



Parallélisation de l'équation de la chaleur sous MPI et FFTW

Tarik Chakkour

► To cite this version:

| Tarik Chakkour. Parallélisation de l'équation de la chaleur sous MPI et FFTW. 2018. hal-01700612

HAL Id: hal-01700612

<https://hal.science/hal-01700612>

Preprint submitted on 5 Feb 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Parallélisation de l'équation de la chaleur sous MPI et FFTW

Tarik Chakkour

Université Bretagne Loire, UMR 6205, LMBA, F-56000 Vannes, France

12 décembre 2017

Résumé. Nous présentons dans cet article la méthode numérique permettant de paralléliser l'équation de la chaleur avec la bibliothèque MPI en utilisant plusieurs schémas numériques comme la méthode d'Euler et le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. Le passage entre l'espace physique et l'espace spectral est nécessaire pendant l'étape de la parallélisation.

Mots-clés : Équation de transfert de la chaleur, parallélisation, schémas numériques, MPI.

Abstract. We present in this paper the numerical method for parallelizing the heat equation with using the MPI library and several numerical schemes such as the Euler method and Runge-Kutta scheme 4th order. The transition between physical space and spectral space is necessary for the step of parallelization.

Keywords : Heat conduction equation, parallelization, numerical schemes, MPI.

1 Introduction

L'équation de la chaleur est une équation aux dérivées partielles parabolique, pour décrire le phénomène physique de conduction thermique, introduite initialement en 1811 par Jean Baptiste Joseph Fourier. Cet équation permet une grande amélioration à la modélisation mathématique des phénomènes, en particulier pour les fondements de la thermodynamique, et qui ont entraîné aussi des travaux mathématiques très importants pour les rendre rigoureuses, véritable révolution à la fois physique et mathématique, sur plus d'un siècle.

Nous nous référons l'article [1] qui décrit une méthode de modélisation de l'évolution de la température tissulaire au cours du temps. Dans cet article, l'équation de transfert de bio-chaleur est résolue algébriquement après une transformation de Fourier sur les coordonnées spatiales. L'article [10] propose une nouvelle méthode pour résoudre l'équation de conduction de chaleur unidimensionnelle. Elle traite un algorithme parallèle d'optimisation de l'essaimage de particules hybrides pour réduire le coût de calcul. Nous renvoyons le lecteur à d'autres travaux [2, 3, 4, 9] permettant de donner une description sur la parallélisation de l'équation de la chaleur.

La résolution en parallèle des équations aux dérivées partielles est un sujet de recherche important dans la communauté du calcul scientifique comme le démontrent les résultats scientifiques. En même temps, ces dernières années, les méthodes numériques ont fait l'objet de nombreuses discussions. Dans ce papier, avec des schémas numériques peu artificielles et avec une littérature sur Fourier, nous avons réussi à résoudre l'équation de la chaleur, en utilisant l'algorithme de transformée de Fourier rapide qui joue un rôle important dans ces méthodes. L'originalité de notre étude est l'adaptation des schémas temporels, et la librairie FFTW qui est une bibliothèque parallélisable, à résoudre l'équation de la chaleur d'une manière très robuste.

2 Turbulence en 2D

Comme il existe dans la littérature mathématique un couplage entre l'équation de la chaleur et celle de Navier-Stokes. Nous commençons par donner quelques éléments dans la théorie de la turbulence en 2D. On considère la vorticité ω , qui est une fonction indéfiniment différentiable à support compact sur le domaine $D = [0, 2\pi] \times \mathbb{R}^2$, avec la condition de périodicité en temps de longueur 2π :

$$\omega(2\pi, x, y) = \omega(x, y), \quad (1)$$

et la condition de D  richlet :

$$\omega(0, x, y) = \omega_0(x, y). \quad (2)$$

On définit cette vorticité comme c'était la rotationnelle du champs de vitesse $U(x, t)$, c'est-à-dire :

$$\omega(t, x, y) = \text{rot}(U(t, x, y)). \quad (3)$$

La vorticité $\omega(t, x, y)$ est de classe $C^\infty(D)$ sur D . Il existe alors un compact K de D telle que la vorticité est nulle en dehors de K . Les statistiques de la turbulence bidimensionnelle sont avant tout gouv  rn  es par le transport de la vorticité dans le mouvement du fluide. Définissons Z par l'enstrophie, qui est l'équivalent de l'énergie cinétique en ce qui concerne la vorticité autrement dit :

$$Z(t) = \frac{1}{2} \int \omega^2(t, x, y) dx dy. \quad (4)$$

Et une autre quantité appelée énergie, c'est l'énergie par unité de masse donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int U^2(t, x, y) dx dy. \quad (5)$$

Nous annonçons le Théorème d'Helmoltz comme suit : la vorticité est conservée le long des trajectoires des particules fluides, si et seulement si, la viscosité est nulle, autrement dit quelque soit la variable temporelle. Nous avons tout le long de C :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \int \omega(t, x, y) = \int \omega(x, y) dl, \quad (6)$$

où C est une trajectoire fermée dans $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \partial_t \left(\int \omega(t, x, y) dl \right) &= \int \partial_t(\omega(t, x, y)) dl, \\ &= \int -U(t, x, y) \cdot \partial_x \omega(t, x, y) + \nu \cdot \nabla^2 \omega(t, x, y) dl, \\ &= \int -U(t, x, y) \cdot \partial_x \omega(t, x, y) + \nu \cdot \nabla^2 \omega(t, x, y) dl, \\ &= \int \text{div } U(t, x, y) \cdot \omega(t, x, y) dl + \nu \cdot \int \nabla^2 \omega(t, x, y). \end{aligned} \quad (7)$$

En effet, nous intégrons sur une courbe fermée. Par conséquent, la restriction de $U \cdot \omega(t, x, y)$ et $\nu \cdot \omega(t, x, y)$ sur le bord du domaine D est nulle. Si $\nu = 0$, alors l'intégrale de départ est nulle car la divergence de champs de déplacement est nulle. D'où la conservation de la vorticité tout le long de la courbe C . Nous montrons d'une manière similaire le sens inverse. D'où l'équivalence. Nous allons maintenant montrer que l'énergie E et l'enstrophie Z se sont reliées par les équations suivantes :

$$\partial_t Z = -\nu \cdot \|\nabla \omega\|_{L^2(D)}^2 \quad (8)$$

$$\partial_t E = -\nu \cdot Z \quad (9)$$

Dans un premier temps, nous montrons l'expression (8) de l'enstrophie Z . Nous rappelons que l'enstrophie Z est définie par la relation 4, en dérivant par rapport au temps, nous trouvons :

$$\partial_t Z = \int \omega(t, x, y) \cdot \partial_t \omega(t, x, y) dx \cdot dy, \quad (10)$$

Comme nous intégrons sur D , et en raison de la condition de périodicité de la vortacité $\omega(t, x, y)$, l'intégrale définie par (10) se simplifie comme suit :

$$\int \left(\nu \nabla^2 \omega(t, x, y) + \operatorname{div} U(t, x, y) \cdot \omega(t, x, y) \right) \cdot \omega(t, x, y) dx \cdot dy. \quad (11)$$

Ensuite, nous utilisons le fait que :

$$\nabla^2(\omega) = \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \omega), \quad (12)$$

et que le champs de déplacement est à divergence nulle, et par une intégration par parties, l'intégrale définie par (11) est définie par :

$$\int -\nu (\nabla \omega(t, x, y))^2 dx \cdot dy. \quad (13)$$

Deuxièmement, nous allons montrer l'expression (9) de l'énergie E . Ensuite, nous intégrons par rapport au variable t afin d'obtenir :

$$\begin{aligned} \partial_t E &= \int (-U(t, x, y) \cdot \nabla U(t, x, y) + \nu \nabla^2 U(t, x, y) - \nabla p(x, y)) \cdot U(t, x, y) dx \cdot dy, \\ &= \int \operatorname{div} U(t, x, y) \cdot p(t, x, y) dx \cdot dy - \frac{1}{2} \int U(t, x, y) \cdot \nabla (\|\nabla \omega\|_{L^2}^2) dx \cdot dy, \\ &= \int \operatorname{div} U(t, x, y) \cdot (p(t, x, y) + \frac{1}{2} \nabla U^2(t, x, y)) dx \cdot dy - \int \nu \cdot \operatorname{rot}(U(t, x, y)) \cdot \operatorname{rot}(U(t, x, y)) dx \cdot dy, \\ &= \int \operatorname{div} U(t, x, y) \cdot (p(t, x, y) + \frac{1}{2} \nabla U^2(t, x, y)) dx \cdot dy - \int \nu \cdot \operatorname{rot}(U(t, x, y)) \cdot \operatorname{rot}(U(t, x, y)) dx \cdot dy. \end{aligned} \quad (14)$$

Nous simplifions cette expression pour obtenir :

$$\partial_t E = -\nu \int \operatorname{rot}(U(t, x, y))^2 dx \cdot dy. \quad (15)$$

La dynamique des systèmes bidimensionnels turbulents est caractérisée par l'existence du phénomène du double cascade, c'est à dire il y a éventuellement deux cascades d'énergie et d'enstrophie découvertes par Kraichnan. Il y a conservation soit de l'énergie cinétique soit de l'enstrophie. Dans un cas, elle entraîne un transfert d'énergie des petites échelles vers les grandes échelles (cascade inverse d'énergie). Dans l'autre cas, il y a un transfert de l'enstrophie d'une grande échelle vers les petites échelles (cascade directe d'enstrophie). La cascade inverse d'énergie se résulte principalement de l'apparition de grandes structures dans l'écoulement. C'est dû à un phénomène "d'agrégation" lié par la fusion de grandes tourbillons.

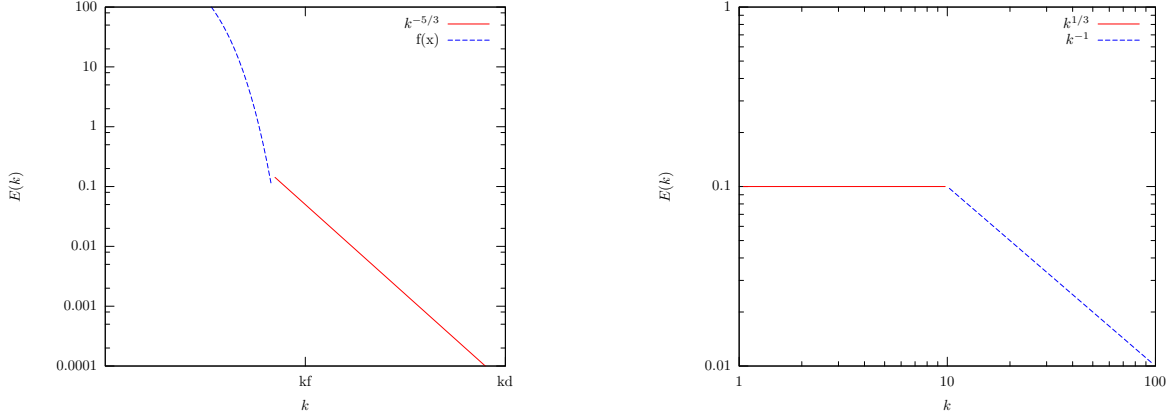


FIGURE 1: Double cascade

D'autre part pour la cascade d'énstrophie, Kraichnan a proposé des rectifications par rapport aux prédictions théoriques. Si on suppose en effet que les structures cohérentes de la turbulence bidimensionnelle sont à l'origine de cette non-universalité, alors les spectres d'énstrophie ne suivent pas vraiment les lois $k^{1/3}$ et k^{-1} prédites par les théories de Batchlor et Kraichnan. Dans le spectre e tridimensionnel de l'énergie cinétique turbulente (Figure 1), il existe trois zones :

- pour les bas nombres d'onde $k < k_f$ (où k_f indique la borne supérieure du domaine de nombre d'onde dans lequel est introduite l'énergie dans le système), l'évolution dépend de la manière dont l'énergie est échangée entre l'écoulement moyen et l'écoulement turbulent.
- dans l'intervalle inertiel $k_f < k < k_d$ (où k_d représente la valeur du nombre d'onde correspondant à la dimension à partir de laquelle l'énergie cinétique est dissipée), l'énergie est transférée sans dissipation vers les grands nombres d'onde. Un comportement universel est observé. Il ne dépend pas du mécanisme qui génère la turbulence.
- pour les hauts nombres d'onde $k_d < k$, les effets de la viscosité deviennent significatifs. Il y a dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

3 Schémas numériques

Nous voulons résoudre l'équation différentielle avec condition initiale suivante :

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), & t \in [0, T] \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (16)$$

où f est une fonction régulière et $x_0 \in \mathbb{R}^d$. On cherche à calculer une approximation de la solution du problème de Cauchy. Pour cela, nous fixons uniformément sur l'intervalle $[0, T]$ le pas de subdivision h . La solution x du problème de Cauchy est approchée par une fonction affine sur chacun des intervalles $[t_n, t_{n+1}]$ où $t_n = nh$. Il suffit donc de définir la valeur de x_n de cette fonction en t_n , pour tout entier n compris entre 0 et $\frac{T}{h}$.

3.1 Schéma d'Euler

Nous allons maintenant décrire le schéma d'Euler implicite. Soit $a \in \mathbb{R}$, nous nous intéressons au problème de Cauchy linéaire

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (17)$$

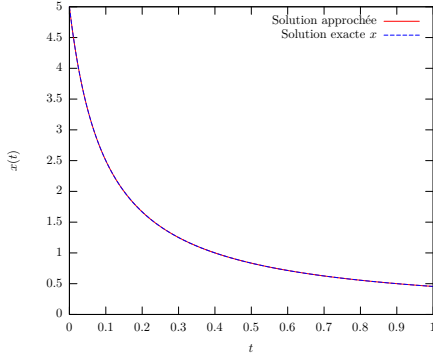


FIGURE 2: Approximation de la solution de $x' = -2x$ avec $x_0 = 10, h = 0.1$ sur un intervalle $[0.1, 1]$.

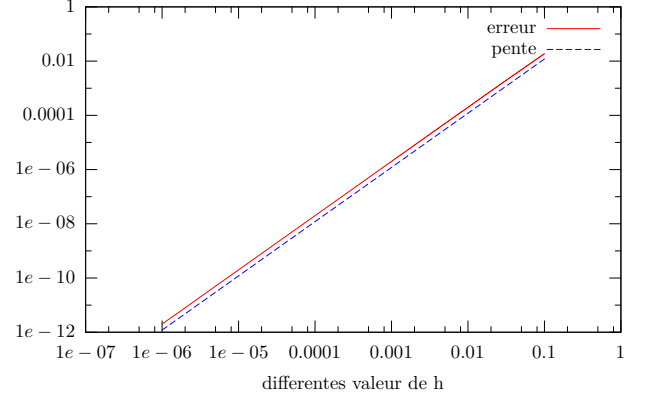


FIGURE 3: Ordre de schéma d'Euler explicite.

L'équation d'Euler explicite est définie par une approximation d'ordre 1, partant d'une valeur initiale x_0 . Nous obtenons dans ce cas :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n). \quad (18)$$

Nous obtenons dans ce cas :

$$x_{n+1} = x_n + hax_{n+1}, \quad (19)$$

ou encore

$$x_n = (1 - ha)x_{n+1}. \quad (20)$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons la solution $x(t_n)$ définie par :

$$x_n = x_0 \left(1 - \frac{aT}{n}\right)^{-n}. \quad (21)$$

Nous allons maintenant décrire le schéma d'Euler explicite du problème de Cauchy défini par la relation (17). En partant d'une valeur initiale x_0 . On obtient dans ce cas :

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+1}, x_{n+1}). \quad (22)$$

ou encore :

$$x_{n+1} = (1 + ah)x_n, \quad (23)$$

d'où :

$$x_n = \left(1 + \frac{aT}{n}\right)^n. \quad (24)$$

On reconnaît que la suite définie par (24) converge vers e^{aT} . Ce qui implique que la méthode d'Euler converge bien. Nous présentons dans la Figure 2 la solution exacte x et la solution approchée x_h pour le schéma d'Euler explicite avec $T = 1$, $a = -2$, $x_0 = 1$, et le pas $h = 0.1$. Nous présentons dans la Figure 3 l'ordre d'Euler explicite.

3.2 Méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

La méthode de Runge-Kutta RK4 d'ordre 4 est une méthode qui fournit une solution approchée du problème de Cauchy (17) avec une erreur du même ordre que celle obtenue par le développement en série de Taylor d'ordre 4. Elle est basée sur le calcul de y_{k+1} comme suit :

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6}, \quad (25)$$

avec f_1, f_2, f_3 et f_4 sont définis par :

- f_1 est la pente au début de l'intervalle de taille h ;
- f_2 est la pente au milieu de l'intervalle, en utilisant la pente f_1 pour calculer la valeur de y au point $t_n + \frac{h}{2}$ par la méthode d'Euler ;
- f_3 est de nouveau la pente au milieu de l'intervalle, mais obtenue cette fois en utilisant la pente f_2 pour calculer y ;
- f_4 est la pente à la fin de l'intervalle, avec la valeur de y calculée en utilisant f_3 .

Plus formellement :

$$\begin{cases} f_1 = f(t_k, y_k), \\ f_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_1}{2}), \\ f_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{hf_2}{2}), \\ f_4 = f(t_k + h, y_k + hf_3). \end{cases}$$

La méthode RK4 se résout de problème de Cauchy. La valeur de la fonction $f(t, x(t))$ correspond à valeur de la pente pour chaque approximation :

$$\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}. \quad (26)$$

Soit la fonction f définie par $f(t, x(t)) = -2x(t)^2$, avec un pas de discrétisation $h = 0.1$. Nous fixons la condition initiale par $x_0 = 5$. Traçons les deux solutions exacte et approchée comme les montrent les Figures 4 et 5. Nous remarquons tant que le pas est plus fine les deux graphes sont adjacentes. Pour un pas de temps h fixé, plus un schéma est précis (plus l'erreur est petite), mieux c'est : ceci est traduit par l'ordre du schéma numérique. Plus un schéma est d'ordre faible, plus il faudra prendre un pas de temps petit pour avoir une solution approchée précise (et donc il faudra faire plus de calcul). Le schéma d'Euler est d'ordre 1 et donc peu précis. Tandis que le schéma de Runge-Kutta est d'ordre 4, il est bien précis. Nous présentons dans les deux Figures (6) et (7) l'ordre du schéma de Runge-Kutta d'ordre 4.

4 La bibliothèque FFTW

La bibliothèque de transformation rapide de Fourier FFTW, s'utilise de façon plus exploitable si on possède plusieurs processeurs. En effet, sa mémoire d'implémentation était basé sur la bibliothèque de calcul parallèle MPI. C'est pour cette raison, il y a deux versions de FFTW. La première 2.1.5 est déjà parallélisée, l'autre qui n'est pas parallélisée est la version 3.1.2. Nous nous référons le document [6, 5, 7] qui décrit l'implémentation de cette librairie.

Étant donné N un entier fixé. Nous définissons la fonction f par $f(x, y) = \cos(x)$ avec $x = 2\pi \frac{(i-1)}{N}$, où i est un entier compris entre 1 et N . Dans le cas d'utilisation de la FFTW direct, de réel vers complexe, nous présentons dans la Figure 8 la transformée de Fourier de cette fonction f .

5 Résolution de l'équation de la chaleur par la méthode RK4

Il est intéressant de remarquer que l'équation de la chaleur, introduite initialement pour décrire la conduction thermique, apparaît également dans d'autres branches de la physique théorique. Elle permet par exemple de décrire

- le phénomène de la **diffusion** ;

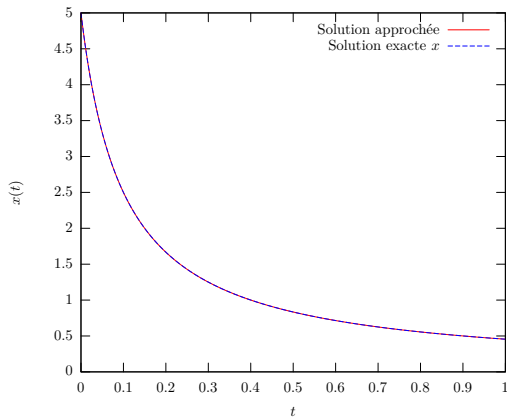


FIGURE 4: Approximation de la solution de $x' = -2x^2$ avec $x_0 = 5$, $h = 0.1$ sur un intervalle $[0.1, 1]$

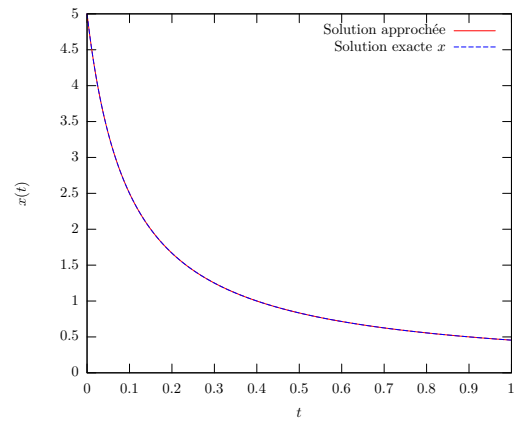


FIGURE 5: Approximation de la solution de $x' = -2x^2$ avec $x_0 = 5, h = 10^{-4}$.

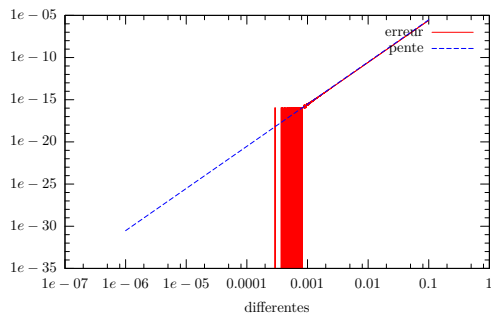


FIGURE 6: Ordre de schéma de Runge-Kutta sur une précision de zéros machine.

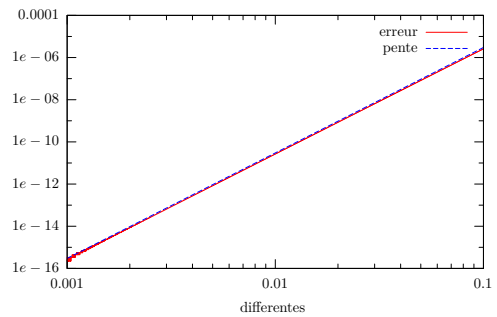


FIGURE 7: Ordre de schéma de Runge-Kutta sur un intervalle $[0.001 : 0.1]$

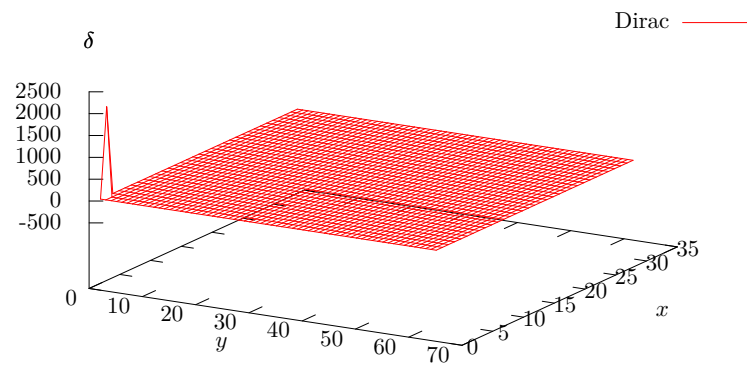


FIGURE 8: Graphe FFTW direct pour le cas réel vers complexe

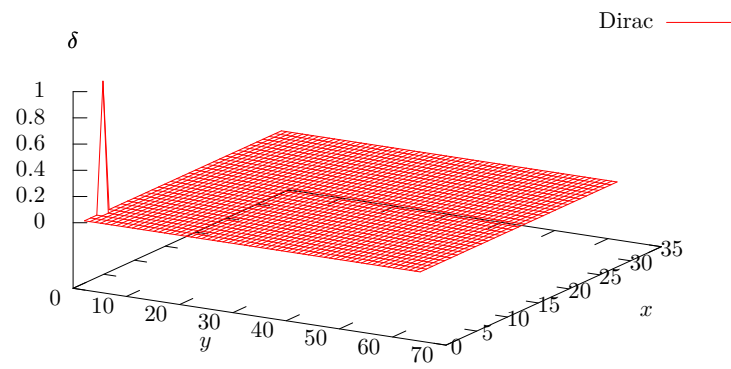


FIGURE 9: Graphe de Dirac

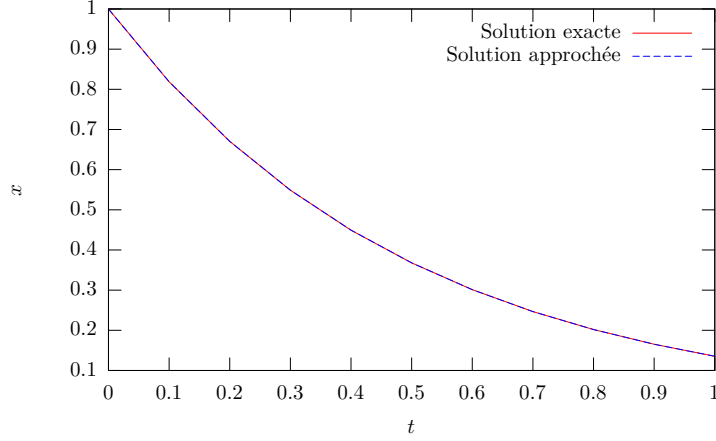


FIGURE 10: Résolution numérique de l'équation de la chaleur par Runge-Kutta d'ordre 4 dans l'espace spectrale sur l'intervalle $[0, 1]$

— certains aspects probabiliste du **mouvement brownien** ;
On veut résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace physique :

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = c^2 \nabla^2 a(x, t), \quad (27)$$

C'est la seconde équation en importance dans les connaissances d'un ingénieur. Physiquement le variable c désigne un scalaire. Pour question de simplicité on considère $c^2 = -(i^2 + j^2)$, en effet on veut résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace spectrale. $a(x, t)$ est une matrice réelle à coefficients complexes $a_{i,j}$. Afin de résoudre l'équation de la chaleur dans l'espace physique, on va résoudre dans l'espace spectrale l'équation de la chaleur suivante :

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = a(x, t). \quad (28)$$

On rappelle que dans ce cas il y a deux types de condtions, la première est de Dirichlet $a(x, 0) = 1$, l'autre est la condition de périodicité $a(x + h) = a(x, t)$, on choisit un pas de temps $h = 10^{-3}$. La vérification des résultats se fait par tracer les deux solutions exacte et approchée dans l'espace spectrale comme le montre la Figure 10. Afin de simplifier la recherche la forme de solution dans une une dimension d'espace. Nous posons la solution comme étant le produit de deux fonctions à variables séparées

$$a(x, t) = v(x)w(t). \quad (29)$$

Cela nous ramène à la solution de deux équations différentielles, les expressions de chaque membre de droite et de gauche ne peuvent être en tout temps égales que si elles sont égales à une constante arbitraire k .

$$\begin{cases} v'' - kv = 0. \\ w' - kc^2w = x_0. \end{cases} \quad (30)$$

On obtient très simplement des fonctions trigonométriques en espace, c'est en fait une série de Fourier que l'on construit et des exponentielles. La solution générale sera évidemment une combinaison linéaire de toutes ces formes de solutions. C'est donc une série trigonométrique qui représente la solution générale à cet équation. Par sumétrie, et par de condition de périodicité, nous obtenons la solution sous la forme de combinaison de fonction cosinus. L'équation (28) est obtenue par la transformation de Fourier de l'équation aux dérivées partielles (27). L'équation (28) est résolue par le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4. La Figure montre les deux solutions exacte et approché de l'équation (28) sur l'intervalle $[0, 1]$

5.1 Résolution avec une fonction random

En Fortran 90, la fonction **rand()** permet de générer à chaque séquence différente, un nombre aléatoire. Ainsi, après avoir initialisé le générateur aléatoire grâce aux procédures **srand** et **seed** où **seed** étant un entier fixé. L'appel se fera sous la forme **call srand(seed)**. Alors la fonction **rand()** renvoie un nombre aléatoire. On initialise une fonction random dans l'espace spectrale. la résolution de l'équation de la chaleur dans l'espace physique montre que la solution prend une forme d'une fonction cosinus avec un pas de temps plus élevée, comme montrent les Figures 11, 12 et 13.

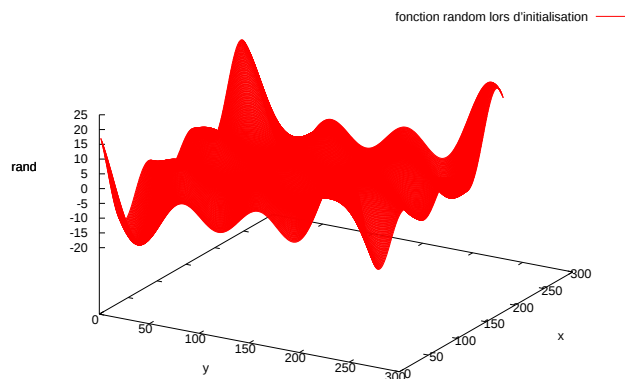


FIGURE 11: Résolution de l'équation de la chaleur avec la fonction random pour un premier pas

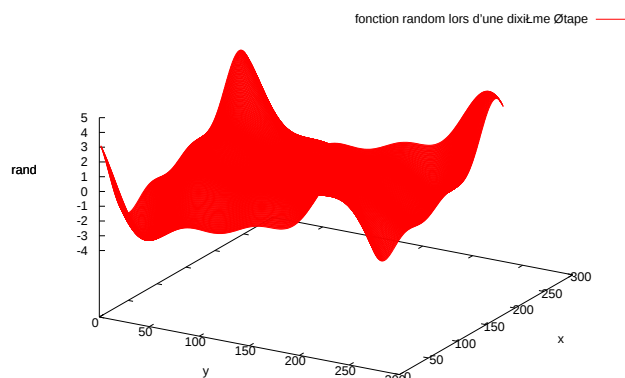


FIGURE 12: Résolution de l'équation de la chaleur avec la fonction La random après 10 pas

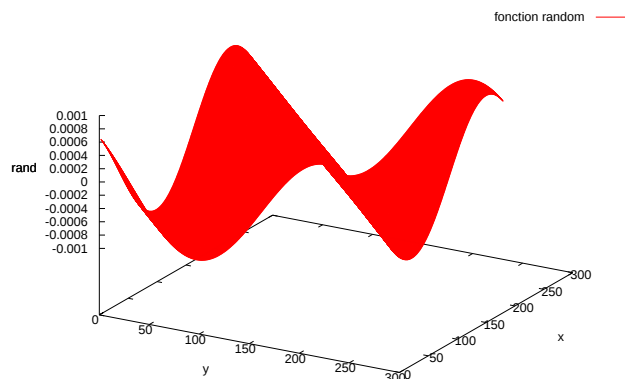


FIGURE 13: Résolution de l'équation de la chaleur avec la fonction La random pour le dernier pas

6 Méthode de la parallélisation sur les 4 processeurs

Après avoir trouvé les solutions de l'équation de la chaleur sur l'espace physique. La parallélisation se fait par deux différentes méthodes aboutissant aux mêmes résultats

Communication point à point : On divise le partage sur 4 processeurs et on affecte chaque morceau de la solution à un processeur. À la fin de chaque entité de calcul, le processeur possède une solution partielle de l'équation. On transférera les 3 sommes partielles des 3 processeurs au processeur restant qui calcule la solution totale, et l'affichera.

Communication collective : La communication collective concerne toujours tous les processeurs du communication indiquée. Il s'agit de rassembler sur l'un des processeurs donnés le résultat des différents process afin de valider le résultat.

7 Conclusions et perspectives

Le nouveau code numérique 2D permettant la parallélisation de l'équation de la chaleur sous la bibliothèque parallélisable MPI a été réalisé avec succès. La validation des résultats numériques de la parallélisation était un atout essentiel pour atteindre aux objectifs de l'article. La validation numérique a consisté de comparer la solution générée avec la solution analytique de l'équation de la chaleur sur l'espace physique. La bibliothèque FFTW parallélisable a été implémentée dans le nouveau code développé. L'objectif dans l'avenir est de paralléliser le terme advectif pour passer de l'équation de la chaleur vers celle de Navier-Stokes. Dans ce contexte, l'article [8] traite un couplage entre de ces deux équations en parallèle.

Références

- [1] Jean-Louis Dillenseger and Simon Esneault. Fast fft-based bioheat transfer equation computation. *Computers in Biology and Medicine*, 40(2) :119–123, February 2010.
- [2] Eduardo Divo and Alain J Kassab. A meshless method for conjugate heat transfer problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 29(2) :136–149, 2005.
- [3] Eduardo Divo, Alain J Kassab, and Franklin Rodriguez. Parallel domain decomposition approach for large-scale three-dimensional boundary-element models in linear and nonlinear heat conduction. *Numerical Heat Transfer : Part B : Fundamentals*, 44(5) :417–437, 2003.
- [4] Kevin Erhart, Eduardo Divo, and Alain J Kassab. A parallel domain decomposition boundary element method approach for the solution of large-scale transient heat conduction problems. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30(7) :553–563, 2006.
- [5] Matteo Frigo et al. Fftw. 2009.
- [6] Matteo Frigo and Steven G Johnson. Fftw : An adaptive software architecture for the fft. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 1998. Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on*, volume 3, pages 1381–1384. IEEE, 1998.
- [7] Matteo Frigo and Steven G Johnson. Fftw : Fastest fourier transform in the west. *Astrophysics Source Code Library*, 2012.
- [8] A.V Gorobets, F.X Trias, and A. Oliva. A parallel mpi + openmp + opencl algorithm for hybrid supercomputations of incompressible flows. *Computers & Fluids*, 88.
- [9] Benjamin S Kirk, John W Peterson, Roy H Stogner, and Graham F Carey. libmesh : a c++ library for parallel adaptive mesh refinement/coarsening simulations. *Engineering with Computers*, 22(3-4) :237–254, 2006.
- [10] Aijia Ouyanga, Zhuo Tang, Xu Zhoua, Yuming Xu, Guo Pan, and Keqin Li. Parallel hybrid pso with cuda for ld heat conduction equation. *Computers & Fluids*, 110(30) :198–210, March 2015.