des enseignants. En particulier, ils sont très attachés à apprendre aux élèves à « utiliser la calculatrice à bon escient » mais dans une perspective qui va au-delà de celle de répondre simplement à une compétence du programme de mathématiques. En effet, « à bon escient » se rattache chez nos enseignants à une signification sociale. Dans notre groupe, pour plusieurs d'entre eux, cette signification est alors à la fois un moteur et un frein à l'utilisation de la calculatrice en ce sens qu'utiliser la calculatrice pour une finalité qui ne serait pas légitimée par une pratique sociale ordinaire semble compliqué. Par exemple, nous avons repéré une réticence à utiliser des tâches jouant sur des affichages, ou plus généralement les consignes du type « calculatrice cassée ». Lamiaux (2016) confirme par ailleurs des éléments sur les pratiques des enseignants relatives à la numération et leurs difficultés à utiliser les unités de numération, dans un contexte très différent (instrumenté) des observations antérieures. Ces difficultés ouvrent aussi des perspectives en termes de conditions pour intégrer la calculatrice. Ce travail pose ainsi des questions sur les fonctions sémiotiques de l'instrument car il apparaît dans de nombreuses activités comme un pourvoyeur de conversions entre système de signes. Au-delà du groupe

IREM stricto sensu, du côté des professeurs, cela se traduit par des projets qui perdurent : des binômes de travail professionnels fondés sur des liaisons CM-6e un projet de brochure en lien avec le projet CaPriCo.

Conclusion

En référence à la figure 7, la place de l'IREM est plutôt au centre entre le pôle recherche en didactique et le pôle enseignement, formation, terrain. D'ailleurs, le témoignage de V est significatif de ce rôle central dans les deux directions. Au début de son travail, elle a été aussi membre et responsable d'un groupe IREM à Grenoble : « *Avec A. Bessot, le travail fait avec les enseignants s'appuyait sur quelques résultats de ma thèse et, plus tard encore (en 2014), avec Marie-Jeanne Perrin, j'ai exploité ce travail de l'IREM pour l'analyser autrement* ».
Pour C, formatrice en IUFM, puis ESPE depuis 15 ans, ce groupe est sa première expérience en tant qu'animatrice IREM. Elle a l'habitude de travailler avec des enseignants débutants, mais former des enseignants n'est pas faire de la recherche. Et le groupe IREM, à l'interface entre recherche et formation, fournit un cadre pour travailler avec des enseignants expérimentés sur du long terme.
Pour M, les IREM sont ancrés dans son histoire. Le rôle des IREM est essentiel dans la relation entre enseignement et recherche. C'est presque ainsi qu'elle a débuté la recherche, quand, étudiante à l'époque entre DEA et thèse, il y a presque 20 ans, Michèle Artigue l'a plongée dans la recherche INRP-ADIREM.
Pour conclure, il nous semble donc que le schéma suivant refléterait davantage la démarche qu'a parcourue notre groupe :

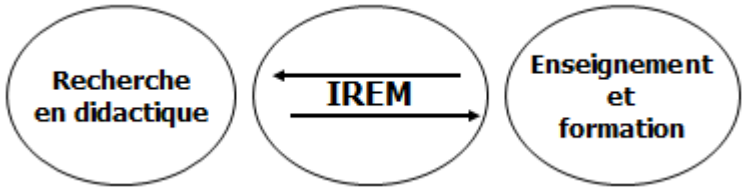


Figure 11. Nouveau schéma d'interactions

UN GROUPE CORFEM A L'IREM D'AQUITAINE (PAR LALINA COULANGE ET GREGORY TRAIN)

L'IREM d'Aquitaine a proposé récemment la création d'un nouveau groupe de travail adossé à la Commission Inter-IREM CORFEM (COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques). Ce groupe IREM s'intéresse, en lien avec les activités de la CORFEM, aux questions relatives à la formation initiale des enseignants de mathématiques au sein notamment des masters MEEF Second degré de mathématiques. Une des spécificités de ce groupe est d'être constitué d'enseignants chercheurs d'horizons différents, mathématiciens et didacticiens, tous formateurs au sein du MEEF Mathématiques de Bordeaux, ainsi que d'enseignants ou formateurs de mathématiques de statuts divers. Dans ce court texte, nous proposons de revenir sur la genèse de ce groupe, sur les ambitions d'une telle création et sur les potentialités que nous entrevoyons dans les dynamiques de travail nourries par la diversité de ses participants.

Genèse de groupe CORFEM-IDA

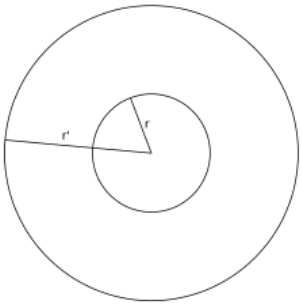
Si le groupe CORFEM-IDA a été officiellement créé en septembre 2016, cette officialisation vient s'inscrire en continuité de collaborations préexistantes. Diverses occasions, en lien avec la mise en place des masters MEEF, ont permis des rencontres entre les membres aujourd'hui permanents de ce groupe IREM. La construction des maquettes des masters a ainsi été une première occasion de collaboration entre les enseignants-chercheurs mathématiciens et didacticiens des mathématiques. La mise en application de ces maquettes, dès les premières années, a également permis de penser et de mettre en œuvre des co-interventions didacticiens / mathématiciens au sein d'unités d'enseignement du master, par exemple, en première année dans le cadre de la préparation aux épreuves écrites et orales du concours. Plus récemment, cette dynamique a aussi pris la forme d'une réflexion commune autour de la seconde épreuve écrite du concours qui s'est traduite par des propositions relatives à des évolutions possibles et souhaitables de cette épreuve (Coulange, Saliba & Train, 2013 ; Coulange, Herr, Saliba & Train, 2016). Ces expériences communes ont été autant d'éléments qui ont facilité la création du groupe. Elles ont été l'occasion de construire progressivement et collectivement des ambitions de plus en plus communes pour la formation des enseignants de mathématiques. Il s'agissait pour tous de mieux appréhender l'origine des difficultés éprouvées par les étudiants fréquentant les masters MEEF tant sur le plan disciplinaire que sur le plan professionnel – de renouveler un questionnement commun autour de l'élaboration et de la mise en place de stratégies d'enseignement sur des thèmes mathématiques donnés.

Fonctionnement du groupe CORFEM-IDA

Si la création du groupe a profité d'expériences communes passées, faire en sorte que ces dynamiques communes naissantes perdurent est une nécessité pour un fonctionnement durable. Faire en sorte que chaque membre puisse bénéficier de telles dynamiques, mais aussi faire en sorte que ces dynamiques puissent en retour profiter de la diversité du groupe, sont des éléments que nous essayons de ne pas perdre de vue dans notre collectif. Les quelques éléments constitutifs de notre démarche de fonctionnement que nous explicitons ci-après n'ont pas valeur d'exemplarité et l'on peut imaginer que comme pour tout groupe IREM, le groupe CORFEM-IDA a une histoire et un devenir qui lui sont relativement propres. Nous jugeons cependant ces éléments comme à même d'illustrer l'intérêt du travail engagé.

Le choix des thèmes à l'étude a été objet de négociation. Les thèmes retenus pour cette première année sont au nombre de trois : la numération décimale positionnelle, les fonctions et l'algèbre. Ces thèmes peuvent paraître assez peu originaux, déjà ou encore travaillés par ailleurs, au sein d'autres groupes IREM. C'est en revanche dans les perspectives de travail envisagées que résident des particularités. Ces thèmes à l'étude ne sont pas à entendre comme situés et enfermés dans un curriculum donné (par exemple, il ne s'agit pas d'entendre la numération décimale positionnelle comme un thème cantonné aux seuls cycles 3 ou 4 du collège). Il s'agit plutôt d'appréhender ces thèmes comme des savoirs mathématiques identifiés dont l'exploration et l'étude, tout comme les questions que leur enseignement à un niveau donné, posent et convoquent des mathématiques largement non élémentaires qu'il n'est pas indigne de faire fréquenter à des étudiants de master. Cette acception partagée de ce que nous désignons par « thèmes d'étude » permet de faire fructifier la diversité des acteurs du groupe. Elle renvoie plus fondamentalement à une hypothèse commune que la classe de mathématiques (et les phénomènes qui s'y jouent) est productrice de questions qui méritent une étude mathématique sérieuse. L'exemple que nous donnons ci-après, « rapporté » par l'un des membres du groupe CORFEM-IDA permettra de s'en convaincre. Nous laissons le soin et le plaisir au lecteur d'étudier un tel phénomène.

Un professeur demande, après avoir étudié avec sa classe la formule de l'aire d'un disque, de résoudre l'exercice suivant : Calculer l'aire de la couronne donnée ci-dessous (le rayon du petit cercle est r = 2 cm et le rayon du grand cercle est r '= 5 cm)



Alors que le professeur attend une application simple de la formule de l'aire d'un disque… le raisonnement suivant apparaît dans la classe : le « rayon de la couronne » vaut (r-r'), ici donc 3. En « dépliant » la couronne, il faut calculer l'aire d'un « trapèze » dont je connais les caractéristiques suivantes : la longueur de sa « grande base » est $2 \times \pi \times 5$; la longueur de sa « petite base » est de $2 \times \pi \times 2$ et sa hauteur est de 3. Son aire est donc $((2\times\pi\times2+2\times\pi\times5)\times3)/2=21\pi$
Et le professeur de dire donc : et bien, non, ça fait…. Et après quelques hésitations…. : 21π

Encadré 2. Un exemple de questionnement dans la classe de mathématiques

Notre position de didacticiens au sein groupe nous confère certes un outillage spécifique dans la mise à l'étude ou la problématisation de telles questions. Pour autant, une des précautions à prendre, nous semble-t-il, est de soumettre au groupe des questions « brutes » à l'étude, déshabillées de toute intention didactique, afin que chacun puisse s'en emparer avec les outils qui sont propres à chacun. Pour exemplifier notre propos, nous donnons à voir ci-dessous un exemple de question et un fragment de l'étude collective que cette question a permis de faire vivre au sein du groupe. La remontée à la théorie des proportions, la production de techniques de comparaison de fractions s'appuyant cette théorie, l'examen de la viabilité de ces techniques dans l'enseignement ont été travaillés collectivement car la question posée initialement était presque « naïve » (ou formulée en tant que telle).

La question soumise au groupe

La question posée est l'étude d'un exercice extrait d'un manuel québécois. Il s'agit d'une tâche de comparaison de fractions « comparer 123/234 et 12/23 », tâche dont les techniques disponibles *a priori* excluent le recours à la mise au même dénominateur des deux fractions considérées ou encore le recours à l'usage du « produit en croix ».

Un extrait de l'étude collective de la question

Le problème posé est équivalent à la comparaison de 123/234 et de 120/230. Certes, dira-t-on mais est-ce réellement une avancée fulgurante ? C'est ce que nous allons voir…

Remarquons que 123/234 = (120+3) / (230+4). Autrement dit si l'on veut bien chercher un peu de généralité à la chose, il s'agit de comparer a/b et $(a+3) / (b+4)$. Plaçons nous aussi dans le cas $a/b < 1$ juste pour donner corps au discours en termes de proportion qui va suivre mais plus encore plaçons-nous dans le cas encore plus restrictif de $a/b < ¾$ pour coller strictement à notre exemple. Nous remontrons à plus de généralité par la suite…

Imaginons que l'on ait une urne contenant b boules dont a blanches, c'est-à-dire que la proportion de boules blanches dans l'urne est a/b. Si l'on mélange cette urne avec une urne contenant 4 boules dont 3 blanches (de proportion ¾), la proportion de boules dans l'urne « réunion » sera $(a+3)/(b+4)$.

Comme $a/b < 3/4$, et que la « réunion » s'est faite avec urne dont la proportion de boules blanches est ¾, alors on a bien que $a/b < (a+3)/(b+4)$.

Tentons donc plus de généralité… Plaçons nous dans le cas $a/b < 1$ et posons $c/d < c'/d' < 1$. On a le résultat plus général suivant : $(a+c)/(b+d) < (a+c')/(b+d')$. La « belle » chose est qu'un discours justificatif en termes de proportion est largement accessible à des petites classes : imaginons qu'on ait une urne contenant b boules dont a boules blanches : la

proportion des boules blanches dans l'urne est donc a/b. Si l'on mélange cette urne avec une autre, contenant d boules dont c boules blanches, la proportion des boules blanches dans l'urne « réunion » sera $(a + c)/(b + d)$. Si la réunion se faisait avec une urne dans laquelle la proportion des boules blanches, c'/d', soit supérieure à c/d, on arriverait à une proportion, $(a + c')/(b + d')$, supérieure, c'est-à-dire que l'on aurait $(a + c)/(b + d) < (a + c')/(b + d')$.
Et le cas particulier de la comparaison de a/b et $(a+h)/(b+h)$ se règle avec ce même discours : en réunissant une urne de proportion a/b avec une urne de proportion h/h, on obtient à coup sûr une urne de proportion supérieure…

Encadré 3. Un exemple d'étude partagée au sein du groupe.

Nous avons déclaré la nécessité de mettre des questions « brutes » à l'étude, car il est vrai qu'en tant que didacticiens, nous avons commis l'erreur (une fois) de proposer de travailler collectivement un objet dont nous avons pris la mesure qu'il n'était en soi que peu séduisant pour une partie du groupe, du fait des implicites qu'il recouvrait. Il s'agit des programmes de calcul. Les programmes de calcul sont des « objets institutionnels » et pour le didacticien, ces mêmes objets sont en particulier porteurs d'intentions didactiques, dès lors que l'on pense à l'algèbre comme « science du calcul sur les programmes de calcul » (Chevallard, 2007). Plus précisément, l'étude concernait la question de la production d'exemples/contre-exemples dans des tâches convoquant les programmes de calcul avec un intérêt porté sur les potentialités de prendre appui, comme il est fait classiquement dans l'enseignement, sur de telles tâches pour illustrer le fait que des exemples ne suffisent pas pour prouver (voir exemple ci-dessous).

Programme n°1
Choisir un nombre
Ajouter 2 au nombre de départ
Multiplier le résultat obtenu par 3
Retrancher le triple du nombre de départ
    Tester ce programme avec trois nombres différents
    Que constatez-vous ?
    Prouver que cette conjecture est vraie pour n'importe quel nombre choisi au départ

Encadré 4. Un exemple de programme de calcul

Notons que dans le programme de calcul présenté, l'opportunité déclarée semble toute relative. En effet, le programme de calcul proposé est de degré 1 et donc précisément deux exemples suffisent pour affirmer que la conjecture est vraie. De manière plus générale, l'opportunité, à travers cet exemple, de convaincre de la nécessité du passage au calcul littéral pour prouver une affirmation universellement quantifiée nous paraît à questionner. D'autant que, dans le registre graphique, il existe une technique disponible, tôt dans le curriculum (fin du cycle 4) pour affirmer le caractère suffisant de deux valeurs en vue de conclure. La chose n'est pas anodine car la même question se pose pour démontrer l'équivalence de deux programmes de calcul. Cette question de l'équivalence de deux programmes de calcul motive classiquement la nécessité de recourir à l'algèbre et aux règles de transformations d'expressions algébriques. L'étude de l'équivalence deux programmes de calcul (correspondant à des polynômes de degré 1 voire 2) pourrait être renouvelée, voire motiver d'autres techniques en appui sur le registre graphique, proches de celle évoquée ci-avant et pourtant absentes. Ainsi, si la question soumise au groupe nous apparaissait porteuse de potentialités en termes de techniques et de remontée à une théorie des polynômes, la question a été dans un premier temps jugée anodine par une partie de nos collègues. C'est, nous semble-t-il l'absence d'arrière-plan commun sur les potentialités des programmes de calcul qui aura dans un premier temps fait obstacle. Cet épisode nous paraît illustrer la nécessité d'apporter des questions que nous qualifions de « brutes » à l'étude. Il a ainsi fallu reformuler

cette question en parlant par exemple, de l'absence de discours ou d'étude du degré d'un polynôme dans la classe de mathématiques au lycée, pour que in fine, elle devienne une question riche et partagée au sein du groupe.

D'autres potentialités naissantes au sein du groupe

Même si la création du groupe CORFEM-IDA est encore très récente, nous entrevoyons des potentialités nouvelles dans cette collaboration. Pour le didacticien, ce groupe est une occasion de poser un point de vue renouvelé sur des objets du curriculum et leurs définitions au sein de ce dernier, quelque peu « naturalisées ». L'exemple de la fraction-quotient a/b et de sa définition dans le curriculum comme « le nombre qui multiplié par b donne a » est un épisode de vie du groupe éclairant de ce point de vue. En effet, si le didacticien voit dans cette définition des potentialités nombreuses, à la fois dans les possibilités offertes de justification des opérations sur les quotients (addition, multiplication, division) le mathématicien y voit, quant à lui, une définition bien curieuse, circulaire dans une certaine mesure, a/b étant défini à travers la manière dont il opère… C'est bien cette confrontation de points de vue qui nous semble productive au sein de ce groupe.
Nous entrevoyons également une autre potentialité liée à la participation d'enseignants de mathématiques au sein du groupe, que nous avons par ailleurs suivis en formation. Cette spécificité permet un retour sur les contenus de formation, à travers ce que ces anciens étudiants du MEEF en opérationnalisent aujourd'hui (ou non) dans leurs classes. A ce sujet, par exemple, une de nos dernières discussions a porté sur la prise en charge des unités dans les calculs dans des tâches de conversion (1,6 dam = 1,6 (100 dm) = 1,6×100 dm = 160 dm) dont le potentiel est évoqué dès la première année de master MEEF. Une ancienne étudiante pourtant convaincue de la légitimité et de l'intérêt d'une telle pratique, nous a fait part de certaines difficultés parfois sous-estimées dans la formation et des résistances des élèves à y recourir, qui nous ont paru bien légitimes. A retravailler donc, au sein du groupe pour trouver des formes de réponses à ces difficultés…

CONCLUSION

Quatre IREM, quatre didacticiens ou groupes de didacticiens animant un groupe IREM, quatre exemples de ce que Luc Trouche appelle la double germination de la recherche en didactique des mathématiques. Chaque équipe décrit ce qu'a apporté ou apporte encore la structure IREM à ses recherches académiques, ce que Hussein Sabra appelle « la plus-value » pour les didacticiens. Les recherches IREM jouent un rôle pour incuber des recherches en didactique mais les résultats potentiels de ces dernières jouent aussi un rôle de levier pour motiver les enseignants des groupes IREM à expérimenter et à entrer dans le travail attendu d'eux. Ce que les auteurs ont cherché à montrer dans ce texte, c'est que les IREM constituent un cadre qu'il est important pour la communauté des didacticiens d'irriguer. En retour il est clair que de nombreuses potentialités s'ouvriront pour les didacticiens, pour participer ou monter des projets en appui de professeurs de terrain, et pour développer des recherches didactiques ancrées dans les problématiques réelles.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ALDON, G. (2015). MOOC, formations à distance, formations hybrides. *MathemaTICE 46*.

ARTIGUE, M. (2016). Mathematics Education Research at University Level: Achievements and Challenges. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of First conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (pp.11-27). University of Montpellier and INDRUM.

ARTIGUE, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 7*, 245-274.

CHAMBRIS, C. (2008). *Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Évolution de l'enseignement au cours du 20e siècle. Connaissances des élèves actuels*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7). http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00338665/en/

CHARNAY, R. & TREFFORT, L. (2014). *Activités et exercices pour la calculatrice, Mosaïque CM1-CM2*. Paris : Hatier.

CHEVALLARD, Y. (1992). Intégration et viabilité des objets informatiques, le problème de l'ingénierie didactique. In B. Cornu (Ed.), *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques* (pp. 183-203). Paris : PUF.

CHEVALLARD, Y. (2007). Séminaire PCL2, année universitaire 2006-2007. Disponible sur internet : http://yves.chevallard.free.fr/spip.IMG/pdf.Seminaire_2006-2007.pdf

COULANGE, L., HERR, L., SALIBA, G. & TRAIN, G. (2016). Les épreuves d'admissibilité du CAPES externe de mathématiques : de possibles perspectives. *Petit x, 101*, 55-70.

COULANGE, L., SALIBA, G. & TRAIN, G. (2013). Les connaissances mathématiques et didactiques : proposition de problème pour la formation. *Petit x, 92*, 70-77.

DOUADY, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 7(2)*, 5-31.

GUEUDET, G. (2017). University Teachers' Resources Systems and Documents. *International Journal of Research on Undergraduate Mathematics, 3(1)*, 198-224.

GUEUDET, G., & MATHERON, Y. (coord.) (2015). *Enjeux et débats en didactique des mathématiques*, XVIIIe école d'été de didactique des mathématiques, Brest, Bretagne. Grenoble : La Pensée Sauvage.

GUEUDET, G., SOURY-LAVERGNE, S. & TROUCHE, L. (2009). Soutenir l'intégration des TICE : quels assistants méthodologiques pour le développement de la documentation collective des professeurs ? Exemples du SFoDEM et du dispositif Pairform@nce. In C. Ouvrier-Buffet & M.-J. Perrin-Glorian (Dir.), *Approches plurielles en didactique des mathématiques* (pp. 161-173). Paris : Laboratoire de didactique André Revuz, Université Paris Diderot.

GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (Dir.) (2010). *Ressources vives. Le travail documentaire des professeurs en mathématiques.* Rennes : PUR et INRP.

GUIN, D. & TROUCHE, L. (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

GUIN, D. & TROUCHE, L. (2004). Intégration des TICE : concevoir, expérimenter et mutualiser des ressources pédagogiques. *Repères-IREM, 55*, 81-100.

GUIN, D. & TROUCHE, L. (2008). Un assistant méthodologique pour étayer le travail documentaire des professeurs : le cédérom SFoDEM 2008. *Repères-IREM, 72*, 5-24.

HASPEKIAN, M. (2006). Evolution des usages du tableur. In J.-B. Lagrange et al. (Dir.), *Genèses d'usages professionnels des technologies chez les enseignants*. Rapport intermédiaire l'ACI-EF GUPTEn.

LAGRANGE, J.-B. (2000). L'intégration d'instruments informatiques dans l'enseignement : une approche par les techniques. *Educational Studies in Mathematics, 43(1)*, 1-30.

LAMIAUX, M. (2016). *La calculatrice permet-elle de favoriser des apprentissages en numération ? Un exemple d'étude : la séance 9 du fichier Hatier Mosaïque.* Mémoire de master. Université Paris-Descartes.

PEPIN, B., GUEUDET, G. & TROUCHE, L. (Eds.) (2013). Re-sourcing teacher work and interaction: new perspectives on resource design, use and teacher collaboration, special issue of *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 45(7)*.

SABRA, H. (2016). L'étude des rapports entre documentations individuelle et collective : incidents, connaissances et ressources mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 36(1)*, 49-95.

SCHÖEN, D. (1993). *Le praticien réflexif. À la recherche du savoir caché dans l'agir professionnel*. Montréal : Éditions Logiques.

SOURY-LAVERGNE, S., TROUCHE, L., LOISY, C. & GUEUDET, G. (2011). *Recherche INRP-Pairform@nce, Parcours de formation, de formateurs et de stagiaires : suivi et analyse*. Rapport à destination du MESR, INRP-ENS de Lyon.

TEMPIER, F. (2013). *L'enseignement de la numération décimale de position à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Thèse de doctorat, Université Paris Diderot (Paris 7).

TRGALOVA, J. & TROUCHE, L. (2015). Penser les ressources pour enseigner les mathématiques, leur développement, leur partage et leurs usages. *Communication à la journée nationale Stratégie mathématiques*, Lyon, 25 septembre 2015.

TROUCHE, L. (2005). Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 25(1),* 91-138.

TROUCHE, L. (2014). Le collectif au cœur des métamorphoses numériques du travail des enseignants. *Conférence au colloque national TICE Inter-IREM*, Université de Montpellier, juin 2014.

TROUCHE, L. (2016a). Formation continue des enseignants (de mathématiques) : des métamorphoses profondes en cours, et à venir ; des défis pour les IREM. *Communication au conseil scientifique des IREM*, Paris, 11 mars.

TROUCHE, L. (2016b). Didactics of Mathematics: Concepts, Roots, Interactions and Dynamics from France. In J. Monaghan, L. Trouche & J.M. Borwein (Eds), *Tools and Mathematics, Instruments for Learning* (pp. 219-256). Springer.

WENGER, E. (1998). *Community of practice, learning, meaning and identity*. Cambridge: University press.

DEMARCHE D'INVESTIGATION EN MATHEMATIQUES DANS LE PREMIER DEGRE EN FRANCE : RELATIONS ENTRE DES QUESTIONS DE RECHERCHE ET LES INSTRUCTIONS OFFICIELLES

Christine **CHOQUET**
Magali **HERSANT**
CREN Université de Nantes
ESPE de l'Académie de Nantes
Christine.choquet@univ-nantes.fr
Magali.hersant@univ-nantes.fr

Résumé
Le projet DiTacTic[1], mené à l'Université de Nantes (2014-2016), avait pour but d'étudier les possibilités d'enseigner et d'apprendre des mathématiques à l'école primaire dans le cadre de démarches d'investigation (DI). Une revue de littérature internationale sur le thème de la DI et de l'inquiry-based learning (IBL) a permis d'éclairer certains points des nouveaux programmes de mathématiques pour l'école primaire en France (2016). Des questions de recherche concernant la mise en œuvre de la DI dans la classe de mathématiques du premier degré ont également été soulevées.

Mots clés
Démarche d'investigation, Mathématiques, Premier degré, Inquiry-based learning, Instructions officielles.

Ce poster a été présenté au colloque international ICME13 qui a eu lieu à Hambourg en juillet 2016 (Hersant, Choquet, Bueno-Ravel).

INTRODUCTION

Dans les nouvelles instructions officielles pour l'école primaire (2016), la référence à la démarche d'investigation en mathématiques en lien avec les sciences n'apparaît plus clairement même si le terme « investigation » est encore employé. Notre lecture des programmes de mathématiques pour le premier degré nous a également permis de repérer, sans qu'elle soit définie par ailleurs, l'expression : « pratiques d'investigation ». Nous nous sommes alors demandé comment les professeurs des écoles comprenaient ce changement et

[1] Projet piloté par M. Hersant CREN Université de Nantes, auquel ont participé C Choquet CREN, Université de Nantes et L. Bueno-Ravel, CREAD, Université de Rennes.

comment ils pouvaient s'en emparer. Ces questions sont d'autant plus importantes qu'elles renvoient à des imprécisions repérées dans les travaux de recherche en didactique. En effet, les termes utilisés tels que « démarche d'investigation » et « inquiry-based mathematics learning » ne sont pas toujours clairement définis.

Afin de préciser ces questions et d'y apporter des éléments de réponse, nous avons étudié une séance de mathématiques menée dans une classe de cycle 3. Son analyse permet de repérer comment l'enseignant a choisi de mettre en œuvre un enseignement des mathématiques basé sur une démarche d'investigation.

PRESENTATION DE LA SEANCE

Un énoncé de problème a été élaboré par un petit groupe de professeurs des écoles accompagnés d'un conseiller pédagogique. Nous avons assisté aux échanges et au travail de préparation et ainsi pu repérer les enjeux de la séance et les objectifs visés par les enseignants. La séance de mathématiques a ensuite été observée dans la classe de cycle 3 (élèves de 8 à 10 ans) d'une enseignante expérimentée. Nous l'avons filmée et avons recueilli les productions des différents groupes.

Choix du problème

L'énoncé du problème (Choquet, 2016) est proposé aux élèves sous la forme d'un vidéogramme.

Sur cette vidéo, on peut voir des véhicules circulant sur une autoroute ainsi que des panneaux de circulation indiquant la direction du Mans. Une voix-off présente la situation : la course « les 24 heures du Mans » rapporte de l'argent à la ville du Mans et « […] *ce sont huit voitures sur dix circulant sur cette portion d'autoroute qui passeront le week-end sur le circuit. De ce fait, tous les hôtels de l'agglomération mancelle sont complets depuis des mois, les restaurants seront ouverts une bonne partie de la nuit. L'institut de sondage MathSarthe estime qu'en moyenne chaque voiture se rendant à la course rapportera près de 750 euros net à la communauté urbaine du Mans.* »
La question suivante apparaît à la fin du vidéogramme :

Quelle somme d'argent les voitures empruntant cette portion d'autoroute d'ici le départ des 24 heures rapporteront à la communauté urbaine du Mans ?

Origine du problème

Ce problème trouve son origine dans les ressources que le groupe de professeurs a consultées en ligne. L'énoncé et la forme du vidéogramme s'inspirent des travaux réalisés par les chercheurs et enseignants associés au projet LEMA[2] et notamment du problème suivant (Cf. Figure1).

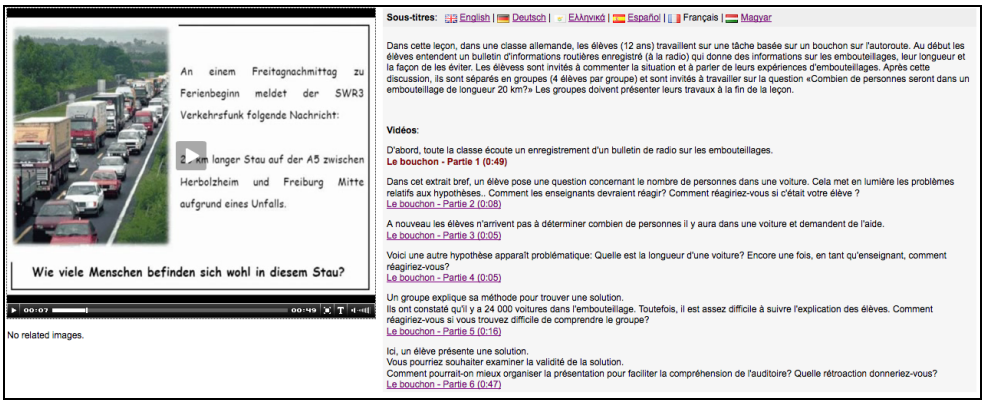


Figure 1 Problème issu du projet LEMA

Dans ce problème, à partir d'une photo d'embouteillage, il s'agit de calculer combien de personnes seront immobilisées dans un embouteillage de 20 km.

Déroulement de la séance

Après quelques consignes brèves, les élèves visionnent à deux reprises le vidéogramme. Quelques minutes sont consacrées à une recherche individuelle puis les élèves sont invités à échanger collectivement sur leurs premières idées. Celles-ci sont notées au tableau par l'enseignant :

On n'a pas le nombre de voitures
Quelle est l'heure de départ de la course ?
Est-ce qu'on compte aussi les camions ?
Il y a deux côtés à l'autoroute : est-ce qu'on compte sur les deux côtés ?

Les élèves travaillent ensuite dans des petits groupes de trois ou quatre afin de résoudre le problème et de rédiger leur solution sur une affiche. Après une vingtaine de minutes de recherche et de rédaction, une présentation collective des différentes stratégies et un échange collectif sont organisés.

Difficultés rencontrées par l'enseignante

Lors de l'élaboration puis de la mise en œuvre de cette séance, l'enseignante fait face à des difficultés. En premier lieu, il s'agissait pour le petit groupe de professeurs de proposer un énoncé engageant les élèves dans une démarche d'investigation. Le choix du problème puis l'élaboration de l'énoncé sous la forme d'un vidéogramme ont pris du temps (plusieurs heures de travail en commun) et il a été difficile de s'accorder sur les objectifs de la séance ainsi que sur sa mise en œuvre *a priori* (organisation finalement laissée à l'enseignante proposant le problème dans sa classe). Ensuite, même si les élèves, individuellement puis en petits

[2] http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/dvd_2009/videos/traffic/index.htm#

groupes, se sont tous engagés dans une recherche de solutions, la gestion de la mise en commun des productions a été complexe pour l'enseignante. En effet, des solutions différentes ont été trouvées du fait que certains élèves ont décidé de compter les voitures circulant sur un seul côté de la route et d'autres sur les deux côtés. L'enseignante a éprouvé des difficultés à engager un débat sur ces différentes démarches. Enfin, en acceptant les deux réponses, la synthèse de la séance qu'elle a proposée n'a pas réussi à convaincre tous les élèves et à dégager les éléments essentiels, en termes de savoirs curriculaires et de compétences mathématiques, à retenir du travail effectué par la classe.

QUESTIONS ISSUES DE CETTE ETUDE DE CAS EN LIEN AVEC LES TRAVAUX DIDACTIQUES, AU NIVEAU INTERNATIONAL

Cette étude de cas, en identifiant les difficultés rencontrées par l'enseignante, pose des questions sur la mise en œuvre d'une démarche d'investigation dans le cours de mathématiques. Celles-ci sont liées à des questions de recherche posées dans la littérature internationale.

Trois principales difficultés ont été clairement identifiées par la recherche. Tout d'abord, il peut être difficile pour des enseignants ordinaires de choisir des problèmes assez riches pour permettre une démarche d'investigation en mathématiques (Maaβ & Artigue, 2013). L'analyse *a priori* de l'énoncé du problème que nous avons réalisée et l'analyse *a posteriori* de la séance observée montrent que ce problème ne permet pas de mettre les élèves face à une réelle démarche d'investigation. Une des raisons de cela tient au faible potentiel d'investigation du problème (Choquet, Hersant, Bueno-Ravel, 2016). En effet, les élèves ont peu de sous-problèmes à redéfinir suite à la question posée dans le vidéogramme et peu de stratégies différentes sont mobilisables pour répondre à cette question.

Ensuite, le partage des responsabilités entre l'enseignant et les élèves, face aux savoirs mathématiques en jeu est difficile à effectuer.

Enfin, l'observation de la phase de mise en commun confirme le fait souvent mentionné que les enseignants ne sont pas toujours à l'aise en classe lors des temps d'échanges avec les élèves autour des productions. Ils éprouvent des difficultés à gérer des débats, à comparer les productions et à faire échanger la classe sur les différentes stratégies (Inoue, 2011).

Dans notre étude, une autre raison peut expliquer les difficultés de l'enseignante. Les ressources disponibles en France, même si elles sont nombreuses, ne permettent pas d'aider suffisamment les professeurs des écoles. Les propositions des différentes ressources sont hétérogènes en termes d'énoncés de problème, les problèmes proposés ne mènent pas toujours à une démarche d'investigation, et les indications données pour mettre en œuvre les séances ne se révèlent pas suffisantes.

DISCUSSION

Les deux versants de nos analyses, l'un concernant les nouvelles instructions officielles en France (2016) et l'autre, la recherche internationale nous conduisent à redéfinir des questions de recherche associées à la démarche d'investigation en mathématiques.

Ces questions concernent tout d'abord les apprentissages en jeu. Lors de séances de mathématiques basées sur la démarche d'investigation, il s'agit de développer chez les élèves des compétences relatives à la recherche d'un problème en mathématiques. Mais comment identifier les apprentissages des élèves en termes de savoirs mathématiques curriculaires ? Quelles connaissances peuvent être raisonnablement institutionnalisées en lien avec les programmes de mathématiques français ?

Elles concernent également la dimension collective de la démarche évoquée par la recherche et repérée dans les instructions officielles. Cette dimension collective ne réside-t-elle que dans la recherche de solution et dans la comparaison des productions ? Comment chaque élève peut-il trouver une place dans ce travail collectif et apprendre des mathématiques ?

Enfin, ce travail conduit à approfondir la réflexion sur le développement de ressources à destination des professeurs des écoles. Pour cela, des recherches sur les conditions de possibilités de mise en œuvre des séances basées sur la démarche d'investigation dans le premier degré sont à poursuivre.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHOQUET, C., BUENO-RAVEL, L., & HERSANT, M. (2016). Is inquiry-based approach possible at the elementary school? A cases study. In *Actes du 13th International Congress on Mathematical Education*. Hambourg.

CHOQUET, C. (2016). Formation des professeurs des écoles et développement des compétences mathématiques. *Actes du 43ème Colloque Copirelem*. Le Puy en Velay.

HERSANT, M., CHOQUET, C., BUENO-RAVEL L (2016). Inquiry: relations between research questions and curriculum reforms in France. ICME13. Hambourg.

INOUE, N. (2011). Zen of the art of neriage: Facilitating consensus building in mathematics inquiry lessons through lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14(1),* 5-23.

MAAB, K. & ARTIGUE,M. (2013). Implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching: a synthesis. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 45(6),* 779-795.

RECURSOS GENERADOS EN EL MARCO DE LA TEORIA DE SITUACIONES DIDACTICAS, PARA LA FORMACION DE PROFESORES E INVESTIGADORES[1]

RESOURCES GENERATED IN THE FRAME OF THE THEORY OF DIDACTICAL SITUATIONS FOR THE TRAINING OF TEACHERS AND RESEARCHERS

Dilma **FREGONA**[1], Pablo **GREGORI**[2,3], Pilar **ORÚS**[2,], Laura **PEYDRÓ**[3,4], Irene **PITARCH**[2,3]
[1]FaMAF (Universidad Nacional de Córdoba, Córdoba, Argentina), [2]Departamento de Matemáticas, [3]Instituto de Matemáticas y Aplicaciones de Castellón (IMAC) , [4]Departamento de Educación (Universitat Jaume I, Castellón, España)
dilmafregona@gmail.com, gregori@uji.es, orus@uji.es, peydro@uji.es, al056859@uji.es

Résumé
Les deux versions du poster ont pour objectif, de montrer l'existence et la puissance pour la recherche du « Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques Guy Brousseau » (CRDM-GB) de l'Institut IMAC de l'Université Jaume-I (UJI) de Castellón (Espagne). Ce centre de ressources, créé en 2010, met à la disposition des chercheurs et des formateurs en didactique des mathématiques, des documents et des ressources élaborés de manière collaborative dans le cadre du dispositif COREM (Centre d'Observation pour la Recherche de l'Enseignement des Mathématiques), par les chercheurs en didactique des mathématiques, les formateurs et les enseignants qui en étaient membres.

Mots clés
Ressources en didactique des mathématiques, formation d'enseignants, observation, théorie des situations didactiques.

ORGANISATION DU POSTER

Le poster comporte deux parties différentes. La partie supérieure montre le contexte et l'importance de la création par Guy Brousseau (1973) du *Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques* (COREM), pour le développement de la Théorie des Situations Didactiques (TSD); la médaille Felix Klein en témoigne. Les divers documents produits par le COREM, autour des écoles publiques J. Michelet de Talence (banlieue de Bordeaux), sont le témoignage historique d'une expérience scientifique unique dans le monde et fondamentale pour la création et le développement de la Didactique des Mathématiques, en tant que discipline scientifique et domaine de recherche (Brousseau, 1998, pp. 359-360). La partie inférieure du poster montre comment le « Centro de Recursos de Didactica de las Matemáticas *Guy Brousseau* » (CRDM-*GB*), met à la disposition des chercheurs ces ressources et comment celles-ci peuvent être utilisées, avec l'exemple de l'avancée d'une recherche sur l'enseignement de la division dans *N*, recherche que nous avons réalisée à partir de l'exploration des matériaux mis à disposition par le CRDM-*GB*.

[1]Version en espagnol du poster présenté au ICMI-13, Hambourg, 2016.

Le COREM

Le COREM a été créé par le professeur Guy Brousseau, avec le soutien de l'IREM et de l'UER de Mathématiques de l'Université de Bordeaux ; il l'a dirigé pendant les 26 années de son fonctionnement (1973-1999). *« Le COREM a été conçu selon les principes de la TSM, pour être un « didactron », un générateur de connaissances de didactique »* signale Brousseau, sur le premier diaporama de présentation du COREM extrait de son site (Brousseau, G., 2015) ; et il continue en expliquant l'idée première de ce « didactron –COREM »: celle de disposer d'une « école pour l'observation », mais avec un dispositif, le COREM, dont la composition et les règles offriraient toutes les garanties, pour entreprendre des recherches sur l'enseignement des mathématiques :

> Un groupe scolaire dédié à l'observation de « phénomènes » d'enseignement des mathématiques, qui ne viole pas les règles imposées par l'administration et surtout assure l'éducation des élèves dans des conditions normales.
> Cette école est associée à un organisme spécifique, le COREM évoqué ci-dessus qui réunit le personnel de recherche et apporte les moyens supplémentaires nécessaires.
>
> Le COREM entreprend des recherches de formes variées mais cohérentes, limitées à l'enseignement des mathématiques. Elles seront étroitement contrôlées, indépendamment, par les institutions scientifiques appropriées et par l'administration et par les organismes intéressés. (Brousseau, G., 2015, Diapo 5)

Plus d'information sur le COREM et son rapport avec la genèse de la recherche en didactique des Mathématiques, et sur les recherches sur l'enseignement des mathématiques produites autour des écoles J. Michelet, dans les productions de son fondateur (Brousseau, G., 1997, 1998, 2015) et dans l'article des « acteurs » du dispositif COREM (Salin & Greslard-Nédélec, 1999).

Quelles ressources pour la recherche fournit le CRDM-GB ?

Le « Centro de Recursos de Didactica de las Matemáticas *Guy Brousseau* » (CRDM-*GB* ; http://www.imac.uji.es/CRDM/), de l'Institut IMAC de la Universitat Jaume I de Castelló (UJI), España, créé en 2010, héberge des ressources documentaires et bibliographiques provenant des écoles J. Michelet (maternelle et primaire) de Talence et du COREM et met ces ressources à la disposition des chercheurs. La collaboration permanente d'un groupe de professeurs et de chercheurs, qui appartiennent au Séminaire du CRDM-GB, et d'archivistes et informaticiens de la Bibliothèque de l'UJI, est indispensable pour rendre possible l'accès aux ressources et leur diffusion via internet.
Ces ressources sont diverses : rapports annuels des activités mathématiques réalisées dans les classes (« *bilans* »), planifications / programmations des enseignants, productions individuelles ou en groupe des élèves, évaluations et critères de correction, publications « grises » destinées aux enseignants de l'enseignement primaire ou à la maternelle, etc. sur support papier, ainsi que des enregistrements audio ou vidéo de séminaires, cours, etc.
Les ressources ont été rangées par la Bibliothèque de l'université dans des boites d'archives qui peuvent être consultées sur place (voir le protocole de consultation) et elles sont répertoriées par le Séminaire permanent du CRDM-GB dans le document « Inventario del CRDM-GB » qui peut être consulté en ligne. Il s'agit d'un document Excel où les colonnes repèrent les ressources par : années scolaires, niveau des classes, brève description du contenu de la boite d'archive, lien avec le rapport annuel

correspondant (« le bilan ») et enfin le codage de la boite qui contient les ressources correspondant au couple (année scolaire, niveau) de chaque ligne.
Nous proposons un parcours du site et en particulier de cette page capturée en image. Elle montre toute l'information que permettent d'explorer les documents du CRDM-GB, et son organisation :

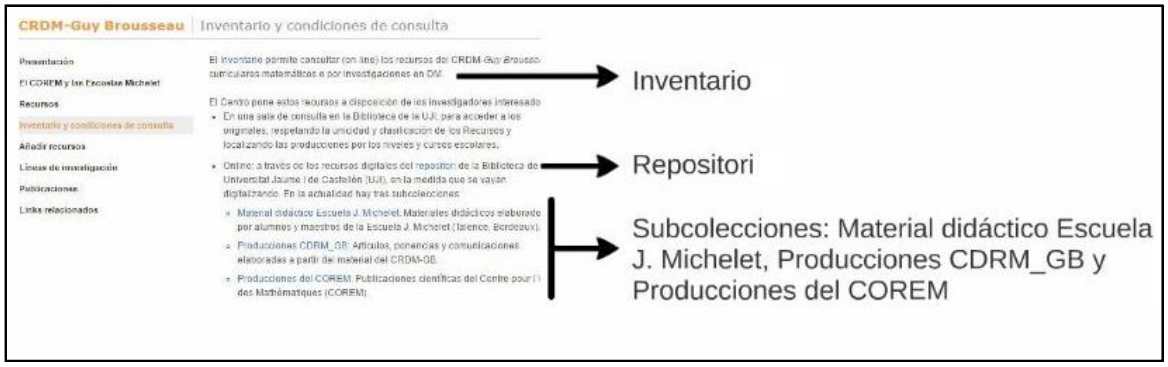


Figure 1. Capture de l'écran " Inventario y condiciones de consulta"

La Figure 1 montre comment on peut aussi accéder aux ressources disponibles en ligne à travers le site du REPOSITORI de l'UJI, et la collection du CRDM-GB, qui présente trois sous-collections : matériel didactique de l'Ecole J. Michelet, productions du COREM (celles qui ont été numérisées jusqu'à maintenant) et productions du CRDM-GB, avec les articles, communications, conférences, etc. qui ont été élaborés avec les ressources du CRDM-GB.
Le projet "Vidéo de situations d'enseignement et d'apprentissage" (VISA) de l'Institut Français de l'Éducation (IFE) de Lyon met aussi à la disposition des chercheurs certaines des vidéos enregistrements des classes de l'école Jules Michelet, réalisées par le COREM, sur demande et aux conditions requises par cette institution pour toutes les vidéos déposées sur la base de données VISA.
L'accès au site de VISA: http://ife.ens-lyon.fr/manifestations/recherche/visa.

Figure 2. Fonds COREM sur VISA

Un exemple de processus de recherche s'appuyant sur ces ressources.

L'exemple que nous présentons dans le poster a été extrait de l'ensemble de productions (Fregona & Orús, 2012 a, 2012 b ; Brousseau, Orús, Fregona, & Gregori, 2012 ; Fregona, Delprato, & Orús, 2013), pour la recherche que nous avons menée à partir d'une recherche collaborative initiale sur l'enseignement de la division dans *N*, avec les ressources du CRDM-GB.

L'objectif initial de notre recherche: étudier, interpréter et expliciter un sens possible d'une séquence d'enseignement sur la division, réalisée dans le cadre de la TSD. Dans le processus d'étude des ressources, nous avons suivi les techniques[2] suivantes :
T1. Partir d'une publication du COREM : « La division à l'école élémentaire » (Brousseau, N. et al, 1985)
T2. Identifier le cours et l'année scolaire et chercher dans *l'Inventario* du CRDM-GB: Dans notre exemple, CE2 1982-83; CM1 1983-84 & CM2 1984-85.

INVENTARIO del "CRDM - GUY BRUSSEAU"				
Curso escolar	**Clase (Nivel)**	**Contenido de la caja**	**Extracción de actividades mat. del "BILAN" relacionada con los materiales de cada CAJA**	**Signatura de las CAJAS (nº Caja-curso escolar-nivel)**
1984/85	CM1B		http://hdl.handle.net/10234/91974	210-1984/85-CM1B
1984/85	CM1A	Estadísticas resultados escolares	http://hdl.handle.net/10234/91974	211-1984/85-CM1A
1984/85	CM1A	Estadísticas resultados escolares	http://hdl.handle.net/10234/91974	212-1984/85-CM1A
1984/85	CM2		http://hdl.handle.net/10234/92031	213-1984/85-CM2
1984/85	CM2	Estadísticas resultados escolares	http://hdl.handle.net/10234/92031	214-1984/85-CM2
1985/86	MATERNAL Ps1		http://hdl.handle.net/10234/92050	553-Bilans 2/2
1985/86	MATERNAL PMs2		http://hdl.handle.net/10234/92051	553-Bilans 2/2
1985/86	MATERNAL MGs3		http://hdl.handle.net/10234/92052	553-Bilans 2/2
1985/86	MATERNAL Gs4		http://hdl.handle.net/10234/92070	553-Bilans 2/2
1985/86	CPA	Estadísticas resultados escolares; Bilan	http://hdl.handle.net/10234/92071	215-1985/86-CPA

Figure 2. Capture de l'écran "Inventario de los recursos del CRDM"

L'*Inventario* met ainsi en rapport le couple (année scolaire, niveau) avec les boites qui contiennent les productions des élèves et enseignants correspondant à ce couple.
T3. Recherche en ligne sur le site du CRDM-GB des bilans correspondants : CM2 1984-85
T4. Identifier les activités mathématiques dans ces bilans: Dans le bilan de CM2 1984-85:

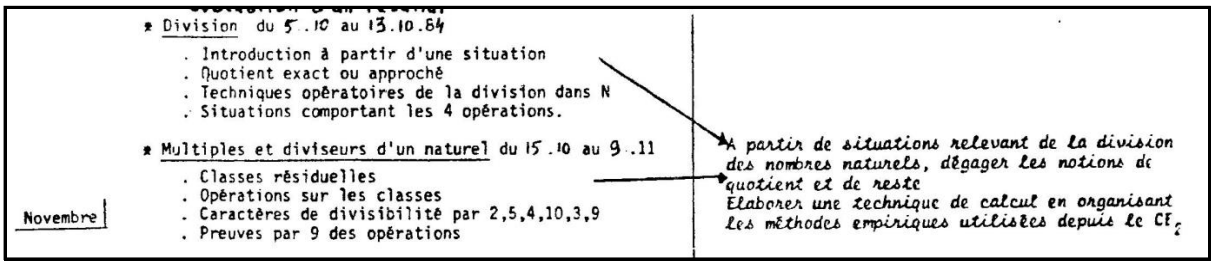


Figure 3. Extrait du bilan numérisé de CM2 1984-85

T5. Consulter sur place les ressources du CRDM-GB : Dans notre cas : les boites 213-1984/85-CM2 et 214-1984/85-CM2. (Voir Figure 2)
T6. Trouver et examiner les productions des élèves et des enseignants, en rapport avec les activités choisies avec T4 : productions des élèves individuelles ou en groupe, planifications, examens et critères de correction et d'évaluation mis au point par les enseignants, et résultats des élèves. (Images de ces productions dans le poster)

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[2] Le mot " technique " est utilisé dans son acception primaire : « Ensemble de procédés et de moyens pratiques propres à une activité »

BROUSSEAU, G. (1972). La division euclidienne aux cours élémentaire et cours moyen. in Les mathématiques de l'école élémentaire; (pp 267-278); *APMEP*, Paris. Disponible en*: http://guy-brousseau.com/2486/la-division-euclidienne-aux-cours-elementaire-et-cours-moyen-1972/*

BROUSSEAU, G., BRIAND, J., BROUSSEAU, N., GRESILLIER, M.-F., GRESLARD, D., LACAVE-LUCIANI, M.-J., TEULE- SENSACQ, P. & VINRICH, G. (1985). *La division à l'école élémentaire. Compte rendu des situations d'enseignement réalisées avec des enfants de CE2, CM1 et CM2*. Bordeaux: Université et IREM de Bordeaux.

BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of Didactical situations in Mathematics. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990*, traduction COOPER. M., Balaceff, N., Sutherland, R. & Warfield, V. New York, Boston, Dordrecht, London, Moscow, KLUWER.

BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1970-90)*, Grenoble, La Pensée Sauvage,

BROUSSEAU, G., ORÚS, P., FREGONA, D., & GREGORI, P. (2012). Los recursos del COREM, posible cantera de datos para el ASI. Un ejemplo: la enseñanza de la división en la escuela primaria. *In J.-C. Régnier, M. Bailleul & R. Gras (Eds.), VI Colloque International Analyse Statistique Implicative* (pp. 307-334). Caen (France)

BROUSSEAU, G. (2015). Centre d'observation et de recherches sur l'enseignement des mathématiques Presentation de COREM, *Diaporama de la site, http://guy-brousseau.com/le-corem/presentation/.*

FREGONA, D., & ORÚS, P. (2012 a). Enseñar la división en la escuela primaria: un problema de investigación y de formación docente", *XXXV REM*, Córdoba, 6 al 8 de agosto. En: *http://www2.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_28/28-1_FregonaOtros-EnsenarDivision.pdf*

FREGONA, D., & ORÚS, P. (2012 b). Cómo enseñar la división en la escuela primaria. Un ejemplo de utilización de los recursos del CRDM-GB para la investigación y la formación del profesorado". *XVI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, 20-22 de setiembre, Universidad Internacional de Andalucía en Baeza (Jaén).
Disponible en *http://repositori.uji.es/xmlui/handle/10234/93450.*

FREGONA, D., DELPRATO, F. & ORÚS, P. (2013). Desafíos en los procesos de estudio de matemática con adultos de baja escolaridad. *IV Congrès International sur la Théorie Anthropologique du Didactique*. Toulouse, Francia: Université de Toulouse.
En *http://citad4.sciencesconf.org/conference/citad4/pages/Citad4_Preactes_Axe4.pdf* .

SALIN M-H., & GRESLARD D. (1998). La collaboration entre chercheurs et enseignants dans un dispositif original d'observation de classes: le Centre d'Observation et de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques (COREM), conférence parue dans : *Actes de la 50 ième Recontre de la CIEAM*, 1998.

ETUDE D'ETM IDOINES AUTOUR D'UN PROBLEME DE PROBABILITE

Blandine **MASSELIN**
LDAR, Université Paris-Diderot
blandine.masselin@wanadoo.fr

Résumé
Cet article présente un début de recherche sur les ETM personnels des enseignants de 3ème et 2nde en probabilités en France en lien avec un problème paradigmatique.

Mots clés
Probabilité ETM Enseignants Lièvre et Tortue

INTRODUCTION

Observant une confusion entre fréquence et probabilité chez beaucoup d'élèves en France du secondaire au début de l'enseignement des probabilités ($3^{ème}$ et 2^{nde}, grades 9 et 10), cela m'a amené à étudier le travail des enseignants. J'émets l'hypothèse que peu d'entre eux introduiraient dans leur enseignement des simulations pour constater un phénomène de stabilisation de fréquences. L'idée est de dégager des conditions favorisant cet emploi de simulations, et celles faisant obstacles.

L'étude s'appuie sur le problème du lièvre et de la tortue, connu en France par les enseignants car il s'agit d'une ressource institutionnelle : *une course se passe entre un lièvre et une tortue : on dispose d'un parcours à 5 cases en ligne. On lance un dé équilibré à 6 faces. Si le 6 sort, le lièvre gagne, sinon la tortue avance d'une case. Le jeu continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant*.

Voici le contexte de notre étude : 21 enseignants de grade 9 et 5 enseignants de grade 10 ont suivi une action de formation continue sur l'enseignement des probabilités qui s'est déroulée en 2014 où leur a été proposé un travail sur cette situation.

Ma question globale de recherche est la suivante : comment une action de formation peut influencer l'ETM idoine que pourrait imaginer (et peut être mettre en place) un enseignant pour sa classe, sur une tâche pouvant impliquer de la simulation en probabilité ?

CADRE THEORIQUE

Le modèle des ETM (Kuzniak & Richard, 2014) est ici privilégié. Nous nous intéressons aux ETM de référence, idoine et personnel des enseignants. Des ETM idoines potentiels construits collectivement par ceux-ci lors d'une formation permettent d'analyser la structure d'accueil des activités et la circulation des savoirs dans les trois genèses et les trois plans [sem-disc], [sem-inst] et [inst-disc].

Interrogeant les domaines source et de résolution introduits par Montoya Delgadillo et Vivier (2015), nous détaillerons ceux choisis par les enseignants dans leur tentative de résolution du problème pour eux-mêmes, mais aussi proposés dans leur ETM idoine potentiel. Nous tenterons de dégager les raisons de ces choix de domaines, les obstacles éventuels conduisant à ceux-ci, les décalages entre enseignants suivant leur ETM de référence. Pour cela, les registres de représentation (au sens de Duval) convoqués par les enseignants seront questionnés, à travers des choix d'emploi d'artefacts envisagés. Nous tenterons de comprendre comment certains projetteraient de passer d'une représentation à une autre, et pourquoi ?

De plus, considérant que l'enseignant agit tout en étant, au moins en partie, guidé par ses connaissances non seulement mathématiques mais aussi didactiques, nous rechercherons à comprendre des écarts potentiels entre enseignants en nous appuyant sur le modèle des MTSK (Carrillo et al, 2016).

PREMIERE QUESTION DE RECHERCHE

Ma question initiale se précise ainsi : sous l'influence d'une action de formation, comment l'ETM personnel des enseignants peut-il influencer l'élaboration d'un ETM idoine potentiel, incorporant ou non de la simulation ? Ceci m'amène donc à explorer l'ETM idoine potentiel, mais aussi à repérer les MTSK des enseignants qui se manifestent (ou leurs traces).

COTE METHODOLOGIE

Vingt-six enseignants ont été contraints à travailler sur la situation du lièvre et la tortue. Initialement (phase 1), ils ont tenté de résoudre la tâche pour eux mêmes. Par groupes de 3 ou 4, ils ont ensuite imaginé un scénario pour un niveau de classe choisi (phase 2). En phase 3, ils ont mis en commun leurs idées en communiquant à tous leur ETM idoine potentiel prévu. Les données recueillies sont des vidéos, des fichiers et des traces papiers. Certains groupes étaient mixtes (enseignants de grade 9 et 10).

ETUDE DE DEUX ETM DE REFERENCE DONNES (3EME ET 2NDE)

En France, la classe de 2nde (grade 10) fait partie de l'institution lycée tandis que la classe de 3ème (grade 9) correspond à la fin du collège (autre institution). Des écarts peuvent s'observer entre les deux ETM de référence concernant les enseignants stagiaires et qui sont décrits à travers les programmes officiels des classes (BO) et les documents ressources (DR) sur les probabilités-statistiques. Un tableau présentant des éléments de comparaisons se trouve en Annexe 1.

ELEMENTS D'ANALYSE A PRIORI DU PROBLEME

Le jeu et ses règles offrent un panel de choix possibles : des indices syntaxiques impliquant (ou non) l'idée d'une simulation, un questionnement centré sur la tortue ou le lièvre. Des variables didactiques peuvent être objet d'étude par les enseignants.
Côté artefacts, une comparaison entre Tableur, Geogebra, et Algobox met en relief entre autres, la diversité des potentiels de visualisation.

RESULTATS SUR DES ETM IDOINES POTENTIELS

Voici quelques résultats. La loi géométrique tronquée n'a été mentionnée par aucun enseignant, et ne semble pas faire partie des ETM personnels de ceux-ci. Se pose ici le statut de cette connaissance. Quant à l'arbre, il a été choisi par 25 enseignants, des traces écrites témoignent de nombreuses difficultés d'élaboration ou une exploitation a minima (comme en Annexe 2).

"*$p(A \cap B)=p(A) \times p(B)$ si A et B sont deux événements indépendants*" ne semble pas être une connaissance mobilisable partagée, ni reliée à l'arbre. Il n'y a pas de conversion de registre par une majorité d'enseignants quand ils utilisent l'arbre : ceci semble témoigner d'un manque de connaissance sur les règles et justifications des arbres. Beaucoup d'enseignants, ont effectué un repli vers l'usage d'un tableur pour tenter une simulation, après abandon de l'arbre, dévoilant alors une genèse instrumentale fragile. Une circulation partielle dans l'ETM idoine potentiel, au regard des écrits et présentations orales, ne permettra sans doute pas de réelle projection de cette situation dans la classe des enseignants concernés.

Si certains envisagent de laisser lancer des dés aux élèves, à volonté, 10 ou 5 fois. Les raisons sont alors respectivement « *juste pour s'approprier les règles du jeu* », ou « *susciter un questionnement sur la variabilité des données et faire émerger l'emploi d'un artefact pour simuler* », ou « *une fois regroupées, elles pourraient initier une amorce de stabilisation et une conjecture* ». L'observation dans $D_{nombres}$ de fréquences variées obtenues avec des lancers de dés impulserait alors, par dévolution, un passage à une simulation par tableur.

Un groupe (mixte) s'interroge *« Quelle simulation pour quel objectif ? »* et envisage une simulation faite par l'enseignant pour *« ne pas passer trop de temps sur le tableur mais sur l'échantillonnage »*, exploitant un « *résumé statistique via une représentation graphique des fréquences* ». Ces membres ont échangé sur des éléments distincts des ETM de référence respectifs. Leur ETM idoine potentiel se différencie de celui des autres groupes qui font créer aux élèves une feuille de calcul sans autre visée que celle, à maxima, de constater intuitivement la loi des grands nombres, quand ils ne déclarent pas le tableur comme "*artificiel*".

Enfin, peu d'enseignants qui incorporent des simulations, évoquent un parcours de tâches préalables qui semble participer de la construction de leur ETM idoine, ce dernier évoluant au fil du temps. Enfin, pour la simulation, le choix de l'artefact semble piloté et par l'ETM de référence, et par l'ETM personnel de l'enseignant.

CONCLUSION ET PRECISION DES QUESTIONS DE RECHERCHE

Ces grandes variabilités m'amène à poursuivre l'étude du comment s'ouvrent ou se ferment des choix chez un enseignant. Comparer des ETM idoines potentiels et effectifs, étudier les connaissances mises en jeu ou absentes chez l'enseignant à travers la trajectoire de ce problème (Kuzniak, Parzysz et Vivier, 2013), chez un enseignant, permettra de mesurer des interactions entre cette formation et lui-même. La recherche d'articulations entre différents ETM, en lien avec les MTSK de l'enseignant et celle visées par la formation sera une des finalités de ce travail.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS, L.C.,& MUNOZ-CATALAN, M.C. (2013). *Determining specialized knowledge for mathematics teaching*. Actes CERME 8, (pp. 2985-2994).

DUVAL, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, *5*,9-24.

MONTOYA DELGADILLO, E., & VIVIER, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *19*, 73-101.

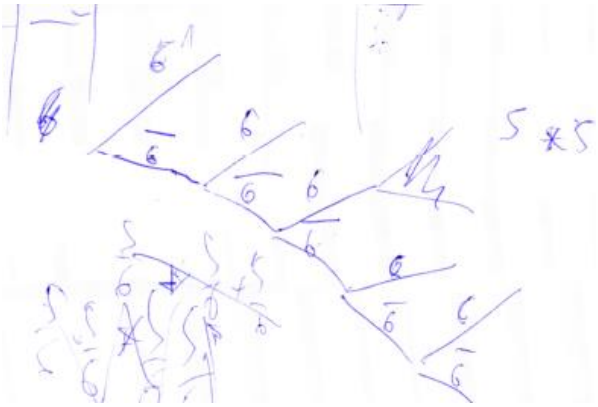
KUZNIAK, A., PARZYSZ, B., & VIVIER, L. (2013). *Trajectory of a problem: a study in Teacher Training*. The mathematics Enthusiast. 10 (1/2) , 407-440.

KUZNIAK, A.,& RICHARD, P.R. (2014). L'espace de Travail Mathématique. *Points de vue et perspectives*. Relime. *17*, 29-39.

ANNEXE 1: ELEMENTS DE COMPARAISON EN 3EME ET 2NDE

En 3ème	En 2nde
Approche fréquentiste, calculs de probabilités expériences à 1 ou 2 épreuves maximum	Dans le BO : pas de loi de probabilité Dans DR 2nde, loi géométrique tronquée
Peu de formalisme : A, non A	Mise en place du formalisme comme A ∪ B, A ∩ B ...
Pas d'arbre dans BO mais il est présent dans DR collège, avec des règles de traitement : pour qui ?	Arbres non pondérés dans BO, et arbres pondérés dans DR (BO de PS-PES)
Pas de notion d'échantillon	Notion d'échantillon, la simulation au service de l'intervalle de fluctuation

ANNEXE 2 EXTRAIT D'UNE RECHERCHE PAR UN ENSEIGNANT (PHASE 1)



ETUDE ET ENQUETE MATHEMATIQUES HORS CLASSE DES TRES BONS ELEVES

Romain **MARIO**
Unité mixte de recherche ADEF/ACADIS-EA4671
Aix-Marseille Université-ENS Lyon
rmario_rmario@hotmail.com

Résumé
La recherche présentée ici porte sur l'étude et l'enquête autonome et personnelle mathématiques des «*très bons élèves* »- les élèves en fortes réussites mathématiques- dans une approche anthropologique et biographique à caractère didactique. Elle a pour objectif d'accéder à leurs modes de vies institutionnelles, d'en repérer des phénomènes d'étude et d'enquête mathématiques, d'en construire les caractéristiques et d'en cerner les raisons d'être contextuelles dans le cas des très bons élèves de terminales scientifiques.

Mots clés
Étude mathématiques autonome et personnelle, enquête mathématiques, institution d'étude, contrat didactique, méthode d'observation biographique, épisodes didactiques, épisodes de la biographie didactique d'élève, savoirs efficaces, répertoire didactique et épistémologique

INTRODUCTION

Nous nous sommes intéressé aux très bons élèves (élèves en fortes réussites mathématiques) et à leur façon d'étudier les mathématiques après la classe car ils connaissent mieux que quiconque les techniques de l'étude. Par notre enquête anthropologique et ethnographique nous avons cherché à repérer des phénomènes d'étude hors classe pour l'objet de la classe, à en construire les caractéristiques, et à en cerner les raisons d'être contextuelles. Dans cette communication, nous présentons notre matériel et la méthodologie de recherche, les cadres théoriques pour l'analyse, la construction d'épisodes pour l'analyse didactique qui prend en compte le contenu mathématique des travaux qui se réalisent, ce que nous appelons les épisodes didactiques ou épisodes de la biographie didactique d'un élève (Mercier 1994, Mario 2012 ; Mario & Mercier 2015) relativement à des apprentissages mathématiques réalisés par les très bons élèves en étude autonome et personnelle, et quelques résultats.

MATERIELS ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Cherchant à mieux cerner le fonctionnement et la gestion de l'étude autonome et personnelle hors classe des bons élèves, nous avons considéré les élèves que nous avons observés comme des informateurs sur le fonctionnement d'une institution didactique. Ainsi pour accéder à leurs « modes de vies institutionnelles» et à « leurs pratiques ethnomathématiques », nous avons repris et adapté la méthode d'observation biographique (Mario & Mercier 2015) initiée en didactique des mathématiques par A. Mercier (1992, 1996). Il s'agit d'observer des phénomènes didactiques, c'est-à-dire des phénomènes relatifs aux temps de transmission d'une œuvre culturelle et sociale : l'étude et l'enquête. Ces deux derniers temps de l'apprentissage appartiennent principalement aux élèves et se développent le plus souvent en dehors des temps proprement scolaire. Nous avons pour cela considéré que les bons élèves nous montreraient l'ensemble des gestes d'étude efficaces et quelques-unes de leurs organisations possibles, sachant que d'autres chercheurs ont montré la faible efficacité de certains gestes comme la rédaction de « fiches pratique-mémoire » qui enferment les élèves dans le texte officiel du savoir enseigné (Matheron, 2000).

CADRES THEORIQUES POUR L'ANALYSE

Nous posons le concept d'épisode de la biographie didactique d'un élève (Mercier 1992 ; Mario & Mercier 2015) comme objet du champ de la didactique des mathématiques, et son analyse épistémologique est faite dans le cadre théorique pour la description des mathématiques qu'est la théorie anthropologique du didactique (Chevallard 1994, 2003, 2007). Pour autant nous avons fait appel à des descripteurs nouveaux, venus d'efforts de compréhension des phénomènes didactiques ordinaires et de l'action des élèves, de la Théorie des Situations Didactiques en Mathématiques (Brousseau, 1998) à la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy). Certains de ces descripteurs sont d'ailleurs venus en réponse à des questions sur l'apport des élèves au fonctionnement des systèmes didactiques soulevées par l'approche biographique (Mercier 1992, 1995 ; Erdogan et Duchet 2005; Silvy et Delcroix 2009; Silvy, Delcroix et Mercier 2013 ; Erdogan 2006, 2014).

CONSTRUCTION ET ANALYSE DES EPISODES

Pour la construction des épisodes, nos données empiriques ont d'abord été découpées en épisodes, dont nous avons faits une analyse épistémologique a priori afin de nous mettre en

mesure d'identifier des logiques d'actions invisibles lors de l'observation. Le découpage suit la règle du découpage théâtral. Ainsi nous sommes en mesure de sélectionner et d'analyser les données empiriques en les organisant en épisodes didactiques puis épisodes de la biographie didactique d'un élève (Mario & Mercier 2015). Nous avons opté pour une analyse thématique permettant de comparer ensuite les effets du contenu en termes de savoirs (Mercier 1994), et nous avons coordonné ces analyses avec une analyse lexicale, conduite à partir des expressions écrites, parlées, graphiques, que nous avions enregistrées. Cela nous a permis d'accéder à une chronique de l'articulation et des interactions entre les objets mathématiques. Nous utilisons aussi le symbolisme mathématique pour les formules et expressions écrites puisque l'élève produit un système d'ostensifs et de non ostensifs sur lequel s'appuie son travail mathématique. Nous suivons Matheron (2000) pour qui les ostensifs appellent des pratiques, soit comme souvenirs épisodiques (des praxèmes) soit comme objets institués (des savoirs).

Un exemple d'observation et d'épisodes

Nous présentons un de nos matériaux de recherche, un exercice sur les lois de probabilités continues. Nous avons choisi cet exercice parce que les objets de savoirs touchent plusieurs chapitres en classe de terminale scientifique.

> Exercice **:** Réf : *AV -S-4/26042008/Probabilité/lois continues*
> Pour une loi exponentielle de paramètre λ , démontrer que : $P_{[a;+\infty[}([a;a+s]) = P([a;s])$

Verbatim et construction d'épisodes issus des productions écrites et parlées de l'élève

Le verbatim est découpé en suivant les propositions de Sinclair et de Coulthard (1975) c'est-à-dire en appui sur les bornes, embrayeurs ou pauses qui forment le découpage proposé par l'élève. L'élève lit l'énoncé à haute voix, et nous transcrivons sans autre formalisme ses énonciations, puisque notre enjeu n'est pas l'analyse linguistique de ses productions langagières. Par contre, nous indiquons la dimension orale en ne donnant pas de ponctuation et en marquant // pour les pauses, en italiques les textes de l'élève, en droit entre guillemets ce que l'élève écrit. Dans la transcription particulière de l'élève *AV*, nous remarquons immédiatement les bornes « *alors* » et « *donc* », qui nous donnent un indice de découpage en unités d'action de l'élève et donc un découpage en sous épisodes élémentaires pour ce que l'on pourrait considérer comme des sous tâches pour l'élève (et pour cet élève seulement car le découpage dépend du registre de pratiques mobilisables par un élève donné). Enfin, nous remarquons deux fois un raisonnement (*AV1 « alors//on sait c'est une probabilité conditionnelle, donc je peux //// » et AV4' : « on a déjà étudié les intégrales et les fonctions expo…. »/// AV5 « ..... donc on a tout … alors/// sachant que..*») démontrant s'il était besoin ce que nous pensons du contrat didactique : « la connaissance du contrat est constitutive des connaissances disciplinaires mobilisées dans une tâche » selon Schubauer-Leoni (1986). C'est une règle qui n'est pas spécifique des institutions didactiques qui doit être considérée comme valable quelle que soit l'institution.

Verbatim de l'élève AV découpé en épisodes

Nous présentons ici le verbatim du travail de résolution de l'exercice sur les probabilités proposé en étude à un des élèves observés. Le découpage suit la règle du découpage théâtral avec un changement de scène et de personnage (épisodes/objets).

AV1 :« alors///alors /// »AV1':// alors, démontrer que la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sachant l'intervalle [a ; + ∝[est bien égale à la probabilité de l'intervalle [0 ; s] /// alors / humm ///// »AV2' : « //alors///on sait que c'est une probabilité conditionnelle, donc je peux que //// »

AV2" : *///// humm// donc la probabilité de l'intervalle [a ; a + s] sachant l'intervalle [a ; +∞ [////est égale à /// la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] inter l'intervalle [a ; +∞[le tout divisé par la probabilité de l'intervalle [a ; +∞ [. »*

AV3 *:« donc qui est égale à la probabilité de l'intervalle [a ; a+s] sur la probabilité de l'intervalle [a ; +∞ [////donc*

$$P_{[a;+\infty[}\left[a;a+s\right]=\frac{P\left(\left[a;a+s\right]\cap\left[a;+\infty\right[\right)}{P\left(\left[a;+\infty\right[\right)}=\frac{P\left(\left[a;a+s\right]\right)}{P\left(\left[a;+\infty\right[\right)}$$

AV4 : // alors // $\frac{P\left(\left[a;a+s\right]\right)}{P\left(\left[a;+\infty\right[\right)}$ *///donc le tout est euh / étant égal à l'intégrale de / allant de a à a+s AV4' : donc //// on a tout ceci (*) qui es égal à* $\frac{P\left(\left[a;a+s\right]\right)}{P\left(\left[a;+\infty\right[\right)}=\frac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}.dt}{P\left(\left[a;+\infty\right[\right)}$ *//*

/on a déjà étudié les intégrales et les fonctions expo// »

AV5 : «alors /// $\frac{P\left(\left[a;a+s\right]\right)}{P\left(\left[a;+\infty\right[\right)}=\frac{\int_a^{a+s}\lambda e^{-\lambda t}.dt}{1-P\left(\left[X\le a\right]\right)}$ *//sachant que* $P\left(\left[a;+\infty\right[\right)=1-P\left(\left[X\le a\right]\right)$ *»*

QUELQUES RESULTATS

Notre enquête anthropologique et biographique nous a montré que c'est la transformation des savoirs anciens et la production de savoirs nouveaux adaptés aux questions rencontrées qui caractérisent le contrat didactique dans les institutions d'étude autonome que nous avons observées. L'une des responsabilités dont l'élève s'empare à son bénéfice est de stabiliser les rapports à des objets qu'il a jugés nécessaires pour la compréhension du travail mathématique. Les « très bons élèves » étudient et apprennent à maîtriser le fonctionnement pratique des organisations mathématiques mobilisées dans la production de réponses aux exercices en étude. Ils fabriquent en étude des répertoires de savoirs efficaces par le phénomène de transhumance didactique (Mario 2012).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

CHEVALLARD, Y. (1994, février).*Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Communication présentée lors des Actes du séminaire de l'Associazione Mathesis (p.190-200), Turin, Italie

CHEVALLARD, Y. (2003).Approche anthropologique du rapport au savoir et didactiques des mathématiques. Dans S. Maury, et M. Caillot, *Rapport au savoir et didactiques* (p. 81-104).Paris: FABERT

CHEVALLARD, Y. (2007a). Un concept en émergence : la dialectique des médias et des milieux. Dans ARDM (dir.), *Actes du séminaire National de didactique des Mathématiques*.

CHEVALLARD, Y. (2007b). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique, Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz, A. Higueras, & F. Javier Garcia (dir.), S*ocietad, escuala y matemáticas. Aportaciones de la Teoria Antropológico de la Didáctico* (p. 705-746). Universitad de Jaén

ERDOGAN, A. (2006). Le diagnostic de l'aide à l'étude en mathématiques (Thèse de doctorat). Université de Paris-Diderot, Paris 7.

ERDOGAN, A. (2014). Condition épistémologique de l'étude des fonctions et de l'algèbre, en France. *Recherche en Didactique des Mathématiques*

ERDOGAN, A., & DUCHET, P. (2005). *Pupil's autonomous studying: from an epistemological analysis towards the construction of a diagnosis*. Communication présentée lors du Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Sant Feliu de Guixols, Spain

MARIO, R. (2012). *Conversion et influence des assujettissements au milieu scolaire dans l'étude autonome des mathématiques : comment les très bons élèves de lycée étudient les mathématiques après la classe. Observation anthropologique et suivi biographique de quelques cas exemplaires.* (Thèse de Doctorat). Aix-Marseille Université.

MARIO, R., & MERCIER, A. (2015). Méthode d'observation de la biographie didactique de très bons élèves en étude autonome, hors classe : pertinence, modalité, analyse et interprétation des épisodes. *Education &didactique*, 9(3), 41-74

MATHERON, Y. (2000). *Étude didactique de la mémoire dans l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée. Quelques exemples*. (Thèse de Doctorat). Aix- Marseille université

MERCIER, A. (1992). L'élève et les contraintes temporelles de l'enseignement, un cas en calcul algébrique. (Thèse de doctorat). Université de Bordeaux I.

MERCIER, A. (1994). Des études didactiques pourraient-elles aider à l'enseignement des savoirs professionnels ? (le cas des mathématiques dans les pratiques professionnelles). *Didaskalia*, *4*(5), 20.

MERCIER, A. (1996a). La création de l'ignorance, condition de l'apprentissage, à l'école. *Des Sciences de l'éducation*, *22*(2), 345-363.

MERCIER, A. (1996b). Lettres. Dans C. Blanchard- Laville, Y. Chevallard, M.-L. Schubaeur-Leoni (dir), *Regard croisés sur le didactique, un colloque épistolaire de chercheurs*. Grenoble : La pensée Sauvage

MERCIER, A. (1996c). *Comment appréhender le cognitif, depuis la position de la didactique des mathématiques ?* Communication présentée au symposium REF, université de Montréal

SCHUBAUER-LEONI, M-L. (1986). Le contrat didactique : un cadre pour comprendre les Savoirs Manifestés par les élèves en Mathématiques. *European Journal of Psychologiy of Education*, *1*(2), 139-153

SENSEVY, G., & MERCIER A. (2007). *Agir ensemble: l'action didactique conjointe du professeur et des élèves.* Presse Universitaire de Rennes. PUR

SENSEVY, G. (2011), *Le sens du savoir. Elément pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles. De Boeck.

SINCLAIR, J., & COULTHARD, M. (1975), *Towards an analysis of discourse: the English used by teachers and pupils*. London : Oxford university press.

SILVY, C., & DELCROIX, A. (2009). Site mathématique d'un Roc : une nouvelle façon d'interroger un exercice ? *Annales de didactique et de sciences cognitives, 4*, 103-122.

SILVY, C., DELCROIX, A., & MERCIER, A. (2013). Enquête sur la notion de « Pedagogical content Knowledge » Interrogé à partir du site local d'une question. *Éducation & Didactique*, *7*(1), 35-58.

L'INTRODUCTION DES REELS AU POST-SECONDAIRE : QUESTIONS EPISTEMOLOGIQUES ET HORIZONS DIDACTIQUES

Denis **TANGUAY**
UQAM
tanguay.denis@uqam.ca
Viviane **DURAND-GUERRIER**
IMAG UMR CNRS-UM 5149
viviane.durand-guerrier@umùontpellier.fr

Le présent projet de recherche est né du constat que les élèves-étudiants de fin de lycée et de début d'université n'ont des nombres réels qu'une connaissance lacunaire. L'étude de Vergnac et Durand-Guerrier (2014), par exemple, montre que peu des élèves sondés savent comment définir un nombre réel, et très peu invoquent une représentation à partir de la droite. Bergé (2010) a pour sa part montré que les étudiants universitaires auprès desquels elle a expérimenté ont de la complétude de IR une connaissance non opérationnelle, qui ne s'appuie pas sur un ensemble de situations/problèmes que la complétude résoudrait.

Une conceptualisation adéquate des réels est un atout important pour un abord réussi des cours d'analyse à l'université. L'idée que les ensembles denses ID et IQ puissent laisser des « interstices » sur la droite réelle est contre-intuitive, et nous faisons l'hypothèse que la continuité suggérée par le tracé de la droite cristallise l'idée d'une dichotomie entre le discret et le continu qui ne laisse pas de place au « dense », la densité étant erronément confondue avec la continuité. Nous nous intéressons donc à la genèse conceptuelle des réels telle qu'elle pourrait être soutenue dans l'enseignement et nous étudions les questions de recherche suivantes : doit-on envisager une forme ou une autre de reconstruction des réels en classe ? Si oui, comment selon les niveaux scolaires considérés ? À quels concepts, objets et preuves donne-t-on accès selon les approches adoptées ?

La présentation affichée reprend celle qui a été présentée au congrès INDRUM à Montpellier en mars et avril 2016 (Tanguay et Durand-Guerrier, 2016a) et a été présentée au colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec (GDM 2016), ayant donné lieu à un texte développé dans les actes (Tanguay et Durand-Guerrier, 2016b). Elle porte sur les analyses épistémologiques et mathématiques (a priori), préalables à l'élaboration des dispositifs de collecte de données pour une étude didactique encore en cours.

Nous avons ainsi repéré et examiné trois démarches typiques.
1. Une construction de IR via les coupures, issue du texte original de Richard Dedekind (1872), dans la version traduite et commentée par Sinaceur (2008).
2. Une construction comme ensemble des suites de Cauchy de rationnels, quotienté par une relation d'équivalence bien choisie. Initiée par Cantor, nous en reprenons plutôt les versions, plus accessibles, qu'en donnent Burril (1967) et Lelong-Ferrand & Arnaudiès (1977).

3. Une construction qui associe les réels aux développements décimaux illimités. Elle est examinée dans les notes d'un cours rédigées par M. Herzlich (2013), lui-même inspiré d'un manuel de D. Perrin (2005).

En conclusion, il s'agit de repérer, à travers ces différentes approches, ce qu'elles privilégient comme objets, représentations et avenues de conceptualisation, comment elles articulent les éléments centraux que sont l'ordre, les développements décimaux infinis, la densité, et les 3 ou 4 théorèmes classiques équivalents où se déclinent la complétude et la continuité. L'horizon des questions que posent les transpositions (didactiques) de ces démarches en classe complète les réflexions suscitées.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERGÉ, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 41, n°2, 217–227.

BURRIL, C. W. (1967). *Foundations of Real Numbers*. McGraw-Hill, New-York.

DEDEKIND, R. (1872). Stetigkeit und Iirrationale Zahlen. Braunschweig: Vieweg. Traduction française H. Sinaceur (2008) in Dedekind, R. *La création des nombres*. Coll. Mathesis, Librairie philosophique J. Vrin, Paris.

HERZLICH, M. (2013). *Notes polycopiées du cours GLMA 202 – Concepts fondamentaux en Analyse*. Université Montpellier 2, Faculté des sciences.

LELONG-FERRAND, J. ET ARNAUDIES, J.-M. (1977). *Cours de mathématiques, Tome 2, ANALYSE*. Éd. Dunod Université, Paris.

PERRIN, D. (2005). *Mathématiques d'école*. Éditions Cassini, Paris.

TANGUAY, D. ET DURAND-GUERRIER, V. (2016a). Introduire les réels à la transition lycée université: Questions épistémologiques et horizon didactique. First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics, Mar 2016, Montpellier, France. <hal-01337935>

TANGUAY, D. ET DURAND-GUERRIER, V. (2016b). L'introduction des réels au post-secondaire : questions épistémologiques et horizon didactique. À paraître dans D. Guillemette et R. Barwell (éds), *Actes du colloque du Groupe de didactique des mathématiques du Québec* (GDM 2016). Université d'Ottawa, 31 mai au 2 juin 2016.

VERGNAC, M. ET DURAND-GUERRIER, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université, un objet problématique. *Petit x, 96*, 7-28.

TITRE

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, 2016

AUTEURS

Thomas Barrier

Christine Chambris

RESUME

Actes du séminaire national de didactique des mathématiques de l'ARDM, session 2016

Le séminaire national de didactique des mathématiques est organisé par l'Association pour la Recherche en Didactique des Mathématiques (ARDM). Il a pour but de permettre la diffusion régulière des recherches nouvelles ou en cours, et de favoriser les échanges et débats au sein de la communauté francophone de didactique des mathématiques.

Le présent ouvrage regroupe les textes issus des séminaires de l'année 2016 (janvier, mars, novembre). Par ailleurs, depuis 2014, le groupe des jeunes chercheur-e-s de l'ARDM organise une session de poster durant les sessions du séminaire. Ces présentations affichées donnent lieu à des textes courts que vous retrouverez également dans ce volume d'actes.

Le premier séminaire de l'année a eu lieu à Arras avec le soutien de l'ESPE Lille Nord de France et du Laboratoire de Mathématiques de Lens, poursuivant ainsi l'idée d'une session « itinérante » biannuelle (séminaire à Bordeaux en 2014) et l'aide de Françoise Chenevotot, Marie-Pierre Galisson et Christine Mangiante Orsola. Les deux séminaires suivants ont eu lieu à Paris avec le soutien de l'Université Paris Diderot, du LDAR (EA 4434, UA, UCP, UPD, UPEC, URN), et de l'IREM de Paris, et en particulier l'aide de Christophe Hache.

MOTS CLES

Didactique des mathématiques

IREM de Paris – Université Paris Diderot
Directeur de publication Christophe Hache
www.irem.univ-paris-diderot.fr
Dépôt légal : 2018 – ISBN : 978-2-86612-386-4