



**HAL**  
open science

## **Analyse des efforts d'interface à l'aide de la modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4)**

Alain Ehrlacher, Taeb Naciri, Armelle Chabot, Jean-François Caron

### ► **To cite this version:**

Alain Ehrlacher, Taeb Naciri, Armelle Chabot, Jean-François Caron. Analyse des efforts d'interface à l'aide de la modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4) . Comptes-rendus aux 9ème Journées Nationales sur les Composites (JNC9), Ed. AMAC (ISBN: 2-9505117-2-4): 203-212, Nov 1994, St Etienne, France. <hal-01677059>

**HAL Id: hal-01677059**

**<https://hal.science/hal-01677059v1>**

Submitted on 6 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

**Analyse des efforts d'interface à l'aide de la  
modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4)**

**Interface stress analysis with the multiphasic modelisation  
of multilayered materials (M4)**

A.Ehrlacher, T. Naciri, A.Chabot & J.F. Caron  
Centre d'enseignement et de recherche en analyse des matériaux  
École nationale des ponts et chaussées  
1,Avenue Montaigne central IV 93167 Noisy-Le-Grand cedex

**RÉSUMÉ**

Nous proposons une modélisation permettant de déterminer et d'analyser les efforts d'interface dans un composite multicouche dans le but d'étudier les problèmes d'initiation et de propagation du délaminage. Les théories classiques des plaques ne permettent pas d'accéder aux contraintes inter laminaires ou aux surcontraintes sur les bords (effets de bords), grandeurs qui pilotent le phénomène de délaminage. Le modèle que nous proposons (modélisation multiphasique des matériaux multicouches M4) a pour principal intérêt qu'un seul calcul de structure est nécessaire pour accéder aux efforts d'interface. En introduisant quelques simplifications, le modèle devient plus opératoire et permet l'établissement de solutions analytiques. Nous montrons alors que le modèle M4 simplifié fournit une bonne prévision des déplacements et des efforts d'interface. Nous montrons également que c'est un modèle pertinent pour l'étude de l'initiation du délaminage.

**ABSTRACT**

We propose a model to calculate the interface forces in a multilayered medium. The aim of this work is to study damages like delamination and edge effects. The classical analysis methods of multilayered materials do not give enough information about the interface stresses that causes these damages. The model we propose (multiphasic modelisation of multilayered materials M4) permits one to calculate directly these stresses. We present in this paper the M4 model and we establish analytical solutions for two problems. In the first one, we show that we can have a good prediction of displacements for a beam flexure problem. In the second one, we compare the interface stresses obtained by the M4 model with solutions found in the literature for a multilayered plate in tension. We show that the M4 model is a pertinent tool to study delamination.

**MATÉRIAUX COMPOSITES - EFFORTS D'INTERFACE - DELAMINAGE  
COMPOSITE MATERIALS - INTERFACE STRESS - DELAMINATION**

## INTRODUCTION

Les théories classiques de plaques (Love-Kirchhoff, Reissner-Mindlin) ne permettent pas de calculer les contraintes inter laminaires ou les surcontraintes aux bords (effets de bords) dans les matériaux composites multicouches. Plusieurs auteurs se sont penchés sur l'étude de ces contraintes inter laminaires et ont proposés soit des solutions analytiques à des cas particuliers (Pagano 1970), soit des modèles numériques tridimensionnels pour traiter des cas plus généraux (Pipes 1970) (Rybicki 1971) (Renieri & Herakovich 1976). Ces approches ont permis de mettre en évidence le phénomène de concentration de l'effort normal à l'interface au voisinage des bords mais les calculs qu'elles engendrent sont tridimensionnels et assez lourds.

D'autres auteurs ont adopté des approches visant à rendre ces calculs plus légers. Une première famille d'approches consiste à faire des calculs de plaques (qui ne vérifient donc pas les conditions aux limites du problème 3D) et à déterminer au voisinage des bords des champs correcteurs pour corriger l'erreur d'équilibre au bord (Allix 1989) (Dumontet 1990) (Lecuyer 1991). Une seconde famille consiste à développer des théories de plaques multicouches où la géométrie reste bidimensionnelle mais le nombre de champs cinématiques est augmenté pour bien prendre en compte l'influence de chaque couche (Puppo & Evensen 1970) (Garett & Bailey 1977) (Pagano 1978) (Macquire & al. 1992). Un seul calcul de plaque est alors nécessaire pour déterminer les efforts d'interface.

Notre approche fait partie de cette dernière ligne de pensée. Nous proposons de déterminer les contraintes inter-laminaires à l'aide d'une modélisation nouvelle : la modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4). Nous présentons dans une première partie les hypothèses et les équations du modèle en question. Dans une seconde partie, nous simplifions ce modèle pour le rendre plus opératoire. Les troisième et quatrième parties sont consacrées à la validation du modèle simplifié au niveau des champs de déplacements et des efforts d'interface ainsi obtenus.

## LE MODÈLE M4

La modélisation multiphasique des matériaux multicouches (M4) a été développée dans le but de faciliter l'étude d'endommagements tels que les délaminages et les microfissurations transverses. Nous présentons dans cette partie les hypothèses permettant d'atteindre cet objectif ainsi que les équations du modèle.

Nous considérons l'objet (plaque ou coque multicouche) comme une surface de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $n$  est le nombre de couches du multicouche, en chaque point de la surface, il y a  $n$  particules de matériau.

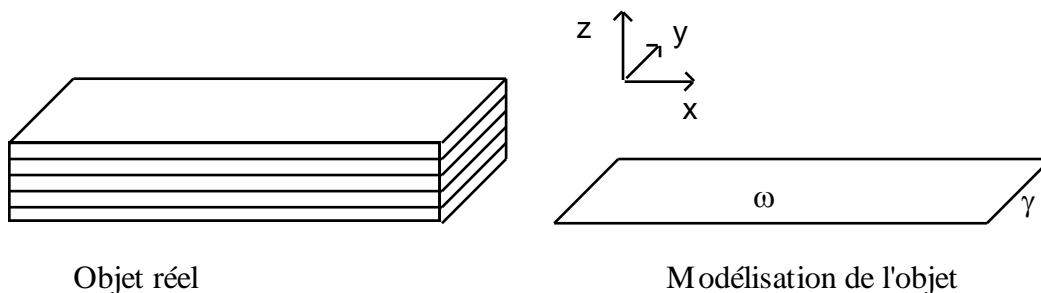


fig.1 : Modélisation de l'objet

Pour simplifier la présentation, nous supposons la surface plane. Dans le repère  $(O, \underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ , elle est décrite par le domaine  $\omega$  du plan  $z=0$  de bord  $\gamma$ . Nous notons dans ce qui suit  $\tilde{X}$  un vecteur de  $\omega$ ,  $\tilde{\underline{X}}$  un tenseur d'ordre 2 de  $\omega$ ,  $\underline{X}$  un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  et  $\underline{\underline{X}}$  un tenseur d'ordre 2 de  $\mathbb{R}^3$ .

La cinématique est donc donnée par  $n$  champs de vitesse sur la surface. L'espace vectoriel des mouvements virtuels peut donc s'écrire sous la forme :

$$(1) \quad V^* = \{ \underline{V}^{i*} = \tilde{V}^{i*} + W^{i*} \underline{z}, i = 1, n \}$$

Notons  $h_i^-$ ,  $h_i^+$  et  $\bar{h}_i$  respectivement la côte du bas, la côte du haut et la côte médiane de la  $i^{ième}$  couche et  $e_i = h_i^+ - h_i^-$  l'épaisseur de cette couche. Les mouvements virtuels rigidifiants dans ce modèle sont choisis tels que :

$$(2) \quad \exists (\underline{V}_0^*, \underline{\Omega}^*) \text{ tq } \forall (x, y) \text{ et } \forall i \in [1, n]$$

$$\underline{V}_R^{i*}(x, y) = \underline{V}_0^* + \underline{\Omega}^* \wedge (x \cdot \underline{x} + y \cdot \underline{y} + \bar{h}_i \cdot \underline{z})$$

Ce choix est *essentiel* car il permet de redonner à l'empilement du multicouche son "ordre" et son "épaisseur".

Le modèle M4 est alors développé en statique à l'aide du principe des puissances virtuelles. Ecrivons les puissances virtuelles des efforts extérieurs PVE et intérieurs PVI. Nous avons :

$$(3) \quad PVE(V^*) = \int_{\omega} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{F}^i(x, y) \cdot \tilde{V}^{i*}(x, y) \right) d\omega + \int_{\gamma} \left( \sum_{i=1}^n \tilde{T}^i(x, y) \cdot \tilde{V}^{i*}(x, y) \right) d\gamma$$

$$+ \int_{\omega} \left( \sum_{i=1}^n F_3^i(x, y) \cdot W^{i*}(x, y) \right) d\omega + \int_{\gamma} \left( \sum_{i=1}^n T_3^i(x, y) \cdot W^{i*}(x, y) \right) d\gamma$$

où  $\tilde{F}^i$  est le champ de forces extérieures surfaciques dans la couche  $i$  et  $\tilde{T}^i$  le champ de forces extérieures sur le bord de la couche  $i$ . Pour la puissance virtuelle des efforts intérieurs, nous développons une théorie au premier gradient et nous avons :

$$(4) \quad PVI(V^*) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left( \underline{A}^i(x, y) \cdot \tilde{V}^{i*}(x, y) + \underline{\underline{B}}^i(x, y) \cdot \tilde{\text{grad}}(\tilde{V}^{i*}(x, y)) \right) d\omega$$

où  $\underline{A}^i$  et  $\underline{\underline{B}}^i$  sont les efforts intérieurs du modèle. Cette expression se réécrit en décomposant les différents champs en une partie plane et une partie normale sous la forme :

$$(5) \quad PVI(V^*) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left( \tilde{A}^i(x, y) \cdot \tilde{V}^{i*}(x, y) + A_3^i(x, y) \cdot W^{i*}(x, y) + B^i(x, y) \cdot r(\tilde{V}^{i*}(x, y)) \right) d\omega$$

$$+ \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left( -\tilde{N}^i(x, y) : \tilde{\tilde{\varepsilon}}^{i*}(x, y) + \tilde{D}^i(x, y) \cdot \tilde{\text{grad}}(W^{i*}(x, y)) \right) d\omega$$

où  $r(\tilde{V}^{i*}) = \frac{1}{2}(V_{y,x}^{i*} - V_{x,y}^{i*})$ ,  $B^i$ ,  $\tilde{D}^i$  et  $\tilde{N}^i$  sont des scalaires, vecteur et tenseur de  $\mathbb{R}^2$  issus de la décomposition du tenseur  $\underline{\underline{B}}^i$  de  $\mathbb{R}^3$ .

La puissance des efforts intérieurs doit s'annuler pour les mouvements rigidifiants (condition de cohérence). Les efforts intérieurs exhibés en (5) vérifient donc les équations suivantes :

$$(6) \quad \sum_{i=1}^n \tilde{A}^i = \sum_{i=1}^n A_3^i = \sum_{i=1}^n \left( \tilde{A}^i \cdot [x\underline{y} - y\underline{x}] + B^i \right) = \sum_{i=1}^n \left( A_3^i \cdot [x\underline{x} + y\underline{y}] - \bar{h}_i \tilde{A}^i + \tilde{D}^i \right) = 0$$

Posons alors :

$$(7) \quad \tilde{\tau}^{j,i+1}(x, y) = \sum_{k=1}^i \tilde{A}^k(x, y)$$

$$(8) \quad \nu^{j,i+1}(x, y) = \sum_{k=1}^i A_3^k(x, y)$$

$$(9) \quad \tilde{\mu}^{i,i+1}(x, y) = \sum_{k=1}^i (h_i^+ - \bar{h}_k) \tilde{A}^k(x, y) + \tilde{D}^k(x, y)$$

$$(10) \quad \theta^{i,i+1}(x, y) = \sum_{k=1}^i B^k(x, y)$$

*Remarque* : Les expressions des efforts  $\tilde{\tau}^{j,i+1}$ ,  $\nu^{j,i+1}$ ,  $\tilde{\mu}^{i,i+1}$  et  $\theta^{i,i+1}$  s'imposent à nous dès lors que l'on choisit un mouvement virtuel particulier faisant travailler l'interface entre les couches  $i$  et  $i+1$  et rigidifiant le reste de la structure. On met alors en évidence un champ de torseur dont les éléments de réduction au point  $(x, y)$  sont :  $\sum_{k=1}^i \tilde{A}^k + A_3^k \underline{z}$  pour la résultante et

$\sum_{k=1}^i B^k \underline{z} + (h_i^+ - \bar{h}_k) \tilde{A}^k + \tilde{D}^k$  pour le moment.

La puissance virtuelle des efforts intérieurs se réécrit alors sous la forme :

$$(11) \quad PVI(V^*) = \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left( (\tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i}) \tilde{V}^{i*} + (\nu^{i+1,i} - \nu^{i-1,i}) W^{i*}(x, y) + (\theta^{i+1,i} - \theta^{i-1,i}) r(\tilde{V}^{i*}) \right) d\omega \\ + \int_{\omega} \sum_{i=1}^n \left( -\tilde{N}^i : \tilde{\varepsilon}^{i*} + \left( \tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot g\tilde{r}ad(W^{i*}) \right) d\omega$$

Les efforts et les déformations généralisés du modèle sont donc les suivants :

		Déformations associées
efforts membranaires de la couche $i$	$\tilde{N}^i$	$\tilde{\varepsilon}^i$
efforts de cisaillement d'interface $i, i+1$	$\tilde{\tau}^{j,i+1}$	$\tilde{D}^{i,i+1} = \tilde{U}^{i+1} - \tilde{U}^i + \frac{e_{i+1}}{2} g\tilde{r}ad(U_3^{i+1}) + \frac{e_i}{2} g\tilde{r}ad(U_3^i)$
effort normal d'interface $i, i+1$	$\nu^{j,i+1}$	$D_3^{i,i+1} = U_3^{i+1} - U_3^i$
moments de flexion de l'interface $i, i+1$	$\tilde{\mu}^{i,i+1}$	$\omega^{i,i+1} = g\tilde{r}ad(U_3^{i+1}) - g\tilde{r}ad(U_3^i)$
couple de torsion de l'interface $i, i+1$	$\theta^{i,i+1}$	$\omega_3^{i,i+1} = r(\tilde{U}^{i+1}) - r(\tilde{U}^i)$

L'application du principe des puissances virtuelles dans le cas statique nous conduit aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites suivantes :

$$(12) \quad \begin{cases} \operatorname{div} \tilde{N}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} - \frac{1}{2} \operatorname{rot}((\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \underline{z}) + \tilde{F}^i = 0 \\ -\operatorname{div} \left( \tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + \nu^{j,i+1} - \nu^{i-1,i} + F_3^i = 0 \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \omega$$

$$(13) \quad \begin{cases} \tilde{N}^i \cdot \tilde{n} - \frac{1}{2} (\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) \tilde{n} \wedge \underline{z} = \tilde{T}^i \\ \left( \tilde{\mu}^{i,i+1} - \tilde{\mu}^{i-1,i} - \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) \cdot \tilde{n} = T_3^i \end{cases} \quad \forall (x, y) \in \gamma$$

En chaque point  $(x, y)$  du multicouche, nous avons donc  $9n-6$  efforts intérieurs et autant de déformations généralisées. Le comportement élastique linéaire le plus général d'un multicouche multiphasique ferait donc intervenir une "matrice"  $9n-6 \times 9n-6$ . Il est possible d'identifier les composantes de la matrice des souplesses en procédant à un changement

d'échelle (Ehrlacher & al. 1994) (Ce changement d'échelle consiste à égaliser l'énergie de déformation élastique en contrainte du modèle M4 avec celle d'un modèle tridimensionnel classique dont le champ de contrainte est approximé à l'aide d'expressions linéaires des efforts intérieurs du modèle M4). Cette identification permet de mettre en évidence un certain nombre de couplages entre les différentes couches et interfaces au niveau de la matrice de souplesse du modèle M4 bien que plusieurs éléments de cette dernière soient nuls. Plusieurs simplifications peuvent être envisagées pour rendre le modèle plus opératoire. Nous présentons dans la partie qui suit un modèle simplifié facile à utiliser. Nous jugerons de sa pertinence à travers les exemples traités dans la suite.

### LE MODÈLE M4 SIMPLIFIÉ

Parmi les différentes simplifications possibles, nous choisissons de présenter celles qui conduisent à un modèle simple et opératoire, le modèle M4 simplifié. Nous introduisons tout d'abord une liaison cinématique qui consiste à relier tout les déplacements orthogonaux entre eux réduisant ainsi le nombre de champs cinématiques de  $3n$  à  $2n+1$  :

$$(14) \quad \forall i \in [1, n] \quad U_3^i = U_3$$

Nous faisons par la suite l'hypothèse selon laquelle le rotationnel des couples de torsion est nul pour tout  $i$  :

$$(15) \quad \forall i \in [1, n] \quad \text{rot}(\theta^{i,i+1} - \theta^{i-1,i}) = 0$$

Les équations d'équilibre (12) sont elles aussi réduites à  $2n+1$  et elles peuvent s'écrire uniquement en fonction des efforts membranaires et des efforts de cisaillement d'interface :

$$(16) \quad \begin{cases} \text{div} \tilde{N}^i + \tilde{\tau}^{i,i+1} - \tilde{\tau}^{i-1,i} + \tilde{F}^i = 0 & i \in [1, n] \\ \sum_{i=1}^n \left( -\text{div} \left( \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + F_3^i \right) = 0 & \forall (x, y) \in \omega \end{cases}$$

Les conditions aux limites (13) deviennent :

$$(17) \quad \begin{cases} \tilde{N} \cdot \tilde{n} = \tilde{T}^i & \forall i \in [1, n] \\ \sum_{i=1}^n \left( \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \cdot \tilde{n} - T_3^i \right) = 0 & \forall (x, y) \in \gamma \end{cases}$$

Notons que la deuxième équation de (16) ou de (17) doit être comprise au sens des distributions, les cisaillement d'interface pouvant être discontinus.

Pour déterminer les relations de comportement du modèle M4 simplifié écrivons les équations d'équilibre (quasi-statique) du modèle tridimensionnel classique :

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + F_x = 0 \\ \sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + F_y = 0 \\ \sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + F_z = 0 \end{cases}$$

Approchons le tenseur des contraintes  $\overset{\approx}{\sigma}$  par le tenseur  $\overset{\approx}{\sigma}^{ap}$  de la façon suivante :

- Comme  $N_{\alpha\beta}^i = \int_{h_i^-}^{h_i^+} \sigma_{\alpha\beta} dz$ , nous posons :  $\sigma_{\alpha\beta}^{ap} = \frac{1}{e_i} N_{\alpha\beta}^i$  ( $\alpha, \beta=1,2$ ).

- Comme  $\tau_\alpha^{i-1,i} = \sigma_{\alpha 3}(h_i^-)$  et  $\tau_\alpha^{i,i+1} = \sigma_{\alpha 3}(h_i^+)$ , nous approximations  $\sigma_{\alpha 3}$  par un champ affine par morceaux :  $\sigma_{\alpha 3}^{ap} = \tau_\alpha^{i-1,i} + \frac{z - h_i^-}{h_i^+ - h_i^-} (\tau_\alpha^{i,i+1} - \tau_\alpha^{i-1,i})$ .

- Nous supposons en outre que la contribution de  $\sigma_{33}$  à l'énergie élastique est négligeable. Nous posons alors :  $\sigma_{33}^{ap} = 0$ .

L'intégration dans l'épaisseur de chaque couche des 2 premières équations d'équilibre (18) pour  $\sigma \approx^{ap}$  nous redonne les 2 premières équations d'équilibre (16). L'intégration dans toute l'épaisseur du multicouche de la troisième équation d'équilibre (18) pour  $\sigma \approx^{ap}$  nous redonne la troisième équation d'équilibre (16). Ecrivons alors l'énergie élastique associée au champs de contrainte réel :

$$(19) \quad W(3D) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[ \int_{\omega} \frac{1}{2} \sigma_{kl} S_{lkr}^i \sigma_{sr} d\omega \right] dz \quad k, l, r, s = 1, 2, 3$$

où  $S_{lkr}^i$  sont les composantes du tenseur de souplesse de la  $i^{\text{ème}}$  couche. Cette expression s'écrit compte tenu de l'orthotropie des couches (en supposant que l'axe 3 est un axe d'orthotropie) :

$$(20) \quad W(3D) = \sum_{i=1}^n \int_{h_i^-}^{h_i^+} \left[ \int_{\omega} (\sigma_{\beta\alpha} S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i \sigma_{\delta\gamma} + 2\sigma_{\beta\alpha} S_{\alpha\beta 33}^i \sigma_{33} + \sigma_{33} S_{3333}^i \sigma_{33} + \sigma_{3\alpha} S_{\alpha 3\beta 3}^i \sigma_{3\beta}) d\omega \right] dz \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

En injectant le champs de contrainte approché dans l'expression (20), nous obtenons une approximation de l'énergie élastique du modèle M4 :

$$(21) \quad W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N_{\beta\alpha}^i S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\delta\gamma}^i + \frac{2e_i}{3} S_{\alpha 3\beta 3}^i \left[ 2\tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} + 2\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} + \tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i,i+1} + \tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i-1,i} \right] \right] d\omega \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta = 1, 2$$

La dernière simplification du modèle consiste alors à découpler les interfaces :

$$(22) \quad W^{ap}(M4) = \int_{\omega} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{e_i} N_{\beta\alpha}^i S_{\alpha\beta\gamma\delta}^i N_{\delta\gamma}^i + \frac{2e_i}{3} S_{\alpha 3\beta 3}^i \left[ 2\tau_{\alpha}^{i,i+1} \tau_{\beta}^{i,i+1} + 2\tau_{\alpha}^{i-1,i} \tau_{\beta}^{i-1,i} \right] \right] d\omega$$

La relation de comportement du modèle M4 simplifié s'écrit finalement :

$$(23) \quad \boxed{\begin{aligned} \mathcal{E}_{\alpha\beta}^j &= \frac{1}{e_i} S_{\beta\alpha\delta\gamma}^i N_{\gamma\delta}^i \\ D_{\alpha}^{i,i+1} &= 2 e_i S_{\alpha 3\beta 3}^i + e_{i+1} S_{\alpha 3\beta 3}^{i+1} \tau_{\beta}^{j,i+1} \end{aligned}}$$

Le modèle M4 simplifié dont nous venons de présenter les hypothèses et les équations se prête bien à l'établissement de solutions analytiques. Nous remarquons cependant que les efforts normaux d'interfaces ne sont pas accessibles. Nous définissons alors les efforts normaux d'interface  $v^{i,i+1}$  par la relation :

$$(24) \quad \text{div} \left( \frac{e_i}{2} (\tilde{\tau}^{i,i+1} + \tilde{\tau}^{i-1,i}) \right) + v^{i,i+1} - v^{i-1,i} = 0$$

Notons que le modèle pouvant conduire à des cisaillements discontinus, on introduit ici la possibilité d'avoir des efforts normaux d'interface concentrés de type Dirac.

Pour valider le modèle M4 simplifié, nous traitons dans ce qui suit deux exemples simples. Le premier consiste à comparer la flèche d'une poutre multicouche constitué de trois couches soumise à un chargement de flexion 3 points prévue, par le modèle M4 simplifié, par la théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse et déterminé expérimentalement. Le second exemple consiste à comparer les efforts d'interfaces pour une plaque multicouche  $(0^\circ, 90^\circ)_s$  en traction déterminés à l'aide de trois modèle différents.

### EXEMPLE 1 : POUTRE EN FLEXION

Considérons une poutre constituée d'un laminé symétrique formé de 3 couches et soumise à un chargement de flexion 3-points.

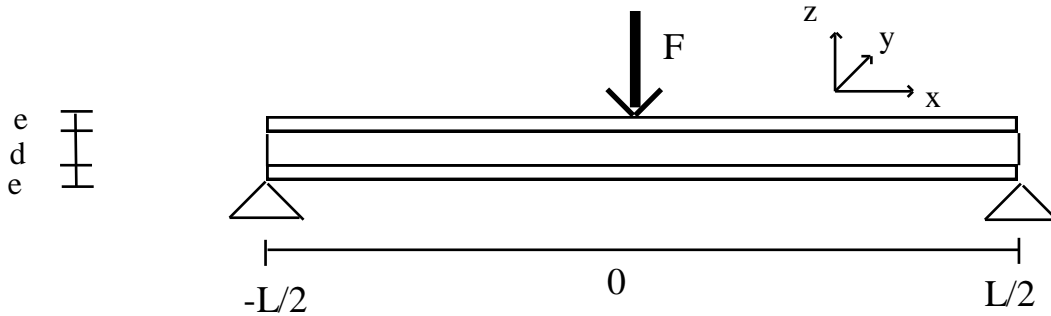


fig.2 : Géométrie de la poutre

Nous numérotons les couches de 1 à 3 du bas vers le haut. Nous supposons en outre que nous sommes en déformations planes par rapport à  $y$ . Nous avons alors :

$$(25) \quad u^i(x, y) = u^i(x); \quad v^i(x, y) = 0; \quad w^i(x, y) = w(x) \quad i = 1, 2, 3$$

Le problème présentant une symétrie par rapport à l'abscisse  $x=0$ , nous ne modélisons qu'une moitié de poutre ( $0 \leq x \leq L/2$ ) en assurant la symétrie par des conditions aux limites en déplacements imposés ( $u^i(0) = 0 \quad i = 1, 2, 3$ ).

Les conditions aux limites s'écrivent :

$$(26) \quad \begin{array}{ll} \text{en contrainte} & \text{en déplacement} \\ \left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}^i(L/2) \cdot \tilde{x} = 0 \quad \forall i \in [1, 3] \\ (e+d)(\tilde{\tau}^{1,2}(L/2) + \tilde{\tau}^{2,3}(L/2)) \cdot (\tilde{x}) = 0 \\ (e+d)(\tilde{\tau}^{1,2}(0) + \tilde{\tau}^{2,3}(0)) \cdot (-\tilde{x}) = \frac{F}{2} \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} u^1(0) = 0 \\ u^2(0) = 0 \\ u^3(0) = 0 \\ w(L/2) = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

Notons  $Q_{11}^i$  le premier terme de la matrice des raideurs en contrainte plane de la couche  $i$  et  $K_{\tau}^{i,i+1}$  le premier terme de raideur d'interface  $i, i+1$  relié aux matrices de souplesses des couches  $i$  et  $i+1$  par la relation (23).

*Remarque :* Comme le laminé est symétrique,  $K_{\tau}^{1,2} = K_{\tau}^{2,3} = K_{\tau}$  et  $Q_{11}^1 = Q_{11}^3$

En utilisant les relations de comportement (23) et en tenant compte de l'hypothèse de déformations planes par rapport à  $y$  (25), les équations d'équilibre (16) se réduisent dans le cas de l'exemple traité au système différentiel suivant :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} eQ_{11}^1 u_{,xx}^1 + K_{\tau} \left( u^2 - u^1 + \frac{e+d}{2} w_{,x} \right) = 0 \\ dQ_{11}^2 u_{,xx}^2 + K_{\tau} (u^3 - 2u^2 + u^1) = 0 \\ eQ_{11}^1 u_{,xx}^3 - K_{\tau} \left( u^3 - u^2 + \frac{e+d}{2} w_{,x} \right) = 0 \\ K_{\tau} (u^3 - u^1 + (e+d)w_{,x})_{,x} = 0 \end{array} \right.$$

La détermination de  $w(x)$  s'effectue alors en résolvant le système et en utilisant les conditions aux limites (26). Nous obtenons alors une flèche au centre égale à :

$$(28) \quad w(0) = -\frac{FL^3}{24be(e+d)^2 Q_{11}^1} - \frac{FL}{2b(e+d)^2 K_r}$$

Il est également possible de déterminer la flèche  $w_{ct}(0)$  à l'aide de la théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse (cf par exemple (Berthelot 1992)) :

$$(29) \quad w_{ct}(0) = -\frac{FL^3 d_{11}}{48b} - \frac{FLf_{55}}{4b}$$

où la matrice  $d = D^{-1}$  et  $f = F^{-1}$ ,  $D$  et  $F$  étant issues de la matrice ABBDF liant les efforts généralisés aux déformations généralisées dans la théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transverse.

Pour comparer les deux modèles, nous avons réalisé et testé deux poutres multicouches ( $0^\circ_3$ ) et ( $90^\circ_3$ ) dont les dimensions sont les suivantes :  $L=100\text{mm}$ ;  $b=10\text{mm}$ ;  $e=d/2=1,1\text{mm}$ . Le matériau utilisé (T300/174) possède les caractéristiques suivantes :

$E_1$	$E_2$	$\nu_{12}$	$G_{12}=G_{13}=G_{23}$
119,3 GPa	9,3 GPa	0,32	5,1 GPa

tableau.1 : Caractéristiques du matériau constitutif

Les résultats obtenus sont les suivants :

	$(0^\circ_3)$	$(90^\circ_3)$
$w(0)/F$	$2,94 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$	$37,4 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$
$w_{ct}(0)/F$	$2,57 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$	$31,8 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$
$w_{exp}(0)/F$	$3,20 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$	$36,5 \cdot 10^{-6} \text{ m/N}$

tableau.2 : Tableau des résultats

La valeur expérimentale est une moyenne sur dix éprouvettes différentes. Les essais ont été réalisés d'une machine de traction-compression de type DY31 de la société ADAMEL-LHOMARGIE. Les résultats obtenus montrent que le modèle M4 simplifié fournit une bonne estimation de la flèche. Il reste toutefois à traiter d'autres exemples avec différents chargements et en prenant en compte plus de couches pour valider complètement le modèle M4 simplifié en raideur. Les résultats obtenus dans cet exemple simple sont cependant très encourageants.

## EXEMPLE 2 : STRATIFIÉ $(0^\circ, 90^\circ)_s$ EN TRACTION

Dans ce second exemple, nous étudions la validité du modèle M4 simplifié au niveau des efforts d'interface qu'il nous permet d'obtenir. Nous choisissons pour cela une structure largement étudié dans la littérature (Pagano 1978) (Wang-Crossman 1977). Il s'agit d'une plaque multicouche  $(0^\circ, 90^\circ)_s$  soumise à un allongement  $\Delta$ . La géométrie de la plaque et les caractéristiques du matériau constitutif sont les suivants :

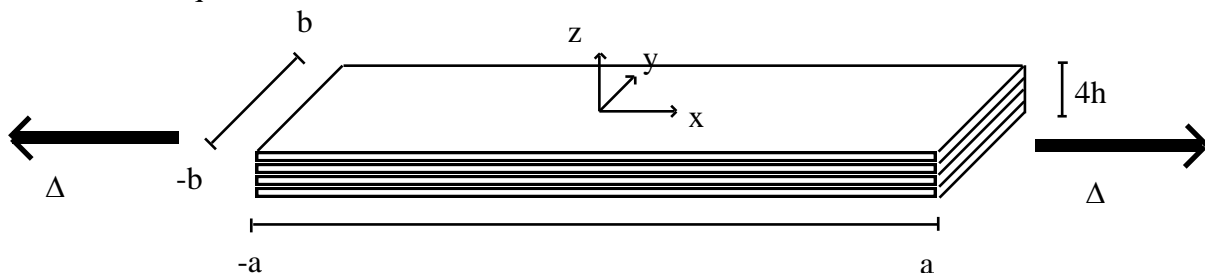


fig.3 : Géométrie de la plaque multicouche

$E_1$	$E_2 = E_3$	$\nu_{12} = \nu_{23} = \nu_{31}$	$G_{12} = G_{13} = G_{23} = G$
$20 \cdot 10^6$ psi	$2,1 \cdot 10^6$ psi	0,21	$0,85 \cdot 10^6$ psi

tableau.3 : Caractéristiques du matériau constitutif.

Compte tenu des symétries de la géométrie et de l'empilement, nous cherchons un champ de déplacement sous la forme suivante

$$(30) \quad u_1^i(x, y) = \frac{\Delta}{a} x ; u_2^i(x, y) = f_i(y) ; u_3(x, y) = 0$$

De plus, par raison de symétrie du chargement  $f_1(y) = f_4(y)$  et  $f_2(y) = f_3(y)$ . En utilisant les relations de comportement, les équations d'équilibre se réduisent à :

$$(31) \quad \begin{cases} \frac{hE_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} f_1''(y) + \frac{G}{h}(f_2(y) - f_1(y)) = 0 \\ \frac{hE_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} f_2''(y) - \frac{G}{h}(f_2(y) - f_1(y)) = 0 \end{cases}$$

avec  $\nu_{21} = \nu_{12}E_2/E_1$ . Ce système se résout alors classiquement et nous obtenons en posant

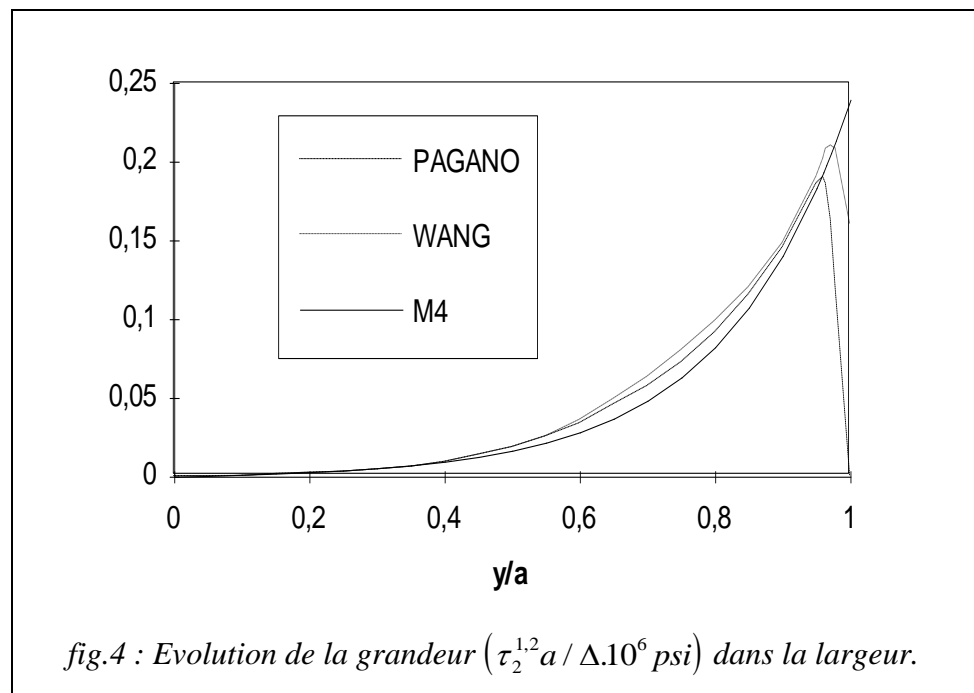
$$\omega = \sqrt{\frac{G(E_1 + E_2)(1 - \nu_{12}\nu_{21})}{h^3 E_1 E_2}} :$$

$$(32) \quad \begin{cases} u_1^1(x, y) = f_1(y) = \frac{\Delta}{a} \left( \frac{\nu_{12}E_2(E_1 - E_2)}{E_1(E_1 + E_2)\omega \cdot ch(\omega b)} \right) sh(\omega y) + \frac{\Delta}{a} \left( \frac{-2\nu_{12}E_2}{(E_1 + E_2)} \right) y \\ u_2^2(x, y) = f_2(y) = \frac{\Delta}{a} \left( \frac{-\nu_{12}(E_1 - E_2)}{(E_1 + E_2)\omega \cdot ch(\omega b)} \right) sh(\omega y) + \frac{\Delta}{a} \left( \frac{-2\nu_{12}E_2}{(E_1 + E_2)} \right) y \end{cases}$$

Nous en déduisons alors les efforts de cisaillement d'interface :

$$(33) \quad \begin{cases} \tilde{\tau}^{1,2}(x, y) = -\frac{\Delta}{a} \left( \frac{\nu_{12}E_2(E_1 - E_2)\omega h}{(1 - \nu_{12}\nu_{21})(E_1 + E_2)ch(\omega b)} \right) sh(\omega y) \tilde{y} \\ \tilde{\tau}^{2,3}(x, y) = \tilde{0} ; \tilde{\tau}^{3,4}(x, y) = -\tilde{\tau}^{1,2}(x, y) \end{cases}$$

Sur la figure ci-contre nous présentons l'évolution de l'effort de cisaillement à l'interface entre la couche à  $0^\circ$  et  $90^\circ$  dans la largeur de la plaque déterminé par le modèle M4 simplifié et par les modèles développés par (Wang & Crossman 1977) et (Pagano 1978) :



Nous obtenons avec les trois modèles le même cisaillement d'interface sauf au bord de la plaque où les solutions diffèrent. La condition aux limites du milieu 3D impose la nullité du cisaillement d'interface au bord. La solution de Pagano s'annule continûment alors que celle de Wang & Crossman n'atteint pas 0 dans la mesure où elle est déterminée numériquement. La solution du modèle M4 simplifié doit être interprétée comme suit : Elle passe d'une valeur maximale à 0 en présentant une discontinuité au bord. Ainsi l'effort normal d'interface défini en (24) admet une singularité de type Dirac au bord. La justification de cette interprétation est apportée dans (Chabot 1994) par un passage à la limite du modèle M4 complet au modèle M4 simplifié.

Ainsi, les critères classiques de délaminage portant dans les modèles 3D sur la contrainte normale moyenne à l'interface sur une certaine distance caractéristique se transforme dans le modèle M4 simplifié de manière très naturelle en une valeur critique de l'intensité du dirac d'effort normal au bord. C'est à dire une valeur critique de la discontinuité de cisaillement d'interface au bord. Le modèle M4 simplifié est donc particulièrement adapté à l'écriture des critères de délaminage.

## BIBLIOGRAPHIE

- Pagano N.J., 1970, "Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates", *J. Composite Mat.*, Vol. 4, n° 20.
- Rybicki E.F., 1971, "Approximate three-dimensional solutions for symmetric laminates under inplane loading", *J. Composite Materials*, Vol. 5 .
- Wang A.S.D., Crossmann F.W., 1977, "Some new results on edge effect in symmetric composite laminates", *J. Composite Materials*, Vol. 11.
- Renieri G.D., Herakovich C.T., 1976, "Nonlinear analysis of laminated fibrous composites", VPI-E-76-10, Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Allix O., 1989, "Modélisation du comportement des composites stratifiés", Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.
- Dumontet H., 1990, "Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites", Thèse d'Etat de l'Université Pierre et Marie Curie.
- Lecuyer F., 1991, "Etude des effets de bord dans les structures minces multicouches", Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.
- Puppo A.H., Evensen H.A., 1970, "Interlaminar shear in laminated composites under generalized plate stress", *J. Composite Mat.*, Vol. 4.
- Garett K.W., Bailey J.E., 1977, "Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyster", *J. Mat. Scien.*, Vol. 12.
- Macquire B., Petitpas E., Valentin D., 1992, "Experimental and theoretical damage accumulation in glass-epoxy tubes under torsion loading", *Composites Polymers*, Vol. 5, N° 3.
- Pagano N.J., 1978, "Stress Fields in composite laminates", *Int. J. Solids & Struct.*, Vol. 14.
- Berthelot J.M., 1992, "Matériaux composites", Ed Masson.
- Ehrlacher A., Chabot A. et Naciri T., 1994, "Prévision de l'initiation du délaminage", Rapport de fin de contrat SNECMA n°486.
- Chabot A. 1994, "Délaminage des matériaux composites", thèse en cours.