



**HAL**  
open science

## Recherche d'un modèle simplifié de poutre multicouche en grandes transformations

Laurent Lagarde, Armelle Chabot, Alain Ehrlacher, Françoise Léné

► **To cite this version:**

Laurent Lagarde, Armelle Chabot, Alain Ehrlacher, Françoise Léné. Recherche d'un modèle simplifié de poutre multicouche en grandes transformations. 14e Congrès Français de Mécanique (CD ROM ISBN 2-84088-040-7), Aug 1999, Toulouse, France. hal-01677052

**HAL Id: hal-01677052**

**<https://hal.science/hal-01677052>**

Submitted on 20 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## RECHERCHE D'UN MODELE SIMPLIFIE DE POUTRE MULTICOUCHE EN GRANDES TRANSFORMATIONS

Laurent LAGARDE\*, Armelle CHABOT\*, Alain EHRLACHER\*, Françoise LENE\*\*

\* CERMMO-AM/ ENPC,

6 & 8 Av. B. PASCAL – Cité DESCARTES -CHAMPS/MARNE -77455- MARNE-LA-VALLEE Cedex 2

\*\* LM2S – UPMC/ENSAM/ENS Cachan- UPRESA CNRS 8007,

8 rue du Capitaine Scott 75015 PARIS

### RESUME

L'évaluation des contraintes tridimensionnelles aux interfaces est une information nécessaire à la prévision des décohésions dans les matériaux composites. Il est présenté ici une méthode de construction d'un modèle simplifié de poutre multicouche en grandes transformations dans lesquelles les efforts généralisés possèdent un sens physique : en particulier, un cisaillement et un arrachement aux interfaces sont introduits. Les approximations portent à la fois sur la transformation et le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff.

### ABSTRACT

The estimation of stresses at interfaces is needed in order to forecast the phenomenon of delamination in composite materials. It is developed a systematical method to obtain simplified models of multi-layered beam in large transformations, where generalized stresses with physical meaning and in particular shearing and wrenching at interfaces are introduced. Both, the transformation and the second Piola-Kirchhoff stress tensor are approximated.

**MOTS-CLES** : modélisation - multicouches - poutres - grandes transformations - efforts d'interfaces

## I. INTRODUCTION

Afin de prédire le phénomène de décohésion aux interfaces des matériaux multicouches tels que les butées acier-élastomères utilisées en aéronautique, il est nécessaire de pouvoir évaluer les contraintes tridimensionnelles aux interfaces en grandes transformations. Nous proposons ici d'adapter au cadre des grandes transformations les Modèles Multiparticulaires de Matériaux Multicouches dit « M4 ». La construction de ces modèles en théorie linéaire consiste à développer sur chaque couche les composantes du tenseur des contraintes de Cauchy,  $\sigma$ , sur une base de polynômes de Legendre en Z (direction de l'empilement). cette approche en contraintes permet d'introduire, dans les coefficients de ces développements, les efforts généralisés retenus pour le modèle considéré : efforts généralisés classiques de plaques et/ou efforts de cisaillement et d'arrachement aux interfaces. Ces champs de contraintes tridimensionnels approchés sont ensuite injectés dans la fonctionnelle d'Hellinger-Reissner et les intégrations suivant les épaisseurs de chaque couche étant réalisées, on met en évidence grâce à la dualité entre  $\sigma$  et le tenseur des déformations linéarisées, une classe d'équivalence

de champs de déplacements définis par des déplacements généralisés et permettant de définir des déformations généralisées en tant que cofacteurs des efforts généralisés. L'écriture de la stationnarité de la fonctionnelle modifiée par rapport aux déplacements généralisés conduit aux équations d'équilibre et conditions aux limites formulées en efforts généralisés alors que sa stationnarité par rapport aux efforts généralisés donne la loi de comportement reliant les efforts généralisés aux déformations généralisées.

Notations : Le composite étudié est constitué de  $N$  couches empilées suivant la direction  $Z$ . Chaque couche est repérée par l'indice  $i \in [1, N]$  et possède une épaisseur  $e^i = H^{i-} - H^{i+}$ , où,  $H^{i+}$  (resp.  $H^{i-}$ ) désigne la côte de la face supérieure (resp. inférieure) de la couche  $i$  et  $\bar{H}_i = \frac{H^{i+} + H^{i-}}{2}$  est sa côte moyenne. On définit sur chaque couche  $i$ , une base de polynômes de Legendre en  $Z$  :  $B^i = \{Q_l^i(Z)\}$  où  $Q_l^i(Z)$  est un polynôme de degré  $l$  en  $Z$  et tel que  $\int_{h_i^-}^{h_i^+} Q_l^i(z) Q_j^i(z) dz = 0$  si  $l \neq j$ . On a :  $Q_0^i(Z) = 1$ ,  $Q_1^i(Z) = \frac{Z - \bar{H}^i}{e^i}$ ,  $Q_2^i(Z) = -6 \left( \frac{Z - \bar{H}^i}{e^i} \right)^2 + \frac{1}{2}$ .

## II ADAPTATION AUX GRANDES TRANSFORMATIONS DES MODELES « M4 »

On se restreint au cas plan pour la cinématique de la poutre étudiée. La description adoptée est totalement Lagrangienne. Les différentes variables introduites dépendent donc du système de coordonnées  $\mathbf{X} = (X, Z)$  associé au repère  $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_3)$  repérant la configuration initiale  $\Omega_0$ . La configuration courante,  $\Omega_t$ , est repérée par  $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$ .

### 1. Principe mixte Lagrangien

Notons  $\varphi = \varphi(\mathbf{X})$  la transformation reliée au déplacement par  $\mathbf{u}(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}) - \mathbf{X}$ , le gradient de la transformation est noté  $\mathbf{F} = \nabla \varphi$ . Notons  $\mathbf{S}$  est le second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff. Sa correspondance avec  $\boldsymbol{\sigma}$  et  $\mathbf{T}$ , le premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff, est donnée par  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \cdot (\mathbf{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-1}) = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{T}$  où  $J = \det \mathbf{F}$  est le jacobien de  $\varphi$ . Le problème mécanique  $(\mathbf{P})$ , formulé en  $(\varphi, \mathbf{S})$ , consiste à trouver le couple  $(\varphi_s, \mathbf{S}_s) \in V^{ad}$  qui rend stationnaire la fonctionnelle :

$$J(\varphi, \mathbf{S}) = \underbrace{\int_{\Omega_0} \left[ \omega^c(\mathbf{S}) + \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{S} \right] d\Omega_0}_{U(\mathbf{S})} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Omega_0} \mathbf{S} : ({}^t \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi) d\Omega_0 - \int_{\partial \Omega_0} \mathbf{t}^d \cdot \varphi dS}_{T(\varphi, \mathbf{S})} \quad (1)$$

dans laquelle  $\omega^c(\mathbf{S})$  est l'énergie complémentaire en contraintes,  $\mathbf{t}^d$  la densité surfacique d'efforts imposés sur  $\partial \Omega_0$  avec  $V^{ad}$  un espace fonctionnel.

Ici, la déformation de Green-Lagrange  $\mathbf{E} = \frac{1}{2} ({}^t \mathbf{F} \cdot \mathbf{F} - \mathbf{1})$  n'est pas une fonction linéaire de  $\varphi$ .

L'introduction d'une approximation de contrainte dans  $T(\varphi, \mathbf{S})$  ne permet plus d'exhiber directement, comme dans le cas linéaire, une cinématique généralisée. L'idée est alors d'approximer à la fois la transformation  $\varphi$  et les composantes de  $\mathbf{S}$  par un développement polynomial par couche sur  $B^i = \{Q_l^i(Z)\}$ . On peut ensuite transformer le problème  $(\mathbf{P})$  en y

introduisant ces approximations et diminuer sa dimension en effectuant les intégrations sur les épaisseurs des différentes couches. Les inconnues de ce problème approché dépendront donc des grandeurs introduites dans les coefficients des développements de  $\boldsymbol{\varphi}$  et  $\mathbf{S}$ .

## 2. Approximation de la cinématique

Le modèle présenté ci-dessous est obtenu en approximant sur chaque couche  $i$  tous les champs intervenant dans  $\int_{\Omega_0} ({}^t \nabla \boldsymbol{\varphi} \cdot \nabla \boldsymbol{\varphi}) d\Omega_0$  par leur développement en  $Q_0^i(Z)$  et  $Q_1^i(Z)$ .

L'approximation de  $\nabla \boldsymbol{\varphi}$  à l'ordre 1 en  $Z$  requiert un développement de  $\boldsymbol{\varphi}$  à l'ordre 2. On choisit de faire apparaître dans le développement de  $\boldsymbol{\varphi}$  sur la couche  $i$  sa valeur moyenne

$\bar{\boldsymbol{\varphi}}^i(X) = \frac{1}{e^i} \int_{H^{i-}}^{H^{i+}} \boldsymbol{\varphi} dZ$ , et ses valeurs sur les faces inférieures et supérieures  $\boldsymbol{\varphi}^{i-} = \boldsymbol{\varphi}(X, H^{i-})$  et  $\boldsymbol{\varphi}^{i+} = \boldsymbol{\varphi}(X, H^{i+})$ . D'où le développement suivant sur chaque couche  $i : Z \in [H^{i-}, H^{i+}]$

$$\boldsymbol{\varphi}^a(X, Z) = \bar{\boldsymbol{\varphi}}^i(X) Q_0^i(Z) + (\boldsymbol{\varphi}^{i+}(X) - \boldsymbol{\varphi}^{i-}(X)) Q_1^i(Z) + \left( \bar{\boldsymbol{\varphi}}^i(X) - \frac{\boldsymbol{\varphi}^{i+}(X) + \boldsymbol{\varphi}^{i-}(X)}{2} \right) Q_2^i(Z) \quad (2)$$

La cinématique généralisée est notée  $\boldsymbol{\Phi}^g = \left\{ \boldsymbol{\varphi}^i, \boldsymbol{\varphi}^{i-}, \boldsymbol{\varphi}^{i+} \right\}_{i=1}^N$  avec  $\boldsymbol{\Phi}^{g'} = \frac{d}{dX} \boldsymbol{\Phi}^g$ .

L'approximation (2), permet le calcul de  $\nabla \boldsymbol{\varphi}^a$  dont on ne retient que le développement en  $Q_0^i(Z)$  et  $Q_1^i(Z)$  sur  $i$ . On obtient l'approximation suivante du gradient de la transformation :

$$\mathbf{F}^a(X, Z) = (\nabla \boldsymbol{\varphi}^a)^a = \mathbf{F}_0^i(X) Q_0^i(Z) + \mathbf{F}_1^i(X) Q_1^i(Z) \quad Z \in [H^{i-}, H^{i+}] \quad (3)$$

$$\text{avec } \mathbf{F}_0^i(X) = \begin{bmatrix} \bar{\varphi}_1^{i-} & \frac{1}{e^i} (\varphi_1^{i+} - \varphi_1^{i-}) \\ \bar{\varphi}_3^{i-} & \frac{1}{e^i} (\varphi_3^{i+} - \varphi_3^{i-}) \end{bmatrix}; \mathbf{F}_1^i(X) = \begin{bmatrix} \varphi_1^{i+} - \varphi_1^{i-} & -\frac{12}{e^i} \left( \bar{\varphi}_1^{i-} - \frac{\varphi_1^{i+} + \varphi_1^{i-}}{2} \right) \\ \varphi_3^{i+} - \varphi_3^{i-} & -\frac{12}{e^i} \left( \bar{\varphi}_3^{i-} - \frac{\varphi_3^{i+} + \varphi_3^{i-}}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (4)$$

En utilisant la définition de la base de polynômes de Legendre,  $[Q_1^i(Z)]^2 = \frac{1}{12} Q_0^i - \frac{1}{6} Q_2^i(Z)$ ,

on peut alors calculer le produit approché  $\mathbf{C}^a = ({}^t \mathbf{F}^a \cdot \mathbf{F}^a)^a$  dont on ne retient à nouveau que le développement en  $Q_0^i(Z)$  et  $Q_1^i(Z)$  sur  $i$ . On en déduit alors pour  $Z \in [H^{i-}, H^{i+}]$ :

$$({}^t \mathbf{F}^a \cdot \mathbf{F}^a)^a = \mathbf{C}_0^i(X) Q_0^i(Z) + \mathbf{C}_1^i(X) Q_1^i(Z); \begin{cases} \mathbf{C}_0^i(X) = \mathbf{C}_0^i(\boldsymbol{\Phi}^g; \boldsymbol{\Phi}^{g'}) = {}^t \mathbf{F}_0^i \cdot \mathbf{F}_0^i + \frac{1}{12} {}^t \mathbf{F}_1^i \cdot \mathbf{F}_1^i \\ \mathbf{C}_1^i(X) = \mathbf{C}_1^i(\boldsymbol{\Phi}^g; \boldsymbol{\Phi}^{g'}) = {}^t \mathbf{F}_1^i \cdot \mathbf{F}_0^i + {}^t \mathbf{F}_0^i \cdot \mathbf{F}_1^i \end{cases} \quad (5)$$

## 3. Approximation du second tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff $\mathbf{S}$

On fait pour  $\mathbf{S}$  une approximation au premier ordre par couche du type:

$$\mathbf{S}^a(X, Z) = \mathbf{S}_0^i(X) Q_0^i(Z) + \mathbf{S}_1^i(X) Q_1^i(Z) \text{ pour } Z \in [H^{i-}, H^{i+}] \quad (6)$$

En raison de la symétrie de  $\mathbf{S}$ , il existe donc 6 champs de contraintes inconnus par couche

regroupés dans le vecteur :  $\boldsymbol{\Xi} = \left\{ (\mathbf{S}_0^i)^{11}, (\mathbf{S}_0^i)^{33}, (\mathbf{S}_0^i)^{13}, (\mathbf{S}_1^i)^{11}, (\mathbf{S}_1^i)^{33}, (\mathbf{S}_1^i)^{13} \right\}_{i=1}^N$ .

#### 4. Approximation du terme $\int_{\Omega_0} \mathbf{S} : ({}^t \nabla \boldsymbol{\Phi} \cdot \nabla \boldsymbol{\Phi}) d\Omega_0$ de la fonctionnelle $J$

Les approximations précédentes et les intégrations suivant l'épaisseur des couches donnent :

$$\int_{\Omega_0} [\mathbf{S}^a : ({}^t \mathbf{F}^a \cdot \mathbf{F}^a)]^a d\Omega_0 = \int \sum_{[0,L]}^N \sum_{i=1}^{H^{i+}} \int_{H^{i-}} \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}^g, \boldsymbol{\Phi}^{g'}, \boldsymbol{\Xi}) dX dZ \text{ où :}$$

$$\int_{H^{i-}}^{H^{i+}} \mathbf{F}(\boldsymbol{\Phi}^g, \boldsymbol{\Phi}^{g'}, \boldsymbol{\Xi}) dZ = (\mathbf{S}_0^i)^{11} \left[ \|\bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-}\|^2 + \frac{1}{12} \|\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}\|^2 \right] + (\mathbf{S}_0^i)^{33} \frac{1}{e^i} \left[ \|\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}\|^2 + 12 \left\| \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} - \frac{\boldsymbol{\Phi}^{i+} + \boldsymbol{\Phi}^{i-}}{2} \right\|^2 \right]$$

$$+ (\mathbf{S}_0^i)^{13} \frac{2}{e^i} \left[ \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} \cdot (\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}) - (\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}) \cdot \left( \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} - \frac{\boldsymbol{\Phi}^{i+} + \boldsymbol{\Phi}^{i-}}{2} \right) \right] + 2(\mathbf{S}_1^i)^{11} \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} \cdot (\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}) \quad (7)$$

$$- (\mathbf{S}_1^i)^{33} \frac{12}{e^{i'}} (\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}) \cdot \left( \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} - \frac{\boldsymbol{\Phi}^{i+} + \boldsymbol{\Phi}^{i-}}{2} \right) + (\mathbf{S}_1^i)^{13} \frac{2}{e^i} \left[ (\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}) \cdot (\boldsymbol{\Phi}^{i+} - \boldsymbol{\Phi}^{i-}) - 12 \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} \cdot \left( \bar{\boldsymbol{\Phi}}^{\prime-} - \frac{\boldsymbol{\Phi}^{i+} + \boldsymbol{\Phi}^{i-}}{2} \right) \right]$$

#### 5. Loi de comportement généralisée

On suppose que les matériaux constitutifs des différentes couches de l'empilement sont hyperélastiques isotropes et possèdent une densité d'énergie de déformation de type Saint-Venant Kirchhoff. La transformation de Legendre-Fenchel conduit à l'expression de la densité d'énergie complémentaire correspondante :  $\phi^c(\mathbf{S}) = \frac{1+\nu}{E} \text{tr}(\mathbf{S}^2) - \frac{\nu}{E} (\text{tr} \mathbf{S})^2$ .

L'approximation de  $\mathbf{S}$  est introduite dans (1) telle que :

$$U^a(\mathbf{S}^a) = \hat{U}(\boldsymbol{\Xi}) \text{ avec}$$

$$\hat{U}(\boldsymbol{\Xi}) = \int \sum_{[0,L]}^N e^i \left\{ \left[ \frac{1+\nu}{E} [\text{tr}(\mathbf{S}_0^i)^2] - \frac{\nu}{E} [\text{tr} \mathbf{S}_0^i]^2 \right] + \frac{1}{12} \left[ \frac{1+\nu}{E} [\text{tr}(\mathbf{S}_1^i)^2] - \frac{\nu}{E} [\text{tr} \mathbf{S}_1^i]^2 \right] + \frac{1}{2} \text{tr} \mathbf{S}_0^i \right\} dX \quad (8)$$

L'introduction dans la fonctionnelle  $J(\boldsymbol{\Phi}, \mathbf{S})$  des différentes approximations conduit à une fonctionnelle approchée  $\hat{J}(\boldsymbol{\Phi}^g, \boldsymbol{\Xi}) = \hat{U}(\boldsymbol{\Xi}) + \hat{T}(\boldsymbol{\Phi}^g, \boldsymbol{\Xi})$ . La solution du problème approché  $(\boldsymbol{\Phi}_s^g, \boldsymbol{\Xi}_s)$  est le point stationnaire de  $\hat{J}$ . La stationnarité de  $\hat{J}$  par rapport à  $\boldsymbol{\Phi}^g$  en  $(\boldsymbol{\Phi}_s^g, \boldsymbol{\Xi}_s)$  conduit aux équations d'équilibre et aux conditions aux limites du problème simplifié. La stationnarité de  $\hat{J}$  par rapport à  $\boldsymbol{\Xi}$  en  $(\boldsymbol{\Phi}_s^g, \boldsymbol{\Xi}_s)$  donne la loi de comportement généralisée liant  $\boldsymbol{\Phi}_s^g$  à  $\boldsymbol{\Xi}_s$ . On obtient un système de  $3N+6N$  équations différentielles en  $X$ , non linéaires.

### III. INTRODUCTION D'EFFORTS GENERALISES PHYSIQUES

Le sens physique des  $6N$  champs de contraintes inconnus définis par  $\mathbf{S}^a$  et regroupés dans  $\boldsymbol{\Xi}$  n'est pas immédiat. L'idée est alors d'exprimer  $\boldsymbol{\Xi}$  à partir de  $6N$  efforts généralisés regroupés dans le vecteur  $\boldsymbol{\Sigma}^g$ , possédant un sens physique plus direct sur la configuration déformée. Rappelons que si  $d\mathbf{f}$  est le vecteur force élémentaire s'appliquant sur une facette élémentaire de  $\Omega_i$  notée  $(\mathbf{n}, da)$  (aire  $da$  et orientée par  $\mathbf{n}$ ), initialement  $(\mathbf{N}, dA)$  sur  $\Omega_0$ , on a par définition de  $\boldsymbol{\sigma}$  et de  $\mathbf{T}$  :

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, da = d\mathbf{f} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{N} \, dA \quad (9)$$

Les efforts physiques de  $\boldsymbol{\Sigma}^g$  vont être définis par des projections de  $d\mathbf{f}$  (ou de sa résultante sur une section) selon des directions privilégiées de  $\Omega$ , elles mêmes définies à l'aide de la cinématique généralisée  $\boldsymbol{\Phi}^g$ . On définit donc des efforts physiques approchés (au sens de la cinématique utilisée) que l'on exprime selon (8) en fonction des composantes dans les bases  $(\mathbf{e}_\alpha)$  et  $(\mathbf{E}_\alpha)$  (pour  $\alpha=1$  ou  $3$ ) d'un premier tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff approché  $\mathbf{T}^a$ . Il reste ensuite à utiliser la correspondance entre  $\mathbf{T}^a$  et  $\mathbf{S}^a$  afin d'établir une relation linéaire entre  $\boldsymbol{\Xi}$  et  $\boldsymbol{\Sigma}^g$  du type :  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\Phi}^g, \boldsymbol{\Phi}^{g'}) \cdot \boldsymbol{\Xi} = \mathbf{B}(\boldsymbol{\Phi}^g, \boldsymbol{\Phi}^{g'}) \cdot \boldsymbol{\Sigma}^g$ .

### 1. définition des différents efforts physiques du modèle

Pour chaque couche  $i$ , nous allons définir successivement les différents efforts physiques définissant  $\boldsymbol{\Sigma}^g = \left\{ N^i, Q^i, \tau^{i-}, \tau^{i+}, \nu^{i-}, \nu^{i+} \right\}_{i=1}^N$ .

Pour une section  $Z \in [H^{i-}, H^{i+}]$  de la poutre (fig. 1), initialement orientée par  $\mathbf{E}_1$ , on définit les efforts généralisés  $N^i$  et  $Q^i$  par:

$$\int_{\varphi(X, [H^{i-}, H^{i+}])} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{t}^i \, dz = \int_{H^{i-}}^{H^{i+}} \mathbf{T} \cdot \mathbf{E}_1 \, dZ = \mathbf{R} = N^i \mathbf{t}^i + Q^i \mathbf{n}^i \quad (10)$$

où  $\mathbf{t}^i$  est le vecteur unitaire parallèle à  $\bar{\boldsymbol{\varphi}}^{i'}$  : il définit une normale moyenne à la section déformée,  $\mathbf{n}^i$  est le vecteur unitaire directement orthogonal à  $\mathbf{t}^i$ .

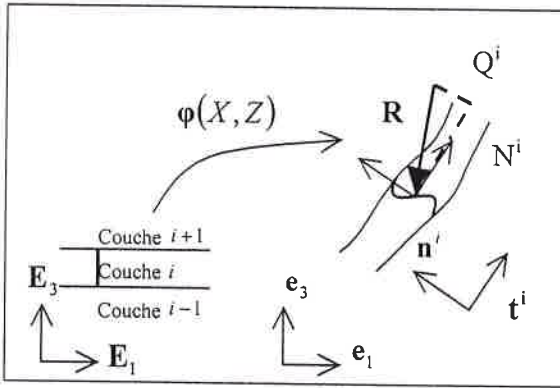


Figure 1 :

définition de l'effort normal et de l'effort tranchant sur une section de  $\Omega_i$

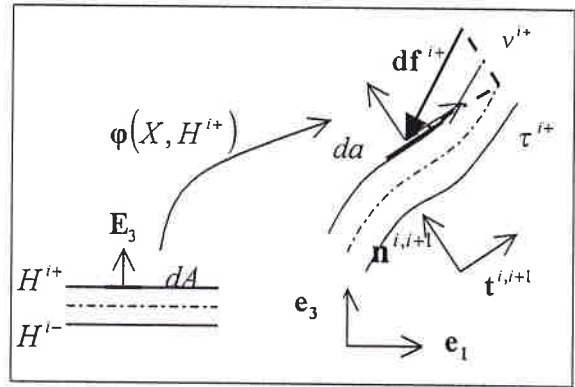


Figure 2 :

définition du cisaillement et de l'arrachement sur la face supérieure de la couche  $i$

Les efforts de type  $N$  et  $Q$  ont été introduits par (Reissner, 72), (Simo, 82) (ainsi que (Noor, 84) pour des applications numériques) dans une description lagrangienne de poutre monocouche en grandes transformations. Nous introduisons ici, en complément, des efforts d'interfaces. Considérons alors une section élémentaire initialement orientée par  $\mathbf{E}_3$  située à l'interface  $(i, i+1)$  (fig. 2), on définit  $\tau^{i+}$  et  $\nu^{i+}$  comme suit :

$$\boldsymbol{\sigma} \Big|_{\varphi(X, H^{i+})} \cdot \mathbf{n}^{i,i+1} = d\mathbf{f}^{i+} = \tau^{i+} \mathbf{t}^{i,i+1} + \nu^{i+} \mathbf{n}^{i,i+1} = \mathbf{T}_{|H^{i+}}^a \cdot \mathbf{E}_3 \frac{1}{\|\boldsymbol{\varphi}^{i+}\|} \quad (11)$$

où  $\mathbf{t}^{i,i+1}$  (resp.  $\mathbf{t}^{i-1,i}$ ) est le vecteur unitaire parallèle à  $\boldsymbol{\varphi}^{i+}$  (resp.  $\boldsymbol{\varphi}^{i-}$ ), et  $\mathbf{n}^{i,i+1}$  (resp.  $\mathbf{n}^{i-1,i}$ ) est le vecteur unitaire orthogonal à  $\mathbf{t}^{i,i+1}$  (resp.  $\mathbf{t}^{i-1,i}$ ).

On établit une équation similaire sur l'interface  $(i-1, i)$  définissant  $\tau^{i-}$  et  $\nu^{i-}$ .

## 2. Relation entre $\Xi$ et $\Sigma^g$

En utilisant la correspondance  $\mathbf{T}^a = \mathbf{F}^a \cdot \mathbf{S}^a$  dans les relations (10), (11) et en les projetant suivant les deux directions  $\mathbf{e}_1$  et  $\mathbf{e}_3$ , on obtient pour chaque couche  $i$  un système de 6 équations en  $\Xi$  qui s'écrit sous forme matricielle : pour  $i$  fixé,

$\mathbf{A}(\Phi^g, \Phi^{g'}) \cdot \Xi = \mathbf{B}(\Phi^g, \Phi^{g'}) \cdot \Sigma^g$  avec  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{B}$  de la forme :

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & a_{14} & 0 & a_{16} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & a_{24} & 0 & a_{26} \\ 0 & a_{13} - 6a_{16} & a_{11} - 6a_{14} & 0 & a_{16} - \frac{1}{2}a_{13} & a_{14} - \frac{1}{2}a_{11} \\ 0 & a_{23} - 6a_{26} & a_{22} - 6a_{24} & 0 & a_{26} - \frac{1}{2}a_{23} & a_{24} - \frac{1}{2}a_{21} \\ 0 & a_{13} + 6a_{16} & a_{11} + 6a_{14} & 0 & a_{16} + \frac{1}{2}a_{13} & a_{14} + \frac{1}{2}a_{11} \\ 0 & a_{23} + 6a_{26} & a_{21} + 6a_{24} & 0 & a_{26} + \frac{1}{2}a_{23} & a_{24} + \frac{1}{2}a_{21} \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b_{12} & b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b_{34} & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b_{56} & b_{55} \end{pmatrix}$$

Le but étant d'exprimer  $\Xi$  à partir de  $\Sigma^g$  et  $\Phi^g$ , l'inversion de cette matrice doit être opérée formellement (elle a été réalisée par le logiciel « Mathematica »). Le changement de variable peut alors être réalisé dans la fonctionnelle modifiée et celle-ci peut être reformulée en  $\Phi^g$  et  $\Sigma^g$ .

Nous avons ainsi proposé une méthode de construction de modèle de poutres en grandes transformations à partir d'une approximation polynomiale suivant la direction d'empilement de la cinématique et des contraintes. Des champs de contraintes généralisées possédant un sens physique direct ont été introduits après changement de variables comme nouvelles inconnues en contraintes. Le problème non linéaire obtenu est uniaxial. Le traitement numérique nécessaire à l'évaluation des champs généralisés inconnus dont les efforts de cisaillement et d'arrachement aux interfaces est ainsi facilité. Il est proposé d'appliquer ce modèle à une poutre multicouche isotrope en grandes rotations.

## REFERENCES

- CHABOT A. ; 1997, Analyse des efforts à l'interface entre les couches des matériaux composites à l'aide des modèles M4, *thèse de l'E.N.P.C.*
- NOOR A., PETERS J., ANDERSEN C. ; 1984, Mixed models and reduction techniques for large-rotation non linear problems, *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*, Vol. 44, pp 67-69.
- REISSNER E. ; 1972, On one dimensional finite-strain beam theory: the plane problem, *ZAMP*, Vol 23, pp 795-804.
- SIMO J. ; 1982, A consistent formulation of non linear theories of elastic beams and plates, *report UCB/SESM-82/06*