

Travailler la numération décimale avec les quipus incas : bienfaits et limites autour d'une expérience en classe de sixième

Thomas DE VITTORI
Ameline LEROY

Introduction

Chaque année, la Semaine des Mathématiques est l'occasion rêvée pour mettre en place des activités qui rompent un peu avec le quotidien ordinaire d'une classe. Profitant de l'opportunité du thème « Mathématiques au carrefour des cultures » de cet événement, une séance expérimentale autour de l'écriture des grands nombres à partir des quipus incas a pu être mise en place en mars 2014 dans deux classes de sixième du collège Michelet à Lens. L'intérêt d'un travail sur le système de numération incas et plus généralement de l'ethno-mathématique dans un contexte scolaire est bien connu. Quelques publications y font référence (Miller 1990, Rousselet&Morice-Singh 2003, Boggan&al 2010, Gerdes 1996) et on trouve même dans certains manuels des illustrations ou des exercices autour de ce thème (voir par exemple Odyssee 6^e, Hatier, 2014, p.121). Dans la pratique, le projet est né suite à une recherche documentaire menée par trois étudiantes dans le cadre de l'évaluation de l'unité d'histoire des mathématiques de la licence 3 pluri-disciplinaire de la faculté des sciences Jean Perrin de Lens. La déclinaison pédagogique du dossier ne faisait pas partie des contraintes imposées. Il s'agissait simplement d'une proposition de prolongement que les étudiantes ont réalisé sur la base du volontariat. En fait, ces futures enseignantes du premier degré ont saisi avec enthousiasme cette occasion d'aller au contact d'élèves, même s'il s'agissait dans le cas présent de collégiens. Le travail qui a alors été entrepris entre les étudiantes et nous-même avait pour but de préparer et mettre en œuvre une activité qui intégrerait à la fois la dimension historique (connaissance du contexte, manipulation de cordelettes) et une dimension mathématique (système de numération) prenant en compte les difficultés des élèves et les travaux didactiques récents s'y rapportant. *In fine*, après quelques rencontres et échanges, l'activité s'est déroulée lors d'une séance d'une heure (renouvelée sur deux classes) autour d'un travail de groupes animé par les étudiantes. Une quatrième étudiante s'étant jointe au projet par intérêt pour l'expérimentation, nous avons eu la possibilité d'avoir un adulte par groupe tout en gardant l'ensemble supervisé par l'enseignante titulaire des classes. Les deux séances ont été filmées et on retrouvera quelques extraits vidéos de l'une d'elle ainsi que la fiche-élève sur le site EDU-HM¹.



1 <http://eduhm.univ-artois.fr/les-seances-2/6e-numeration-quipous-incas/>

Après une rapide présentation des quipus et de quelques éléments concernant l'apprentissage de la numération, la suite de ce texte tentera de rendre compte et d'analyser cette séance qui mêle histoire et mathématiques, en particulier pour y interroger les interactions entre ces deux champs.

1. Les quipus : des nombres sur des cordes

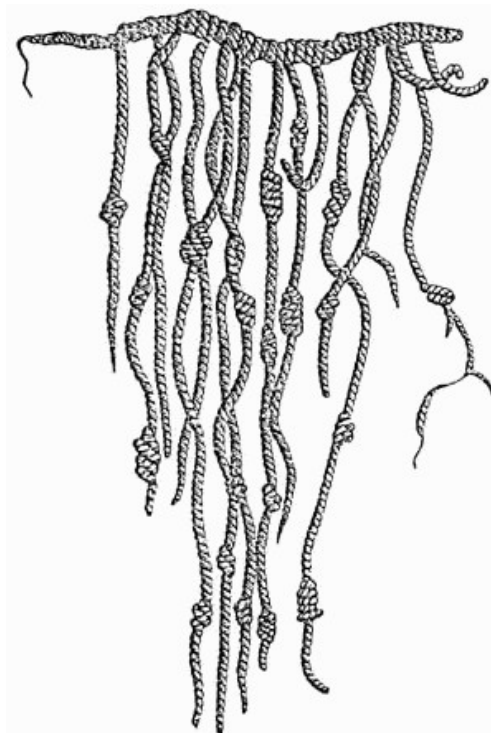


Figure 1 : <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Quipu.png>

La civilisation inca est l'une des plus importantes de l'histoire de la Cordillère des Andes (Rousselet & Morice-Singh 2003, Lepage 2005). À son apogée aux 15^e et 16^e siècles, elle s'étendait du nord du Chili à l'Argentine, en passant par l'Équateur, la Bolivie, le Pérou, ainsi que dans le sud de la Colombie. Les historiens estiment alors sa population à près d'un million d'habitants. Un tel développement nécessitait une bonne organisation politique mais aussi des outils permettant une gestion comptable des biens, des récoltes, des impôts, ainsi qu'une maîtrise des calculs astronomiques pour l'élaboration des calendriers et des éphémérides. À ces fins, deux instruments étaient utilisés : les quipus et le yupana (Tun, 2014-2015).



Figure 2 : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Raccolte_Extraeuropee_-_PAM01349_-_Perù_-_Cultura_Chimú_-_Inca%3F.jpg?uselang=fr
Un exemple de yupana

Le yupana (figure 2), dont le nom est issu du mot « yupay » qui signifie simplement « compter » en langue Quechua, peut être rapproché de nos tables à calculs ou nos abaques à jetons occidentaux (Schärting 2003, Poisard & al 2016). L'objet lui-même se présente sous la forme d'un ensemble de cavités carrées ou rectangulaires de différentes tailles et placées à différentes hauteurs dans lesquelles on plaçait vraisemblablement des petits cailloux. Le principe du yupana reste un sujet de recherche pour les historiens car la civilisation inca n'a laissé aucun écrit quant à son utilisation qui s'est perdue dans le temps. Les interprétations peuvent varier selon les chercheurs, en particulier quant à la base utilisée pour le système de numération, mais tous voient dans cet objet le moyen de mener à bien des calculs complexes. Dans son article, Tun (2014-2015) présente quatre interprétations différentes selon le sens que l'on donne aux rares représentations de cet outil encore à notre disposition. Dans certaines, les cases sont organisées de manière à représenter simplement les différents rangs selon les puissances de 10 (unités, dizaines, centaines) avec un importance plus ou moins grande de la décomposition de 10 en la somme de 1, 2, 3 et 5. Nous ne nous attardons pas plus longuement sur le yupana car le travail que nous avons effectué avec les élèves portait sur le deuxième outil numérique inca : le quipu. Dès le premier coup d'œil (figure 1), on constate que le quipu est constitué d'un ensemble de cordes portant des nœuds de différentes formes. De nos jours, plusieurs centaines de quipus ont été retrouvés et face à cette très grande quantité d'informations, la recherche actuelle se tourne de plus en plus vers le traitement informatisé des données comme par exemple le *Khipu Database Project* lancée dans les années 2000 par l'université d'Harvard (Urton & Brezine 2009). Le principe de l'écriture des nombres avec des quipus ayant été établi par L.L.Locke au début du 20^e siècle (Locke 1923), les objectifs de ces recherches actuelles visent désormais à saisir les éléments de la vie des Incas auxquels ils étaient associés. Les quipus sont communément considérés comme de simples registres comptables et la découverte récente de sources hybrides mêlant quipus et écriture permet de commencer à cerner de quoi ils étaient les registres (Hyland & al, 2014). Mais revenons à ce qui a été utilisé dans notre activité à destination des élèves de sixième, à savoir l'écriture de grands nombres entiers au moyen de nœuds sur des cordes. Pour la suite, nous utiliserons la description faite par Marcia et Robert Asher dans leur ouvrage *Mathematics of the Incas – Code of the Quipu* (Asher & Asher 1997) qui fait actuellement consensus.

Contrairement au yupana, l'arrière plan mathématique des quipus n'est pas un sujet de débat. Il s'agit d'un système de numération décimale où les nœuds sur les cordelettes représentent les chiffres. Il existe trois types de nœuds : le nœud simple (S) qui est le nœud que tout le monde connaît et qui comprend une seule boucle, les nœuds longs (L) qui comprennent de 2 à 9 boucles (figure 2bis) et le nœud de huit (noté E pour « eight » dans Asher & Asher). Selon le rang, on utilisera certains types de nœuds et pas d'autres. Ainsi, pour les unités, s'il n'y en a qu'une, on fera un nœud de huit, par contre, dès qu'il y en a de 2 à 9, on fera un nœud long avec autant de boucles que nécessaire.



Figure 2bis : https://commons.wikimedia.org/wiki/File:N%C5%93ud_de_franciscain.jpg
 Le nœud ci-dessus est un nœud long qui représente le chiffre 5 noté 5(L) dans Asher&Asher.
 Il possède 5 boucles qu'on peut facilement dénombrer sur le dessus du nœud.

Pour tous les autres rangs (dizaines, centaines, milliers, etc.), le chiffre est représenté par un groupe de nœuds simples. Ainsi, par exemple, le nombre 2451 sera codé sur le quipu par 2(S) 4(S) 5(S) 1(E). Les différents rangs sont séparés par un espace sur la corde. Comme on peut le voir sur la gravure au début de cet article, les quipus comportent généralement de nombreuses cordes attachées sur une corde support. Dans ce cas, les positions (hauteurs sur la corde) des différents rangs sont alignées afin de faciliter la lecture (figure 2ter) et rendre opératoire la combinaison sous forme de somme (voir Asher & Asher 1997).

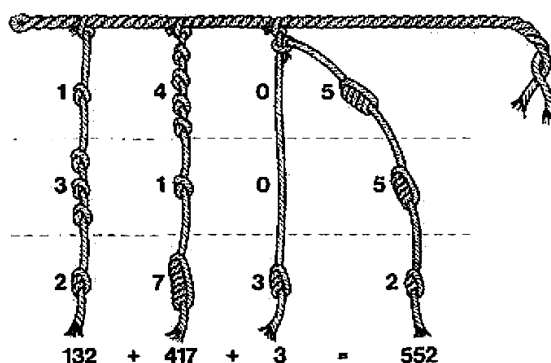


Figure 2ter : <http://www.incaglossary.org/appc.html>
 Exemple de la représentation et la somme de plusieurs nombres à trois chiffres.

L'une des spécificités de ce système de numération est qu'il ne comporte pas de zéro ce qui peut rendre la lecture délicate en particulier lorsque le quipu n'est plus en parfait état. On notera que certains quipus portent parfois plusieurs nombres l'un en dessous des autres. Dans ce cas, l'utilisation correcte des types de nœuds (en particulier la spécificité du rang des unités) permet d'éviter les confusions. D'autres quipus plus complexes comportent des cordelettes qui mathématiquement donnent à lire des additions soit *via* une corde somme de deux autres, soit, dans les situations les plus complexes, plusieurs cordes et sous-cordes (cordelettes attachées sur une autre que la corde support) réalisant alors plusieurs sommes. Le quipu, rappelons-le, n'étant pas un outil de calcul, ces assemblages complexes correspondaient sans doute à la mémorisation d'ensembles et de sous-ensembles de données comptables comme les différents types de grains de récoltes ou plus simplement la répartition hommes/femmes d'un recensement d'un village. Pour l'activité qui a été

réalisée avec les élèves, seule l'écriture simple de nombres a été utilisée avec quelques adaptations que nous décrirons plus loin.

2. L'apprentissage de la numération à l'école

La connaissance de l'écriture des nombres entiers et de notre système de numération court de la maternelle jusqu'à l'entrée au collège. Conformément aux programmes de l'école maternelle (Bulletin Officiel spécial n°2 du 26 mars 2015), en fin de Grande Section, les élèves ont manipulé les entiers, souvent jusque 10 ou un peu plus, et ont commencé à mémoriser la file numérique jusqu'à 30. La construction de notre système de numération décimal, positionnel avec zéro est l'un des grands apports du cycle 2, tout particulièrement au CP. En effet, bien que les élèves, à la sortie de la maternelle, sachent dire, voire lire, les nombres inférieurs à 30, cette connaissance est surtout le fruit d'un apprentissage systématique qui ne donne pas les clés d'une réelle construction (en tout cas, le programme n'invite pas à le faire). Ainsi, la grande majorité des manuels de CP reprennent-ils le travail sur les nombres entiers à partir des plus petits, 1, 2, 3, etc. (voir par exemple *Maths tout terrain*, Bordas 2016 ou *J'apprends les maths*, Retz 2016). L'objectif est alors de mettre en évidence les différents éléments du « système » comme l'autonomie et la graphie des différents chiffres, l'importance de la position, ou encore les relations entre les unités de numération (groupements par 10). Ce dernier principe, fondamental car déterminant mathématiquement la base du système, apparaît lors de la construction du rang des dizaines mais surtout montre sa généralité lors du passage à la centaine. Une fois ces règles posées, le reste de la scolarité jusqu'en sixième ne fait que les opérationnaliser sur des nombres de plus en plus grands pour atteindre les milliards en fin de cycle 3.

Toutes ces composantes de notre système de numération paraissent simple à quiconque les a assimilés depuis son plus jeune âge, mais rien n'est moins sûr pour l'élève qui lui se situe au cœur de cet apprentissage. Pointées dans tout bon livre du maître ainsi que dans les documents produits par le ministère de l'Éducation Nationale (voir le *Nombre au cycle 2*, SCEREN 2010²), de nombreuses difficultés apparaissent lorsque les élèves apprennent à dire et écrire les entiers. Sans entrer dans les détails, on pourra citer les erreurs dans la connaissance de la file numérique (omissions, redondance, mauvaise segmentation des mots-nombres), les confusions entre les différents rangs (dizaines, centaines, milliers) ou encore la mauvaise segmentation des grands nombres (unités, milliers, millions). Ce dernier point, qui apparaît en fin de cycle 3, est l'objet du travail fait avec les élèves de sixième au cours de la séance qui sera analysée dans cet article. Sur le plan des recherches récentes en didactique des mathématiques, les travaux de Tempier (2010, 2015) ont mis en évidence certains enjeux de l'apprentissage des grands nombres³. Selon Tempier, « le travail sur les grands nombres est d'une part une occasion de comprendre que les principes de la numération écrite vu pour les nombres jusqu'à 9999 s'étendent aux nombres plus grands (10 unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre supérieur et on ajoute un rang supplémentaire dans l'écriture chiffrée vers la gauche). D'autre part, le travail sur les grands nombres est aussi une occasion de revenir sur ces principes de la numération des petits nombres et d'en assurer une meilleure compréhension. » (Tempier, site internet, onglet « Grands nombres »). Comme nous l'évoquons précédemment, il est important de voir que la numération se construit en tant que système universel d'écriture des entiers progressivement en voyant se mettre en œuvre ses principes à chaque changement de rang. Toujours d'après Tempier (2010, p.62), la lecture et l'écriture des grands nombres nécessite la prise de conscience par les élèves, par exemple, de la réapparition, au

2 Cet ouvrage faisait partie des documents d'accompagnement des anciens programmes 2008 de l'école primaire. Il reste toutefois d'actualité et il est toujours cité comme référence dans les nouvelles ressources mises en ligne sur le site Eduscol pour l'accompagnement des programmes (voir *Le calcul aux cycles 2 et 3*, dans la partie Cycle 2 - Mathématiques du site Eduscol, 2016).

3 Pour les personnes intéressées, nous conseillons vivement la consultation de son site internet numerationdecimale.free.fr

quatrième chiffre, de l'unité mais cette fois pour ce qui va concerner les milliers. Ce processus sera le même pour les dizaines et les centaines et il se répétera lors de la construction des millions puis des milliards. Pour les élèves, outre la connaissance des nombres en question, l'enjeu de ce double regard unités/classes comme le nomme Tempier est aussi de pouvoir utiliser le système de numération comme outil efficace face à certains exercices. Par exemple, savoir que le nombre de dizaines de 123 est 12 permet de répondre immédiatement à la question « combien puis-je remplir entièrement de boîtes de 10 chocolats si j'en ai 123 ? » et ce sans s'engager dans une coûteuse division. Pour finir, notons que, tant au primaire qu'au collège, une difficulté du travail du professeur sur les grands nombres réside dans le fait que ces derniers s'éloignent très vite du quotidien des élèves (et même des adultes). En l'absence de contexte pertinent, l'enseignement du chapitre « grands nombres » se transforme souvent en une série d'exercices formels peu propices à la motivation et à l'implication des élèves.

3. La construction de l'activité à supports historiques

Nous venons de le voir au travers des travaux de Tempier, les rangs des unités, dizaines, centaines et les classes des milliers, millions, milliards peuvent être placés au centre du travail sur la numération. Les quipus, présentés au début de cet article, fonctionnent sur un système décimal avec une séparation entre les rangs identique à notre système, ils conviennent donc parfaitement à l'élaboration d'une activité à supports historiques à destination d'élèves. Notre travail s'est porté sur des classes de sixième en réalisant quelques adaptations liées aux objectifs et au contexte. Comme nous en France, les Incas ne marquaient pas spécialement les différentes classes, or notre travail avec les élèves visait justement à mettre en évidence les groupements par unités, milliers, millions. Une première modification a donc été introduite dans le système inca originel en obligeant les élèves à créer un quipu par classe, ce qui, pour des grands nombres, obligeait à les attacher sur une corde support. Une deuxième adaptation, cette fois liée à l'écriture des chiffres, a consisté en l'uniformisation des types de nœuds demandés. En effet, en toute rigueur, les nœuds sur les quipus diffèrent selon le rang, en particulier pour les unités. Dans un souci de transfert facilité vers notre système d'écriture, le choix a été fait de ne conserver que les nœuds longs avec donc autant de boucles que la valeur du chiffre considéré. Bien qu'historiquement discutable, cette liberté prise avec le système inca avait aussi pour avantages d'une part de simplifier la passation de la consigne pour cette intervention en classe d'une heure seulement (un seul type de nœud) et d'autre part de rendre les quipus esthétiquement plus convaincants car l'iconographie présente dans les supports fournis aux élèves donne principalement à voir de très grands quipus avec beaucoup de nœuds longs. La fiche-élève (annexe) rend compte de ces premiers aspects en donnant à lire un paragraphe sur le contexte historique, suivi de quelques illustrations et d'un exemple de quipu inférieur à 1000. Cette partie destinée à faire entrer les élèves dans l'activité n'est pas à vivre en autonomie. L'enseignante de la classe et les étudiantes présentes ont à charge d'explicitier le contexte et les modalités de réalisation des nœuds sur les cordelettes. Cette étape est complétée par la lecture d'un quipu distribué à chaque groupe d'élèves ainsi que la réalisation d'un quipu imposé (461). La suite de l'activité porte plus directement sur les grands nombres. Un petit paragraphe à lire en classe permet d'explicitier le principe choisi pour écrire des nombres de plus de trois chiffres. Afin de s'assurer de la bonne compréhension de cette consigne, chaque groupe doit réaliser, sous le regard d'une étudiante et/ou du professeur, un quipu représentant le nombre 2243115. Ce travail est complété par un jeu de type émetteur/récepteur où chaque groupe crée un quipu codant un grand nombre (au choix) ; tous les quipus circulent ensuite dans la classe afin d'être, si possible, lus. Une phase de synthèse est prévue à la fin de l'heure afin de mettre en évidence les caractéristiques du système de numération inca (base 10, rôle de la position, absence de zéro, ...) ainsi que l'intérêt du découpage en classes d'unités, milliers et millions.

L'ensemble du travail de découverte de l'univers de la numération inca et la manipulation des quipus est prévue pour occuper une première séance d'une heure. La fiche-élève comprend ensuite une série d'exercices et de problèmes qui visent à tisser des liens entre les pratiques incas et les mathématiques scolaires. Pour ce faire, dans un premier temps, les élèves doivent dessiner les quipus correspondant à des nombres écrits sous forme de sommes pré-décomposées en classes (par exemple : $958+354000$). Toute la suite de la fiche repose alors sur le souhait d'un réinvestissement par les élèves du découpage correct des grands nombres. Ainsi sont-ils amenés à écrire plusieurs nombres en toutes lettres (par exemple : 120050 et 2300045) et à résoudre de petits problèmes où une bonne lecture des nombres constitue une procédure rapide et efficace. Le dernier problème, par exemple, propose de déterminer le nombre de sachets de mille bonbons, puis de caisses d'un million, que peut exporter une entreprise qui en fabriquerait 3450000. Comme le souligne Tempier dans ses travaux, souvent ces exercices sont perçus avant tout comme relevant de la division or, une bonne connaissance de notre système de numération suffit généralement pour obtenir la solution. Nous voulions aussi tester cette dimension dans le cadre de cette activité à destination d'élèves de sixième qui terminent tout juste leur apprentissage de la numération.

4. Analyse du déroulement de la séance

La mise en œuvre dans les classes n'a pas engendré de modification du déroulement prévu. Toutefois, l'une des classes de sixième, la deuxième de l'expérimentation, était beaucoup plus dissipée que l'autre ce qui n'a pas permis d'obtenir des enregistrements exploitables du fait d'un bruit de fond trop important. Les analyses ci-après et les extraits vidéo disponibles sur le site internet EDU-HM portent donc sur la première classe dans laquelle les activités ont été proposées. Comme cela a été rappelé dans les paragraphes précédents, le travail portait sur quelques aspects fondamentaux communs aux deux systèmes de numération inca et français (indo-arabe).

Durant toute la séance, les différentes unités et classes ont été au cœur des échanges. Ainsi, par exemple, lors de la lecture du premier quipu (461), les élèves ont eu l'opportunité de réinvestir le vocabulaire lié aux rangs dans la classe des unités.

[L'adulte tenant la caméra demande à l'élève la valeur du quipu]

Élève : Quatre-cent-soixante-et-un.

Adulte : Quatre-cent-soixante-et-un, pourquoi ?

E : [pointant du doigt l'énoncé] C'est écrit là.

A : Oui d'accord, comment ça se voit sur le quipu ?

E : [montrant à chaque fois les nœuds sur le quipu] Euh, bin là c'est quatre, pour le chiffre des centaines.

A : Hmm hmm.

E : Là c'est six pour le chiffre des dizaines.

A : Oui.

E : Là c'est un pour le chiffre des unités.

A : D'accord.

Dans la transcription ci-dessus (extrait vidéo disponible sur le site⁴), on constate que pour l'élève interrogé, la signification des chiffres selon leur position dans l'écriture semble acquise et le quipu constitue un bon moyen pour réactiver cette connaissance. Pour les nombres supérieurs à mille, des échanges comme celui ci-dessous entre l'une des étudiantes et son groupe lors de la réalisation du quipu 2 243 115 (écrit sous cette forme dans l'énoncé) donne à voir également l'usage pertinent du vocabulaire et la mise en place des trois classes unités, milliers et millions (extrait disponible sur le site).

4 <http://eduhm.univ-artois.fr/les-seances-2/6e-numeration-quipous-incas/3-verification-des-quipous/>

Adulte (étudiante) : Alors t'as combien ?

Élève 1 : Quatre.

A : Quatre ... et le suivant c'est combien que tu vas faire ? Le suivant là [pointant l'énoncé] ?

E1 : [propos inaudibles]

A : Deux-cents... non, c'est bon, deux-cent-quarante... et toi tu vas faire le dernier.

Élève 2 : [montrant son quipu déjà réalisé posé à plat sur la table] Un un cinq.

A : [tenant verticalement un quipu qui sera celui du rang des unités] Là tu as les centaines, les dizaines et là ça va être les unités.

[après un court temps de manipulation]

A : [tenant verticalement le quipu de la classe des unités] Là ça va être les ?

Élèves : [ensemble] Unités !

A : [pointant successivement les nœuds] Centaines, dizaines, unités, ça va être [pointant l'énoncé] les chiffres du groupe là.

E2 : [reprenant] Les centaines !

A : C'est bien. Et donc là on va attacher, ça va être quel groupe là ?

Es : Les euh milliers.

A : Et donc il reste quel groupe à faire ?

Es ? : Euh, les millions, les unités...

A : Les unités des ... Là [pointant l'énoncé]

Élève 3 : Ah ! des ... millions.

A : Des millions. Il reste à faire une dernière corde ; il reste à faire les millions.

Dans ce passage, l'étudiante s'efforce de bien mettre en évidence les différentes classes avec les élèves. Un enseignant avec plus d'expérience aurait sans doute laissé plus de place à la parole des élèves pour faire éventuellement émerger des difficultés. Toutefois, ce groupe fonctionnant bien, on voit apparaître la construction progressive des unités, puis des milliers, puis enfin des millions. On notera juste au milieu des échanges, la validation trop rapide par l'étudiante (« C'est bien ») à l'évocation du mot « centaines » pour le quipu de la classe des unités. Dans la dernière partie de l'activité, chaque groupe d'élèves réalisera un quipu d'une valeur supérieur à un million et le fera circuler auprès des autres groupes afin d'être lu. Ces échanges n'ont pas posé de difficultés majeures et vont permettre la mise en place d'une synthèse en fin de séance.

Conformément au scénario prévu, un temps de bilan est mené par l'enseignante titulaire à quelques minutes de la fin de la sonnerie (cette dernière étape fait aussi partie des vidéos disponibles en ligne⁵). L'une des étudiantes participant à l'expérimentation va au tableau afin d'y noter les réponses des élèves. Tous les élèves ont eu en mains les quipus des différents groupes et un tableau récapitulatif est mis en commun avec toute la classe. Pour l'un des quipus, deux groupes ont lu 500121023.

Professeur : Alors l'équipe quatre, est-ce que c'était bien votre quipu ça ?

Elèves du groupes : Oui.

P : [cherchant à mettre en évidence le problème] Vous avez mis cinq-cent-millions-cent-vingt-et-un-mille-vingt-trois ?

Etudiante dans le groupe : Non, c'était pas ça.

P : C'était pas ça.

Et : [mimant verticalement avec les mains une interversion] On a dû inverser... cinq millions...

[Les élèves du groupe ne semblent pas saisir la difficulté]

P : [s'adressant aussi à toute la classe] C'est quoi le problème ici ? Pourquoi ils n'ont pas

5 <http://eduhm.univ-artois.fr/les-seances-2/6e-numeration-quipous-incas/6-synthese/>

trouvé votre bon quipu ?

E1 (du groupe) : Parce qu'ils n'ont pas bien réfléchi.

P : [s'adressant à E1] Alors toi tu es sûre que tu ne t'es pas trompée ? Pourquoi est-ce qu'ils ont tous les deux trouvé cinq-cent-millions... C'est quoi le problème ici ? Ce sont les ?

E1 : Chiffres !

P : Eux ils ont trouvé cinq quoi ?

E1 : Boucles ?

P : Oui mais cinq unités, cinq dizaines ou cinq centaines ?

E1 (et le reste du groupe) : centaines

P : Et vous vous vouliez cinq... [laissant le groupe et la classe réfléchir quelques secondes] unités. Si c'était des unités il fallait les placer où sur votre corde ?

E2 (du groupe) : Tout en bas !

P : Et vous l'avez placé ?

Classe : En haut.

P : Tout en haut et c'est pour ça qu'ils se sont trompés.

Cette discussion, initiée par le professeur, entre les élèves du groupe et la classe permet de pointer une erreur dans la position des unités de millions sur la troisième corde. En effet, lors de la réalisation du quipu par le groupe, le nœud est placé trop haut ce qui lui donnait plutôt une valeur au titre des centaines de millions que des unités. Dans le contexte de la séance, seuls les élèves du groupe ayant produit le quipu peuvent percevoir l'écart entre la réalisation et la lecture par d'autres. Bien que pressé par le temps, le professeur s'applique à bien rester dans le cadre du travail sur la distinction classes/unités et cherche à amener les élèves à repérer l'erreur. Finalement l'ensemble de la classe retrouve ce qui aurait dû être le bon positionnement du nœud. Ces échanges sont alors l'occasion de mettre en évidence l'absence du zéro dans le système de numération inca et donc, en creux, son importance dans le nôtre.

La séance filmée s'arrête ici, mais pas l'expérimentation qui comprend un deuxième temps autour d'exercices sur feuille dont nous allons analyser quelques éléments dans les paragraphes suivants.

5. Les productions écrites : mise en évidence des limites de la séance

Nous l'avons dit à plusieurs reprises, le travail à partir des quipus que nous avons proposé visait à articuler les apprentissages mathématiques scolaires avec une pratique historiquement située. Dans notre cas, connaissant les difficultés et les enjeux de la maîtrise de notre système de numération avec de grands nombres, divers exercices ont alors été proposés aux mêmes classes afin d'une part d'inciter à un transfert de la manipulation des quipus vers la compréhension des grands nombres, et d'autre part de chercher à voir si les élèves réinvestissent ces connaissances face à des petits problèmes. La fiche distribuée lors de la séance suivant la première partie filmée comporte deux exercices et trois problèmes. Le travail sur cette partie a occupé elle aussi une heure complète. Regardons successivement chacun des cinq exercices.

Le premier exercice propose aux élèves de dessiner, sous une forme schématisée, les quipus correspondant à quatre grands nombres présentés *via* une décomposition additive.

$$A = 958 + 354000 :$$

$$B = 123 + 321000 :$$

$$C = 600000 + 485 :$$

$$D = 145 + 512000 + 3000000000 :$$

Pour cette première étape, il s'agit nullement de chercher à piéger les élèves mais simplement de

créer une tâche nouvelle et spécifique qui articule la connaissance des quipus et notre système de numération contemporain (de Vittori 2015). Plus précisément, ici, le faible écart épistémologique entre le système inca et le nôtre facilite la création d'une passerelle qui se veut profitable pour les apprentissages des élèves. Les productions des élèves face à cet exercice sont globalement bonnes (cf tableau 1), toutefois le dernier nombre qui met en jeu la classe des millions est sensiblement moins maîtrisé que les autres.

Nombre demandé	Réponses correctes (nombre d'élèves)	Pourcentage de réussite (35 élèves au total)
A = 354958	28	80%
B = 321123	26	74%
C = 600485	28	80%
D = 30512145	23	66%

Tableau 1

Pour ce nombre D, les bonnes productions d'élèves montrent un réinvestissement de la séparation des quipus pour chacune des classes unités, milliers et millions (figure 3).

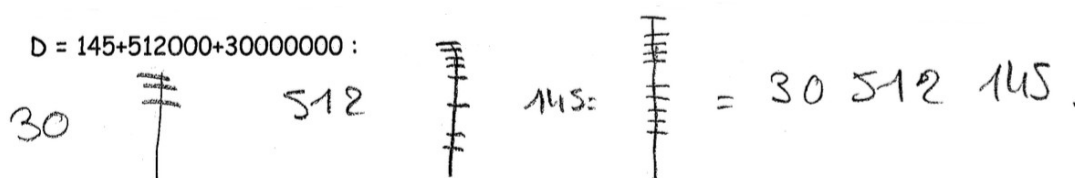


Figure 3

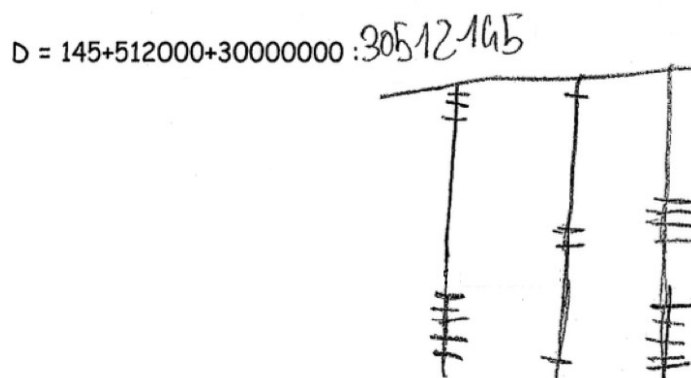


Figure 4

Par contre, comme on peut le voir dans une seconde production (figure 4), les difficultés dans le découpage en classes des grands nombres perdurent chez certains élèves. Ici, bien que l'élève récrive le nombre 30512145 correctement, les quipus dessinés correspondent à une identification des millions (305), milliers (121), et unités (45) qui s'organise visiblement à partir de la gauche et non de la droite comme l'exigerait une procédure correcte. Il est intéressant de remarquer que ces difficultés concernant les classes (unités, milliers, millions) réapparaissent de manière encore plus marquée dans le second exercice qui portait sur l'écriture en toutes lettres de grands nombres. Dans cet exercice, les taux de réussite sont plus faibles que pour le premier (63% pour 1356623, 74% pour 120050, 69% pour 2300045) et parmi les réponses erronées des élèves, on observe plusieurs

fois de mauvais découpages du nombre. Parfois ceux-ci sont également combinés avec une confusion dans l'indicateur de la classe comme dans le cas de 2300045 écrit « vingt-trois-mille-quarante-cinq » ou encore 120050 écrit « douze-mille-cinquante ». Sur le plan quantitatif, les données sur ces 35 élèves ne permettent pas d'obtenir de résultats beaucoup plus précis. En particulier, on n'observe aucune corrélation significative entre les différentes questions. Par contre, on pourra relever une distribution assez particulière en terme de réussite globale sur les exercices 1 et 2. En effet, il y a 16 élèves qui ont parfaitement réussi les sept items de ces deux exercices mais ensuite, les effectifs en fonction du nombre de réponses justes s'étalent fortement créant ainsi un pic unique révélateur du caractère discriminant d'une série d'exercices sur la maîtrise de la numération.

La dernière partie de la séance de réinvestissement portait sur la résolution de trois problèmes dans lesquels il s'agissait de déterminer le nombre de centaines (exercice 3), de milliers (exercice 4 et 5), puis de millions (exercice 5). Ces problèmes ne présentent aucune difficulté particulière ; ils pourraient même être proposés à des élèves de cycles 2 et 3 de l'école primaire. L'objectif, rappelons-le, était de voir comment, à l'issue d'une séance sur la manipulation des grands nombres avec des quipus, les élèves s'engageaient dans la résolution. Sur l'ensemble des deux classes, les résultats confirment très nettement les difficultés liées à la maîtrise des nombres au-delà du million. Les taux de réussites sont de 89% et 80% pour les deux premiers problèmes (nombres à traiter : 800 et 12200), par contre ils ne sont que de 40% et 29 % respectivement pour chacune des questions du dernier problème (nombre à traiter 3450000 au rang des milliers puis des millions). Dans les productions, la grande majorité des élèves identifie ces problèmes comme relevant de la division (qui avait été revue, il est vrai, peu de temps auparavant) et ces derniers mobilisent donc en priorité les outils relatifs à ce chapitre. Dans la figure 5 (ci-après) l'élève utilise la multiplication par 100 pour justifier les 8 paquets et dans la figure 6 (ci-dessous), un autre s'essaie avec plus ou moins de bonheur à l'application de l'algorithme de division posée.

Exercice 3

Un jardinier souhaite planter 800 fleurs dans un parterre. Un sachet de graines permet de faire pousser 100 fleurs. Combien de sachets de graines devra-t-il ouvrir ?

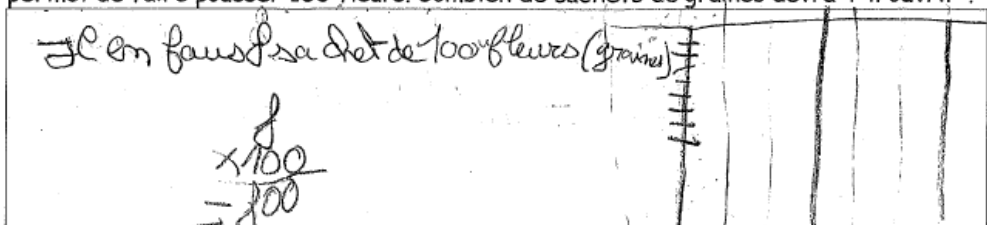


Figure 5

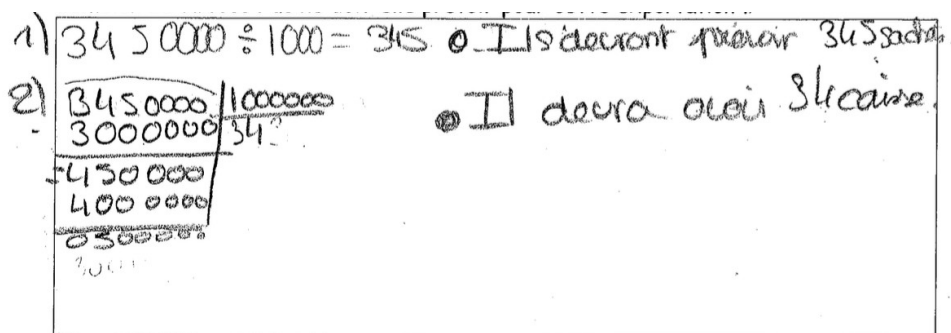


Figure 6

Les élèves qui utilisent une procédure liée à la numération sont très rares et, malheureusement, avec peu de succès comme le montre la production de la figure 7 (ci-dessous). L'élève a bien perçu

l'intérêt de lire directement le nombre de milliers, mais un mauvais découpage du nombre (ou l'oubli de l'un des zéros) entraîne une réponse fautive.

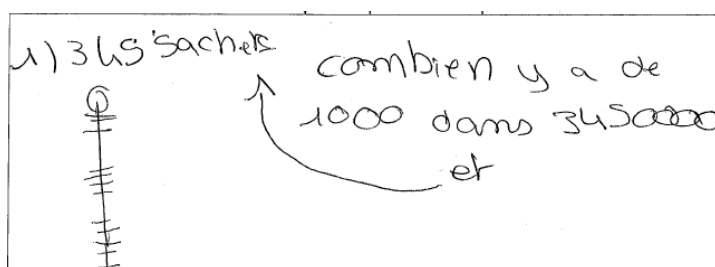


Figure 7

Quelle est la place des quipus dans cette dernière partie ? Finalement, très peu d'élèves dessinent des quipus sur leur feuille. Quand bien même ils le feraient, ils ne les utilisent pas comme outil de résolution mais simplement comme représentation schématisée de la réponse à la question. Face à ces problèmes, les élèves ont avant tout mobilisé ce qu'ils connaissaient précédemment et ils n'ont pas identifié le travail sur les quipus comme « utile » à la compréhension des grands nombres. Les dessins des quipus *a posteriori* correspondent vraisemblablement à la manière qu'ont eu les élèves de s'approprier les éventuelles invitations du professeur titulaire de la classe à faire le lien entre ces problèmes et la séance de manipulation des cordelettes. Cet élément apparaît assez nettement dans certaines productions, comme dans la figure 8 (mais aussi dans la figure 7 précédente), où l'on voit un quipu coder la réponse 8 sans aucune ambiguïté possible car l'élève y adjoint les indications c, d, u usuelles dans nos tableaux de numération modernes.

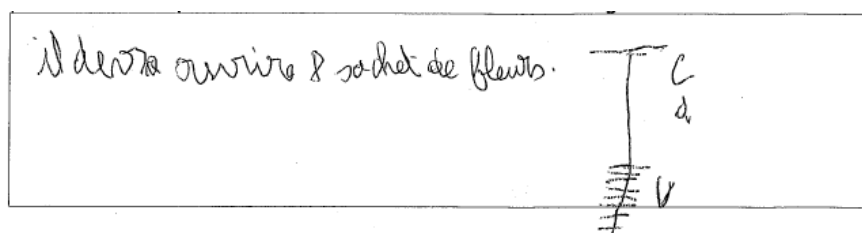


Figure 8

Les difficultés persistantes dans la maîtrise des grands nombres lors de la résolution des problèmes, l'absence de réinvestissement des quipus, le peu d'apparition d'éléments de numération et la prédominance des procédures liées à la division sont autant d'indicateurs qui interrogent la portée d'une introduction d'éléments historiques comme outils pédagogiques au service des apprentissages des élèves. C'est ce dernier point que nous aborderons en conclusion.

Conclusion : oser penser et interroger une ingénierie didactique basée sur l'histoire des mathématiques

Faut-il revenir sur l'intérêt de l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe ? Certainement pas ! L'expérience, désormais de plusieurs décennies, de mise en œuvre dans les classes d'activités à support historique a montré le caractère vivant de cette approche tant au regard des acteurs du terrain que d'un certain nombre de chercheurs dans le monde (Katz & Michalowicz (eds) 2005, Barbin & Bénard (eds) 2007, Poisard & al 2016). En particulier, quelle que soit sa forme, l'introduction de l'histoire en classe crée un apport de connaissances nouvelles sur l'évolution des mathématiques et leur inscription au sein des grandes activités humaines. Il ne fait aucun doute que tout élève qui a été mis en contact avec l'histoire en retiendra, *a minima*, des noms, des idées, une

vue sur d'autres cultures, etc. (voir par exemple sur le site EDU-HM une séance bilan en sixième sur les numérations anciennes⁶). La question qui se pose de nos jours est de savoir *comment* une séance mêlant mathématiques et histoire contribue aux apprentissages des élèves. L'expérimentation qui vient d'être rapportée dans cet article s'inscrit dans un travail qui articule la didactique et les spécificités de ces séances qui ne relèvent plus uniquement du seul champ des mathématiques. Comme nous l'avons précisé, la séance proposée à nos deux classes de sixième a été conçue avec l'objectif assez précis d'un travail sur le système de numération au regard de difficultés identifiées par certains travaux de didactique et une bonne connaissance des élèves. Si le déroulement lui-même est conforme à celui obtenu généralement avec ce type de séance, en particulier quant à l'implication et la motivation des élèves, le retour à des exercices plus « scolaires » fait apparaître des manques qui ne sauraient être ignorés. Le premier aspect concerne la difficulté à maintenir actif le pont entre les apports épistémologiques de l'histoire et la maîtrise des connaissances actuelles des élèves. En effet, dès lors que l'énoncé ou le professeur ne demande plus explicitement ce travail spécifique, les élèves reviennent naturellement aux usages habituels de la classe. Il y a incontestablement une difficulté à rompre efficacement le contrat dans une perspective réelle d'apprentissage. Cette dimension est évidemment accentuée par l'aspect « exceptionnel » de la séance tant dans le fond (première utilisation de l'histoire dans cette classe) que dans la forme (présence de nombreux adultes, de la caméra, des cordelettes, ...). Les échanges avec des professeurs utilisant plus fréquemment l'histoire montrent que, dès lors que cette pratique devient ordinaire, l'écart dans le contrat tend à disparaître, ce qui permet aux apprentissages de mieux se dérouler, y compris dans un contexte à coloration historique (voir par exemple Barrier & al 2012). Le deuxième aspect quant aux éventuelles lacunes à éviter dans les séances mathématiques-histoire porte sur l'impact réel sur les progrès des élèves. Mettre les élèves en activité est aisé *via* l'histoire des mathématiques, par contre, dans un contexte scolaire, ceci ne peut se faire qu'avec l'objectif d'amener les élèves à une meilleure maîtrise de certaines notions mathématiques. La deuxième partie de notre expérimentation avec les quipus interroge sérieusement les acquis mathématiques des élèves lors de cette séance. Les résultats face aux différents exercices et problèmes montrent qu'il ne semble pas y avoir eu d'effet immédiat sur les élèves. Outre la difficulté, que nous venons d'évoquer, à inscrire ce type de séance dans un apprentissage ordinaire, on pourra remarquer dans notre séance l'absence d'un temps rendant explicite l'apport mathématique souhaité. Contrairement à la dimension historique qui a fait l'objet d'une synthèse, une méthode de travail sur les grands nombres (découpage en tranches trois chiffres à partir de la droite) n'a pas été formalisée. Ce point serait à accentuer dans une prochaine expérimentation sur ce thème ou un autre. Il y a sans doute de nombreuses choses à améliorer et ce d'autant plus que ces séances avec les quipus constituaient une première tentative d'élaboration d'activités non seulement pour la classe, mais aussi comme objet de recherche dans le cadre d'une ingénierie didactique spécifique mais c'est finalement par une ouverture vers de nouvelles perspectives que nous voudrions terminer cet article. Incontestablement, l'utilisation de l'histoire des mathématiques en classe est riche. Elle permet tout autant d'éveiller l'intérêt des élèves que d'aborder la discipline sous un angle nouveau ou d'en percevoir l'évolution. L'histoire permet ainsi de justifier des pratiques de classe originales qui créent des situations inédites qu'il convient d'analyser finement. Comme d'autres, les travaux que nous avons entrepris depuis plusieurs années vont dans ce sens et nous permettent d'envisager maintenant sérieusement la construction de séances expérimentales inscrites dans un axe de recherche centré sur les élèves.

6 <http://eduhm.univ-artois.fr/les-seances-2/6e-numeration/> Cette séance est analysée dans Barrier & al (2012).

Références

Ascher M. (2009). « L'Amérique précolombienne » in *La mathématique. T. 1. Les temps et les lieux.* p. 175-197. Bartocci Claudio. Dir. ; Odifreddi Piergiorgio. Dir. ; Blay Michel. Préf., p.175-197, CNRS éditions Paris.

Asher M., Asher R. (1997). *Mathematics of the Incas – Code of the Quipu*, Dover, 1997.

Barbin E. (eds), Bénard D. (eds) (2007). *Histoire et enseignement des mathématiques : Rigueurs, erreurs, raisonnements.* INRP.

Barrier T., Mathé A.-C., de Vittori T. (2012). Des séances ordinaires comportant une dimension historique: quels enseignements?, *Petit x*, n°90, 2012.

Boggan M., Harper S., Whitmire A.. (2010). « Using manipulatives to teach elementary mathematics », *Journal of Instructional Pedagogies*, n°3, p.1-6.

Gerdes P. (1996). « Ethnomathematics and Mathematics Education » in *International Handbook of Mathematics Education*, Volume 4, Editors : Alan J. Bishop, Ken Clements, Christine Keitel, Jeremy Kilpatrick, Colette Laborde, Springer, p. 909-943.

Hyland S., Ware G. A., & Clark M. (2014). Knot direction in a Khipu/Alphabetic text from the central Andes. *Latin American Antiquity*, 25(2), 189–197.

Katz V. (eds), Michalowicz K.D. (eds) (2005). *Historical Modules for the Teaching and Learning of Mathematics*, Mathematical Association of America.

Lepage C. (2005). « Aventures mathématiques dans les mystérieuses cités d'Amérique précolombienne », *Cosinus*, n°62, Editions Faton Dijon, p. 12-20.

Locke L. L. (1923). *The ancient Quipu or peruvian knot record.* New York: The American Museum of Natural History.

Miller D. (1990). « Developing the mathematics curriculum, part 1, the quipu », *Mathematics teaching*, n°133, Association of Teachers of Mathematics.

Poisard C., Tournès D., Cochet I. (2016). « De l'abaque à jetons au boulier chinois : analyse d'une expérience au CE1 », *MathemaTICE*, numéro spécial 51, Sesamath.

Rousselet M., Morice-Singh C. (2003). *Les mathématiques de l'Amérique précolombienne. Exercices pour le collège.* Editions Archimède Argenteuil.

Schärting A. (2003). *Compter avec des jetons : Tables à calculer et tables de compte du Moyen Âge à la Révolution*, Presses polytechniques et universitaires romandes.

Selin H. (eds), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*, Springer, Living Reference Work, <http://link.springer.com/book/10.1007/978-94-007-3934-5>, en ligne, mise à jour permanente.

Tempier F. (2010). « Une étude des programmes et manuels sur la numération décimale au CE2 », *Grand N*, n°86, IREM de Grenoble.

Tempier F. (2015). « New perspectives for didactical engineering. An example for the development of a resource for teaching decimal number system. », *Journal of Mathematics Teacher Education*, 19(2), Springer.

Tun M. (2014-2105). Articles « Quipu » et « Yupana » in Selin H. (eds), *Encyclopaedia of the History of Science, Technology, and Medicine in Non-Western Cultures*, Springer.

de Vittori T. (2015). Les tâches des élèves dans une activité mathématique à dimension historique, *Petit x*, n°97.

Sites internet :

Urton G., Brezine C. (2009, dernière mise à jour). *Khipu Database Project*, <http://khipukamayuq.fas.harvard.edu/>

EDU-HM, Études Didactiques de l'Utilisation de l'Histoire des Mathématiques en classe et en formation, <http://eduhm.univ-artois.fr/> (pour accéder aux vidéos, utiliser l'identifiant « region-npdc » et la même chose comme mot de passe)

Site de Frédéric Tempier
<http://numerationdecimale.free.fr>

Des mathématiques comme les Incas

Les Incas vivaient, entre le 13^{ème} et le 16^{ème} siècle, le long de la cordillère des Andes (chaîne de montagnes longeant la côte ouest de l'Amérique du Sud).



Ils ne savaient ni lire ni écrire mais utilisaient les quipous pour compter et organiser la société. En effet, les quipoucamayoks (« maîtres du quipou ») recensaient les données démographiques et économiques grâce à des cordelettes nouées dont l'ensemble forme un quipou.



Quipoucamayok tenant un quipou



Quipou

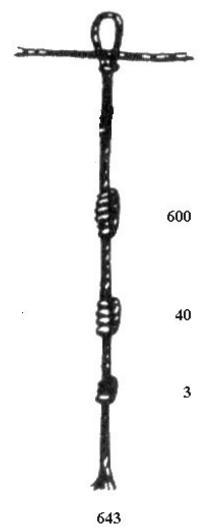
Les quipous

Les quipous sont des petites cordes nouées avec lesquelles on peut écrire des nombres. Le principe est de décomposer les nombres en centaines, dizaines et unités. Les nœuds comportent plus ou moins de boucles suivant le nombre à représenter. Ci-contre, voici un exemple de quipou avec sa valeur.

Conseil : Pour faciliter le travail, dans toute la suite, le haut du quipou est signalé par un trait de couleur.

À vous maintenant !

1) Un quipou mystérieux vient de t'être distribué. Essaie de le lire et écris ici sa valeur : _____



2) Avec une corde, réalise un quipou qui représente le nombre 461 (demande de l'aide si tu n'arrives pas à faire les nœuds).

3) Pour écrire les nombres supérieurs à 1000, on place des quipous côte à côte par tranches de 3 chiffres. Par exemple, pour écrire 23245, on réalise un quipou ou est écrit 23, correspondant à 23000, et un autre correspondant à 245.

Avec ton groupe, réalise un quipou qui représente le nombre 2 243 115.

Conseil : Pour éviter que les quipous se mélangent et pour faciliter la lecture, on attache les quipous qui forment le nombre sur une autre corde qui sert de support. Sur cette corde, on place le trait de couleur à gauche, c'est-à-dire du côté des millions.

4) En groupe, réalisez un quipou représentant un nombre de 6 à 9 chiffres de votre choix. Donnez ce quipou mystère à un autre groupe qui devra le décoder.

Notez ici les valeurs des quipous mystères que votre groupe a reçu et du votre :

Notre quipou : _____

Quipou reçu n°1 : _____

Quipou reçu n°2 : _____

Quipou reçu n°3 : _____



5) En groupe, réalisez un quipou correspondant au nombre qui t'est proposé par ton enseignant. Donnez ce quipou à un autre groupe qui devra le décoder.

Quipou reçu : _____

Vérifiez avec le groupe qui vous a envoyé le quipou.

Quelle particularité a ce système de numération ?

Nom :

Prénom :

Classe :

Exercice 1

Dessine les quipous correspondant à chacun de ces nombres A, B, C et D :

A = $958+354000$:

B = $123+321000$:

C = $600000+485$:

D = $145+512000+30000000$:

Exercice 2

Écris en toutes lettres les nombres suivants :

1356623 :

120050 :

2300045 :

Tourne la feuille.

Exercice 3

Un jardinier souhaite planter 800 fleurs dans un parterre. Un sachet de graines permet de faire pousser 100 fleurs. Combien de sachets de graines devra-t-il ouvrir ?

Exercice 4

Pour annoncer son prochain concert, un groupe de musique a besoin de 12200 affiches. L'imprimeur ne réalise les affiches que par paquets de 1000 affiches. Combien de paquets d'affiches le groupe devra-t-il commander ?

Exercice 5

Une usine de confiseries fabrique chaque mois 3450000 bonbons.

1) Pour la distribution en France, les bonbons sont mis par sachets de 1000. Combien de sachets l'usine doit-elle prévoir chaque mois ?

2) L'un des mois de l'année, l'usine exporte à l'étranger toute sa production. Pour les envoyer dans un autre pays, les bonbons sont mis dans des caisses pouvant en contenir jusqu'à 1000000.

Combien de caisses l'usine doit-elle prévoir pour cette exportation ?