Ce que peut apporter l'analyse des implicites et des conversions à la compréhension des difficultés des élèves concernant l'écrit mathématique au début de l'école primaire

Claire Margolinas, Laboratoire ACTé, Université Clermont-Auvergne

Introduction

Dans l'institution scolaire, il est courant de penser que l'entrée dans l'algèbre ne se fait qu'à l'arrivée au collège, avec l'usage des lettres et que ce sont justement les lettres qui permettent de savoir si l'on fait de l'arithmétique ou de l'algèbre. En didactique des mathématiques, Chevallard et ses collaborateurs (Chevallard, 1984; Chevallard, 1989; Chevallard, 1989-1990) ont montré qu'il existait une dialectique entre arithmétique et algébrique, qui ne se résume pas à des critères de surface.

En partant d'un tout autre point de vue, Jean-Philippe Drouhard (Drouhard & Panizza, 2012) s'est au contraire intéressé, avec Mabel Panizza, à la forme même donnée aux écritures mathématiques (que celles-ci contienne plutôt des chiffres ou plutôt des lettres), dans leur dimension proprement linguistique : à la fois dénotation et sens. Il montre en particulier comment les implicites sémio-linguistique révèlent des problèmes épineux qui permettent de mieux comprendre certaines difficultés des élèves.

En observant deux leçons successives d'une classe de CP résolvant un problème tout à fait classique à ce niveau, j'ai pu commencer à montrer, avec Marceline Laparra (Laparra & Margolinas, 2009), que la dimension d'entrée dans l'écrit – pourtant omniprésente au CP quand il s'agit d'écrire en français – semblait aller de soit quand il s'agissait de mathématiques élémentaires.

Le travail que je propose en hommage à Jean-Philippe Drouhard consiste à reprendre le corpus de ces leçons pour prendre au sérieux la façon dont les différentes étapes de résolution du problème : conversion, traitement algébrique, conversion constituent un outil permettant de mieux comprendre les très nombreuses difficultés rencontrées non seulement par les élèves, mais aussi par leur professeur.

Je m'excuse d'avance de ne pas être une experte de l'épistémographie, j'ai suivi ce très important travail de trop loin pour pouvoir être considérée autrement que comme une amatrice pas très éclairée.

Points de départ

Discipline et représentation

> « Il n'y a pas de discipline sans représentation (sémiotique et linguistique) des objets de cette discipline. »
>
> « La composante sémiolinguistique d'un objet de savoir donné est ce qu'il faut savoir du système de représentation sémiolinguistique pour représenter cet objet. »
>
> (Drouhard, 2014)

Connaissance et savoir

En m'appuyant sur la distinction entre connaissance et savoir je vais m'interroger ici sur la composante sémiolinguistique des connaissances des élèves et des professeur.

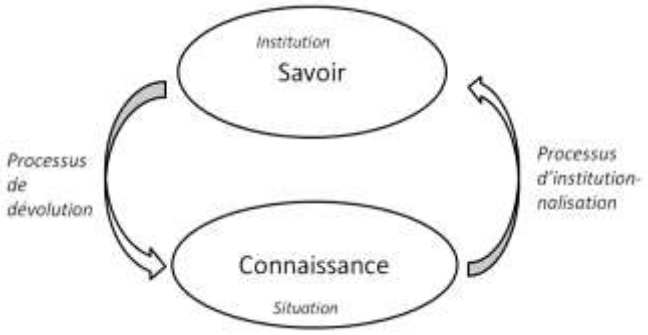


figure 1 : Savoir et connaissance

La distinction entre savoirs et connaissances (Brousseau, 1990; Conne, 1992; Margolinas, 2014), proposée dans le cadre de la didactique des mathématiques, nous rapproche de l'affirmation de Drouhard (ci-dessus) sur l'existence même d'une disciplines – ici, les mathématiques.

Dans les institutions productrices de mathématiques, le savoir se présente comme un texte : il est linéarisé, dépersonnalisé, détemporalisé et universalisé, il s'appuie sur une représentation (sémiotique et linguistique) qui est non seulement linéarisée mais de plus, en mathématiques, de nature écrite. Ce n'est pas nécessairement le cas pour toutes les disciplines, ni à toutes les époques, ce qui serait un autre débat (Laparra & Margolinas, 2016). La forte relation des mathématiques avec l'écrit font d'ailleurs parfois considérer les mathématiques comme « une langue », malgré les efforts des mathématiciens eux-mêmes pour nuancer une telle affirmation (Lafforgue (n.d.), Thurston (1994)). De plus, pour qui s'intéresse aux systèmes sémiotiques, il est essentiel de considérer que ceux-ci n'existent jamais indépendamment des autres systèmes qui cohexiste dans la société, ce qui n'est pas toujours le cas, notamment en classe, comme ce texte entend montrer.

Cependant, les mathématiques ne sont une construction culturelle « gratuite », même si elles sont abstraites. Les concepts mathématiques émergent des problèmes qu'ils permettent de résoudre et ce, même pour les concepts les plus élémentaires, comme celui de « quantité », lié à celui de « nombre ». On attend d'un enfant, dès le début de l'école élémentaire, non seulement qu'il sache réciter la suite orale des mots-nombres (un, deux, trois, etc.) mais aussi qu'il sache dénombrer par comptage (c'est-à-dire connaître le nombre d'objets d'une collection) quand c'est utile et pas seulement à la demande (par exemple s'il veut savoir combien d'assiettes il faut porter pour mettre la table). On attend d'un ingénieur qu'il soit capable de décider de la modélisation qu'il doit mettre en place pour résoudre une question qui lui est posée, et pas seulement de savoir résoudre des équations différentielles à la demande.

Dans ces exemples, ce qui est attendu n'est pas la restitution d'un texte de savoir, mais une conduite adéquate en situation qui correspond à la recherche d'une réponse (souvent non verbale) en situation : c'est ce que nous appelons une connaissance. Définir une connaissance est difficile : une connaissance est ce qui permet un équilibre en situation et qui est le plus souvent implicite, la connaissance se manifeste par ce qu'elle permet de faire dans une situation donnée. Pour l'observateur, elle n'est identifiable que grâce à une analyse *a priori* de la situation : quelles sont les différentes façons d'atteindre un but ? Comment peuvent-elles se manifester ? Si nous reprenons l'exemple simple de l'enfant qui met la table, il est possible d'observer s'il cherche à estimer la quantité de convives ou bien s'il la connaît déjà et comment il fait usage ou non de cette quantité : il peut aller chercher une poignée de fourchettes et déposer chaque couvert là où il sait que les convives s'assoient d'habitude puis rapporter ce qui est en trop : dans ce cas la quantité ne se manifeste pas comme une connaissance mais seulement la correspondance terme à terme. Peut-être qu'il ne fera pas de même pour les assiettes (plus lourdes) ? Compte-t-il les assiettes ? Jusqu'à quel nombre ? Etc. Ce n'est pas parce qu'il ne compte pas les fourchettes que la connaissance du comptage n'est pas disponible dans une autre situation (assiettes, par exemple), cette connaissance n'est pas utile pour lui dans cette situation-là mais le sera peut-être dans une autre. La connaissance n'est pas « dans » le sujet, elle se manifeste dans l'interaction entre le sujet et une situation.

La distinction entre savoir et connaissance est fondamentale dans le cadre de la Théorie des Situations (Brousseau, 1998).

> « La détermination d'une connaissance mathématique par un problème dont cette connaissance est la solution est un procédé aussi ancien que les mathématiques. La [théorie des situations didactiques en mathématiques] est simplement une théorisation de ce procédé. Il existe de nombreuses situations relatives à une même connaissance. De même, de nombreuses connaissances peuvent intervenir dans une décision unique. Un des objets de la théorie des situations didactiques en mathématiques (T.S.D.M) est de classer les situations et par conséquent les connaissances en fonction de leurs rapports et des possibilités d'apprentissage et d'enseignement qu'elles offrent. » (Brousseau, 2003, p. 2).

Mathématiques au C.P. : entrée dans l'écrit et algèbre (?)

Composantes sémiolinguistique et notionnelle

> « Dans certains cas (en mathématiques par exemple) la composante sémiolinguistique est plus complexe que la composante notionnelle même. » (Drouhard, 2014)
>
> « Ce sont les conversions qui permettent d'accéder à l'objet (considéré comme l'invariant de ses représentations) » (Drouhard, 2013a)

Dimensions algébriques

> « Notre thèse est ainsi que l'algèbre est un objet qui se déploie dans trois dimensions de l'espace dit épistémographique et une dimension du temps […]
>
> - Art de résolution de problèmes numériques
> - Ensemble de système sémiotique de représentation des nombres, de leurs relations et de la résolution de problèmes numériques
> - D'une science des nombres […]
>
> En ce qui concerne la dernière dimension temporelle, la prendre en compte revient à considérer l'algèbre comme un complexe qui évolue et dont les caratérisations possibles varient selon les époques » (Drouhard, 2013b)

Je vais interroger ces dimensions dans le cadre temporel de la classe et du curriculum, dans le domaine du « calcul » à l'école primaire.

Une observation en C.P. : en amont du travail écrit sur le fichier

L'observation sur laquelle je vais m'appuyer a été faite en octobre 2005[1] au C.P.[2], dans une classe ordinaire. L'enseignante de la classe s'appuie sur le manuel scolaire *J'apprends les maths*[3], les élèves disposent d'un fichier[4] utilisé quotidiennement. Voici la page du fichier utilisée lors de notre observation (figure 2).

---

[1] Dans cette classe, qui a été l'objet d'une observation pendant toute l'année scolaire, nous n'avions pas encore l'autorisation de filmer, le corpus a été établi sur la base de mes notes manuscrites.

[2] Première classe de l'école élémentaire, élèves de 6-7 ans.

[3] Brissiaud, R., Clerc, P., & Ouzoulias, A. (2001). *J'apprends les maths avec Picbille*. Paris: Retz.

[4] Version du manuel destinée aux élèves, dans lequel les élèves écrivent directement leurs réponses, les fichiers sont très répandus au début de l'école élémentaire.

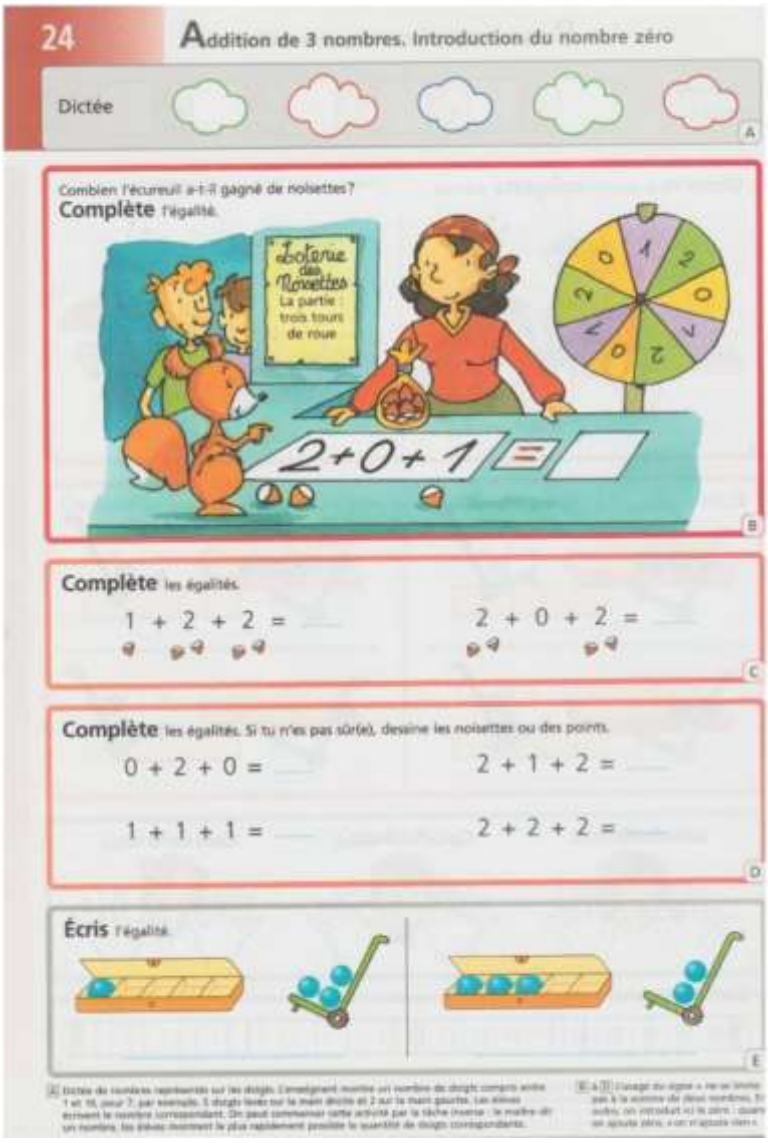


figure 2 : Fichier C.P. *J'apprends les maths*

Le travail des élèves dans le fichier a été précédé d'un travail par groupes de quatre élèves, qui est adapté par l'enseignante des propositions se trouvant dans le livre du maître destiné aux professeurs (p.62-63), auxquelles réfèrent l'illustration « la loterie des noisettes » en haut de la page du fichier.

Dans la classe observée, dans cette activité préliminaire, dans le groupe de trois élèves, deux élèves sont des « joueurs » ; un élève est chargé de s'occuper des jetons ; le quatrième élève est un « secrétaire » qui dispose d'une ardoise effaçable. Les joueurs disposent de dix jetons, d'un dé numéroté uniquement 0, 1, 2, d'un verre et d'une barquette. Le premier joueur lance le dé, récolte le nombre de jetons obtenu (donné par l'élève chargé des jetons) et ceci trois fois de suite. Le deuxième joueur fait alors de même.

Le professeur a indiqué la façon dont le secrétaire doit organiser son ardoise : « Deux joueurs/ partagez en deux en mettant une lettre », ce qui a déjà été utilisé pour d'autres jeux. Elle rappelle les règles de l'écriture des calculs en ligne[5] en donnant un exemple « 2+ » et en suite on relance le dé et « on met un = pour montrer combien on a trouvé en tout ». Cependant, la façon dont vont être utilisées les deux façons de rendre compte de la partie (tableau et écriture en ligne) n'est pas très claire.

Les élèves ont beaucoup de mal à s'organiser dans l'ensemble du jeu : le verre sert à recevoir les jetons donnés par le responsable des jetons, qui prend son rôle très au sérieux, le verre est ensuite vidé

[5] Dénomination des programmes scolaires, sur laquelle je reviendrai.

dans la barquette qui, normalement, sert à recueillir les gains des chaque joueur jusqu'à la fin de ses lancés. Cependant, les élèves qui jouent, dans leur précipitation à jouer, ne vident pas la barquette à la fin de chaque jeu, ce qui fait que les gains sont invérifiables et que les jetons finissent par manquer. L'enjeu d'écriture étant dévolu uniquement au secrétaire, les joueurs ne s'y intéressent pas du tout. De plus, certains élèves ont du mal à trouver le résultat du gain total à partir du gain de chaque lancé (Ingrid, par exemple, qui compte 3 comme résultat des lancés 1, 1, 2).

L'enseignante intervient assez peu durant le travail de groupe, mais elle insiste auprès des secrétaires sur l'utilisation du signe « = », en particulier quand Huseyin écrit «1 +1+2 4 » elle dit « il manque un signe là [entre 2 et 4]. Huseyin écrit alors «1 +1+2 - 4 », ce que l'enseignante fait rectifier en «1 +1+2 = 4 ».

C'est une fois le jeu rangé, et notamment les ardoises effacées que l'enseignante distribue le fichier (fig. 2). La maîtresse revient sur le jeu et demande aux élèves d'expliquer :

« P : comment vous avez fait pour trouver le nombre de billes

Huseyin : avec nos doigts

P : d'autres méthodes ?

Alexis : j'ai compté les billes si y avait 5 dans le chariot[6]

P : dans le jeu que vous étiez en train de faire

Alexis : moi ma méthode j'ai compté dans ma tête

Mohamed : deux et j'ai eu deux et après j'ai dis quatre et un et ça faisait cinq

P : tu savais que deux et deux ça faisait quatre

Axel : j'ai compté dans ma tête »,

Remarque sur ce dialogue : l'enseignante parle de « billes » alors que dans le jeu que les élèves viennent de vivre il s'agit de « jetons ». Or dans le fichier de la classe, le personnage le plus important est *Picbille* et les objets de référence sont des noisettes ou bien des billes, en utilisant le mot bille, l'enseignante évoque immédiatement le contexte du fichier (réponse d'Alexis).

Ce qui compte pour l'enseignante ici, c'est d'essayer de savoir comment obtenir le bon nombre correspondant à trois lancer de dés, et c'est bien à cette question que les élèves essayent de répondre comme ils peuvent. Il n'est pas question de la façon d'utiliser l'écrit pour rendre compte de la partie.

L'enseignante porte alors l'attention des élèves sur la première image du fichier (la loterie des noisettes) et elle leur demande ce qu'ils comprennent de l'image :

« Samuel : elle vend des noisettes

Élève (non identifié) : l'écureuil compte les noisettes

Sahra : il en avait deux il a ramené deux noisettes

P (agacée, s'adressant à Huseyin) : combien de noisettes/ regarde ton image »

L'enseignante fait alors elle-même le rapport entre le jeu qu'ils ont vécu et la loterie des noisttes :

« P : nous on on a lancé le dé mais lui il a tourné le roue »

Elle interroge alors les élèves sur le résultat final du jeu de la loterie de l'image :

« P : on écrit combien de noisettes en tout ? »

Elle demande alors aux élèves de travailler seuls et :

« P : d'essayer de me trouver une méthode pour me trouver en tout combien est-ce qu'il a gagné »

Dimension algébrique : observation d'un mélange des composantes sémiolinguistiques et notionnelles

[6] Représentation prototypique de ce fichier visible dans le dernier encart de la figure 2.

En m'appuyant sur la caractérisation de l'algèbre donnée par Jean-Philippe Drouhard au début de cette partie, l'art de la résolution de problèmes numériques est en jeu dans cette situation : tous les élèves ne savent pas avec certitude donner le résultat des trois récoltes de jetons. Cependant, presque tous savent comment ils pourraient le faire : en comptant sur leur doigts ou bien en comptant directement le nombre de jetons obtenus (qui est inférieur ou égal à six). Par contre, les résultats du « jeu du dé » ont été écrits (sur l'ardoise effaçable) de plusieurs manières (en colonne, en ligne) en utilisant de façon plus ou moins conforme les règles de l'écriture algébrique. J'emploie ici le terme « algébrique » en référence aux « signes algébriques » que sont + et =, en effet, en arithmétique, le raisonnement repose sur l'oral (ce dont témoigne les vieux cahiers de brouillons, dont les tables arithmétiques sont écrites en toutes lettres : « 3 et 2 font 5 » et non pas « 3+2=5 » comme dans les cahiers contemporains). En s'appuyant sur leur corps (doigts) et sur la récitation de la suite des nombres à l'oral, les élèves se placent dans l'univers de l'oralité et non pas dans celui de la littératie (Laparra & Margolinas, 2016).

L'enseignante interagit avec les élèves à la fois sur la recherche du résultat (art de résolution) mais aussi sur l'écriture de ce résultat (composante sémio-linguistique). Elle ne semble pas s'apercevoir de deux phénomènes :

- Que la résolution du problème (trouver le nombre de jetons) et la façon d'utiliser l'écrit pour en rendre compte sont deux tâches tout à fait différentes
- Que les élèves savent assez bien résoudre le problème dans l'ensemble mis qu'ils ne savent pas comment utiliser l'écrit pour en rendre compte (il est d'ailleurs vraisemblable qu'ils ne perçoivent pas le sens de cet usage).

On a donc un exemple d'une composante sémiolinguistique plus complexe que la composante notionnelle.

Quand les élèves investissent l'écrit : le cas de Wyssem

Dans la suite de l'observation, les élèves sont obligés d'investir l'écrit pour répondre aux questions du fichier (fig. 3)



figure 3 : La première question du fichier

Wyssem écrit :

1+2+2 = 1225 et 2+0+2 = 224

Nous comprenons ce que Wyssem a voulu faire : rendre compte de l'intégralité des deux « parties ». Dans la première, le joueur a tiré 1, 2, 2 et a gagné 5, dans la seconde il a tiré 2, 0, 2 et a gagné 4. Wyssem cherche donc à rendre compte d'une succession temporelle des événements : trois tirages puis annonce du résultat final. Pour faire cela, il investit la raison graphique (Goody, 1979) en écrivant les nombres en écriture chiffrée de gauche à droite, comme il est en train d'apprendre à le faire pour écrire les mots. Du point de vue des fonctions de l'écrit, c'est ici la fonction bureaucratique (*Ibid.*) qui prévaut : rendre compte avec l'écrit de l'organisation des actions et du résultat des actions réalisées. Comme les nombres tirés ainsi que le résultat s'écrit avec un seul chiffre, cette écriture n'est pas ambigüe (contrairement à 1241632 qui s'interprèterait plus difficilement comme 12, 4, 16 résultat 32).

Remarquons au passage que Wyssem a d'abord été confronté à une autre écriture, en colonne, au cours du jeu et que l'écriture qu'il emploie correspond à une transcription en ligne de cette écriture en colonne.

1
2

2

5

Quelle est la différence entre l'écriture attendue et celle de Wyssem ? Wyssem est sans doute prêt à comprendre que l'on veuille séparer le résultat obtenu des nombres qui permettent de l'obtenir. Cette séparation peut être obtenue conventionnellement par n'importe quel signe ou par un mot (« font »), le signe formé par deux traits « = » peut faire l'affaire. Cependant, le fait qu'il se lise « égal » complique les choses : la partie n'est pas « égale » à son résultat et justement Wyssem veut garder la trace de cette partie jouée (Pour une étude qui rend compte de difficultés similaires, au sujet du zéro, voir Pascal, 1980). De plus, dans la partie jouée, la barquette (vide à l'origine) se remplit d'abord avec 1 jeton, puis avec 2 puis encore avec 2, c'est cette barquette qui contient 5 jetons à la fin. Il y a donc une totale égalité de traitement de chaque dé tiré. C'est ici la première partie de l'égalité qui pose problème : il aurait fallut écrire soit 0+1+1+2 : et dans ce cas l'ajout des jetons s'écrit +1, +1, +2, soit +1+1+2. Cependant ces écritures ne sont pas usuelles et n'ont sans pas doute pas été envisagées par les auteurs du manuel, qui ne considèrent la situation d'amorce de la leçon que comme une amorce et pas comme un milieu que les élèves convoquent pour investir la tâche d'écriture.

La réaction de l'enseignante, qui est bien sûr de rayer l'écriture de Wyssem en manifestant son mécontentement pour ne laisser que ce qui était attendu apprend bien à Wyssem quel est le contrat (on peut supposer qu'il apprendra vite ce qui est attendu), mais ne lui permet pas d'investir une question proprement algébrique : de quelle écriture faire usage et pour faire quoi ?

Quand les élèves investissent l'écrit : le cas de Huseyin

Au cours du jeu, Huseyin qui est le secrétaire écrit 2+2=2=6. L'enseignante qui intervient lui dit de façon assez méprisante : « mais deux plus deux combien ça fait ? ». Huseyin (qui est bon en calcul d'une façon général) ne comprend pas la soudaine colère de la maîtresse, d'autant qu'il sait très bien que deux et deux font quatre.

L'écriture d'Huseyin s'explique sans doute par le fait que jusqu'à lors le fichier n'a pas introduit d'addition de trois nombres mais seulement de deux. Huseyin sait que l'écriture correcte est « #+#=# » où # représente un nombre. Il sait sans doute aussi qu'après le « = » il faut écrire le résultat final de l'opération. Il sait donc que faire des deux premier nombres et il sait comment écrire le résultat : « 2+2 ?2=6 » cependant, il ne sait pas s'il vaut mieux écrire « = » car c'est ce qu'on écrit d'abitude après les signes +# ou bien un autre signe (par exemple +). Comme Wyssem, il apprendra sans doute très vite par contrat ce qu'il convient de faire.

Cependant, l'écriture d'Huseyin révèle à nouveau l'inventivité des élèves et leur désir d'investir l'écriture algébrique. Dans le cas d'Huseyin, il n'y a aucune trace d'essai de s'appuyer sur l'écriture linguistique au détriment de l'écriture algébrique. Son écrit révèle qu'il a appris l'écriture antérieure (addition de deux nombres) en s'appuyant sur un contrat, qui ressemble à ce qui s'appelle informatiquement un « masque », le sens du signe « = » comme annonce du résultat a été partiellement intégré, mais c'est sans doute celui du signe « + » qui est obscur, peut-être pour les raisons annoncées plus haut : si + sert d'opérateur, alors il faut l'écrire aussi devant le premier nombre, or Huseyin sait que cela ne se fait pas.

La réaction de l'enseignante nous apprend qu'elle ne peut pas lire une écriture mathématique comme un écrit qui est en cours d'apprentissage : si Huseyin écrit la séquence 2+2=2 c'est nécessairement qu'il se trompe non pas sur l'écriture mais sur l'addition. Alors que cette enseignante a très certainement été entraînée à reconnaître des mots derrière des tentatives d'écrit (au C.P.) très difficiles à comprendre, elle n'imagine pas que l'écrit mathématique aussi est en cours d'apprentissage.

Retour à la dimension écrite du travail algébrique

Les élèves observés font preuve d'une grande inventité sémiotique. Ils manifestent donc des *connaissances* en situation, alors qu'ils manquent clairement de *savoirs*, et que l'institutionnalisation qui pourrait transformer ces connaissances implicites en savoir semble se réduire à l'imposition d'un contrat.

De plus, la situation dans laquelle ils s'essayent à des écritures mathématiques n'est pas claire à plus d'un titre.

D'une part la situation de production d'écrit mathématique n'est pas identifiée comme telle par l'enseignante, qui manifeste la transparence pour elle du savoir « écrit mathématique » (Margolinas & Laparra, 2011). Il ne semble pas y avoir de différence pour l'enseignante entre l'obtention des résultats et leur écriture, ce que nous avions également remarqué (avec un autre enseignant, dans la même classe) au sujet des schémas (Laparra & Margolinas, 2009).

D'autre part, il n'y pas de conditions rendant un tel écrit nécessaire. Les situations de formulation d'un tel écrit peuvent être cherchées en particulier soit dans une fonction bureaucratique, soit dans une fonction communicative.

- En pensant à une fonction bureaucratique, qui relève plutôt de l'auto-formulation, on pourrait mettre en place une situation de formulation avec éloignement dans le temps, dans laquelle il faudrait reproduire à plusieurs jours d'intervalle la partie et son résultat sans avoir besoin de refaire de calcul (Margolinas & Wozniak, 2012).
- En pensant à une fonction communicative, qui relève de la formulation à autrui, il serait possible de mettre en place une communication de la partie et de son résultat, comme cela a été fait dans d'autres travaux (Conne, 1987).

Conclusion

Minoration de l'apprentissage de la composante sémiotique

Les écritures algébriques sont considérées comme des savoirs qu'il faut enseigner par une « visite de l'œuvre » (Chevallard, 2010), même dans les apprentissages premiers, alors qu'aux mêmes niveaux, existe une certaine reconnaissance de la nécessité de construire des situations pour que les élèves commencent d'y acquérir des connaissances avant de les institutionnaliser comme des savoirs.

La forme écrite engendre une posture normative : on ne fait pas n'importe quoi avec l'écrit, surtout s'il s'agit de mathématiques… La forme écrite ne serait pas supposée être d'abord une connaissance en situation alors que l'écriture algébrique est une réponse à des problèmes posés par le travail mathématique.

Les élèves de C.P. investissent pourtant les écritures mathématiques comme des connaissances en situation et ils essayent donc d'optimiser ces écritures pour qu'elles soient utiles. Ils montrent donc qu'il est potentiellement possible d'entrer dans la problématique de l'écrit mathématique au moment même où l'on introduit ces écrits, d'autant que l'apprentissage par contrat va rendre ensuite difficile l'idée même que l'on pourrait écrire autrement que ce que l'on a appris.

On peut donc s'interroger sur le rapport à l'algébrique que peuvent entretenir des élèves à qui on a montré précocement et constamment qu'il ne fallait surtout pas « jouer » avec l'écriture mathématique.

Articulation des registres : le problème et la solution ?

> « L'articulation des registres est le problème, mais aussi la solution; la mise en œuvre des conversions amène en effet à identifier et expliciter ce qui est implicite. Une piste à explorer pour les enseignants pourrait donc être de baser le travail des élèves sur une variation systématique de registres. […]
>
> En fait seule deux conditions semblent nécessaires pour que l'enseignant puisse accompagner efficacement ses élèves dans les apprentissages sémio-linguistiques : il doit d'abord bien maîtriser les registres de représentation des mathématiques – ce qui n'est quasiment jamais un problème en algèbre élémentaire ; mais il doit également être en mesure de repérer dans quel *ordre* sont les difficultés de ses élèves, et *où* elles peuvent apparaître. » (Drouhard & Panizza, 2012, p. 233)

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 9*(3), 309-336.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La pensée sauvage.

Brousseau, G. (2003). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques Retrieved 22/05/2012, from http://daest.pagesperso-orange.fr/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf

Chevallard, Y. (1984). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Première partie: L'évolution de la transposition didactique. *Petit x, 5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Deuxième partie perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x, 19*, 43-72.

Chevallard, Y. (1989-1990). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège – Troisième partie voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x, 23*, 5-38.

Chevallard, Y. (2010). La didactique, dites-vous? *Education et Didactique, 4*(1), 136-143. http://educationdidactique.revues.org/771

Conne, F. (1987). Comptage et écriture des égalités dans les premières classes de l'enseignement primaire. *Math-Ecole, 128*, 2-12.

Conne, F. (1992). Savoir et connaissance dans la perspective de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(2-3), 221-270.

Drouhard, J.-P., & Panizza, M. (2012). Hansel et Gretel et l'implicite sémio-linguistique en algèbre élémentaire. In L. Coulange & J.-P. Drouhard (Eds.), *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Numéro spécial hors série Revue Recherches en didactique des mathématiques* (pp. 209-235). Grenoble: La pensée sauvage.

Drouhard, J.-P. (2013a). Langage et maths en maternelle. Stage FC Valbonne.

Drouhard, J.-P. (2013b). La nature de l'algèbre (points de vue épistémographique et épistémologique). Un projet d'article avec I. Bagni.

Drouhard, J.-P. (2014). L'analyse épistémographique: présentations, réflexions, questions. Séminaire ETOS ACADIS.

Goody, J. (1979). *La raison graphique* (J. Bazin & A. Bensa, Trad. 1977 ed.). Paris: Les éditions de minuit.

Lafforgue, L. (n.d.). Les mathématiques sont-elles une langue ?, from https://www.laurentlafforgue.org/textes/LangueMathematique.pdf

Laparra, M., & Margolinas, C. (2009). Le schéma: un écrit de savoir? *Pratiques, 143-144*, 51-82. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00722211

Laparra, M., & Margolinas, C. (2016). *Les premiers apprentissages scolaires à la loupe*. Bruxelles: De Boeck.

Margolinas, C., & Laparra, M. (2011). Des savoirs transparents dans le travail des professeurs à l'école primaire. In J.-Y. Rochex & J. Crinon (Eds.), *La construction des inégalités scolaires* (pp. 19-32). Rennes: Presses universitaires de Rennes.

Margolinas, C., & Wozniak, F. (2012). *Le nombre à l'école maternelle. Une approche didactique*. Bruxelles: De Boeck.

Margolinas, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques? *Revue Française de Pédagogie, 188*, 13-22.

Pascal, D. (1980). *Le problème du zéro. L'économie de l'échec dans la classe et la production de l'erreur.* Université d'Aix-Marseille II, Marseille.

Thurston, W. P. (1994). Proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177. https://arxiv.org/pdf/math/9404236.pdf