



**HAL**  
open science

## Invariance par retour d'état sur le demi-anneau max-plus

Carolina Cardenas, Jean-Jacques Loiseau, Claude Martinez

► **To cite this version:**

Carolina Cardenas, Jean-Jacques Loiseau, Claude Martinez. Invariance par retour d'état sur le demi-anneau max-plus. MSR 2017, Modélisation des Systèmes Réactifs, Nov 2017, Marseille, France. hal-01701129

**HAL Id: hal-01701129**

**<https://hal.science/hal-01701129v1>**

Submitted on 5 Feb 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Invariance par retour d'état sur le demi-anneau max-plus

Carolina Cardenas<sup>1</sup>, Jean Jacques Loiseau<sup>2</sup>, and Claude Martinez<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Universidad Nacional Experimental Politécnica Antonio José de Sucre, Barquisimeto, Venezuela  
carocardenas1@gmail.com

<sup>2</sup> LS2N CNRS, Nouvelle Université de Nantes, Nantes, France  
Jean-Jacques.Loiseau@ls2n.fr, Claude.Martinez@ls2n.fr

## Abstract

Controlled invariance is a fundamental concept for the design of control laws for linear systems subject to specifications that are given in terms of a vector space. Following a lot of recent publications, we treat the extension of this method to max-plus linear systems. We establish the statement that in this case too, controlled invariance is equivalent to feedback invariance. This in some sense reinforces the connexion between invariance and control design for a class of timed discrete event systems. Unlike the case of linear systems over the real field, the feedback that makes invariant a controlled invariant semimodule for the closed-loop system is nonlinear, in general. This leads to effective design methods, using the known methods for the computation of solutions to linear equations in the max-plus algebra. These methods are recalled. Another difference with the case of systems over a field is that the causality of a feedback should be checked, to permit its implementation. We define the concept of causal controlled invariance, and give checkable necessary and sufficient conditions for a given module to have this property. This opens the way to the computation of optimal solutions to a number of control problems for such systems, which is illustrated on an example from the litterature.

## Résumé

Le concept d'invariance contrôlée est fondamental pour la conception de lois de commande pour les systèmes linéaires soumis à des contraintes définies en termes d'espaces vectoriels. Nous traitons ici de l'extension de cette méthode au cas de systèmes max-plus linéaires, suivant en cela de nombreuses publications récentes. Nous montrons que, dans ce cas également, l'invariance contrôlée équivaut à l'invariance par retour d'état statique. Cela renforce la connexion, qui avait déjà été notée, entre le concept d'invariance et la conception de lois de commande, pour une classe de réseaux de Petri temporisés. Contrairement au cas de systèmes sur un corps, le retour d'état qui rend invariant un demi-module invariant contrôlé n'est pas linéaire, en général. Par contre un tel retour d'état est calculable, en utilisant les solutions connues de systèmes d'équations linéaires dans l'algèbre max-plus. Une autre différence d'avec le cas de systèmes sur un corps est que la causalité du feedback doit être vérifiée, pour permettre sa mise en oeuvre. Nous définissons le concept d'invariance contrôlée causale, et donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un module donné ait cette propriété. Cela ouvre la voie au calcul de solutions optimales à nombre de problèmes de commande pour cette classe de systèmes. Nous l'illustrons sur un exemple tiré de la littérature.

## 1 Introduction

Le concept d' $(A, B)$ -invariance, ou invariance contrôlée, a été introduit indépendamment dans [1] et [2]. Il constitue la brique de base de l'approche géométrique de la conception de lois de commande pour les systèmes linéaires, qui a fourni dans les années 70 la solution à de nombreux problèmes classiques de commande, parmi lesquels le rejet de perturbation, le découplage, le problème du régulateur [3, 4]. De nombreux auteurs ont considéré l'extension de cette approche au cas des systèmes sur anneau [5, 6] ou sur demi-anneau [7], en vue de généraliser les résultats concernant la commande des systèmes linéaires invariants de dimension finie à des classes plus larges d'opérateurs.

Dans le cas de systèmes dynamiques sur un corps, il est bien connu que l'invariance contrôlée d'un sous-espace vectoriel équivaut à son invariance sous l'action d'au moins un retour d'état statique [3, 4]. C'est cette propriété qui rend le concept si utile dans la théorie classique. Malheureusement, cette caractéristique est perdue dans le cadre général des systèmes à coefficients sur un anneau ou un demi-anneau. Quoique l'invariance par retour d'état implique l' $(A, B)$ -invariance, la réciproque n'est pas vérifiée, en général (voir [5, 7]).

Conte et Perdon ont introduit [6] une notion d'invariance par retour d'état dynamique pour les modules sur un demi-anneau principal, qui généralise la classe des lois de commande statique. Ces résultats ont été généralisés par Cardenas *et al.* [12] au cas du demi-anneau  $\mathbb{R}_{\max}$ , en vue d'applications à la commande de systèmes à événements discrets soumis à des contraintes temporelles. De tels lois de commande dynamique mixent *feedback* et *feedforward*, comme on dit en anglais, et ne garantissent donc pas toutes les propriétés d'un retour d'état statique. Elle peut par exemple représenter un suivi de trajectoire en boucle ouverte, qui nécessite la mise en place de boucles supplémentaires pour la stabilisation.

La commande de systèmes max-plus linéaire fait l'objet de travaux nombreux depuis plus de 30 ans, et parmi eux de nombreux auteurs ont discuté la question de l'invariance contrôlée et de ses applications à la commande de systèmes à événements discrets. La plupart des travaux ont pour but la détermination d'un retour d'état statique résolvant un problème posé en termes de contraintes ou de comportement asymptotique, par exemple [7, 17, 19, 24–27] et [28]. Des travaux traitent aussi des questions d'observabilité dans des termes similaires [10, 11]. Notre objectif dans cet article est d'examiner des lois de commande par retour d'état statique mais non nécessairement linéaires. L'existence de tels retours d'état fournissant la solution de problèmes de commande a déjà été mentionnée [10] mais n'a pas été systématiquement étudiée. Des exemples [28] montrent (implicitement) des problèmes de commande qui n'ont pas de solution linéaire, mais admettent une solution non-linéaire, ce qui motive l'intérêt d'une telle solution.

Une attention particulière est donnée à la question de causalité, du fait que dans l'algèbre max-plus, les fonctions statiques ne sont pas nécessairement causales [21, 22]. La mise en oeuvre en ligne des lois de commande impose donc de vérifier cet aspect. Nos méthodes sont de nature algébrique et rentrent dans le cadre de l'utilisation de la *double description method* sur max-plus [16].

L'article est organisé comme suit. La section 2 est consacrée à des rappels et résultats de base concernant les demi-anneaux, demi-modules, et les concepts d' $(A, B)$ -invariance et de causalité. La section 3.2 est consacrée à l'invariance par retour d'état et à l'invariance causale, ainsi qu'aux algorithmes de vérification des propriétés. Un exemple est présenté dans la section 4, et une courte conclusion récapitule les contributions de l'article.

## 2 Concepts et résultats de base

### 2.1 Demi-modules de type fini sur l'algèbre max-plus

$\mathbb{R}_{\max}$  désigne l'ensemble des nombres réels complété par  $-\infty$  et muni des lois max et plus, respectivement notées  $\oplus$  et  $\otimes$ , et qui dans ce contexte sont appelées addition et multiplication, quand cela n'introduit pas d'ambiguïté. Dans ce qui suit, on note  $\varepsilon$  l'élément  $-\infty$ . On voit que celui-ci est élément neutre pour l'opération  $\oplus$ , et que 0 est élément neutre pour la multiplication  $\otimes$ . Les deux lois  $\oplus$  et  $\otimes$  sont associatives, et la multiplication est distributive par rapport aux sommes finies, au sens où  $\forall a, b, c \in \mathbb{R}_{\max}$ ,  $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ , et  $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \oplus (c \otimes b)$ . Ainsi,  $\mathbb{R}_{\max}$  est muni d'une structure de demi-anneau. On remarque enfin que  $\otimes$  est commutative, et que l'addition  $\oplus$  est idempotente, au sens où pour tout  $a \in \mathbb{R}_{\max}$ , on a  $a \oplus a = a$ . Du fait de ces propriétés, on dit que  $\mathbb{R}_{\max}$  est un dioïde [13].

Les notations  $\oplus$  et  $\otimes$  sont étendues comme habituellement aux vecteurs et matrices. Pour  $p, q \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathbb{R}_{\max}^{p \times q}$  l'ensemble des matrices de taille  $p \times q$  ayant des coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$ . Deux matrices de même taille  $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{m \times n}$  étant données, on définit la somme  $A \oplus B$  par  $(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$ , et si  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ , on définit  $A \otimes B$  par  $(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}$ . Le produit  $A \otimes B$  est souvent écrit  $AB$ . La matrice nulle est notée  $\varepsilon$ , lorsqu'il n'y a pas de risque de confusion avec le nombre  $\varepsilon$ . La matrice unité  $I_n$  est la matrice de taille  $n \times n$  dont les entrées sont égales à 0 sur la diagonale et  $\varepsilon$  hors diagonale. On note aussi 0 un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 0. La notation  $\otimes$  est aussi employée pour désigner le produit externe d'un scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  et d'une matrice  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$ , défini par  $(\lambda \otimes A)_{ij} = \lambda + A_{ij}$ , pour  $i = 1$  à  $p$  et  $j = 1$  à  $n$ . On utilisera aussi les symboles  $\wedge$  et  $\vee$  pour désigner les opérations min et max.

L'analogie des concepts d'espace vectoriel ou de module, obtenu en remplaçant le corps ou l'anneau de scalaires par un demi-anneau est appelé un demi-module, un moduloïde [13] ou un module [14]. On s'intéresse particulièrement au cas des sous-demi-modules du produit cartésien  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , et aux modules de type fini, qui sont générés par une famille finie de vecteurs de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ .

Si  $M$  est matrice de taille  $n \times m$  à coefficients dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , on note  $\text{Im}M$  le sous-demi-module de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  qui est généré par les colonnes de  $M$ , soit  $\text{Im}M = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid \exists v \in \mathbb{R}_{\max}^m, x = Mv\}$ . Par définition, un sous-semi-module de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  est de type fini s'il existe un entier  $q$  et une matrice  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  telle que  $\mathcal{M} = \text{Im}M$ . Les demi-modules de type fini peuvent être représentés de différentes manières. Le résultat qui base une double description pour les sous-semi-modules de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  est dû à Butkovič and Hegedüs [15]. Il établit que la famille des sous-demi-modules de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  de type fini coïncide avec la famille des cônes de type fini, qui sont les ensembles de la forme  $\text{Cone}(C, D) = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^n \mid Cx = Dx\}$ , où  $C$  et  $D$  sont des matrices de taille  $p \times n$ , pour un entier  $p$ .

**Théorème 2.1.** *Un demi-module  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  étant donné, les deux affirmations suivantes sont équivalentes.*

- (i) *Il existe un entier  $q$  et une matrice  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$  telle que  $\mathcal{M} = \text{Im}M$ .*
- (ii) *Il existe un entier  $p$  et des matrices  $C, D \in M \in \mathbb{R}_{\max}^{p \times n}$  telles que  $\mathcal{M} = \text{Cone}(C, D)$ .*

Ce résultat a été largement commenté dans la littérature. Les algorithmes pour passer d'une représentation à l'autre ont été introduits en [15], puis raffinés et étendus par Allamigeon *et al.* [16].

## 2.2 Invariance contrôlée

Un système max-plus linéaire est un système dynamique dont l'évolution est guidée par une loi de récurrence de la forme

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k), \quad (1)$$

où  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ . La variable  $x(k) \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est appelé vecteur d'état, et  $u(k) \in \mathbb{R}_{\max}^m$  est l'entrée de commande, qui sont définis pour  $k$  entier et strictement positif,  $k > 0$ . Rappelons simplement que la solution du système (1) est uniquement déterminée par la commande  $u$  et par la condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , telle que

$$x(1) = x_0.$$

Nous rappelons dans cette section quelques définitions et résultats concernant l'invariance contrôlée dans  $\mathbb{R}_{\max}$ . La plupart de ces résultats ont été établis par Katz [7].

**Définition 2.1.** (Invariance contrôlée) *Étant données les matrices  $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$  et  $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times m}$ , un demi-module  $\mathcal{M} \in \mathbb{R}_{\max}^n$  est appelé  $(A, B)$ -invariant, ou invariant contrôlé, si pour toute condition initiale  $x_0 \in \mathcal{M}$ , il existe une commande  $u$  telle que la solution unique du système (1) initialisé à  $x_0$  vérifie  $x(k) \in \mathcal{M}$ , pour  $k > 0$ .*

Nous rappelons quelques observations de base concernant la propriété d'\$(A, B)\$-invariance.

**Théorème 2.2.** *Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) *Un demi-module \$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}\_{\max}^n\$ est \$(A, B)\$-invariant si et seulement si l'inclusion suivante est vérifiée :*

$$A\mathcal{M} \subset \mathcal{M} \oplus \text{Im} B ,$$

où \$\mathcal{M} \oplus \text{Im} B\$ est défini comme l'ensemble \$\{x \in \mathbb{R}\_{\max}^n \mid \exists b \in \text{Im} B, x \oplus b \in \mathcal{M}\}\$.

(ii) *Un demi-module \$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}\_{\max}^n\$ généré par une matrice \$M \in \mathbb{R}\_{\max}^{n \times q}\$ est \$(A, B)\$-invariant si et seulement s'il existe des matrices \$U \in \mathbb{R}\_{\max}^{m \times q}\$ et \$V \in \mathbb{R}\_{\max}^{q \times q}\$ telles que l'identité suivante est satisfaite :*

$$A \otimes M \oplus B \otimes U = M \otimes V .$$

(iii) *Un demi-module \$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}\_{\max}^n\$ tel que \$\mathcal{M} = \text{Im} M = \text{Cone}(C, D)\$, pour des matrices \$M \in \mathbb{R}\_{\max}^{n \times q}\$ et \$C, D \in \mathbb{R}\_{\max}^{p \times n}\$ est \$(A, B)\$-invariant si et seulement s'il existe une matrice \$U \in \mathbb{R}\_{\max}^{m \times q}\$ telle que l'égalité suivante est vérifiée :*

$$C(AM \oplus BU) = D(AM \oplus BU) .$$

La propriété (i) est la traduction directe de la définition de l'\$(A, B)\$-invariance. Elle fonde l'approche géométrique de la commande. Les formules (ii) et (iii) fondent l'approche algébrique de la commande. Ces propriétés sont établies comme dans le cas des systèmes sur un corps. On construit les colonnes des matrices \$U\$ et \$V\$ en considérant successivement des conditions initiales égales aux colonnes de la matrice \$M\$. Les propriétés (i) et (ii) sont énoncées par Katz [7], et si notre mémoire est bonne, la propriété (iii) n'a pas été formulée explicitement, mais elle est connue. C'est elle que nous utiliserons principalement dans cet article. On note que l'équivalence entre (ii) et (iii) s'établit immédiatement en conséquence du Théorème 2.1, et que c'est la même matrice \$U\$ qui intervient dans ces deux énoncés.

Tous les sous-demi-modules de \$\mathbb{R}\_{\max}^n\$ ne sont pas \$(A, B)\$-invariants, mais on montre que tout demi-module \$\mathcal{M} \subset \mathbb{R}\_{\max}^n\$ contient un sous-demi-module \$(A, B)\$-invariant maximal, qui est noté \$\mathcal{V}\_{\mathcal{M}}^\*(A, B)\$, et qui coïncide avec le lieu des conditions initiales des trajectoires du systèmes qui évoluent entièrement dans \$\mathcal{M}\$. On montre [10] que le plus grand \$(A, B)\$-invariant inclus dans un module de type fini est la "limite" de la suite \$\{\mathcal{V}\_i\}\$, qui est définie par

$$\mathcal{V}_0 = \mathcal{M} ; \mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{M} \cap A^{-1}(\mathcal{V}_i \oplus \text{Im} B) , \text{ pour } i \geq 0 ,$$

où la notation \$A^{-1}\mathcal{V}\$ désigne l'image inverse d'un module \$\mathcal{V}\$, définie par \$A^{-1}\mathcal{V} = \{x \in \mathbb{R}\_{\max}^n \mid Ax \in \mathcal{V}\}\$. Les termes successifs de la suite sont des modules de type finis. On peut calculer itérativement des matrices \$M\_i\$ et \$(C\_i, D\_i)\$ telles que \$\mathcal{V}\_i = \text{Im} M\_i = \text{Cone}(C\_i, D\_i)\$ en calculant une solution de l'équation

$$\begin{pmatrix} C_{i-1}A & C_{i-1}B \\ C & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_i \\ U_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_{i-1}A & D_{i-1}B \\ D & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} M_i \\ U_i \end{pmatrix} .$$

À chaque étape, on calcule successivement \$M\_i\$ et \$U\_i\$ en résolvant cette équation, puis on calcule \$C\_i\$ et \$D\_i\$ par le Théorème 2.1. La limite s'entend comme l'intersection des modules \$\mathcal{V}\_i\$, sous la condition que \$\mathcal{M}\$ est fermé, comme l'exprime le résultat suivant.

**Théorème 2.3.** *L'inclusion \$\mathcal{V}\_{\mathcal{M}}^\*(A, B) \subset \bigcap\_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}\_i\$ est toujours vérifiée [7]. L'égalité*

$$\mathcal{V}_{\mathcal{M}}^*(A, B) = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{V}_i ,$$

*est vérifiée si \$\mathcal{M}\$ est fermé, donc en particulier lorsque \$\mathcal{M}\$ est de type fini [10].*

Il n'y a pas de garantie que  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}^*(A, B)$  soit un demi-module de type fini, et par conséquent il n'y a pas de garantie pour que la suite  $\{\mathcal{V}_i\}$  devienne stationnaire en un nombre fini d'étapes. Par contre, lorsque la suite se stabilise en un nombre fini d'étape, autrement dit il existe un entier  $i$  tel que  $\mathcal{V}_{i+1} = \mathcal{V}_i$ , alors on a  $\mathcal{V}_{\mathcal{M}}^*(A, B) = \mathcal{V}_i$ , donc le demi-module  $(A, B)$ -invariant maximal est de type fini, et calculable avec cet algorithme.

La solution de plusieurs problèmes de commande (voir par exemple [10], [17], [19] et [26]) s'exprime en termes de demi-module  $(A, B)$ -invariant. Le demi-module  $\mathcal{M}$  s'interprète comme une contrainte, ou une spécification que doit satisfaire le système en boucle fermée. Le demi-module  $(A, B)$ -invariant maximal s'interprète alors en termes de solution optimale du problème de commande. Nous abordons dans la section 3.2 la question de la détermination de la loi de commande qui est l'aboutissement d'une telle solution. Nous examinerons en particulier l'existence d'une loi de commande causale, susceptible d'être mise en oeuvre en ligne, et nous rappelons d'abord quelques idées de base à ce sujet.

### 2.3 Opérateurs causaux sur $\mathbb{R}_{\max}^n$

Les opérateurs max-plus linéaires font partie de la famille plus générale des opérateurs topicaux [20]. Ces opérateurs s'expriment en termes des opérations min, max et plus. Une fonction topicale  $u = \phi(x)$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  s'écrit soit comme l'infimum de fonctions max-plus linéaires, ou comme le supremum de fonctions min-plus linéaires. Autrement dit, dans le cas d'une fonction finiment générée, il existe des entiers  $q$  et  $r$ , et des matrices  $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}^{q \times n}$  et  $\beta \in \mathbb{R}_{\max}^{r \times n}$  telles que

$$\phi(x) = \bigvee_{j=1}^q \bigwedge_{k=1}^n (\alpha_{jk} + x_k) = \bigwedge_{j=1}^r \bigvee_{k=1}^n (\beta_{jk} + x_k). \quad (2)$$

La première de ces deux écritures est appelée une forme disjonctive, et la seconde une forme conjonctive. Les fonctions de ce type possèdent deux propriétés caractéristiques. Elles sont monotones, i.e., pour tous vecteurs  $x, x' \in \mathbb{R}_{\max}^n$  tels que  $x \leq x'$ , on a  $\phi(x) \leq \phi(x')$ , et additivement homogène, i.e., pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  et tout scalaire  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ , on a  $\phi(\lambda \otimes x) = \lambda \otimes \phi(x)$ .

De telles fonctions, comme les opérations max-plus linéaires, permettent de modéliser des systèmes à événements discrets. Dans ce contexte, les composantes des vecteurs  $x(k)$  et  $u(k)$  sont les dates d'événements tels que l'activation ou la désactivation d'une ressource. Intuitivement, l'opérateur est causal si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , on observe pour toute date  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$  que  $\phi x = \phi y < \lambda$  ou  $\phi x, \phi y \geq \lambda$ , si  $x_i = y_i < \lambda$  ou  $x_i, y_i \geq \lambda$ , pour  $i = 1$  à  $n$ . Comme le montre Bousch dans un article lumineux [21], cela se traduit par la définition suivante.

**Définition 2.2.** Une fonction  $\phi$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  est causale si pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ , l'égalité  $\min(x_i, \lambda) = \min(y_i, \lambda)$ , pour  $i = 1$  à  $n$ , implique que  $\min(\phi(x), \lambda) = \min(\phi(y), \lambda)$ . Une fonction multivariante est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

Cette définition mène à la caractérisation suivante.

**Théorème 2.4.** Une fonction topicale  $\phi$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  est causale si et seulement si pour tout  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , l'égalité  $\phi(x \wedge 0) \geq \phi(x) \wedge 0$  est vérifiée.

Bousch obtient une caractérisation explicite des fonctions topicales causales, en termes de l'ensemble  $\mathbb{R}_{\max}^+$  des réels positifs complété par  $-\infty$ .

**Théorème 2.5.** Une forme max-plus linéaire de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , de la forme  $f(x) = v^T \otimes x$ , ou  $v \in \mathbb{R}_{\max}^n$ , est causale si et seulement si le vecteur  $v$  est défini sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$ . Une fonction topicale  $\phi$  de  $\mathbb{R}_{\max}^n$  dans  $\mathbb{R}_{\max}$  est causale si et seulement si elle est égale à l'infimum de fonctions max-plus causales.

Les résultats sont initialement présentés pour les fonctions topicales réelles, mais s'étendent aisément à  $\mathbb{R}_{\max}$ . Il convient de noter qu'on ne peut pas directement déduire de ce résultat qu'une expression telle que  $\phi(x) = \bigwedge_{j=1}^r \bigvee_{k=1}^n (\beta_{jk} + x_k)$  ne définit une fonction causale que si la matrice  $\beta$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$ . Par exemple, avec  $n = 2$ , on a pour tout couple  $(x_1, x_2)$  l'égalité  $[(1 + x_1) \wedge (\varepsilon + x_2)] \vee [(1 + x_1) \wedge (-1 + x_2)] = 1 + x_1$ . Cela montre que cette fonction est causale, quoique l'expression formelle qui est à gauche du signe égal soit constituée de termes qui ne sont pas tous causaux.

Nous allons dans la suite utiliser la caractérisation alternative suivante de la causalité.

**Définition 2.3.** *Le sous-demi-anneau des éléments causaux de  $\mathbb{R}_{\max}$  se définit comme suit :*

$$\mathbb{R}_{\max}^+ = \{x \in \mathbb{R}_{\max} \mid x \geq 0 \text{ or } x = \varepsilon\} .$$

**Proposition 2.1.** *Une fonction topicale  $\phi$  définie sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\max}$  est causale si pour tout vecteur  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  vérifiant  $\bigoplus_{i=1}^n x_i = 0$ , on a  $\phi(x) \in \mathbb{R}_{\max}^+$ .*

**Démonstration** D'après le Théorème 2.4, il convient de vérifier l'égalité  $\phi(x \wedge 0) \geq \phi(x) \wedge 0$ . Notons d'abord que tout vecteur  $x \in \mathbb{R}_{\max}^n$  s'écrit sous la forme  $x = \lambda \otimes x'$ , où  $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ , et où  $x'$  est un vecteur satisfaisant les conditions de l'énoncé :  $\bigoplus_{i=1}^n x'_i = 0$ . Si  $\lambda$  est inférieur ou égal à zéro, il est clair que  $x \wedge 0 = 0$ . La condition s'écrit alors  $\phi(x) \geq \phi(x) \wedge 0$ , qui est trivialement satisfaite. Si maintenant  $\lambda$  est supérieur à zéro, on observe successivement que  $\phi(x \wedge 0) = \phi(\lambda x' \wedge 0) = \phi(\lambda(x' \wedge ((-\lambda) \otimes 0)))$ . Du fait que  $(-\lambda) \otimes 0 \leq 0$ , et que  $\phi$  est monotone, on en déduit que  $\phi(x \wedge 0) \geq \phi(\lambda(x' \wedge 0))$ . Ce dernier terme est égal à  $\lambda \otimes \phi(x' \wedge 0)$ , par homogénéité, et majore donc  $\lambda \otimes (\phi(x') \wedge 0)$ , par l'hypothèse faite sur  $x'$ . Ce dernier terme est égal à  $\phi(\lambda x') \wedge (\lambda \otimes 0) = \phi(x) \wedge (\lambda \otimes 0)$ , qui majore  $\phi(x) \wedge 0$ , du fait que  $\lambda$  est supposé être positif. Ceci achève la démonstration.  $\square$

On peut finalement noter que si  $x(k)$  et  $y(k)$  sont deux suites croissantes dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , alors  $\min\{x(k), y(k)\}$  est un opérateur causal. Cela signifie que cet opérateur peut être causalement réalisé à partir de la mesure des dates de franchissement  $x(k)$  et  $y(k)$ . La  $k$ ième activation de la sortie de cet opérateur s'effectue dès que l'un des processus datés par  $x(k)$  ou  $y(k)$  est activé  $k$  fois. Nous utiliserons ce résultat dans la section suivante pour définir un feedback causal.

**Remarque 2.1.** *Il est important de bien noter que la Proposition 2.1 est limitative. L'exemple qui suit montre un retour d'état qui est causal, mais ne remplit pas les conditions de l'énoncé. Il s'agit simplement d'un retour d'état statique et linéaire. On considère le problème défini par les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, M = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

L'équation  $AM \oplus BU = MV$  est vérifiée en choisissant  $U = \begin{pmatrix} -1 \\ \phantom{-1} \end{pmatrix}$  et  $V = \begin{pmatrix} +1 \\ \phantom{+1} \end{pmatrix}$ . Cela par exemple peut être réalisé par la loi de commande  $u(k) = Fx(k)$ , on a dans ce cas  $U = FM$ , avec  $F = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ . Comme nous l'annonçons, cette loi de commande est simplement un retour d'état statique linéaire.

Cela montre qu'une réflexion plus approfondie du problème doit être menée pour trouver des conditions nécessaires et suffisantes de causalité d'une fonction sur  $\mathbb{R}_{\max}^n$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , en particulier dans le cas d'une fonction topicale. Les conditions devraient au moins généraliser le cas d'un retour d'état linéaire, qui est causal s'il est défini sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$

## 3 Invariance par retour d'état

### 3.1 Calcul d'une loi de commande

On a vu que le module  $\mathcal{M} = \text{Im}M$  est invariant contrôlé, lorsqu'il existe des matrices  $U, V$  de dimensions adéquates telles que  $AM \oplus BU = MV$ .

Sous ces conditions, toute loi de commande vérifiant :

$$\begin{cases} u(k) &= Uv(k) \\ x(k) &= Mv(k), \end{cases}$$

pour une séquence  $v(k) \in \mathbb{R}_{\max}^q$ , conduit aux égalités

$$x(k+1) = AMv(k) \oplus BUv(k) = (AM \oplus BU)v(k) = MVv(k), \quad (3)$$

qui montrent que  $x(k) \in \mathcal{M}$ , pour  $k \geq 1$ , si  $x(1) \in \mathcal{M}$ . Autrement dit, une telle loi de commande rend le demi-module  $\mathcal{M}$  invariant pour le système en boucle fermée obtenu en complétant le système initial par la loi de commande. Cette loi de commande n'est pas définie de façon unique. Nous allons montrer qu'il existe une solution maximale, et que cette solution constitue un retour d'état statique.

**Définition 3.1.** On dit que le module  $\mathcal{M}$  est invariant par retour d'état statique s'il existe une loi de commande de la forme  $u(k) = f(x(k))$  telle que la trajectoire du système bouclé reste dans  $\mathcal{M}$  au cours de son évolution si la condition initiale  $x(1)$  est elle-même un élément de  $\mathcal{M}$ . Dans ce cas, une telle fonction  $f$  est dite admissible pour  $\mathcal{M}$ .

**Théorème 3.1.** Étant donné un sous-demi module de type fini de  $\mathbb{R}_{\max}^n$ , soit  $\mathcal{M} = \text{Im}M$ , avec  $M \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times q}$ , les deux affirmations suivantes sont équivalentes.

(i)  $\mathcal{M}$  est invariant contrôlé.

(ii)  $\mathcal{M}$  est invariant par retour d'état statique.

De plus, sous ces conditions, un retour d'état admissible maximal existe, qui s'écrit sous la forme

$$u(k) = U \otimes M^\sharp(x(k)),$$

où  $U$  est la matrice qui intervient dans les caractérisations (ii) et (iii) du Théorème 2.2, et  $M^\sharp(x(k))$  est définie par

$$(M^\sharp(x(k)))_i = - \bigoplus_{j=1}^n \{M_{ji} - x_j(k)\},$$

pour  $i = 1$  à  $q$ .

**Démonstration** On appelle résiduation la fonction  $M^\sharp$  [13]. Pour établir le résultat concernant l'existence de cette solution maximale, on montre d'abord que  $M^\sharp(x(k))$  est la plus grande solution de l'inégalité  $Mv(k) \leq x(k)$ . On observe que d'une part  $M \otimes M^\sharp(x(k)) \leq x(k)$ , et d'autre part que toute solution de  $Mv(k) = x(k)$  satisfait  $v(k) \leq M^\sharp(x(k))$ , et par conséquent la chaîne d'inégalités  $Mv(k) \leq M \otimes M^\sharp(x(k)) \leq x(k)$ . Du fait que les deux extrémités de cette chaîne sont égales, on en déduit que  $M \otimes M^\sharp(x(k)) = x(k)$  s'il existe  $v(k)$  telle que  $Mv(k) = x(k)$ . L'inverse est bien entendu vrai, ce qui achève la démonstration.  $\square$

Le retour d'état maximal introduit dans le théorème est une loi de commande admissible qui réalise l'invariance de  $\mathcal{M}$  pour le système en boucle fermée. On remarque que cette loi de commande est non-linéaire, en général. De plus, une telle loi de commande admissible n'est pas définie de façon unique. La famille des retours d'état admissibles pour un module  $(A, B)$ -invariant donné peut dans certains cas inclure des fonctions max-plus linéaires, mais il est important de signaler qu'un tel retour d'état linéaire n'existe pas toujours. Des contre-exemples sont mentionnés dans [12], [28]. Dans le cas de systèmes sur anneau en général [6], [9], et donc *a fortiori* dans le cas de systèmes sur demi-anneau, il a déjà été observé que l'invariance contrôlée et l'invariance par retour d'état statiques ne sont pas équivalentes. Le Théorème 3.1 est donc une propriété tout à fait particulière du dioïde  $\mathbb{R}_{\max}$ .

On peut aussi définir, à partir des égalités (3), une commande linéaire mais dynamique, dans l'esprit de celle introduite dans [12], en posant  $u(k) = Vv(k)$ , pour  $k \geq 1$ , avec  $v(k+1) = Vv(k)$ , pour  $k \geq 1$ , et



$v(1)$  vérifiant  $Mv(1) = x(1)$ . Cette commande n'est pas un retour d'état, mais une commande prédictive, en *boucle ouverte*, comme on dit.

Dans la plupart des applications de modèles dynamiques max-plus linéaires, la causalité joue un rôle important. Un retour d'état doit être causal afin de pouvoir être mis en oeuvre en ligne. Nous examinons maintenant cette question.

### 3.2 Invariance causale

Ainsi que nous l'avons signalé, un retour d'état statique dans  $\mathbb{R}_{\max}$ , qu'il soit linéaire ou non, n'est pas nécessairement causal. Cette remarque induit la définition qui suit.

**Définition 3.2.** *On dit que le module  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}_{\max}^n$  est un  $(A, B)$ -invariant causal s'il existe pour  $\mathcal{M}$  une loi de commande admissible causale.*

La première question qui se pose est de déterminer si le retour d'état maximal identifié dans le Théorème 3.1 est causal ou non.

**Proposition 3.1.** *Le retour d'état  $u(k) = UM^\sharp(x(k))$  du Théorème 3.1 est causal si les coefficients  $U_{ij} - M_{kj}$  sont tous causaux, pour  $i = 1$  à  $m$ ,  $j = 1$  à  $q$  et  $k = 1$  à  $n$ , du moins si  $M_{kj} \neq \varepsilon$ .*

**Démonstration** Remarquons tout d'abord que ce retour d'état est une fonction vectorielle topocale, qui s'exprime explicitement sous la forme

$$u_i(k) = \bigvee_{j=1}^q \left( U_{ij} + \bigwedge_{l=1}^n (-M_{lj} + x_l) \right).$$

La  $i$ ème composante du vecteur de commande  $u(k)$  s'exprime donc sous la forme conjonctive (2), en prenant  $\alpha_{il} = U_{ij} - M_{lj}$ , pour  $j = 1$  à  $q$  et  $l = 1$  à  $n$  (nous oublions volontairement les indices  $i$  et  $k$  dans cette expression pour en faciliter la lecture). Du fait de la distributivité des opérations min et max, on observe que  $u_i(k)$  peut également s'exprimer sous forme conjonctive. On a

$$\bigvee_{j=1}^q \bigwedge_{k=1}^n (\alpha_{jk} + x_k) = \bigwedge_{l_1, l_2, \dots, l_q=1}^n \left( \bigvee_{j=1}^q (\alpha_{jl_j} + x_{l_j}) \right).$$

Du fait que les indices  $l_j$  sont indépendants les uns des autres, et sont choisis parmi les entiers de 1 à  $n$ , toutes les combinaisons sont présentes, les termes max-plus linéaires doivent être regroupés pour chaque sous-ensemble  $J = \{l_1, l_2, \dots, l_q\}$  de l'ensemble des nombres de 1 à  $n$ . Les coefficients qui apparaissent dans les fonctions max-plus linéaires de la forme conjonctives s'écrivent donc  $\bigvee_{z \in J} \alpha_{za}$ , pour chaque nombre  $a$  et chaque sous-ensemble  $J$ , ou sont égaux à  $-\infty$ .

Ainsi que l'exprime le Théorème 2.5, cette fonction est causale si ces coefficients sont tous des éléments de  $\mathbb{R}_{\max}^+$ . Du fait que tous singletons sont présents parmi les sous-ensembles d'entiers de 1 à  $n$ , on déduit que les coefficients  $\alpha_{ij}$  sont sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$ . Du fait que  $\mathbb{R}_{\max}^+$  est stable pour l'opération max, tous les autres coefficients ont également causaux si cette condition est réalisée.  $\square$

La solution  $U$  qui intervient dans les conditions (ii) et (iii) du Théorème 2.2 n'est pas déterminée de façon unique. On peut commencer par normaliser la matrice  $M$  génératrice du demi-module  $\mathcal{M}$  qui est considéré.

**Définition 3.3.** *On dit que la matrice  $M$  est normalisée si l'élément maximal de chacune de ses colonnes est égal à 0.*

Notons que tout demi-module finiment généré admet une représentation normalisée. On aboutit alors au constat que les coefficients  $-M_{ij}$  sont causaux, ou ne comptent pas dans la définition des composantes de  $M^\sharp(x(k))$ , et donc le retour d'état maximal est causal si  $U$  est définie sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$ , du fait que cet ensemble est fermé pour l'addition usuelle. On aboutit ainsi à la conclusion suivante.

**Proposition 3.2.** *Un module  $\mathcal{M}$  finiment généré est  $(A,B)$ -invariant causal s'il existe une matrice  $U$  sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$  satisfaisant les conditions du Théorème 2.2, la matrice  $M$  étant normalisée.*

**Démonstration** Nous avons déjà noté que si  $M$  est normalisée et  $U$  est causale, alors la Proposition 3.1 montre que le retour d'état maximal est causal, et donc le demi-module considéré est un  $(A,B)$ -invariant causal. La Proposition 2.1 montre aussi le même résultat.  $\square$

### 3.3 Algorithme

Notons pour finir cette partie qu'un algorithme permettant de résoudre l'équation  $AM \oplus BU = MV$  ou l'équation  $C(AM \oplus BU) = D(AM \oplus BU)$  avec une solution  $U$  sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$  peut être présenté. Le principe en est le suivant. Pour chaque colonne  $\mu$  de la matrice  $M$ , on calcule la colonne correspondante dans la matrice  $U$ , qui est un vecteur  $u$ . Il s'agit donc de résoudre l'équation  $C(A\mu \oplus Bu) = D(A\mu \oplus Bu)$ .

**Lemme 3.1.** *Avec les notations précédentes, un vecteur  $u \in \mathbb{R}_{\max}^m$  vérifie l'égalité  $C(A\mu \oplus Bu) = D(A\mu \oplus Bu)$  si et seulement si  $CA\mu \leq DBu \oplus DA\mu$ ,  $DA\mu \leq CBu \oplus CA\mu$  et  $u \leq (CB)^\sharp(DBu \oplus DA\mu) \wedge (DB)^\sharp(CBu \oplus CA\mu)$ .*

**Démonstration** Ce résultat s'obtient en écrivant que l'égalité équivaut aux inégalités dans les deux sens, puis en décomposant ces deux dernières en deux inégalités, et enfin en r siduant les deux des inégalités résultantes qui font intervenir les termes  $CBu$  et  $DBu$ .  $\square$

Pour tout vecteur  $\alpha \in \mathbb{R}_{\max}^m$ , on peut remarquer que la famille  $\mathcal{F}$  définie par la formule

$$\mathcal{F} = \left\{ u \mid u \leq \alpha, u \leq (CB)^\sharp(DBu \oplus DA\mu) \wedge (DB)^\sharp(CBu \oplus CA\mu) \right\}$$

est non-vidé, puisqu'elle contient le vecteur  $\varepsilon$ . On remarque que cette famille est fermée pour l'opération max. En conséquence, elle admet un élément maximal, noté  $u^*$  :

$$u^* = \sup_{u \in \mathcal{F}} u = \bigoplus_{u \in \mathcal{F}} u.$$

Avec cette notation, le Lemme 3.3 se reformule de la façon suivante.

**Corollaire 3.1.** *Il existe un vecteur  $u \in \mathbb{R}_{\max}^m$  tel que  $u \leq \alpha$  et  $C(A\mu \oplus Bu) = D(A\mu \oplus Bu)$  si et seulement si  $CA\mu \leq DBu^* \oplus DA\mu$  et  $DA\mu \leq CBu^* \oplus CA\mu$ .*

**Démonstration** Les inégalités du Lemme 3.3 sont vérifiées en prenant  $u = u^*$ , si les inégalités du Corollaire 3.1 sont satisfaites. Inversement, les inégalités du Corollaire 3.1 impliquent celles du Lemme 3.3, du fait de la définition de  $u^*$  et que  $u \leq u^*$ .  $\square$

Le cas du calcul d'une solution causale se traite de la même manière, en introduisant le concept de projection causale introduit par Cottenceau *et al.* [22] pour le calcul d'un retour d'état linéaire causal. La projection causale  $P^+$  est d'abord définie comme un opérateur de  $\mathbb{R}_{\max}$  dans  $\mathbb{R}_{\max}^+$ , par

$$P^+(v) = \begin{cases} v, & \text{si } v \geq 0, \\ \varepsilon, & \text{si } v < 0, \end{cases}$$

pour tout  $v \in \mathbb{R}_{\max}$ . Cette définition est étendue aux vecteurs  $u \in \mathbb{R}_{\max}^m$  par

$$(P^+(u))_i = P^+(u_i).$$

On aboutit alors à la formulation suivante.

**Corollaire 3.2.** *Il existe un vecteur causal  $u \in \mathbb{R}_{\max}^{+m}$  tel que  $u \leq \alpha$  et  $C(A\mu \oplus Bu) = D(A\mu \oplus Bu)$  si et seulement si  $CA\mu \leq DBu^{+*} \oplus DA\mu$  et  $DA\mu \leq CBu^{+*} \oplus CA\mu$ , avec*

$$u^{+*} = \sup \left\{ u \mid u \leq \alpha, u \in \mathbb{R}_{\max}^{+m}, u \leq P^+((CB)^\sharp(DBu \oplus DA\mu) \wedge (DB)^\sharp(CBu \oplus CA\mu)) \right\}.$$

**Démonstration** La remarque essentielle est que pour tout vecteur  $w \in \mathbb{R}_{\max}^m$ , on a

$$P^+(w) = \sup \{ v \in \mathbb{R}_{\max}^{+m} \mid v \leq w, \}.$$

Les inégalités du Corollaire 3.2 impliquent donc l'existence d'une solution causale satisfaisant les conditions du Lemme 3.3, et inversement.  $\square$

La clé de la vérification de l'existence d'une solution causale réside dans le calcul effectif de  $u^{+*}$ . Ce calcul étant fait, il suffit de vérifier les deux inégalités du Corollaire 3.2. Nous proposons un algorithme de point fixe pour ce calcul. On définit la suite  $\{\sigma(i)\}$ , où  $i \geq 0$ , par

$$\sigma(0) = \alpha, \quad \sigma(i+1) = P^+(\alpha \wedge (CB)^\sharp(DB\sigma(i) \oplus DA\mu) \wedge (DB)^\sharp(CB\sigma(i) \oplus CA\mu)).$$

**Théorème 3.2.** *La suite  $\{\sigma(i)\}$  converge vers  $u^{+*}$  au sens où*

$$u^{+*} = \inf \{ \sigma(i) \mid i \in \mathbb{N} \}.$$

*De plus, si  $\alpha$  et les coefficients des matrices  $A, B, C, D$  et  $M$  sont rationnels, alors la convergence est acquise en un nombre fini d'étapes. Il existe un entier  $k$  fini tel que  $u^{+*} = \sigma(k)$ .*

**Démonstration** Cette démonstration suit le schéma classique. On montre d'abord que la suite  $\sigma(i)$  est décroissante. Cela se fait par récurrence à partir du constat que  $\sigma(1) \leq \sigma(0)$ , du fait que par définition, on a  $\sigma(0) = \alpha$ , et  $\sigma(1) \leq \alpha$ . En appelant  $f(\sigma(i))$  le terme de droite de la définition de  $\sigma(i+1)$ , on observe que la fonction  $f$  est monotone, ce qui permet d'établir la récurrence : on a  $f(\sigma(i)) \geq f(\sigma(i-1))$ , donc  $(\sigma(i+1)) \geq \sigma(i)$ , si  $\sigma(i) \geq \sigma(i-1)$ . On montre ensuite que la suite  $\sigma(i)$  est convergente, ce qui vient du fait qu'elle est bornée par  $\alpha$ . Finalement, si les coefficients sont rationnels, on peut se ramener à un problème où les coefficients sont entiers. La suite converge alors en temps fini puisque  $\mathbb{N} \cup \{-\infty\}$  est noethérien.  $\square$

Il est important, en guise de conclusion, de remarquer que la démonstration classique de Butkovic et Hegedus [15] ne peut pas être facilement adaptée à ce calcul d'une solution causale. La démonstration s'appuie sur le calcul des générateurs du module généré par deux matrices  $P$  et  $Q$ . Dans le cas présent, on choisirait les matrices composites  $P = (CB\ CA\mu)$  et  $Q = (DB\ DA\mu)$ , et le module  $\mathcal{X} = \{y \in \mathbb{R}_{\max}^{m+1} \mid Py = Qy\}$ . La vérification de l'existence d'une solution causale ne peut pas s'appuyer sur cette technique, du fait que la partie causale d'un module de type fini n'est pas, en général, un module de type fini sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$ . Par exemple, avec  $n = 2$ , le module

$$\mathcal{X} = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^2 \mid x_1 \leq x_2 \leq x_1\},$$

est de type fini, généré par les vecteurs  $(0\ 0)^T$  et  $(0\ 1)^T$ . La partie causale de ce module, soit

$$\mathcal{X}^+ = \{x \in \mathbb{R}_{\max}^2 \mid 0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_1\} \cup \{\varepsilon\},$$

est un module sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$  qui n'est pas de type fini. On peut s'en convaincre en observant que  $(0\ 0)^T$  doit appartenir à une famille génératrice, et que les autres générateurs sont tous de la forme  $(\beta_i\ \gamma_i)^T$ , avec  $\beta_i \geq 0$  et  $\gamma_i \geq 0$ , et  $\beta_i \neq 0$  ou  $\gamma_i \neq 0$ . Pour toute famille génératrice finie, on peut donc définir deux nombres  $\beta^*$  et  $\gamma^*$ , tels que  $\beta^* = \min\{\beta_i \mid \beta_i > 0\}$  et  $\gamma^* = \min\{\gamma_i \mid \gamma_i > 0\}$ . On constate que les vecteurs de la région définie par  $\{x \mid 0 \leq x_1 < \beta^*, x_1 < x_2 < \gamma^*\}$  ne sont pas combinaison linéaire causale des vecteurs

de cette famille. Le module  $\mathcal{X}^+$  est bien un module sur  $\mathbb{R}_{\max}^+$ , mais il n'est pas finiment généré. Cette remarque justifie la proposition d'un algorithme de vérification de l'existence d'une solution causale à l'équation  $C(A\mu \oplus Bu) = D(A\mu \oplus Bu)$  que nous avons effectuée.

La méthode proposée repose sur l'introduction d'un majorant  $\alpha$ . Le choix de ce majorant ressort de considérations pratique plutôt que d'un calcul de bornes. Par ailleurs la complexité de l'algorithme reste à examiner.

## 4 Exemple

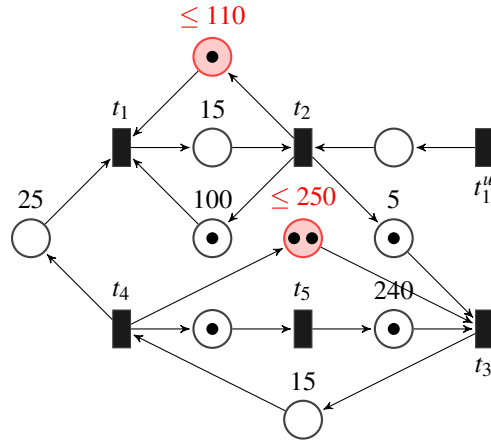


Figure 1: Un graphe d'événements temporisés, les durées de séjour des jetons dans les places en rouge sont soumises à une contrainte de temps.

Le comportement dynamique du graphe d'événements temporisés représenté dans la figure (1) s'obtient avec le système linéaire en max-plus suivant. Cet exemple provient de [28], il a été également étudié dans [26] et [27].

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes u(k), \quad (4)$$

avec les matrices définies ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} \cdot & 100 & \cdot & 280 \\ \cdot & 115 & \cdot & 295 \\ \cdot & 5 & \cdot & 240 \\ \cdot & 20 & \cdot & 255 \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

Les contraintes de temps de séjour, illustrées par des places rouges dans la figure (1), sont respectées quand le vecteur d'état vérifie les inégalités suivantes :

$$x_1(k) \leq 110 \otimes x_2(k-1) \quad (5)$$

$$x_3(k) \leq 250 \otimes x_4(k-2). \quad (6)$$

Afin de mettre les contraintes sous la forme :

$$C_x \otimes x \leq x, \quad (7)$$

le système (4) est étendu :

$$A_e = \begin{pmatrix} \cdot & 100 & \cdot & \cdot & \cdot & 280 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 115 & \cdot & \cdot & \cdot & 295 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & 240 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 20 & \cdot & \cdot & \cdot & 255 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot \end{pmatrix} B_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}.$$

La matrice  $C_x$  contenant  $\varepsilon$  partout sauf  $C_x(6,1) = -110$  et  $C_x(8,3) = -250$ . Le module  $\mathcal{K} = \text{Im}C_x^*$  n'est pas invariant contrôlé. Il convient alors de rechercher un module  $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}$ , qui vérifie l'égalité  $A_e R \oplus B_e U = RW$ . Le module décrivant les contraintes exprimées dans (7) est également décrit par :

$$(I_8 \oplus C_x) \otimes x = D \otimes x, D = I_8. \quad (8)$$

Le plus grand module invariant contrôlé, noté  $\mathcal{R}^*$ , inclu dans  $\mathcal{K}$  est engendré par la matrice :

$$R = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -55 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -55 & -185 & -55 & -70 & -130 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -185 & -195 & -195 & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -110 & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & -245 & -300 & -195 & -205 & -205 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & -250 \end{pmatrix}.$$

En effet, les matrices  $U$  et  $W$  suivantes vérifient l'égalité  $A_e R \oplus B_e U = RW$ .

$$U = (\dots 140 \ 0 \ 190 \ 125 \ 115 \ \dots),$$

$$W = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 0 & -55 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & -55 & \cdot & \cdot & -70 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 75 & 20 & \cdot & 115 & 115 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 170 & 115 & 245 & 180 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \cdot & \cdot & 55 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 140 & 125 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 140 & \cdot & 140 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 100 & 45 & 100 & 100 & 100 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 5 & -50 & 55 & 45 & 45 & \cdot \end{pmatrix}.$$

Cet exemple complète les résultats de [28], où est proposée une méthode pour prendre en compte une seule contrainte. Les auteurs y précisent explicitement (dans le Théorème 2), que deux contraintes simultanées telles que (5) et (6) ne peuvent pas être prises en compte par un retour d'état linéaire. Comme nous l'avons montré, un retour d'état non-linéaire permet que le système en boucle fermée respecte ces deux contraintes.

## 5 Conclusions

Nous avons discuté dans cet article du concept d'invariance contrôlée pour les systèmes max-plus linéaires. Nous avons rappelé simplement les propriétés essentielles de cette famille de demi-modules, et particulièrement ses caractérisations algébriques. Le résultat de base est que l'invariance contrôlée est équivalente à l'invariance par retour d'état statique. Comme illustré dans l'exemple final, ce feedback est en général une fonction topicale, plutôt qu'un retour d'état linéaire. Un tel retour d'état peut être mis en oeuvre en pratique, ce qui procure les avantages d'une commande bouclée en ligne, alors que

les retours d'état dynamiques décrits dans la littérature sont en fait composés sous la forme feedback-feedforward, susceptibles d'être en tout ou partie en boucle ouverte.

La seconde contribution est une première étude de l'invariance contrôlée causale et de l'existence d'un retour d'état admissible et causal rendant un module invariant pour le système en boucle fermée. L'exemple traité illustre aussi l'utilité de ce deuxième concept.

## Références

- [1] G. Basile, G. Marro, *Controlled and conditioned invariant subspaces in linear system theory*, J. Opt. Th. & Appl., Vol. 33, pp. 306-315, 1969.
- [2] W. M. Wonham, A. S. Morse, *Decoupling and pole assignment in linear multivariable systems: a geometric approach*, SIAM J. Control, Vol. 8, pp. 1-18, 1970.
- [3] W. M. Wonham, *Linear Multivariable Control: A Geometric Approach*, 3rd ed. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [4] G. Basile, G. Marro, *Controlled and Conditioned Invariant in Linear System Theory*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New York, 1992.
- [5] M. L. J. Hautus, *Controlled invariance in systems over ring*, in: D. Hinrichsen, and A. Isidori (Eds.), *Proceeding of the Joint Workshop on Feedback and Synthesis of Linear and Nonlinear Systems*, Lecture Notes in Control and information Sci., vol 39, Springer, New York, pp. 107-122, 1982.
- [6] G. Conte, A. M. Perdon, *The disturbance decoupling problem for systems over ring*, SIAM J. Control Optim., Vol. 33, pp. 750-764, 1995.
- [7] R. Katz, *Max-plus (A, B)-invariant spaces and control of timed discrete-event systems*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 52, pp. 229-241, 2007.
- [8] N. Ito, H. Inaba, *Dynamic feedback (A,B)-invariance of submodules for linear systems over commutative Noetherian domains*, Lin. Algebra Appl. 282, pp. 123-129, 1998.
- [9] M. Di Loreto, J.-F. Lafay, J. J. Loiseau, *Some Remarks on Duality over a Commutative Ring*, Math. and Computers in Simulation, Vol. 76, pp. 375-387, 2008.
- [10] M. Di Loreto, S. Gaubert, R. D. Katz, J. J. Loiseau, *Duality between invariant spaces for max-plus linear discrete event systems*, SIAM J. Control Optim., Vol. 48, pp. 5606-5628, 2010.
- [11] L. Hardouin, Y. Shang, C.-A. Maia, B. Cottenceau, *Observer-based controllers for max-plus linear systems*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 62, pp. 2153-2165, 2017.
- [12] C. Cardenas, J. J. Loiseau, C. Martinez, *Controlled invariance and dynamic feedback for systems over semirings*, in: *Proceedings SIAM Conference on Control Systems*, SIAM CCS 2015, Paris, 2015.
- [13] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*, Wiley, Chichester, UK, 1992.
- [14] J. Berstel, C. Reutenauer, *Rational series and their languages*, EATCS monographs on theoretical computer sciences, Vol. 12, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [15] P. Butkovič, G. Hegedüs, *An elimination method for finding all solutions of the system of linear equations over an extremal algebra*, Ekonomicko-matematicky Obzor, Vol. 20, no. 2, pp. 203-215, 1984.
- [16] X. Allamigeon, S. Gaubert, É. Goubault, *The tropical double description method*, In: *Proceedings of the 27th Annual Symposium on the Theoretical Aspects of Computer Science STACS 2010*, Nancy, France. pp.47-58,

2010.

- [17] C. Maia, C. R. Andrade, L. Hardouin, *On the control of max-plus linear systems subject to state restriction*, Automatica, Vol. 47, pp. 988-992, 2011.
- [18] V. M. Mariano Gonçalves, C. A. Maia, L. Hardouin, *On max-plus dynamical system theory: the regulation problem*, Automatica, Vol. 75, pp. 202-209, 2017.
- [19] S. Amari, I. Demongodin, J. J. Loiseau, C. Martinez, *Max-plus control design for temporal constraints meeting in timed event graphs*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 57, pp. 462-467, 2012.
- [20] J. Gunawardena, *An introduction to idempotency*, in J Gunawardena (Ed.), Idempotency, Cambridge University Press, pp. 1-49, 1998.
- [21] T. Bousch, *Fonctions topicales et causalité*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society – Simon Stevin, Vol. 13, pp. 489-498, 2006.
- [22] B. Cottenceau, L. Hardouin, J.-L. Boimond, J.-L. Ferrier, *Synthesis of greatest linear feedback for timed-event graphs in dioid*, IEEE Trans. Automatic Control, Vol. 44, pp. 1258-1262, 1999.
- [23] G. L. Litvinov, S. N. Sergeev (Eds), *Tropical and idempotent mathematics and applications*, Series Contemporary Mathematics, Vol. 616, AMS, 2014.
- [24] C. Cárdenas, J. Cardillo, J. J. Loiseau, C. Martinez, *Control Problem in Max Plus Linear Model with Temporal Constraints*. Revista Iberoamericana de Automatica e Informatica Industrial, Vol. 13, pp. 438-449, 2016.
- [25] V. M. Gonçalves, C. A. Maia, L. Hardouin, *On the Steady-State Control of Timed Event Graphs With Firing Date Constraints*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 61, pp. 2187-2202, 2016.
- [26] V. M. Gonçalves, Carlos Andrey Maia, Laurent Hardouin, *On max-plus linear dynamical system theory: The regulation problem*, Automatica, Vol. 75, pp 202-209, January 2017.
- [27] R. Jacob, S. Amari, *Output feedback control of discrete processes under time constraint: application to cluster tools*, International Journal of Computer Integrated Manufacturing, Vol. 30, pp. 880-894, 2017.
- [28] C. Kim, T.-E. Lee, *Feedback control of cluster tools for regulating wafer delays*, IEEE Transactions on Automation Science and Engineering, Vol. 13, No. 2, pp. 1189-1199, 2016.