

[Séminaire du LMT, 2 Mars, 2017 | Cachan, France]

Sur la réduction de modèle en non-linéaire : modèle simplifié ou modèle réduit ?

P.-A. Guidault

Coll. : P.-A. Boucard, D. Néron, P. Ladevèze,
E. Baranger, O. Allix, C. Cluzel, M.-F. Soulé de Lafont, M. Capaldo

LMT, ENS Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay
61, avenue du Président Wilson, 94235 Cachan, France



université
PARIS-SACLAY

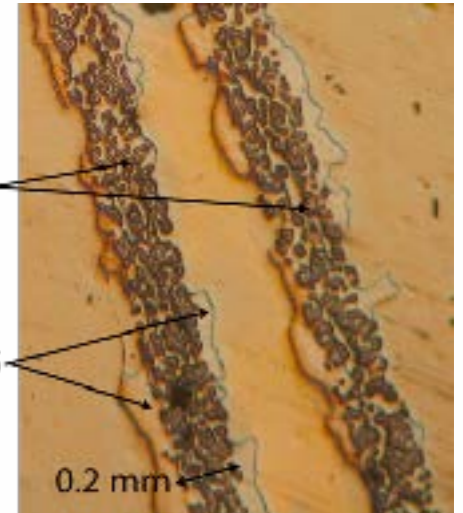


école _____
normale _____
supérieure _____
paris-saclay _____

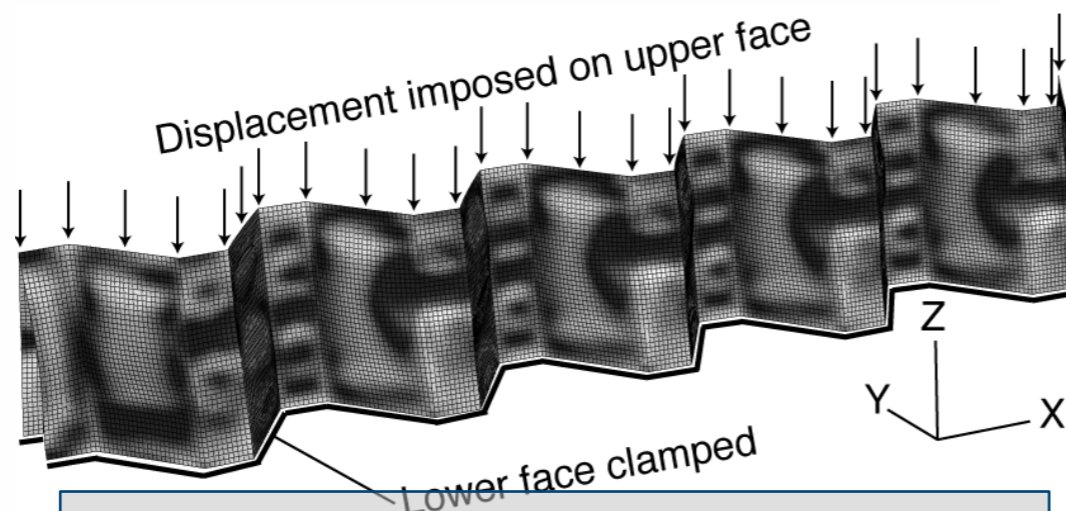
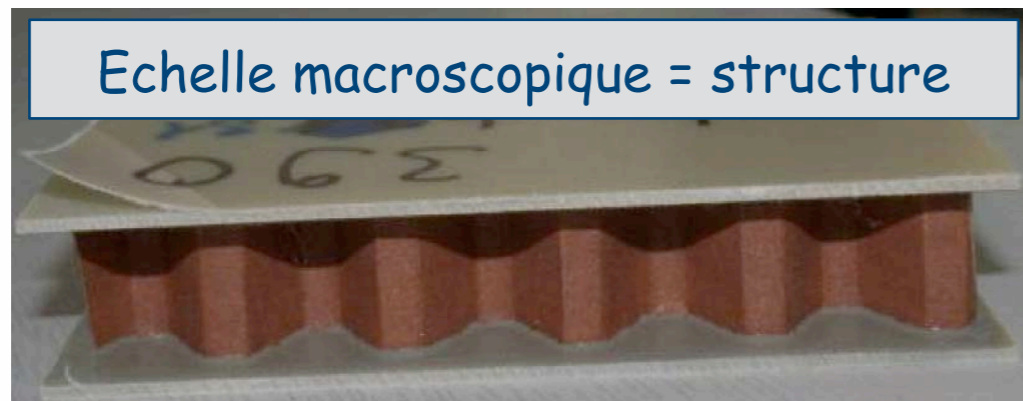
Des modèles toujours plus « fins »

■ Prendre en compte des phénomènes toujours plus complexes pour prédire le comportement jusqu'à « rupture »

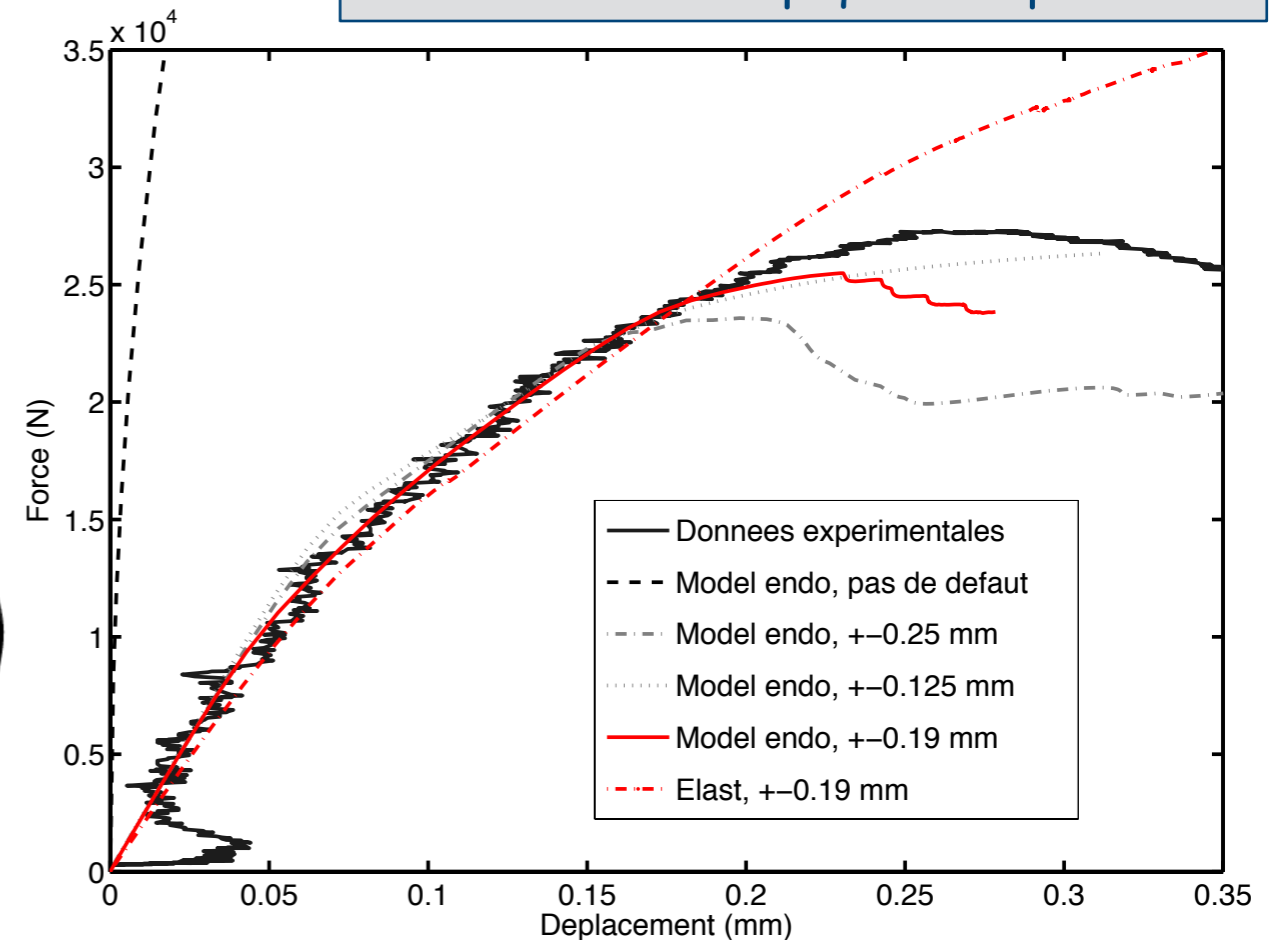
- Interaction des phénomènes aux différentes échelles d'observations : prise en compte de la microstructure, des défauts
- Non-linéarité matériau, mécanismes de dégradation (endommagement, fissuration...)
- Non-linéarité géométrique, influence du chargement, effet « structure »
- Couplages multi-physiques (thermo-mécanique, magnéto-mécanique, électro-mécanique...)
- ...



Echelle microscopique = la plus fine



Echelle mésoscopique = intermédiaire

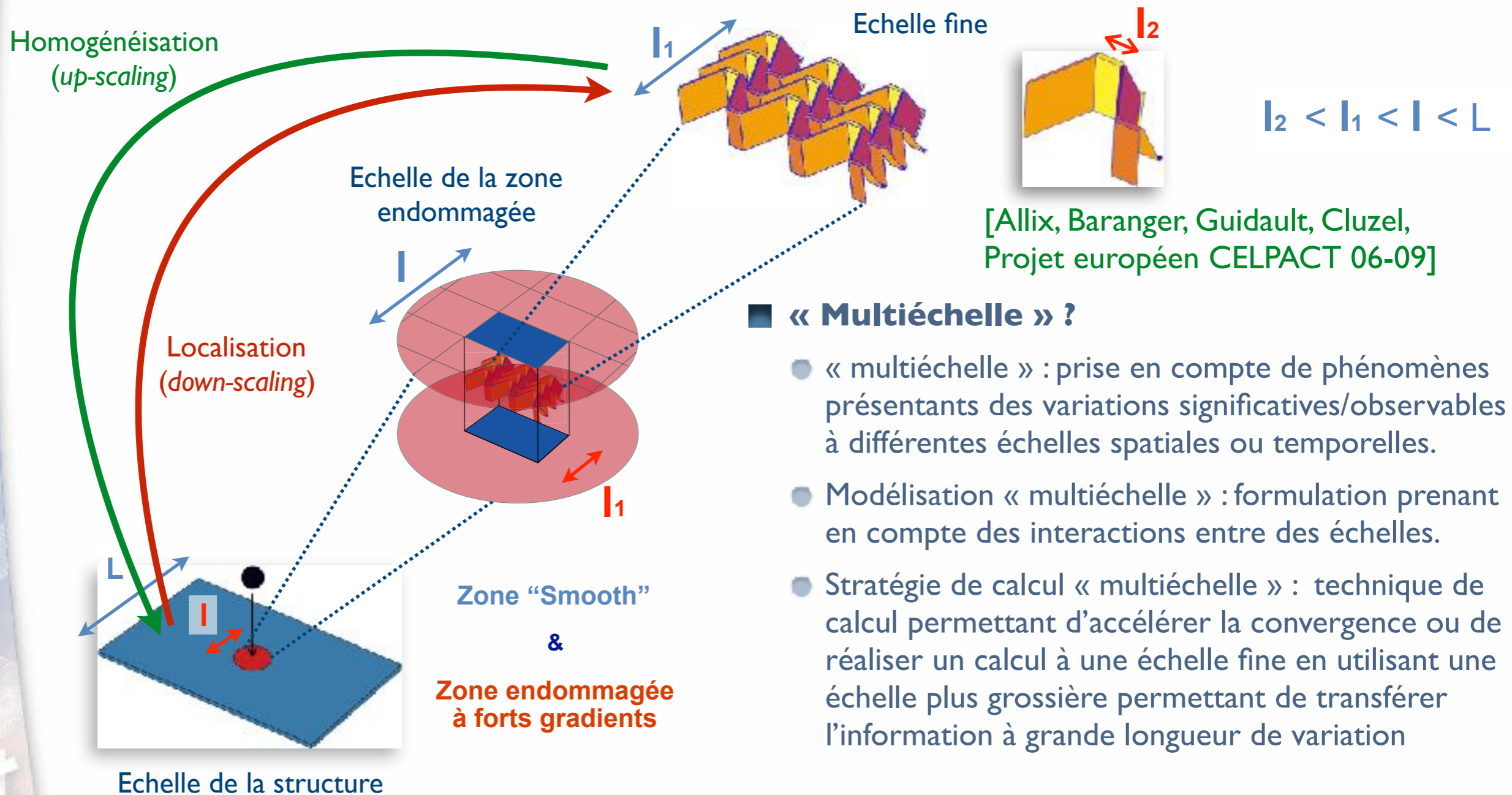


[Baranger, Guidault, Cluzel 2011]

Modélisation « multiéchelle »

■ Une modélisation « multiéchelle » nécessaire

- Approche force brute, à l'échelle micro, hors de portée en pratique
- Développement et optimisation de nouveaux matériaux / structures
- Prise en compte d'incertitudes (microstructure aléatoire, paramètres matériau ou géométriques...) lié au processus de fabrication par exemple



Techniques d'« homogénéisation »

- **Objectif : Identifier des propriétés apparentes / globales prenant en compte plus ou moins la microstructure**
- **Approche « pragmatique » : méthode *Unit cell*, essai « numérique »**
 - Choix d'un modèle de matériau homogène équivalent *a priori* (*up-scaling* uniquement) [Christman and al. 89, Tvergaard 90, Sluis and al. 99...] (cf. exemple précédent)
- **Niveau matériau (microstructure) : homogénéisation au sens classique**
 - Estimation analytique de bornes : Voigt et Reuss, méthodes auto-cohérentes... [Nemat-Nasser, Hori 93...]
 - Hypothèse de « séparation d'échelles », choix d'un VER, équivalence énergétique (Hill-Mandel)
 - Homogénéisation numérique « à la volée » par sollicitation du VER par des modes de déformation macroscopique choisis *a priori* et des conditions limites microscopiques compatibles (*up & down scaling*)
 - ▶ Premier ordre (gradient homogène) : périodique [Bensoussan, Lions 73, Sanchez-Palencia 74, Duvaut 76], FE^2 [Feyel et al. 99] pour le non-linéaire
 - ▶ Premier ordre enrichi ou second gradient, Cosserat [Forest et al. 98, Kouznetsova, Geers et al. 02...] pour les problèmes de gradients localisés
- **Niveau structure (macro) : théories simplifiées (poutre, plaques...)**
 - Hypothèse d'éclatement, cinématique simplifiée, principe de Saint-Venant
 - Reconstruction d'un relèvement 3D *a posteriori* [Ladevèze 80, 85, 02, Sanchez, Simmonds et al. 04, Allix et al. 10, Baranger et al. 06...]

Réduction de modèle & modélisation

■ Un traitement force-brute à l'échelle micro peut s'avérer nécessaire quand les techniques d'« homogénéisation » atteignent leurs limites dans certaines zones :


- Zones de gradients élevés et localisés : bande de localisation qui évolue, rupture, fissuration macroscopique, homogénéisation des « interfaces » plus généralement (choix du VER ? homogénéisation continue-discontinue ?)
- Traitement des structures élancées : effets de bords, délaminage dans les composites stratifiés

■ Les outils de réduction de modèle peuvent aider à réduire la complexité numérique (coût de calcul) sans dégrader le modèle initial :

- Dans le cadre de l'homogénéisation :
 - ▶ Résolutions des problèmes micro par VER : POD pour problème hyperélastique [Yvonnet et al. 07], PGD [Lamari et al. 10]
 - ▶ Réduire le nombre de variables d'état : TFA [Dvorak 94, Fish 97, Chaboche 01], NTFA [Suquet, Michel et al. 03]
- Dans le cadre de la simulation de structure plaque 3D pour une complexité d'un calcul 2D [Bognet et al. 2012], la mécanique de la rupture [Pommier et al. 09] ou la simplification automatique de loi de comportement complexe pour les CMC [Baranger 13, Friderikos et al. 16]
- Pour des problèmes de grandes tailles non-linéaires, paramétrés [Chinesta, Ladeveze 14 (livre)]

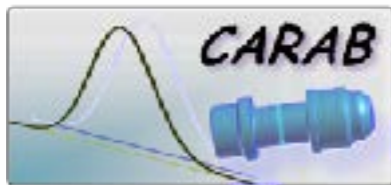
■ Parallèle entre les 1^{er} modes POD / PGD et les modes de déformations macro

- Dédiés aux sollicitations pour lesquels ils ont été générés mais approche systématique



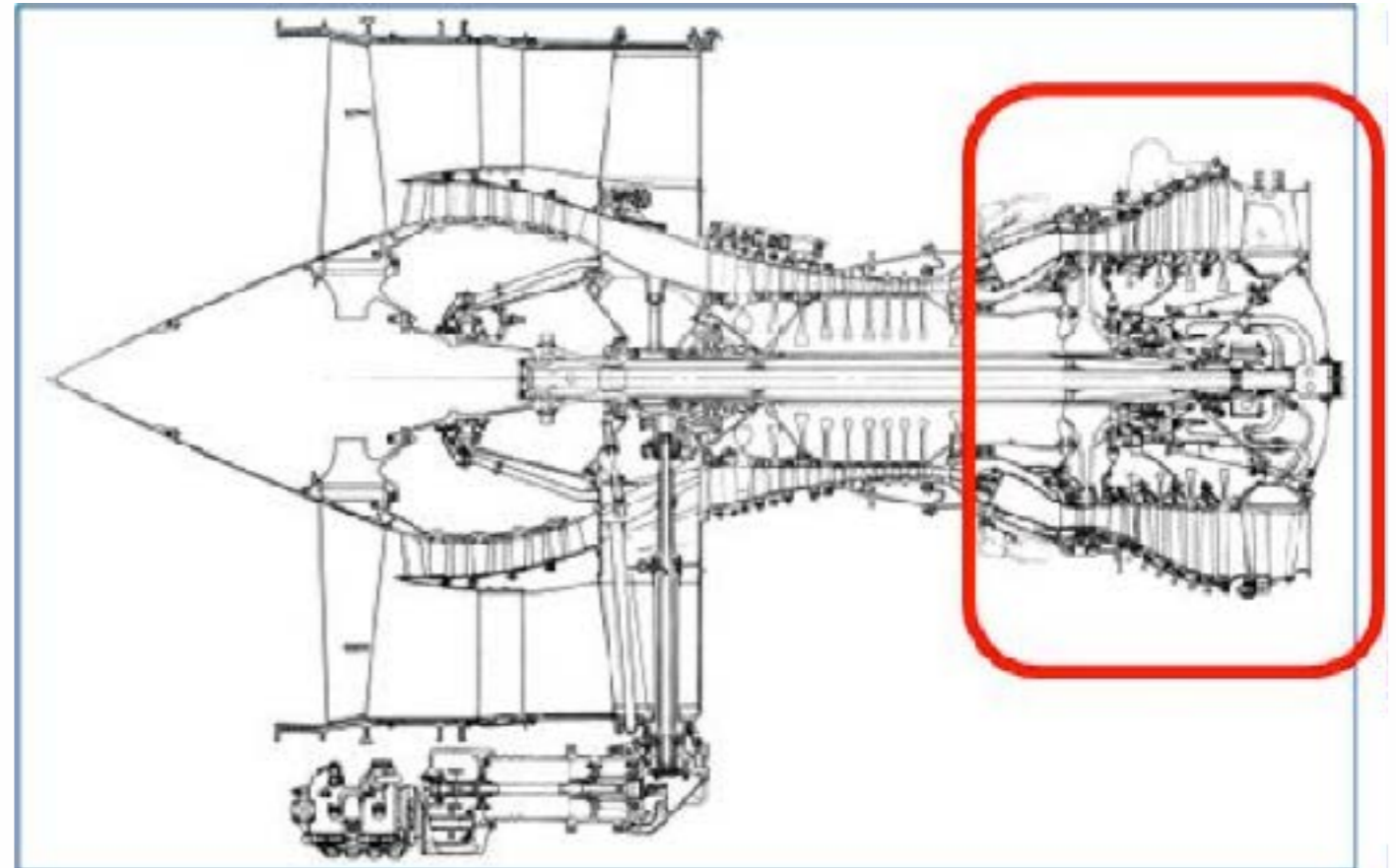
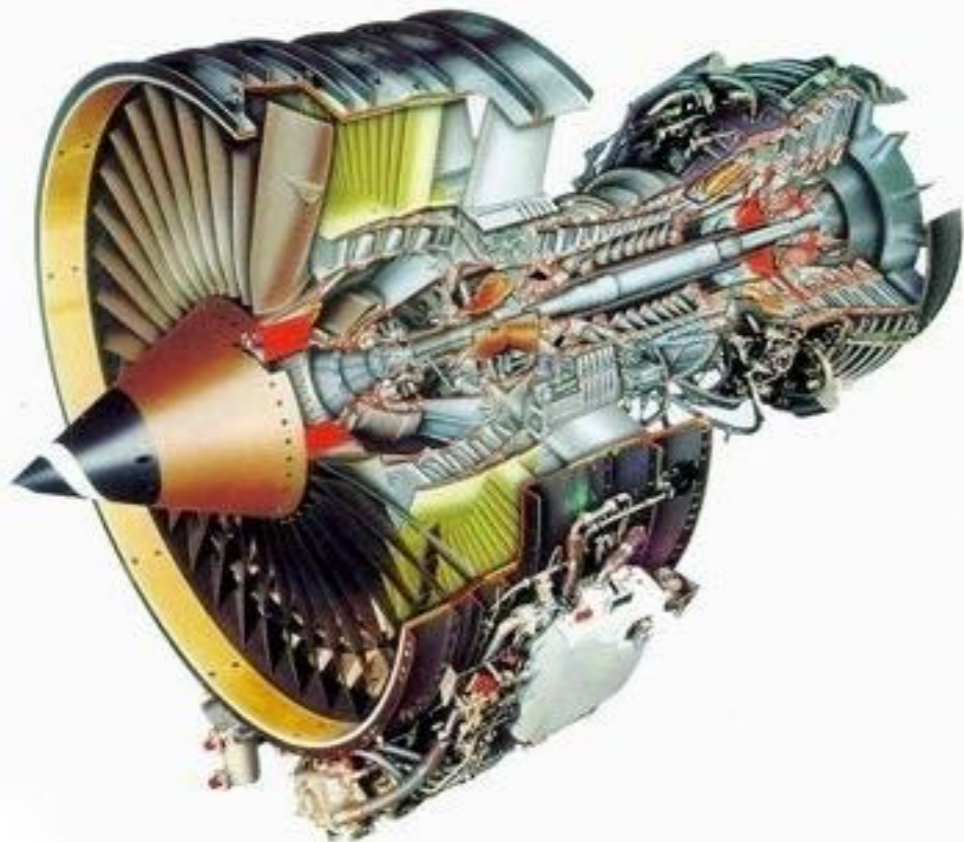
Modèle simplifié pour la simulation d'assemblages boulonnés

M.-F. Soulé de Lafont, P.-A. Guidault, P.-A. Boucard



Contexte industriel

- **Liaisons boulonnées omniprésentes en aéronautique (3 000 000 d'attaches sur un A380, 50 000 sur un Rafale).**
 - Importantes **sources d'incertitude** (procédure de serrage, frottement, tolérances géométriques...)

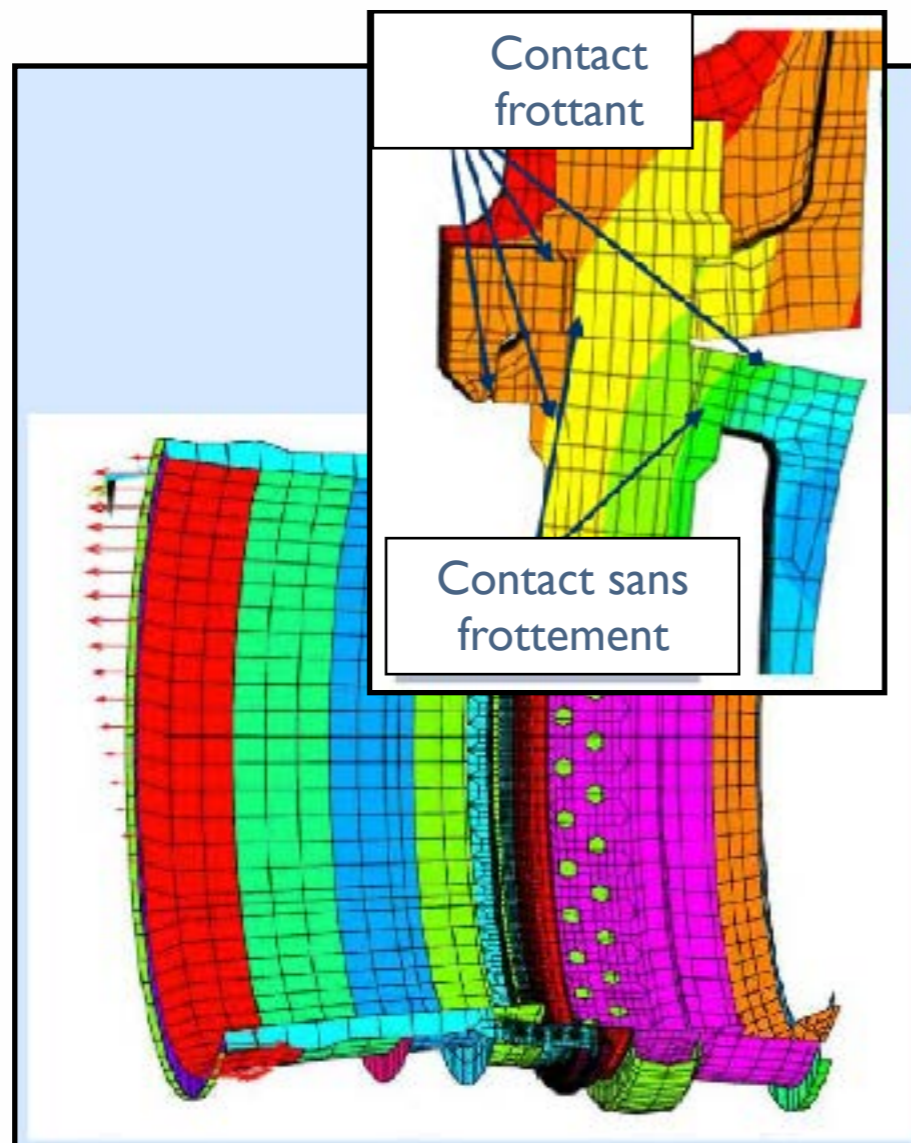


- **L'optimisation en masse et en coût** des assemblages boulonnés sous chargement complexes et de nouveaux matériaux (ex : composites) nécessite des stratégies de conception plus élaborées.
 - ▶ Un gain de 23 kg sur les moteurs (CFM 56, 3500 boulons) d'un avion monocouloir : réduction de 95000 litres de kérosène et 244 tonnes de CO2 pour une exploitation annuelle d'un vol Paris-Toulouse (20 aller-retours par jour) (Utilitaire DGAC <http://eco-calculateur.aviation-civile.gouv.fr>)

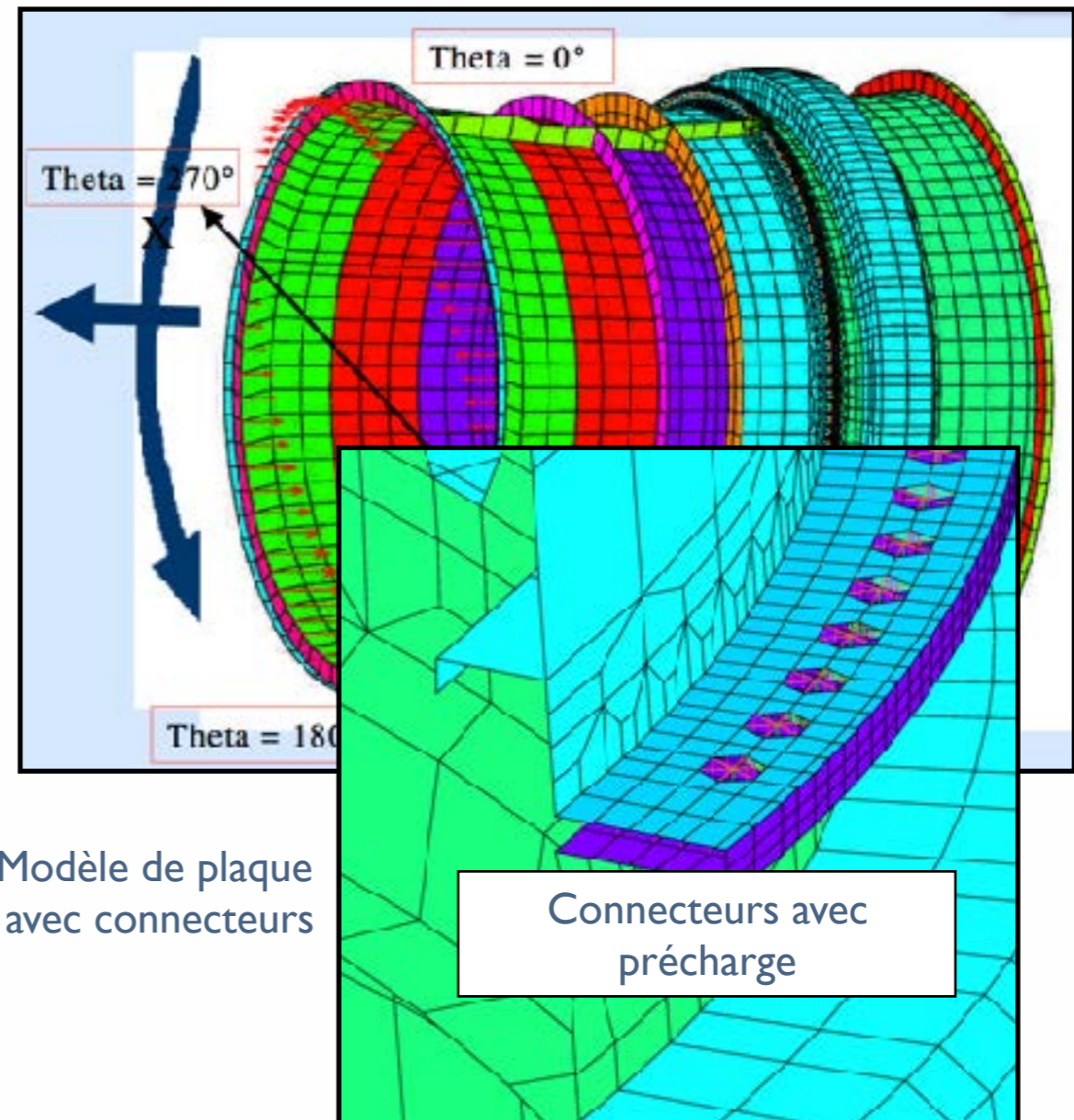
Contexte industriel

■ Besoin de modèles simplifiés pour le dimensionnement/optimisation

- Simulations 3D **trop coûteuses** : grand nombre d'interactions de contact, d'itération [Izumi et al. 05, Lehnhoff et al. 01, Daidié et al. 07, McCarthy et al. 05]
- En pratique : utilisation de **connecteurs** ou **user-elements** à deux noeuds



Modèle 3D



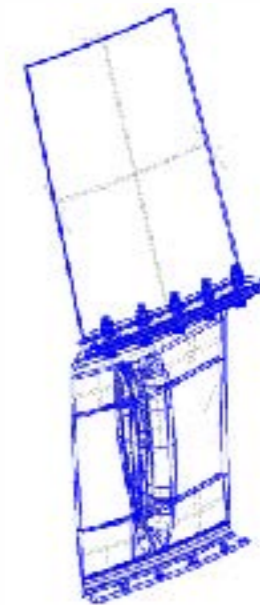
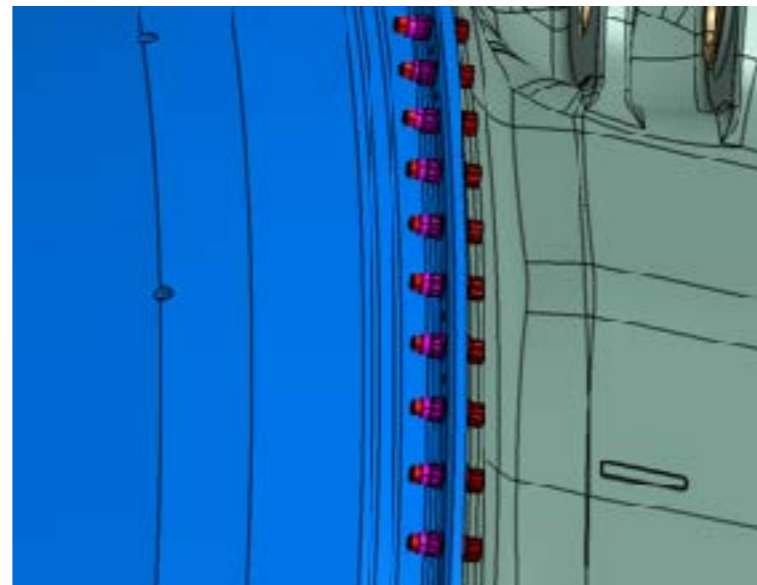
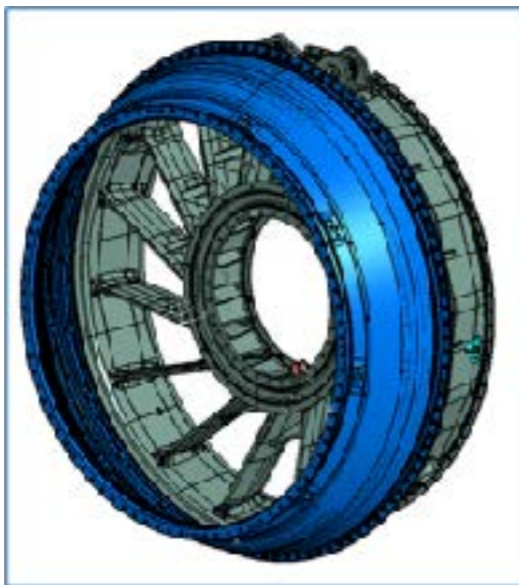
Modèle de plaque avec connecteurs

Connecteurs avec précharge

Objectifs

■ Identification classique des modèles de connecteur / *user-element* :

- Basée sur des résultats expérimentaux et/ou numériques pour une liaison boulonnée élémentaire
- **Valide pour une gamme et des types de chargement spécifiques** ainsi que des paramètres de conception donnés [Bortman et al. 92, MacCarthy et al. 06, Ekh et al. 08, Askri et al. 16].
- **Prise en compte uniquement du comportement élastique en général**
 - ▶ Pour des cas spécifiques, des solutions analytiques [Huth 86, Swift 71, Tate and Rosenfeld 46] ou des modèles simplifiés existent mais principalement en élasticité linéaire (statique / dynamique)

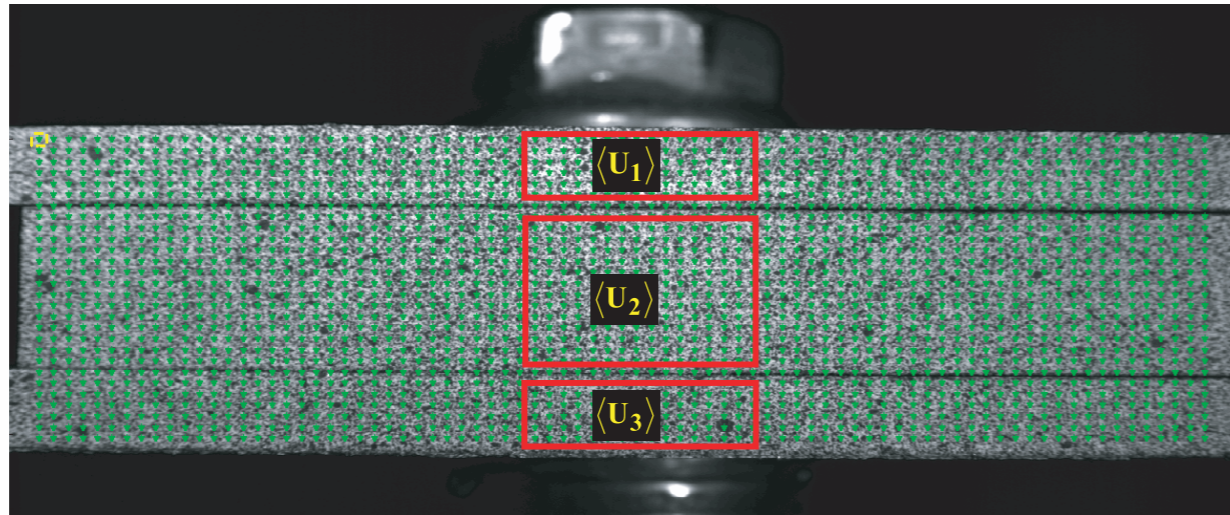


■ Objectif : proposer un connecteur EF en quasistatique qui :

- prenne en compte les **non-linéarités** de type contact-frottant ;
- se base sur des paramètres de conception (précharge, coefficient de frottement, jeu diamétral entre trou et vis, épaisseur des plaques...)
- puisse être facilement intégrer dans un code commercial (ABAQUS, SAMCEF...) : ***user-element***.

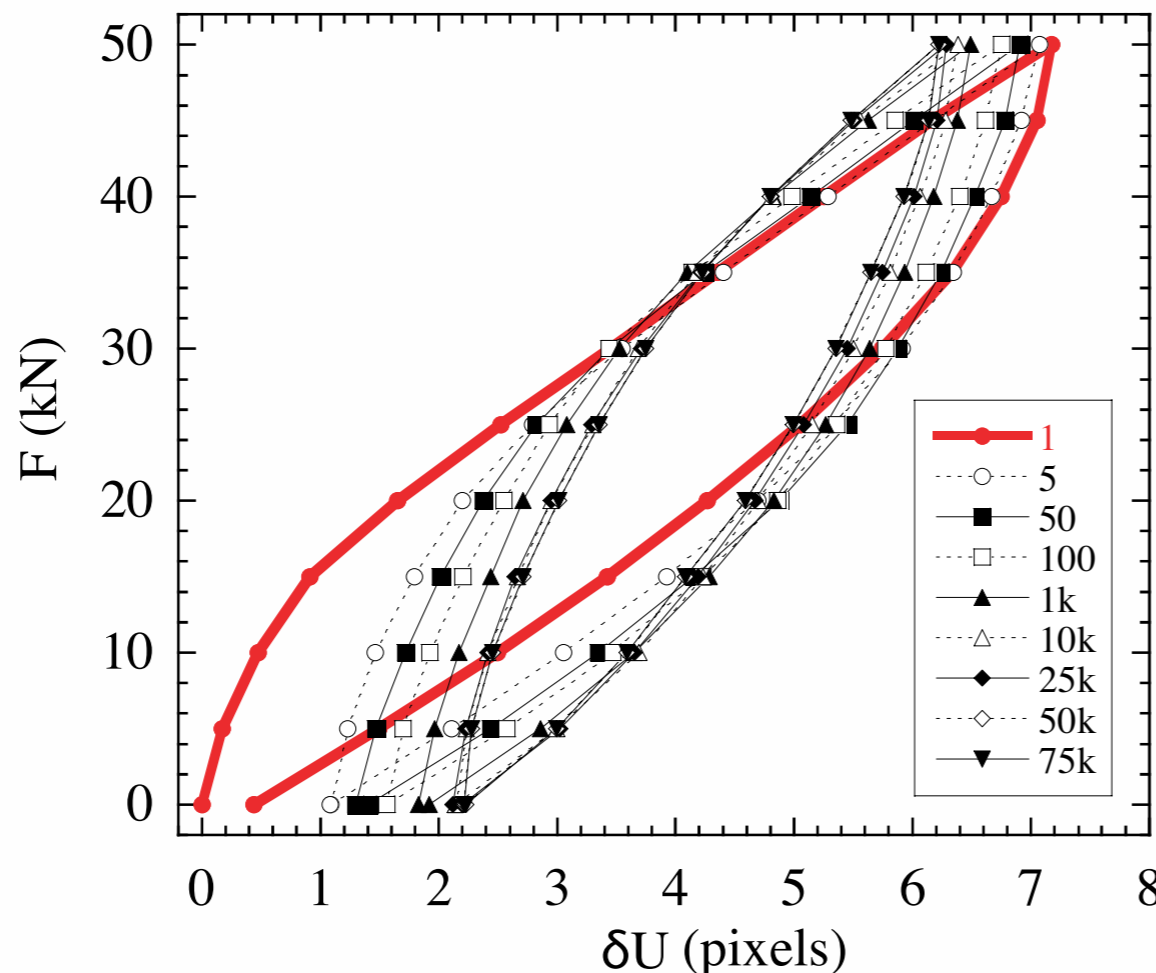
Essai double recouvrement

■ Corrélation d'image [Crevoisier, Swiergiel, Champaney, Hild 2012]



$$\delta U = \left| \frac{\langle U_1 \rangle + \langle U_3 \rangle}{2} - \langle U_2 \rangle \right|$$

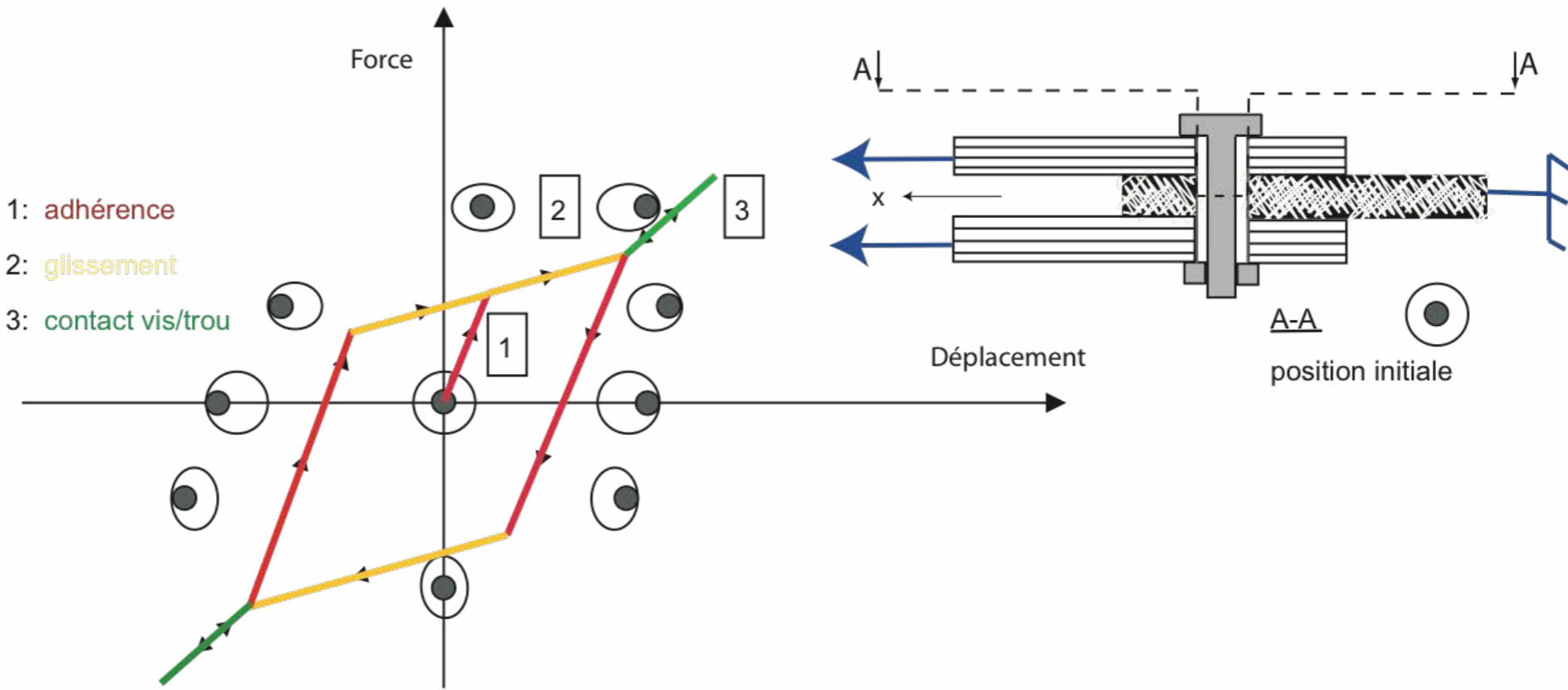
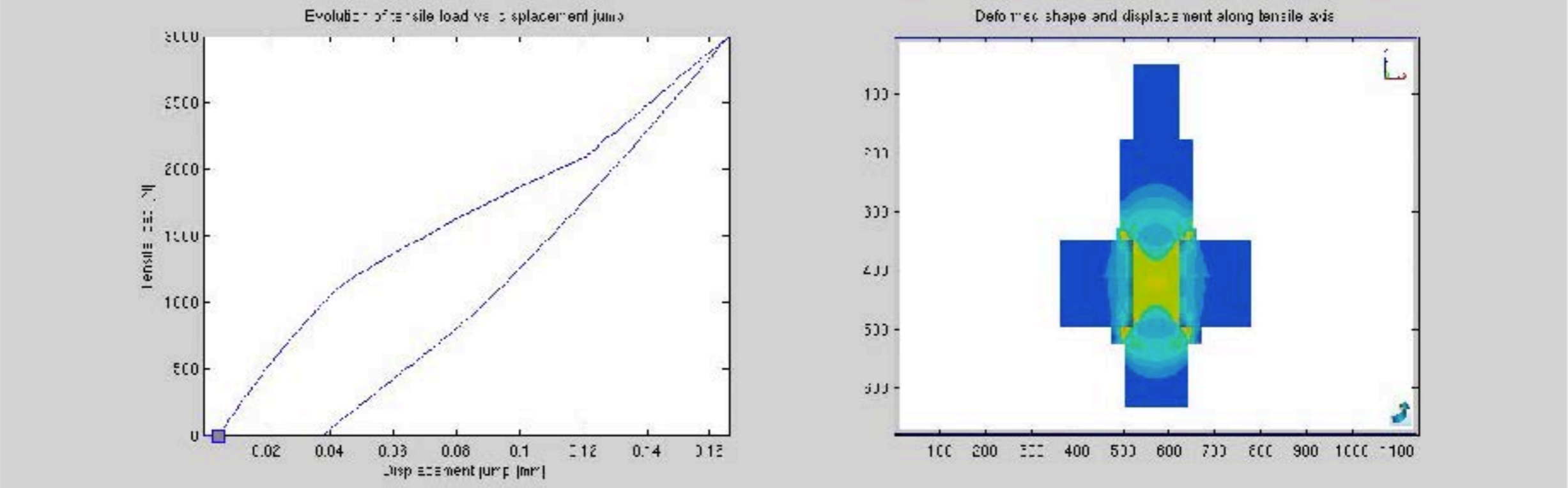
■ Courbe effort - saut



Modification des surfaces de frottement
au cours des cycles conduisant
à une modification du coefficient
de frottement équivalent
[Hills, Nowell 2009]

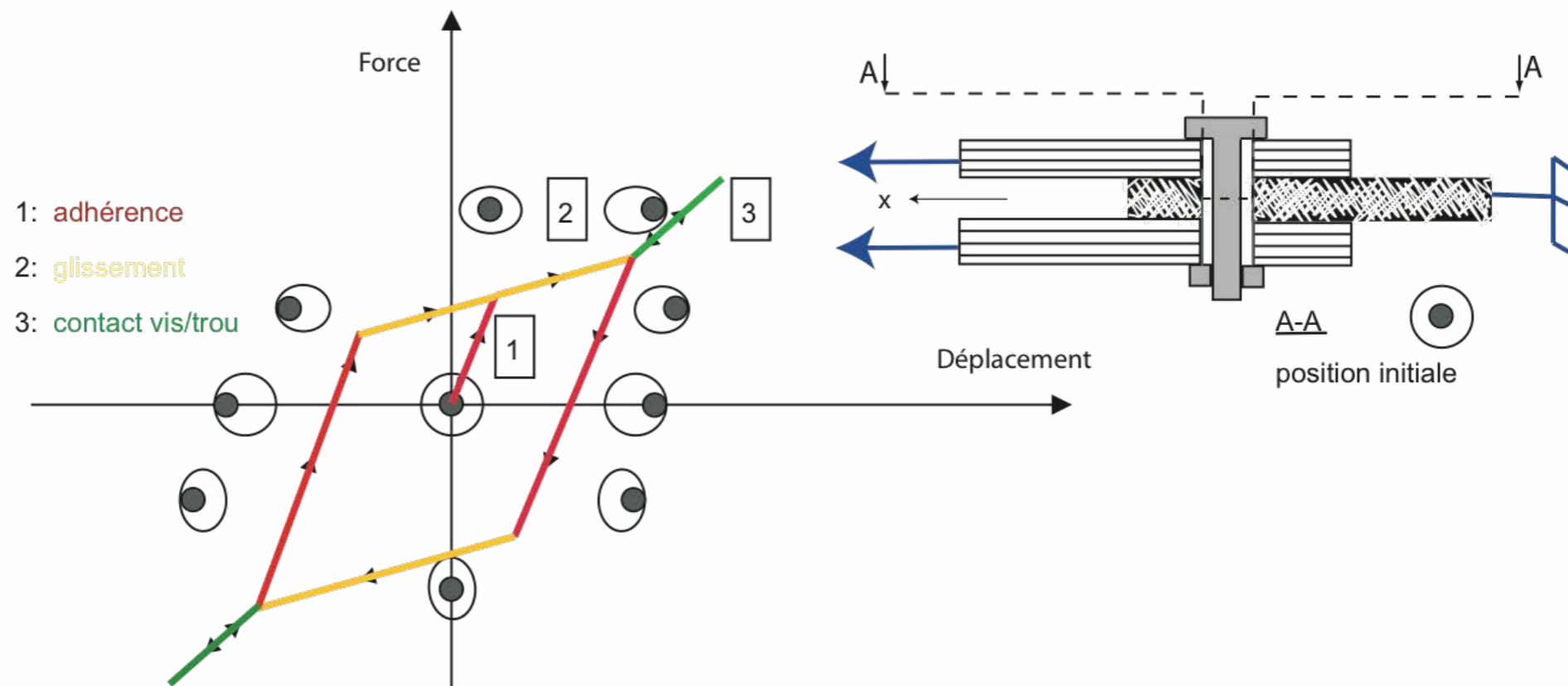
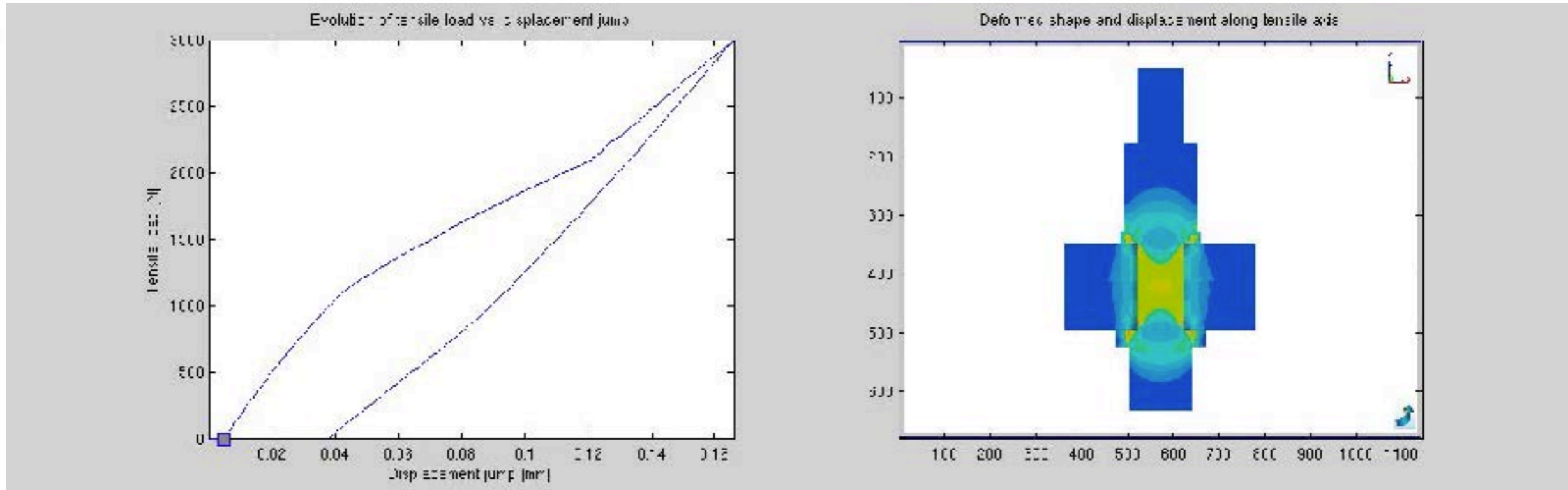
Essai double recouvrement

■ Exemple d'analyse 3D volumique (référence)



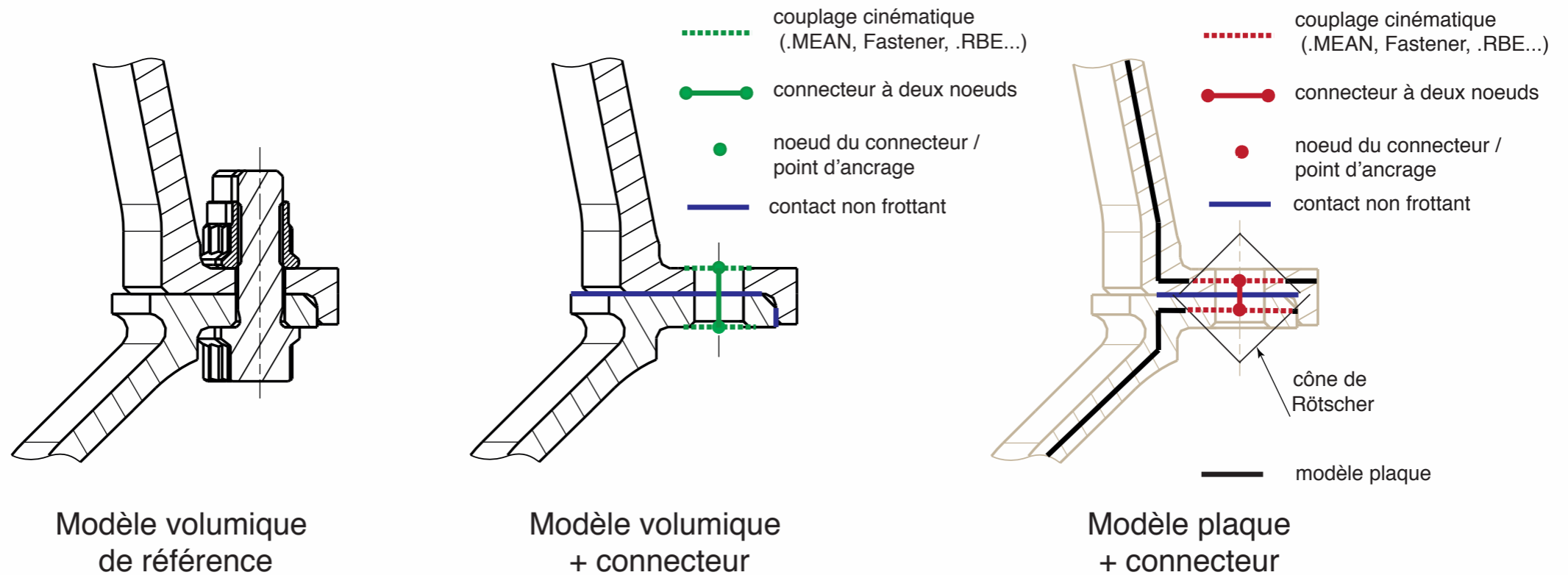
Essai double recouvrement

■ Exemple d'analyse 3D volumique (référence)



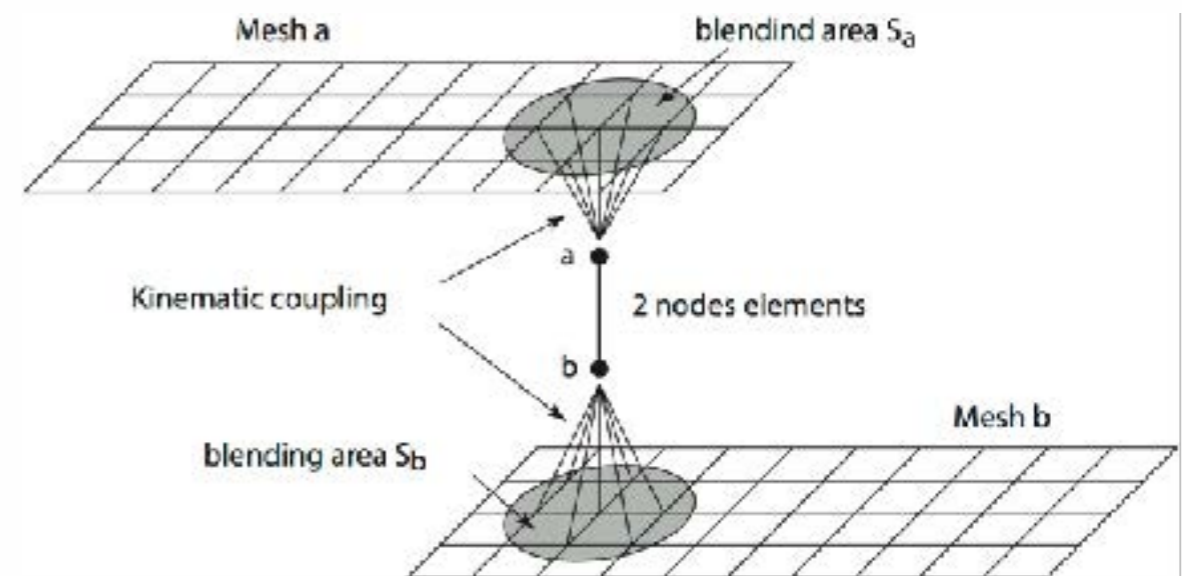
Modélisation par connecteur

■ Connection de modèles 3D ou de plaque (choix *a priori* d'une cinématique)



■ Le connecteur et couplages cinématiques participent à la modélisation de la rigidité des pièces assemblées :

- Le couplage cinématique modélise principalement l'interaction entre la tête de vis/l'écrou et les plaques.
- L'identification des paramètres du connecteur peut dépendre de la taille du rayon d'attache des zones de couplage.

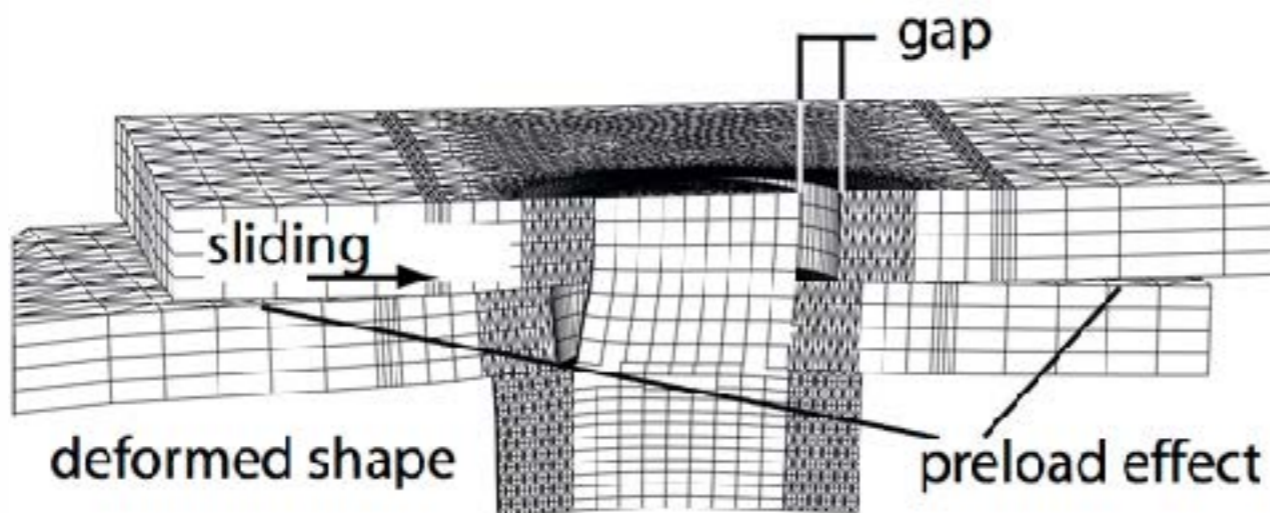
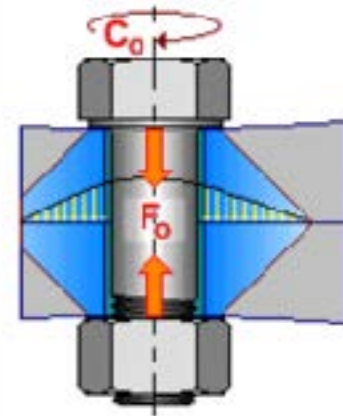


FASTENER dans ABAQUS Cae,
MEAN dans SAMCEF Field

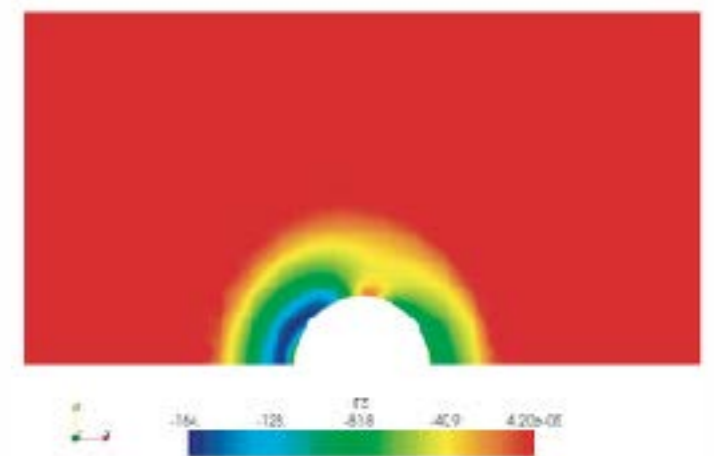
Comportement de la liaison boulonnée

■ Choix de modélisation / séparation des mécanismes :

- Des sollicitations locales généralement simples
- Rôle du couplage cinématique « MEAN / FASTENER » :
 - ▶ Taille de la zone de couplage liée à l'action de la tête de vis ou de l'écrou [Rotscher, 1927]
- Rôle du connecteur :
 - ▶ **Comportement axial/normal du connecteur** : précharge et rigidité équivalente des pièces assemblées.
 - ▶ **Comportement « tangentiel »** : Frottement entre plaques induit par la précharge dans le voisinage du boulon et éventuellement, contact corps de vis / alésage.



Composante normale de l'effort de contact



- ▶ **Conditions de contact sans frottement** : interactions entre plaques / effet de la longueur de bridage (pression de contact localisée près du boulon).

Comportement tangentiel

■ Approche élastoplastique [Wriggers 87, Giannokopoulos 89, Laursen et al. 93]

- Saut de déplacement tangentiel aux noeuds du connecteur est séparé en une partie élastique (adhérente) et une partie plastique (glissante) : $\mathbf{g}_T = \mathbf{g}_T^e + \mathbf{g}_T^s$

■ Fonction seuil (écrouissage isotrope) : $f_s(\mathbf{t}_T, p_N, g_v) = \|\mathbf{t}_T\| - (\mu + g_v H)p_N$

- g_v est le glissement effectif cumulé

■ Estimation pression de contact (cas couplage plaques) : $p_N = \langle P_c - c_N(\mathbf{n}^T \mathbf{g}) \rangle_+$

■ Effort axial dans le connecteur : $t_N = P_C + c_N(\mathbf{n}^T \mathbf{g})$

■ Loi d'évolution (à pression de contact fixée) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{g}}_T^s &= \dot{\gamma} \frac{\partial f_s(\mathbf{t}_T)}{\partial \mathbf{t}_T} = \dot{\gamma} \mathbf{n}_T \quad \text{with} \quad \mathbf{n}_T = \frac{\mathbf{t}_T}{\|\mathbf{t}_T\|} \\ \dot{g}_v &= \dot{\gamma} = \lambda \quad \text{avec} \quad g_v(t) = \int_0^t \|\dot{\mathbf{g}}_T^s(\tau)\| d\tau \end{cases}$$

■ Conditions de Kuhn-Tucker : $\dot{\gamma} \geq 0, \quad f_s(\mathbf{t}_T) \leq 0, \quad \dot{\gamma} f_s(\mathbf{t}_T) = 0$

■ Intégration du comportement tangentiel par algorithme de retour radial

Paramètres du modèle

■ 2 Paramètres de conception

- Précharge P_c
- Eventuellement : coefficient de frottement équivalent (entre plaques ?) μ

■ 3-4 Paramètres à identifier numériquement ou expérimentalement

- Raideur normale c_N : utilisation éventuelle de modèles analytiques [Alkatan, Daidié et al., 2007]
- Raideur tangentielle c_T
- Paramètre d'« écrouissage » H
- Eventuellement : coefficient de frottement équivalent μ

■ Identification à réaliser pour chaque type de boulon

- Définition d'un problème générique paramétré, « *handbook* », *unit cell*

Problème générique pour identification

■ Identification du comportement tangentiel : c_T , μ et H

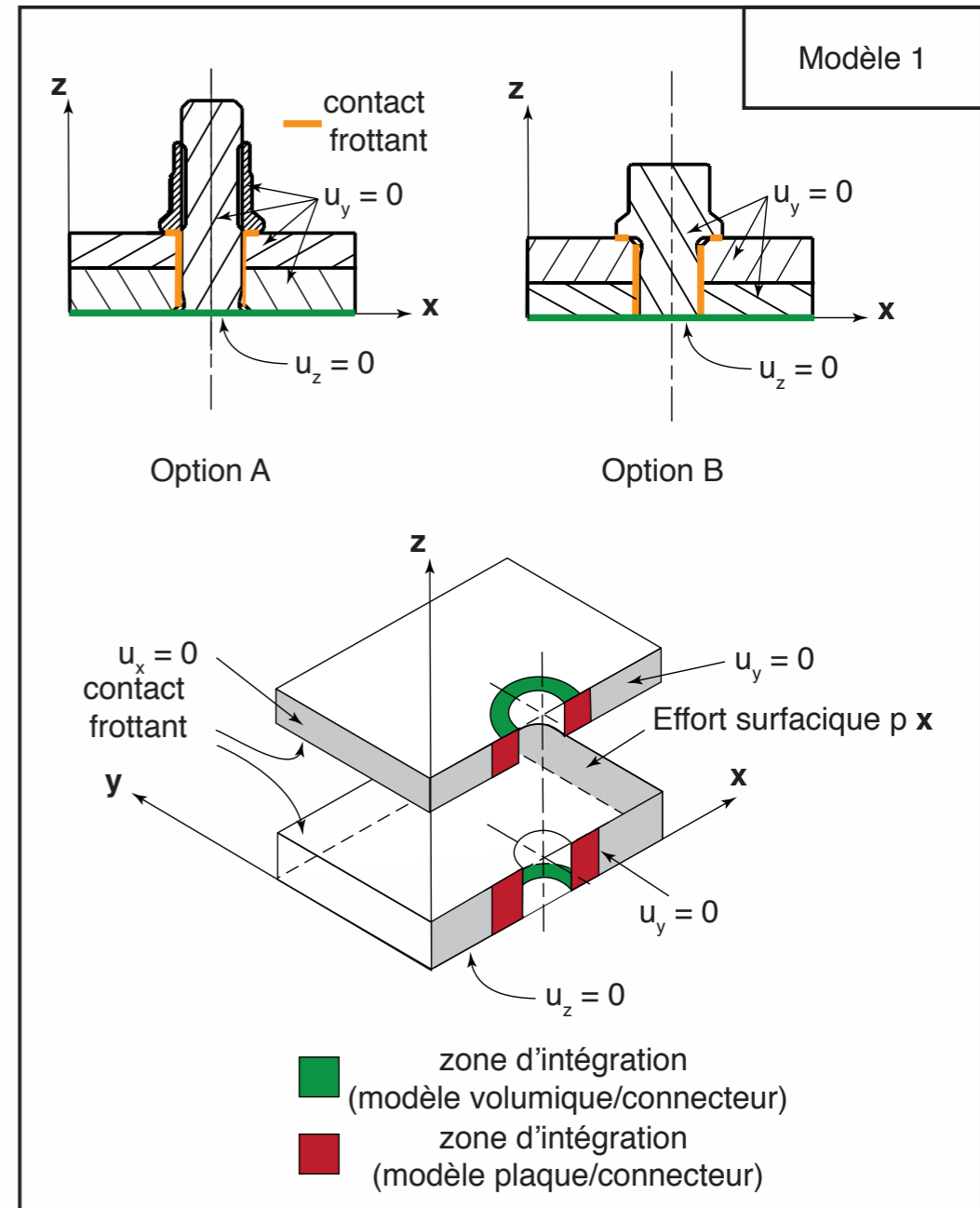
■ Plusieurs cycles de charge-décharge

■ Automatisation possible

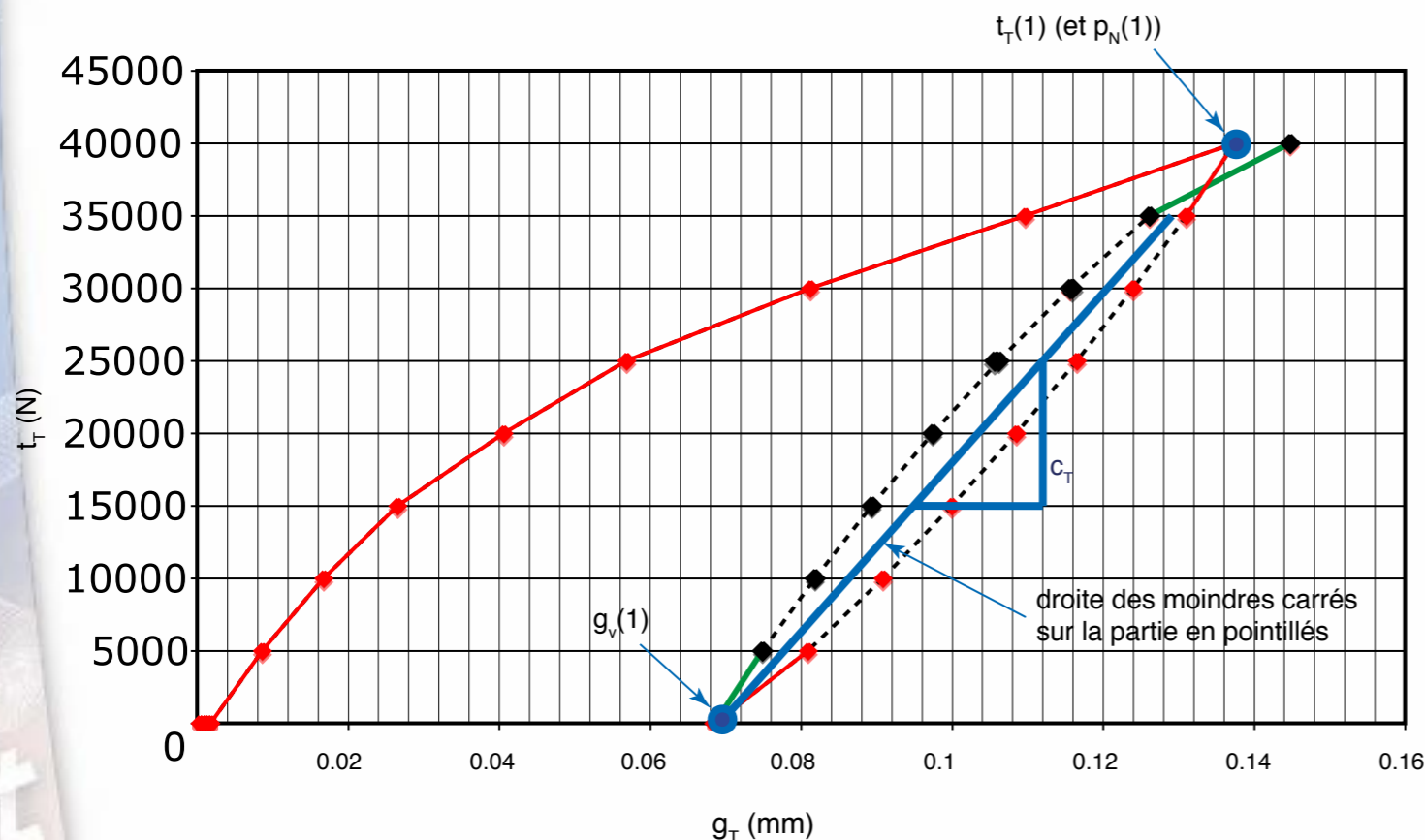
- Géométrie paramétrée
- Identification simple par simple régression linéaire

■ Identification possible à partir d'essai double recouvrement [Crevoisier, Swiergiel, Champaney, Hild 2012]

- Mesure locale de saut de déplacement sur la tranche
- Corrélation d'image sur la tranche



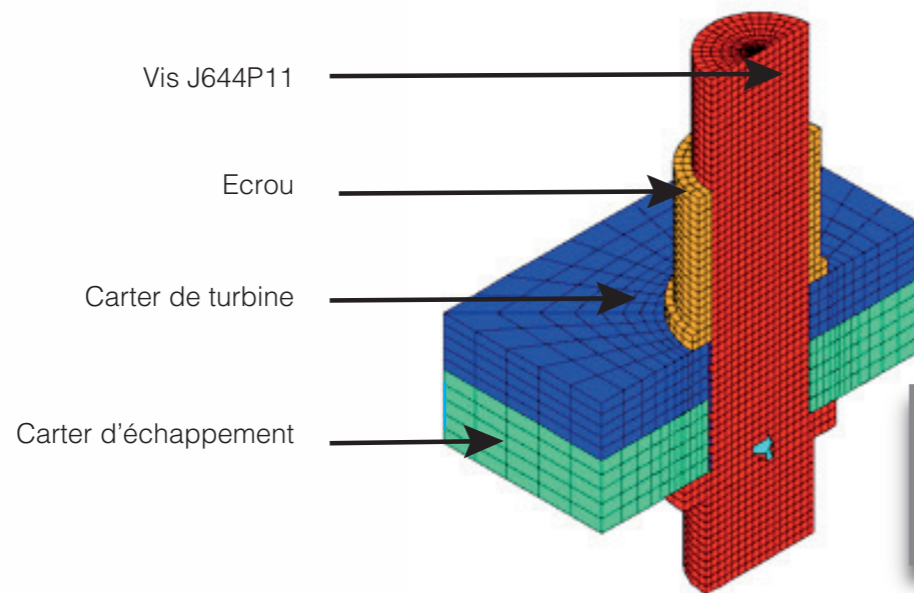
Problème générique (Unit Cell)



Exemple d'identification

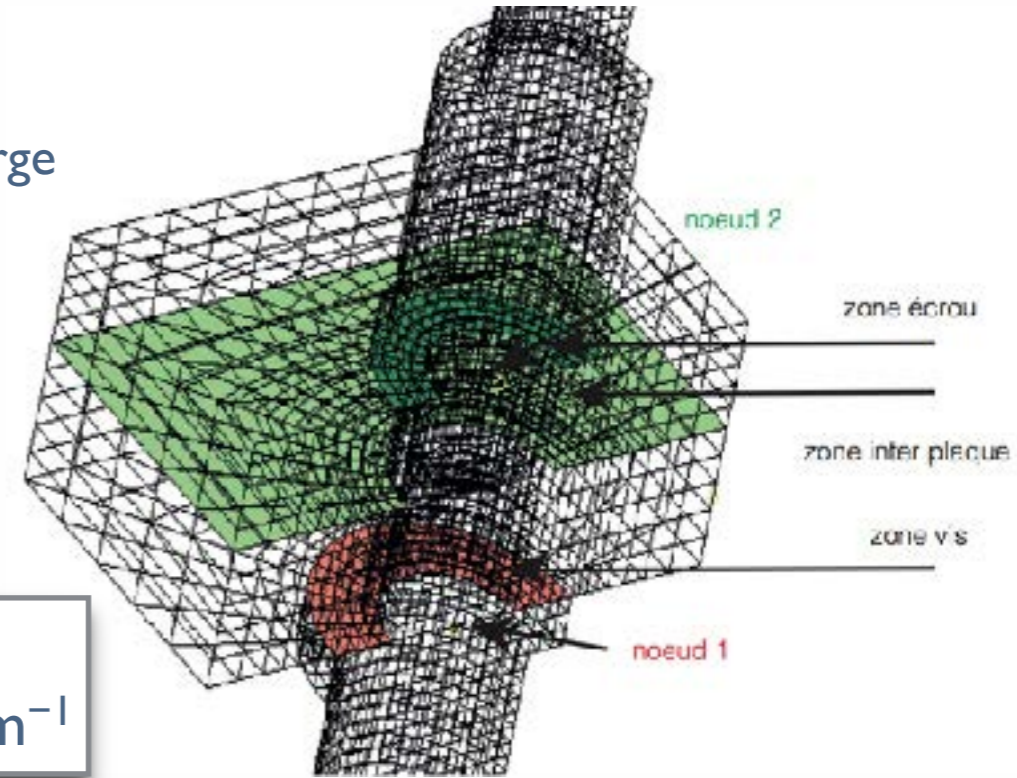
■ Boulon d'un assemblage de bride SNECMA

- Modèle générique, I précharge + cycles de charge-décharge

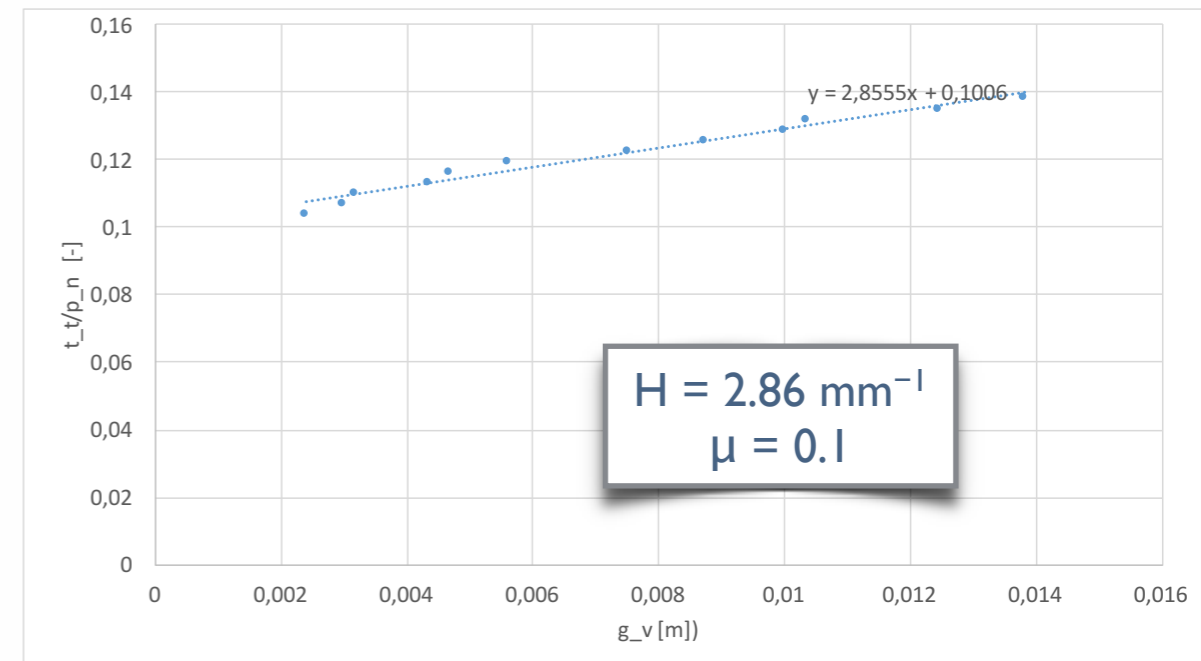
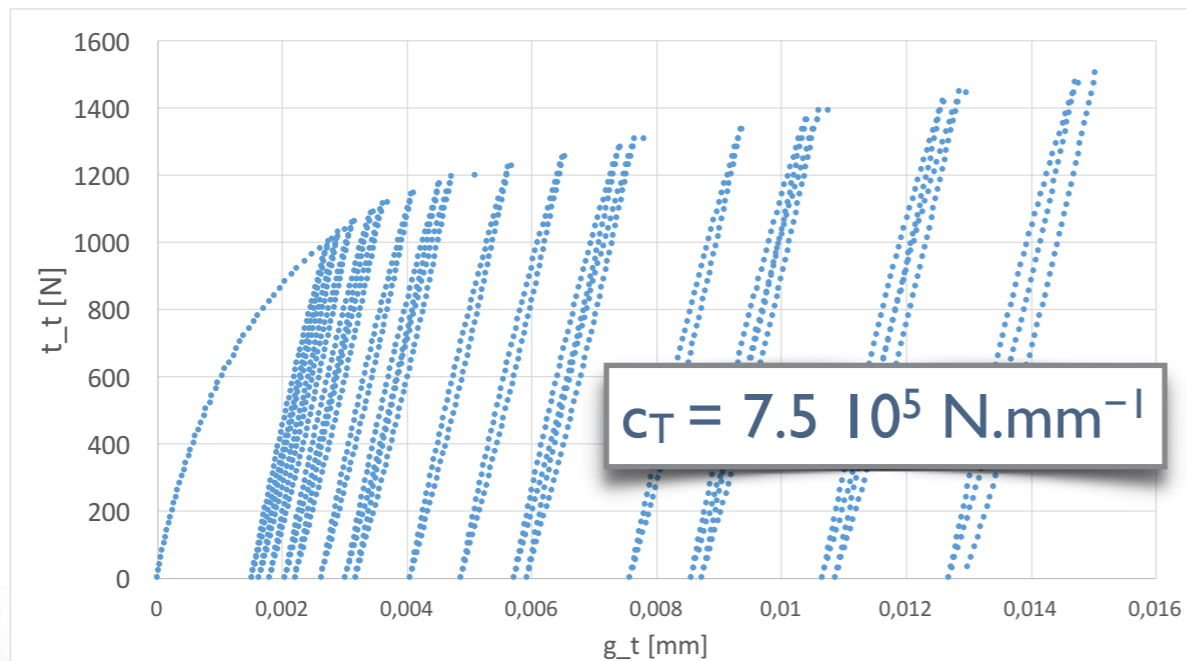


$$P_c = 11\,000\text{ N}$$

$$c_N = 3.75 \cdot 10^5\text{ N.mm}^{-1}$$

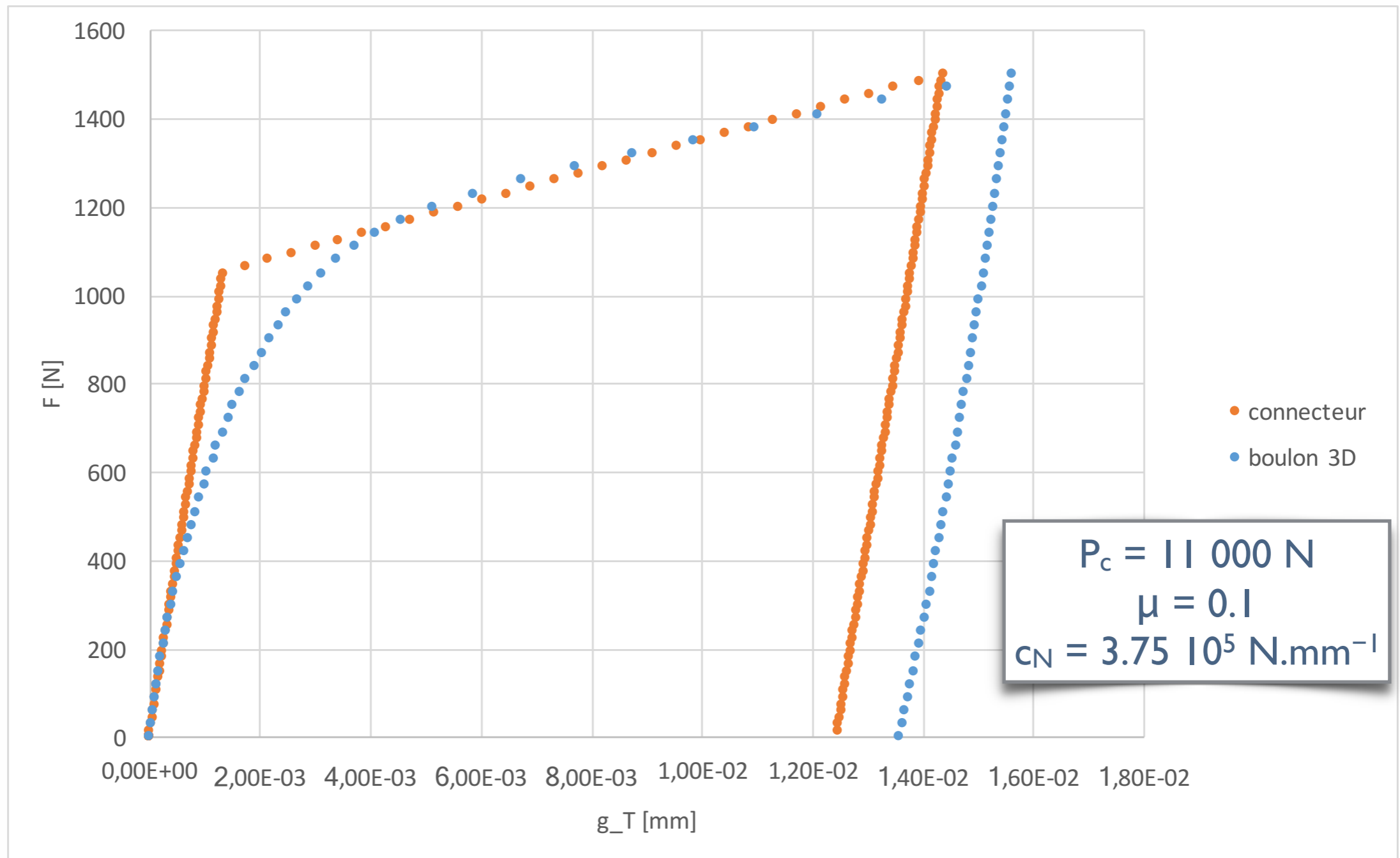


- Post-traitement et identification sur la gamme de chargement visée



Exemple d'identification

■ Comparaison des réponses 3D/connecteur et temps de calcul

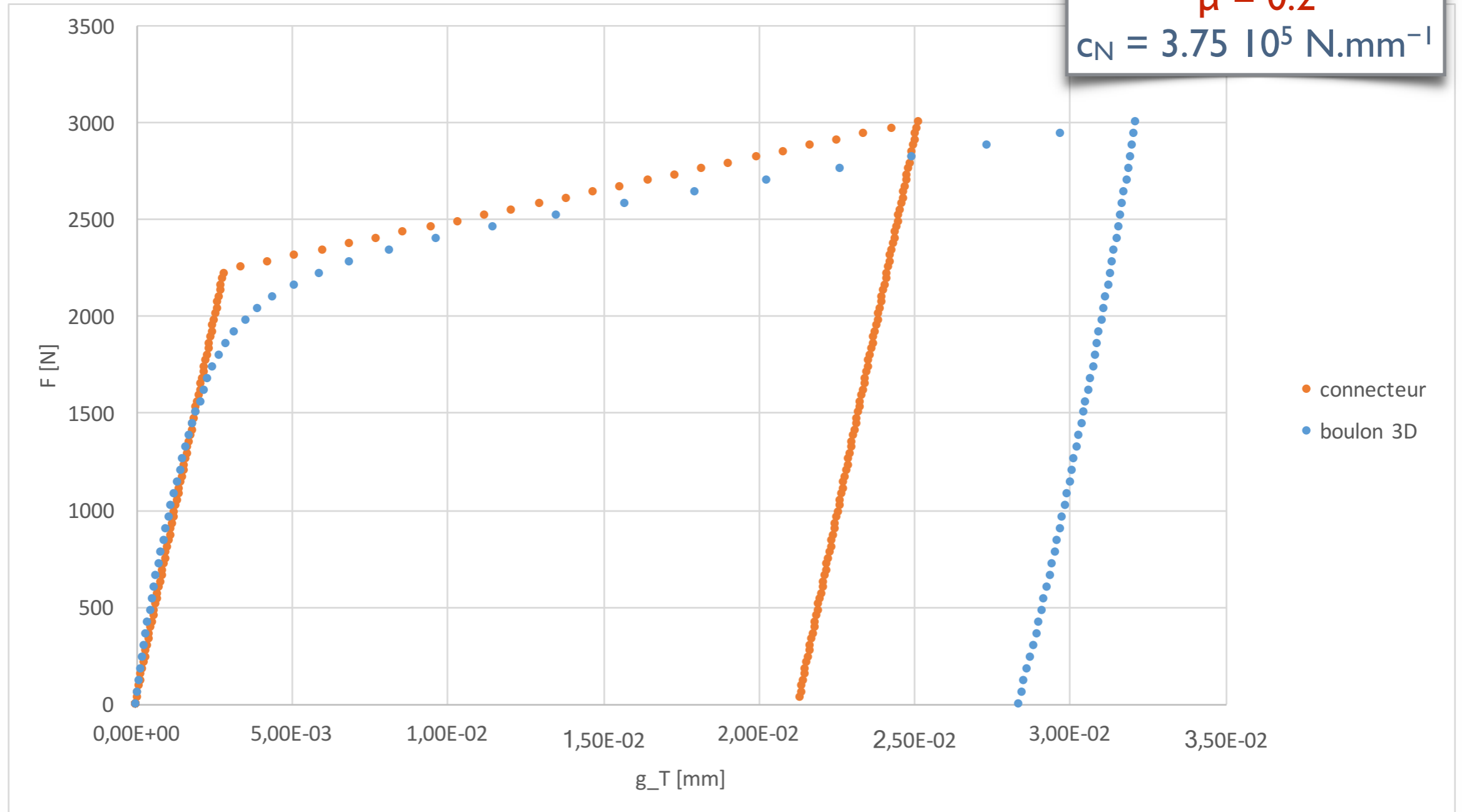


Exemple d'identification

■ Comparaison des réponses 3D/connecteur :

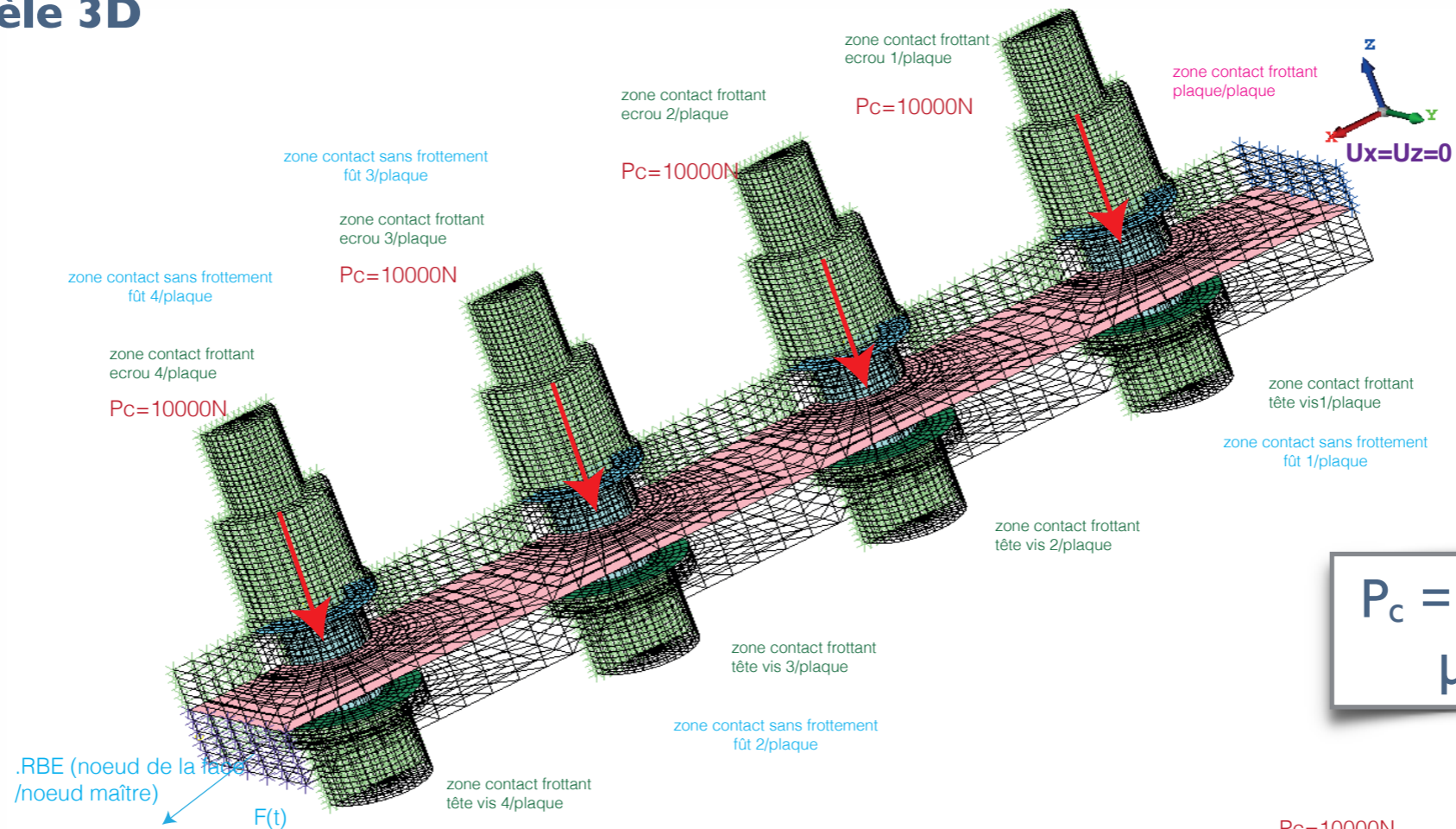
- Variation du coefficient de frottement, même précharge

$$P_c = 11\,000\text{ N}$$
$$\mu = 0.2$$
$$c_N = 3.75 \cdot 10^5\text{ N}\cdot\text{mm}^{-1}$$



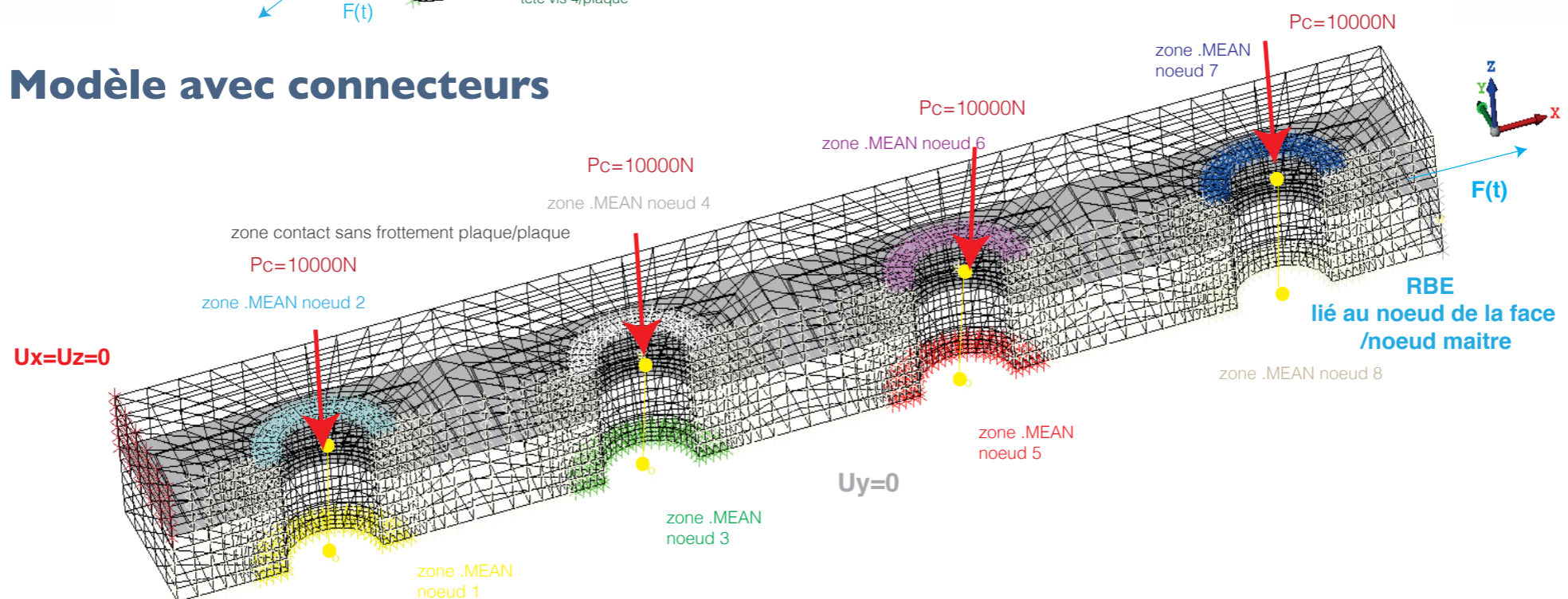
Liaison 4 boulons en double recouvrement

■ Modèle 3D



$P_c = 10\ 000\ N$
 $\mu = 0.1$

■ Modèle avec connecteurs

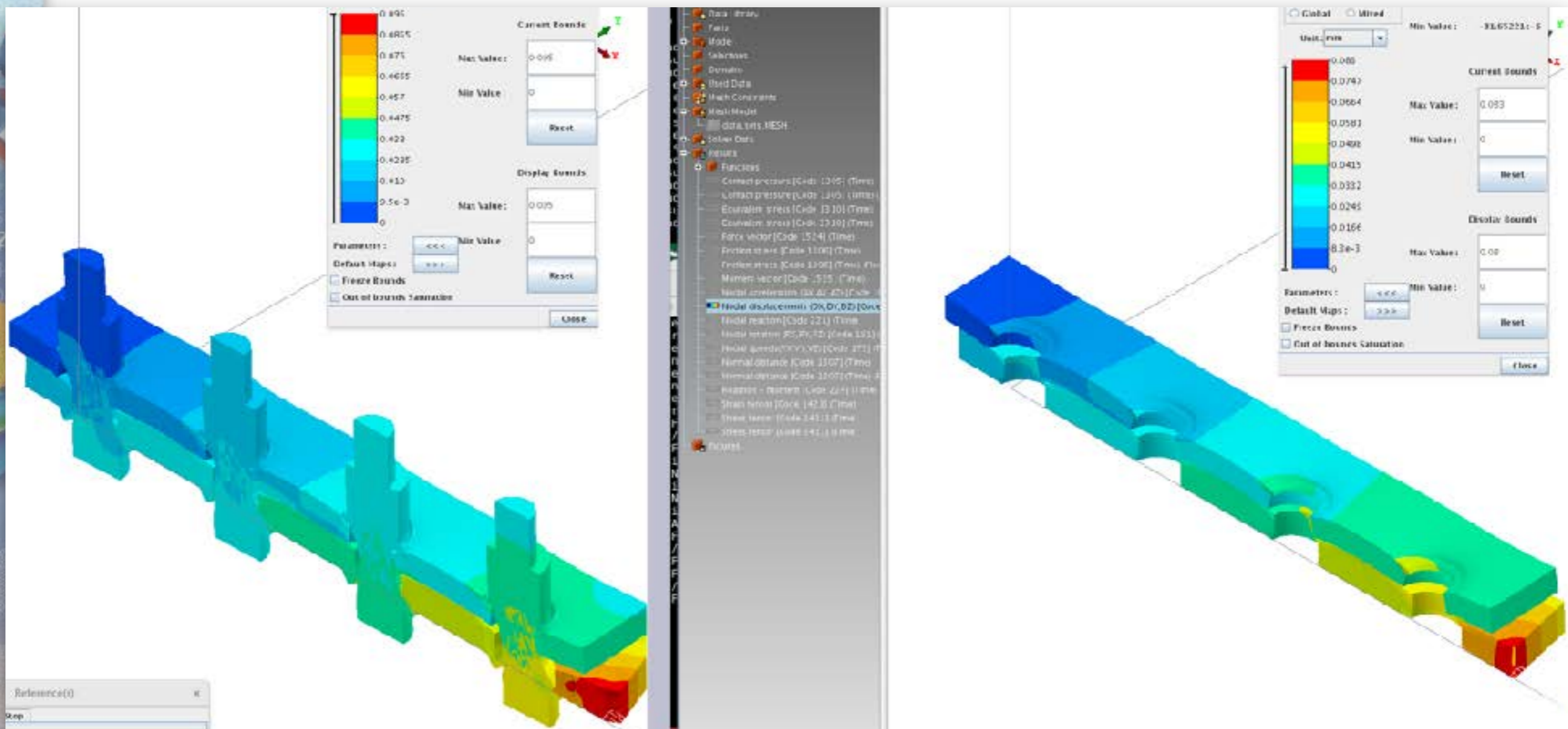


Liaison 4 boulons en double recouvrement

■ Comparaison simulation 3D et simulation avec connecteurs

- Un cycle de charge-décharge entre 0 et 6000 N

■ Déplacement dans la direction du chargement et déformée pour la charge maximale :

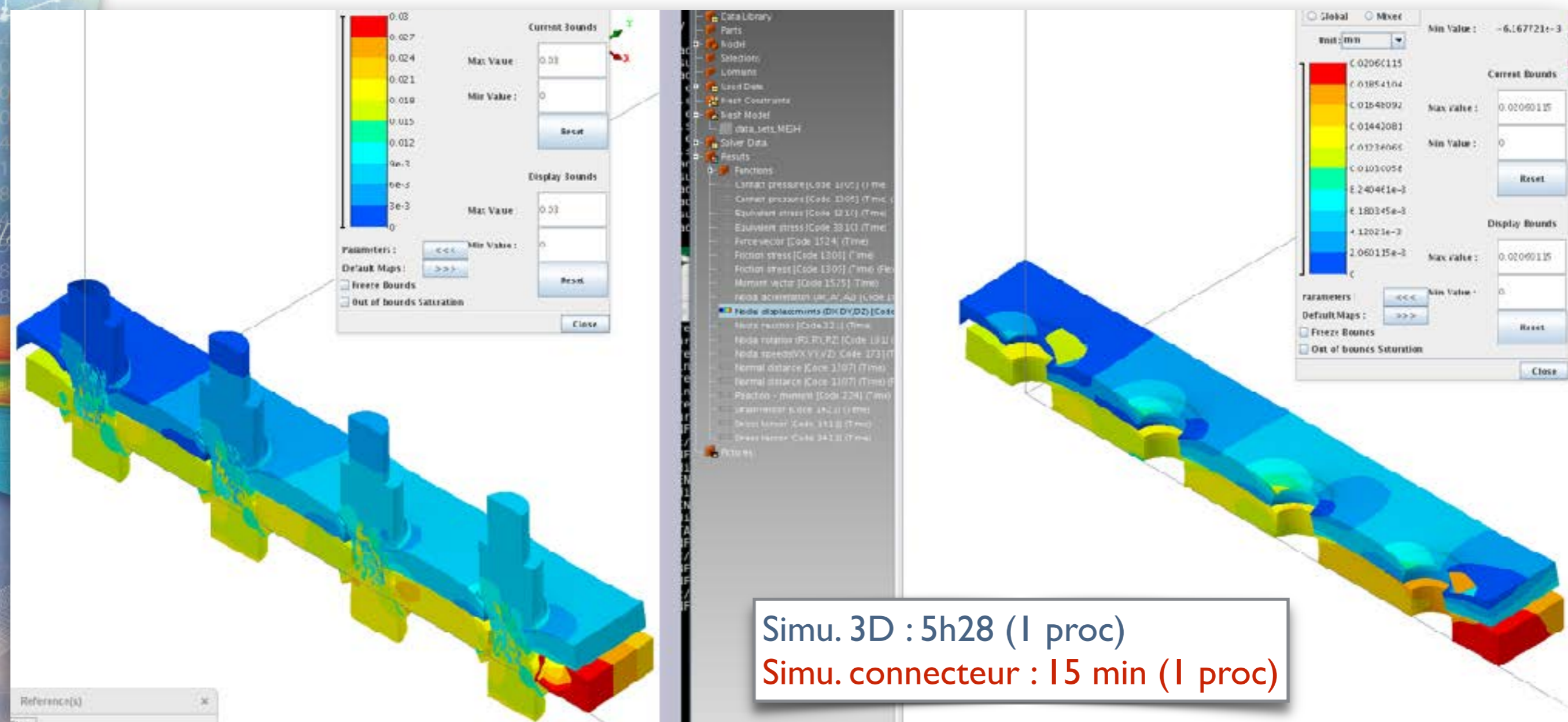


Liaison 4 boulons en double recouvrement

■ Comparaison simulation 3D et simulation avec connecteurs

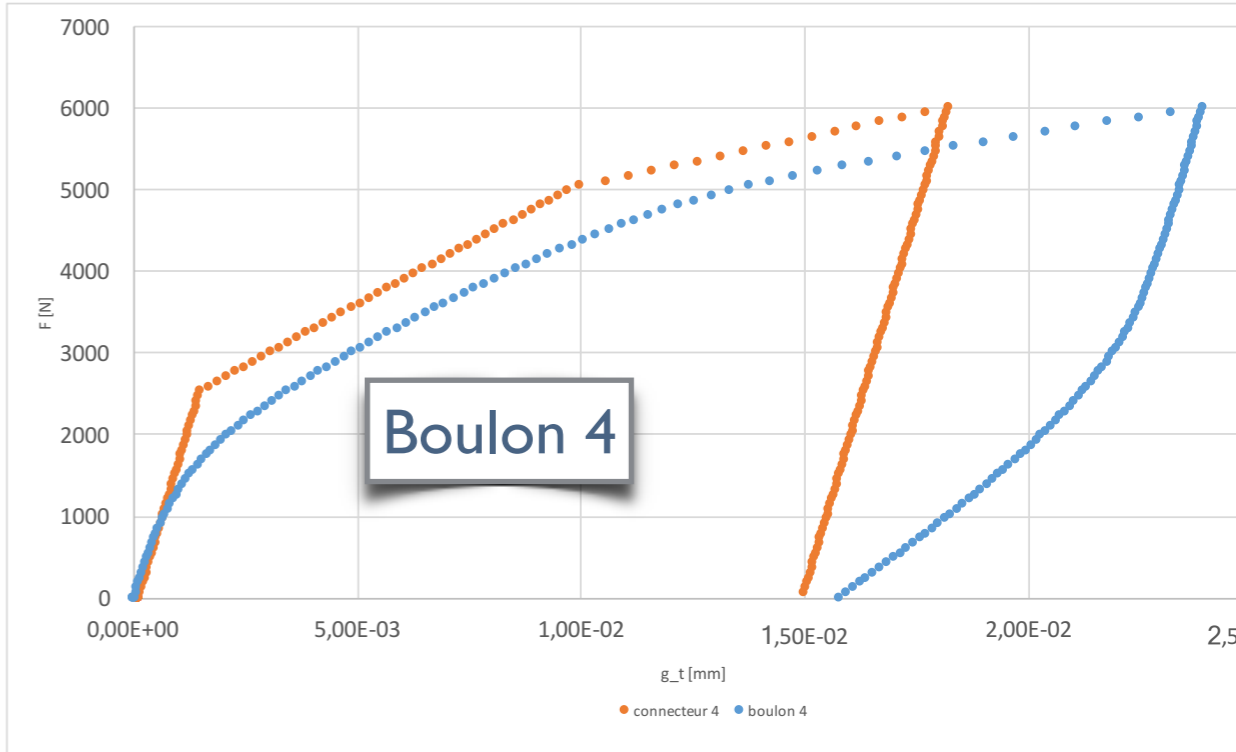
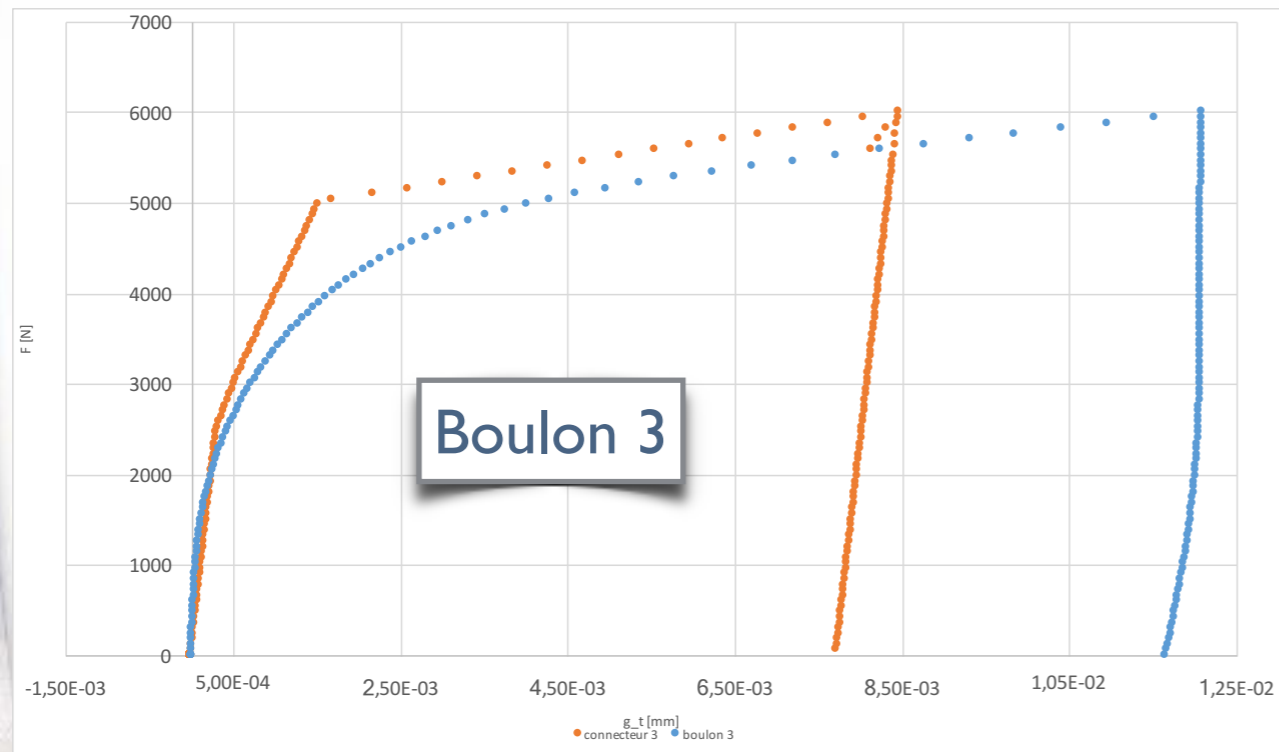
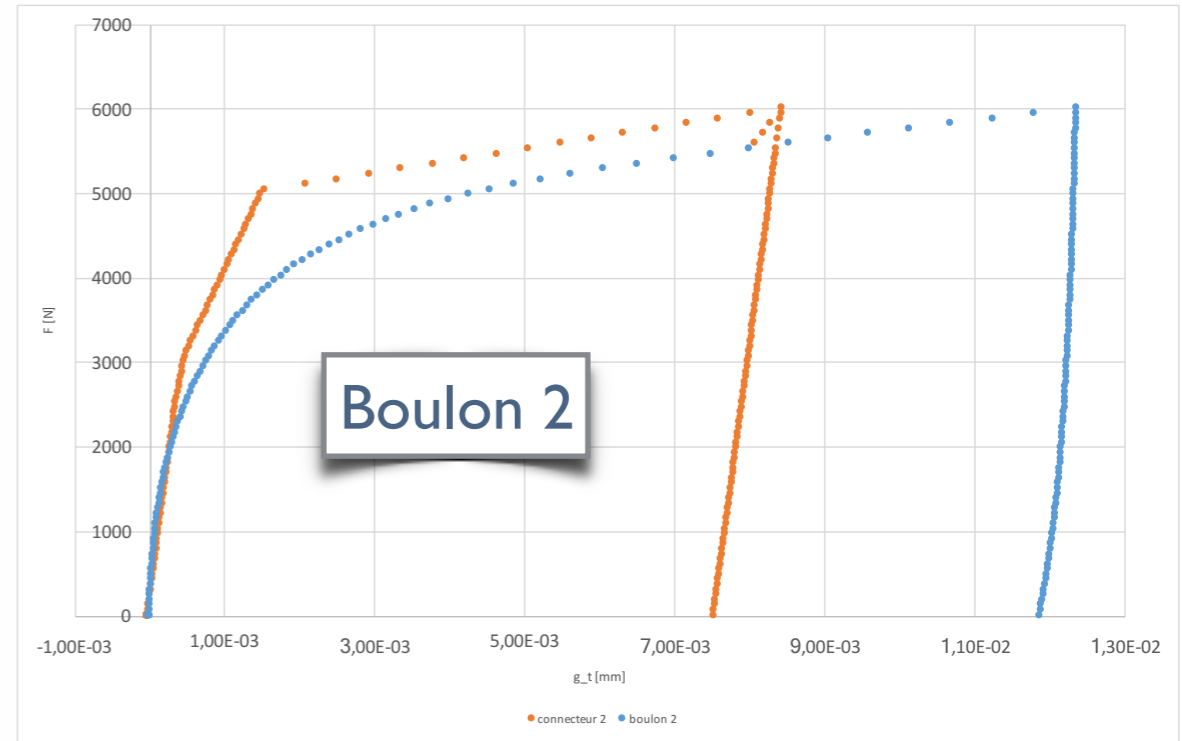
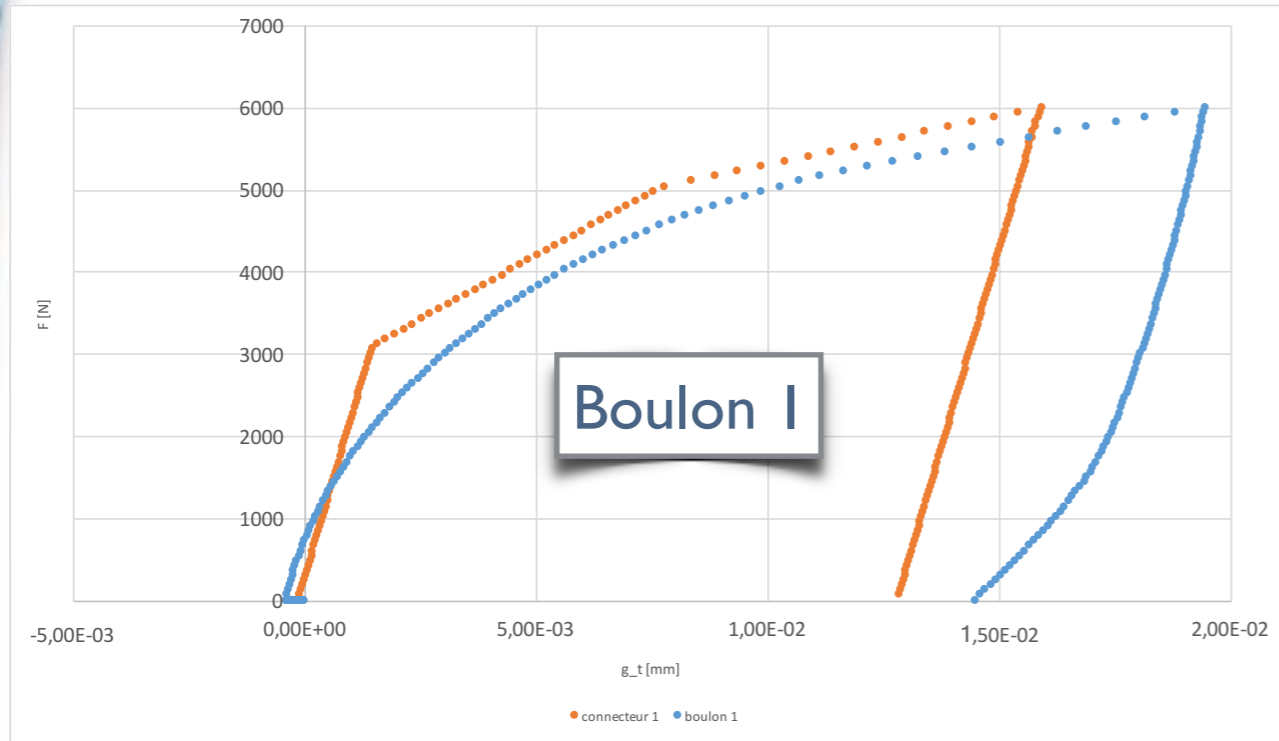
- Un cycle de charge et décharge

■ Déplacement dans la direction du chargement et déformée finale :



Simu. 3D : 5h28 (1 proc)
Simu. connecteur : 15 min (1 proc)

Transferts de charge sur chaque boulon




Conclusions et perspectives

■ Conclusions

- Démarche de modélisation et d'identification d'un connecteur EF à deux noeuds pour le comportement d'un boulon :
 - ▶ *prenant en compte les phénomènes de contact et de frottement entre pièces assemblées*
 - ▶ *prise en compte automatique de la précharge au premier pas de calcul*
 - ▶ *intégré sous forme d'un user-element dans 3 codes : SAMCEF Field, ANSYS et NASTRAN NX*
- Identification du comportement tangentiel du connecteur réalisée sur un problème générique
- Bonne corrélation simulation 3D / connecteurs des réponses globales mais aussi locales (glissement cumulé, ouverture, tension dans les connecteurs/boulons...)
- Réduction des temps de calcul d'un facteur 4 à 20 suivant les cas (Temps de mise en donnée ?).

■ Perspectives

- Amélioration du comportement : contact vis/alésage, plasticité boulon... (cf. stage M2 de R. Verwaerde)
- Pour des trajets de chargement connus, utilisation de la réduction de modèle pour:
 - ▶ *Identifier la zone de raccord du connecteur avec son environnement (couplage cinématique) afin de transmettre correctement la bonne cinématique*
 - ▶ *Identifier numériquement les variables d'état « réduites » et les lois d'état et d'évolution associées.*
- Extension de la méthodologie à la modélisation des points de soudure (coll. PSA)

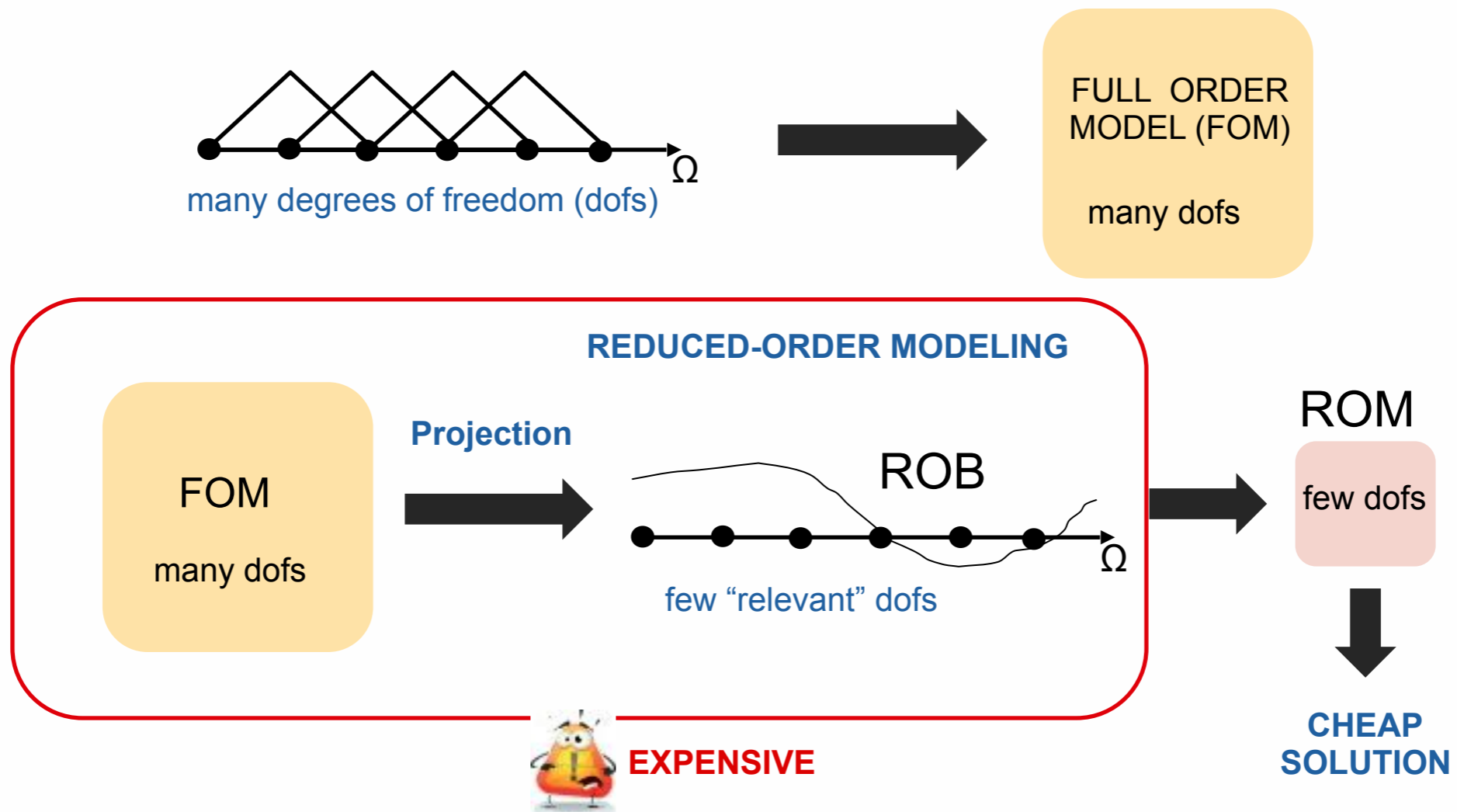


Réduction de modèle en non-linéaire - Méthode des points de référence

M. Capaldo, P.-A. Guidault, D. Néron, P. Ladevèze

Contexte scientifique

■ Construction d'un modèle réduit (ROM) :



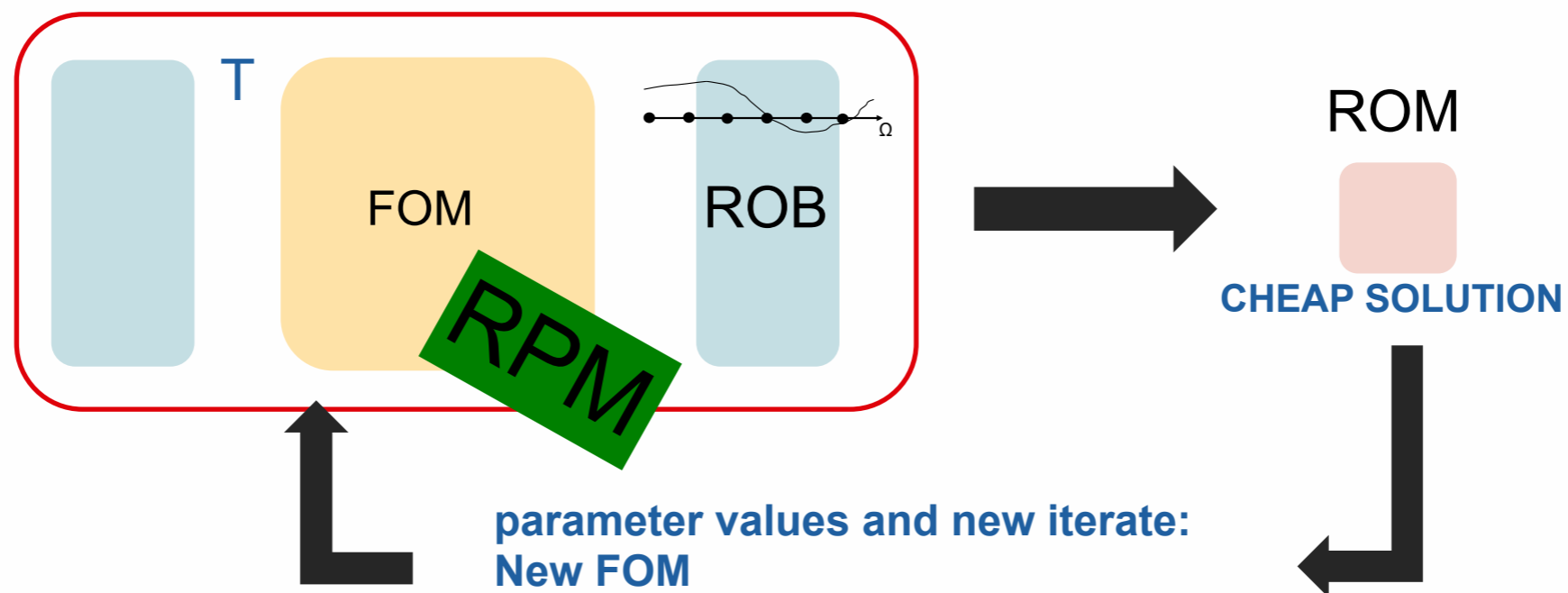
■ Coûteux mais « rentable » si la base réduite (ROB) retenue est pertinente et reste inchangée

- Raisonnable pour les problèmes « gentils » (linéaires, stationnaire...)
- Des gains effectifs en non-linéaire un peu décevant...

Contexte scientifique

■ Construction d'un modèle réduit (ROM) en non-linéaire

- Nécessité d'actualiser la base réduite « souvent »
- Construction du modèle réduit à chaque itération
 - ▶ Opérateurs tangents (et résidus) réactualisés
 - ▶ Evaluation, intégration « spatiale », projection sur la base réduite (ROB)
 - ▶ Complexité algorithmique fonction de la taille du problème fin (FOM)



■ Objectif : réduire la complexité arithmétique liée à la construction d'un modèle réduit en non-linéaire

- Application de la méthode des points de référence (RPM) dans le cas de la PGD sur un problème non-linéaire, paramétré

Comment choisir la base réduite ?

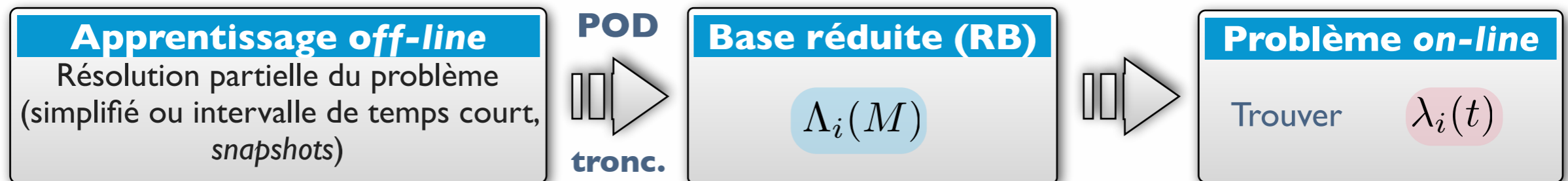
■ Représentation séparée et POD

$$u(t, M) \approx \bar{u}_m(t, M) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(t) \Lambda_i(M)$$

- « meilleure » approximation sous la forme d'une somme de produit de fonctions
- analyse et compression de données expérimentales, réduction de modèle
 - ▶ **KLD** [Karhunen 43, Loeve 55], **PCA** [Pearson 1901, Hotelling 33], **SVD** [Ekardt & Young 39], **HOSVD** [Baranyi et al. 06]

■ Techniques de réduction de modèle basées sur la POD

- ▶ [Sirovich 87, Krysl et al 00, Kunisch and Wolkwein 02, Willcox et al. 02, Picinbono et al. 03, Bergmann et al. 05, Lieu et al. 06, Niroomandi et al. 08, Farhat et al. 08, Matthies et al. 10...]

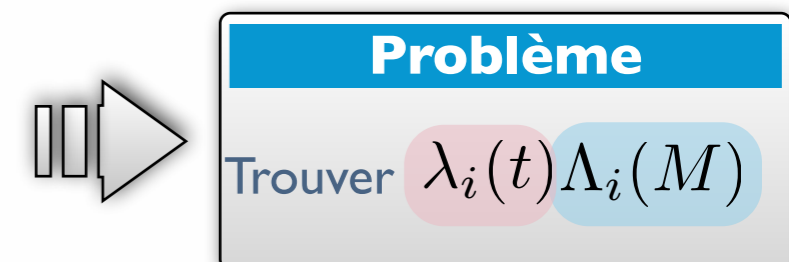


➔ Problème : pertinence des snapshots pour le problème traité ?

- ▶ Base réduite (essentiellement pour les problèmes paramétrés) [Maday et al. 02, Patera et al. 02...]
- ▶ Enrichissement de la base réduite [Ryckelynck 02, 05, Chinesta 08...]

■ Proper Generalized Decomposition (PGD)

- ▶ approximation radiale [Ladevèze 85, 99, Nouy et Ladevèze 04] [Ladevèze et al 08]
- ▶ décomposition spectrale généralisée [Nouy 07]
- ▶ séparation multidimensionnelle [Ammar et al 06, 07, Chinesta 08]
- ▶ problèmes multiphysiques [Ladevèze et al. 02, Néron et Dureisseix 08]



Problème de référence

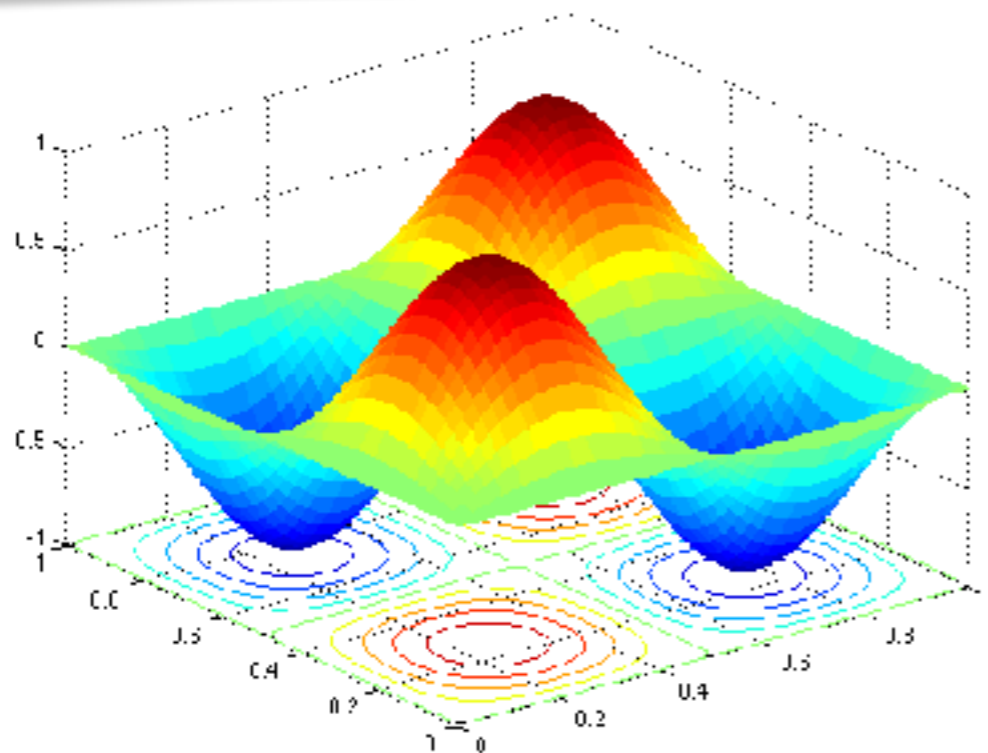
- **Problème elliptique avec un terme source non-linéaire, paramétré** [Maday et al. 07], [Chaturantabut et Sorensen 10]

Problem 1 (Strong form). Find $u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu})$ with $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \Omega =]0, 1[^2$ and $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D} = [0.01, 10]^2$ and homogeneous Dirichlet boundary condition on $\partial\Omega \times \mathcal{D}$, such that:

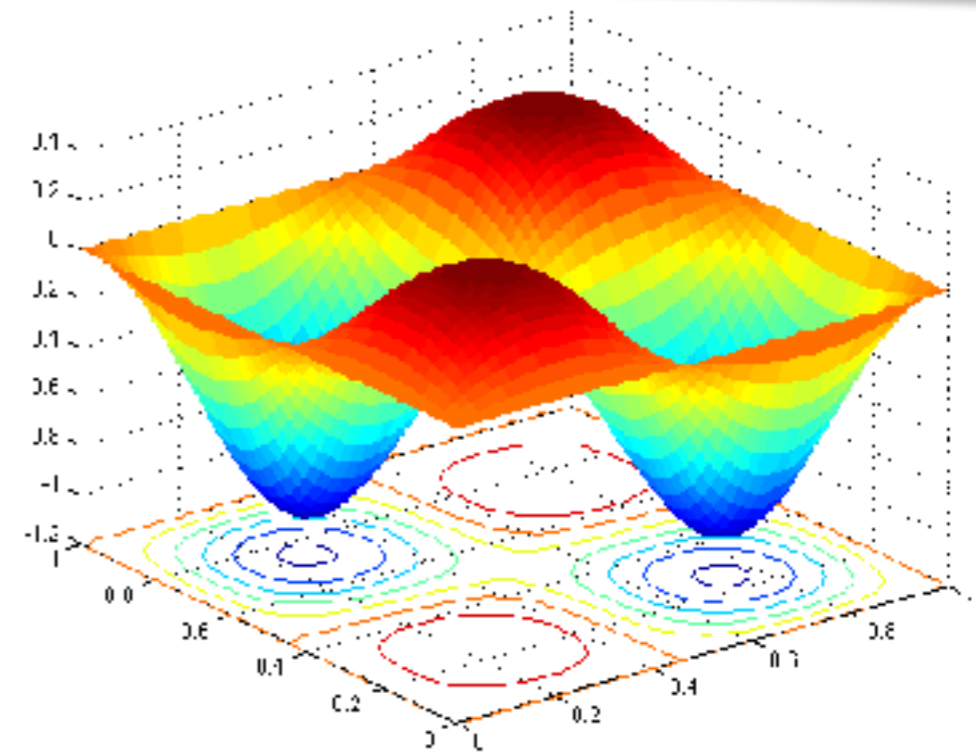
$$\begin{cases} -\nabla^2 u + g(u; \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{x}) & \text{on } \Omega \times \mathcal{D} \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times \mathcal{D} \end{cases}$$

with:

$$g(u; \boldsymbol{\mu}) = \frac{\mu_1}{\mu_2} (e^{\mu_2 u} - 1) \quad \text{and} \quad f(\mathbf{x}) = 100 \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2)$$



$$\boldsymbol{\mu} = (0.01, 0.01)$$



$$\boldsymbol{\mu} = (10, 10)$$

Espace : $\mathbf{N} = 2601$ (50 x 50 éléments linéaires quadrangulaires)

Paramètres : $\mathbf{p} = 225$ points (15 μ_1 x 15 μ_2)

Méthodes *a priori* et *a posteriori*

■ Méthode incrémentale (ex. Newton) et réduction de modèle *a priori* :

- Apprentissage *a priori* (off-line) de la base réduite (POD / RB technique)
 - ▶ Echantillonnage grossier / snapshots
- Résolution on-line sur la grille fine pour chaque valeur de paramètre μ

▶ **Pour chaque itération**, mise-à-jour du jacobien, évaluation du résidu, assemblage et détermination du modèle réduit (*projection sur la base réduite*)



70% du temps CPU !

■ Méthode non-incrémentale (globale en temps/paramètre) et réduction de modèle *a posteriori* (PGD) :

- Schéma itératif à 2 directions de recherche (LaTIn), **a chaque itération** on construit une approximation de la solution pour **toutes valeurs de paramètre μ**
 - ▶ Etape locale : vérification du terme non-linéaire
 - ▶ Etape linéaire : vérification de l'équilibre

[Ladevèze et al. 03, Passieux et al. 09, Nouy et al. 10]

▶ Etape préliminaire : mise-à-jour de la direction de recherche, évaluation du résidu, assemblage et détermination du modèle réduit (*projection sur la base réduite de l'itération précédente*)

▶ Enrichissement et mise-à-jour de la base réduite éventuellement

A chaque itération, il faut mettre à jour le modèle réduit !

Méthode LaTin - PGD

■ Introduction de la variable : $w = g(u; \mu)$

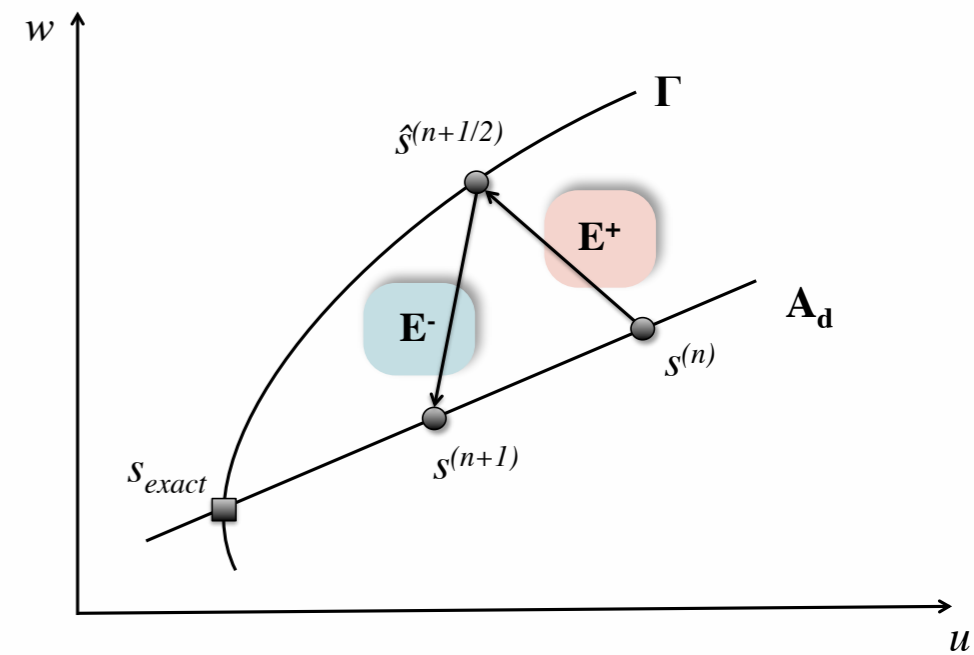
■ Etape locale à l'itération n+1 : $\forall \mu \in \mathcal{D}, \forall x \in \Omega$

$$(\hat{w}^{(n+1/2)} - w^{(n)}) + \mathbf{H}^+(\hat{u}^{(n+1/2)} - u^{(n)}) = 0$$

$$\hat{w}^{(n+1/2)} = g(\hat{u}^{(n+1/2)}; \mu)$$

● Choix direction de recherche : $\mathbf{H}^+ \rightarrow \infty$

$$\begin{cases} \hat{u}^{(n+1/2)} &= u^{(n)} \\ \hat{w}^{(n+1/2)} &= g(\hat{u}^{(n+1/2)}; \mu) = g(u^n; \mu) \end{cases}$$



■ Etape linéaire à l'itération n+1 : $\forall \mu \in \mathcal{D}, \forall x \in \Omega$

$$(w^{(n+1)} - \hat{w}^{(n+1/2)}) - \mathbf{H}^-(u^{(n+1)} - \hat{u}^{(n+1/2)}) = 0$$

● Equilibre et C.L. : $-\nabla^2 u^{(n+1)} + w^{(n+1)} = f(x)$

● Choix d.d.r. : $\mathbf{H}^- = \left. \frac{\partial g(u; \mu)}{\partial u} \right|_{u=\hat{u}^{(n+1/2)}}$

Ad

[Ladevèze 85, Glowinski, Le Tallec 89, Eckstein et Bertsekas 92]

Formulation globale en espace et en paramètre !

■ Etape linéaire sur la correction (simplifié grâce au choix spécifique des d.d.r.)

Problem 5 (Global stage on correction). Find $\delta u^{(n+1)} = u^{(n+1)} - u^{(n)} \in \mathcal{S}$ and $w^{(n+1)} \in \mathcal{S}$ such that:

$$\begin{aligned} \forall v \in \mathcal{S}, \quad & \int_{\mathcal{D}} a(\delta u^{(n+1)}, v) \, d\mu + \int_{\mathcal{D} \times \Omega} \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \boldsymbol{\mu}) \delta u^{(n+1)} v \, dx \, d\mu = - \int_{\mathcal{D}} \mathcal{R}(u^{(n)}, v; \boldsymbol{\mu}) \, d\mu \\ \forall \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{D}, \forall \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad & w^{(n+1)} = \hat{w}^{(n+1/2)} + \mathbf{H}^- \delta u^{(n+1)} \end{aligned} \quad (8)$$

where :

$$\begin{cases} \mathcal{R}(u^{(n)}, v; \boldsymbol{\mu}) &= a(u^{(n)}, v) - \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) v \, dx + \int_{\Omega} g(u^{(n)}; \boldsymbol{\mu}) v \, dx \\ \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \boldsymbol{\mu}) &= \left. \frac{\partial g(u; \boldsymbol{\mu})}{\partial u} \right|_{u=u^{(n)}} \end{cases}$$

● avec : $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$ and $l(v) = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{x}) v \, dx$

■ Formulation globale espace-paramètre

- Stockage de l'itéré sur tout le domaine spatial et le domaine des paramètres !
 - ▶ Représentation adaptée : PGD
- Version incrémentale obtenue en enlevant l'intégrale sur le domaine des paramètres.

Méthode LaTin - PGD

■ Représentation en variables séparées d'ordre k de l'itéré (n+1) :

$$u^{(n+1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \approx u_k^{(n+1)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) = u^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^k \Phi_i(\mathbf{x}) \lambda_i(\boldsymbol{\mu})$$

■ Etape préliminaire : mise-à-jour du modèle réduit à l'itération (n+1)

- Exploitation de la base réduite d'ordre k générée et connue à l'itération n : $\mathcal{W}_k = \{\Phi_i\}_{1 \leq i \leq k}$
- Correction des $\{\lambda_i\}_{1 \leq i \leq k}$

$$\check{u}^{(n+1)} \approx u^{(n)} + \delta u_k^{(n+1)} = u^{(0)}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) + \sum_{i=1}^k \Phi_i(\mathbf{x}) (\lambda_i(\boldsymbol{\mu}) + \delta \lambda_i(\boldsymbol{\mu}))$$

Problem 6 (Preliminary/update step). Find parameter corrections $\{\delta \lambda_i\}_{1 \leq i \leq k}$ such that:

$$1 \leq j \leq k, \forall \lambda^* \in \mathcal{P},$$

$$\sum_{i=1}^k \int_{\mathcal{D}} \lambda^* \left(a(\Phi_i, \Phi_j) + \int_{\Omega} \Phi_i \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \boldsymbol{\mu}) \Phi_j dx \right) \delta \lambda_i d\boldsymbol{\mu} = - \int_{\mathcal{D}} \lambda^* \mathcal{R}(u^{(n)}, \Phi_j; \boldsymbol{\mu}) d\boldsymbol{\mu}$$

Indépendant du paramètre
(précalculé)

Dépendant du paramètre
et de l'itéré ! Terme non séparable !

- Problème réduit similaire à celui des méthodes de base réduite

■ Enrichissement de la base réduite si nécessaire

Bottleneck de la réduction de modèle non-linéaire

■ Terme non-linéaire non séparable et dépendant de l'itéré

- Pas d'intégration en séparation de variables, pas de pré-calcul
- Projection sur la base réduite à chaque itération pour un coût en $\mathcal{O}(pNk^2)$

■ Techniques proposées dans la littérature

- Basée sur l'EIM [Maday, Patera et al. 04]
 - ▶ BPIM [Nguyen et Peraire 08], DEIM – POD [Chaturantabut et Sorensen 10]
- Basées sur la Gappy POD
 - ▶ GNAT [Farhat et al. 11], MPE [Astrid, Wilcox et al. 08], APHR [Ryckelinck 05], ECSW [Farhat et al. 14]

■ La méthode des points de référence [Ladevèze 97, Néron et al. 10, Capaldo, Guidault et al. 14]

- Diminuer la complexité arithmétique liée à la projection sur la base réduite
- Une approximation de chaque contribution à la ROM plutôt qu'une interpolation de la fonction non-linéaire (EIM)

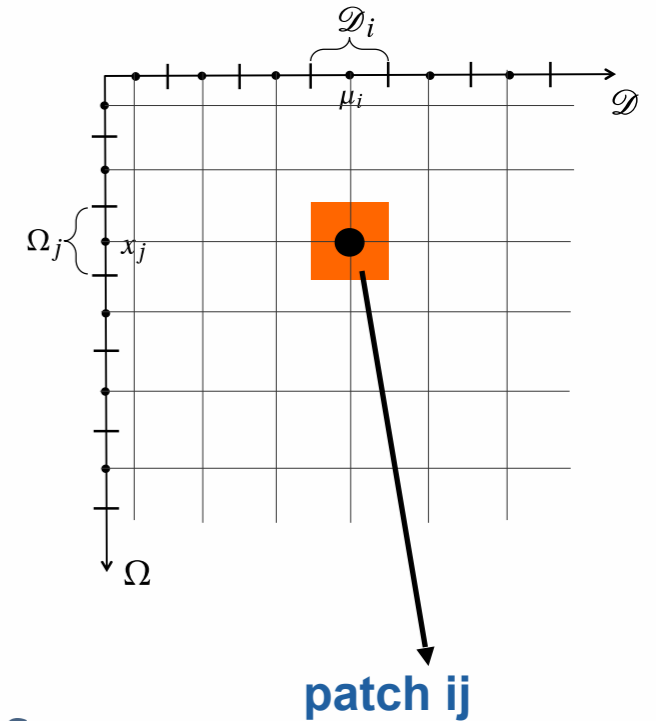
$$\alpha_{ij} = \int_{\mathcal{D} \times \Omega} \lambda^*(\boldsymbol{\mu}) \Phi_i(\boldsymbol{x}) \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\mu}) \Phi_j(\boldsymbol{x}) \delta \lambda_i(\boldsymbol{\mu}) \, dx \, d\boldsymbol{\mu}, \quad 1 \leq i, j \leq k$$

- Deux ingrédients :
 - ▶ Evaluation simplifiée de l'intégrande par le concept de points de référence
 - ▶ Reconstruction en variables séparées de faible rang par patch de l'intégrande à moindre coût par des formules explicites sans SVD

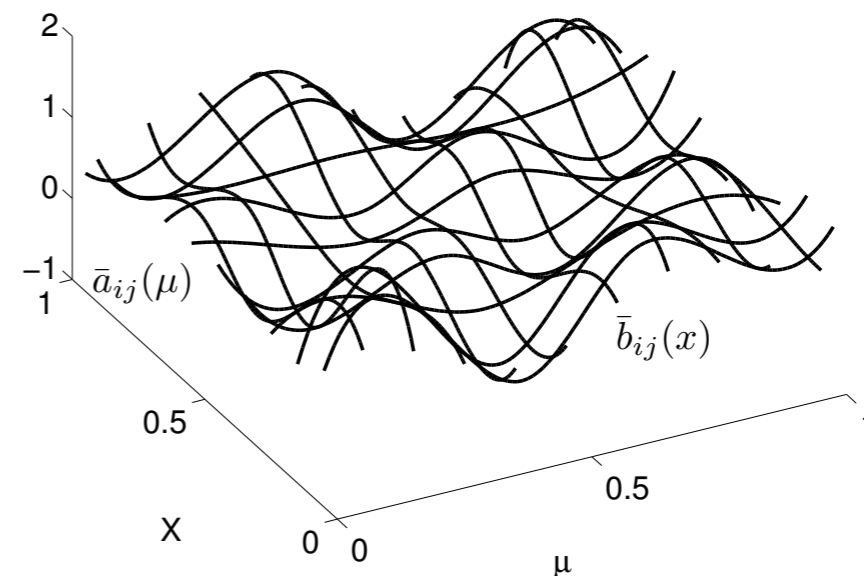
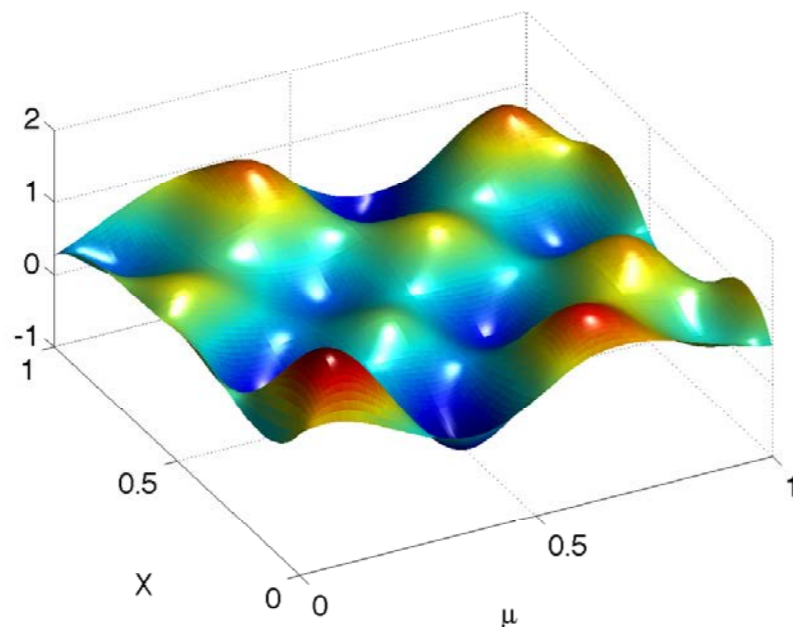
Points de références et patches

■ Points de références « arbitraires » du domaine espace-paramètres

$$f(\mu, x) \approx \bar{f}(\mu, x) \begin{cases} \bar{a}_{ij}(\mu) = f(\mu, x_j) & \text{if } \mu \in \mathcal{D}_i \\ \bar{a}_{ij}(\mu) = 0 & \text{otherwise} \\ \bar{b}_{ij}(x) = f(\mu_i, x) & \text{if } x \in \Omega_j \\ \bar{b}_{ij}(x) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

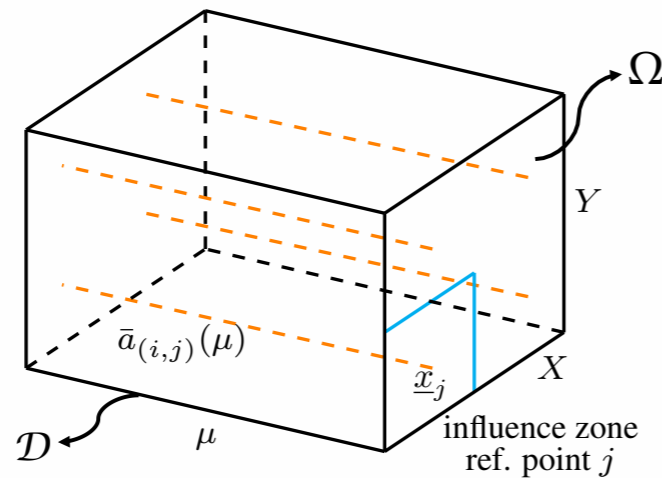


■ Composantes généralisées d'une fonction de deux variables

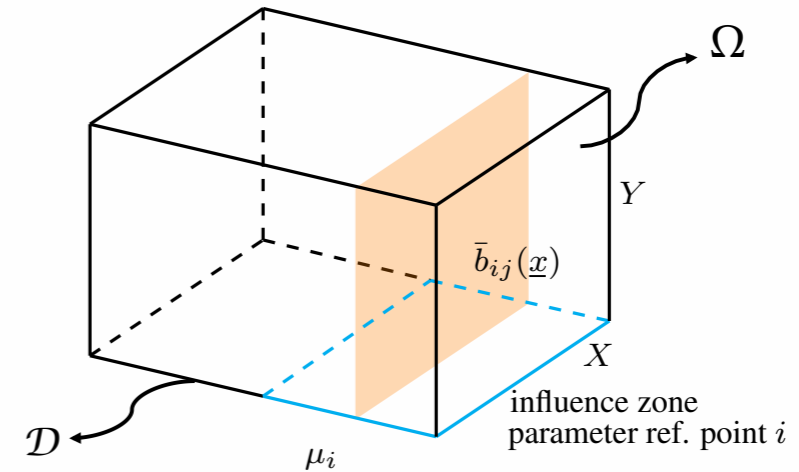


Points de références et patches

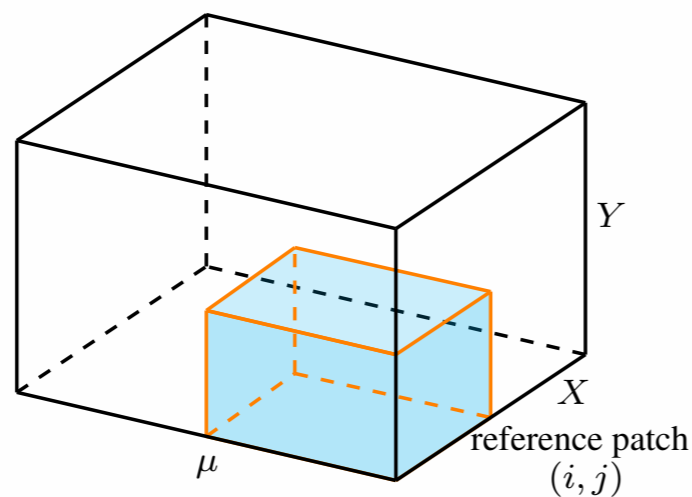
■ En dimension 3...



(a) Generalized parameter component $\bar{a}_{ij}(\mu)$ related to a spatial point x_j



(b) Generalized spatial component $\bar{b}_{ij}(\mathbf{x})$ related to parameter value μ_i



(c) Patch (i, j)

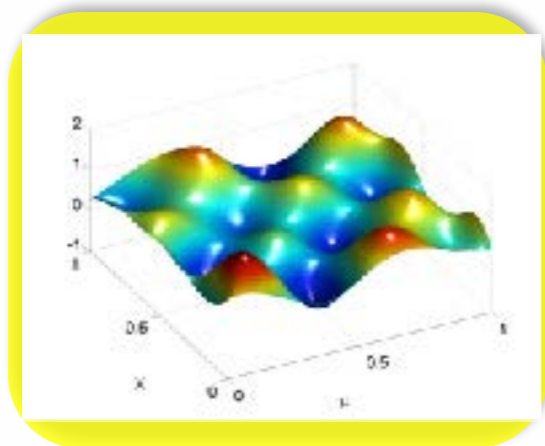
Rajouter des paramètres de référence
= rajouter des *snapshots* de la solution en espace

Des opérations simplifiées

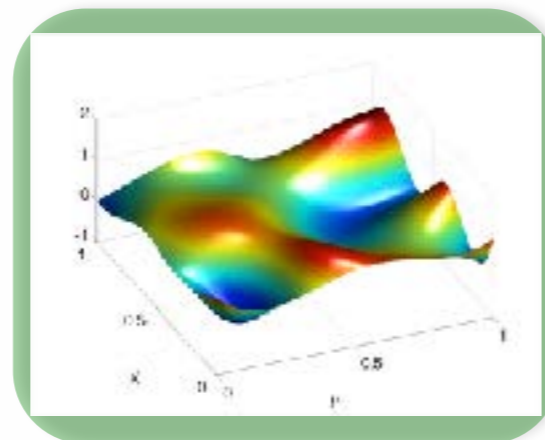
$$\int_{D \times \Omega} \underbrace{f(\mu, M) \cdot \mathbf{H}(\mu, M) \cdot g(\mu, M)}_{\alpha} d\Omega d\mu$$

$$\begin{aligned} \overline{f + g} &= \bar{f} + \bar{g} \\ \overline{f \mathbf{H} g} &= \bar{f} \bar{\mathbf{H}} \bar{g} \\ \overline{\frac{\partial}{\partial t} f} &= \frac{\partial}{\partial t} \bar{f} \\ \overline{\mathbf{H} f} &= \bar{\mathbf{H}} \bar{f} \end{aligned}$$

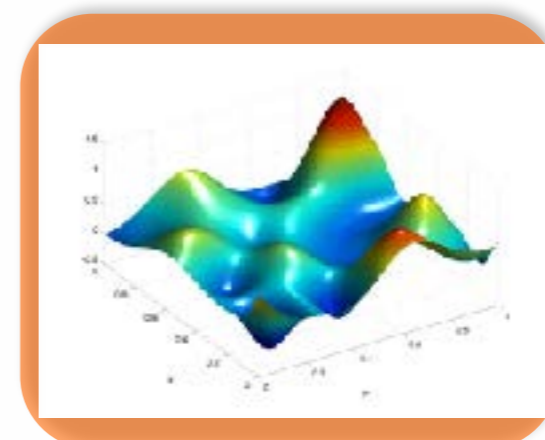
$$\overline{f \mathbf{H} g} = \bar{f} \bar{\mathbf{H}} \bar{g}$$



×

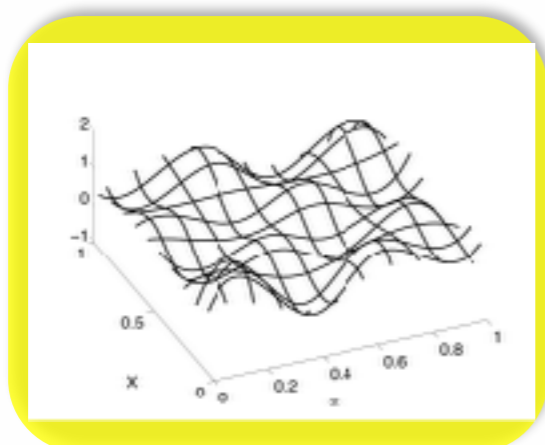


×

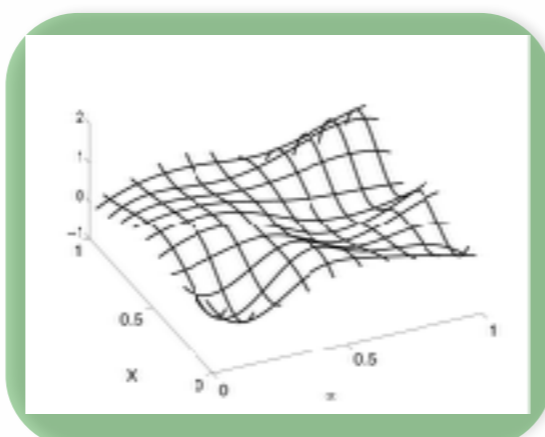


= α

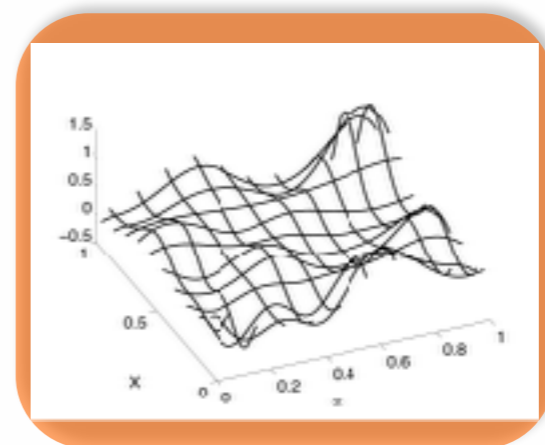
■ Opérations sur l'intégrande entre composantes généralisées



×



×



= ᾱ

Reconstruction de rang 1 par patch

Composantes généralisées

$$\bar{\alpha} \begin{cases} \bar{A}_{ij}(\mu) = f(\mu, x_j) & \text{if } \mu \in D_i \\ \bar{A}_{ij}(\mu) = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} \bar{B}_{ij}(x) = f(\mu_i, x) & \text{if } \mu \in \Omega_j \\ \bar{B}_{ij}(x) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

α

$\bar{\alpha}$

Reconstruction de rang 1 par patch

Composantes généralisées

$$\bar{\alpha} \begin{cases} \bar{A}_{ij}(\mu) = f(\mu, x_j) & \text{if } \mu \in D_i \\ \bar{A}_{ij}(\mu) = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} \bar{B}_{ij}(x) = f(\mu_i, x) & \text{if } \mu \in \Omega_j \\ \bar{B}_{ij}(x) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

α

$\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} \approx a(\mu)b(x)$$

reconstruction patch par patch

□ Minimisation d'une fonctionnelle :

to get $(a_{ij}, b_{ij})_{i=1, \dots, m_\mu; j=1, \dots, m_x}$ minimize :

$$J(a_{ij}, b_{ij}) = \sum_{k=1}^{m_x} [\omega_k \|(\bar{A}_{ik}(\mu) - a_{ik}(\mu)b_{ik}(x_k))\|_{D_i}^2 + \Delta\mu_i \| \bar{B}_{ik}(x) - a_{ik}(\mu_i)b_{ik}(x) \|_{\Omega_k}^2]$$

□ Formules explicites :

$$a_{ij}(\mu) = \frac{\sum_{k=1}^{m_x} \omega_k \bar{A}_{ik}(\mu) \bar{B}_{ik}(x_k) \lambda_k^2}{\sum_{k=1}^{m_x} \omega_k \bar{B}_{ik}(x_k) \bar{B}_{ik}(x_k) \lambda_k^2} \quad \text{and} \quad b_{ij}(x) = \bar{B}_{ij}(x)$$

la variable spatiale est privilégiée

Reconstruction de rang 1 par patch

Composantes généralisées

$$\bar{\alpha} \begin{cases} \bar{A}_{ij}(\mu) = f(\mu, x_j) & \text{if } \mu \in D_i \\ \bar{A}_{ij}(\mu) = 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \left| \quad \begin{cases} \bar{B}_{ij}(x) = f(\mu_i, x) & \text{if } \mu \in \Omega_j \\ \bar{B}_{ij}(x) = 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

α

$\bar{\alpha}$

$$\bar{\alpha} \approx a(\mu)b(x)$$

reconstruction patch par patch

□ Minimisation d'une fonctionnelle :

to get $(a_{ij}, b_{ij})_{i=1, \dots, m_\mu; j=1, \dots, m_x}$ minimize :

$$J(a_{ij}, b_{ij}) = \sum_{k=1}^{m_x} [\omega_k \|(\bar{A}_{ik}(\mu) - a_{ik}(\mu)b_{ik}(x_k))\|_{D_i}^2 + \Delta\mu_i \| \bar{B}_{ik}(x) - a_{ik}(\mu_i)b_{ik}(x) \|_{\Omega_k}^2]$$

□ Formules explicites :

$$a_{ij}(\mu) = \frac{\sum_{k=1}^{m_x} \omega_k \bar{A}_{ik}(\mu) \bar{B}_{ik}(x_k) \lambda_k^2}{\sum_{k=1}^{m_x} \omega_k \bar{B}_{ik}(x_k) \bar{B}_{ik}(x_k) \lambda_k^2} \quad \text{and} \quad b_{ij}(x) = \bar{B}_{ij}(x)$$

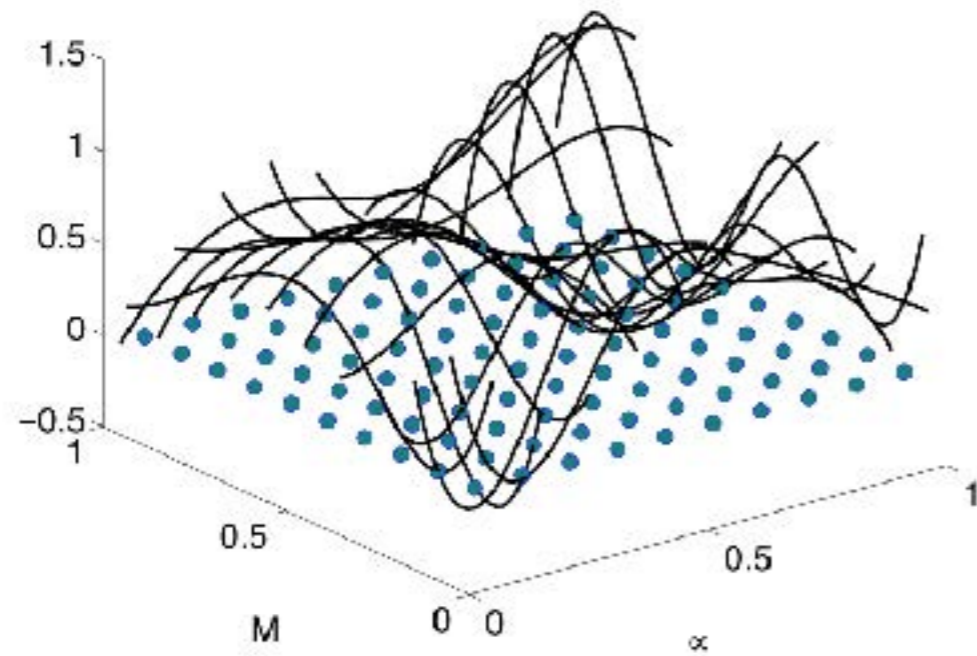
la variable spatiale est privilégiée

Intégration en variables séparées sur chaque patch

$$\int_{D \times \Omega} \bar{\alpha} \, d\mu \, d\Omega = \sum_{i=1}^{m_\mu} \sum_{j=1}^{m_x} \int_{\Omega_j} b_{ij}(x) \, d\Omega \int_{D_i} a_{ij}(\mu) \, d\mu$$

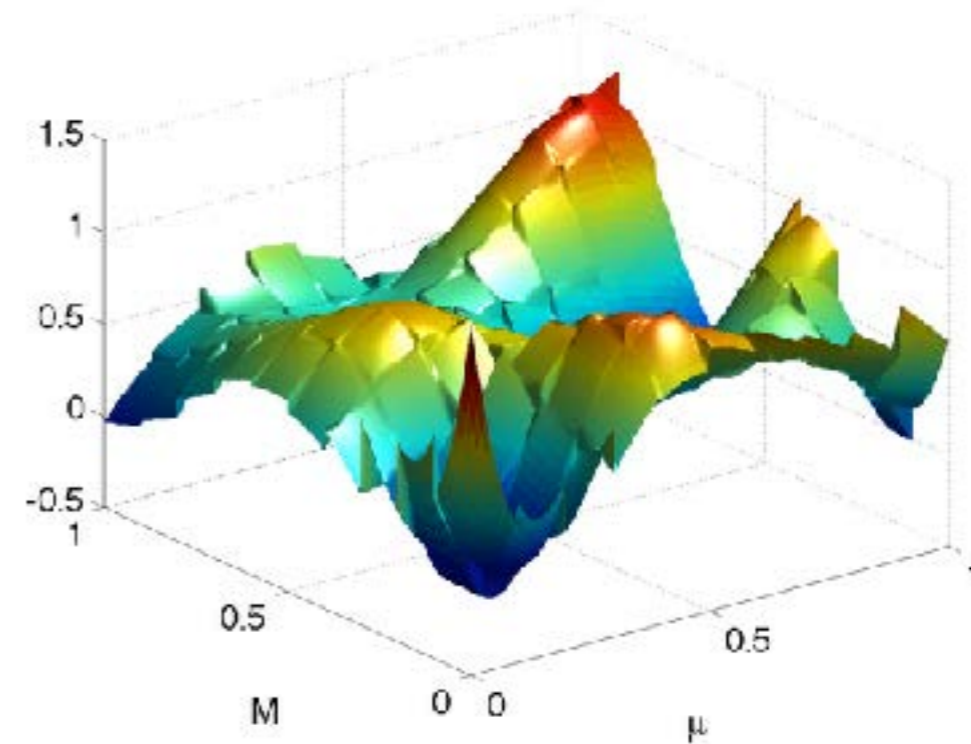
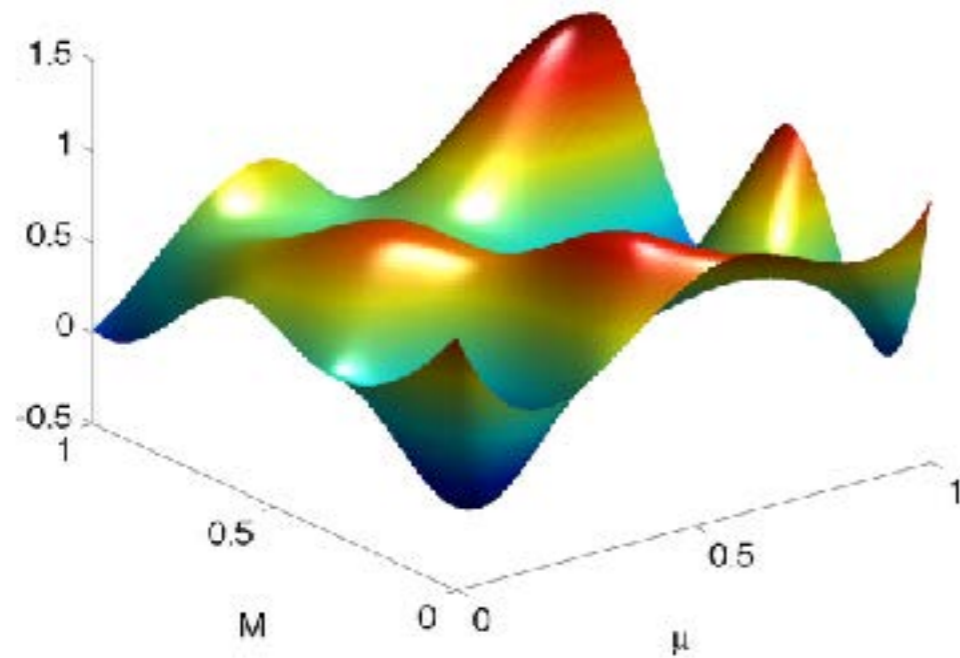
Exemple de reconstruction

- Choix : grille régulière de 10x10 points de référence



Exemple de reconstruction

- Choix : grille régulière de 10x10 points de référence



error = 3.57 %

$$e = \frac{\|F - \bar{F}\|_{\mathcal{D} \times \Omega}}{\|\bar{F}\|_{\mathcal{D} \times \Omega}} \quad \text{with} \quad \|F\|_{\mathcal{D} \times \Omega}^2 = \int_{\mathcal{D} \times \Omega} F^2 dx d\mu = \sum_{i=1}^{m_\mu} \sum_{j=1}^{m_x} \int_{\mathcal{D}_i \times \Omega_j} F^2 dx d\mu$$

Application à l'étape préliminaire

■ Approximation RPM pour chaque contribution au modèle réduit (ROM)

$$\begin{aligned}
 \alpha_{ij} &= \int_{\mathcal{D} \times \Omega} \lambda^*(\boldsymbol{\mu}) \Phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \Phi_j(\mathbf{x}) \delta \lambda_i(\boldsymbol{\mu}) \, dx \, d\boldsymbol{\mu} \\
 &\approx \int_{\mathcal{D} \times \Omega} \left(\sum_{r=1}^p \lambda^{*r} \xi_r(\boldsymbol{\mu}) \right) \Phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \Phi_j(\mathbf{x}) \left(\sum_{s=1}^p \delta \lambda_i^s \xi_s(\boldsymbol{\mu}) \right) \, dx \, d\boldsymbol{\mu} \\
 &\approx \sum_{r=1}^p \sum_{s=1}^p \lambda^{*r} \left(\int_{\mathcal{D} \times \Omega} \underbrace{\xi_r(\boldsymbol{\mu}) \Phi_i(\mathbf{x}) \mathbf{H}^-(u^{(n)}; \mathbf{x}, \boldsymbol{\mu}) \Phi_j(\mathbf{x}) \xi_s(\boldsymbol{\mu})}_{\text{Integrand } \omega_{rsij}(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{x})} \, dx \, d\boldsymbol{\mu} \right) \delta \lambda_i^s
 \end{aligned}$$

■ Approximation en variables séparées par patch

- Intégration par séparation de variable par patch
- Opérateur du modèle réduit obtenu par assemblage de produits tensoriels de matrices par patch
- Un gain en complexité en :

$$\mathcal{O} \left(\left(\frac{m_\mu}{p} + \frac{m_x}{N} \right)^{-1} \right)$$

N : dimension spatiale

p : dimension espace paramètre

m_μ : nbr. de points de référence en paramètre

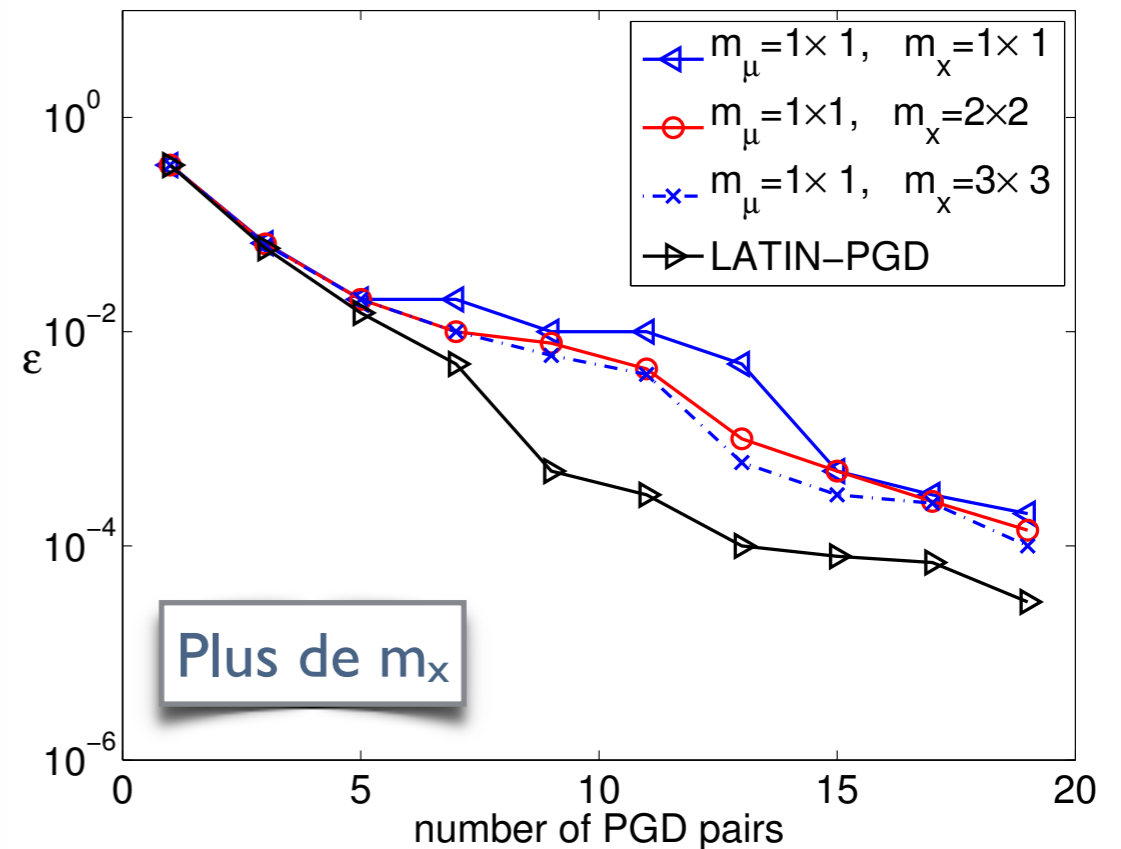
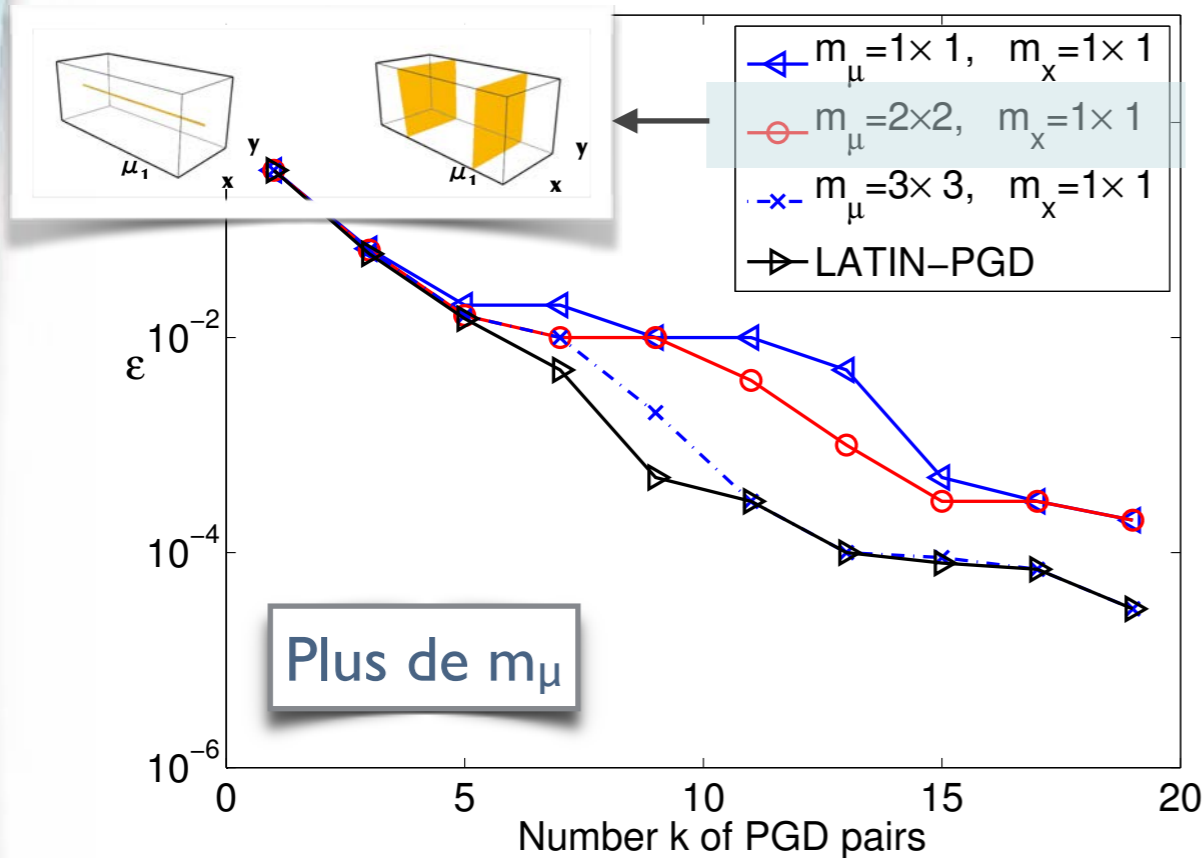
m_x : nbr. de points de référence en espace

► En pratique, $\frac{N}{m_x} \gg \frac{p}{m_\mu}$ et le gain est en $\mathcal{O} \left(\frac{p}{m_\mu} \right)$

■ Approximation RPM utilisée uniquement pour l'étape préliminaire (ROM) !

Illustration sur le problème de référence

■ Influence du nombre de points de référence (m_μ , m_x)



- **RPM uniquement pour l'étape préliminaire**

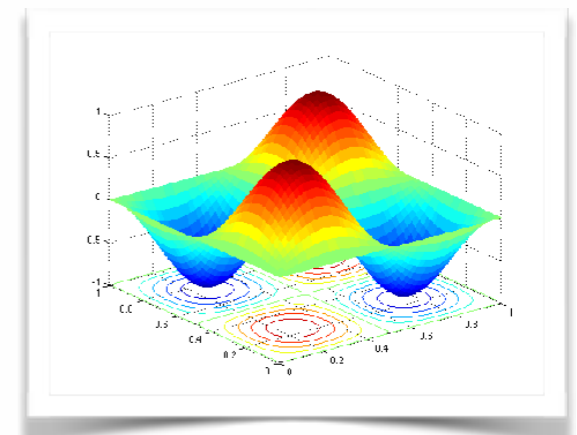
- ▶ **Convergence assurée** par ajout de nouveaux couples PGD pour « corriger » l'approximation de la RPM

- Ajouter des points de référence permet de converger vers la courbe de la LATIN - PGD

- ▶ *Compromis entre nombres de points de référence (temps CPU) et le nombre de couple PGD (i.e. nombre d'itérations LATIN)*

- ▶ *Ajouter des points de référence en paramètre plutôt qu'en espace est préférable ici.*

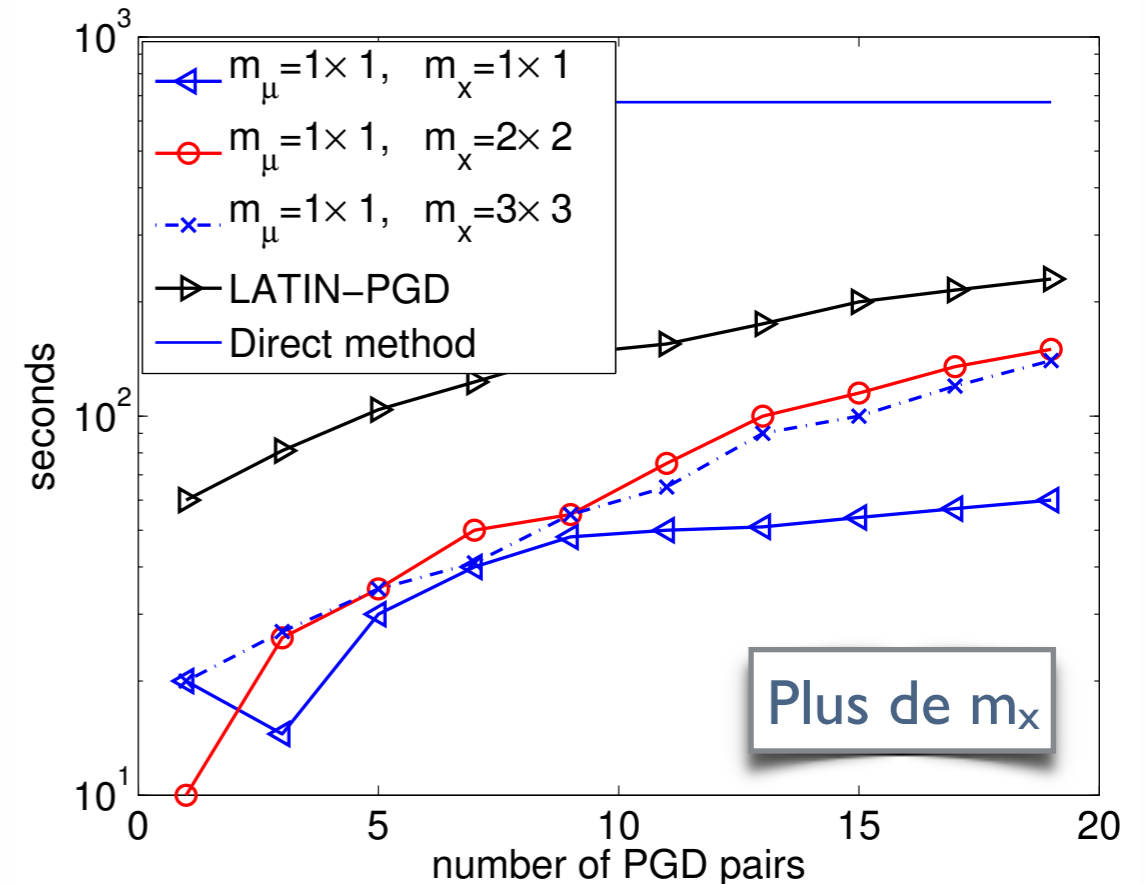
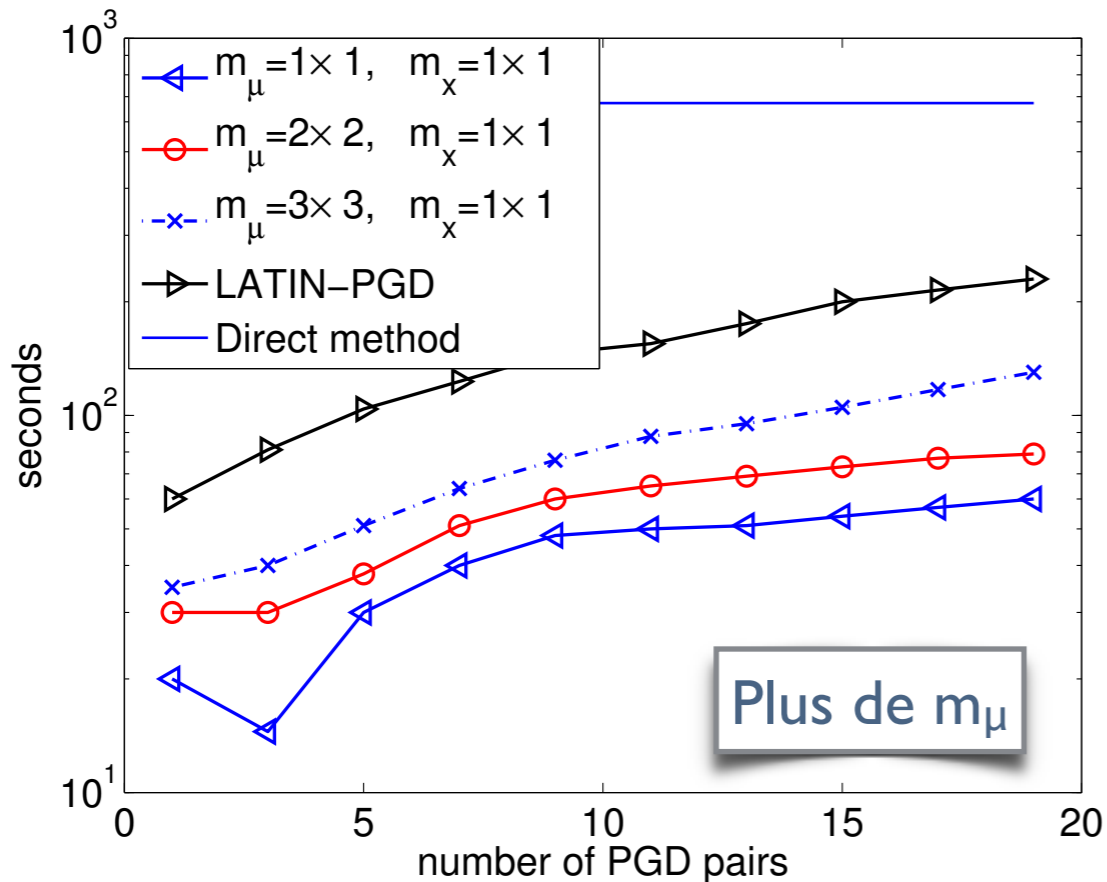
$$\epsilon = 1/p \sum_{j=1}^p \frac{\|u_{ref}(\mathbf{x}, \mu_j) - u_m(\mathbf{x}, \mu_j)\|_{L^2}}{\|u_{ref}(\mathbf{x}, \mu_j)\|_{L^2}}$$



$N = 2601, p = 225$

Illustration sur le problème de référence

■ Influence du nombre de points de référence (m_μ , m_x)



- **RPM uniquement pour l'étape préliminaire**

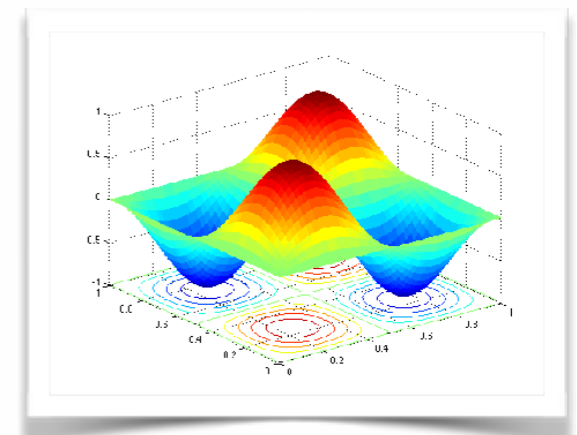
- ▶ **Convergence assurée** par ajout de nouveaux couples PGD pour « corriger » l'approximation de la RPM

- Ajouter des points de référence permet de converger vers la courbe de la LATIN - PGD

- ▶ *Compromis entre nombres de points de référence (temps CPU) et le nombre de couple PGD (i.e. nombre d'itérations LATIN)*

- ▶ *Ajouter des points de référence en paramètre plutôt qu'en espace est préférable ici.*

$$\epsilon = 1/p \sum_{j=1}^p \frac{\|u_{ref}(\mathbf{x}, \mu_j) - u_m(\mathbf{x}, \mu_j)\|_{L^2}}{\|u_{ref}(\mathbf{x}, \mu_j)\|_{L^2}}$$



N = 2601, p = 225

Illustration sur le problème de référence

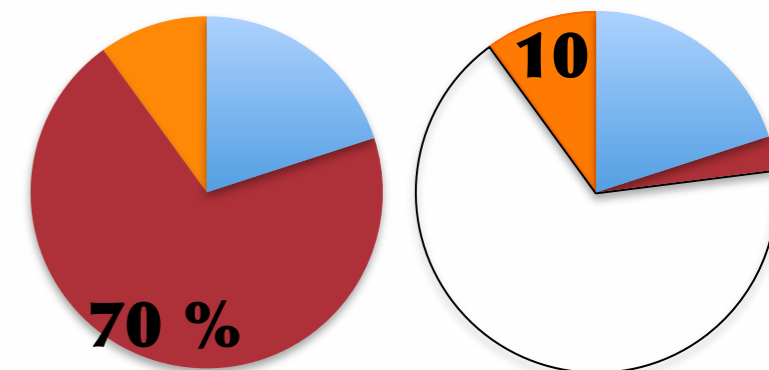
- **Gain CPU par rapport à une approche direct (sans réduction de modèle) pour atteindre une erreur de 10^{-2}**

	LATIN-PGD	LATIN-PGD-RPM		
		$m_\mu = 1 \times 1$ $m_x = 1 \times 1$	$m_\mu = 2 \times 2$ $m_x = 1 \times 1$	$m_\mu = 3 \times 3$ $m_x = 1 \times 1$
Number of PGD pairs	7	9	7	7
Gain w.r.t. direct method	6	18	14.2	11.5

- **Gain CPU sur la construction du modèle réduit (étape préliminaire) pour atteindre une erreur de 10^{-2}**

	LATIN-PGD-RPM		
	$m_\mu = 1 \times 1$ $m_x = 1 \times 1$	$m_\mu = 2 \times 2$ $m_x = 1 \times 1$	$m_\mu = 3 \times 3$ $m_x = 1 \times 1$
Real gain with respect to LATIN-PGD	90	39	25
Expected gain ($\approx \frac{p}{m_\mu}$)	225	56	25

- Génération de la base réduite
- Etape préliminaire (ROM)
- Etape locale



- **Gain CPU et ordre k de la base réduite pour une erreur de 10^{-2} par Base réduite/Newton/EIM sont comparables (temps CPU de la phase d'apprentissage off-line inclus !) [Capaldo, Guidault, Néron, Ladeveze 16]**

Conclusions et perspectives

■ Réduction de modèle coûteuse en non-linéaire (Pb non spécifique à la PGD !)

- Projection sur une base réduite (évolutive en PGD ou non) à chaque itéré
 - ▶ *Evaluation du jacobien et résidu*
 - ▶ *Opérateur non-linéaire non séparable (pré-calculs peu efficaces)*
- Une complexité des opérations de l'ordre de la taille du problème initial

■ La méthode des points de référence (RPM) permet de réduire cette complexité

- Technique d'approximation (et non d'interpolation) des intégrales, des contributions à la construction du modèle réduit (projection sur une base réduite qui évolue !) basée sur :
 - ▶ *Des points de références pour simplifier l'évaluation des intégrandes*
 - ▶ *Une reconstruction en variables séparées de rang faible par patch à moindre coût (sans SVD !)*
- Convergence assurée par l'ajout de modes PGD à la volée pour compenser l'erreur d'approximation de la RPM
- Gain CPU sur la construction du modèle réduit (Etape préliminaire) d'un ordre de grandeur

■ Perspectives

- Application à des problèmes non-linéaires plus complexes et plus réalistes :
 - ▶ *Contrôle de la précision de l'approximation RPM (choix des points de référence et méthode adaptative)*
 - ▶ *Plus de variables (influence du regroupement des variables pour la construction du modèle réduit)*
- Intégration dans les codes (structure de données, représentation séparées de toutes les quantités)



Merci de votre attention !

- Le FUI, fonds unique interministériel, est remercié pour son financement du projet CARAB (« Conception Avancée Robuste pour les Assemblages Boulonnés ») project (<http://www.systematic-paris-region.org/fr/projets/carab>).
- L'ANRT, Agence Nationale pour la recherche, est remerciée pour son financement du projet SIM-DREAM, ANR-10-COSI-0006

