



**HAL**  
open science

## Modélisation d'une poutre multicouche à 18n ddl

Armelle Chabot, Alain Ehrlacher, Taeb Naciri

► **To cite this version:**

Armelle Chabot, Alain Ehrlacher, Taeb Naciri. Modélisation d'une poutre multicouche à 18n ddl. Colloque National en Calcul des Structures, May 1993, Giens, France. pp.178-185. hal-01677055

**HAL Id: hal-01677055**

**<https://hal.science/hal-01677055>**

Submitted on 18 Dec 2020

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Colloque national en calcul des structures

11-14 mai 1993

Giens, Var

HERMÈS

# Modélisation d'une poutre multicouche à 18n ddl

A. Chabot, A. Ehrbacher, T. Naciri

Centre d'Enseignement et de Recherches en Analyse des Matériaux  
Ecole Nationale des Ponts et Chaussées  
Central 4 - 1 avenue Montaigne  
93167 Noisy le Grand cedex

## INTRODUCTION

Dans ce papier nous présentons un modèle mécanique pour le calcul par éléments finis curvilignes à 18n ddl par noeuds d'une poutre constituée de n couches de matériaux anisotropes. Avant d'entrer dans le détail de cette présentation, il est nécessaire d'expliquer les raisons de la construction d'un outil spécial pour modéliser des objets aussi particuliers.

Le calcul classique des structures multicouches à l'aide de modèles bidimensionnels de plaques de Love-Kirchoff ou Reissner-Mindlin atteint ses limites aussitôt que l'on s'intéresse à la résistance ou à la fatigue de ces structures. En effet les endommagements caractéristiques de ces matériaux multicouches sont principalement des délaminnages ou des microfissurations transverses dans les plis les moins bien orientés par rapport au chargement. Ces phénomènes font intervenir essentiellement des efforts d'interfaces entre les couches et des surcontraintes au voisinage des bords (effets de bords) (N. J. Pagano 1978). Il est bien connu que les modèles de plaque s'avèrent incapable de prédire correctement ces efforts d'interface et ne fournissent pas des champs de contrainte en équilibre avec le chargement réel au voisinage des bords (P. Destuynder 1980). Pour améliorer le calcul des efforts internes qui pilotent l'endommagement et modéliser cet endommagement, de nombreux auteurs ont proposé de nouveaux outils basés soit sur le calcul de champs correcteurs (H. Wittrick 1987) (H. Dumontet 1990) (F. Lecuyer 1991) soit sur des modélisations tridimensionnelles de structures (N. J. Pagano & S. R. Somi 1983) (O. Allix 1989)...

Avec le même objectif que les auteurs ci-dessus, nous travaillons sur une modélisation alternative des structures multicouches qui doit répondre au cahier des charges suivant:

- pour simplifier le travail de l'ingénieur chargé de "mailler" l'objet, celui-ci doit être une variété géométrique de dimension 2 comme les plaques et coques;

- le modèle mécanique de cet objet doit faire apparaître de manière "naturelle" les efforts d'interface entre les couches;
- ce modèle doit permettre d'introduire facilement des descriptions d'endommagements tels que les délaminnages et les microfissurations transverses.

Ce cahier des charges nous a conduit à proposer une "Modélisation Multiphasique des Matériaux Multicouches" (M4) (A. Ehrbacher & T. Naciri 1993) dans lequel l'objet est une surface de  $R^3$  et en chaque point de la surface (appelé point de matière) il y a n particules de matériau (n=nombre de couches). La cinématique est donc donnée par n champs de vitesse sur la surface et les mouvements rigidifiants sont choisis de manière à "redonner" l'épaisseur et l'ordre d'empilement des couches.

La méthode des Puissances Virtuelles fait alors apparaître "naturellement" des efforts d'interface dans le modèle. Le comportement élastique linéaire du modèle fait intervenir des "raideurs de membrane" de chacune des couches ainsi que des "raideurs d'interface" associées aux discontinuités des champs de déplacement entre 2 couches voisines. Ce *Modèle Multiphasique de Matériaux Multicouches* (M4) apparaît aussi comme une généralisation du modèle de traction uniaxiale "Shear Lag Analysis" (K. W. Garrett & J. E. Bailey 1977) aux problèmes de contraintes multiaxiales et de flexion (le modèle S. L. A. est très utilisé outre Atlantique). Les tenseurs de raideur de membrane s'identifient facilement expérimentalement. Pour les tenseurs de raideurs d'interfaces cela semble impossible directement. On peut procéder à une sorte de "changement d'échelle" en comparant un modèle 3D de l'objet à un modèle 2D multiphasique. Pour cela on suppose que les champs de déplacement de chacune des couches du modèle (M4) sont les moyennes suivant l'épaisseur de la couche, des champs de déplacement du modèle 3D. Les raideurs d'interface doivent être choisies de façon que la densité "surfactive" d'énergie soit égale dans les deux modèles. La pertinence et le caractère opératoire d'une modélisation (M4) se jugera à la "constance" de ces raideurs.

Nous avons dans un premier temps validé les idées de cette modélisation par comparaison avec des modèles de structures tubulaires multicouches calculées par éléments finis tridimensionnels (J. F. Caron 1993). Ces calculs s'avèrent probant mais lourds. Dans la perspective de l'utilisation par les ingénieurs du modèle (M4) il est nécessaire de développer un logiciel de bureau d'études permettant de déterminer simplement les raideurs d'interfaces d'un empilement à partir de la description de celui-ci (en termes d'orientation et d'épaisseur des plis par exemple). Ce logiciel doit procéder au changement d'échelle entre un modèle 3D de l'empilement considéré et le modèle (M4) 2D. Il faut donc dans un premier temps disposer, pour un objet simple réalisé avec cet empilement, d'une bonne approximation des champs dans le domaine 3D. L'objet le plus simple est certainement une poutre. L'approximation par éléments finis 3D étant trop lourde pour l'usage que l'on veut en faire, nous nous sommes orientés pour l'approximation des champs 3D de la poutre multicouche, vers un modèle curviligne à microstructure très riche prenant en compte la déformation et la courbure de chaque section de chaque couche. C'est ainsi que nous avons été amenés à réaliser le modèle de poutre à 18n ddl par noeuds décrit ci-dessous.

POUTRE À N COUCHES

Considérons une poutre  $\Omega$  parallélépipédique réalisée à l'aide d'un empilement de  $n$  couches de matériaux anisotropes et choisissons un repère orthonormé  $(O, e_1, e_2, e_3)$  tel que chaque couche  $i$  soit représentée par le domaine

$$\Omega_i = [0, L] \times [-a_i, a_i] \times [h_i, h_{i+1}^+]; \quad i=1, n \text{ avec } h_{i+1}^+ = h_i^+$$

Nous utilisons dans la suite les notations de Voigt et nous travaillons avec l'hypothèse des petites perturbations. Nous notons  $\underline{U}$  le champ de déplacement dans  $\Omega$ ,  $\{\epsilon\}$  et  $\{\sigma\}$  respectivement les vecteurs à 6 composantes de déformation linéarisée et de contrainte dans le repère  $(O, e_1, e_2, e_3)$ . Ces vecteurs sont reliés par la loi de comportement suivante:

$$\{\sigma\} = [R] \{\epsilon\} \text{ dans } \Omega_i; \quad i=1, n$$

où  $[R]_i$  est la matrice  $6 \times 6$  de rigidité du matériau de la  $i$ ème couche dans le repère  $(O, e_1, e_2, e_3)$ .

La poutre  $\Omega$  est soumise à un chargement. Pour fixer les idées nous supposons qu'elle est encadrée en  $x_1=0$  et qu'elle est soumise à une densité surfacique de vecteur contrainte  $\underline{T}(x_1, x_2)$  sur la face supérieure  $x_3 = h_n^+$ . Il n'y a pas de force de volume. Nous notons  $\underline{U}$  l'ensemble des champs de déplacement  $\underline{U}^*$  continu,  $C^1$  par morceaux dans  $\Omega$ , vérifiant la condition d'encastrement  $\underline{U}^*=0$  si  $x_1=0$ . Le champ  $\underline{U}$  solution du problème élastique de la poutre  $\Omega$  soumise au chargement ci-dessus minimise l'énergie potentielle  $Ep(\underline{U}^*)$  sur l'ensemble fonctionnel  $\underline{U}$  où:

$$Ep(\underline{U}^*) = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{\Omega} \left[ \sum_{i=1}^n \int_{h_i}^{h_{i+1}^+} \{\epsilon(\underline{U}^*)\}_i [R]_i \{\epsilon(\underline{U}^*)\}_i dx_2 dx_3 \right] dx_1 - \int_0^L \int_{\Omega} \underline{T}(x_1, x_2) \cdot \underline{U}^*(x_1, x_2, h_n^+) dx_2 dx_3$$

Obtenir une solution analytique paraît peu probable, aussi allons nous chercher une solution approchée de ce problème. Il est possible d'utiliser une approximation par éléments finis tridimensionnels en maillant finement suivant l'épaisseur de la poutre, mais cette approche est très lourde et nous éloigne de notre objectif de réalisation d'un préprocesseur permettant la détermination simple de raiders d'interface d'un modèle  $M_4$ .

Les théories usuelles de calcul de poutre (Euler Bernoulli ou théorie naturelle des poutres) peuvent être considérées comme des approximations des champs de déplacement à l'aide de champs plans (indépendant de  $x_2$  et sans composante  $U_2$  affines en  $x_3$ ). Ces champs appartiennent bien à l'ensemble  $\underline{U}$ , mais

l'énergie potentielle associée à ces champs est un majorant grossier de l'énergie potentielle minimale associée à la solution du problème élastique. On peut dire en un certain sens que les théories classiques de poutre "modifient" le comportement tridimensionnel des matériaux constitutifs de la poutre pour mieux approcher l'énergie potentielle dans la structure (raideur en contrainte plane par exemple). Ces champs sont donc trop "simples" pour notre usage.

CHOIX D'UN CHAMP DE DÉPLACEMENT TRIDIMENSIONNEL APPROCHÉ

Nous avons été ainsi amené à choisir un champ de déplacement simple mais cinématiquement plus riche. Nous le définissons dans chaque couche à l'aide d'un polynôme de degré 2 en  $x_2$  et  $x_3$  dont les coefficients sont fonctions de  $x_1$ .

Notons  $\underline{U}^{18n}$  l'ensemble des champs de déplacement  $\underline{U}^* \in \underline{U}$  du type:

$$\underline{U}^*(\underline{x}) = \underline{u}_1^*(x_1) + x_2 \underline{u}_2^*(x_1) + x_3 \underline{u}_3^*(x_1) + (x_2 - h_i) (\underline{u}_4^*(x_1) + x_2 \underline{u}_5^*(x_1)) + (x_3^2 - h_i^2) \underline{u}_6^*(x_1) \\ \forall \underline{x} \in \Omega_i; \quad \forall i; \quad i=1, n \\ \text{où } h_i = \begin{pmatrix} h_i^+ + h_i^- \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } h_i = \begin{pmatrix} h_i^2 + h_i h_i^+ + h_i^{2+} \\ 3 \end{pmatrix}$$

La moyenne sur l'épaisseur de la couche  $i$  du champ de déplacement ne fait intervenir que  $\underline{u}_p^*(x_1)$   $p=1, 3$ . Pour que  $\underline{U}^{18n}$  soit inclus dans  $\underline{U}$ , il faut que  $\underline{U}^*$  vérifie les conditions aux limites en déplacement:

$$\underline{u}_p^*(0) = 0 \quad \forall i \quad (i=1, n); \quad \forall p \quad (p=1, 6)$$

et 9 conditions scalaires de continuité à chaque interface (polynôme vectoriel du 2ème degré en  $x_2$  continu en  $x_3 = h_i^+ = h_{i+1}^-$ ).

L'ensemble fonctionnel  $\underline{U}^{18n}$  est donc défini à l'aide de  $9(n+1)$  fonctions scalaires de  $x_1$  indépendantes. Nous avons l'espoir qu'en minimisant l'énergie potentielle dans  $\underline{U}^{18n}$  nous aurons une bonne approximation de celle associée à la solution exacte du problème élastique. Nous en jugerons à la fin.

TRANSFORMATION EN UN MILIEU CURVILIGNE À 18 n DDL

Nous posons  $\{\underline{u}_i^*(x_1)\}_i$  le champ à 36 composantes défini sur une couche  $i$  pour  $x_1 \in [0, L]$  par:

$$\left\{ \underline{u}_i^*(x_1) \right\}_i = \left\{ \begin{pmatrix} \underline{u}_p^*(x_1) \\ \frac{d \underline{u}_p^*(x_1)}{dx_1} \end{pmatrix}; \quad p=1, 6 \text{ et } j=1, 3 \right\} \\ \text{où } \underline{u}_p^* \text{ est la } j^{\text{ème}} \text{ composante de } \underline{u}_p^*$$

Le vecteur déformation associé à un champ  $\underline{U}^* \in \underline{U}^{18n}$  peut s'écrire sous la forme:

$$\{\epsilon(\underline{U}^*)\} = [L]_{(k_2, k_3)} \left\{ \underline{u}_i^*(x_1) \right\}_i \quad \forall \underline{x} \in \Omega; \quad \forall i \quad (i=1, n)$$

où  $\{L\}_{(6 \times 3)}$  est une matrice de dimension  $36 \times 6$  fonction uniquement de  $x_2$  et  $x_3$ .  
L'énergie potentielle s'écrit alors:

$$Ep(\underline{U}^*) = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^n (\dot{u}^*(x_i))^T [K]_i (\dot{u}^*(x_i)) dx_i - \int_0^L (T(x_i))^T \{u^*(x_i)\}_n dx_i$$

où  $[K]_i$  est la matrice de dimension  $36 \times 36$  donnée par:

$$[K]_i = \int_{h_i}^{h_{i+1}} [L]^T [R]_i [L] dx_2 dx_3$$

Elle est calculée analytiquement à l'aide du logiciel de calcul formel Maple.

$\{T(x_i)\}_n$  est le vecteur à 36 composantes représentant le terme de force intégré suivant la largeur de la poutre, associé au champ à 36 composantes  $\{u^*(x_i)\}_n$  (les 18 dernières composantes sont nulles).

L'énergie potentielle se réécrit en fonction d'une matrice  $[K]$  de dimension  $36n \times 36n$  obtenue par assemblage sur la diagonale des  $n$  blocs  $[K]_i$ , des champs  $\{u^*(x_i)\}_n$  de dimension  $36n$  définis après assemblage des  $n$  champs  $\{u^*(x_i)\}_n$ , et des vecteurs  $\{T(x_i)\}_n$  de dimension  $36n$  obtenus après prolongation du vecteur  $\{T(x_i)\}_n$  par des composantes nulles. Les relations liées à la continuité du champ  $\underline{U}^*$  aux interfaces sont des liaisons linéaires entre les composantes du vecteur à 36n composantes  $\{u^*(x_i)\}_n$ . Nous les utilisons pour condenser la matrice  $[K]$  en une matrice  $18(n+1) \times 18(n+1)$ .

La minimisation exacte de l'énergie potentielle dans  $\underline{U}^{18n}$  conduit à un système d'équations différentielles linéaires de degré 2. Nous préférons utiliser une résolution approchée par éléments finis curvilignes.

### RÉSOLUTION PAR LA MÉTHODE DES ÉLÉMENTS FINIS

Nous discrétisons le milieu curviligne  $[0, L]$  et nous exprimons les champs à l'aide de  $Q$  fonctions de forme notées  $N^q(x_i)$  ( $q=1, Q$ ) de la façon suivante:

$$u_p^*(x_i) = u_{p_j}^{*iq} \cdot N^q(x_i) \\ \frac{du_p^*(x_i)}{dx_i} = u_{p_j}^{*iq} \cdot \frac{dN^q(x_i)}{dx_i} \\ p=1,6; j=1,3; i=1,n; q=1,Q$$

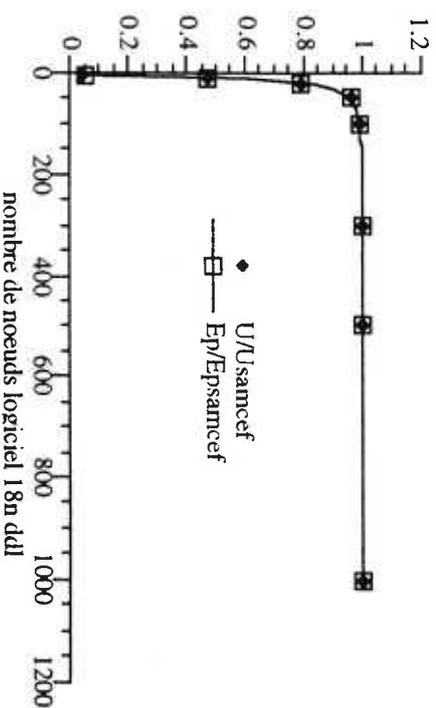
La minimisation de l'énergie potentielle sur ce sous ensemble revient alors à résoudre un système linéaire à  $(9n+9) \times Q$  degrés de liberté ( $(9n+9) \times (Q-1)$  si les fonctions de forme ne tiennent pas compte de l'encastrement en  $x_1$ ).

Dans la suite, nous choisissons dans un premier temps des fonctions d'interpolation linéaire et nous considérons que les éléments sont de même taille.

### RÉSULTATS LOGICIEL POUTRE 18N DDL

De façon à valider le modèle 18n ddl, nous comparons, dans un premier temps, la flèche et l'énergie potentielle obtenues par le *logiciel poutre 18n ddl*  $n=1$  sur une poutre isotrope type acier ( $E=2,1.10^5$  N/mm<sup>2</sup>;  $\nu=0,3$ ) avec celles obtenues par le code éléments finis SAMCEF (version 4.1-66). Ce deuxième calcul est effectué par une discrétisation volumique en 196 éléments. Chaque élément de type 11 (bibliothèque SAMCEF) (A. Godinas, P. Jetteur & G. Laschet 1981) possède 20 noeuds et est utilisé au degré deux. On obtient ainsi par éléments finis une très bonne approximation de l'énergie potentielle pour la solution exacte. La longueur, la hauteur et la largeur de la poutre sont respectivement de 3000 mm, 140 mm et 90 mm. La pression surfacique appliquée est de 0,3 N/mm<sup>2</sup>. Les résultats sont décrits par les courbes suivantes:

#### Rapport des solutions logiciel 18n ddl / code SAMCEF



A partir de 50 noeuds, la solution 18n ddl ( $n=1$ ) à une différence relative d'environ 3,6% en terme de flèche et d'énergie potentielle par rapport au calcul SAMCEF pris comme référence. Pour 100 noeuds, l'écart n'est plus que de 0,7%. Nous observons sur les courbes précédentes que les résultats convergent bien. Nous prendrons par la suite une discrétisation à 300 noeuds ( $Q=300$ ) de la poutre 18n ddl.

Dans un second temps, nous validons le logiciel 18n ddl sur différentes modélisations multicouches isotropes ( $n=1,4$ ) de la même poutre. Nous devons bien sûr avoir des résultats aussi proches que possibles. Les calculs sont effectués sur une Spark Station 2. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus pour 300 noeuds ( $Q=300$ ):

Nbre de couches	18U <sub>f</sub> en mm	18E <sub>p</sub> en N.mm	T CPU (s)
1	-63,2543	-1,0266 10 <sup>6</sup>	1,9
2	-63,2981	-1,0278 10 <sup>6</sup>	10,4
3	-63,3027	-1,0282 10 <sup>6</sup>	29,1
4	-63,3047	-1,0296 10 <sup>6</sup>	67,5

Nous observons une bonne concordance des résultats avec cependant une croissance du temps de calcul assez importante avec le nombre de couches.

Pour le problème de la poutre multicouche composite, nous choisissons de tester un matériau composite tissé en carbone-polyimide dont les caractéristiques nous ont été données par la SNECMA. Les conditions aux limites sont les mêmes que dans le cas isotrope avec une pression surfacique de 0,1N/mm<sup>2</sup>. Les dimensions de la poutre sont de 5mm pour la largeur et de 100mm pour la longueur. Parmi les premiers essais effectués sur SPARK Station 2, nous avons testé des quadricouches dont les résultats sont donnés dans le tableau suivant (les unités choisies sont les mêmes que précédemment):

Logiciel	empilement	Q	18U <sub>f</sub>	ΔU <sub>f</sub>	18E <sub>p</sub>	ΔE <sub>p</sub>	T CPU
SAMCEF							
n * 18 ddi	(0°,90°) <sub>s</sub>	50	-88,30	-885,96	178		
		200	-88,92	-901,25	11,0		
		300	-89,63	-908,51	44,5		
SAMCEF							
n * 18 ddi	(60°,60°) <sub>s</sub>	50	-223,64	-2226,60	183		
		200	-214,60	-2145,65	10,9		
		300	-219,63	-2198,16	44,3		
SAMCEF							
n * 18 ddi	(45°,45°) <sub>s</sub>	50	-325,73	-3233,98	181		
		200	-318,59	-3174,89	10,9		
		300	-330,06	-3294,76	44,4		
SAMCEF							
n * 18 ddi	(-60°,60°,60°)	50	-248,25	-2472,08	177		
		200	-240,69	-2406,10	11,0		
		300	-247,42	-2477,04	44,5		
SAMCEF							
n * 18 ddi	(-30°,30°,30°,30°)	50	-243,48	-2424,47	182		
		200	-235,96	-2358,86	10,9		
		300	-242,39	-2426,65	44,5		
			-242,66	-2429,58	0,02 %	67,6	

Nous constatons que les résultats obtenus sont très satisfaisants. D'autre part, nous avons testé le logiciel sur d'autres types de matériaux tels que le verre ou le carbone epoxy T300, de même la concordance entre les résultats du logiciel pour le 18n ddi et ceux du code SAMCEF est très correcte.

## CONCLUSION

Afin de déterminer par "changement d'échelle" les "raideurs d'interface" d'une *Modélisation Multiphasique des Matériaux Multicouches* (M4), nous proposons une modélisation curviligne à 18n champs scalaires pour une poutre constituée d'un empilement de n couches. Ce modèle est discrétisé par éléments finis et a donné lieu à la réalisation d'un logiciel. Appliqué à un problème de poutre console, les résultats obtenus en terme de flèche et d'énergie potentielle montrent une bonne concordance avec ceux d'un calcul par éléments finis 3D maillé finement par le code SAMCEF. Les fonctions de forme affines utilisées obligent à utiliser un grand nombre de noeuds (300) ce qui pénalise la vitesse du calcul (le calcul 18n ddi est seulement 3 fois plus rapide que le calcul SAMCEF pour 300 noeuds et 4 couches). Nous introduisons actuellement des fonctions de forme de degré 3. Nous espérons une division par un facteur 50 à 100 du temps de calcul.

## BIBLIOGRAPHIE

- O. Allix février 1989, "Modélisation du comportement des composites stratifiés". Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.
- J. F. Caron 1993, "Fissuration transverse en fatigue des composites stratifiés à fibres longues. Modélisation Multiphasique et Méthodologie d'essai". Thèse de l'école Nationale des Ponts et Chaussées. A paraître.
- P. Destuynder 1980, "Sur une justification des modèles de plaques et de coques par les méthodes asymptotiques". Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie.
- H. Dumontet juillet 1990, "Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites". Thèse d'état de l'Université Pierre et Marie Curie.
- A. Ehrlacher & T. Naciri 1993, "Modélisation des matériaux composites". Cours de D.E.A. Mécanique des Solides et Structures option 5. Université Paris 6 - Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Chapitre 7.
- K. W. Garrett & J.E. Bailey 1977, "Multiple transverse fracture in 90° cross-ply laminates of a glass fibre-reinforced polyester". J. Mat. Scien. 12, pp. 157-168.
- A. Godinas, P. Jetteur & G. Laschet juin 1981, "Développement d'un élément fini tridimensionnel, spécialisé pour l'étude des coques dans le domaine non linéaire". Rapport SF 101 - Laboratoire des Techniques Aéronautiques et Spatiales de l'Université de Liège.
- F. Lecuyer décembre 1991, "Etude des effets de bord dans les structures minces multicouches". Thèse de Doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie.
- N. J. Pagano 1978, "stress fields in composite laminates". Int. Journal of Solids Structures. Vol. 14, pp 385-400.
- N. J. Pagano & S. R. Soni 1983, "Global local laminate variational model". Int. Journal of Solids Structures. Vol. 19, n°3, pp. 297-228.
- H. Wittrock 1987, "Analytical three-dimensional elasticity solutions to some plate problems and some observations on Mindlin's plate theory". Int. J. Sol. Struct.