Algèbre commutative. Méthodes constructives

Claude Quitté, Henri Lombardi

MATHÉMATIQUES EN DEVENIR

Texte pour la 2e édition française du livre

Algèbre commutative Méthodes constructives

Modules projectifs de type fini

version actualisée le 1er janvier 2018.

Nous avons corrigé des erreurs, ajouté des solutions d'exercices ainsi que quelques compléments, et le nombre de pages a augmenté d'une centaine.

Aucune numérotation n'a changé, sauf le principe local-global XII-7.13 devenu XII-7.14.

Toutes précisions utiles sur le site :

`http://hlombardi.free.fr/publis/LivresBrochures.html`

Mathématiques en devenir

101. — Jacques Faraut. *Analyse sur les groupes de Lie. Une introduction*
102. — Patrice Tauvel. *Corps commutatifs et théorie de Galois*
103. — Jean Saint Raymond. *Topologie, calcul différentiel et variable complexe*
104. — Clément de Seguins Pazzis. *Invitation aux formes quadratiques*
105. — Bruno Ingrao. *Coniques projectives, affines et métriques*
106. — Wolfgang Bertram. *Calcul différentiel topologique élémentaire*
107. — Henri Lombardi & Claude Quitté. *Algèbre commutative. Méthodes constructives. Modules projectifs de type fini*
108. — Frédéric Testard. *Analyse mathématique. La maîtrise de l'implicite*
109. — Grégory Berhuy. *Modules : théorie, pratique... et un peu d'arithmétique*
110. — Bernard Candelpergher. *Théorie des probabilités. Une introduction élémentaire*
111. — Philippe Caldero et Jérôme Germoni. *Histoires hédonistes de groupes et de géométries. Deux tomes.*
112. — Gema-Maria Díaz-Toca, Henri Lombardi & Claude Quitté. *Modules sur les anneaux commutatifs.*

Henri Lombardi & Claude Quitté

Algèbre commutative méthodes constructives

Modules projectifs de type fini

Cours et exercices

2e édition

Dernière mise à jour, 1er janvier 2018

Calvage & Mounet

Henri Lombardi. Maître de Conférences à l'Université de Franche-Comté et membre de l'Équipe de Mathématique de Besançon (UMR 6623). Ses recherches concernent les mathématiques constructives, l'algèbre réelle et la complexité algorithmique.
Il est l'un des initiateurs du groupe international M.A.P. (Mathematics, Algorithms, Proofs), créé en 2003 : voir le site
`http://map.disi.unige.it/`
Il a publié les ouvrages suivants.

- *Modules sur les anneaux commutatifs*, Calvage&Mounet, 2014, en collaboration avec Gema Díaz-Toca et Claude Quitté.
- *Épistémologie mathématique*, Ellipse, 2011.
- *Méthodes matricielles. Introduction à la complexité algébrique*, Springer, 2003, en collaboration avec Jounaïdi Abdeljaoued.
- *Géométries élémentaires (tome 1)*, Presses Universitaires de Franche-Comté. 1999.

`henri.lombardi@univ-fcomte.fr` `http://hlombardi.free.fr`

Claude Quitté. Maître de conférences à l'Université de Poitiers et membre du Laboratoire de Mathématiques et Applications de l'Université de Poitiers (UMR 6086). Ses recherches concernent l'algèbre commutative effective et le calcul formel. Il a enseigné à tous les niveaux (en particulier dans la préparation à l'agrégation), et il est intervenu dans des enseignements combinant mathématiques et informatique. Il a programmé en `Magma` de très nombreux algorithmes en relation directe avec le présent ouvrage (cours et/ou exercices).
En collaboration avec Patrice Naudin, il a publié l'ouvrage *Algorithmique algébrique*, Masson, 1991.
Avec Henri Lombardi, il a participé à la rédaction de l'ouvrage collectif *Mathématiques L3 Algèbre.* Pearson Education, 2009.
Il a publié *Modules sur les anneaux commutatifs*, Calvage&Mounet, 2014, en collaboration avec Gema Díaz-Toca et Henri Lombardi.

`claude.quitte@math.univ-poitiers.fr`

Mathematics Subject Classification (2010)
– Primary : 13 Commutative Algebra.
– Secondary :
03F Proof theory and constructive mathematics.
06D Distributive lattices.
14Q Computational aspects of algebraic geometry.

à James Brewer

Préface de la première édition

Ce livre est un cours d'introduction à l'algèbre commutative de base, avec un accent particulier mis sur les modules projectifs de type fini, qui constituent la version algébrique des fibrés vectoriels en géométrie différentielle.
Nous adoptons le point de vue constructif, avec lequel tous les théorèmes d'existence ont un contenu algorithmique explicite. En particulier, lorsqu'un théorème affirme l'existence d'un objet, solution d'un problème, un algorithme de construction de l'objet peut toujours être extrait de la démonstration qui est donnée.
Nous revisitons avec un regard nouveau et souvent simplificateur plusieurs théories classiques abstraites. En particulier, nous revenons sur des théories qui n'avaient pas de contenu algorithmique dans leur cadre naturel général, comme la théorie de Galois, celle des anneaux de Dedekind, celle des modules projectifs de type fini ou celle de la dimension de Krull.
L'algèbre constructive est en fait une vieille discipline, développée entre autres par Gauss et Kronecker. Nous nous situons dans la lignée de la «bible» moderne sur le sujet, qu'est le livre *A Course in Constructive Algebra* de Ray Mines, Fred Richman et Wim Ruitenburg, paru en 1988. Nous le citerons sous forme abrégée [MRR].
L'ouvrage correspond à un niveau de Master 2, du moins jusqu'au chapitre XIV, mais ne réclame comme prérequis que les notions de base concernant la théorie des groupes, l'algèbre linéaire sur les corps, les déterminants, les modules sur les anneaux commutatifs, ainsi que la définition des anneaux quotients et localisés. Une familiarité avec les anneaux de polynômes, les propriétés arithmétiques de $\mathbb{Z}$ et des anneaux euclidiens est également souhaitable.
Signalons enfin que nous considérons les exercices et problèmes (un peu plus de 320 en tout) comme une partie essentielle de l'ouvrage.
Nous essaierons de publier le maximum de corrigés manquants, ainsi que des exercices supplémentaires, sur la page web de l'un des auteurs :
`http://hlombardi.free.fr/publis/LivresBrochures.html`.

Remerciements.
Nous remercions tou(te)s les collègues qui nous ont encouragés dans notre projet, nous ont apporté quelques sérieux coups de main ou fourni de précieuses informations. Et tout particulièrement MariEmi Alonso, Thierry Coquand, Gema Díaz-Toca, Lionel Ducos, M'hammed El Kahoui, Marco Fontana, Sarah Glaz, Laureano González-Vega, Emmanuel Hallouin, Hervé Perdry, Jean-Claude Raoult, Fred Richman, Marie-Françoise Roy, Peter Schuster et Ihsen Yengui. Last but not least, une mention toute spéciale pour notre expert Latex, François Pétiard.
Enfin, nous ne saurions oublier le Centre International de Recherches Mathématiques à Luminy et le Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, qui nous ont accueillis pour des séjours de recherche pendant la préparation de ce livre, nous offrant des conditions de travail inappréciables.

Henri Lombardi, Claude Quitté
Août 2011

Préface de la deuxième édition

Dans cette deuxième édition, nous avons corrigé les erreurs que nous avons débusquées ou qui nous ont été signalées.
Nous avons ajouté des solutions d'exercices ainsi que quelques compléments. La plupart des compléments sont des corrections d'exercices ou de nouveaux exercices ou problèmes.
Les ajouts dans le cours sont les suivants. Un paragraphe sur les tenseurs nuls ajouté à la fin de la section IV-4. Le paragraphe sur les quotients de modules plats à la fin de la section VIII-1 a été étoffé. La section XII-8 a été rajoutée pour discuter un problème intéressant de décryptage des démonstrations classiques, insensibles à la distinction entre anneaux sans diviseur de zéro et anneaux intègres, pertinente du point de vue constructif. Enfin, on a rajouté deux sections 8 et 9 dans le chapitre XV consacré aux principes local-globals.
Notons aussi que nous avons en général remplacé l'expression «relation de dépendance linéaire» par le terme plus court et plus usuel aujourd'hui «syzygie».
Aucune numérotation n'a changé, sauf le principe local-global XII-7.13 devenu XII-7.14. Le nombre de pages a augmenté d'une centaine.
Il y a maintenant 321 exercices et 45 problèmes.
L'édition anglaise chez Springer en 2015 correspond à très peu près à cette version corrigée et augmentée française. Il manque cependant dans l'édition anglaise la section XII-8 ainsi que quelques nouveaux exercices.
Toutes précisions utiles sur le site :
`http://hlombardi.free.fr/publis/LivresBrochures.html`

Henri Lombardi, Claude Quitté
1er janvier 2018

Table des matières

Avant-propos

Quant à moi, je proposerais de s'en tenir aux règles suivantes :

1. Ne jamais envisager que des objets susceptibles d'être définis en un nombre fini de mots ;
2. Ne jamais perdre de vue que toute proposition sur l'infini doit être la traduction, l'énoncé abrégé de propositions sur le fini ;
3. Éviter les classifications et les définitions non-prédicatives.

Henri Poincaré,
dans *La logique de l'infini* (Revue de Métaphysique et de Morale, 1909).
Réédité dans *Dernières pensées*, Flammarion.

Ce livre est un cours d'introduction à l'algèbre commutative de base, avec un accent particulier mis sur les modules projectifs de type fini, qui constituent la version algébrique des fibrés vectoriels en géométrie différentielle.
Comme indiqué dans la préface, nous adoptons la méthode constructive, avec laquelle tous les théorèmes d'existence ont un contenu algorithmique explicite. Les mathématiques constructives peuvent être regardées comme la partie la plus théorique du calcul formel (computer algebra en anglais), qui s'occupe des mathématiques qui « tournent sur ordinateur ». Notre cours se distingue cependant des cours de calcul formel usuels sous deux aspects essentiels.
Tout d'abord, nos algorithmes sont le plus souvent seulement implicites, sous-jacents à la démonstration, et ne sont en aucune manière optimisés pour s'exécuter le plus rapidement possible, comme il est naturel lorsque l'on vise une implémentation efficace.
Ensuite, notre approche théorique est entièrement constructive, alors que les cours de calcul formel usuels se préoccupent peu de cette question. La philosophie n'est donc pas ici, comme il est d'usage « blanc ou noir, le bon chat est celui qui attrape la souris [1] », mais plutôt la suivante « le moyen fait partie de la recherche de la vérité, aussi bien que le résultat. Il faut que la recherche de la vérité soit elle-même vraie ; la recherche vraie, c'est la vérité déployée, dont les membres épars se réunissent dans le résultat [2] ».

1. Proverbe chinois.

2. Karl Marx, Remarques à propos de la récente instruction prussienne sur la censure, 1843 (cité par Georges Perec dans *Les Choses*).

Nous sommes amenés à parler souvent des deux points de vue, classique et constructif, sur un même sujet. En particulier, nous avons mis une étoile pour signaler les énoncés (théorèmes, lemmes ...) qui sont vrais en mathématiques classiques, mais dont nous ne donnons pas de démonstration constructive, et qui souvent ne peuvent pas en avoir. Ces énoncés « étoilés » ne seront donc probablement jamais implémentés sur machine, mais ils sont bien souvent utiles comme guides pour l'intuition, et au moins pour faire le lien avec les exposés usuels écrits dans le style des mathématiques classiques.
Pour ce qui concerne les définitions, nous donnons généralement en premier une variante constructive, la lectrice [3] voudra bien nous le pardonner, quitte à montrer en mathématiques classiques l'équivalence avec la définition usuelle. Le lecteur constatera que dans les démonstrations « étoilées » nous utilisons librement le lemme de Zorn et le principe du tiers exclu, tandis que les autres démonstrations ont toujours une traduction directe sous forme d'algorithme.
L'algèbre constructive est en fait une vieille discipline, développée en particulier par Gauss et Kronecker. Comme précisé également dans la préface, nous nous situons dans la lignée de la « bible » moderne sur le sujet, qu'est le livre *A Course in Constructive Algebra* de Ray Mines, Fred Richman et Wim Ruitenburg, paru en 1988. Nous le citerons sous forme abrégée [MRR]. Notre ouvrage est cependant autocontenu et nous ne réclamons pas [MRR] comme prérequis. Les livres de Harold M. Edwards de mathématiques constructives [Edwards89, Edwards05] et celui de Ihsen Yengui [Yengui] sont aussi à recommander.

Le contenu de l'ouvrage

Nous commençons par un bref commentaire sur les choix qui ont été faits concernant les thèmes traités.
La théorie des modules projectifs de type fini est un des thèmes unificateurs de l'ouvrage. Nous voyons cette théorie sous forme abstraite comme une théorie algébrique des fibrés vectoriels, et sous forme concrète comme celle des matrices idempotentes. La comparaison des deux points de vue est esquissée dans le chapitre introductif.
La théorie des modules projectifs de type fini proprement dite est traitée dans les chapitres V (premières propriétés), VI (algèbres qui sont des modules projectifs de type fini), X (théorie du rang et exemples), XIV (splitting off de Serre) et XVI (modules projectifs de type fini étendus).

3. La personne qui lit ce livre subit la règle inexorable de l'alternance des sexes. Espérons que les lecteurs n'en seront pas plus affectés que les lectrices. En tout cas, cela nous économisera bien des « ou » et bien des « (e) ».

Un autre thème unificateur est fourni par les principes local-globals, comme dans [Kunz] par exemple. Il s'agit d'un cadre conceptuel très efficace, même s'il est un peu vague. D'un point de vue constructif, on remplace la localisation en un idéal premier arbitraire par un nombre fini de localisations en des monoïdes comaximaux. Les notions qui respectent le principe local-global sont «de bonnes notions», en ce sens qu'elles sont mûres pour le passage des anneaux commutatifs aux schémas de Grothendieck, que nous ne pourrons malheureusement pas aborder dans l'espace restreint de cet ouvrage.

Enfin, un dernier thème récurrent est donné par la méthode, tout à fait familière en calcul formel, dite de *l'évaluation paresseuse*, ou dans sa forme la plus aboutie, la méthode de *l'évaluation dynamique*. Cette méthode est indispensable lorsque l'on veut mettre en place un traitement algorithmique des questions qui requièrent a priori la solution d'un problème de factorisation. Cette méthode a également permis la mise au point des machineries constructives locales-globales que l'on trouve dans les chapitres IV et XV, ainsi que celle de la théorie constructive de la dimension de Krull (chapitre XIII), avec d'importantes applications dans les derniers chapitres.

Nous passons maintenant à une description plus détaillée du contenu de l'ouvrage.

Dans le chapitre I, nous expliquons les liens étroits que l'on peut établir entre les notions de fibrés vectoriels en géométrie différentielle et de module projectif de type fini en algèbre commutative. Ceci fait partie du processus général d'algébrisation en mathématiques, processus qui permet souvent de simplifier, d'abstraire et de généraliser de manière surprenante des concepts provenant de théories particulières.

Le chapitre II est consacré aux systèmes linéaires sur un anneau commutatif, traités sous forme élémentaire. Il ne requiert presqu'aucun appareillage théorique, mis à part la question de la localisation en un monoïde, dont nous donnons un rappel dans la section II-1. Nous entrons ensuite dans notre sujet en mettant en place le principe local-global concret pour la résolution des systèmes linéaires (section II-2), un outil simple et efficace qui sera repris et diversifié sans cesse. D'un point de vue constructif, la résolution des systèmes linéaires fait immédiatement apparaître comme central le concept d'anneau cohérent que nous traitons dans la section II-3. Les anneaux cohérents sont ceux pour lesquels on a une prise minimale sur la solution des systèmes linéaires homogènes. De manière très étonnante, ce concept n'apparaît pas dans les traités classiques d'algèbre commutative. C'est qu'en général celle notion est complètement occultée par celle d'anneau noethérien. Cette occultation n'a pas lieu en mathématiques constructives où la noethérianité n'implique pas nécessairement la cohérence. Nous développons dans la section II-4 la question des produits finis d'anneaux, avec la notion de

système fondamental d'idempotents orthogonaux et le théorème des restes chinois. La longue section II-5 est consacrée à de nombreuses variations sur le thème des déterminants. Enfin, la section II-6 revient sur le principe local-global de base, dans une version un peu plus générale consacrée aux suites exactes de modules.

Le chapitre III développe la méthode des coefficients indéterminés, développée par Gauss. De très nombreux théorèmes d'existence en algèbre commutative reposent sur des « identités algébriques sous conditions » et donc sur des appartenances $g \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ dans un anneau $\mathbb{Z}[c_1, \ldots, c_r, X_1, \ldots, X_n]$, où les X_i sont les variables et les c_j les paramètres du théorème considéré. En ce sens, on peut considérer que l'algèbre commutative est une vaste théorie des identités algébriques, qui trouve son cadre naturel dans la méthode des coefficients indéterminés, c'est-à-dire la méthode dans laquelle les paramètres du problème à traiter sont pris comme des indéterminées. Forts de cette certitude, nous sommes, autant que faire se pouvait, systématiquement « partis à la chasse des identités algébriques », ceci non seulement dans les chapitres II et III « purement calculatoires », mais dans tout l'ouvrage. En bref, plutôt que d'affirmer en filigrane d'un théorème d'existence « il existe une identité algébrique qui certifie cette existence », nous avons tâché de donner chaque fois l'identité algébrique elle-même.

Ce chapitre III peut être considéré comme un cours d'algèbre de base avec les méthodes du 19$^{\text{e}}$ siècle. Les sections III-1, III-2 et III-3 donnent quelques généralités sur les polynômes, avec notamment l'algorithme de factorisation partielle, la « théorie des identités algébriques » (qui explique la méthode des coefficients indéterminés), les polynômes symétriques élémentaires, le lemme de Dedekind-Mertens et le théorème de Kronecker. Ces deux derniers résultats sont des outils de base qui donnent des informations précises sur les coefficients du produit de deux polynômes ; ils sont souvent utilisés dans le reste de l'ouvrage. La section III-4 introduit l'algèbre de décomposition universelle d'un polynôme unitaire sur un anneau commutatif arbitraire, qui est un substitut efficace au corps des racines d'un polynôme sur un corps. La section III-5 est consacrée au discriminant et explique en quel sens précis une matrice générique est diagonalisable. Avec ces outils en mains, on peut traiter la théorie de Galois de base dans la section III-6. La théorie élémentaire de l'élimination via le résultant est donnée dans la section III-7. On peut alors donner les bases de la théorie algébrique des nombres, avec le théorème de décomposition unique en facteurs premiers pour un idéal de type fini d'un corps de nombres (section III-8). La section III-9 donne le Nullstellensatz de Hilbert comme application du résultant. Enfin, la section III-10 sur la méthode de Newton en algèbre termine ce chapitre.

Le chapitre IV est consacré à l'étude des propriétés élémentaires des modules de présentation finie. Ces modules jouent un peu le même rôle pour

les anneaux que les espaces vectoriels de dimension finie pour les corps : la théorie des modules de présentation finie est une manière un peu plus abstraite, et souvent profitable, d'aborder la question des systèmes linéaires. Les sections IV-1 à IV-4 donnent les propriétés de stabilité de base ainsi que l'exemple important de l'idéal d'un zéro pour un système polynomial (sur un anneau commutatif arbitraire). On s'intéresse ensuite au problème de classification des modules de présentation finie sur un anneau donné. Sur le chemin des anneaux principaux, pour lesquels le problème de classification est complètement résolu (section IV-7), nous rencontrons les anneaux quasi intègres (section IV-6), qui sont les anneaux où l'annulateur d'un élément est toujours engendré par un idempotent. C'est l'occasion de mettre en place une *machinerie locale-globale élémentaire* qui permet de passer d'un résultat établi constructivement pour les anneaux intègres au même résultat, convenablement reformulé, pour les anneaux quasi intègres. Cette machinerie de transformation de preuves est élémentaire, car fondée sur la décomposition d'un anneau en produit fini d'anneaux. La chose intéressante est que cette décomposition est obtenue par relecture de la démonstration constructive écrite dans le cas intègre : on voit ici qu'en mathématiques constructives la démonstration est souvent encore plus importante que le résultat. De la même manière, on a une machinerie locale-globale élémentaire qui permet de passer d'un résultat établi constructivement pour les corps discrets au même résultat, convenablement reformulé, pour les anneaux zéro-dimensionnels réduits (section IV-8). Les anneaux zéro-dimensionnels, ici définis de manière élémentaire, constituent une clé importante de l'algèbre commutative, comme étape intermédiaire pour généraliser certains résultats des corps discrets aux anneaux commutatifs arbitraires. Dans la littérature classique, ils apparaissent souvent sous leur forme noethérienne, c'est-à-dire celle des anneaux artiniens. La section IV-9 introduit les invariants très importants que sont les idéaux de Fitting d'un module de présentation finie. Enfin, la section IV-10 applique cette notion pour introduire l'idéal résultant d'un idéal de type fini dans un anneau de polynômes quand l'idéal en question contient un polynôme unitaire, et démontrer un théorème d'élimination algébrique sur un anneau arbitraire.

Le chapitre V est une première approche de la théorie des modules projectifs de type fini. Les sections V-2 à V-5 donnent les propriétés de base ainsi que l'exemple important des anneaux zéro-dimensionnels. La section V-6 donne le théorème de structure locale : un module est projectif de type fini si, et seulement si, il devient libre après localisation en des éléments comaximaux convenables. Sa démonstration constructive est une relecture d'un résultat établi dans le chapitre II pour les systèmes linéaires « bien conditionnés » (théorème II-5.26). La section V-7 développe l'exemple des modules projectifs localement monogènes. La section V-8 introduit le déterminant d'un

endomorphisme d'un module projectif de type fini. Ceci donne accès à la décomposition d'un tel module en somme directe de ses composants de rang constant. Enfin, la section V-9, que l'on ne savait pas bien où mettre dans l'ouvrage, héberge quelques considérations supplémentaires sur les *propriétés de caractère fini*, une notion introduite au chapitre II pour discuter les rapports entre principes local-globals concrets et principes local-globals abstraits.

Le chapitre VI est consacré pour l'essentiel aux algèbres qui sont des modules projectifs de type fini sur leur anneau de base. Nous les appelons des algèbres strictement finies. Elles constituent une généralisation naturelle pour les anneaux commutatifs de la notion d'algèbre finie sur un corps. Comme cas important, cerise sur le gâteau, les algèbres galoisiennes, qui généralisent les extensions galoisiennes de corps discrets aux anneaux commutatifs.
La section VI-1 traite le cas où l'anneau de base est un corps discret. Elle donne des versions constructives pour les théorèmes de structure obtenus en mathématiques classiques. Le cas des algèbres étales (quand le discriminant est inversible) est particulièrement éclairant. On découvre que les théorèmes classiques supposent toujours implicitement que l'on sache factoriser les polynômes séparables sur le corps de base. La démonstration constructive du théorème de l'élément primitif VI-1.9 est significative par son écart avec la démonstration classique. La section VI-2 applique les résultats précédents pour terminer la théorie de Galois de base commencée dans la section III-6 en caractérisant les extensions galoisiennes de corps discrets comme les extensions étales et normales. La section VI-3 est une brève introduction aux algèbres de présentation finie, en insistant sur le cas des algèbres entières, avec un Nullstellensatz faible et le lemme lying over. La section VI-4 introduit les algèbres strictement finies sur un anneau arbitraire. Dans les sections VI-5 et VI-6, sont introduites les notions voisines d'algèbre strictement étale et d'algèbre séparable qui généralisent la notion d'algèbre étale sur un corps discret. Dans la section VI-7, on donne un exposé constructif des bases de la théorie des algèbres galoisiennes pour les anneaux commutatifs. Il s'agit en fait d'une théorie d'Artin-Galois, puisqu'elle reprend l'approche qu'Artin avait développée pour le cas des corps, en partant directement d'un groupe fini d'automorphismes d'un corps, le corps de base n'apparaissant que comme un sous-produit des constructions qui s'ensuivent.

Dans le chapitre VII, la méthode dynamique, une pierre angulaire des méthodes modernes en algèbre constructive, est mise en œuvre pour traiter d'un point de vue constructif le corps des racines d'un polynôme et la théorie de Galois dans le cas séparable, lorsque la proie s'échappe pour laisser place à son ombre, c'est-à-dire lorsque l'on ne sait pas factoriser les polynômes sur le corps de base que l'on considère. À titre d'entraînement,

la section VII-1 commence par établir des résultats sous forme constructive pour le Nullstellensatz lorsque l'on ne sait pas factoriser les polynômes sur le corps de base. Des considérations d'ordre général sur la méthode dynamique sont développées dans la section VII-2. Plus de détails sur le déroulement des festivités sont donnés dans l'introduction du chapitre.

Le chapitre VIII est une brève introduction aux modules plats et aux algèbres plates et fidèlement plates. En langage intuitif, une **A**-algèbre **B** est plate lorsque les systèmes linéaires sur **A** sans second membre n'ont « pas plus » de solutions dans **B** que dans **A**, et elle est fidèlement plate si cette affirmation est vraie également des systèmes linéaires avec second membre. Ces notions cruciales de l'algèbre commutative ont été introduites par Serre dans [170, GAGA,1956]. Nous ne donnons que les résultats vraiment fondamentaux. C'est également l'occasion d'introduire les notions d'anneau localement sans diviseur de zéro, de module sans torsion (pour un anneau arbitraire), d'anneau arithmétique et d'anneau de Prüfer. Nous insistons comme toujours sur le principe local-global quand il s'applique.

Le chapitre IX parle des anneaux locaux et de quelques généralisations. La section IX-1 introduit la terminologie constructive pour quelques notions classiques usuelles, dont la notion importante de radical de Jacobson. Une notion connexe est celle d'anneau résiduellement zéro-dimensionnel (un anneau **A** tel que $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel). C'est une notion robuste, qui n'utilise jamais les idéaux maximaux, et la plupart des théorèmes de la littérature concernant les anneaux semi-locaux (en mathématiques classiques ce sont les anneaux qui n'ont qu'un nombre fini d'idéaux maximaux) s'appliquent aux anneaux résiduellement zéro-dimensionnels. La section IX-2 répertorie quelques résultats qui montrent que sur un anneau local on ramène la solution de certains problèmes au cas des corps. Les sections IX-3 et IX-4 établissent sur des exemples géométriques (c'est-à-dire concernant l'étude de systèmes polynomiaux) un lien entre la notion d'étude locale au sens intuitif topologique et l'étude de certaines localisations d'anneaux (dans le cas d'un corps discret à la base, ces localisations sont des anneaux locaux). On introduit notamment les notions d'espaces tangent et cotangent en un zéro d'un système polynomial. La section IX-5 fait une brève étude des anneaux décomposables, dont un cas particulier en mathématiques classiques sont les anneaux décomposés (produits finis d'anneaux locaux), qui jouent un rôle important dans la théorie des anneaux locaux henséliens. Enfin la section IX-6 traite la notion d'anneau local-global, qui généralise à la fois celle d'anneau local et celle d'anneau zéro-dimensionnel. Ces anneaux vérifient des propriétés locales-globales très fortes, par exemple les modules projectifs de rang constant sont toujours libres, et ils sont stables par extensions entières.

Le chapitre X poursuit l'étude des modules projectifs de type fini commencée dans le chapitre V. Dans la section X-1, nous reprenons la question de la caractérisation des modules projectifs de type fini comme modules localement libres, c'est-à-dire du théorème de structure locale. Nous en donnons une version matricielle (théorème X-1.7), qui résume et précise les différents énoncés du théorème. La section X-2 est consacrée à l'anneau des rangs sur $\mathbf{A}$. En mathématiques classiques, le rang d'un module projectif de type fini est défini comme une fonction localement constante sur le spectre de Zariski. Nous donnons ici une théorie élémentaire du rang qui ne fait pas appel aux idéaux premiers. Dans la section X-3, nous donnons quelques applications simples du théorème de structure locale. La section X-4 est une introduction aux grassmanniennes. Dans la section X-5, nous introduisons le problème général de la classification complète des modules projectifs de type fini sur un anneau $\mathbf{A}$ fixé. Cette classification est un problème fondamental et difficile, qui n'admet pas de solution algorithmique générale. La section X-6 présente un exemple non trivial pour lesquels cette classification peut être obtenue.

Le chapitre XI est consacré aux treillis distributifs et groupes réticulés. Les deux premières sections décrivent ces structures algébriques ainsi que leurs propriétés de base. Ces structures sont importantes en algèbre commutative pour plusieurs raisons.

D'une part, la théorie de la divisibilité a comme « modèle idéal » la théorie de la divisibilité des entiers naturels. La structure du monoïde multiplicatif $(\mathbb{N}^*, \times, 1)$ en fait la partie positive d'un groupe réticulé. Ceci se généralise en algèbre commutative dans deux directions. La première généralisation est la théorie des anneaux intègres dont les idéaux de type fini forment un treillis distributif, appelés des domaines de Prüfer, que nous étudierons dans le chapitre XII : leurs idéaux de type fini non nuls forment la partie positive d'un groupe réticulé. La deuxième est la théorie des anneaux à pgcd que nous étudions dans la section XI-3. Signalons la première apparition de la dimension de Krull $\leqslant 1$ dans le théorème XI-3.12 : un anneau à pgcd intègre de dimension $\leqslant 1$ est un anneau de Bézout.

D'autre part, les treillis distributifs interviennent comme la contrepartie constructive des espaces spectraux divers et variés qui se sont imposés comme des outils puissants de l'algèbre abstraite. Les rapports entre treillis distributifs et espaces spectraux seront abordés dans la section XIII-1. Dans la section XI-4, nous mettons en place le treillis de Zariski d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$, qui est la contrepartie constructive du fameux spectre de Zariski. Notre but ici est d'établir le parallèle entre la construction de la clôture zéro-dimensionnelle réduite d'un anneau (notée $\mathbf{A}^\bullet$) et celle de l'algèbre de Boole engendrée par un treillis distributif (qui fait l'objet du théorème XI-4.26). L'objet $\mathbf{A}^\bullet$ ainsi construit contient essentiellement la

même information que le produit des anneaux $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$([4]). Ce résultat est en relation étroite avec le fait que le treillis de Zariski de $\mathbf{A}^\bullet$ est l'algèbre de Boole engendrée par le treillis de Zariski de $\mathbf{A}$.
Une troisième raison de s'intéresser aux treillis distributifs est la logique constructive (ou intuitionniste). Dans cette logique, l'ensemble des valeurs de vérité de la logique classique, à savoir $\{\mathsf{Vrai}, \mathsf{Faux}\}$, qui est une algèbre de Boole à deux éléments, est remplacé par un treillis distributif assez mystérieux. La logique constructive sera abordée de manière informelle dans l'annexe. Dans la section XI-5, nous mettons en place les outils qui servent de cadre à une étude algébrique formelle de la logique constructive : les relations implicatives et les algèbres de Heyting. Par ailleurs, relations implicatives et algèbres de Heyting ont leur utilité propre dans l'étude générale des treillis distributifs. Par exemple, le treillis de Zariski d'un anneau noethérien cohérent est une algèbre de Heyting (proposition XIII-6.9).

Le chapitre XII traite les anneaux arithmétiques, les anneaux de Prüfer et les anneaux de Dedekind. Les anneaux arithmétiques sont les anneaux dont le treillis des idéaux de type fini est distributif. Un anneau de Prüfer est un anneau arithmétique réduit et il est caractérisé par le fait que tous ses idéaux sont plats. Un anneau de Prüfer cohérent est la même chose qu'un anneau arithmétique quasi intègre. Il est caractérisé par les fait que ses idéaux de type fini sont projectifs. Un anneau de Dedekind est un anneau de Prüfer cohérent noethérien et fortement discret (en mathématiques classiques avec le principe du tiers exclu tout anneau est fortement discret et tout anneau noethérien est cohérent). Ces anneaux sont apparus tout d'abord avec les anneaux d'entiers de corps de nombres. Le paradigme dans le cas intègre est la décomposition unique en facteurs premiers de tout idéal de type fini non nul. Les propriétés arithmétiques du monoïde multiplicatif des idéaux de type fini sont pour l'essentiel vérifiées par les anneaux arithmétiques. Pour les propriétés les plus subtiles concernant la factorisation des idéaux de type fini, et notamment la décomposition en facteurs premiers, une hypothèse noethérienne, ou au moins de dimension $\leqslant 1$, est indispensable. Dans ce chapitre, nous avons voulu montrer la progression des propriétés satisfaites par les anneaux au fur et à mesure que l'on renforce les hypothèses, depuis les anneaux arithmétiques jusqu'aux anneaux de Dedekind à factorisation totale. Nous insistons sur le caractère algorithmique simple des définitions dans le cadre constructif. Certaines propriétés ne dépendent que de la dimension $\leqslant 1$, et nous avons voulu rendre justice aux anneaux quasi intègres de dimension inférieure ou égale à 1. Nous avons également fait une étude du problème de la décomposition en facteurs premiers plus

4. Ce produit n'est pas accessible en mathématiques constructives, $\mathbf{A}^\bullet$ en est un substitut constructif tout à fait efficace.

progressive et plus fine que dans les exposés qui s'autorisent le principe du tiers exclu. Par exemple, les théorèmes XII-4.10 et XII-7.12 donnent des versions constructives précises du théorème concernant les extensions finies normales d'anneaux de Dedekind, avec ou sans la propriété de factorisation totale.
Le chapitre commence par quelques remarques d'ordre épistémologique sur l'intérêt intrinsèque d'aborder les problèmes de factorisation avec le théorème de factorisation partielle plutôt qu'avec celui de factorisation totale. Pour avoir une bonne idée du déroulement des festivités, il suffit de se reporter à la table des matières en tête du chapitre page 695 et à la table des théorèmes page 1002.

Le chapitre XIII est consacré à la dimension de Krull des anneaux commutatifs, à celle de leurs morphismes, à celle des treillis distributifs et à la dimension valuative des anneaux commutatifs.
Plusieurs notions importantes de dimension en algèbre commutative classique sont des dimensions d'espaces spectraux. Ces espaces topologiques très particuliers jouissent de la propriété d'être entièrement décrits (au moins en mathématiques classiques) par leurs ouverts quasi-compacts, qui forment un treillis distributif. Il s'avère que le treillis distributif correspondant a en général une interprétation simple, sans recours aucun aux espaces spectraux. En 1974, Joyal a montré comment définir constructivement la dimension de Krull d'un treillis distributif. Depuis ce jour faste, la théorie de la dimension qui semblait baigner dans des espaces éthérés, invisibles lorsque l'on ne fait pas confiance à l'axiome du choix, est devenue (au moins en principe) une théorie de nature élémentaire, sans plus aucun mystère.
La section XIII-1 décrit l'approche de la dimension de Krull en mathématiques classiques. Elle explique aussi comment on peut interpréter la dimension de Krull d'un tel espace en terme du treillis distributif de ses ouverts quasi-compacts. La section XIII-2 donne la définition constructive de la dimension de Krull d'un anneau commutatif, notée $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$, et en tire quelques conséquences. La section XIII-3 donne quelques propriétés plus avancées, et notamment le principe local-global et le principe de recouvrement fermé pour la dimension de Krull. La section XIII-4 traite la dimension de Krull des extensions entières et la section XIII-5 celle des anneaux géométriques (correspondant aux systèmes polynomiaux) sur les corps discrets. La section XIII-6 donne la définition constructive de la dimension de Krull d'un treillis distributif et montre que la dimension de Krull d'un anneau commutatif et celle de son treillis de Zariski coïncident. La section XIII-7 est consacrée à la dimension des morphismes entre anneaux commutatifs. La définition utilise la clôture zéro-dimensionnel réduite de l'anneau source du morphisme. Pour démontrer la formule qui majore $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$ à partir de $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ et $\mathsf{Kdim}\,\rho$ (lorsque l'on a un morphisme

$\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$), nous devons introduire la clôture quasi intègre minimale d'un anneau commutatif. Cet objet est une contrepartie constructive du produit de tous les $\mathbf{A}/\mathfrak{p}$, lorsque $\mathfrak{p}$ parcourt les idéaux premiers minimaux de $\mathbf{A}$. La section XIII-8 introduit la dimension valuative d'un anneau commutatif et utilise cette notion notamment pour démontrer le résultat important suivant : pour un anneau arithmétique non nul $\mathbf{A}$, on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] = n + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$. La section XIII-9 donne des versions constructives des théorèmes Going up et Going down.

Dans le chapitre XIV, intitulé *Nombre de générateurs d'un module*, on établit la version élémentaire, non noethérienne et constructive de « grands » théorèmes d'algèbre commutative, dus dans leur version originale à Kronecker, Bass, Serre, Forster et Swan. Ces résultats concernent le nombre de générateurs radicaux d'un idéal de type fini, le nombre de générateurs d'un module, la possibilité de produire un sous-module libre en facteur direct dans un module, et la possibilité de simplifier des isomorphismes, dans le style suivant : si $M \oplus N \simeq M' \oplus N$ alors $M \simeq M'$. Ils font intervenir la dimension de Krull ou d'autres dimensions plus sophistiquées, introduites par R. Heitmann ainsi que par les auteurs de cet ouvrage et T. Coquand.
La section XIV-1 est consacrée au théorème de Kronecker et à ses extensions (la plus aboutie, non noethérienne, est due à R. Heitmann [99]). Le théorème de Kronecker est usuellement énoncé sous la forme suivante : une variété algébrique dans $\mathbb{C}^n$ peut toujours être définie par $n+1$ équations. La forme due à Heitmann est que dans un anneau de dimension de Krull inférieure ou égale à n, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ il existe un idéal $\mathfrak{b}$ engendré par au plus $n+1$ éléments de $\mathfrak{a}$ tel que $\sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}$. La démonstration donne aussi le théorème de Bass, dit « stable range ». Ce dernier théorème a été amélioré en faisant intervenir des dimensions « meilleures » que la dimension de Krull. Ceci fait l'objet de la section XIV-2, où est définie la *dimension de Heitmann*, découverte en lisant avec attention les démonstrations de Heitmann (Heitmann utilise une autre dimension, a priori un peu moins bonne, que nous expliquons également en termes constructifs). Dans la section XIV-3, nous expliquons quelles sont les propriétés matricielles d'un anneau qui permettent de faire fonctionner les théorèmes de Serre (splitting off), de Forster-Swan (contrôle du nombre de générateurs d'un module de type fini en fonction du nombre de générateurs local) et le théorème de simplification de Bass. La section XIV-4 introduit les notions de support (une application d'un anneau dans un treillis distributif vérifiant certains axiomes) et de n-stabilité. Cette dernière notion a été définie par Thierry Coquand, après avoir analysé une démonstration de Bass qui établit que les modules projectifs de type fini sur un anneau $\mathbf{V}[X]$, où $\mathbf{V}$ est un anneau de valuation de dimension de Krull finie, sont libres. Dans la dernière section, on démontre que la propriété matricielle cruciale introduite dans la

section XIV-3 est satisfaite, d'une part, par les anneaux n-stables, d'autre part par les anneaux de dimension de Heitmann $< n$.

Le chapitre XV est consacré au principe local-global et à ses variantes. La section XV-1 introduit la notion de recouvrement d'un monoïde par une famille finie de monoïdes, ce qui généralise la notion de monoïdes comaximaux. Le lemme de recouvrement XV-1.5 sera décisif dans la section XV-5. La section XV-2 donne des principes local-globals concrets. Il s'agit de dire que certains propriétés sont vraies globalement dès qu'elles le sont localement. Ici, « localement » est pris au sens constructif : après localisation en un nombre fini de monoïdes comaximaux. La plupart des résultats ont été établis dans les chapitres précédents. Leur regroupement fait voir la portée très générale de ces principes. La section XV-3 reprend certains de ces principes sous forme de principes local-globals abstraits. Ici, « localement » est pris au sens abstrait, c'est-à-dire après localisation en n'importe quel idéal premier. C'est surtout la comparaison avec les principes local-globals concrets correspondants qui nous intéresse. La section XV-4 explique la construction d'objets «globaux» à partir d'objets de même nature définis uniquement de manière locale, comme il est usuel en géométrie différentielle. C'est l'impossibilité de cette construction lorsque l'on cherche à recoller certains anneaux qui est à l'origine des schémas de Grothendieck. En ce sens, les sections XV-2 et XV-4 constituent la base à partir de laquelle on peut développer la théorie des schémas dans un cadre complètement constructif.

Les sections suivantes sont d'une autre nature. D'ordre méthodologique, elles sont consacrées au décryptage de différentes variantes du principe local-global en mathématiques classiques. Par exemple, la localisation en tous les idéaux premiers, le passage au quotient par tous les idéaux maximaux ou la localisation en tous les idéaux premiers minimaux, qui s'appliquent chacune dans des situations particulières. Un tel décryptage présente un caractère certainement déroutant dans la mesure où il prend pour point de départ une démonstration classique qui utilise des théorèmes en bonne et due forme, mais où le décryptage constructif de cette démonstration n'est pas seulement donné par l'utilisation de théorèmes constructifs en bonne et due forme. Il faut aussi regarder ce que fait la démonstration classique avec ses objets purement idéaux (des idéaux maximaux par exemple) pour comprendre comment elle nous donne le moyen de construire un nombre fini d'éléments qui vont être impliqués dans un théorème constructif (un principe local-global concret par exemple) pour aboutir au résultat souhaité. En décryptant une telle démonstration, nous utilisons la méthode dynamique générale exposée au chapitre VII. Nous décrivons ainsi des *machineries locales-globales* nettement moins élémentaires que celles du chapitre IV : la machinerie locale-globale constructive de base «à idéaux premiers» (section XV-5), la

machinerie locale-globale constructive à idéaux maximaux (section XV-6) et la machinerie locale-globale constructive à idéaux premiers minimaux (section XV-7). En réalisant « le programme de Poincaré » cité en exergue de cet avant-propos, nos machineries locales-globales prennent en compte une remarque essentielle de Lakatos, à savoir que la chose la plus intéressante et robuste dans un théorème, c'est toujours sa démonstration, même si elle est critiquable à certains égards (voir [Lakatos]).
Dans les sections XV-8 et XV-9, nous examinons dans quelle mesure certains principes local-globals restent valides lorsque l'on remplace dans les énoncés les listes d'éléments comaximaux par des listes de profondeur $\geqslant 1$ ou de profondeur $\geqslant 2$.

Dans le chapitre XVI, nous traitons la question des modules projectifs de type fini sur les anneaux de polynômes. La question décisive est d'établir pour quelles classes d'anneaux les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes proviennent par extension des scalaires d'un module projectif de type fini sur l'anneau lui-même (éventuellement en posant certaines restrictions sur les modules projectifs de type fini considérés ou sur le nombre de variables dans l'anneau de polynômes). Quelques généralités sur les modules étendus sont données dans la section XVI-1. Le cas des modules projectifs de rang constant 1, complètement éclairci par le théorème de Traverso-Swan-Coquand, est traité dans la section XVI-2. La démonstration constructive de Coquand utilise de manière cruciale la machinerie locale-globale constructive à idéaux premiers minimaux. La section XVI-3 traite les théorèmes de recollement de Quillen (Quillen patching) et Vaserstein, qui disent que certains objets sont obtenus par extension des scalaires (depuis l'anneau de base à un anneau de polynômes) si, et seulement si, cette propriété est vérifiée localement. Nous donnons aussi une sorte de réciproque du Quillen patching, due à Roitman, sous forme constructive. La section XVI-4 est consacrée aux théorèmes de Horrocks. La démonstration constructive du théorème de Horrocks global fait subir à la démonstration du théorème de Horrocks local la machinerie locale-globale de base et se conclut avec le Quillen patching constructif. La section XVI-5 donne plusieurs preuves constructives du théorème de Quillen-Suslin (les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps discret sont libres), fondées sur différentes démonstrations classiques. La section XVI-6 établit le théorème de Lequain-Simis (les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un anneau arithmétique sont étendus). La démonstration utilise la méthode dynamique exposée au chapitre VII, cela permet d'établir le théorème d'induction de Yengui, une variante constructive de l'induction de Lequain-Simis.

Dans le chapitre XVII, nous démontrons le « Suslin Stability Theorem » dans le cas particulier des corps discrets. Ici aussi, pour obtenir une démonstration

constructive, nous utilisons la machinerie locale-globale de base, exposée au chapitre XV.

L'annexe décrit la théorie des ensembles constructive à la Bishop. Elle peut être vue comme une introduction à la logique constructive. On y explique la sémantique de Brouwer-Heyting-Kolmogorov pour les connecteurs et quantificateurs. On discute certaines formes faibles du principe du tiers exclu ainsi que plusieurs principes problématiques en mathématiques constructives.

Quelques remarques d'ordre épistémologique

Nous espérons dans cet ouvrage montrer que des livres classiques d'algèbre commutative comme [Atiyah & Macdonald], [Eisenbud], [Gilmer], [Glaz], [Kaplansky], [Knapp, 1], [Knapp, 2], [Kunz], [Lafon & Marot], [Lam06] (dont la lecture est vivement recommandée), [Matsumura], [Northcott], ou même [Bourbaki] et le remarquable ouvrage disponible sur le réseau [Stacks-Project], pourront entièrement être récrits avec un point de vue constructif, dissipant le voile de mystère qui entoure les théorèmes d'existence non explicites des mathématiques classiques. Naturellement, nous espérons que les lectrices profiteront de notre ouvrage pour jeter un regard nouveau sur les livres de calcul formel classiques, comme par exemple [Cox, Little & O'Shea], [COCOA], [SINGULAR], [Ene & Herzog], [Elkadi & Mourrain], [Mora], [TAPAS] ou [von zur Gathen & Gerhard].

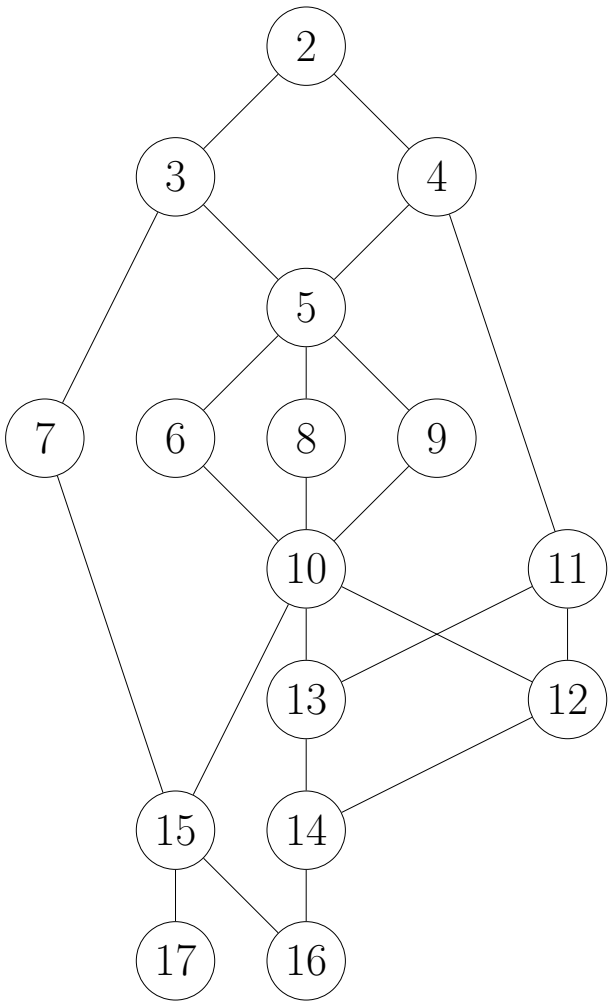
Dans la mesure où nous voulons un traitement algorithmique de l'algèbre commutative, nous ne pouvons pas utiliser toutes les facilités que donnent l'usage systématique du lemme de Zorn et du principe du tiers exclu en mathématiques classiques. Sans doute, le lecteur comprend bien qu'il est difficile d'implémenter le lemme de Zorn en calcul formel. Le refus du principe du tiers exclu doit par contre lui sembler plus dur à avaler. Ce n'est de notre part qu'une constatation pratique. Si dans une démonstration classique, vous trouvez un raisonnement qui conduit à un calcul du type : « si x est inversible, faire ceci, sinon faire cela », il est bien clair que cela ne se traduit directement sous forme d'un algorithme que dans le cas où l'on dispose d'un test d'inversibilité dans l'anneau en question. C'est pour insister sur cette difficulté, que nous devons contourner en permanence, que nous sommes amenés à parler souvent des deux points de vue, classique et constructif, sur un même sujet.

On peut discuter indéfiniment pour savoir si les mathématiques constructives sont une partie des mathématiques classiques, la partie qui s'occupe exclusivement des aspects explicites des choses, ou si au contraire ce sont les mathématiques classiques qui sont une partie des mathématiques constructives, la partie dont les théorèmes sont « étoilés », c'est-à-dire qui rajoutent systématiquement dans leurs hypothèses le principe du tiers exclu et l'axiome

du choix. Un de nos objectifs est de faire pencher la balance dans la deuxième direction, non par le débat philosophique, mais par la pratique.
Signalons enfin deux traits marquants de cet ouvrage par rapport aux ouvrages classiques d'algèbre commutative.
Le premier est la mise au second plan de la noethérianité. L'expérience prouve en effet que la noethérianité est bien souvent une hypothèse trop forte, qui cache la vraie nature algorithmique des choses. Par exemple, tel théorème habituellement énoncé pour les anneaux noethériens et les modules de type fini, lorsque l'on met sa démonstration à plat pour en extraire un algorithme, s'avère être un théorème sur les anneaux cohérents et les modules de présentation finie. Le théorème habituel n'est qu'un corollaire du bon théorème, mais avec deux arguments non constructifs qui permettent de déduire en mathématiques classiques la cohérence et la présentation finie de la noethérianité et du type fini. Une démonstration dans le cadre plus satisfaisant de la cohérence et des modules de présentation finie se trouve bien souvent déjà publiée dans des articles de recherche, quoique rarement sous forme entièrement constructive, mais « le bon énoncé » est en général absent dans les ouvrages de référence [5].
Le deuxième trait marquant de l'ouvrage est l'absence presque totale de la négation dans les énoncés constructifs. Par exemple, au lieu d'énoncer que pour un anneau $\mathbf{A}$ non trivial, deux modules libres de rang m et n avec $m > n$ ne peuvent pas être isomorphes, nous préférons dire, sans aucune hypothèse sur l'anneau, que si ces modules sont isomorphes, alors l'anneau est trivial (proposition II-5.2). Cette nuance peut sembler bien mince au premier abord, mais elle a une importance algorithmique. Elle va permettre de remplacer une démonstration en mathématiques classiques utilisant un anneau $\mathbf{A} = \mathbf{B}/\mathfrak{a}$, qui conclurait que $1 \in \mathfrak{a}$ au moyen d'un raisonnement par l'absurde, par une démonstration pleinement algorithmique qui construit 1 en tant qu'élément de l'idéal $\mathfrak{a}$ à partir d'un isomorphisme entre $\mathbf{A}^m$ et $\mathbf{A}^n$.
Pour une présentation générale des idées qui ont conduit aux nouvelles méthodes utilisées en algèbre constructive dans cet ouvrage, on pourra lire l'article de synthèse [42, Coquand&Lombardi, 2006].

Henri Lombardi, Claude Quitté
Mai 2014

5. Cette déformation professionnelle noethérienne a produit un travers linguistique dans la littérature anglaise qui consiste à prendre « local ring » dans le sens de « Noetherian local ring ».


2
3
4
5
7
6
8
9
10
11
13
12
15
14
17
16

L'organigramme de la page précédente donne les liens de dépendance entre les différents chapitres

2. Principe local-global de base et systèmes linéaires
   Anneaux et modules cohérents. Un peu d'algèbre extérieure.
3. La méthode des coefficients indéterminés
   Lemme de Dedekind-Mertens et théorème de Kronecker. Théorie de Galois de base. Nullstellensatz classique.
4. Modules de présentation finie
   Catégorie des modules de présentation finie. Anneaux zéro-dimensionnels. Machineries locales-globales élémentaires. Idéaux de Fitting.
5. Modules projectifs de type fini, 1
   Théorème de structure locale. Déterminant. Rang.
6. Algèbres strictement finies et algèbres galoisiennes
7. La méthode dynamique
   Nullstellensatz général (sans clôture algébrique). Théorie de Galois générale (sans algorithme de factorisation).
8. Modules plats
   Algèbres plates et fidèlement plates.
9. Anneaux locaux, ou presque
   Anneau décomposable. Anneau local-global.
10. Modules projectifs de type fini, 2
11. Treillis distributifs, groupes réticulés
    Anneaux à pgcd. Treillis de Zariski d'un anneau commutatif. Relations implicatives.
12. Anneaux de Prüfer et de Dedekind
    Extensions entières. Dimension $\leqslant 1$. Factorisation d'idéaux de type fini.
13. Dimension de Krull
    Dimension de Krull. Dimension des morphismes. Dimension valuative. Dimension des extensions entières et polynomiales.
14. Nombre de générateurs d'un module
    Théorèmes de Kronecker, Bass et Forster-Swan. Splitting off de Serre. Dimension de Heitmann.
15. Le principe local-global
16. Modules projectifs étendus
    Théorèmes de Traverso-Swan-Coquand, Quillen-Suslin, Bass-Lequain-Simis.
17. Théorème de stabilité de Suslin

Chapitre I

Exemples

Sommaire

Introduction

Dans tout l'ouvrage, sauf mention expresse du contraire, les anneaux sont commutatifs et unitaires, et un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ doit vérifier $\varphi(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\mathbf{B}}$.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau. On dit qu'un $\mathbf{A}$-module M est *libre de rang fini* lorsqu'il est isomorphe à un module $\mathbf{A}^n$. On dit qu'il est *projectif de type fini* lorsqu'il existe un $\mathbf{A}$-module N tel que $M \oplus N$ est libre de rang fini. Il revient au même de dire que M est isomorphe à l'image d'une *matrice de projection* (une matrice P telle que $P^2 = P$). Il s'agit de la matrice de la projection

sur M parallèlement à N, définie précisément comme suit :

$$M \oplus N \longrightarrow M \oplus N, \quad x + y \longmapsto x \qquad \text{pour } x \in M \text{ et } y \in N.$$

Une matrice de projection est encore appelée un *projecteur*.
Lorsque l'on a un isomorphisme $M \oplus \mathbf{A}^\ell \simeq \mathbf{A}^k$, le module projectif de type fini M est dit *stablement libre*.
Alors que sur un corps ou sur un anneau principal les modules projectifs de type fini sont libres (sur un corps ce sont des espaces vectoriels de dimension finie), sur un anneau commutatif général, la classification des modules projectifs de type fini est un problème à la fois important et difficile.
En théorie des nombres Kronecker et Dedekind ont démontré qu'un idéal de type fini non nul dans l'anneau d'entiers d'un corps de nombres est toujours inversible (donc projectif de type fini), mais qu'il est rarement libre (c'est-à-dire principal). Il s'agit d'un phénomène fondamental, qui est à l'origine du développement moderne de la théorie des nombres.

Dans ce chapitre nous essayons d'expliquer pourquoi la notion de module projectif de type fini est importante, en donnant des exemples significatifs en géométrie différentielle.
La donnée d'un fibré vectoriel sur une variété compacte lisse V est en effet équivalente à la donnée d'un module projectif de type fini sur l'anneau $\mathbf{A} = C^\infty(V)$ des fonctions lisses sur V : à un fibré vectoriel, on associe le $\mathbf{A}$-module des sections du fibré, ce $\mathbf{A}$-module est toujours projectif de type fini, mais il n'est libre que lorsque le fibré est trivial.
Le fibré tangent correspond à un module que l'on construit par un procédé purement formel à partir de l'anneau $\mathbf{A}$. Dans le cas où la variété V est une sphère, le module des sections du fibré tangent est stablement libre. Un résultat important concernant la sphère est qu'il n'existe pas de champ de vecteurs lisse partout non nul. Cela équivaut au fait que le module des sections du fibré tangent n'est pas libre.

Nous essayons d'être le plus explicite possible, mais dans ce chapitre de motivation, nous utilisons librement les raisonnements de mathématiques classiques sans nous soucier d'être totalement rigoureux d'un point de vue constructif.

1. Fibrés vectoriels sur une variété compacte lisse

Ici, on donne quelques motivations pour les modules projectifs de type fini et la localisation en expliquant l'exemple des fibrés vectoriels sur une variété lisse compacte. Deux cas particuliers importants sont les fibrés tangents et

cotangents correspondants aux champs de vecteurs et aux formes différentielles C^∞.
Nous utiliserons le terme «lisse» comme synonyme de «de classe C^∞».
Nous allons voir que le fait que la sphère ne peut pas être peignée admet une interprétation purement algébrique.

Dans cette section, on considère une variété différentiable réelle lisse V et l'on note $\mathbf{A} = C^\infty(V)$ l'algèbre réelle des fonctions lisses globales sur la variété.

Quelques localisées de l'algèbre des fonctions continues

Considérons tout d'abord un élément $f \in \mathbf{A}$ ainsi que l'ouvert

$$U = \{\, x \in V \mid f(x) \neq 0 \,\}$$

et regardons comment on peut interpréter l'algèbre $\mathbf{A}[1/f]$: deux éléments g/f^k et h/f^k sont égaux dans $\mathbf{A}[1/f]$ si, et seulement si, pour un exposant ℓ on a $gf^\ell = hf^\ell$ ce qui signifie exactement $g|_U = h|_U$.
Il s'ensuit que l'on peut interpréter $\mathbf{A}[1/f]$ comme une sous-algèbre de l'algèbre des fonctions lisses sur U : cette sous-algèbre a pour éléments les fonctions qui peuvent s'écrire sous la forme $(g|_U)/(f|_U)^k$ (pour un certain exposant k) avec $g \in \mathbf{A}$, ce qui introduit a priori certaines restrictions sur le comportement de la fonction au bord de U.
Pour ne pas avoir à gérer ce problème délicat, on utilise le lemme suivant.

1.1. Lemme. *Soit U' un ouvert contenant le support de f. Alors, l'application naturelle (par restriction),*

$$\text{de } C^\infty(V)[1/f] = \mathbf{A}[1/f] \text{ vers } C^\infty(U')[1/f|_{U'}],$$

est un isomorphisme.

▷ Rappelons que le support de f est l'adhérence de l'ouvert U. On a un homomorphisme de restriction $h \mapsto h|_{U'}$ de $C^\infty(V)$ vers $C^\infty(U')$ qui induit un homomorphisme $\varphi : C^\infty(V)[1/f] \to C^\infty(U')[1/f|_{U'}]$. Nous voulons montrer que φ est un isomorphisme. Si $g \in C^\infty(U')$, la fonction gf, qui est nulle sur $U' \setminus \overline{U}$, peut se prolonger en une fonction lisse à V tout entier, en la prenant nulle en dehors de U'. Nous la notons encore gf. Alors, l'isomorphisme réciproque de φ est donné par $g \mapsto gf/f$ et $g/f^m \mapsto gf/f^{m+1}$. □

Un *germe de fonction lisse en un point p* de la variété V est donné par un couple (U, f) où U est un ouvert contenant p et f est une fonction lisse $U \to \mathbb{R}$. Deux couples (U_1, f_1) et (U_2, f_2) définissent le même germe s'il existe un ouvert $U \subseteq U_1 \cap U_2$ contenant p tel que $f_1|_U = f_2|_U$. Les germes de fonctions lisses au point p forment une $\mathbb{R}$-algèbre que l'on note $\mathbf{A}_p$.
On a alors le petit «miracle algébrique» suivant.

1.2. Lemme. *L'algèbre $\mathbf{A}_p$ est naturellement isomorphe au localisé $\mathbf{A}_{S_p}$, où S_p est la partie multiplicative des fonctions non nulles au point p.*

$\mathbb{D}$ Tout d'abord, on a une application naturelle $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_p$ qui à une fonction définie sur V associe son germe en p. Il est immédiat que l'image de S_p est contenue dans les inversibles de $\mathbf{A}_p$. Donc, on a une factorisation de l'application naturelle ci-dessus qui fournit un homomorphisme $\mathbf{A}_{S_p} \to \mathbf{A}_p$. Ensuite, on définit un homomorphisme $\mathbf{A}_p \to \mathbf{A}_{S_p}$. Si (U, f) définit le germe g considérons une fonction $h \in \mathbf{A}$ qui est égale à 1 sur un ouvert U' contenant p avec $\overline{U'} \subseteq U$ et qui est nulle en dehors de U (dans une carte on pourra prendre pour U' une boule ouverte de centre p). Alors, chacun des trois couples (U, f), $(U', f|_{U'})$ et (V, fh) définit le même germe g. Maintenant, fh définit un élément de $\mathbf{A}_{S_p}$. Il reste à vérifier que la correspondance que l'on vient d'établir produit bien un homomorphisme de l'algèbre $\mathbf{A}_p$ sur l'algèbre $\mathbf{A}_{S_p}$: quelle que soit la manière de représenter le germe sous la forme (U, f), l'élément $fh/1$ de $\mathbf{A}_{S_p}$ ne dépend que du germe g.
Enfin, on vérifie que les deux homomorphismes de $\mathbb{R}$-algèbres que l'on a définis sont bien des isomorphismes inverses l'un de l'autre. □

Bref, nous venons d'algébriser la notion de germe de fonction lisse. À ceci près que le monoïde S_p est défini à partir de la variété V, pas seulement à partir de l'algèbre $\mathbf{A}$.
Mais si V est compacte, les monoïdes S_p sont exactement les complémentaires des idéaux maximaux de $\mathbf{A}$. En effet, d'une part, que V soit ou non compacte, l'ensemble des $f \in \mathbf{A}$ nulles en p constitue toujours un idéal maximal $\mathfrak{m}_p$ de corps résiduel égal à $\mathbb{R}$. D'autre part, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\mathbf{A}$ l'intersection des $Z(f) = \{\, x \in V \mid f(x) = 0 \,\}$ pour les $f \in \mathfrak{m}$ est un compact non vide (notez que $Z(f) \cap Z(g) = Z(f^2 + g^2)$). Comme l'idéal est maximal, ce compact est nécessairement réduit à un point p et l'on obtient ensuite $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$.

Fibrés vectoriels et modules projectifs de type fini

Rappelons maintenant la notion de *fibré vectoriel* au dessus de V.
Un fibré vectoriel est donné par une variété lisse W, une application surjective lisse $\pi : W \to V$, et une structure d'espace vectoriel de dimension finie sur chaque fibre $\pi^{-1}(p)$. En outre, localement, tout ceci doit être difféomorphe à la situation simple suivante, dite triviale :

$$\pi_1 : (U \times \mathbb{R}^m) \to U,\ (p, v) \mapsto p,$$

avec m qui peut dépendre de U si V n'est pas connexe. Cela signifie que la structure d'espace vectoriel (de dimension finie) sur la fibre au dessus de p doit dépendre « convenablement » de p.
Un tel ouvert U, qui trivialise le fibré, est appelé un *ouvert distingué.*
Une *section* du fibré vectoriel $\pi : W \to V$ est par définition une application $\sigma : V \to W$ telle que $\pi \circ \sigma = \mathrm{Id}_V$. On notera $\Gamma(W)$ l'ensemble des sections lisses de ce fibré. Il est muni d'une structure naturelle de $\mathbf{A}$-module.

Supposons maintenant la variété V compacte. Comme le fibré est localement trivial il existe un recouvrement fini de V par des ouverts distingués U_i et une partition de l'unité $(f_i)_{i\in[\![1..s]\!]}$ *subordonnée à ce recouvrement* : le support de f_i est un compact K_i contenu dans U_i.
On remarque d'après le lemme 1.1 que les algèbres $\mathbf{A}[1/f_i] = C^\infty(V)[1/f_i]$ et $C^\infty(U_i)[1/f_i]$ sont naturellement isomorphes.
Si on localise l'anneau $\mathbf{A}$ et le module $M = \Gamma(W)$ en rendant f_i inversible, on obtient l'anneau $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/f_i]$ et le module M_i. Notons $W_i = \pi^{-1}(U_i)$. Alors, $W_i \to U_i$ est « isomorphe » à $\mathbb{R}^{m_i} \times U_i \to U_i$. Il revient donc au même de se donner une section du fibré W_i, ou de se donner les m_i fonctions $U_i \to \mathbb{R}$ qui fabriquent une section du fibré $\mathbb{R}^{m_i} \times U_i \to U_i$. Autrement dit, le module des sections de W_i est libre de rang m.
Vu qu'un module qui devient libre après localisation en un nombre fini d'éléments comaximaux est projectif de type fini (principe local-global V-2.4), on obtient alors la partie directe (point *1*) du théorème suivant.

1.3. Théorème. *Soit V une variété compacte lisse, on note $\mathbf{A} = C^\infty(V)$.*

1. *Si $W \xrightarrow{\pi} V$ est un fibré vectoriel sur V, le $\mathbf{A}$-module des sections lisses de W est projectif de type fini.*
2. *Réciproquement, tout $\mathbf{A}$-module projectif de type fini est isomorphe au module des sections lisses d'un fibré vectoriel sur V.*

Évoquons la partie réciproque du théorème : si l'on se donne un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini M, on peut construire un fibré vectoriel W au dessus de V dont le module des sections est isomorphe à M. On procède comme suit. On considère une matrice de projection $F = (f_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $\operatorname{Im} F \simeq M$ et l'on pose

$$W = \{\, (x,h) \in V \times \mathbb{R}^n \mid h \in \operatorname{Im} F|_x \,\},$$

où $F|_x$ désigne la matrice $(f_{ij}(x))$. La lectrice pourra montrer alors que $\operatorname{Im} F$ s'identifie au module des sections $\Gamma(W)$: à l'élément $s \in \operatorname{Im} F$ on fait correspondre la section $\widetilde{s}$ définie par $x \mapsto \widetilde{s}(x) = (x, s|_x)$. Par ailleurs, dans le cas où F est la matrice de projection standard

$$\mathrm{I}_{k,n} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & 0_r \\ \hline \end{array} \quad (k+r=n),$$

il est clair que W est trivial : il est égal à $V \times \left(\mathbb{R}^k \times \{0\}^r\right)$. Enfin, un module projectif de type fini devient libre après localisation en des éléments comaximaux convenables (théorème V-6.1, point *3*, ou théorème X-1.7, forme matricielle plus précise). En conséquence, le fibré W défini ci-dessus est localement trivial : c'est bien un fibré vectoriel.

Vecteurs tangents et dérivations

Un exemple décisif de fibré vectoriel est le fibré tangent, dont les éléments sont les couples (p, v), où $p \in V$ et v est un vecteur tangent au point p.
Lorsque la variété V est une variété plongée dans un espace $\mathbb{R}^n$, un vecteur tangent v au point p peut être identifié à la dérivation au point p dans la direction de v.
Lorsque la variété V n'est pas une variété plongée dans un espace $\mathbb{R}^n$, un vecteur tangent v peut être *défini* comme une *dérivation au point p,* c'est-à-dire comme une forme $\mathbb{R}$-linéaire $v : \mathbf{A} \to \mathbb{R}$ qui vérifie la règle de Leibniz

$$v(fg) = f(p)v(g) + g(p)v(f). \tag{1}$$

On vérifie par quelques calculs que les vecteurs tangents à V forment bien un fibré vectoriel T_V au dessus de V.

À un fibré vectoriel $\pi : W \to V$, est associé le $\mathbf{A}$-module $\Gamma(W)$ formé par les sections lisses du fibré. Dans le cas du fibré tangent, $\Gamma(\mathrm{T}_V)$ n'est rien d'autre que le $\mathbf{A}$-module des champs de vecteurs (lisses) usuels.
De même qu'un vecteur tangent au point p est identifié à une dérivation au point p, qui peut être définie en termes algébriques (équation (1)), de même, un champ (lisse) de vecteurs tangents peut être identifié à un élément du $\mathbf{A}$-*module des dérivations de la* $\mathbb{R}$-*algèbre* $\mathbf{A}$, défini comme suit.
Une dérivation d'une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbf{B}$ dans un $\mathbf{B}$-module M est une application $\mathbb{R}$-linéaire $v : \mathbf{B} \to M$ qui vérifie la règle de Leibniz

$$v(fg) = f\, v(g) + g\, v(f). \tag{2}$$

Le $\mathbf{B}$-module des dérivations de $\mathbf{B}$ dans M est noté $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B}, M)$.
Une dérivation d'une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbf{B}$ « tout court » est une dérivation à valeurs dans $\mathbf{B}$. Lorsque le contexte est clair nous noterons $\mathrm{Der}(\mathbf{B})$ comme une abréviation pour $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbf{B}, \mathbf{B})$.
Les dérivations au point p sont donc les éléments de $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbf{A}, \mathbb{R}_p)$ où $\mathbb{R}_p = \mathbb{R}$ muni de la structure de $\mathbf{A}$-module donnée par l'homomorphisme $f \mapsto f(p)$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi $\mathrm{Der}_{\mathbb{R}}(\mathbf{A}, \mathbb{R}_p)$ est une version algébrique abstraite de l'espace tangent au point p à la variété V.

Une variété lisse est dite *parallélisable* si elle possède un champ (lisse) de bases (n sections lisses du fibré tangent qui en tout point donnent une base). Cela revient à dire que le fibré tangent est trivial, ou encore que le $\mathbf{A}$-module des sections de ce fibré, le module $\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ des dérivations de $\mathbf{A}$, est libre.

Différentielles et fibré cotangent

Le fibré dual du fibré tangent, appelé fibré cotangent, admet pour sections les formes différentielles sur la variété V.
Le $\mathbf{A}$-module correspondant, appelé module des différentielles, peut être défini *par générateurs et relations* de la manière suivante.

De manière générale, si $(f_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments qui engendre une $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbf{B}$, le $\mathbf{B}$-*module des différentielles (de Kähler)* de $\mathbf{B}$, noté $\Omega_{\mathbf{B}/\mathbb{R}}$, est engendré par les $\mathrm{d}f_i$ (purement formels) soumis aux relations «dérivées» des relations qui lient les f_i : si $P \in \mathbb{R}[z_1, \ldots, z_n]$ et si $P(f_{i_1}, \ldots, f_{i_n}) = 0$, la relation dérivée est

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial z_k}(f_{i_1}, \ldots, f_{i_n})\mathrm{d}f_{i_k} = 0.$$

On dispose en outre de l'application canonique $\mathrm{d} : \mathbf{B} \to \Omega_{\mathbf{B}/\mathbb{R}}$, définie par $\mathrm{d}f =$ la classe de f (si $f = \sum \alpha_i f_i$, avec $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\mathrm{d}f = \sum \alpha_i \mathrm{d}f_i$), qui est une dérivation [1].
On montre alors que, pour toute $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbf{B}$, le $\mathbf{B}$-module des dérivations de $\mathbf{B}$ est le dual du $\mathbf{B}$-module des différentielles de Kähler.
Dans le cas où le $\mathbf{B}$-module des différentielles de $\mathbf{B}$ est projectif de type fini (par exemple si $\mathbf{B} = \mathbf{A}$), alors il est lui-même le dual du $\mathbf{B}$-module des dérivations de $\mathbf{B}$.

Cas des variétés compactes algébriques lisses

Dans le cas d'une variété *algébrique* réelle compacte lisse V, l'algèbre $\mathbf{A}$ des fonctions lisses sur V admet comme sous-algèbre celle des fonctions polynomiales, notée $\mathbb{R}[V]$.
Les modules des champs de vecteurs et des formes différentielles peuvent être définis comme ci-dessus au niveau de l'algèbre $\mathbb{R}[V]$.
Tout module projectif de type fini M sur $\mathbb{R}[V]$ correspond à un fibré vectoriel $W \to V$ que l'on qualifie de *fortement algébrique*. Les sections lisses de ce fibré vectoriel forment un $\mathbf{A}$-module qui est (isomorphe au) le module obtenu à partir de M en étendant les scalaires à $\mathbf{A}$.
Alors, le fait que la variété est parallélisable peut être testé au niveau le plus élémentaire, celui du module M.
En effet l'affirmation concernant le cas lisse «le $\mathbf{A}$-module des sections lisses de W est libre» équivaut à l'affirmation correspondante de même nature pour le cas algébrique «le $\mathbb{R}[V]$-module M est libre». Esquisse d'une preuve : le théorème d'approximation de Weierstrass permet d'approcher une section lisse par une section polynomiale et un champ de bases lisse (n sections lisses du fibré qui en tout point donnent une base), par un champ de bases polynomial.

Examinons maintenant le cas des surfaces compactes lisses. Une telle surface est parallélisable si, et seulement si, elle est orientable et possède un champ de vecteurs partout non nul. De manière imagée cette deuxième condition se lit : la surface peut être peignée. Les courbes intégrales du champ de

1. Pour plus de précisions sur ce sujet voir les théorèmes VI-6.6 et VI-6.7.

vecteurs forment alors une *belle famille de courbes*, c'est-à-dire une famille de courbes localement rectifiable.
Donc pour une surface algébrique compacte V lisse orientable les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Il existe un champ de vecteurs partout non nul.
2. Il existe une belle famille de courbes.
3. La variété est parallélisable.
4. Le module des différentielles de Kähler de $\mathbb{R}[V]$ est libre.

Comme expliqué précédemment, la dernière condition relève de l'algèbre pure (voir aussi la section 2).
D'où la possibilité d'une preuve « algébrique » du fait que la sphère ne peut pas être peignée.
Il semble qu'une telle preuve ne soit pas encore disponible sur le marché.

Module des différentielles et module des dérivations d'une algèbre de présentation finie

Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif. Pour une $\mathbf{R}$-algèbre de présentation finie

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle = \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n],$$

les définitions du module des dérivations et du module des différentielles s'actualisent comme suit.
On note $\pi : \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbf{A},\ g(\underline{X}) \mapsto g(\underline{x})$ la projection canonique.
On considère la matrice jacobienne du système $f_1, \ldots, f_s$,

$$J(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(\underline{X}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}(\underline{X}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial X_1}(\underline{X}) & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial X_n}(\underline{X}) \end{bmatrix}.$$

La matrice $J(\underline{x})$ définit une application $\mathbf{A}$-linéaire $\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^s$. Alors, on a deux isomorphismes naturels $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \simeq \operatorname{Coker} {}^{\mathrm{t}}J(\underline{x})$ et $\operatorname{Der}(\mathbf{A}) \simeq \operatorname{Ker} J(\underline{x})$.
Le premier isomorphisme résulte de la définition du module des différentielles.
Le deuxième peut s'expliciter comme suit : si $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \operatorname{Ker} J(\underline{x})$, on lui associe « la dérivation partielle dans la direction du vecteur tangent u » (en fait c'est plutôt un champ de vecteurs) définie par

$$\delta_u : \mathbf{A} \to \mathbf{A},\ \pi(g) \mapsto \sum\nolimits_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial g}{\partial X_i}(\underline{x}).$$

Alors, $u \mapsto \delta_u$ est l'isomorphisme en question.

Exercice 1. *Démontrer l'affirmation qui vient d'être faite concernant le module des dérivations. Confirmer ensuite à partir de cela le fait que* $\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ *est le dual de* $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ *: si* $\varphi : E \to F$ *est une application linéaire entre modules libres de rang fini on a toujours* $\mathrm{Ker}\,\varphi \simeq (E^\star/\,\mathrm{Im}\,{}^t\varphi)^\star$.

Nous nous intéressons dans la suite au cas lisse, dans lequel les notions purement algébriques coïncident avec les notions analogues en géométrie différentielle.

2. Formes différentielles à coefficients polynomiaux sur une variété affine lisse

Le module des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur la sphère

Soit $S = \left\{ (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3 \,|\, \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1 \right\}$. L'anneau des fonctions polynômes sur S est la $\mathbb{R}$-algèbre

$$\mathbf{A} = \mathbb{R}[X, Y, Z]/\left\langle X^2 + Y^2 + Z^2 - 1 \right\rangle = \mathbb{R}[x, y, z].$$

Le $\mathbf{A}$-module des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur S est

$$\Omega_{\mathbf{A}/\mathbb{R}} = (\mathbf{A}\ \mathrm{d}x \oplus \mathbf{A}\ \mathrm{d}y \oplus \mathbf{A}\ \mathrm{d}z)/\left\langle x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z \right\rangle \simeq \mathbf{A}^3/\mathbf{A}v,$$

où v est le vecteur colonne ${}^t[\, x\ y\ z\,]$.
Ce vecteur est *unimodulaire* (cela signifie que ses coordonnées sont des éléments comaximaux de $\mathbf{A}$) puisque $[\, x\ y\ z\,] \cdot v = 1$. Donc, la matrice

$$P = v \cdot [\, x\ y\ z\,] = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}$$

vérifie $P^2 = P$, $P \cdot v = v$, $\mathrm{Im}(P) = \mathbf{A}v$ de sorte qu'en posant $Q = \mathrm{I}_3 - P$ on obtient

$$\mathrm{Im}(Q) \simeq \mathbf{A}^3/\,\mathrm{Im}(P) \simeq \Omega_{\mathbf{A}/\mathbb{R}}, \ \text{ et } \ \Omega_{\mathbf{A}/\mathbb{R}} \oplus \mathrm{Im}(P) \simeq \Omega_{\mathbf{A}/\mathbb{R}} \oplus \mathbf{A} \simeq \mathbf{A}^3.$$

Ceci met en évidence que $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbb{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang 2, stablement libre.
Les considérations précédentes auraient fonctionné en remplaçant $\mathbb{R}$ par un corps de caractéristique $\neq 2$ ou même par un anneau commutatif $\mathbf{R}$ où 2 est inversible.
Un problème intéressant qui se pose est de savoir pour quels anneaux $\mathbf{R}$ exactement le $\mathbf{A}$-module $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est libre.

Le module des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur une variété algébrique lisse

Cas d'une hypersurface lisse

Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif, et $f(X_1,\dots,X_n)\in\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]=\mathbf{R}[\underline{X}]$. On considère la $\mathbf{R}$-algèbre

$$\mathbf{A}=\mathbf{R}[X_1,\dots,X_n]/\langle f\rangle=\mathbf{R}[x_1,\dots,x_n]=\mathbf{R}[\underline{x}].$$

On dira que *l'hypersurface S définie par $f=0$ est lisse* si, pour tout corps $\mathbf{K}$ «extension de $\mathbf{R}$» ([2]) et pour tout point $\underline{\xi}=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbf{K}^n$ vérifiant $f(\underline{\xi})=0$ on a une des coordonnées $(\partial f/\partial X_i)(\underline{\xi})$ qui est non nulle. Par le Nullstellensatz formel, cela équivaut à l'existence de F, B_1, …, B_n dans $\mathbf{R}[\underline{X}]$ vérifiant

$$Ff+B_1\frac{\partial f}{\partial X_1}+\cdots+B_n\frac{\partial f}{\partial X_n}=1.$$

Notons $b_i=B_i(\underline{x})$ l'image de B_i dans $\mathbf{A}$ et $\partial_i f=(\partial f/\partial X_i)(\underline{x})$. On a donc dans $\mathbf{A}$

$$b_1\,\partial_1 f+\cdots+b_n\,\partial_n f=1.$$

Le $\mathbf{A}$-module des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur S est

$$\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}=(\mathbf{A}\ \mathrm{d}x_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{A}\ \mathrm{d}x_n)/\langle\mathrm{d}f\rangle\simeq\mathbf{A}^n/\mathbf{A}v,$$

où v est le vecteur colonne ${}^{\mathrm{t}}[\,\partial_1 f\ \cdots\ \partial_n f\,]$. Ce vecteur est unimodulaire puisque $[\,b_1\ \cdots\ b_n\,]\cdot v=1$. Alors, la matrice

$$P=v\cdot[\,b_1\ \cdots\ b_n\,]=\begin{bmatrix} b_1\partial_1 f & \dots & b_n\partial_1 f\\ \vdots & & \vdots\\ b_1\partial_n f & \dots & b_n\partial_n f\end{bmatrix}$$

vérifie $P^2=P$, $P\cdot v=v$, $\mathrm{Im}(P)=\mathbf{A}v$ de sorte qu'en posant $Q=\mathrm{I}_n-P$ on obtient

$$\mathrm{Im}(Q)\simeq\mathbf{A}^n/\mathrm{Im}(P)\simeq\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}\ \text{ et }\ \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}\oplus\mathrm{Im}(P)\simeq\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}\oplus\mathbf{A}\simeq\mathbf{A}^n.$$

Ceci met en évidence que $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang $n-1$, stablement libre.

---

2. Dans ce chapitre introductif, quand nous utilisons l'expression incantatoire imagée *corps* $\mathbf{K}$ « *extension de* $\mathbf{R}$ », nous entendons simplement que $\mathbf{K}$ est un corps muni d'une structure de $\mathbf{R}$-algèbre. Cela revient à dire qu'un sous-anneau de $\mathbf{K}$ est isomorphe à un quotient (intègre) de $\mathbf{R}$, et que l'isomorphisme est donné. En conséquence les coefficients de f peuvent être « vus » dans $\mathbf{K}$ et le discours qui suit l'expression incantatoire a bien un sens algébrique précis. Dans le chapitre III nous définirons une extension d'anneaux comme un homomorphisme *injectif*. Cette définition est en conflit direct avec l'expression imagée utilisée ici si $\mathbf{R}$ n'est pas un corps. Ceci explique les guillemets utilisés dans le chapitre présent.

Cas d'une intersection complète lisse

Nous traitons le cas de deux équations qui définissent une intersection complète lisse. La généralisation avec un nombre quelconque d'équations est immédiate.

Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif, et $f(\underline{X})$, $g(\underline{X}) \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$. On considère la $\mathbf{R}$-algèbre

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f, g\rangle = \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{R}[\underline{x}].$$

La matrice jacobienne du système (f, g) est

$$J(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_1}(\underline{X}) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial X_n}(\underline{X}) \\ \frac{\partial g}{\partial X_1}(\underline{X}) & \cdots & \frac{\partial g}{\partial X_n}(\underline{X}) \end{bmatrix}.$$

On dira que *la variété algébrique S définie par $f = g = 0$ est lisse de codimension* 2 si, pour tout corps $\mathbf{K}$ «extension de $\mathbf{R}$» et pour tout point $(\underline{\xi}) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{K}^n$ vérifiant $f(\underline{\xi}) = g(\underline{\xi}) = 0$, on a l'un des mineurs 2×2 de la matrice jacobienne, $J_{k,\ell}(\underline{\xi})$, où

$$J_{k,\ell}(\underline{X}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X_k}(\underline{X}) & \frac{\partial f}{\partial X_\ell}(\underline{X}) \\ \frac{\partial g}{\partial X_k}(\underline{X}) & \frac{\partial g}{\partial X_\ell}(\underline{X}) \end{vmatrix},$$

qui est non nul.

Par le Nullstellensatz formel, cela équivaut à l'existence de polynômes F, G et $(B_{k,\ell})_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}$ dans $\mathbf{R}[\underline{X}]$ qui vérifient

$$Ff + Gg + \sum\nolimits_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} B_{k,\ell}(\underline{X}) J_{k,\ell}(\underline{X}) = 1.$$

Notons $b_{k,\ell} = B_{k,\ell}(\underline{x})$ l'image de $B_{k,\ell}$ dans $\mathbf{A}$ et $j_{k,\ell} = J_{k,\ell}(\underline{x})$. On a donc dans $\mathbf{A}$

$$\sum\nolimits_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} b_{k,\ell}\, j_{k,\ell} = 1.$$

Le $\mathbf{A}$-module des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur S est

$$\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} = (\mathbf{A}\ \mathrm{d}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}\ \mathrm{d}x_n)/\langle \mathrm{d}f, \mathrm{d}g\rangle \simeq \mathbf{A}^n/\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}J,$$

où ${}^{\mathrm{t}}J$ est la transposée de la matrice jacobienne (vue dans $\mathbf{A}$) :

$${}^{\mathrm{t}}J = {}^{\mathrm{t}}J(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \partial_1 f & \partial_1 g \\ \vdots & \vdots \\ \partial_n f & \partial_n g \end{bmatrix}.$$

La matrice jacobienne $J(\underline{x})$ définit une application linéaire surjective parce que $\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n} b_{k,\ell}\, j_{k,\ell} = 1$, et sa transposée définit une application linéaire

injective : plus précisément, si l'on pose

$$T_{k,l}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \partial_\ell g & 0 & \cdots & 0 & -\partial_k g & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -\partial_\ell f & 0 & \cdots & 0 & \partial_k f & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

et $T = \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} b_{k,\ell} T_{k,l}$, alors $T \cdot {}^{\mathrm{t}}J = \mathrm{I}_2 = J \cdot {}^{\mathrm{t}}T$ et la matrice $P = {}^{\mathrm{t}}J \cdot T$ vérifie

$$P^2 = P,\ P \cdot {}^{\mathrm{t}}J = {}^{\mathrm{t}}J,\ \mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im}\, {}^{\mathrm{t}}J \simeq \mathbf{A}^2,$$

de sorte qu'en posant $Q = \mathrm{I}_n - P$ on obtient

$$\mathrm{Im}\, Q \simeq \mathbf{A}^n / \mathrm{Im}\, P \simeq \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \ \text{ et } \ \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \oplus \mathrm{Im}\, P \simeq \Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} \oplus \mathbf{A}^2 \simeq \mathbf{A}^n.$$

Ceci met en évidence que $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang $n-2$, stablement libre.

Le cas général

Nous traitons le cas de m équations qui définissent une variété lisse de codimension r.

Soit $\mathbf{R}$ un anneau commutatif, et $f_i(\underline{X}) \in \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]$, $i = 1, \ldots, m$. On considère la $\mathbf{R}$-algèbre

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1, \ldots, f_m \rangle = \mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{R}[\underline{x}].$$

La matrice jacobienne du système $(f_1, \ldots, f_m)$ est

$$J(\underline{X}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1}(\underline{X}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n}(\underline{X}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial X_1}(\underline{X}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial X_n}(\underline{X}) \end{bmatrix}.$$

On dira que *la variété algébrique S définie par $f_1 = \cdots = f_m = 0$ est lisse de codimension r* si la matrice jacobienne vue dans $\mathbf{A}$ est «de rang r», c'est-à-dire :

tous les mineurs d'ordre $r+1$ sont nuls, et les mineurs d'ordre r sont comaximaux.

Ceci implique que pour tout corps $\mathbf{K}$ «extension de $\mathbf{R}$» et en tout point $(\underline{\xi}) \in \mathbf{K}^n$ de la variété des zéros des f_i dans $\mathbf{K}^n$, l'espace tangent est de codimension r. Si l'anneau $\mathbf{A}$ est réduit, cette condition «géométrique» est d'ailleurs suffisante (en mathématiques classiques).

Notons $J^{i_1,\ldots,i_r}_{k_1,\ldots,k_r}(\underline{X})$ le mineur $r \times r$ extrait sur les lignes $i_1, \ldots, i_r$ et sur les colonnes $k_1, \ldots, k_r$ de $J(\underline{X})$, et vu dans $\mathbf{A}$: $j^{i_1,\ldots,i_r}_{k_1,\ldots,k_r} = J^{i_1,\ldots,i_r}_{k_1,\ldots,k_r}(\underline{x})$.

La condition sur les mineurs $r \times r$ signifie l'existence d'éléments $b^{i_1,\ldots,i_r}_{k_1,\ldots,k_r}$ de $\mathbf{A}$ tels que

$$\sum_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_r \leqslant n, 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_r \leqslant m} b^{i_1,\ldots,i_r}_{k_1,\ldots,k_r}\, j^{i_1,\ldots,i_r}_{k_1,\ldots,k_r} = 1.$$

Le $\mathbf{A}$-module des formes différentielles à coefficients polynomiaux sur S est

$$\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}} = (\mathbf{A}\ \mathrm{d}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}\ \mathrm{d}x_n)/\langle \mathrm{d}f_1, \ldots, \mathrm{d}f_m\rangle \simeq \mathbf{A}^n/\operatorname{Im}{}^{\mathrm{t}}J,$$

où ${}^{\mathrm{t}}J = {}^{\mathrm{t}}J(\underline{x})$ est la transposée de la matrice jacobienne (vue dans $\mathbf{A}$).
Nous allons voir que $\operatorname{Im}{}^{\mathrm{t}}J$ est l'image d'une matrice de projection de rang $n-r$. Ceci mettra en évidence que $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{R}}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang $n-r$, (mais a priori il n'est pas stablement libre).
Pour cela il suffit de calculer une matrice H de $\mathbf{A}^{m\times n}$ telle que ${}^{\mathrm{t}}J\,H\,{}^{\mathrm{t}}J = {}^{\mathrm{t}}J$, car alors la matrice $P = {}^{\mathrm{t}}J\,H$ est la matrice de projection recherchée.
On est donc ramené à résoudre un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients de la matrice H. Or la solution d'un système linéaire est essentiellement une affaire locale, et si on localise en rendant un mineur d'ordre r inversible, la solution n'est pas trop difficile à trouver, en sachant que tous les mineurs d'ordre $r+1$ sont nuls.
Voici par exemple comment cela peut fonctionner.

Exercice 2. Dans cet exercice, on fait un recollement de la manière la plus naïve qui soit. Soit $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$ une matrice de rang r, on cherche à construire une matrice $B \in \mathbf{A}^{m\times n}$ telle que $ABA = A$. On notera que si l'on a une solution pour une matrice A on a ipso facto une solution pour toute matrice équivalente.

1. Traiter le cas où $A = \mathrm{I}_{r,n,m} = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$

2. Traiter le cas où $PAQ = \mathrm{I}_{r,n,m}$ avec P et Q inversibles.

3. Traiter le cas où A possède un mineur d'ordre r inversible.

4. Traiter le cas général.

Solution. *1.* On prend $B = {}^{\mathrm{t}}A$.
2. On prend $B = Q\,{}^{\mathrm{t}}(PAQ)P$.
3. On suppose sans perte de généralité que le mineur inversible est dans le coin nord-ouest. On pose $s = n-r$, $t = m-r$. On écrit $\delta_1 = \det R$,

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline R & -V \\ \hline -U & W \\ \hline \end{array},\ L = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline U\widetilde{R} & \delta_1\mathrm{I}_s \\ \hline \end{array},\ C = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{I}_r & \widetilde{R}V \\ \hline 0 & \delta_1\mathrm{I}_t \\ \hline \end{array}.$$

On obtient $LA = \begin{array}{|c|c|}\hline R & -V \\ \hline 0 & W' \\ \hline \end{array}$ avec $W' = -\delta_1 U\widetilde{R}V + W$, puis

$$LAC = \begin{array}{|c|c|}\hline R & 0 \\ \hline 0 & \delta_1 W' \\ \hline \end{array}.$$

Or les mineurs d'ordre $r+1$ de A, donc de LAC, sont nuls, donc $\delta_1^2 W' = 0$.

Avec $M = \begin{array}{|c|c|}\hline \widetilde{R} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$, on a $(LAC)M(LAC) = \begin{array}{|c|c|}\hline \delta_1 R & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} = \delta_1 LAC.$

Avec $B_1 = CML$ cela donne

$$LAB_1AC = (LAC)M(LAC) = \delta_1 LAC,$$

donc en multipliant à gauche par $\widetilde{L}$ et à droite par $\widetilde{C}$

$$\delta_1^{s+t} AB_1 A = \delta_1^{s+t+1} A.$$

D'où la solution $B = B_1/\delta_1$ puisqu'on a supposé δ_1 inversible.

4. La précalcul qui a été fait avec le mineur δ_1 n'a pas demandé qu'il soit inversible. Il peut être fait avec chacun des mineurs δ_ℓ d'ordre r de A. Cela donne autant d'égalités $\delta_\ell^{s+t} AB_\ell A = \delta_\ell^{s+t+1} A$.

Une combinaison linéaire $\sum_\ell a_\ell \delta_\ell = 1$, élevée à une puissance suffisante, donne une égalité $\sum_\ell b_\ell \delta_\ell^{s+t+1} = 1$, d'où $ABA = A$ pour $B = \sum_\ell b_\ell \delta_\ell^{s+t} B_\ell$.□

Remarques.

1) Nous reviendrons sur l'égalité $ABA = A$ en utilisant une formule magique à la Cramer, cf. le théorème II-5.14.

2) Dans le dernier exemple, nous nous sommes directement inspirés du «théorème du rang» qui affirme que si une application lisse $\varphi : U \to \mathbb{R}^k$ a un rang constant r en tous les points de $V = \{\, x \in U \mid \varphi(x) = 0 \,\}$, alors V est une sous-variété lisse de codimension r de l'ouvert $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Il s'avère qu'en fait l'analogue que nous avons développé ici ne fonctionne pas toujours correctement. Par exemple avec $\mathbf{R} = \mathbb{F}_2$, $f_1 = X^2 + Y$ et $f_2 = Y^2$, la variété V est réduite à un point, l'origine (même si l'on passe à la clôture algébrique de $\mathbb{F}_2$), en lequel la matrice jacobienne est de rang 1 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Mais V n'est pas une courbe, c'est un point multiple. Cela signifie que le théorème du rang pose quelques problèmes en caractéristique non nulle. Notre définition est donc abusive lorsque l'anneau $\mathbf{R}$ n'est pas une $\mathbb{Q}$-algèbre.

■

Chapitre II

Principe local-global de base et systèmes linéaires

Sommaire

Dans ce chapitre, comme dans tout l'ouvrage sauf mention expresse du contraire, les anneaux sont commutatifs et unitaires, et les homomorphismes entre anneaux respectent les 1. En particulier, un sous-anneau a le même 1 que l'anneau.

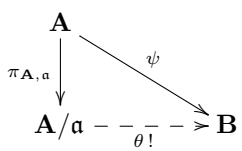
Introduction

La théorie de la résolution des systèmes linéaires est un thème omniprésent en algèbre commutative (sa forme la plus évoluée est l'algèbre homologique). Nous donnons dans ce chapitre un rappel de quelques résultats classiques sur ce sujet. Nous y reviendrons souvent.
Nous insistons particulièrement sur le principe local-global de base, sur la notion de module cohérent et sur les variations autour de la formule de Cramer.

1. Quelques faits concernant les quotients et les localisations

Commençons par un rappel sur les quotients. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$. En cas de besoin, on notera l'application canonique par $\pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$.
L'anneau quotient $(\mathbf{A}/\mathfrak{a}\,, \pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}})$ est caractérisé, *à isomorphisme unique près*, par la propriété universelle suivante.

1.1. Fait. (Propriété caractéristique du quotient par l'idéal $\mathfrak{a}$)
Un homomorphisme d'anneaux $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se factorise par $\pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}}$ si, et seulement si, $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}\psi$, c'est-à-dire encore si $\psi(\mathfrak{a}) \subseteq \{0_{\mathbf{B}}\}$. Dans ce cas, la factorisation est unique.



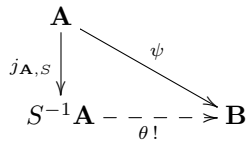
homomorphismes nuls sur $\mathfrak{a}$.

Explication concernant la figure. *Dans une figure du type ci-dessus, tout est donné, sauf le morphisme θ correspondant à la flèche en traits tiretés. Le point d'exclamation signifie que θ fait commuter le diagramme et qu'il est* l'unique *morphisme possédant cette propriété.*

On note $M/\mathfrak{a}M$ le $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module quotient du $\mathbf{A}$-module M par le sous-module engendré par les ax pour $a \in \mathfrak{a}$ et $x \in M$. Ce module peut aussi être défini par extension des scalaires à $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ du $\mathbf{A}$-module M (voir page 209, et l'exercice IV-5).

Passons aux localisations, qui sont très analogues aux quotients (nous reviendrons plus en détail sur cette analogie, en page 658). Dans cet ouvrage, lorsque l'on parle d'un *monoïde* contenu dans un anneau, on entend toujours une partie contenant 1 et stable pour la multiplication.
Pour un anneau $\mathbf{A}$ nous noterons $\mathbf{A}^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles, encore appelé *groupe des unités*.
Si S est un monoïde, on note $\mathbf{A}_S$ ou $S^{-1}\mathbf{A}$ le localisé de $\mathbf{A}$ en S. Tout élément de $\mathbf{A}_S$ s'écrit x/s avec $x \in \mathbf{A}$ et $s \in S$.
Par définition on a $x_1/s_1 = x_2/s_2$ s'il existe $s \in S$ tel que $ss_2x_1 = ss_1x_2$. En cas de besoin, on notera $j_{\mathbf{A},S} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_S$ l'application canonique $x \mapsto x/1$.
Le localisé $(\mathbf{A}_S, j_{\mathbf{A},S})$ est caractérisé, *à isomorphisme unique près*, par la propriété universelle suivante.

1.2. Fait. (Propriété caractéristique de la localisation en S)
Un homomorphisme d'anneaux $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ se factorise par $j_{\mathbf{A},S}$ si, et seulement si, $\psi(S) \subseteq \mathbf{B}^\times$, et dans ce cas la factorisation est unique.



homomorphismes qui envoient S dans $\mathbf{B}^\times$.

De même, on note $M_S = S^{-1}M$ le $\mathbf{A}_S$-module localisé du $\mathbf{A}$-module M en S. Tout élément de M_S s'écrit x/s avec $x \in M$ et $s \in S$. Par définition, on a $x_1/s_1 = x_2/s_2$ s'il existe $s \in S$ tel que $ss_2x_1 = ss_1x_2$. Ce module M_S peut aussi être défini par extension des scalaires à $\mathbf{A}_S$ du $\mathbf{A}$-module M (voir page 209, et l'exercice IV-5).
Un monoïde S dans un anneau $\mathbf{A}$ est dit *saturé* lorsque l'implication

$$\forall s, t \in \mathbf{A} \ \ (st \in S \ \Rightarrow \ s \in S)$$

est satisfaite. Un monoïde saturé est également appelé un *filtre*. Nous appellerons *filtre principal* un filtre engendré par un élément : il est constitué de l'ensemble des diviseurs d'une puissance de cet élément.
On note S^{sat} le saturé du monoïde S ; il est obtenu en rajoutant tous les éléments qui divisent un élément de S. Si l'on sature un monoïde S, on ne change pas la localisation [1]. Deux monoïdes S_1 et S_2 sont dits *équivalents*

1. En fait, selon la construction précise que l'on choisit pour définir une localisation, on aura ou bien égalité, ou bien isomorphisme canonique, entre les deux localisés.

s'ils ont le même saturé. Dans ce cas, on écrit $\mathbf{A}_{S_1} = \mathbf{A}_{S_2}$.

Nous gardons la possibilité de localiser en un monoïde qui contient 0. Le résultat est alors l'anneau *trivial* (rappelons qu'un anneau est trivial s'il est réduit à un seul élément, c'est-à-dire encore si $1 = 0$).

Si S est engendré par $s \in \mathbf{A}$, c'est-à-dire si $S = s^{\mathbb{N}} \stackrel{\text{def}}{=} \{ s^k \mid k \in \mathbb{N} \}$, on note $\mathbf{A}_s$ ou $\mathbf{A}[1/s]$ le localisé $S^{-1}\mathbf{A}$, qui est isomorphe à $\mathbf{A}[T]/\langle sT - 1\rangle$.

Dans un anneau le *transporteur* d'un idéal $\mathfrak{a}$ dans un idéal $\mathfrak{b}$ est l'idéal
$$(\mathfrak{b} : \mathfrak{a})_{\mathbf{A}} = \{ a \in \mathbf{A} \mid a\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \}.$$
Plus généralement, si N et P sont deux sous-modules d'un $\mathbf{A}$-module M, on définit le *transporteur* de N dans P comme l'idéal
$$(P : N)_{\mathbf{A}} = \{ a \in \mathbf{A} \mid aN \subseteq P \}.$$
Rappelons aussi que *l'annulateur* d'un élément x d'un $\mathbf{A}$-module M est l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x) = (\langle 0_{\mathbf{A}}\rangle : \langle x\rangle) = \{ a \in \mathbf{A} \mid ax = 0 \}$.
L'*annulateur du module* M est l'idéal $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(M) = (\langle 0_M\rangle : M)_{\mathbf{A}}$. Un module ou un idéal est *fidèle* si son annulateur est réduit à 0.
Les notations suivantes sont également utiles pour un sous-module N de M.
$$(N : \mathfrak{a})_M = \{ x \in M \mid x\,\mathfrak{a} \subseteq N \}.$$
$$(N : \mathfrak{a}^\infty)_M = \{ x \in M \mid \exists n,\, x\,\mathfrak{a}^n \subseteq N \}.$$
Ce dernier module s'appelle le *saturé* de N par $\mathfrak{a}$.

Nous disons qu'un élément x d'un $\mathbf{A}$-module M est *régulier* (si $M = \mathbf{A}$ on dit aussi que x est *non diviseur de zéro*, en un seul mot) si la suite
$$0 \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{.x} M$$
est exacte, autrement dit si $\mathrm{Ann}(x) = 0$. Si $0_{\mathbf{A}}$ est non diviseur de zéro dans $\mathbf{A}$, l'anneau est trivial.

En général pour alléger les notations précédentes concernant les transporteurs on omet l'indice $\mathbf{A}$ ou M lorsqu'il est clair d'après le contexte.
L'*anneau total des fractions* de $\mathbf{A}$, que nous notons $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$, est l'anneau localisé $\mathbf{A}_S$, où S est le monoïde des éléments réguliers de $\mathbf{A}$, que nous notons $\mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$.

1.3. Fait.

1. *Le noyau de l'homomorphisme naturel* $j_{\mathbf{A},s} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_s = \mathbf{A}[1/s]$ *est l'idéal* $(0 : s^\infty)_{\mathbf{A}}$. *Il est réduit à* 0 *si, et seulement si,* s *est régulier.*
2. *De même le noyau de l'homomorphisme naturel de* M *dans* $M_s = M[1/s]$ *est le sous-*$\mathbf{A}$*-module* $(0 : s^\infty)_M$.
3. *L'homomorphisme naturel* $\mathbf{A} \to \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ *est injectif.*

1.4. Fait. *Si* $S \subseteq S'$ *sont deux monoïdes de* $\mathbf{A}$ *et* M *un* $\mathbf{A}$*-module, on a des identifications canoniques* $(\mathbf{A}_S)_{S'} \simeq \mathbf{A}_{S'}$ *et* $(M_S)_{S'} \simeq M_{S'}$.

2. Principe local-global de base

Nous étudierons le fonctionnement général du principe local-global en algèbre commutative dans le chapitre XV. Nous le rencontrerons cependant à tous les détours de notre chemin sous des formes particulières, adaptées à chaque situation. Une instance essentielle de ce principe est donnée dans cette section parce qu'elle est tellement simple qu'il serait bête de se priver plus longtemps de ce petit plaisir et de cette machinerie si efficace.
Le principe local-global affirme que certaines propriétés sont vraies si, et seulement si, elles sont vraies après des localisations « en quantité suffisante ». En mathématiques classiques on invoque souvent la localisation en tous les idéaux maximaux. C'est beaucoup, et un peu mystérieux, surtout d'un point de vue algorithmique. Nous utiliserons des versions plus simples, et moins effrayantes, dans lesquelles seulement un nombre fini de localisations sont mises en œuvre.

Localisations comaximales et principe local-global

La définition qui suit correspond à l'idée intuitive que certains systèmes de localisés d'un anneau $\mathbf{A}$ sont « en quantité suffisante » pour récupérer à travers eux toute l'information contenue dans $\mathbf{A}$.

2.1. Définition.

1. Des éléments $s_1, \ldots, s_n$ sont dits *comaximaux* si $\langle 1\rangle = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$. Deux éléments comaximaux sont aussi appelés *étrangers*.
2. Des monoïdes $S_1, \ldots, S_n$ sont dits *comaximaux* si chaque fois que $s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n$, les s_i sont comaximaux.

Deux exemples fondamentaux.
1) Si $s_1, \ldots, s_n$ sont comaximaux, les monoïdes qu'ils engendrent sont comaximaux. En effet considérons des $s_i^{m_i}$ $(m_i \geqslant 1)$ dans les monoïdes $s_i^{\mathbb{N}}$, en élevant l'égalité $\sum_{i=1}^n a_i s_i = 1$ à la puissance $1-n+\sum_{i=1}^n m_i$, on obtient, en regroupant convenablement les termes de la somme obtenue, l'égalité souhaitée $\sum_{i=1}^n b_i s_i^{m_i} = 1$.
2) Si $a = a_1 \cdots a_n \in \mathbf{A}$, alors les monoïdes $a^{\mathbb{N}}$, $1 + a_1\mathbf{A}$, …, $1 + a_n\mathbf{A}$ sont comaximaux. Prenons en effet un élément $b_i = 1 - a_i x_i$ dans chaque monoïde $1 + a_i\mathbf{A}$ et un élément a^m dans le monoïde $a^{\mathbb{N}}$. On doit montrer que l'idéal $\mathfrak{m} = \langle a^m, b_1, \ldots, b_n\rangle$ contient 1. Or, modulo $\mathfrak{m}$ on a $1 = a_i x_i$, donc $1 = a\prod_i x_i = ax$, et enfin $1 = 1^m = a^m x^m = 0$. ∎

Voici une caractérisation en mathématiques classiques.

2.2. Fait*. Soient des monoïdes $S_1, \ldots, S_n$ dans un anneau non trivial $\mathbf{A}$ (i.e., $1 \neq_{\mathbf{A}} 0$). Les monoïdes S_i sont comaximaux si, et seulement si, pour tout idéal premier (resp. pour tout idéal maximal) $\mathfrak{p}$ l'un des S_i est contenu dans $\mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$.

$\mathbb{D}$ Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Si aucun des S_i n'est contenu dans $\mathbf{A}\setminus\mathfrak{p}$, il existe, pour chaque i, un $s_i \in S_i \cap \mathfrak{p}$; alors $s_1, \ldots, s_n$ ne sont pas comaximaux. Inversement, supposons que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ l'un des S_i est contenu dans $\mathbf{A}\setminus\mathfrak{m}$ et soient $s_1 \in S_1$, …, $s_n \in S_n$ alors l'idéal $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle$ n'est contenu dans aucun idéal maximal, donc il contient 1. □

Nous notons $\mathbf{A}^{m\times p}$ ou $\mathbb{M}_{m,p}(\mathbf{A})$ le $\mathbf{A}$-module des matrices à m lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbf{A}$, et $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ désigne $\mathbb{M}_{n,n}(\mathbf{A})$. Le groupe formé par les matrices inversibles est noté $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$, le sous-groupe des matrices de déterminant 1 est noté $\mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$. Le sous-ensemble de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ formé par les matrices de projection (c'est-à-dire les matrices F telles que $F^2 = F$) est noté $\mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$. L'explication des acronymes est la suivante : $\mathbb{GL}$ pour groupe linéaire, $\mathbb{SL}$ pour groupe linéaire spécial et $\mathbb{GA}$ pour grassmannienne affine.

2.3. Principe local-global concret. (Principe local-global de base, recollement concret de solutions d'un système linéaire)
Soient S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, B une matrice de $\mathbf{A}^{m\times p}$ et C un vecteur colonne de $\mathbf{A}^m$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Le système linéaire $BX = C$ admet une solution dans $\mathbf{A}^p$.*
2. *Pour $i \in [\![1..n]\!]$ le système linéaire $BX = C$ admet une solution dans $\mathbf{A}^p_{S_i}$.*

Ce principe vaut également pour les systèmes linéaires à coefficients dans un $\mathbf{A}$-module M.

$\mathbb{D}$ *1 ⇒ 2.* Clair.
2 ⇒ 1. Pour chaque i, on a $Y_i \in \mathbf{A}^p$ et $s_i \in S_i$ tels que $B(Y_i/s_i) = C$ dans $\mathbf{A}^m_{S_i}$. Ceci signifie que l'on a un $t_i \in S_i$ tel que $t_i\, BY_i = s_i t_i\, C$ dans $\mathbf{A}^m$. En utilisant $\sum_i a_i s_i t_i = 1$, on a une solution dans $\mathbf{A}$: $X = \sum_i a_i t_i Y_i$. □

Remarque. Quant au fond, ce principe local-global concret se ramène à la remarque suivante dans le cas d'un anneau intègre (un anneau est dit *intègre* si tout élément est nul ou régulier [2]). Si les s_i sont réguliers et si

$$\frac{x_1}{s_1} = \frac{x_2}{s_2} = \cdots = \frac{x_n}{s_n},$$

la valeur commune de cette fraction, lorsque $\sum_i s_i u_i = 1$, est aussi égale à

$$\frac{x_1u_1 + \cdots + x_nu_n}{s_1u_1 + \cdots + s_nu_n} = x_1u_1 + \cdots + x_nu_n.$$

Ce principe pourrait donc s'appeler aussi «l'art de chasser astucieusement les dénominateurs». La chose la plus remarquable est sans doute que cela

2. La notion est discutée plus en détail page 215.

fonctionne en toute généralité, même si l'anneau n'est pas intègre. Merci donc à Claude Chevalley d'avoir introduit les localisations arbitraires. Dans certains ouvrages savants, on trouve la même chose formulée ainsi (au prix d'une perte d'information sur le caractère très concret du résultat) : le $\mathbf{A}$-module $\bigoplus_{\mathfrak{m}} \mathbf{A}_{1+\mathfrak{m}}$ (où $\mathfrak{m}$ parcourt tous les idéaux maximaux de $\mathbf{A}$) est fidèlement plat. ∎

2.4. Corollaire. *Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, $x \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ deux idéaux de type fini de $\mathbf{A}$. Alors, on a les équivalences suivantes.*

1. *$x = 0$ dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, pour $i \in [\![1..n]\!]$, $x = 0$ dans $\mathbf{A}_{S_i}$.*
2. *x est régulier dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, pour $i \in [\![1..n]\!]$, x est régulier dans $\mathbf{A}_{S_i}$.*
3. *$\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$ dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, pour $i \in [\![1..n]\!]$, $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$ dans $\mathbf{A}_{S_i}$.*
4. *$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, pour $i \in [\![1..n]\!]$, $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ dans $\mathbf{A}_{S_i}$.*

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

Remarque. En fait, comme nous le verrons dans le principe local-global 6.7, les idéaux n'ont pas besoin d'être de type fini. ∎

Exemples

Donnons des exemples simples d'application du principe local-global concret de base. Un cas d'application typique du premier exemple (fait 2.5) est celui où le module M dans l'énoncé est un idéal non nul d'un anneau de Dedekind. Un module M est dit *localement monogène* si, après chaque localisation en des monoïdes comaximaux $S_1, \ldots, S_n$, il est engendré par un seul élément.

2.5. Fait. *Soit $M = \langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ un module avec deux systèmes générateurs. On suppose que ce module est fidèle et localement monogène. Alors, il existe une matrice $A \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ telle que $[\, a \; b \,]\, A = [\, c \; d \,]$.*

▷ Si $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}$, la matrice cotransposée doit être égale à

$$B = \operatorname{Adj} A = \begin{bmatrix} t & -y \\ -z & x \end{bmatrix}.$$

En particulier, on cherche à résoudre le système linéaire suivant :

$$[\, a \; b \,]\, A = [\, c \; d \,], \quad [\, c \; d \,]\, B = [\, a \; b \,] \tag{$*$}$$

dont les inconnues sont x, y, z, t. Notons que $A\,B = \det(A)\, \mathrm{I}_2$.
Inversement si ce système linéaire est résolu, on aura $[\, a \; b \,] = [\, a \; b \,]\, A\, B$, donc $\big(1 - \det(A)\big)[\, a \; b \,] = 0$, et puisque le module est fidèle, $\det(A) = 1$.
On a des monoïdes comaximaux S_i tels que M_{S_i} est engendré par $g_i/1$ pour un $g_i \in M$. Pour résoudre le système linéaire il suffit de le résoudre après localisation en chacun des S_i.
Dans l'anneau $\mathbf{A}_{S_i}$, on a les égalités $a = \alpha_i g_i$, $b = \beta_i g_i$, $g_i = \mu_i a + \nu_i b$,

donc $\big(1-(\alpha_i\mu_i+\beta_i\nu_i)\big)\,g_i=0$.
Le module $M_{S_i}=\langle g_i\rangle$ reste fidèle, donc $1=\alpha_i\mu_i+\beta_i\nu_i$ dans $\mathbf{A}_{S_i}$. Ainsi :

$$[\,a\;b\,]\,E_i=[\,g_i\;0\,]\;\text{ avec }\;E_i=\begin{bmatrix}\mu_i & -\beta_i\\ \nu_i & \alpha_i\end{bmatrix}\text{ et }\det(E_i)=1.$$

De même on obtiendra $[\,c\;d\,]\,C_i=[\,g_i\;0\,]$ avec une matrice C_i de déterminant 1 dans $\mathbf{A}_{S_i}$. En prenant $A_i=E_i\ \mathrm{Adj}(C_i)$ on obtient $[\,a\;b\,]\,A_i=[\,c\;d\,]$ et $\det(A_i)=1$ dans $\mathbf{A}_{S_i}$. Ainsi le système linéaire $(*)$ admet une solution dans $\mathbf{A}_{S_i}$. □

Notre deuxième exemple est donné par le lemme de Gauss-Joyal : le point *1* dans le lemme suivant est prouvé en application du principe local-global de base. Nous devons d'abord rappeler quelques définitions.
Un élément a d'un anneau est dit *nilpotent* si $a^n=0$ pour un entier $n\in\mathbb{N}$. Les éléments nilpotents dans un anneau $\mathbf{A}$ forment un idéal appelé *nilradical*, ou encore *radical nilpotent* de l'anneau. Un anneau est *réduit* si son nilradical est égal à 0. Plus généralement le nilradical d'un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ est l'idéal formé par les $x\in\mathbf{A}$ dont une puissance est dans $\mathfrak{a}$. Nous le noterons $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ou $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$. Nous notons aussi $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x)$ pour $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\langle x\rangle)$. Un idéal $\mathfrak{a}$ est appelé *un idéal radical* lorsqu'il est égal à son nilradical. L'anneau $\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)=\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ est *l'anneau réduit associé à* $\mathbf{A}$.
Pour un polynôme f de $\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]=\mathbf{A}[\underline{X}]$, on appelle *contenu* de f et l'on note $\mathrm{c}_{\mathbf{A},\underline{X}}(f)$ ou $\mathrm{c}(f)$ l'idéal engendré par les coefficients de f. Le polynôme f est dit *primitif* (en $\underline{X}$) lorsque $\mathrm{c}_{\mathbf{A},\underline{X}}(f)=\langle 1\rangle$.
Lorsqu'un polynôme f de $\mathbf{A}[X]$ est donné sous la forme $f(X)=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k$, on dit que n est le *degré formel* de f, et a_n est son *coefficient formellement dominant*. Enfin, si f est donné comme nul, son degré formel est -1.

2.6. Lemme.

1. (Gauss-Joyal du pauvre) *Le produit de deux polynômes primitifs est un polynôme primitif.*
2. (Gauss-Joyal) *Pour $f,\ g\in\mathbf{A}[\underline{X}]$, il existe un entier $p\in\mathbb{N}$ tel que $\big(\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)\big)^p\subseteq\mathrm{c}(fg)$.*
3. (Éléments nilpotents dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$) *Un élément f de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est nilpotent si, et seulement si, tous ses coefficients sont nilpotents. Autrement dit, on a l'égalité $(\mathbf{A}[\underline{X}])_{\mathrm{red}}=\mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}]$.*
4. (Éléments inversibles dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$) *Un élément f de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est inversible si, et seulement si, $f(\underline{0})$ est inversible et $f-f(\underline{0})$ est nilpotent. Autrement dit, $\mathbf{A}[\underline{X}]^\times=\mathbf{A}^\times+\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)[\underline{X}]$ et en particulier $(\mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}])^\times=(\mathbf{A}_{\mathrm{red}})^\times$.*

D Notez que l'on a a priori l'inclusion $\mathrm{c}(fg)\subseteq\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)$.
1. Pour des polynômes $f,\ g\in\mathbf{A}[X]$ en une variable. On a $\mathrm{c}(f)=\mathrm{c}(g)=\langle 1\rangle$. On considère l'anneau quotient $\mathbf{B}=\mathbf{A}\big/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(fg)\big)$. On doit démontrer que

cet anneau est trivial. Il suffit de le faire après localisation en des éléments comaximaux, par exemple les coefficients de f. Autrement dit, on peut supposer qu'un coefficient de f est inversible. Faisons la preuve sur un exemple suffisamment général, en supposant que

$$f(X) = a + bX + X^2 + cX^3 + \dots \text{ et } g(X) = g_0 + g_1X + g_2X^2 + \dots$$

Dans l'anneau $\mathbf{B}$ on a $ag_0 = 0$, $ag_1+bg_0 = 0$, $ag_2+bg_1+g_0 = 0$, donc $bg_0^2 = 0$, puis $g_0^3 = 0$, donc $g_0 = 0$. On a alors $g = Xh$ et $c(fg) = c(fh)$, et puisque le degré formel de h est plus petit que celui de g, on peut conclure par récurrence sur le degré formel que $g = 0$. Comme $\mathrm{c}(g) = \langle 1\rangle$, l'anneau est trivial.

2. Pour des polynômes en une variable. On considère un coefficient a de f et un coefficient b de g. Montrons que ab est nilpotent dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathrm{c}(fg)$. Ceci revient à démontrer que $\mathbf{C} = \mathbf{B}[1/(ab)]$ est trivial. Or dans $\mathbf{C}$, f et g sont primitifs, donc le point *1* implique que $\mathbf{C}$ est trivial.

2 et *1. Cas général.* Le point *2* se démontre par récurrence sur le nombre de variables à partir du cas univarié. En effet, pour $f \in \mathbf{A}[X][Y]$ on a l'égalité

$$\mathrm{c}_{\mathbf{A},X,Y}(f) = \left\langle \mathrm{c}_{\mathbf{A},X}(h) \mid h \in \mathrm{c}_{\mathbf{A}[X],Y}(f)\right\rangle .$$

Ensuite on en déduit le point *1.*

3. On note que $f^2 = 0$ implique $\mathrm{c}(f)^p = 0$ pour un certain p d'après le point *2.*

4. La condition est suffisante : dans un anneau si x est nilpotent, $1 - x$ est inversible parce que $(1 - x)(1 + x + \dots + x^n) = 1 - x^{n+1}$, donc si u est inversible et x nilpotent, $u + x$ est inversible. Pour voir que la condition est nécessaire il suffit de traiter le cas en une variable (on conclut par récurrence sur le nombre de variables). Écrivons $fg = 1$ avec $f = f(0) + XF(X)$ et $g = g(0) + XG(X)$. On a $f(0)g(0) = 1$. Soit n le degré formel de F et m celui de G. On doit montrer que F et G sont nilpotents.

Si $n = -1$ ou $m = -1$, le résultat est clair. On raisonne par récurrence sur $n + m$ en supposant $n, m \geqslant 0$, F_n et G_m étant les coefficients formellement dominants. Par hypothèse de récurrence le résultat est obtenu pour les anneaux $(\mathbf{A}/\langle F_n\rangle)[X]$ et $(\mathbf{A}/\langle G_m\rangle)[X]$. Puisque $F_nG_m = 0$, on peut conclure par le lemme qui suit.

NB : on donne des précisions dans l'exercice VII-8. □

2.7. Lemme. *Soient a, b, $c \in \mathbf{A}$. Si c est nilpotent modulo a et modulo b, et si $ab = 0$, alors c est nilpotent.*

▷ On a $c^n = xa$ et $c^m = yb$ donc $c^{n+m} = xyab = 0$. □

Remarque. On peut formuler ce lemme de manière plus structurelle en considérant pour deux idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ le morphisme canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a} \times \mathbf{A}/\mathfrak{b}$ de noyau $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Si un élément de $\mathbf{A}$ est nilpotent modulo $\mathfrak{a}$ et modulo $\mathfrak{b}$, il l'est modulo $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$, donc aussi modulo $\mathfrak{ab}$, car $(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})^2 \subseteq \mathfrak{ab}$. On touche ici au « principe de recouvrement fermé », voir page 664. ■

Propriétés de caractère fini

Le principe local-global concret de base peut être reformulé comme un « principe de transfert ».

2.8. Principe de transfert de base.
Pour un système linéaire dans un anneau $\mathbf{A}$ *les éléments* s *tels que le système linéaire ait une solution dans* $\mathbf{A}[1/s]$ *forment un idéal de* $\mathbf{A}$.

Nous proposons tout d'abord à la lectrice de faire la démonstration que ce principe de transfert est équivalent au principe local-global concret de base. Nous faisons maintenant une analyse détaillée de ce qui se passe. L'équivalence repose en fait sur la notion suivante.

2.9. Définition. Une propriété P concernant les anneaux commutatifs et les modules est dite *de caractère fini* si elle est conservée par localisation (par passage de $\mathbf{A}$ à $S^{-1}\mathbf{A}$) et si, lorsqu'elle est vérifiée avec $S^{-1}\mathbf{A}$, alors elle est vérifiée avec $\mathbf{A}[1/s]$ pour un certain $s \in S$.

2.10. Fait. *Soit* P *une propriété de caractère fini. Alors, le principe local-global concret pour* P *est équivalent au principe de transfert pour* P. *Autrement dit les principes suivants sont équivalents.*

1. *Si la propriété* P *est vraie après localisation en une famille de monoïdes comaximaux, alors elle est vraie.*
2. *L'ensemble des éléments* s *de l'anneau pour lesquels la propriété* P *est vraie après localisation en* s *forme un idéal.*

▷ Soit $\mathbf{A}$ un anneau qui fournit le contexte pour la propriété P. Considérons alors l'ensemble $I = \{\, s \in \mathbf{A} \mid \mathsf{P} \text{ est vraie pour } \mathbf{A}_s \,\}$.
1. $\Rightarrow$ *2.* Supposons *1.* Soient $s, t \in I$, $a, b \in \mathbf{A}$ et $u = as + bt$. Les éléments s et t sont comaximaux dans $\mathbf{A}_u$. Puisque P est stable par localisation, P est vraie pour $(\mathbf{A}_u)_s = (\mathbf{A}_s)_u$ et $(\mathbf{A}_u)_t = (\mathbf{A}_t)_u$. En appliquant *1*, P est vraie pour $\mathbf{A}_u$, i.e., $u = as + bt \in I$.
2. $\Rightarrow$ *1.* Supposons *2* et soit (S_i) la famille de monoïdes comaximaux considérée. Puisque la propriété est de caractère fini, on trouve dans chaque S_i un élément s_i tel que P soit vraie après localisation en s_i. Puisque les S_i sont comaximaux les s_i sont des éléments comaximaux. En appliquant *2*, on obtient $I = \langle 1 \rangle$. Et la localisation en 1 donne la réponse. □

La plupart des principes local-globals concrets que nous considérerons dans cet ouvrage s'appliquent pour des propriétés de caractère fini. Si le lecteur le préfère, il a tout le loisir de remplacer alors le principe local-global concret par le principe de transfert correspondant.

En mathématiques classiques on a pour les propriétés de caractère fini l'équivalence de deux notions, l'une concrète et l'autre abstraite, comme expliqué dans le fait suivant. On utilisera la version concrète dans les chapitres XV et XVII.

2.11. Fait*. *Soit* P *une propriété de caractère fini. Alors, en mathématiques classiques les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe des monoïdes comaximaux tels que la propriété* P *soit vraie après localisation en chacun des monoïdes.*
2. *La propriété* P *est vraie après localisation en tout idéal maximal.*

1. $\Rightarrow$ *2.* Soit (S_i) la famille de monoïdes comaximaux considérée. Puisque la propriété est de caractère fini, on trouve dans chaque S_i un élément s_i tel que P soit vraie après localisation en s_i. Puisque les S_i sont comaximaux les s_i sont des éléments comaximaux. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal. L'un des s_i n'est pas dans $\mathfrak{m}$. La localisation en $1+\mathfrak{m}$ est une localisation de la localisation en s_i. Donc P est vraie après localisation en $1+\mathfrak{m}$.
2. $\Rightarrow$ *1.* Pour chaque idéal maximal $\mathfrak{m}$ sélectionnons un $s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ tel que la propriété P soit vraie après localisation en $s_{\mathfrak{m}}$. L'ensemble des $s_{\mathfrak{m}}$ engendre un idéal qui n'est contenu dans aucun idéal maximal, donc c'est l'idéal $\langle 1\rangle$. Une famille finie de certains de ces $s_{\mathfrak{m}}$ est donc un système d'éléments comaximaux. La famille des monoïdes engendrés par ces éléments convient.□

On a le corollaire immédiat suivant.

2.12. Fait*. *Soit* P *une propriété de caractère fini. Alors, le principe local-global concret pour* P *est équivalent (en mathématiques classiques) au principe local-global abstrait pour* P*. Autrement dit les principes suivants sont équivalents.*

1. *Si la propriété* P *est vraie après localisation en une famille de monoïdes comaximaux, alors elle est vraie.*
2. *Si la propriété* P *est vraie après localisation en tout idéal maximal, alors elle est vraie.*

Remarque. Donnons une démonstration directe de l'équivalence en mathématiques classiques du principe de transfert et du principe local-global abstrait pour la propriété P (supposée de caractère fini).
Transfert $\Rightarrow$ *Abstrait.* Supposons la propriété vraie après localisation en tout idéal maximal. L'idéal donné par le principe de transfert ne peut pas être strict [3] car sinon il serait contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$, ce qui est en contradiction avec le fait que la propriété est vraie après localisation en un $s \notin \mathfrak{m}$.
Abstrait $\Rightarrow$ *Transfert.* Pour chaque idéal maximal $\mathfrak{m}$ sélectionnons un $s_{\mathfrak{m}} \notin \mathfrak{m}$ tel que la propriété P soit vraie après localisation en $s_{\mathfrak{m}}$. L'ensemble des $s_{\mathfrak{m}}$ engendre un idéal qui n'est contenu dans aucun idéal maximal, donc c'est

3. Rappelons qu'un idéal est dit *strict* lorsqu'il ne contient pas 1. Nous ferons usage de cette notion essentiellement dans nos commentaires au sujet des mathématiques classiques.

l'idéal $\langle 1\rangle$. On peut conclure par le principe de transfert : la propriété est vraie après localisation en 1 ! ∎

Commentaire. L'avantage de la localisation en un idéal premier est que le localisé est un anneau local, lequel a de très bonnes propriétés (voir le chapitre IX). Le désavantage est que les preuves qui utilisent un principe local-global abstrait en lieu et place du principe local-global concret correspondant sont non constructives dans la mesure où le seul accès que l'on a (dans une situation générale) aux idéaux premiers est donné par le lemme de Zorn. En outre même le fait 2.2 est obtenu au moyen d'un raisonnement par l'absurde qui enlève tout caractère algorithmique à la « construction » correspondante.
Certains principes local-globals concrets n'ont pas de correspondant abstrait, parce que la propriété concernée n'est pas de caractère fini. Ce sera le cas des principes local-globals concrets 3.6 pour les modules de type fini et 3.5 pour les anneaux cohérents.
Nous ferons un usage systématique efficace et constructif du principe local-global concret de base et de ses conséquences. Souvent, nous nous inspirerons d'une démonstration d'un principe local-global abstrait en mathématiques classiques. Dans le chapitre XV nous mettrons au point une machinerie locale-globale générale pour exploiter à fond de manière constructive les preuves classiques de type local-global. ∎

Version abstraite du principe local-global de base
Vu que la propriété considérée est de caractère fini, on obtient en mathématiques classiques la version abstraite suivante pour le principe local-global de base.

2.13. Principe local-global abstrait*. (Principe local-global abstrait de base : recollement abstrait de solutions d'un système linéaire)
Soient B une matrice $\in \mathbf{A}^{m\times p}$ et C un vecteur colonne de $\mathbf{A}^m$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Le système linéaire $BX = C$ admet une solution dans $\mathbf{A}^p$.*
2. *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ le système linéaire $BX = C$ admet une solution dans $(\mathbf{A}_{1+\mathfrak{m}})^p$.*

Rendre des éléments comaximaux par force

La localisation en un élément $s \in \mathbf{A}$ est une opération fondamentale en algèbre commutative pour rendre s inversible par force.
Il arrive que l'on ait besoin de rendre comaximaux des éléments $a_1, \ldots, a_n$ d'un anneau $\mathbf{A}$. À cet effet on introduit l'anneau

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]/\langle 1 - \textstyle\sum_i a_i X_i\rangle = \mathbf{A}[x_1, \ldots, x_n].$$

2.14. Lemme. *Le noyau de l'homomorphisme naturel* $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est l'idéal* $(0 : \mathfrak{a}^\infty)$*, où* $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$*. En particulier, l'homomorphisme est injectif si, et seulement si,* $\operatorname{Ann} \mathfrak{a} = 0$*.*

$\mathbb{D}$ Soit c un élément du noyau, vu l'isomorphisme $\mathbf{B}/\langle (x_j)_{j \neq i} \rangle \simeq \mathbf{A}[1/a_i]$, on a $c =_{\mathbf{A}[1/a_i]} 0$, donc $c \in (0 : a_i^\infty)$. On en déduit $c \in (0 : \mathfrak{a}^\infty)$. Inversement si $c \in (0 : \mathfrak{a}^\infty)$, il existe un r tel que $ca_i^r = 0$ pour chaque i, et donc $\psi(c) = \psi(c)(\sum a_i x_i)^{nr} = 0$. □

3. Anneaux et modules cohérents

Une notion fondamentale

Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *cohérent* si toute équation linéaire

$$LX = 0 \text{ avec } L \in \mathbf{A}^{1\times n} \text{ et } X \in \mathbf{A}^{n\times 1}$$

admet pour solutions les éléments d'un sous-$\mathbf{A}$-module de type fini de $\mathbf{A}^{n\times 1}$. Autrement dit :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall L \in \mathbf{A}^{1\times n},\ \exists m \in \mathbb{N},\ \exists G \in \mathbf{A}^{n\times m},\ \forall X \in \mathbf{A}^{n\times 1}, \\ \qquad LX = 0 \iff \exists Y \in \mathbf{A}^{m\times 1},\ X = GY\ . \end{cases} \tag{1}$$

Cela signifie que l'on maîtrise un peu l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $LX = 0$.

Il est clair qu'un produit fini d'anneaux est cohérent si, et seulement si, chaque facteur est cohérent.

Plus généralement si $V = (v_1, \dots, v_n) \in M^n$, où M est un $\mathbf{A}$-module, on appelle *module des relations entre les* v_i le sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{A}^n$ noyau de l'application linéaire

$$\check{V} : \mathbf{A}^n \to M, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum\nolimits_i x_i v_i.$$

On dira aussi de manière plus précise qu'il s'agit du *module des relations pour (le vecteur)* V , ou encore *du module des syzygies pour (le vecteur)* V. Un élément $(x_1, \dots, x_n)$ de ce noyau est appelé une *relation de dépendance linéaire*, ou encore une *syzygie* entre les v_i.

Par abus de langage on parle indifféremment de *la relation* $\sum_i x_i v_i = 0$ ou de *la relation* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n$. Le $\mathbf{A}$-module M est dit *cohérent* si pour tout $V \in M^n$, le module des syzygies est de type fini, autrement dit si l'on a :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ \forall V \in M^{n\times 1},\ \exists m \in \mathbb{N},\ \exists G \in \mathbf{A}^{m\times n},\ \forall X \in \mathbf{A}^{1\times n}, \\ \qquad XV = 0 \iff \exists Y \in \mathbf{A}^{1\times m},\ X = YG\ . \end{cases} \tag{2}$$

Un anneau $\mathbf{A}$ est donc cohérent si, et seulement si, il est cohérent en tant que $\mathbf{A}$-module.

Notez que nous avons utilisé dans la formule (2) une notation transposée par rapport à la formule (1). C'est pour ne pas avoir la somme $\sum_i x_i v_i$ écrite sous forme $\sum_i v_i x_i$ avec $v_i \in M$ et $x_i \in \mathbf{A}$. Dans la suite, nous ne ferons généralement plus cette transposition, car il nous semble préférable de garder la forme usuelle $AX = V$ pour un système linéaire, même si les matrices A et V sont à coefficients dans M.

3.1. Proposition. *Soit M un $\mathbf{A}$-module cohérent.*
Tout système linéaire sans second membre $BX = 0$ ($B \in M^{k\times n}$, $X \in \mathbf{A}^{n\times 1}$) *admet pour solutions les éléments d'un sous-$\mathbf{A}$-module de type fini de $\mathbf{A}^{n\times 1}$.*

D Faisons la démonstration par exemple pour $k = 2$ (la démonstration générale fonctionne par récurrence de la même manière). Le principe est le suivant : on résout la première équation et l'on porte la solution générale dans la seconde. Voyons ceci plus précisément. La matrice B est constituée des lignes L et L'. On a une matrice G telle que

$$LX = 0 \iff \exists Y \in \mathbf{A}^{m\times 1},\ X = GY.$$

Il reste à résoudre $L'GY = 0$ qui équivaut à l'existence d'un vecteur colonne Z tel que $Y = G'Z$ pour une matrice G' convenable. Donc $BX = 0$ si, et seulement si, X peut s'écrire sous forme $GG'Z$. □

La proposition précédente est particulièrement importante pour les systèmes linéaires sur $\mathbf{A}$ (c'est-à-dire lorsque $M = \mathbf{A}$).

Commentaire. La notion d'anneau cohérent est donc fondamentale du point de vue algorithmique en algèbre commutative. Dans les traités usuels, cette notion est rarement mise en avant parce que l'on préfère la notion d'anneau *noethérien*[4]. En mathématiques classiques tout anneau noethérien $\mathbf{A}$ est cohérent parce que tous les sous-modules de $\mathbf{A}^n$ sont de type fini, et tout module de type fini est cohérent pour la même raison. En outre, on a le théorème de Hilbert qui dit que *si $\mathbf{A}$ est noethérien, toute $\mathbf{A}$-algèbre de type fini est également un anneau noethérien,* tandis que la même affirmation est en défaut si l'on remplace « noethérien » par « cohérent ».
D'un point de vue algorithmique cependant, il semble impossible de trouver une formulation constructive satisfaisante de la noethérianité qui implique la cohérence (voir l'exercice 8). Et la cohérence est souvent la propriété la plus importante du point de vue algorithmique. Comme conséquence, la cohérence ne peut pas être sous-entendue (comme c'est le cas en mathématiques classiques) lorsque l'on parle d'un anneau ou d'un module noethérien.
Le théorème classique disant que sur un anneau noethérien tout $\mathbf{A}$-module de type fini est noethérien est souvent avantageusement remplacé par le théorème constructif suivant[5].

4. Nous donnons après ce commentaire une définition constructive de cette notion.

5. Pour la version non-noethérienne voir le théorème IV-4.3, et pour la version noethérienne, voir [MRR, corollaire 3.2.8 p. 83].

Sur un anneau cohérent (resp. noethérien cohérent) tout **A***-module de présentation finie est cohérent (resp. noethérien cohérent).*
En fait, comme le montre cet exemple, la noethérianité est souvent une hypothèse inutilement forte. ∎

La définition suivante d'un module noethérien est équivalente à la définition usuelle en mathématiques classiques, mais elle est beaucoup mieux adaptée à l'algèbre constructive (seul l'anneau trivial satisfait constructivement la définition usuelle).

3.2. Définition. *(Noethérianité à la Richman-Seidenberg, [157, 168])*
Un **A**-module est dit *noethérien* s'il vérifie la *condition de chaîne ascendante* suivante : toute suite croissante de sous-modules de type fini possède deux termes consécutifs égaux. Un anneau **A** est dit *noethérien* s'il est noethérien en tant que **A**-module.

Voici un corollaire de la proposition 3.1.

3.3. Corollaire. (Transporteurs et cohérence)
Soit **A** *un anneau cohérent. Alors, le transporteur d'un idéal de type fini dans un autre est un idéal de type fini. Plus généralement, si N et P sont deux sous-modules de type fini d'un* **A***-module cohérent, alors $(P : N)$ est un idéal de type fini.*

3.4. Théorème. *Un* **A***-module M est cohérent si, et seulement si, sont vérifiées les deux conditions suivantes.*

1. *L'intersection de deux sous-modules de type fini arbitraires est un module de type fini.*
2. *L'annulateur d'un élément arbitraire est un idéal de type fini.*

D *La première condition est nécessaire.* Soient $g_1, \ldots, g_n$ des générateurs du premier sous-module et $g_{n+1}, \ldots, g_m$ des générateurs du second. Se donner un élément de l'intersection revient à se donner une relation $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_i = 0$ entre les g_i : à une telle relation $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbf{A}^m$, correspond l'élément $\varphi(\alpha) = \alpha_1 g_1 + \cdots + \alpha_n g_n = -(\alpha_{n+1} g_{n+1} + \cdots + \alpha_m g_m)$ dans l'intersection. Donc si S est un système générateur pour les relations entre les g_i, $\varphi(S)$ engendre l'intersection des deux sous-modules.
La deuxième condition est nécessaire par définition.
Les deux conditions mises ensemble sont suffisantes. Nous donnons l'idée essentielle de la démonstration et laissons les détails à la lectrice. Nous considérons le module des relations pour un $L \in M^n$. On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 1$ la deuxième condition s'applique et donne un système générateur pour les relations liant l'unique élément de L.
Supposons que le module des relations pour tout $L \in M^n$ soit de type fini et considérons un $L' \in M^{n+1}$. Soit un entier $k \in [\![1..n]\!]$, on écrit $L' = L_1 \bullet L_2$

où $L_1 = (a_1, \ldots, a_k)$ et $L_2 = (a_{k+1}, \ldots, a_{n+1})$. Posons $M_1 = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle$ et $M_2 = \langle a_{k+1}, \ldots, a_{n+1} \rangle$. Se donner une relation $\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i a_i = 0$ revient à se donner un élément de l'intersection $M_1 \cap M_2$ (comme ci-dessus). On obtiendra donc un système générateur pour les relations entre les a_i en prenant la réunion des trois systèmes de relations suivants : celui des relations entre les éléments de L_1, celui des relations entre les éléments de L_2, et celui qui provient du système générateur de l'intersection $M_1 \cap M_2$. □

En particulier, *un anneau est cohérent si, et seulement si, d'une part l'intersection de deux idéaux de type fini est toujours un idéal de type fini, et d'autre part l'annulateur d'un élément est toujours un idéal de type fini.*

Exemples. Si $\mathbf{K}$ est un corps discret, toute algèbre de présentation finie sur $\mathbf{K}$ est un anneau cohérent (théorème VII-1.10). Il est clair aussi que tout anneau de Bézout intègre (cf. page 219) est un anneau cohérent. ∎

Caractère local de la cohérence

La cohérence est une notion locale, au sens suivant.

3.5. Principe local-global concret. (Modules cohérents)
On considère un anneau $\mathbf{A}$*,* S_1*, …,* S_n *des monoïdes comaximaux et* M *un* $\mathbf{A}$*-module.*

1. *Le module* M *est cohérent si, et seulement si, chacun des* M_{S_i} *est cohérent.*
2. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est cohérent si, et seulement si, chacun des* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est cohérent.*

▷ Soit $a = (a_1, \ldots, a_m) \in M^m$, et $N \subseteq \mathbf{A}^m$ le module des relations pour a. Nous constatons que pour n'importe quel monoïde S, N_S est le module des relations pour a dans M_S. Ceci nous ramène à démontrer le principe local-global concret qui suit. □

3.6. Principe local-global concret. (Modules de type fini)
Soient S_1*, …,* S_n *des monoïdes comaximaux de* $\mathbf{A}$ *et* M *un* $\mathbf{A}$*-module. Alors,* M *est de type fini si, et seulement si, chacun des* M_{S_i} *est de type fini.*

▷ Supposons que M_{S_i} soit un $\mathbf{A}_{S_i}$-module de type fini pour chaque i. Montrons que M est de type fini. Soient $g_{i,1}$, …, g_{i,q_i} des éléments de M qui engendrent M_{S_i}. Soit $x \in M$ arbitraire. Pour chaque i on a un $s_i \in S_i$ et des $a_{i,j} \in \mathbf{A}$ tels que :

$$s_i x = a_{i,1} g_{i,1} + \cdots + a_{i,q_i} g_{i,q_i} \quad \text{dans} \quad M.$$

En écrivant $\sum_{i=1}^{n} b_i s_i = 1$, on voit que x est combinaison linéaire des $g_{i,j}$.□

Remarque. Considérons le sous-$\mathbb{Z}$-module M de $\mathbb{Q}$ engendré par les éléments $1/p$ où p parcourt l'ensemble des nombres premiers. On vérifie facilement que M n'est pas de type fini mais qu'il devient de type fini après localisation en n'importe quel idéal premier. Cela signifie que le principe local-global concret 3.6 n'admet pas de version « abstraite » correspondante, dans laquelle la localisation en des monoïdes comaximaux serait remplacée par la localisation en tous les idéaux premiers. En fait la propriété P pour un module d'être de type fini n'est pas une propriété de caractère fini, comme on peut le voir avec le module M ci-dessus et les monoïdes $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ou $1 + p\mathbb{Z}$. La propriété vérifie par ailleurs le principe de transfert, mais en l'occurrence, cela n'est d'aucune utilité. ∎

Au sujet du test d'égalité et du test d'appartenance

Nous introduisons maintenant quelques notions constructives relatives au test d'égalité et au test d'appartenance.

Un ensemble E est bien défini lorsque l'on a indiqué comment construire ses éléments et lorsque l'on a construit une relation d'équivalence qui définit l'égalité de deux éléments dans l'ensemble. On note $x = y$ l'égalité dans E, ou $x =_E y$ si nécessaire. L'ensemble E est appelé *discret* lorsque l'axiome suivant est vérifié

$$\forall x, y \in E \qquad x = y \ \text{ ou } \ \neg(x = y).$$

Classiquement, tous les ensembles sont discrets, car le « ou » présent dans la définition est compris de manière « abstraite ». Constructivement, le « ou » présent dans la définition est compris selon la signification du langage usuel : une des deux alternatives au moins doit avoir lieu de manière certaine. Il s'agit donc d'un « ou » de nature algorithmique. En bref un ensemble est discret si l'on a un test pour l'égalité de deux éléments arbitraires de cet ensemble.
Si l'on veut être plus précis et expliquer en détail ce qu'est un test d'égalité dans l'ensemble E, on dira qu'il s'agit d'une construction qui, à partir de deux éléments de E donnés en tant que tels, fournit une réponse « oui » ou « non » à la question posée (ces éléments sont-ils égaux ?). Mais on ne pourra guère aller plus loin. En mathématiques constructives les notions de nombre entier et de construction sont des concepts de base. Elles peuvent être expliquées et commentées, mais pas à proprement parler « définies ». La signification constructive du « ou » et celle du « il existe » sont ainsi directement dépendantes de la notion de construction [6], que l'on ne tente pas de définir.

6. En mathématiques classiques on peut vouloir définir la notion de construction à partir de la notion de « programme correct ». Mais ce que l'on définit ainsi est plutôt la notion de « construction mécanisable ». Et surtout dans la notion de « programme

Un *corps discret* (en un seul mot) est un anneau où est vérifié l'axiome suivant :

$$\forall x \in \mathbf{A} \qquad x = 0 \ \text{ ou } \ x \in \mathbf{A}^\times \tag{3}$$

L'anneau trivial est un corps discret.

Remarque. La méthode chinoise du pivot (souvent appelée méthode du pivot de Gauss) fonctionne de façon algorithmique avec les corps discrets. Ceci signifie que l'algèbre linéaire de base est explicite sur les corps discrets. ∎

Notons qu'un corps discret $\mathbf{A}$ est un ensemble discret si, et seulement si, le test « $1 =_{\mathbf{A}} 0\,?$ » est explicite[7]. Il arrive cependant que l'on sache qu'un anneau construit au cours d'un algorithme est un corps discret sans savoir s'il est trivial ou non.
Si $\mathbf{A}$ est un corps discret non trivial, l'affirmation « M est un espace vectoriel libre de dimension finie » est plus précise que l'affirmation « M est un espace vectoriel de type fini », car dans le dernier cas, savoir extraire une base du système générateur revient à disposer d'un test d'indépendance linéaire dans M.

Une partie P d'un ensemble E est dite *détachable* lorsque la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall x \in E \qquad x \in P \ \text{ ou } \ \neg(x \in P).$$

Il revient au même de se donner une partie détachable de E ou sa fonction caractéristique $\chi_P : E \to \{0, 1\}$.
En mathématiques constructives on considère que si deux ensembles E et F sont correctement définis, il en va de même pour l'*ensemble des fonctions de E vers F*, que l'on note F^E. En conséquence l'*ensemble des parties détachables* d'un ensemble E est lui-même correctement défini car il s'identifie à l'ensemble $\{0, 1\}^E$ des fonctions caractéristiques de source E.

Anneaux et modules cohérents fortement discrets

Un anneau (resp. un module) est dit *fortement discret* lorsque les idéaux de type fini (resp. les sous-modules de type fini) sont détachables, c'est-à-dire encore si les quotients par les idéaux de type fini (resp. par les sous-modules de type fini) sont discrets.
Cela revient à dire que l'on a un test pour décider si une équation linéaire $LX = c$ a ou non une solution, et en calculer une en cas de réponse positive.

---

correct », il y a le fait que le programme doit s'arrêter après un nombre fini d'étapes. Ceci cache un « il existe », qui en mathématiques constructives renvoie de manière irréductible à la notion de construction. Voir à ce sujet la section -4 de l'Annexe.

7. La notion générale de corps en mathématiques constructives sera définie page 494. Nous verrons que si un corps est un ensemble discret c'est un corps discret.

Un résultat essentiel pour l'algèbre constructive et le calcul formel affirme que $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est un anneau cohérent fortement discret.
Plus généralement, on a la version constructive suivante du théorème de Hilbert (voir [MRR, Adams & Loustaunau]).
Si $\mathbf{A}$ *est un anneau noethérien cohérent fortement discret, il en va de même pour toute* $\mathbf{A}$*-algèbre de présentation finie.*
La proposition suivante se démontre comme la proposition 3.1.

3.7. Proposition. *Sur un module cohérent fortement discret* M*, tout système linéaire* $BX = C$ *(*$B \in M^{k\times n}$*,* $C \in M^{k\times 1}$*,* $X \in \mathbf{A}^{n\times 1}$*) peut être testé. En cas de réponse positive, une solution particulière* X_0 *peut être calculée. En outre les solutions* X *sont tous les éléments de* $X_0 + N$ *où* N *est un sous-*$\mathbf{A}$*-module de type fini de* $\mathbf{A}^{n\times 1}$*.*

4. Systèmes fondamentaux d'idempotents orthogonaux

Un élément e d'un anneau est dit *idempotent* si $e^2 = e$. Dans ce cas, $1 - e$ est aussi un idempotent, appelé l'*idempotent complémentaire de* e, ou encore le *complément de* e. Pour deux idempotents e_1 et e_2, on a

$$\langle e_1\rangle \cap \langle e_2\rangle = \langle e_1e_2\rangle\,, \quad \langle e_1\rangle + \langle e_2\rangle = \langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1 + e_2 - e_1e_2\rangle\,,$$

avec e_1e_2 et $e_1 + e_2 - e_1e_2$ idempotents. Deux idempotents e_1 et e_2 sont dits *orthogonaux* lorsque $e_1e_2 = 0$. On a alors $\langle e_1\rangle + \langle e_2\rangle = \langle e_1 + e_2\rangle$.
Un anneau est dit *connexe* si tout idempotent est égal à 0 ou 1.
Dans la suite nous utilisons implicitement le fait évident suivant : pour un idempotent e et un élément x, e divise x si, et seulement si, $x = ex$.
La présence d'un idempotent $\neq 0, 1$ signifie que l'anneau $\mathbf{A}$ est isomorphe à un produit de deux anneaux $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$, et que tout calcul dans $\mathbf{A}$ peut être scindé en deux calculs «plus simples» dans $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$. On décrit cette situation comme suit.

4.1. Fait. *Pour tout isomorphisme* $\lambda : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$*, il existe un unique élément* $e \in \mathbf{A}$ *satisfaisant les propriétés suivantes.*

1. *L'élément* e *est idempotent (on note son complément* $f = 1 - e$*).*
2. *L'homomorphisme* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_1$ *identifie* $\mathbf{A}_1$ *avec* $\mathbf{A}/\langle e\rangle$ *et avec* $\mathbf{A}[1/f]$*.*
3. *L'homomorphisme* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_2$ *identifie* $\mathbf{A}_2$ *avec* $\mathbf{A}/\langle f\rangle$ *et avec* $\mathbf{A}[1/e]$*.*

Réciproquement, si e *est un idempotent et* f *son complément, l'homomorphisme canonique* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\langle e\rangle \times \mathbf{A}/\langle f\rangle$ *est un isomorphisme.*
D L'élément e est défini par $\lambda(e) = (0, 1)$. □

On peut apporter quelques précisions souvent utiles.

4.2. Fait. *Soit e un idempotent de $\mathbf{A}$, $f = 1 - e$ et M un $\mathbf{A}$-module.*

1. *Les monoïdes $e^{\mathbb{N}} = \{1, e\}$ et $1 + f\mathbf{A}$ ont le même saturé.*
2. *En tant que $\mathbf{A}$-module, $\mathbf{A}$ est somme directe de $\langle e\rangle = e\mathbf{A}$ et $\langle f\rangle = f\mathbf{A}$. L'idéal $e\mathbf{A}$ est un anneau si l'on prend e comme élément neutre pour la multiplication. On a alors trois anneaux isomorphes*

$$\mathbf{A}[1/e] = (1 + f\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A} \;\simeq\; \mathbf{A}/\langle f\rangle \;\simeq\; e\mathbf{A}.$$

   Ces isomorphismes proviennent des trois applications canoniques

$$\begin{array}{lll} \mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/e] & : & x \mapsto x/1, \\ \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\langle f\rangle & : & x \mapsto x \bmod \langle f\rangle, \\ \mathbf{A} \to e\mathbf{A} & : & x \mapsto e\,x, \end{array}$$

   qui sont surjectives et ont même noyau.

3. *On a trois $\mathbf{A}$-modules isomorphes $M[1/e] \simeq M/fM \simeq eM$. Ces isomorphismes proviennent des trois applications canoniques*

$$\begin{array}{lll} M \to M[1/e] & : & x \mapsto x/1, \\ M \to M/fM & : & x \mapsto x \bmod \langle f\rangle, \\ M \to eM & : & x \mapsto e\,x, \end{array}$$

   qui sont surjectives et ont même noyau.

Par ailleurs, il faut prendre garde que l'idéal $e\mathbf{A}$, qui est un anneau avec e pour élément neutre, n'est pas un sous-anneau de $\mathbf{A}$ (sauf si $e = 1$).

Dans un anneau $\mathbf{A}$ un *système fondamental d'idempotents orthogonaux* est une liste $(e_1, \dots, e_n)$ d'éléments de $\mathbf{A}$ qui satisfait les égalités suivantes :

$$e_i e_j = 0 \;\text{ pour }\; i \neq j, \quad \text{ et } \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} e_i = 1.$$

Ceci implique que les e_i sont idempotents. Nous ne réclamons pas qu'ils soient tous non nuls [8].

4.3. Théorème. (Système fondamental d'idempotents orthogonaux)
Soit $(e_1, \dots, e_n)$ un système fondamental d'idempotents orthogonaux d'un anneau $\mathbf{A}$, et M un $\mathbf{A}$-module. Notons $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}/\langle 1 - e_i\rangle \simeq \mathbf{A}[1/e_i]$. Alors :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\simeq \mathbf{A}_1 \times \cdots \times \mathbf{A}_n, \\ M &= e_1 M \oplus \cdots \oplus e_n M. \end{aligned}$$

Notez que $e_1 M$ est un $\mathbf{A}$-module et un $\mathbf{A}_1$-module, mais que ce n'est pas un $\mathbf{A}_2$-module (sauf s'il est nul).
Le lemme suivant donne une réciproque du théorème 4.3

8. C'est beaucoup plus confortable pour obtenir des énoncés uniformes. En outre c'est pratiquement indispensable lorsque l'on ne sait pas tester l'égalité à zéro des idempotents dans l'anneau avec lequel on travaille.

4.4. Lemme. *Soient* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ *des idéaux de* $\mathbf{A}$. *On a* $\mathbf{A} = \bigoplus_{i\in[\![1..n]\!]} \mathfrak{a}_i$ *si, et seulement si, il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux* $(e_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ *tel que* $\mathfrak{a}_i = \langle e_i\rangle$ *pour* $i \in [\![1..n]\!]$. *Dans ce cas le système fondamental d'idempotents orthogonaux est déterminé de manière unique.*

▷ Supposons $\mathbf{A} = \bigoplus_{i\in[\![1..n]\!]} \mathfrak{a}_i$. On a des $e_i \in \mathfrak{a}_i$ tels que $\sum_i e_i = 1$, et comme $e_i e_j \in \mathfrak{a}_i \cap \mathfrak{a}_j = \{0\}$ pour $i \neq j$, on obtient bien un système fondamental d'idempotents orthogonaux.
En outre si $x \in \mathfrak{a}_j$, on a $x = x\sum_i e_i = xe_j$ et donc $\mathfrak{a}_j = \langle e_j\rangle$.
L'implication réciproque est immédiate. L'unicité résulte de celle d'une écriture d'un élément dans une somme directe. □

Voici maintenant deux lemmes très utiles.

4.5. Lemme. (Lemme de l'idéal engendré par un idempotent)
Un idéal $\mathfrak{a}$ *est engendré par un idempotent si, et seulement si,*

$$\mathfrak{a} + \operatorname{Ann}\mathfrak{a} = \langle 1\rangle\,.$$

▷ Tout d'abord, si e est idempotent, on a $\operatorname{Ann}\langle e\rangle = \langle 1-e\rangle$. Pour l'implication réciproque, soit $e \in \mathfrak{a}$ tel que $1-e \in \operatorname{Ann}\mathfrak{a}$. Alors $e(1-e) = 0$, donc e est idempotent. Et pour tout $y \in \mathfrak{a}$, $y = ye$, donc $\mathfrak{a} \subseteq \langle e\rangle$. □

4.6. Lemme. (Lemme de l'idéal de type fini idempotent)
Si $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini idempotent (i.e.,* $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^2$*) dans* $\mathbf{A}$, *alors* $\mathfrak{a} = \langle e\rangle$ *avec* $e^2 = e$ *entièrement déterminé par* $\mathfrak{a}$.

▷ On utilise le truc du déterminant. On considère un système générateur $(a_1, \dots a_q)$ de $\mathfrak{a}$ et le vecteur colonne $\underline{a} = {}^{\mathrm{t}}[\,a_1\ \cdots\ a_q\,]$.
Puisque $a_j \in \mathfrak{a}^2$ pour $j \in [\![1..q]\!]$, il existe $C \in \mathbb{M}_q(\mathfrak{a})$ telle que $\underline{a} = C\,\underline{a}$, donc $(\mathrm{I}_q - C)\,\underline{a} = \underline{0}$ et $\det(\mathrm{I}_q - C)\,\underline{a} = \underline{0}$. Or $\det(\mathrm{I}_q - C) = 1 - e$ avec $e \in \mathfrak{a}$.
Donc $(1-e)\mathfrak{a} = 0$, et l'on applique le lemme 4.5.
Enfin, l'unicité de e est déjà dans le lemme 4.4. □

Rappelons enfin le théorème chinois, outil très efficace, qui cache un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Des idéaux $\mathfrak{b}_1$, …, $\mathfrak{b}_\ell$ d'un anneau $\mathbf{A}$ sont dit *comaximaux* lorsque $\mathfrak{b}_1 + \cdots + \mathfrak{b}_\ell = \langle 1\rangle$.

4.7. Théorème des restes chinois.
Soient dans $\mathbf{A}$ *des idéaux* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ *deux à deux comaximaux et* $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$.

1. *On a l'égalité* $\mathfrak{a} = \prod_i \mathfrak{a}_i$,
2. *l'application canonique* $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \to \prod_i \mathbf{A}/\mathfrak{a}_i$ *est un isomorphisme,*
3. *il existe* e_1, …, e_n *dans* $\mathbf{A}$ *tels que* $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} + \langle 1 - e_i\rangle$ *et les* $\pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}}(e_i)$ *forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux de* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$.

Comme corollaire on obtient le lemme des noyaux.

4.8. Lemme. (Lemme des noyaux)
Soit $P = P_1 \cdots P_\ell \in \mathbf{A}[X]$ et une application $\mathbf{A}$-linéaire $\varphi : M \to M$ vérifiant $P(\varphi) = 0$. On suppose que les P_i sont deux à deux comaximaux. Notons $K_i = \mathrm{Ker}\big(P_i(\varphi)\big)$, $Q_i = \prod_{j\neq i} P_j$. Alors on a :

$$K_i = \mathrm{Im}\big(Q_i(\varphi)\big),\ M = \bigoplus_{j=1}^{\ell} K_j \ \textit{et}\ \mathrm{Im}\big(P_i(\varphi)\big) = \mathrm{Ker}\big(Q_i(\varphi)\big) = \bigoplus_{j\neq i} K_i.$$

▷ On considère l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]/\langle P\rangle$. Le module M peut être vu comme un $\mathbf{B}$-module pour la loi $(Q, y) \mapsto Q \cdot y = Q(\varphi)(y)$. On applique alors le théorème des restes chinois et le théorème de structure 4.3.
Cette démonstration résume le calcul plus classique suivant. À partir des égalités $U_{ij}P_i + U_{ji}P_j = 1$, on obtient des égalités $U_iP_i + V_iQ_i = 1$ ainsi qu'une égalité $\sum_i W_iQ_i = 1$. Notons $p_i = P_i(\varphi)$, $q_i = Q_i(\varphi)$ etc.
Alors, tous les endomorphismes obtenus commutent et l'on obtient des égalités $p_iq_i = 0$, $u_ip_i + v_iq_i = \mathrm{Id}_M$, $\sum_i w_iq_i = \mathrm{Id}_M$. Le lemme en découle facilement. □

5. Un peu d'algèbre extérieure

Qu'un système linéaire homogène de n équations à n inconnues
admette (sur un corps discret) une solution non triviale
si, et seulement si, le déterminant du système est nul,
voilà un fait d'une importance capitale dont on
n'aura jamais fini de mesurer la portée.
Anonyme

Éliminons, éliminons, éliminons
les éliminateurs de l'élimination !
Poème mathématique (extrait)
S. Abhyankar

Quelques exemples simples illustrent ces idées dans la section présente.

Sous-modules libres en facteur direct (splitting off)

Soit $k \in \mathbb{N}$. Un *module libre de rang k* est par définition un $\mathbf{A}$-module isomorphe à $\mathbf{A}^k$. Si k n'est pas précisé, on dira *module libre de rang fini*.
Lorsque $\mathbf{A}$ est un corps discret on parle indifféremment d'*espace vectoriel de dimension finie* ou *de rang fini*.
Les modules dont la structure est la plus simple sont les modules libres de rang fini. On est donc intéressé par la possibilité d'écrire un module arbitraire M sous la forme $L \oplus N$ où L est un module libre de rang fini. Une réponse (partielle) à cette question est donnée par l'algèbre extérieure.

5.1. Proposition. (Splitting off)
Soient a_1, ..., a_k des éléments d'un $\mathbf{A}$-module M, alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Le sous-module $L = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ de M est libre de base $(a_1, \dots, a_k)$ et il est facteur direct de M.*
2. *Il existe une forme k-linéaire alternée $\varphi : M^k \to \mathbf{A}$ qui satisfait l'égalité $\varphi(a_1, \dots, a_k) = 1$.*

1 $\Rightarrow$ 2. Si $L \oplus N = M$, si $\pi : M \to L$ est la projection parallèlement à N, et si $\theta_j : L \to \mathbf{A}$ est la j-ième forme coordonnée pour la base $(a_1, \dots, a_k)$, on définit

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = \det\big(\big(\theta_j(\pi(x_i))\big)_{i,j \in [\![1..k]\!]}\big).$$

2 $\Rightarrow$ 1. On définit l'application linéaire $\pi : M \to M$ par

$$\pi(x) = \sum\nolimits_{j=1}^{k} \varphi(\underbrace{a_1, \dots, x, \dots, a_k}_{(x \text{ est en position } j)})\, a_j.$$

On a immédiatement $\pi(a_i) = a_i$ et $\operatorname{Im}\pi \subseteq L := \langle a_1, \dots, a_k \rangle$, donc $\pi^2 = \pi$ et $\operatorname{Im}\pi = L$. Enfin, si $x = \sum_j \lambda_j a_j = 0$, alors $\varphi(a_1, \dots, x, \dots, a_k) = \lambda_j = 0$ (avec x en position j). □

Cas particulier : pour $k = 1$ on dit que l'élément a de M est *unimodulaire* lorsqu'il existe une forme linéaire $\varphi : M \to \mathbf{A}$ tel que $\varphi(a) = 1$. Dire que le vecteur $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{A}^n$ est unimodulaire revient à dire que les b_i sont comaximaux. On dit aussi dans ce cas que la suite $(b_1, \dots, b_n)$ est *unimodulaire*.

Le rang d'un module libre

Comme nous allons le voir, le rang d'un module libre est un entier bien déterminé si l'anneau n'est pas trivial. Autrement dit, deux $\mathbf{A}$-modules $M \simeq \mathbf{A}^m$ et $P \simeq \mathbf{A}^p$ avec $m \neq p$ ne peuvent être isomorphes que si $1 =_{\mathbf{A}} 0$.
Nous utiliserons la notation $\operatorname{rg}_{\mathbf{A}}(M) = k$ (ou $\operatorname{rg}(M) = k$ si $\mathbf{A}$ est clair d'après le contexte) pour indiquer qu'un module (supposé libre) est de rang k.
Une démonstration savante consiste à dire que, si $m > p$, la puissance extérieure m-ième de P est $\{0\}$ tandis que celle de M est isomorphe à $\mathbf{A}$ (c'est pour l'essentiel la preuve faite dans le corollaire 5.23).
La même démonstration peut être présentée de façon plus élémentaire comme suit. Rappelons tout d'abord la formule de Cramer de base. Si B est une matrice carrée d'ordre n, nous notons $\widetilde{B}$ ou $\operatorname{Adj} B$ la matrice *cotransposée* (on dit parfois, *adjointe*). La forme élémentaire des identités de Cramer

s'écrit alors :

$$A\ \mathrm{Adj}(A) = \mathrm{Adj}(A)\ A = \det(A)\ \mathrm{I}_n. \tag{4}$$

Cette formule, jointe à la formule du produit « $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ », implique qu'une matrice carrée A est inversible si, et seulement si, son déterminant est inversible, ou encore si elle est inversible d'un seul coté, et que son inverse est alors égal à $(\det A)^{-1}\,\mathrm{Adj}\,A$.
On considère maintenant deux $\mathbf{A}$-modules $M \simeq \mathbf{A}^m$ et $P \simeq \mathbf{A}^p$ avec $m \geqslant p$ et une application linéaire surjective $\varphi : P \to M$. Il existe donc une application linéaire $\psi : M \to P$ telle que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_M$. Ceci correspond à deux matrices $A \in \mathbf{A}^{m\times p}$ et $B \in \mathbf{A}^{p\times m}$ avec $AB = \mathrm{I}_m$. Si $m = p$, la matrice A est inversible d'inverse B et φ et ψ sont des isomorphismes réciproques. Si $m > p$, on a $AB = A_1B_1$ avec A_1 et B_1 carrées obtenues à partir de A et B en complétant par des zéros ($m-p$ colonnes pour A_1, $m-p$ lignes pour B_1).

$$A_1 = \left|\begin{array}{c|c} 0 & \\ \vdots & A \\ 0 & \end{array}\right|, \qquad B_1 = \left|\begin{array}{c|c} 0 \quad \cdots \quad 0 & \\ \hline & B \end{array}\right|, \qquad A_1B_1 = \mathrm{I}_m.$$

Ainsi $1 = \det \mathrm{I}_m = \det(AB) = \det(A_1B_1) = \det(A_1)\det(B_1) = 0$.
Dans cette démonstration on voit clairement apparaître la commutativité de l'anneau (qui est vraiment nécessaire). Résumons.

5.2. Proposition. *Soient deux $\mathbf{A}$-modules $M \simeq \mathbf{A}^m$ et $P \simeq \mathbf{A}^p$ et une application linéaire surjective $\varphi : P \to M$.*

1. *Si $m = p$, alors φ est un isomorphisme. Autrement dit, dans un module $\mathbf{A}^m$ tout système générateur de m éléments est une base.*
2. *Si $m > p$, alors $1 =_{\mathbf{A}} 0$. Et si l'anneau n'est pas trivial, $m > p$ est impossible.*

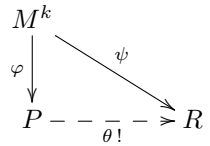
Dans la suite ce théorème de classification important apparaîtra souvent comme corollaire de théorèmes plus subtils, comme par exemple le théorème IV-5.1 ou le théorème IV-5.2.

Puissances extérieures d'un module

Terminologie. Rappelons que l'on appelle *mineur* d'une matrice A tout déterminant d'une matrice carrée extraite de A sur certaines lignes et certaines colonnes. On parle de *mineur d'ordre k* lorsque la matrice carrée extraite est dans $\mathbb{M}_k(\mathbf{A})$. Lorsque A est une matrice carrée, un *mineur principal* est un mineur correspondant à une matrice extraite pour le même ensemble d'indices sur les lignes et sur les colonnes. Par exemple si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, le coefficient de X^k dans le polynôme $\det(\mathrm{I}_n + XA)$ est la somme des mineurs principaux d'ordre k de A. Enfin, on appelle *mineur*

principal dominant un mineur principal en position nord-ouest, c'est-à-dire obtenu en extrayant la matrice sur les premières lignes et les premières colonnes. ∎

Soit M un $\mathbf{A}$-module. Une application k-linéaire alternée $\varphi : M^k \to P$ est appelée une *puissance extérieure* k-ième du $\mathbf{A}$-module M si toute application linéaire alternée $\psi : M^k \to R$ s'écrit de manière unique sous la forme $\psi = \theta \circ \varphi$, où θ est une application $\mathbf{A}$-linéaire de P vers R.



applications k-linéaires alternées

applications linéaires.

Il est clair que $\varphi : M^k \to P$ est unique au sens catégorique, c'est-à-dire que pour toute autre puissance extérieure $\varphi' : M^k \to P'$ il y a une application linéaire unique $\theta : P \to P'$ qui rend le diagramme convenable commutatif, et que θ est un isomorphisme.
On note alors $\bigwedge^k M$ ou $\bigwedge^k_{\mathbf{A}} M$ pour P et $\lambda_k(x_1, \ldots, x_k)$ ou $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ pour $\varphi(x_1, \ldots, x_k)$.
L'existence d'une puissance extérieure k-ième pour tout module M résulte de considérations générales analogues à celles que nous détaillerons pour le produit tensoriel page 204 de la section IV-4.
La théorie la plus simple des puissances extérieures, analogue à la théorie élémentaire du déterminant, démontre que si M est un module libre ayant une base de n éléments $(a_1, \ldots, a_n)$, alors $\bigwedge^k M$ est nul si $k > n$, et sinon c'est un module libre ayant pour base les $\binom{n}{k}$ k-vecteurs $a_{i_1} \wedge \cdots \wedge a_{i_k}$, où $(i_1, \ldots, i_k)$ parcourt l'ensemble des k-uplets strictement croissants d'éléments de $[\![1..n]\!]$.
En particulier, $\bigwedge^n M$ est libre de rang 1 avec pour base $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$.
À toute application $\mathbf{A}$-linéaire $\alpha : M \to N$ correspond une unique application $\mathbf{A}$-linéaire $\bigwedge^k \alpha : \bigwedge^k M \to \bigwedge^k N$ vérifiant l'égalité

$$\big(\textstyle\bigwedge^k \alpha\big)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = \alpha(x_1) \wedge \cdots \wedge \alpha(x_k)$$

pour tout k-vecteur $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ de $\bigwedge^k M$. L'application linéaire $\bigwedge^k \alpha$ s'appelle la *puissance extérieure* k-ième de l'application linéaire α.
En outre on a $\big(\bigwedge^k \alpha\big) \circ \big(\bigwedge^k \beta\big) = \bigwedge^k(\alpha \circ \beta)$ quand $\alpha \circ \beta$ est défini. En bref, chaque $\bigwedge^k(\bullet)$ est un foncteur.
Si M et N sont libres de bases respectives $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_m)$, et si α admet la matrice H sur ces bases, alors $\bigwedge^k \alpha$ admet la matrice notée $\bigwedge^k H$ sur les bases correspondantes de $\bigwedge^k M$ et $\bigwedge^k N$. Les coefficients de cette matrice sont tous les mineurs d'ordre k de la matrice H.

Idéaux déterminantiels

5.3. Définition. Soient $G \in \mathbf{A}^{n\times m}$ et $k \in [\![1..\min(m,n)]\!]$, *l'idéal déterminantiel d'ordre k de la matrice G* est l'idéal, noté $\mathcal{D}_{\mathbf{A},k}(G)$ ou $\mathcal{D}_k(G)$, engendré par les mineurs d'ordre k de G. Pour $k \leqslant 0$ on pose par convention $\mathcal{D}_k(G) = \langle 1\rangle$, et pour $k > \min(m,n)$, $\mathcal{D}_k(G) = \langle 0\rangle$.

Ces conventions sont naturelles car elles permettent d'obtenir en toute généralité les égalités suivantes.

— Si $H = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & G \\ \hline \end{array}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\mathcal{D}_k(G) = \mathcal{D}_{k+r}(H)$.

— Si $H = \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & G \\ \hline \end{array}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on a $\mathcal{D}_k(H) = \mathcal{D}_k(G)$.

5.4. Fait. *Pour toute matrice G de type $n \times m$ on a les inclusions*

$$\{0\} = \mathcal{D}_{1+\min(m,n)}(G) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{D}_1(G) \subseteq \mathcal{D}_0(G) = \langle 1\rangle = \mathbf{A} \tag{5}$$

Plus précisément pour tout $k, r \in \mathbb{N}$ on a une inclusion

$$\mathcal{D}_{k+r}(G) \subseteq \mathcal{D}_k(G)\,\mathcal{D}_r(G) \tag{6}$$

En effet, tout mineur d'ordre $h+1$ s'exprime comme combinaison linéaire de mineurs d'ordre h. Et l'inclusion (6) s'obtient avec le développement de Laplace du déterminant.

5.5. Fait. *Soient $G_1 \in \mathbf{A}^{n\times m_1}$, $G_2 \in \mathbf{A}^{n\times m_2}$ et $H \in \mathbf{A}^{p\times n}$.*

1. *Si $\operatorname{Im} G_1 \subseteq \operatorname{Im} G_2$, alors pour tout entier k on a $\mathcal{D}_k(G_1) \subseteq \mathcal{D}_k(G_2)$.*
2. *Pour tout entier k, on a $\mathcal{D}_k(HG_1) \subseteq \mathcal{D}_k(G_1)$.*
3. *Les idéaux déterminantiels d'une matrice $G \in \mathbf{A}^{n\times m}$ ne dépendent que de la classe d'équivalence du sous-module image de G (i.e., ils ne dépendent que de $\operatorname{Im} G$, à automorphisme près du module $\mathbf{A}^n$).*
4. *En particulier, si φ est une application linéaire entre modules libres de rangs finis, les idéaux déterminantiels d'une matrice de φ ne dépendent pas des bases choisies. On les note $\mathcal{D}_k(\varphi)$ et on les appelle les* idéaux déterminantiels de l'application linéaire φ.

▷ *1.* Chaque colonne de G_1 est une combinaison linéaire de colonnes de G_2. On conclut par la multilinéarité du déterminant.
2. Même raisonnement en remplaçant les colonnes par les lignes.
Enfin, *3* implique *4* et résulte des deux points précédents. □

Remarque. Un idéal déterminantiel est donc attaché essentiellement à un sous-module de type fini M d'un module libre L. Mais c'est la structure de l'inclusion $M \subseteq L$ et non pas seulement la structure de M qui intervient pour déterminer les idéaux déterminantiels. Par exemple $M = 3\mathbb{Z} \times 5\mathbb{Z}$

est un sous-$\mathbb{Z}$-module libre de $L = \mathbb{Z}^2$ et ses idéaux déterminantiels sont $\mathcal{D}_1(M) = \langle 1\rangle$, $\mathcal{D}_2(M) = \langle 15\rangle$. Si l'on remplace 3 et 5 par 6 et 10 par exemple, on obtient un autre sous-module libre, mais la structure de l'inclusion est différente puisque les idéaux déterminantiels sont maintenant $\langle 2\rangle$ et $\langle 60\rangle$. ∎

5.6. Fait. *Si G et H sont des matrices telles que GH est définie, alors, pour tout $n \geqslant 0$ on a*

$$\mathcal{D}_n(GH) \subseteq \mathcal{D}_n(G)\,\mathcal{D}_n(H) \tag{7}$$

▯ Le résultat est clair pour $n = 1$. Pour $n > 1$, on se ramène au cas $n = 1$ en notant que les mineurs d'ordre n de G, H et GH représentent les coefficients des matrices « puissance extérieure n-ième de G, H et GH » (en tenant compte de l'égalité $\bigwedge^n(\varphi\psi) = \bigwedge^n \varphi \circ \bigwedge^n \psi$). □

L'égalité suivante est immédiate.

$$\mathcal{D}_n(\varphi \oplus \psi) = \sum\nolimits_{k=0}^{n} \mathcal{D}_k(\varphi)\,\mathcal{D}_{n-k}(\psi) \tag{8}$$

Rang d'une matrice

5.7. Définition.
Une application linéaire φ entre modules libres de rangs finis est dite
- *de rang $\leqslant k$* si $\mathcal{D}_{k+1}(\varphi) = 0$,
- *de rang $\geqslant k$* si $\mathcal{D}_k(\varphi) = \langle 1\rangle$,
- *de rang k* si elle est à la fois de rang $\geqslant k$ et de rang $\leqslant k$.

Nous utiliserons les notations $\mathrm{rg}(\varphi) \geqslant k$ et $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant k$, conformément à la définition précédente, sans présupposer que $\mathrm{rg}(\varphi)$ soit défini. Seule l'écriture $\mathrm{rg}(\varphi) = k$ signifiera que le rang est défini.
Nous généraliserons plus loin cette définition au cas d'applications linéaires entre modules projectifs de type fini : voir la notation X-6.5 ainsi que les exercices X-21, X-22 et X-23.

Commentaire. Le lecteur doit prendre garde qu'il n'existe pas de définition universellement acceptée pour « matrice de rang k » dans la littérature. En lisant un autre ouvrage, il doit d'abord s'assurer de la définition adoptée par l'auteur. Par exemple dans le cas d'un anneau intègre $\mathbf{A}$, on trouve souvent le rang défini comme celui de la matrice vue dans le corps des fractions de $\mathbf{A}$. Néanmoins une matrice de rang k au sens de la définition 5.7 est généralement de rang k au sens des autres auteurs. ∎

Le principe local-global concret suivant est une conséquence immédiate du principe local-global de base.

5.8. Principe local-global concret. (Rang d'une matrice)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et B une matrice $\in \mathbf{A}^{m\times p}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *La matrice est de rang $\leqslant k$ (resp. de rang $\geqslant k$) sur $\mathbf{A}$.*
2. *Pour $i \in [\![1..n]\!]$, la matrice est de rang $\leqslant k$ (resp. de rang $\geqslant k$) sur $\mathbf{A}_{S_i}$.*

Méthode du pivot généralisée

Terminologie.
1) Deux matrices sont dites *équivalentes* lorsque l'on passe de l'une à l'autre en multipliant à droite et à gauche par des matrices inversibles.
2) Deux matrices carrées dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ sont dites *semblables* lorsqu'elles représentent le même endomorphisme de $\mathbf{A}^n$ sur deux bases (distinctes ou non), autrement dit lorsqu'elles sont conjuguées pour l'action $(G, M) \mapsto GMG^{-1}$ de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ sur $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$.
3) Une *manipulation élémentaire de lignes* sur une matrice de n lignes consiste en le remplacement d'une ligne L_i par la ligne $L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$. On la note aussi $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. Cela correspond à la multiplication à gauche par une matrice, dite *élémentaire*, notée $\mathrm{E}_{i,j}^{(n)}(\lambda)$ (ou, si le contexte le permet, $\mathrm{E}_{i,j}(\lambda)$). Cette matrice est obtenue à partir de I_n par la même manipulation élémentaire de lignes.
La multiplication à droite par la même matrice $\mathrm{E}_{i,j}(\lambda)$ correspond, elle, à la *manipulation élémentaire de colonnes* (pour une matrice qui possède n colonnes) qui transforme la matrice I_n en $\mathrm{E}_{i,j}(\lambda)$: $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$.
4) Le sous-groupe de $\mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$ engendré par les matrices élémentaires est appelé le *groupe élémentaire* et il est noté $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$. Deux matrices sont dites *élémentairement équivalentes* lorsque l'on peut passer de l'une à l'autre par des manipulations élémentaires de lignes et de colonnes. ∎

5.9. Lemme du mineur inversible. (Pivot généralisé)
Si une matrice $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$ possède un mineur d'ordre $k \leqslant \min(m, q)$ inversible, elle est équivalente à une matrice

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{q-k,k} & G_1 \end{bmatrix},$$

avec $\mathcal{D}_r(G_1) = \mathcal{D}_{k+r}(G)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$.

▷ En permutant éventuellement les lignes et les colonnes on ramène le mineur inversible en haut à gauche. Puis en multipliant à droite (ou à gauche) par une matrice inversible on se ramène à la forme

$$G' = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & A \\ B & C \end{bmatrix},$$

puis par des manipulations élémentaires de lignes et de colonnes, on obtient

$$G'' \;=\; \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{q-k,k} & G_1 \end{bmatrix}.$$

Enfin $\mathcal{D}_r(G_1) = \mathcal{D}_{k+r}(G'') = \mathcal{D}_{k+r}(G)$ pour tout $r \in \mathbb{Z}$. □

Comme conséquence immédiate on obtient le lemme de la liberté.

5.10. Lemme de la liberté. *Considérons une matrice $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$ de rang $\leqslant k$ avec $1 \leqslant k \leqslant \min(m,q)$. Si la matrice G possède un mineur d'ordre k inversible, alors elle est équivalente à la matrice*

$$\mathrm{I}_{k,q,m} \;=\; \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{q-k,k} & 0_{q-k,m-k} \end{bmatrix}.$$

Dans ce cas, l'image, le noyau et le conoyau de G sont libres, respectivement de rangs k, $m-k$ et $q-k$. En outre l'image et le noyau possèdent des suppléments libres.
Si $i_1, \ldots, i_k$ (resp. $j_1, \ldots, j_k$) sont les numéros de lignes (resp. de colonnes) du mineur inversible, alors les colonnes $j_1, \ldots, j_k$ forment une base du module $\operatorname{Im} G$*, et* $\operatorname{Ker} G$ *est le sous-module défini par l'annulation des formes linéaires correspondant aux lignes $i_1, \ldots, i_k$.*

▷ Avec les notations du lemme précédent on a $\mathcal{D}_1(G_1) = \mathcal{D}_{k+1}(G) = \langle 0\rangle$, donc $G_1 = 0$. Le reste est laissé à la lectrice. □

La matrice $\mathrm{I}_{k,q,m}$ est appelée une *matrice simple standard*. On note $\mathrm{I}_{k,n}$ pour $\mathrm{I}_{k,n,n}$ et on l'appelle une *matrice de projection standard*.

5.11. Définition. Une application linéaire entre modules libres de rangs finis est dite *simple* si elle peut être représentée par une matrice $\mathrm{I}_{k,q,m}$ sur des bases convenables. De même une matrice est dite *simple* lorsqu'elle est équivalente à une matrice $\mathrm{I}_{k,q,m}$.

Formule de Cramer généralisée

Nous étudions dans ce paragraphe quelques généralisations des formules de Cramer usuelles. Nous les exploiterons dans les paragraphes suivants.
Pour une matrice $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$ nous notons $A_{\alpha,\beta}$ la matrice extraite sur les lignes $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subseteq [\![1..m]\!]$ et les colonnes $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\} \subseteq [\![1..n]\!]$.
Supposons la matrice A de rang $\leqslant k$. Soit $V \in \mathbf{A}^{m\times 1}$ un vecteur colonne tel que la matrice bordée $[\,A \,|\, V\,]$ soit aussi de rang $\leqslant k$. Appelons A_j la j-ième colonne de A. Soit $\mu_{\alpha,\beta} = \det(A_{\alpha,\beta})$ le mineur d'ordre k de la matrice A extrait sur les lignes $\alpha = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\}$ et les colonnes $\beta = \{\beta_1, \ldots, \beta_k\}$. Pour $j \in [\![1..k]\!]$ soit $\nu_{\alpha,\beta,j}$ le déterminant de la même matrice extraite, à ceci près que la colonne j a été remplacée par la colonne extraite de V sur les lignes α. Alors, on obtient pour chaque couple (α,β) de multi-indices

une identité de Cramer :

$$\mu_{\alpha,\beta}\, V = \sum\nolimits_{j=1}^{k} \nu_{\alpha,\beta,j}\, A_{\beta_j} \tag{9}$$

due au fait que le rang de la matrice bordée $[\, A_{1..m,\beta} \,|\, V \,]$ est $\leqslant k$. Ceci peut se relire comme suit :

$$\begin{aligned}
\mu_{\alpha,\beta}\, V &= \begin{bmatrix} A_{\beta_1} & \dots & A_{\beta_k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \nu_{\alpha,\beta,1} \\ \vdots \\ \nu_{\alpha,\beta,k} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} A_{\beta_1} & \dots & A_{\beta_k} \end{bmatrix} \cdot \mathrm{Adj}(A_{\alpha,\beta}) \cdot \begin{bmatrix} v_{\alpha_1} \\ \vdots \\ v_{\alpha_k} \end{bmatrix} = \\
&= A \cdot (\mathrm{I}_n)_{1..n,\beta} \cdot \mathrm{Adj}(A_{\alpha,\beta}) \cdot (\mathrm{I}_m)_{\alpha,1..m} \cdot V
\end{aligned} \tag{10}$$

Ceci nous conduit à introduire la notation suivante.

5.12. Notation. Nous notons $\mathcal{P}_\ell$ l'ensemble des parties de $[\![1..\ell]\!]$ et $\mathcal{P}_{k,\ell}$ l'ensemble des parties à k éléments de $[\![1..\ell]\!]$.
Pour $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$ et $\alpha \in \mathcal{P}_{k,m}$, $\beta \in \mathcal{P}_{k,n}$ nous notons

$$\mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A) := (\mathrm{I}_n)_{1..n,\beta} \cdot \mathrm{Adj}(A_{\alpha,\beta}) \cdot (\mathrm{I}_m)_{\alpha,1..m}.$$

Par exemple avec la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 & 4 \\ 9 & -1 & 2 & 7 \\ 13 & 3 & -3 & 10 \end{bmatrix},$$

et les parties $\alpha = \{1,2\}$ et $\beta = \{2,3\}$, on obtient

$$A_{\alpha,\beta} = \begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},\ \mathrm{Adj}(A_{\alpha,\beta}) = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \text{ et } \mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

L'égalité (10) s'écrit comme suit, sous l'hypothèse que $\mathcal{D}_{k+1}([\, A \,|\, V \,]) = 0$.

$$\mu_{\alpha,\beta}\, V \;=\; A \cdot \mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A) \cdot V \tag{11}$$

On obtient donc l'égalité ci-dessous, sous l'hypothèse que A est de rang $\leqslant k$.

$$\mu_{\alpha,\beta}\, A \;=\; A \cdot \mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A) \cdot A \tag{12}$$

Les identités de Cramer (11) et (12) fournissent des congruences qui ne sont soumises à aucune hypothèse : il suffit par exemple de lire (11) dans l'anneau quotient $\mathbf{A}/\mathcal{D}_{k+1}([\, A \,|\, V \,])$ pour obtenir la congruence (13).

5.13. Lemme. (Formule de Cramer généralisée)
Sans aucune hypothèse sur la matrice A ou le vecteur V, on a pour $\alpha \in \mathcal{P}_{k,m}$ et $\beta \in \mathcal{P}_{k,n}$ les congruences suivantes.

$$\mu_{\alpha,\beta}\, V \equiv A \cdot \mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A) \cdot V \qquad \mod \quad \mathcal{D}_{k+1}([\, A \,|\, V \,]) \tag{13}$$

$$\mu_{\alpha,\beta}\, A \equiv A \cdot \mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A) \cdot A \qquad \mod \quad \mathcal{D}_{k+1}(A). \tag{14}$$

Un cas particulier simple est le suivant avec $k = m \leqslant n$.

$$\mu_{1..m,\beta}\, \mathrm{I}_m \;=\; A \cdot \mathrm{Adj}_{1..m,\beta}(A) \quad (\beta \in \mathcal{P}_{m,n}) \tag{15}$$

Cette égalité est d'ailleurs une conséquence directe de l'identité de Cramer de base (4). De la même manière on obtient

$$\mu_{\alpha,1..n}\, \mathrm{I}_n \;=\; \mathrm{Adj}_{\alpha,1..n}(A) \cdot A \quad (\alpha \in \mathcal{P}_{n,m},\, n \leqslant m) \tag{16}$$

Une formule magique

Une conséquence immédiate de l'identité de Cramer (12) est l'identité (17) moins usuelle donnée dans le théorème suivant. De même les égalités (18) et (19) résultent facilement de (15) et (16).

5.14. Théorème. *Soit $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$ une matrice de rang k. On a donc une égalité $\sum_{\alpha\in\mathcal{P}_{k,m},\beta\in\mathcal{P}_{k,n}} c_{\alpha,\beta}\, \mu_{\alpha,\beta} = 1$. Posons*

$$B \;=\; \textstyle\sum_{\alpha\in\mathcal{P}_{k,m},\beta\in\mathcal{P}_{k,n}} c_{\alpha,\beta}\, \mathrm{Adj}_{\alpha,\beta}(A).$$

1. *On a*
$$A \cdot B \cdot A = A. \tag{17}$$
En conséquence $A\,B$ est une projection de rang k et le sous-module $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, AB$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^m$.

2. *Si $k = m$, alors*
$$A \cdot B = \mathrm{I}_m. \tag{18}$$

3. *Si $k = n$, alors*
$$B \cdot A = \mathrm{I}_n. \tag{19}$$

L'identité suivante, que nous n'utiliserons pas dans la suite, est encore plus miraculeuse.

5.15. Proposition. (Prasad et Robinson)
Avec les hypothèses et les notations du théorème 5.14, si l'on a

$$\forall \alpha, \alpha' \in \mathcal{P}_{k,m},\, \forall \beta, \beta' \in \mathcal{P}_{k,n} \quad c_{\alpha,\beta}\, c_{\alpha',\beta'} = c_{\alpha,\beta'}\, c_{\alpha',\beta},$$

alors

$$B \cdot A \cdot B = B. \tag{20}$$

Inverses généralisés et applications localement simples

Soient E et F deux $\mathbf{A}$-modules, et une application linéaire $\varphi : E \to F$. On peut voir cette donnée comme une sorte de système linéaire généralisé

(un système linéaire usuel correspond au cas de modules libres de rang fini). Informellement un tel système linéaire est considéré comme «bien conditionné» s'il y a une façon systématique de trouver une solution à l'équation en x, $\varphi(x) = y$, à partir de la donnée y, lorsqu'une telle solution existe. Plus précisément, on se demande s'il existe une application linéaire $\psi : F \to E$ vérifiant $\varphi\big(\psi(y)\big) = y$ chaque fois qu'il existe une solution x. Cela revient à demander $\varphi\big(\psi\big(\varphi(x)\big)\big) = \varphi(x)$ pour tout $x \in E$.
Ceci éclaire l'importance de l'équation (17) et conduit à la notion d'inverse généralisé.
La terminologie concernant les inverses généralisés ne semble pas entièrement fixée. Nous adoptons celle de [Lancaster & Tismenetsky].
Dans le livre [Bhaskara Rao], l'auteur utilise le terme «reflexive g-inverse».

5.16. Définition. Soient E et F deux $\mathbf{A}$-modules, et une application linéaire $\varphi : E \to F$. Une application linéaire $\psi : F \to E$ est appelée un *inverse généralisé* de φ si l'on a

$$\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi \quad \text{et} \quad \psi \circ \varphi \circ \psi = \psi. \tag{21}$$

Une application linéaire est dite *localement simple* lorsqu'elle possède un inverse généralisé.

Le fait suivant est immédiat.

5.17. Fait. *Lorsque ψ est un inverse généralisé de φ, on a :*

- *$\varphi\,\psi$ et $\psi\,\varphi$ sont des projections,*
- *$\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Im}\varphi\,\psi$, $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Im}\psi\,\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\psi\,\varphi$, $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Ker}\varphi\,\psi$,*
- *$E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\psi$ et $F = \operatorname{Ker}\psi \oplus \operatorname{Im}\varphi$,*
- *$\operatorname{Ker}\varphi \simeq \operatorname{Coker}\psi$ et $\operatorname{Ker}\psi \simeq \operatorname{Coker}\varphi$.*

En outre φ et ψ donnent par restriction des isomorphismes réciproques φ_1 et ψ_1 entre $\operatorname{Im}\psi$ et $\operatorname{Im}\varphi$. Matriciellement on obtient :

$$\begin{array}{c} \\ \operatorname{Im}\varphi \\ \operatorname{Ker}\psi \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \operatorname{Im}\psi & \operatorname{Ker}\varphi \end{array} \\ \begin{bmatrix} \varphi_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \varphi, \qquad \begin{array}{c} \\ \operatorname{Im}\psi \\ \operatorname{Ker}\varphi \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \operatorname{Im}\varphi & \operatorname{Ker}\psi \end{array} \\ \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} = \psi.$$

Remarques.
1) Si l'on a une application linéaire ψ_0 vérifiant comme dans le théorème 5.14 l'égalité $\varphi\,\psi_0\,\varphi = \varphi$, on obtient un inverse généralisé de φ en posant $\psi = \psi_0\,\varphi\,\psi_0$. Autrement dit, une application linéaire φ est localement simple si, et seulement si, il existe ψ vérifiant $\varphi\,\psi\,\varphi = \varphi$.
2) Une application linéaire simple entre modules libres de rangs finis est localement simple (vérification immédiate).
3) Le théorème 5.14 nous dit qu'une application linéaire qui possède un rang k au sens de la définition 5.7 est localement simple. ∎

5.18. Fait. *Soit une application linéaire $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application linéaire φ est localement simple.*
2. *Il existe $\varphi^\bullet : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$ telle que*
$$\mathbf{A}^n = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \operatorname{Im}\varphi^\bullet \text{ et } \mathbf{A}^m = \operatorname{Ker}\varphi^\bullet \oplus \operatorname{Im}\varphi.$$
3. *Le sous-module $\operatorname{Im}\varphi$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^m$.*

D *1 ⇒ 2.* Si ψ est un inverse généralisé de φ, on peut prendre $\varphi^\bullet = \psi$.
2 ⇒ 3. Évident.
3 ⇒ 1. Si $\mathbf{A}^m = P \oplus \operatorname{Im}\varphi$, notons $\pi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^m$ la projection sur $\operatorname{Im}\varphi$ parallèlement à P. Pour chaque vecteur e_i de la base canonique de $\mathbf{A}^m$ il existe un élément a_i de $\mathbf{A}^n$ tel que $\varphi(a_i) = \pi(e_i)$. On définit $\psi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$ par $\psi(e_i) = a_i$. Alors, $\varphi \circ \psi = \pi$ et $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \pi \circ \varphi = \varphi$. Et $\psi \circ \varphi \circ \psi$ est un inverse généralisé de φ. □

La notion d'application linéaire localement simple est une notion locale au sens suivant.

5.19. Principe local-global concret. (Applications linéaires localement simples) *Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$. Soit une application linéaire $\varphi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^q$. Si les $\varphi_{S_i} : \mathbf{A}^m_{S_i} \to \mathbf{A}^q_{S_i}$ sont simples, alors φ est localement simple. Plus généralement φ est localement simple si, et seulement si, les φ_{S_i} sont localement simples.*

D Voyons la deuxième affirmation. Montrer que φ est localement simple revient à trouver ψ vérifiant $\varphi\,\psi\,\varphi = \varphi$. Ceci est un système linéaire en les coefficients de la matrice de ψ et l'on peut donc appliquer le principe local-global concret de base (principe 2.3). □

La terminologie d'application linéaire localement simple est justifiée par le principe local-global précédent et par la réciproque donnée au point *8* du théorème 5.26 (voir aussi le lemme de l'application localement simple dans le cas des anneaux locaux, page 501).

Grassmanniennes

Le théorème suivant sert d'introduction aux variétés grassmanniennes. Il résulte du fait 5.18 et du théorème 5.14.

5.20. Théorème. (Sous-modules de type fini en facteur direct dans un module libre) *Soit $M = \langle C_1, \ldots, C_m\rangle$ un sous-module de type fini de $\mathbf{A}^n$ et $C = [\,C_1\ \cdots\ C_m\,] \in \mathbf{A}^{n\times m}$ la matrice correspondante.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *La matrice C est localement simple.*
   b. *Le module M est en facteur direct dans $\mathbf{A}^n$.*
   c. *Le module M est l'image d'une matrice $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$.*

2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *La matrice C est de rang k.*
   b. *Le module M est l'image d'une matrice $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ de rang k.*

La « variété » des droites vectorielles dans un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $n+1$ est, intuitivement, de dimension n, car une droite dépend pour l'essentiel de n paramètres (un vecteur non nul, à une constante multiplicative près, cela fait $(n+1)-1$ paramètres indépendants). On appelle cette variété l'espace projectif de dimension n sur $\mathbf{K}$.
Par ailleurs, en passant d'un corps $\mathbf{K}$ à un anneau arbitraire $\mathbf{A}$, la bonne généralisation d'une « droite vectorielle dans $\mathbf{K}^{n+1}$ » est « l'image d'une matrice de projection de rang 1 dans $\mathbf{A}^{n+1}$ ». Ceci conduit aux définitions suivantes.

5.21. Définition.

1. On définit l'espace $\mathbb{GA}_{n,k}(\mathbf{A}) \subseteq \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ comme l'ensemble des matrices de projection de rang k et $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{A})$ comme l'ensemble des sous-modules de $\mathbf{A}^n$ qui sont images de matrices de $\mathbb{GA}_{n,k}(\mathbf{A})$.
2. L'espace $\mathbb{G}_{n+1,1}(\mathbf{A})$ est encore noté $\mathbb{P}^n(\mathbf{A})$ et on l'appelle l'*espace projectif de dimension n sur $\mathbf{A}$*.
3. On note $\mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ l'espace de tous les sous-modules en facteur direct dans $\mathbf{A}^n$ (i.e., images d'une matrice de projection).

Naturellement la définition ci-dessus est peu satisfaisante, dans la mesure où on n'explique pas comment est structuré l'ensemble $\mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{A})$. Seule cette structure lui fait mériter son nom d'« espace ».
Une réponse partielle est donnée par la constatation que $\mathbb{G}_{n,k}$ est un foncteur. Plus précisément, à tout homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ on associe une application naturelle $\mathbb{G}_{n,k}(\varphi) : \mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{A}) \to \mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{B})$, avec notamment

$$\mathbb{G}_{n,k}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}) = \mathrm{Id}_{\mathbb{G}_{n,k}(\mathbf{A})}, \text{ et } \mathbb{G}_{n,k}(\psi \circ \varphi) = \mathbb{G}_{n,k}(\psi) \circ \mathbb{G}_{n,k}(\varphi),$$

lorsque $\psi \circ \varphi$ est défini.

Critères d'injectivité et de surjectivité

Deux propositions célèbres sont contenues dans le théorème suivant.

5.22. Théorème. *Soit $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ une application linéaire de matrice A.*

1. *L'application φ est surjective si, et seulement si, φ est de rang m, c'est-à-dire ici $\mathcal{D}_m(\varphi) = \langle 1 \rangle$ (on dit alors que A est* unimodulaire*).*
2. (Théorème de McCoy) *L'application φ est injective si, et seulement si, l'idéal $\mathcal{D}_n(\varphi)$ est fidèle, c.-à-d. si $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathcal{D}_n(\varphi)\big) = 0$.*

▷ *1.* Si φ est surjective, elle admet une inverse à droite ψ, et le fait 5.6 donne $\langle 1 \rangle = \mathcal{D}_m(\mathrm{I}_m) \subseteq \mathcal{D}_m(\varphi)\mathcal{D}_m(\psi)$, donc $\mathcal{D}_m(\varphi) = \langle 1 \rangle$. Réciproquement,

si A est de rang m, l'équation (18) montre que A admet une inverse à droite, et φ est surjective.
2. Supposons que $\mathcal{D}_n(A)$ est fidèle. D'après l'égalité (16), si $AV = 0$, alors $\mu_{\alpha,1..n}V = 0$ pour tous les générateurs $\mu_{\alpha,1..n}$ de $\mathcal{D}_n(A)$, et donc $V = 0$.
Pour la réciproque [9], nous montrons par récurrence sur k la propriété suivante : *si k vecteurs colonnes $x_1, \dots, x_k$ sont linéairement indépendants, alors l'annulateur du vecteur $x_1 \wedge \cdots \wedge x_k$ est réduit à* 0. Pour $k = 1$ c'est trivial. Pour passer de k à $k + 1$ nous raisonnons comme suit. Soit z un scalaire annulant $x_1 \wedge \cdots \wedge x_{k+1}$. Pour $\alpha \in \mathcal{P}_{k,m}$, nous notons $d_\alpha(y_1, \dots, y_k)$ le mineur extrait sur les lignes indices de α pour les vecteurs colonnes $y_1, \dots, y_k$ de $\mathbf{A}^m$. Puisque $z(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{k+1}) = 0$, et vues les formules de Cramer, on a l'égalité

$$z\left(d_\alpha(x_1, \dots, x_k)x_{k+1} - d_\alpha(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1})x_k + \cdots\right) = 0,$$

donc $z\, d_\alpha(x_1, \dots, x_k) = 0$.
Comme ceci est vrai pour tout α, cela donne $z(x_1 \wedge \cdots \wedge x_k) = 0$. Et par l'hypothèse de récurrence, $z = 0$. □

Remarque. Le théorème 5.22 peut se relire sous la forme suivante.

1. L'application linéaire $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ est surjective si, et seulement si, l'application $\bigwedge^m \varphi : \mathbf{A}^{\binom{n}{m}} \to \mathbf{A}$ est surjective.
2. L'application linéaire $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ est injective si, et seulement si, l'application $\bigwedge^n \varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^{\binom{m}{n}}$ est injective. ∎

5.23. Corollaire. *Soit une application $\mathbf{A}$-linéaire $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$.*

1. *Si φ est surjective et $n < m$, l'anneau est trivial.*
2. *Si φ est injective et $n > m$, l'anneau est trivial.*

Remarque. Une formulation plus positive, équivalente, mais sans doute encore plus déroutante, pour les résultats du corollaire précédent est la suivante.

1. Si φ est surjective, alors X^m divise X^n dans $\mathbf{A}[X]$.
2. Si φ est injective, alors X^n divise X^m dans $\mathbf{A}[X]$.

D'une certaine manière, cela se rapproche plus de la formulation en mathématiques classiques : si l'anneau est non trivial, alors $m \leqslant n$ dans le premier cas (resp. $n \leqslant m$ dans le deuxième cas).
L'avantage de nos formulations est qu'elles fonctionnent dans tous les cas, sans avoir besoin de présupposer que l'on sache décider si l'anneau est trivial ou pas. ∎

9. Voir aussi la démonstration alternative donnée en XV-8.7.

5.24. Corollaire. *Si $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ est injective, il en va de même pour toute puissance extérieure de φ.*

▷ L'annulateur de $\mathcal{D}_n(\varphi)$ est réduit à 0 par le théorème précédent. Il existe un anneau $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ tel que les générateurs de $\mathcal{D}_n(\varphi)$ deviennent comaximaux dans $\mathbf{B}$ (lemme 2.14). L'application $\mathbf{B}$-linéaire $\varphi_1 : \mathbf{B}^n \to \mathbf{B}^m$ obtenue en étendant φ à $\mathbf{B}$, est donc de rang n et admet un inverse à gauche ψ (point *3* du théorème 5.14), c'est-à-dire $\psi \circ \varphi_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}^n}$. Par suite

$$\textstyle\bigwedge^k \psi \circ \bigwedge^k \varphi_1 = \mathrm{Id}_{\bigwedge^k \mathbf{B}^n}.$$

Ainsi la matrice de $\bigwedge^k \varphi_1$, est injective. Et puisque c'est la même matrice que celle de $\bigwedge^k \varphi$, l'application linéaire $\bigwedge^k \varphi$ est injective. □

Caractérisation des applications localement simples

Le lemme suivant met en correspondance bijective les systèmes fondamentaux d'idempotents orthogonaux et les suites d'idempotents croissantes pour la divisibilité.

5.25. Lemme. *Soit une liste d'idempotents $(e_{q+1} = 0,\ e_q,\ \ldots,\ e_1,\ e_0 = 1)$ telle que e_i divise e_{i+1} pour $i = 0, \ldots, q$. Alors, les éléments $r_i := e_i - e_{i+1}$ pour $i \in [\![0..q]\!]$, forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Réciproquement, tout système fondamental d'idempotents orthogonaux $(r_0, \ldots, r_q)$ définit une telle liste d'idempotents en posant*

$$e_j = \textstyle\sum_{k \geqslant j} r_k \text{ pour } j \in [\![0..q+1]\!].$$

▷ Il est clair que $\sum_i r_i = 1$. Pour $0 \leqslant i < q$, on a $e_{i+1} = e_i e_{i+1}$.
D'où $(e_i - e_{i+1})e_{i+1} = 0$, c'est-à-dire $(r_q + \cdots + r_{i+1}) \cdot r_i = 0$. On en déduit facilement que $r_i r_j = 0$ pour $j > i$. □

On note $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ la matrice diagonale d'ordre n dont le coefficient en position (i, i) est l'élément a_i.
Dans le théorème qui suit certains des idempotents r_i dans le système fondamental d'idempotents orthogonaux peuvent très bien être nuls. Par exemple si l'anneau est connexe et non trivial ils sont tous nuls sauf un.

5.26. Théorème. (Matrice localement simple) *Soit $G \in \mathbf{A}^{m \times n}$ la matrice d'une application linéaire $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$ et $q = \inf(m, n)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application linéaire φ est localement simple.*
2. *Le sous-module $\mathrm{Im}\,\varphi$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^m$.*
3. *$\mathrm{Im}\,\varphi$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^m$ et $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est facteur direct dans $\mathbf{A}^n$.*
4. *Il existe une application linéaire $\varphi^\bullet : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$ avec $\mathbf{A}^n = \mathrm{Ker}\,\varphi \oplus \mathrm{Im}\,\varphi^\bullet$ et $\mathbf{A}^m = \mathrm{Ker}\,\varphi^\bullet \oplus \mathrm{Im}\,\varphi$.*
5. *Chaque idéal déterminantiel $\mathcal{D}_k(\varphi)$ est idempotent.*

6. *Il existe un (unique) système fondamental d'idempotents orthogonaux* $(r_0, r_1, \ldots, r_q)$ *tel que sur chaque localisé* $\mathbf{A}[1/r_k]$ *l'application* φ *est de rang* k.
7. *Chaque idéal déterminantiel* $\mathcal{D}_k(\varphi)$ *est engendré par un idempotent* e_k. *Soit alors* $r_k = e_k - e_{k+1}$. *Les* r_k *forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Pour tout mineur* μ *d'ordre* k *de* G, *sur le localisé* $\mathbf{A}[1/(r_k\,\mu)]$ *l'application linéaire* φ *devient simple de rang* k.
8. *L'application linéaire* φ *devient simple après localisation en des éléments comaximaux convenables.*
9. *Chaque idéal déterminantiel* $\mathcal{D}_k(\varphi)$ *est engendré par un idempotent* e_k *et la matrice de* φ *devient équivalente à la matrice* $\mathrm{Diag}(e_1, e_2, \ldots, e_q)$, *éventuellement complétée par des lignes ou colonnes nulles, après localisation en des éléments comaximaux convenables.*
10.* *L'application linéaire* φ *devient simple après localisation en n'importe quel idéal maximal.*

D L'équivalence des points *1*, *2*, *3*, *4* est déjà claire (voir les faits 5.17 et 5.18). Par ailleurs, on a trivialement *7* $\Rightarrow$ *6* $\Rightarrow$ *5* et *9* $\Rightarrow$ *5*.
Puisque $q = \inf(m, n)$, on a $\mathcal{D}_{q+1}(\varphi) = 0$.
1 $\Rightarrow$ *5*. On a $GHG = G$ pour une certaine matrice H et l'on applique le fait 5.6.
5 $\Rightarrow$ *7*. Le fait que chaque $\mathcal{D}_k(\varphi)$ est engendré par un idempotent e_k résulte du fait 4.6. Le fait que $(r_0, \ldots, r_q)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux résulte du lemme 5.25 (et du fait 5.4).
Comme $r_k e_{k+1} = 0$, sur l'anneau $\mathbf{A}[1/r_k]$, et donc sur l'anneau $\mathbf{A}[1/(\mu r_k)]$, où μ est un mineur d'ordre k, tous les mineurs d'ordre $k+1$ de la matrice G sont nuls. Donc, par le lemme de la liberté, G est simple de rang k.
7 $\Rightarrow$ *9*. Sur $\mathbf{A}[1/r_k]$ et donc sur $\mathbf{A}[1/(\mu r_k)]$ (μ un mineur d'ordre k), on a $\mathrm{Diag}(e_1, \ldots, e_q) = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ avec k fois 1.
7 $\Rightarrow$ *8*. Notons $t_{k,j}$ les mineurs d'ordre k de G. Les localisations sont celles en les $t_{k,j} r_k$. Nous devons vérifier qu'elles sont comaximales. Chaque e_k s'écrit sous forme $\sum t_{k,j} v_{k,j}$, donc $\sum_{k,j} v_{k,j}(t_{k,j} r_k) = \sum_k e_k r_k = \sum r_k = 1$.
8 $\Rightarrow$ *1*. Par application du principe local-global 5.19 puisque toute application simple est localement simple.
8 $\Rightarrow$ *10*. (En mathématiques classiques.) Parce que le complémentaire d'un idéal maximal contient toujours au moins un élément dans un système d'éléments comaximaux (on peut supposer l'anneau non trivial).
10 $\Rightarrow$ *8*. (En mathématiques classiques.) Pour chaque idéal maximal $\mathfrak{m}$ on obtient un $s_\mathfrak{m} \notin \mathfrak{m}$ et une matrice $H_\mathfrak{m}$ tels que l'on ait $GH_\mathfrak{m}G = G$ dans $\mathbf{A}[1/s_\mathfrak{m}]$. L'idéal engendré par les $s_\mathfrak{m}$ n'est contenu dans aucun idéal maximal donc c'est l'idéal $\langle 1 \rangle$. Il y a donc un nombre fini de ces $s_\mathfrak{m}$ qui sont comaximaux.

Terminons en donnant une preuve directe pour l'implication *6* $\Rightarrow$ *1*.
Sur l'anneau $\mathbf{A}[1/r_k]$ la matrice G est de rang k donc il existe une matrice B_k vérifiant $GB_kG = G$ (théorème 5.14). Ceci signifie sur l'anneau $\mathbf{A}$ que l'on a une matrice H_k dans $\mathbf{A}^{n\times m}$ vérifiant $r_kH_k = H_k$ et $r_kG = GH_kG$. On prend alors $H = \sum_k H_k$ et l'on obtient $G = GHG$. □

L'équivalence des points *1* à *9* a été établie de manière constructive, tandis que le point *10* implique les précédents uniquement en mathématiques classiques.

Trace, norme, discriminant, transitivité

Nous notons $\mathrm{Tr}(\varphi)$ et $\mathrm{C}_\varphi(X)$ la trace et le *polynôme caractéristique* d'un endomorphisme φ d'un module libre de rang fini (nous prenons pour polynôme caractéristique d'une matrice $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ le polynôme $\det(X\mathrm{I}_n - F)$, qui a l'avantage d'être unitaire).

5.27. Notation.

- Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et si $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang fini, on note $[\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,]$ pour $\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$.
- Pour $a \in \mathbf{B}$ on note alors $\mathrm{Tr}_{\mathbf{B/A}}(a)$, $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(a)$ et $\mathrm{C}_{\mathbf{B/A}}(a)(X)$ la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique de la multiplication par a, vue comme endomorphisme du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$.

5.28. Lemme. *Supposons que* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *et que* $\mathbf{B}$ *est un* $\mathbf{A}$*-module libre de rang fini* m*.*

1. *Soit* E *un* $\mathbf{B}$*-module libre de rang fini* n*. Si* $\underline{e} = (e_i)_{i\in[\![1..m]\!]}$ *est une base de* $\mathbf{B}$ *sur* $\mathbf{A}$ *et* $\underline{f} = (f_j)_{j\in[\![1..n]\!]}$ *une base de* E *sur* $\mathbf{B}$*, alors* $(e_if_j)_{i,j}$ *est une base de* E *sur* $\mathbf{A}$*. En conséquence,* E *est libre sur* $\mathbf{A}$ *et*
$$\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(E) = \mathrm{rg}_{\mathbf{B}}(E) \times \mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}).$$
2. *Si* $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ *et si* $\mathbf{C}$ *est un* $\mathbf{B}$*-module libre de rang fini, on a*
$$[\,\mathbf{C} : \mathbf{A}\,] = [\,\mathbf{C} : \mathbf{B}\,]\,[\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,].$$

Remarque. Soit $\mathbf{C} = \mathbf{A}[Y]/\langle Y^3\rangle = \mathbf{A}[y]$, c'est une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang 3. Puisque $y^4 = 0$, $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}y^2$ est une sous-algèbre de $\mathbf{C}$ libre sur $\mathbf{A}$ dont le rang (égal à 2) ne divise pas le rang de $\mathbf{C}$ (égal à 3). L'égalité $[\,\mathbf{C} : \mathbf{A}\,] = [\,\mathbf{C} : \mathbf{B}\,][\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,]$ ne s'applique pas car $\mathbf{C}$ n'est pas libre sur $\mathbf{B}$. ∎

5.29. Théorème. (Formules de transitivité pour la trace, le déterminant et le polynôme caractéristique) *Sous les mêmes hypothèses soit* $u_{\mathbf{B}} : E \to E$ *une application* $\mathbf{B}$*-linéaire. On note* $u_{\mathbf{A}}$ *cette application considérée comme une application* $\mathbf{A}$*-linéaire. On a alors les égalités :*

$$\det(u_{\mathbf{A}}) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\det(u_{\mathbf{B}})\big),\ \ \mathrm{Tr}(u_{\mathbf{A}}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\mathrm{Tr}(u_{\mathbf{B}})\big),$$
$$\mathrm{C}_{u_{\mathbf{A}}}(X) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[X]/\mathbf{A}[X]}\big(\mathrm{C}_{u_{\mathbf{B}}}(X)\big).$$

▷ On prend les notations du lemme 5.28. Soient u_{kj} les éléments de $\mathbf{B}$ définis par $u(f_j) = \sum_{k=1}^{n} u_{kj} f_k$. Alors, la matrice M de $u_{\mathbf{A}}$ sur la base $(e_i f_j)_{i,j}$ s'écrit comme une matrice par blocs

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & \cdots & M_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ M_{n1} & \cdots & M_{nn} \end{bmatrix},$$

où M_{kj} représente l'application $\mathbf{A}$-linéaire $b \mapsto bu_{kj}$ de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{B}$ sur la base $\underline{e}$. Cela fournit la relation sur la trace puisque :

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(u_{\mathbf{A}}) = \ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}(M_{ii}) \ &= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(u_{ii}) \\ = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\sum_{i=1}^{n} u_{ii}\big) \ &= \ \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\mathrm{Tr}(u_{\mathbf{B}})\big).\end{aligned}$$

Quant à l'égalité pour le déterminant, remarquons que les matrices M_{ij} commutent deux à deux (M_{ij} est la matrice de la multiplication par u_{ij}). On peut donc appliquer le lemme 5.30 qui suit, ce qui nous donne :

$$\det(M) = \det(\Delta) \qquad \text{avec} \qquad \Delta = \textstyle\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) M_{1\sigma_1} M_{2\sigma_2} \dots M_{n\sigma_n}.$$

Or Δ n'est autre que la matrice de la multiplication par l'élément

$$\textstyle\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) u_{1\sigma_1} u_{2\sigma_2} \dots u_{n\sigma_n},$$

i.e., par $\det(u_{\mathbf{B}})$, donc :

$$\det(u_{\mathbf{A}}) = \det(M) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\det(u_{\mathbf{B}})\big).$$

Enfin, l'égalité sur le polynôme caractéristique se déduit de celle sur les déterminants en utilisant le fait que $\mathrm{C}_{u_{\mathbf{A}}}(X)$ est le déterminant de l'endomorphisme $X\mathrm{Id}_{E[X]} - u_{\mathbf{A}}$ du $\mathbf{A}[X]$-module $E[X]$ tandis que $\mathrm{C}_{u_{\mathbf{B}}}(X)$ est celui de la même application vue comme endomorphisme du $\mathbf{B}[X]$-module $E[X]$.□

Dans un anneau non commutatif, deux éléments a et b sont dits *permutables* si $ab = ba$.

5.30. Lemme. *Soit $(N_{ij})_{i,j}$ une famille de n^2 matrices carrées $\in \mathbb{M}_m(\mathbf{A})$, deux à deux permutables, et N la matrice carrée d'ordre mn :*

$$N = \begin{bmatrix} N_{11} & \cdots & N_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ N_{n1} & \cdots & N_{nn} \end{bmatrix}.$$

Alors : $\det(N) = \det\big(\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, N_{1\sigma_1} N_{2\sigma_2} \dots N_{n\sigma_n}\big)$.

▷ Notons Δ la matrice $n\times n$ définie par $\Delta = \sum_{\sigma\in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) N_{1\sigma_1} N_{2\sigma_2} \dots N_{n\sigma_n}$. Il faut donc démontrer que $\det(N) = \det(\Delta)$.
Traitons les cas particuliers $n = 2$ puis $n = 3$. On remplace $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}[Y]$ et N_{ii} par $N_{ii} + Y\mathrm{I}_m$, ce qui a l'avantage de rendre certains déterminants réguliers dans $\mathbf{A}[Y]$. Il suffit d'établir les égalités avec ces nouvelles matrices, car on termine en faisant $Y = 0$.

Le point-clef de la démonstration pour $n = 2$ réside dans l'égalité suivante :

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{22} & 0 \\ -N_{21} & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21} & N_{12} \\ 0 & N_{22} \end{bmatrix}.$$

On considère ensuite le déterminant des deux membres :

$$\det(N)\det(N_{22}) = \det(N_{11}N_{22} - N_{12}N_{21})\det(N_{22}),$$

puis on simplifie par $\det(N_{22})$ (qui est régulier) pour obtenir le résultat.
Le cas $n = 3$ passe par l'égalité :

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_{22}N_{33} - N_{23}N_{32} & 0 & 0 \\ N_{31}N_{23} - N_{21}N_{33} & \mathrm{I}_m & 0 \\ N_{21}N_{32} - N_{22}N_{31} & 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & N_{12} & N_{13} \\ 0 & N_{22} & N_{23} \\ 0 & N_{32} & N_{33} \end{bmatrix},$$

qui conduit à

$$\det(N)\det(N_{22}N_{33} - N_{23}N_{32}) = \det(\Delta)\det\begin{bmatrix} N_{22} & N_{23} \\ N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}.$$

Le cas $n = 2$ fournit $\det(N_{22}N_{33} - N_{23}N_{32}) = \det\begin{bmatrix} N_{22} & N_{23} \\ N_{32} & N_{33} \end{bmatrix}$. On simplifie par ce déterminant et on obtient $\det(N) = \det(\Delta)$.
Le cas général est laissé au lecteur (voir l'exercice 28). □

5.31. Corollaire. *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ *trois anneaux avec* $\mathbf{C}$ *libre de rang fini sur* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{B}$ *libre de rang fini sur* $\mathbf{A}$. *On a les égalités suivantes :*

$$\mathrm{N}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}} = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} \circ \mathrm{N}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}, \quad \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}},$$

$$\mathrm{C}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(c)(X) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[X]/\mathbf{A}[X]}\big(\mathrm{C}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}(c)(X)\big) \text{ pour } c \in \mathbf{C}.$$

Déterminants de Gram et discriminants

5.32. Définition. Soit M un $\mathbf{A}$-module, $\varphi : M \times M \to \mathbf{A}$ une forme bilinéaire symétrique et $\underline{x} = x_1, \ldots, x_k$ une liste d'éléments de M. On appelle *matrice de Gram de* $(x_1, \ldots, x_k)$ *pour* φ la matrice

$$\mathrm{Gram}_{\mathbf{A}}(\varphi, \underline{x}) \stackrel{\text{def}}{=} \big(\varphi(x_i, x_j)\big)_{i,j \in [\![1..k]\!]}.$$

Son déterminant est appelé le *déterminant de Gram de* $(x_1, \ldots, x_k)$ *pour* φ, il est noté $\mathrm{gram}_{\mathbf{A}}(\varphi, \underline{x})$.

Si $\mathbf{A}y_1 + \cdots + \mathbf{A}y_k \subseteq \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_k$ on a une égalité

$$\mathrm{gram}(\varphi, y_1, \ldots, y_k) = \det(A)^2 \,\mathrm{gram}(\varphi, x_1, \ldots, x_k),$$

où A est une matrice $k \times k$ qui exprime les y_j en fonction des x_i.

Nous introduisons maintenant un cas important de déterminant de Gram, le discriminant. Rappelons que deux éléments a, b d'un anneau $\mathbf{A}$ sont dits *associés* s'il existe $u \in \mathbf{A}^\times$ tels que $a = ub$.

5.33. Proposition et définition. *Soit* $\mathbf{C} \supseteq \mathbf{A}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre qui est un* $\mathbf{A}$*-module libre de rang fini et* $x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_k \in \mathbf{C}$.

1. *On appelle* discriminant *de* $(x_1, \ldots, x_k)$ *le déterminant de la matrice*
$$\big(\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(x_i x_j)\big)_{i,j\in[\![1..k]\!]}.$$
On le note $\mathrm{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_k)$ *ou* $\mathrm{disc}(x_1, \ldots, x_k)$.
2. *Si* $\mathbf{A}y_1 + \cdots + \mathbf{A}y_k \subseteq \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_k$ *on a*
$$\mathrm{disc}(y_1, \ldots, y_k) = \det(A)^2 \,\mathrm{disc}(x_1, \ldots, x_k),$$
où A *est une matrice* $k \times k$ *qui exprime les* y_j *en fonction des* x_i.
3. *En particulier, si* $(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $(y_1, \ldots, y_n)$ *sont deux bases de* $\mathbf{C}$ *comme* $\mathbf{A}$*-module, les éléments* $\mathrm{disc}(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\mathrm{disc}(y_1, \ldots, y_n)$ *sont congrus multiplicativement modulo les carrés de* $\mathbf{A}^\times$. *On appelle* discriminant de l'extension $\mathbf{C}/\mathbf{A}$ *la classe d'équivalence correspondante. On le note* $\mathrm{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}$.
4. *Si* $\mathrm{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}$ *est régulier et* $n = [\,\mathbf{C} : \mathbf{A}\,]$, *un système* $u_1, \ldots, u_n$ *dans* $\mathbf{C}$ *est une* $\mathbf{A}$*-base de* $\mathbf{C}$ *si, et seulement si,* $\mathrm{disc}(u_1, \ldots, u_n)$ *et* $\mathrm{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}$ *sont associés.*

Par exemple dans le cas où $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$ le discriminant de l'extension est un entier bien défini, tandis que si $\mathbf{A} = \mathbb{Q}$, le discriminant est caractérisé d'une part par son signe, d'autre part par la liste des nombres premiers qui y figurent avec une puissance impaire.

5.34. Proposition. *Soient* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *deux* $\mathbf{A}$*-algèbres libres de rangs* m *et* n. *Soit l'algèbre produit* $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$. *Étant données une liste* $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_m)$ *d'éléments de* $\mathbf{B}$ *et une liste* $(\underline{y}) = (y_1, \ldots, y_n)$ *d'éléments de* $\mathbf{C}$, *on a :*
$$\mathrm{disc}_{(\mathbf{B}\times\mathbf{C})/\mathbf{A}}(\underline{x}, \underline{y}) = \mathrm{disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\underline{x}) \times \mathrm{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(\underline{y}).$$
En particulier, $\mathrm{Disc}_{(\mathbf{B}\times\mathbf{C})/\mathbf{A}} = \mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} \times \mathrm{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}$.

▷ La démonstration est laissée à la lectrice. □

5.35. Proposition. *Soit* $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre libre de rang fini* p.
On considère
- *un* $\mathbf{B}$*-module* E,
- *une forme* $\mathbf{B}$*-bilinéaire symétrique* $\varphi_{\mathbf{B}} : E \times E \to \mathbf{B}$,
- *une base* $(\underline{b}) = (b_i)_{i\in[\![1..p]\!]}$ *de* $\mathbf{B}$ *sur* $\mathbf{A}$, *et*
- *une famille* $(\underline{e}) = (e_j)_{j\in[\![1..n]\!]}$ *de* n *éléments de* E.

Notons $(\underline{b} \star \underline{e})$ *la famille* $(b_i e_j)$ *de* np *éléments de* E *et* $\varphi_{\mathbf{A}} : E \times E \to \mathbf{A}$ *la forme* $\mathbf{A}$*-bilinéaire symétrique définie par :*
$$\varphi_{\mathbf{A}}(x, y) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\varphi_{\mathbf{B}}(x, y)\big).$$
On a alors la formule de transitivité suivante :
$$\mathrm{gram}(\varphi_{\mathbf{A}}, \underline{b} \star \underline{e}) = \mathrm{disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\underline{b})^n \times \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\mathrm{gram}(\varphi_{\mathbf{B}}, \underline{e})\big).$$

▷ Dans la suite les indices i, i', k, j, j' satisfont à i, i', $k \in [\![1..p]\!]$ et j, $j' \in [\![1..n]\!]$. Convenons de ranger $\underline{b} \star \underline{e}$ dans l'ordre

$$\underline{b} \star \underline{e} = b_1e_1, \dots, b_pe_1, b_1e_2, \dots, b_pe_2, \dots, b_1e_n, \dots, b_pe_n.$$

Pour $x \in \mathbf{B}$, notons $\mu_x : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ la multiplication par x et $m(x)$ la matrice de μ_x dans la base $(b_i)_{i\in[\![1..p]\!]}$ de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$. On définit ainsi un isomorphisme m de l'anneau $\mathbf{B}$ vers un sous-anneau commutatif de $\mathbb{M}_p(\mathbf{A})$. Si l'on note $m_{ki}(x)$ les coefficients de la matrice $m(x)$, on a donc :

$$\mu_x(b_i) = b_ix = \textstyle\sum_{k=1}^p m_{ki}(x)b_k,$$

avec $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(x) = \det\big(m(x)\big)$. En posant $\varphi_{jj'} = \varphi_{\mathbf{B}}(e_j, e_{j'}) \in \mathbf{B}$, on a

$$\varphi_{\mathbf{A}}(b_ie_jb_{i'}e_{j'}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\varphi_{\mathbf{B}}(b_ie_jb_{i'}e_{j'})\big) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_ib_{i'}\varphi_{jj'}).$$

En utilisant l'égalité $b_{i'}\varphi_{jj'} = \sum_{k=1}^p m_{ki'}(\varphi_{jj'})\, b_k$, il vient avec $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$:

$$\mathrm{Tr}(b_ib_{i'}\varphi_{jj'}) = \mathrm{Tr}\Big(\sum\nolimits_{k=1}^p b_i\, m_{ki'}(\varphi_{jj'})\, b_k\Big) = \sum\nolimits_{k=1}^p \mathrm{Tr}(b_ib_k)\, m_{ki'}(\varphi_{jj'}). \quad (*)$$

On définit $\beta \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ par $\beta_{ik} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_ib_k)$. La somme de droite dans $(*)$ n'est autre que le coefficient d'un produit de matrices : $\big(\beta \cdot m(\varphi_{jj'})\big)_{ii'}$. Le déterminant de Gram de $\underline{b}\star\underline{e}$ pour $\varphi_{\mathbf{A}}$ est donc une matrice $np\times np$ constituée de n^2 blocs de matrices $p \times p$. Voici cette matrice en notant $\phi_{jj'} = m(\varphi_{jj'})$ pour alléger l'écriture :

$$\begin{bmatrix} \beta\phi_{11} & \beta\phi_{12} & \dots & \beta\phi_{1n} \\ \beta\phi_{21} & \beta\phi_{22} & \dots & \beta\phi_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \beta\phi_{n1} & \beta\phi_{n2} & \dots & \beta\phi_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \dots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

En prenant les déterminants on obtient

$$\mathrm{gram}(\varphi_{\mathbf{A}}, \underline{b} \star \underline{e}) = \det(\beta)^n \cdot \det \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \dots & \phi_{1n} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \dots & \phi_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \phi_{n1} & \phi_{n2} & \dots & \phi_{nn} \end{bmatrix}.$$

En utilisant le fait que les matrices ϕ_{jl} commutent deux à deux, on obtient que le déterminant de droite est égal à

$$\det\Big(\sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\phi_{1\sigma_1}\phi_{2\sigma_2}\dots\phi_{n\sigma_n}\Big) = \det m\big(\det(\varphi_{jl})\big) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\mathrm{gram}(\varphi_{\mathbf{B}}, \underline{e})\big),$$

ce qui démontre le résultat. □

5.36. Théorème. (Formule de transitivité pour les discriminants)
Soient $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, *avec* $\mathbf{B}$ *libre sur* $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ *libre sur* $\mathbf{B}$, $[\,\mathbf{C} : \mathbf{B}\,] = n$ *et* $[\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,] = m$. *Soit* $(\underline{b}) = (b_i)_{i\in[\![1..m]\!]}$ *une base de* $\mathbf{B}$ *sur* $\mathbf{A}$, $(\underline{c}) = (c_j)_{j\in[\![1..n]\!]}$

une base de $\mathbf{C}$ *sur* $\mathbf{B}$ *et notons* $(\underline{b} \star \underline{c})$ *la base* $(b_i c_j)$ *de* $\mathbf{C}$ *sur* $\mathbf{A}$. *Alors :*

$$\operatorname{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(\underline{b} \star \underline{c}) = \operatorname{disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\underline{b})^{[\mathbf{C}:\mathbf{B}]} \operatorname{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\operatorname{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}(\underline{c})\big),$$
$$\text{et donc} \quad \operatorname{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}} = \operatorname{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}^{[\mathbf{C}:\mathbf{B}]} \operatorname{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\operatorname{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}).$$

𝔇 Application directe de la proposition 5.35. □

6. Principe local-global de base pour les modules

Les résultats de cette section ne seront pas utilisés avant le chapitre V.
Nous allons donner une version un peu plus générale du principe local-global de base 2.3, version qui concerne des $\mathbf{A}$-modules et des applications linéaires arbitraires, tandis que le principe de base peut être considéré comme le cas particulier où les modules sont libres de rang fini. La preuve est essentiellement la même que celle du principe de base.
Auparavant nous commençons par un bref rappel sur les suites exactes et nous établissons quelques propriétés élémentaires de la localisation pour les modules.

Complexes et suites exactes

Lorsque l'on a des applications linéaires successives

$$M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\gamma} Q\ ,$$

on dit qu'elles forment un *complexe* si la composée de deux applications qui se suivent est nulle. On dit que la suite est *exacte en* N si $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$. La suite toute entière est dite exacte si elle est exacte en N et P. Ceci s'étend à des suites de longueur arbitraire.
Une *suite exacte courte* est une suite exacte du type

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \to 0$$

Dans ce cas, le module M s'identifie à un sous-module M' de N, et P s'identifie à N/M'.
Ce langage « abstrait » a une contrepartie immédiate en termes de systèmes linéaires lorsque l'on a affaire à des modules libres de rang fini. Par exemple si $N = \mathbf{A}^n$, $P = \mathbf{A}^m$ et si l'on a une suite exacte

$$0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\gamma} Q \to 0\ ,$$

l'application linéaire β est représentée par une matrice associée à un système linéaire de m équations à n inconnues, le module M, isomorphe à $\operatorname{Ker}\beta$, représente le défaut d'injectivité de β et le module Q, isomorphe à $\operatorname{Coker}\beta$,

représente son défaut de surjectivité.
Il est important de noter qu'une suite exacte du type

$$0 \to M_m \xrightarrow{u_m} M_{m-1} \longrightarrow \cdots\cdots\cdots \xrightarrow{u_1} M_0 \to 0$$

(avec $m \geqslant 3$) «se décompose» en $m-1$ *suites exactes courtes* selon le schéma suivant.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & E_2 & \xrightarrow{\iota_2} & M_1 & \xrightarrow{u_1} & M_0 & \to & 0 \\
0 & \to & E_3 & \xrightarrow{\iota_3} & M_2 & \xrightarrow{v_2} & E_2 & \to & 0 \\
 & & \vdots & & & & \vdots & & \\
0 & \to & E_{m-1} & \xrightarrow{\iota_{m-1}} & M_{m-2} & \xrightarrow{v_{m-2}} & E_{m-2} & \to & 0 \\
0 & \to & M_m & \xrightarrow{u_m} & M_{m-1} & \xrightarrow{v_{m-1}} & E_{m-1} & \to & 0
\end{array}$$

avec $E_i = \operatorname{Im} u_i \subseteq M_{i-1}$ pour $i \in [\![2..m-1]\!]$, les ι_k des injections canoniques, et les v_k obtenus à partir des u_k en restreignant le module image à $\operatorname{Im} u_k$.

Un thème important de l'algèbre commutative est fourni par les transformations qui conservent, ou ne conservent pas, les suites exactes.
Nous allons donner deux exemples de base, qui utilisent les modules d'applications linéaires.
Nous notons $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,P)$ le $\mathbf{A}$-module des applications $\mathbf{A}$-linéaires de M dans P et $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$ désigne $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,M)$ (avec sa structure d'anneau généralement non commutatif). Le *module dual* de M, $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,\mathbf{A})$ sera en général noté $M^\star$.

6.1. Fait. *Si $0 \to M \xrightarrow{\alpha} N \xrightarrow{\beta} P$ est une suite exacte de $\mathbf{A}$-modules, et si F est un $\mathbf{A}$-module, alors la suite*

$$0 \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,M) \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,N) \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,P)$$

est exacte.

▷ *Exactitude en* $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,M)$. Soit $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,M)$ telle que $\alpha \circ \varphi = 0$. Alors, puisque la première suite est exacte en M, pour tout $x \in F$, $\varphi(x) = 0$, donc $\varphi = 0$.
Exactitude en $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,N)$. Soit $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,N)$ telle que $\beta \circ \varphi = 0$. Alors, puisque la première suite est exacte en N, pour tout $x \in F$, $\varphi(x) \in \operatorname{Im}\alpha$. Soient $\alpha_1 : \operatorname{Im}\alpha \to M$ la bijection réciproque de α (lorsque l'on regarde α comme à valeurs dans $\operatorname{Im}\alpha$) et $\psi = \alpha_1 \varphi$.
On obtient alors les égalités $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,\alpha)(\psi) = \alpha\,\alpha_1\,\varphi = \varphi$. □

6.2. Fait. *Si $N \xrightarrow{\beta} P \xrightarrow{\gamma} Q \to 0$ est une suite exacte de $\mathbf{A}$-modules et si F est un $\mathbf{A}$-module, alors la suite*

$$0 \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(Q,F) \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,F) \longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(N,F)$$

est exacte.

▷ *Exactitude en* $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(Q,F)$. Si $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(Q,F)$ vérifie $\varphi\circ\gamma = 0$, alors, puisque γ est surjective, $\varphi = 0$.
Exactitude en $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,F)$. Si $\varphi : P \to F$ vérifie $\varphi\circ\beta = 0$, alors $\operatorname{Im}\beta \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$ et φ se factorise par $P/\operatorname{Im}\beta \simeq Q$, i.e. $\varphi = \psi\circ\gamma$ pour une application linéaire $\psi : Q \to F$, c'est-à-dire $\varphi \in \operatorname{Im}\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\gamma,F)$. □

6.3. Fait. *Soit $\beta : N \to P$ une application linéaire et $\gamma : P \to \operatorname{Coker}\beta$ la projection canonique.*

1. *L'application canonique ${}^{\mathrm{t}}\gamma : (\operatorname{Coker}\beta)^\star \to P^\star$ induit un isomorphisme de $(\operatorname{Coker}\beta)^\star$ sur $\operatorname{Ker}{}^{\mathrm{t}}\beta$.*
2. *Si les applications linéaires canoniques $N \to N^{\star\star}$ et $P \to P^{\star\star}$ sont des isomorphismes, alors la surjection canonique de $N^\star$ dans $\operatorname{Coker}{}^{\mathrm{t}}\beta$ fournit par dualité un isomorphisme de $(\operatorname{Coker}{}^{\mathrm{t}}\beta)^\star$ sur $\operatorname{Ker}\beta$.*

▷ *1.* On applique le fait 6.2 avec $F = \mathbf{A}$.
2. On applique le point *1* à l'application linéaire ${}^{\mathrm{t}}\beta$ en identifiant N et $N^{\star\star}$, ainsi que P et $P^{\star\star}$, et donc aussi β et ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}\beta)$. □

Remarque. Il est possible d'affaiblir légèrement l'hypothèse en demandant pour l'application linéaire $P \to P^{\star\star}$ qu'elle soit injective. ■

Localisation et suites exactes

6.4. Fait. *Soit S un monoïde d'un anneau $\mathbf{A}$.*

1. *Si M est un sous-module de N, on a l'identification canonique de M_S avec un sous-module de N_S et de $(N/M)_S$ avec N_S/M_S.*
   En particulier, pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, le $\mathbf{A}$-module $\mathfrak{a}_S$ s'identifie canoniquement avec l'idéal $\mathfrak{a}\mathbf{A}_S$ de $\mathbf{A}_S$.
2. *Si $\varphi : M \to N$ est une application $\mathbf{A}$-linéaire, alors :*
   a. $\operatorname{Im}(\varphi_S)$ *s'identifie canoniquement à* $\big(\operatorname{Im}(\varphi)\big)_S$,
   b. $\operatorname{Ker}(\varphi_S)$ *s'identifie canoniquement à* $\big(\operatorname{Ker}(\varphi)\big)_S$,
   c. $\operatorname{Coker}(\varphi_S)$ *s'identifie canoniquement à* $\big(\operatorname{Coker}(\varphi)\big)_S$.
3. *Si l'on a une suite exacte de $\mathbf{A}$-modules*
   $$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P\ ,$$
   alors la suite de $\mathbf{A}_S$-modules
   $$M_S \xrightarrow{\varphi_S} N_S \xrightarrow{\psi_S} P_S$$
   est également exacte.

6.5. Fait. *Si $M_1, \ldots, M_r$ sont des sous-modules de N et $M = \bigcap_{i=1}^r M_i$, alors en identifiant les modules $(M_i)_S$ et M_S à des sous-modules de N_S on obtient $M_S = \bigcap_{i=1}^r (M_i)_S$.*

6.6. Fait. *Soient M et N deux sous-modules d'un $\mathbf{A}$-module P,* avec N de type fini. *Alors, l'idéal transporteur $(M_S : N_S)$ s'identifie à $(M : N)_S$, via les applications naturelles de $(M : N)$ dans $(M_S : N_S)$ et $(M : N)_S$.*

Ceci s'applique en particulier pour l'annulateur d'un idéal de type fini.

Principe local-global pour les suites exactes de modules

6.7. Principe local-global concret. (Pour les suites exactes)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, M, N, P des $\mathbf{A}$-modules et deux applications linéaires $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to P$. On note $\mathbf{A}_i$ pour $\mathbf{A}_{S_i}$, M_i pour M_{S_i} etc. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P$ est exacte.*
2. *Pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$, la suite $M_i \xrightarrow{\varphi_i} N_i \xrightarrow{\psi_i} P_i$ est exacte.*

Comme conséquence, φ est injective (resp. surjective) si, et seulement si, pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$, φ_i est injective (resp. surjective)

▷ Nous avons vu que *1* $\Rightarrow$ *2* dans le fait 6.4.
Supposons *2*. Notons $\mu_i : M \to M_i$, $\nu_i : N \to N_i$, $\pi_i : P \to P_i$ les homomorphismes canoniques. Soit $x \in M$ et $z = \psi\big(\varphi(x)\big)$, on a

$$0 = \psi_i\big(\varphi_i(\mu_i(x))\big) = \pi_i\big(\psi(\varphi(x))\big) = \pi_i(z),$$

donc pour un $s_i \in S_i$, $s_i z = 0$ dans P. On conclut que $z = 0$ en utilisant la comaximalité des S_i : $\sum_i u_i s_i = 1$. Soit maintenant $y \in N$ tel que $\psi(y) = 0$. Pour chaque i il existe un $x_i \in M_i$ tel que $\varphi_i(x_i) = \nu_i(y)$.
On écrit $x_i =_{M_i} a_i/s_i$ avec $a_i \in M$ et $s_i \in S_i$. L'égalité $\varphi_i(x_i) = \nu_i(y)$ signifie que pour un certain $t_i \in S_i$ on a $t_i\varphi(a_i) = t_i s_i y$ dans N. Si $\sum_i v_i t_i s_i = 1$, on en déduit que $\varphi\big(\sum_i v_i t_i a_i\big) = y$. Ainsi $\operatorname{Ker}\psi$ est bien inclus dans $\operatorname{Im}\varphi$.□

6.8. Principe local-global abstrait*. (Pour les suites exactes)
Soient M, N, P des $\mathbf{A}$-modules, et deux applications linéaires $\varphi : M \to N$ et $\psi : N \to P$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *La suite $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P$ est exacte.*
2. *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ la suite $M_\mathfrak{m} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{m}} N_\mathfrak{m} \xrightarrow{\psi_\mathfrak{m}} P_\mathfrak{m}$ est exacte.*

Comme conséquence, φ est injective (resp. surjective) si, et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, $\varphi_\mathfrak{m}$ est injective (resp. surjective)

▷ La propriété $x = 0$ pour un élément x d'un module est une propriété de caractère fini. De même pour la propriété $y \in \operatorname{Im}\varphi$. Ainsi, même si la propriété « la suite est exacte » n'est pas de caractère fini, c'est une conjonction de propriétés de caractère fini, et l'on peut appliquer le fait* 2.11 pour déduire le principe local-global abstrait du principe local-global concret. □

Signalons enfin un principe local-global concret pour les monoïdes.

6.9. Principe local-global concret. (Pour les monoïdes)
Soient S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, V un monoïde. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Le monoïde V contient* 0.
2. *Pour $i \in [\![1..n]\!]$, le monoïde V vu dans $\mathbf{A}_{S_i}$ contient* 0.

▷ Pour chaque i on a un $v_i \in V$ et un $s_i \in S_i$ tels que $s_i v_i = 0$. On pose $v = \prod_i v_i \in V$. Alors, v est nul dans les $\mathbf{A}_{S_i}$, donc dans $\mathbf{A}$. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées au lecteur, etc… On pourra notamment traiter les cas suivants.

— Vérifier les affirmations des faits 1.2 à 1.4.
— Démontrer le corollaire 2.4.
— Dans le lemme 2.6 calculer des exposants convenables dans les points *2*, *3*, *4*, en explicitant complètement la démonstration.
— Démontrer le corollaire 3.3. Donner une preuve plus détaillée du théorème 3.4. Vérifiez les détails dans la preuve du principe local-global 3.5. Démontrer la proposition 3.7.
— Vérifier les affirmations des faits 6.4 à 6.6. Pour le fait 6.5 on utilisera la suite exacte $0 \to M \to N \to \bigoplus_{i=1}^{r} N/M_i$ qui est préservée par localisation.

Exercice 2. (Voir aussi l'exercice VII-8)

1. *(Inversibles dans $\mathbf{B}[T]$, cf. lemme 2.6)*
   Soient deux polynômes $f = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i$, $g = \sum_{j=0}^{m} b_j T^j$ avec $fg = 1$. Montrer que les coefficients a_i, $i \geqslant 1$, b_j, $j \geqslant 1$ sont nilpotents et que $a_n^{m+1} = 0$.
2. *(Polynôme caractéristique d'une matrice nilpotente)*
   Soit $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{B})$ une matrice nilpotente et $\mathrm{C}_A(T) = T^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k$ son polynôme caractéristique.
   a. Montrer que les coefficients a_i sont nilpotents.
   b. Précisément, si $A^e = 0$, alors $\mathrm{Tr}(A)^{(e-1)n+1} = 0$ et
   $$a_i^{e_i} = 0 \quad \text{avec} \quad e_i = (e-1)\tbinom{n}{i} + 1 \quad (i = 0, \ldots, n-1).$$

Exercice 3. On considère un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ et $s \in \mathbf{A}$.

1. Si x est unimodulaire dans $\mathbf{A}/\langle s \rangle$ et dans $\mathbf{A}[1/s]$, il est unimodulaire dans $\mathbf{A}$.
2. Soient $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$, si x est unimodulaire modulo $\mathfrak{b}$ et modulo $\mathfrak{c}$, il l'est modulo $\mathfrak{bc}$.

Exercice 4. *(Une application typique du principe local-global de base)*
Soit $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n$, *unimodulaire*. Pour $d \geqslant 1$, on note $\mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]_d$ le sous-$\mathbf{A}$-module des polynômes homogènes de degré d et

$$I_{d,x} = \left\{ f \in \mathbf{A}[\underline{X}]_d \,|\, f(x) = 0 \right\}, \text{ sous-}\mathbf{A}\text{-module de } \mathbf{A}[\underline{X}].$$

1. Si $x_1 \in \mathbf{A}^\times$, tout $f \in I_{d,x}$ est combinaison linéaire des $x_1X_j - x_jX_1$ avec pour coefficients des polynômes homogènes de degré $d-1$.
2. En général, tout $f \in I_{d,x}$ est une combinaison linéaire des $(x_kX_j - x_jX_k)$ avec pour coefficients des polynômes homogènes de degré $d-1$.
3. Soit $I_x = \bigoplus_{d\geqslant 1} I_{d,x}$. Montrer que $I_x = \{ F \,|\, F(tx) = 0 \}$ (où t est une nouvelle indéterminée). Montrer que I_x est *saturé*, i.e., si $X_j^m F \in I_x$ pour un m et pour chaque j, alors $F \in I_x$.

Exercice 5. *(Variations sur le lemme de Gauss-Joyal 2.6)*
Montrer que les affirmations suivantes sont équivalentes (chacune des affirmations est universelle, i.e., valable pour tous polynômes et tout anneau commutatif $\mathbf{A}$) :

1. $\mathrm{c}(f) = \mathrm{c}(g) = \langle 1 \rangle \;\Rightarrow\; \mathrm{c}(fg) = \langle 1 \rangle$,
2. $(\exists i_0, j_0 \;\; f_{i_0} = g_{j_0} = 1) \;\Rightarrow\; \mathrm{c}(fg) = \langle 1 \rangle$,
3. $\exists p \in \mathbb{N}, \;\; \big(\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)\big)^p \subseteq \mathrm{c}(fg)$,
4. *(Gauss-Joyal)* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)\big) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(fg)\big)$.

Exercice 6. *(Norme d'un polynôme primitif via l'utilisation d'un anneau nul)*
Soient $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre libre de dimension finie, $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ des indéterminées, $Q \in \mathbf{B}[\underline{X}]$ et $P = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[\underline{X}]/\mathbf{A}[\underline{X}]}(Q) \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. Montrer que si Q est primitif, alors P l'est aussi. *Indication :* vérifier que $\mathbf{A} \cap \mathrm{c}_{\mathbf{B}}(P) = \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(P)$, considérer le sous-anneau $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathrm{c}_{\mathbf{A}}(P)$ de $\mathbf{B}' = \mathbf{B}/\mathrm{c}_{\mathbf{B}}(P)$ et l'application $\mathbf{A}'$-linéaire « multiplication par Q », $m_Q : \mathbf{B}'[\underline{X}] \to \mathbf{B}'[\underline{X}],\ R \mapsto QR$.

Exercice 7. Montrer qu'un anneau $\mathbf{A}$ cohérent est fortement discret si, et seulement si, le test « $1 \in \langle a_1, \dots, a_n \rangle$? » est explicite pour toute suite finie $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathbf{A}$.

Exercice 8. *(Un exemple d'anneau noethérien cohérent avec un quotient* non *cohérent)*
On considère l'anneau $\mathbb{Z}$ et un idéal $\mathfrak{a}$ engendré par une suite infinie d'éléments, tous nuls sauf éventuellement un, qui est alors égal à 3 (par exemple on met un 3 la première fois, si cela arrive, qu'un zéro de la fonction zéta de Riemann n'a pas sa partie réelle égale à 1/2). Si l'on est capable de donner un système fini de générateurs pour l'annulateur de 3 dans $\mathbb{Z}/\mathfrak{a}$, on est capable de dire si la suite infinie est identiquement nulle ou pas. Ceci signifierait qu'il existe une méthode sûre pour résoudre les conjectures du type de celle de Riemann.
Commentaire. Comme toute définition constructive raisonnable de la noethérianité semble réclamer qu'un quotient d'un anneau noethérien reste noethérien, et vu le « contre-exemple » précédent, on ne peut espérer avoir une preuve constructive du théorème de mathématiques classiques qui affirme que tout anneau noethérien est cohérent. ∎

Exercice 9. *(Idempotents de $\mathbf{A}[X]$)*
Montrer que tout idempotent de $\mathbf{A}[X]$ est un idempotent de $\mathbf{A}$.

Exercice 10. Soient u et v deux idempotents et x un élément de $\mathbf{A}$.
L'élément $1-(1-u)(1-v) = u+v-uv$ est noté $u \vee v$.

1. Montrer que $x \in u\mathbf{A} \Leftrightarrow ux = x$. En particulier, $u\mathbf{A} = v\mathbf{A} \Leftrightarrow u = v$.
2. L'élément uv est le plus petit commun multiple de u et v parmi les idempotents de $\mathbf{A}$ (i.e., si w est un idempotent, $w \in u\mathbf{A} \cap v\mathbf{A} \Leftrightarrow w \in uv\mathbf{A}$). En fait, on a même $u\mathbf{A} \cap v\mathbf{A} = uv\mathbf{A}$. On note $u \wedge v = uv$.
3. Démontrer l'égalité $u\mathbf{A} + v\mathbf{A} = (u \vee v)\mathbf{A}$. En déduire que $u \vee v$ est le plus grand commun diviseur de u et v parmi les idempotents de $\mathbf{A}$ (en fait un élément arbitraire de $\mathbf{A}$ divise u et v si, et seulement si, il divise $u \vee v$).
4. Par une suite de manipulations élémentaires, transformer la matrice $\mathrm{Diag}(u, v)$ en la matrice $\mathrm{Diag}(u \vee v, u \wedge v)$.
   En déduire que les deux $\mathbf{A}$-modules $u\mathbf{A} \oplus v\mathbf{A}$ et $(u \vee v)\mathbf{A} \oplus (u \wedge v)\mathbf{A}$ sont isomorphes.
5. Montrer que les deux anneaux $\mathbf{A}/\langle u\rangle \times \mathbf{A}/\langle v\rangle$ et $\mathbf{A}/\langle u \vee v\rangle \times \mathbf{A}/\langle u \wedge v\rangle$ sont isomorphes.

Exercice 11. Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A} = \mathbf{K}$. On écrit $e_i = a_i/d$ avec $a_i \in \mathbf{A}$ et $d \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$. On a alors $a_i a_j = 0$ pour $i \neq j$ et $\sum_i a_i$ régulier.
1. Établir une réciproque.
2. Montrer que $\mathbf{K}[1/e_i] \simeq \mathrm{Frac}\left(\mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a_i)\right)$ et $\mathbf{K} \simeq \prod_i \mathrm{Frac}\left(\mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a_i)\right)$.

Exercice 12. *(Séparer les composantes irréductibles)*
1. Soit $\mathbf{A} = \mathbb{Q}[x,y,z] = \mathbb{Q}[X,Y,Z]/\langle XY, XZ, YZ\rangle$ et $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. Quels sont les zéros de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{Q}^3$ (i.e. $(x,y,z) \in \mathbb{Q}^3$ tels que $xy = yz = zx = 0$) ? Donner une forme réduite pour les éléments de $\mathbf{A}$. Montrer que $x+y+z \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$. Montrer que les éléments $\dfrac{x}{x+y+z}$, $\dfrac{y}{x+y+z}$ et $\dfrac{z}{x+y+z}$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux dans $\mathbf{K}$. Montrer que $\mathbf{K} \simeq \mathbb{Q}(X) \times \mathbb{Q}(Y) \times \mathbb{Q}(Z)$.
2. Soit $\mathbf{B} = \mathbb{Q}[u,v,w] = \mathbb{Q}[U,V,W]/\langle UVW\rangle$ et $\mathbf{L} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{B}$.
Quels sont les zéros de $\mathbf{B}$ dans $\mathbb{Q}^3$? Donner une forme réduite pour les éléments de $\mathbf{B}$. Montrer que $\mathbf{L} \simeq \mathbb{Q}(U,V) \times \mathbb{Q}(V,W) \times \mathbb{Q}(W,U)$.

Exercice 13. *(Idempotent et groupe élémentaire)*
Soit $a \in \mathbf{A}$ un idempotent. Pour $b \in \mathbf{A}$, expliciter une matrice $A \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A})$ et un élément $d \in \mathbf{A}$ tels que $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$. En particulier, $\langle a, b\rangle = \langle d\rangle$.
En outre, si b est régulier (resp. inversible) modulo a, alors d est régulier (resp. inversible). Enfin si b est idempotent, $d = a \vee b = a + b - ab$.

Exercice 14. Soit $(r_1, \ldots, r_m)$ une famille finie d'idempotents dans un anneau $\mathbf{A}$. Posons $s_i = 1 - r_i$ et, pour une partie I de $[\![1..m]\!]$, notons $r_I = \prod_{i\in I} r_i \prod_{i\notin I} s_i$.
1. Montrer que la matrice diagonale $D = \mathrm{Diag}(r_1, \ldots, r_m)$ est semblable à une matrice $D' = \mathrm{Diag}(e_1, \ldots, e_m)$ où les e_i sont des idempotents qui vérifient : e_i

divise e_j si $j > i$. On pourra commencer par le cas $n = 2$ et utiliser l'exercice 10. Montrer que $\langle e_k \rangle = \mathcal{D}_k(D)$ pour tout k.
2. Montrer que l'on peut écrire $D' = PDP^{-1}$ avec P une *matrice de permutation généralisée*, c'est-à-dire une matrice qui s'écrit $\sum_j f_j P_j$ où les f_j forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux et chaque P_j est une matrice de permutation. Suggestions :

— Les r_I forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux. La matrice diagonale $r_I D$ a pour coefficient en position (i,i) l'élément r_I si $i \in I$ et 0 sinon. La matrice P_I correspond alors à une permutation ramenant les coefficients r_I en tête de la liste. Enfin $P = \sum_I r_I P_I$. Notez que le test « $r_I = 0$? » n'est pas nécessaire !

— On peut aussi traiter le cas $m = 2$: on trouve $P = e \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + f \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ avec $f = r_2 s_1$, $e = 1 - f$, et $D' = \mathrm{Diag}(r_1 \vee r_2, r_1 \wedge r_2)$.
Ensuite on traite le cas $m > 2$ de proche en proche.

Exercice 15. Rappeler une preuve du théorème des restes chinois (page 35) et expliciter les idempotents.

Exercice 16. *(Groupe élémentaire : premiers pas)* Cas de $\mathbb{M}_2(\mathbf{A})$.
1. Soit $a \in \mathbf{A}$. Déterminer une matrice $P \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A})$ telle que $P \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}$.
Même chose pour $\begin{bmatrix} \varepsilon a \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}$ où $\varepsilon \in \mathbf{A}^\times$.
2. Écrire comme éléments de $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$ les matrices $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.
3. Toute matrice triangulaire de $\mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ est dans $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$.
4. Soient $u = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$, $w = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$ avec $x, y \in \mathbf{A}$. Montrer que $v \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{A}) \cdot u$ et $w \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A}) \cdot u$, mais pas nécessairement $v \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A}) \cdot u$. Par exemple, si x, y sont deux indéterminées sur un anneau $\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x,y]$ et $v = Au$, avec $A \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$, alors $\big(\det(A)\big)(0,0) = -1$. En conséquence on a $\det(A) \in -1 + \mathrm{D}_{\mathbf{k}}(0)\langle x, y \rangle$ (lemme 2.6), donc $\det(A) = -1$ si $\mathbf{k}$ est réduit. De plus, si $\det(A) = 1$, alors $2 = 0$ dans $\mathbf{k}$. Par suite, $v \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A}) \cdot u$ si, et seulement si, $2 = 0$ dans $\mathbf{k}$.

Exercice 17. *(Groupe élémentaire : deuxièmes pas)*
1. Soit $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{A})$ avec un coefficient inversible et $(n,m) \neq (1,1)$. Déterminer des matrices $P \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ et $Q \in \mathbb{E}_m(\mathbf{A})$ telles que $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,m-1} \\ 0_{n-1,1} & A' \end{bmatrix}$.
Exemple : avec $a \in \mathbf{A}^\times$ donner P pour $P \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (exercice 16 point *1*).
2. Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ avec un coefficient inversible. Calculer des matrices P et $Q \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A})$ telles que : $PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ avec $\delta = \det(A)$.

Toute matrice $A \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ ayant un coefficient inversible appartient à $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$. Expliciter les cas suivants :

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{avec } a \in \mathbf{A}^\times.$$

Écrire les matrices suivantes (avec $a \in \mathbf{A}^\times$) dans $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a^{-1} & b \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} b & a \\ -a^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Si $A = \mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$, alors $A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$.
4. Toute matrice triangulaire $A \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$ appartient à $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$.

Exercice 18. *(Les matrices de division D_q de déterminant 1)*
Une « division générale » $a = bq - r$ peut s'écrire matriciellement :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ r \end{bmatrix}.$$

Ceci conduit à introduire la matrice $D_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & q \end{bmatrix} \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$.
Montrer que $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$ est le monoïde engendré par les matrices D_q.

Exercice 19. Soient $\mathbf{A}$ un anneau et A, $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. On suppose que l'on a un $i \in \mathbf{A}$ avec $i^2 = -1$ et que $2 \in \mathbf{A}^\times$. Montrer que les matrices de $\mathbb{M}_{2n}(\mathbf{A})$

$$M = \begin{bmatrix} A & -B \\ B & A \end{bmatrix} \text{ et } M' = \begin{bmatrix} A + iB & 0 \\ 0 & A - iB \end{bmatrix}$$

sont *élémentairement semblables*, (i.e., $\exists P \in \mathbb{E}_{2n}(\mathbf{A})$, $PMP^{-1} = M'$).
Indication : traiter d'abord le cas $n = 1$.

Exercice 20. Pour $d \in \mathbf{A}^\times$ et $\lambda \in \mathbf{A}$ calculer la matrice

$$\mathrm{Diag}(1, \ldots, d, \ldots, 1) \cdot \mathrm{E}_{ij}(\lambda) \cdot \mathrm{Diag}(1, \ldots, d^{-1}, \ldots, 1).$$

Montrer que le sous-groupe des matrices diagonales de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ normalise $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$.

Exercice 21. *(Un lemme de liberté, ou un splitting off, au choix de la lectrice)*
Soit $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ un projecteur possédant un mineur principal d'ordre k inversible. Montrer que F est semblable à une matrice $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & F' \end{bmatrix}$ où $F' \in \mathbb{GA}_{n-k}(\mathbf{A})$.

Le module projectif de type fini $P \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Im}\, F \subseteq \mathbf{A}^n$ admet un facteur direct libre ayant pour base k colonnes de F.

Exercice 22. Soit $A \in \mathbf{A}^{n \times m}$ de rang 1. Construire $B \in \mathbf{A}^{m \times n}$ telle que $ABA = A$ et vérifier que AB est un projecteur de rang 1. Comparez votre solution à celle qui résulterait de la preuve du théorème 5.14.

Exercice 23. *Cet exercice constitue une abstraction des calculs qui ont mené au théorème 5.14.* On considère un $\mathbf{A}$-module E « ayant assez de formes linéaires », i.e. si $x \in E$ vérifie $\mu(x) = 0$ pour tout $\mu \in E^\star$, alors $x = 0$. Ceci signifie que l'application canonique de E dans son bidual, $E \to E^{\star\star}$, est injective. Cette

condition est vérifiée si E est un module *réflexif*, i.e. $E \simeq E^{\star\star}$, e.g. un module projectif de type fini, ou un module libre de rang fini.
Pour $x_1, \ldots, x_n \in E$, on note $\bigwedge_r(x_1, \ldots, x_n)$ l'idéal de $\mathbf{A}$ engendré par les évaluations de toutes les formes r-linéaires alternées de E en tous les r-uplets d'éléments de $\{x_1, \ldots, x_n\}$.
On suppose que $1 \in \bigwedge_r(x_1, \ldots, x_n)$ *et* $\bigwedge_{r+1}(x_1, \ldots, x_n) = 0$.
On veut montrer que le sous-module $\sum \mathbf{A}x_i$ est facteur direct dans E en explicitant un projecteur $\pi : E \to E$ dont l'image est ce sous-module.

1. *(Formules de Cramer)* Soit f une forme r-linéaire alternée sur E. Montrer, pour $y_0, \ldots, y_r \in \sum \mathbf{A}x_i$, que
$$\sum_{i=0}^{r} (-1)^i f(y_0, \ldots, y_{i-1}, \widehat{y_i}, y_{i+1}, \ldots, y_r)\, y_i = 0.$$
Ou encore, pour $y, y_1, \ldots, y_r \in \sum \mathbf{A}x_i$
$$f(y_1, \ldots, y_r)\, y = \sum_{i=1}^{r} f(y_1, \ldots, y_{i-1}, y, y_{i+1}, \ldots, y_r)\, y_i.$$
2. Donner n formes linéaires $\alpha_i \in E^\star$ telles que l'application linéaire
$$\pi : E \to E,\ \ x \mapsto \textstyle\sum_i \alpha_i(x) x_i$$
soit un projecteur d'image $\sum \mathbf{A}x_i$.
On notera $\psi : \mathbf{A}^n \to E$ définie par $e_i \mapsto x_i$, et $\varphi : E \to \mathbf{A}^n$ définie par $\varphi(x) = \big(\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)\big)$. On s'arrangera pour que $\pi = \psi \circ \varphi$ et $\pi \circ \psi = \psi$, ce qui donne $\psi \circ \varphi \circ \psi = \psi$.
3. *(Nouvelle démonstration du théorème 5.14)* Soit $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$ une matrice de rang r. Montrer qu'il existe $B \in \mathbf{A}^{n\times m}$ telle que $A\,B\,A = A$.

Exercice 24. Soient $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$ et $B \in \mathbf{A}^{m\times n}$.
1. On a la formule de commutativité suivante : $\det(\mathrm{I}_m + XBA) = \det(\mathrm{I}_n + XAB)$.
Première démonstration. Traiter d'abord le cas où $m = n$, par exemple par la méthode des coefficients indéterminés. Si $m \neq n$, on peut compléter A et B par des lignes et des colonnes de 0 pour en faire des matrices carrées A_1 et B_1 de taille $q = \max(m, n)$ comme dans la démonstration donnée page 37. On vérifie alors que $\det(\mathrm{I}_m + XBA) = \det(\mathrm{I}_q + XB_1A_1)$ et $\det(\mathrm{I}_n + XAB) = \det(\mathrm{I}_q + XA_1B_1)$.
Deuxième démonstration. On considère une indéterminée X et les matrices
$$B' = \begin{bmatrix} XB & \mathrm{I}_m \\ \mathrm{I}_n & 0_{n,m} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A' = \begin{bmatrix} A & \mathrm{I}_n \\ \mathrm{I}_m & -XB \end{bmatrix}.$$
Calculer $A'B'$ et $B'A'$ et conclure.
2. Qu'en déduit-on pour les polynômes caractéristiques de $A\,B$ et $B\,A$?

Exercice 25. *(Formule de Binet-Cauchy)*
On utilise les notations page 43. Si $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$ et $B \in \mathbf{A}^{m\times n}$ sont deux matrices de formats transposés, on a la formule de Binet-Cauchy :
$$\det(BA) = \sum_{\alpha \in \mathcal{P}_{m,n}} \det(B_{1..m,\alpha}) \det(A_{\alpha,1..m}).$$

Première démonstration. On utilise la formule $\det(\mathrm{I}_m + XBA) = \det(\mathrm{I}_n + XAB)$ (exercice 24). On considère alors le coefficient de X^m dans chacun des polynômes $\det(\mathrm{I}_m + XBA)$ et $\det(\mathrm{I}_n + XAB)$.

Deuxième démonstration. Les matrices A et B représentent des applications linéaires $u : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$ et $v : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$.
On considère alors les matrices de $\bigwedge^m u$, $\bigwedge^m v$ et $\bigwedge^m (v \circ u)$ sur les bases naturellement associées aux bases canoniques de $\mathbf{A}^n$ et $\mathbf{A}^m$.
On conclut en écrivant que $\bigwedge^m (v \circ u) = \bigwedge^m v \circ \bigwedge^m u$.
Troisième démonstration. Dans le produit BA on intercale entre B et A une matrice diagonale D ayant pour coefficients des indéterminées λ_i, et l'on regarde quel est le coefficient de $\lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_m}$ dans le polynôme $\det(BDA)$ (pour cela on prend $\lambda_{i_1} = \cdots = \lambda_{i_m} = 1$ et les autres nuls). On conclut en prenant tous les λ_i égaux à 1.

Exercice 26. Soit $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^n)$. Pour $k \in [\![0..n]\!]$, on note $u_k = \bigwedge^k (u)$.
Montrer que $\det(u_k) = \det(u)^{\binom{n-1}{k-1}}$ et que

$$\det(u_k)\det(u_{n-k}) = \det(u)^{\binom{n}{k}} .$$

Exercice 27. Pour $A \in \mathbf{A}^{n\times r}$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. La matrice A est injective et localement simple.
2. Il existe une matrice $B \in \mathbf{A}^{r\times n}$ telle que $B\,A = \mathrm{I}_r$.
3. L'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_r(A) = \langle 1 \rangle$.

Indication : voir les théorèmes 5.14, 5.22 et 5.26.

Exercice 28. Traiter le cas général dans la démonstration du lemme 5.30.

Exercice 29.
Si $\mathrm{gram}_{\mathbf{A}}(\varphi, x_1, \ldots, x_n)$ est inversible, le sous-module $\mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$ est libre avec $(x_1, \ldots, x_n)$ pour base.

Exercice 30. Soient $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$, $B \in \mathbf{A}^{n\times p}$, et r, s avec $r + s > n$.

1. Si $AB = 0$ alors $\mathcal{D}_r(A)\mathcal{D}_s(B) = 0$.
2. En général, $\mathcal{D}_r(A)\mathcal{D}_s(B) \subseteq \mathcal{D}_1(AB)$.
3. Plus généralement, si $r + s \geqslant n + q$, alors pour tout mineur μ d'ordre r de A on a l'inclusion $\mu^q \mathcal{D}_s(B) \subseteq \mathcal{D}_q(AB)$.

Exercice 31. On considère un $\mathbf{A}$-module M et deux sous-$\mathbf{A}$-modules N_1 et N_2. On a une suite exacte courte :

$$0 \longrightarrow N_1 \cap N_2 \xrightarrow{\ j\ } N_1 \times N_2 \xrightarrow{\ \pi\ } N_1 + N_2 \longrightarrow 0$$

avec $j(x) = (x, -x)$ et $\pi(y, z) = y + z$.

1. Qu'est-ce que cela donne en termes de dimensions d'espaces vectoriels lorsque $\mathbf{A}$ est un corps discret et M un espace vectoriel de dimension finie ?
2. Étudier la signification du caractère scindé de cette suite exacte.

Exercice 32. On considère un $\mathbf{A}$-module M et deux sous-$\mathbf{A}$-modules N_1 et N_2. On définit un complexe comme suit :

$$0 \longrightarrow M/(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{j} M/N_1 \times M/N_2 \xrightarrow{\pi} M/(N_1 + N_2) \longrightarrow 0$$

avec $j(\widehat{x}) = (\widetilde{x}, -\mathring{x})$ et $\pi(\widetilde{y}, \mathring{z}) = \overline{y+z}$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une suite exacte.
2. Qu'est-ce que cela donne en termes de dimensions d'espaces vectoriels lorsque $\mathbf{A}$ est un corps discret et M un espace vectoriel de dimension finie ?
3. Donner des exemples où cette suite exacte est scindée et d'autres où elle ne l'est pas.

Exercice 33. On considère deux sous-modules E et F' d'un $\mathbf{A}$-module F. On note $E' = E \cap F'$, $G = F/E$, $G' = F'/E'$, $S = E+F'$, $E'' = E/E'$, $F'' = F/F'$ et $G'' = F/S$.

1. Montrer que l'on a un diagramme commutatif comme ci-dessous dans lequel
   — ι, ι', ι_E et ι_F sont les injections canoniques,
   — π, π', π_E et π_F sont les surjections canoniques,
   — et toutes les suites horizontales et verticales sont exactes.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\iota'} & F' & \xrightarrow{\pi'} & G' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E'' & \xrightarrow[\iota'']{} & F'' & \xrightarrow[\pi'']{} & G'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

   Faites le lien avec les théorèmes de Noether concernant les quotients de sous-modules.
2. Le diagramme construit est-il le seul diagramme commutatif satisfaisant les conditions requises au point *1* ?

Exercice 34.

1. On considère un diagramme commutatif comme ci-dessous dans lequel toutes les suites horizontales et verticales sont supposées exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{\iota_0} & F' & \xrightarrow{\pi_0} & G_0 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \jmath_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} & & & & \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

   À isomorphismes et renommages près, on peut supposer que E, F' et E_0 sont des sous-modules de F et que toutes les injections et surjections sont

canoniques (donc $G_0 = F'/E_0$ et $G = F/E$). Nous le supposons désormais et nous notons $E' = E \cap F'$.

a. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\jmath_G : G_0 \to G$ qui rend le diagramme commutatif (i.e., telle que $\jmath_G \circ \pi_0 = \pi \circ \iota_F$).

b. Montrer que l'image de $\jmath_G$ est le sous-module $(E + F')/E = S/E$ de $G = F/E$.

c. Montrer que $\jmath_G$ est injective si, et seulement si, $E_0 = E'$. Dans ce cas $\jmath_G$ réalise un isomorphisme de F'/E' sur S/E. Et l'on est ramené à la situation de l'exercice 33.

2. On étudie maintenant la situation « duale » de celle du point *1.*
Précisément, on suppose que l'on a un diagramme commutatif comme ci-dessous dans lequel les suites horizontales et verticales sont exactes

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E_3 & \xrightarrow[\iota_3]{} & F'' & \xrightarrow[\pi_3]{} & G_3 & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

À isomorphisme et renommage près, on peut supposer que E est un sous-module de F et que l'injection ι est canonique. Nous le supposons désormais et nous notons $F' = \operatorname{Ker} \pi_F$.
Notons S_3 le noyau de l'application linéaire $\theta_G \circ \pi = \pi_3 \circ \pi_F$. On a donc une inclusion $S_3 \supseteq \operatorname{Ker} \pi + \operatorname{Ker} \pi_F = E + F'$.

a. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $\beta : E \to E_3$ qui rend le diagramme commutatif (i.e., telle que $\iota_3 \circ \beta = \pi_F \circ \iota$).

b. Montrer que $\operatorname{Ker} \beta = E \cap F'$.

c. Montrer que β est surjective si, et seulement si, $S_3 = E + F'$.
Préciser dans ce cas en quoi on retrouve la situation correspondant à l'exercice 33.

Exercice 35. On suppose que dans le diagramme commutatif ci-dessous, les suites verticales sont exactes, et que la suite $0 \to E \to F \to G \to 0$ est exacte.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\iota_1} & F_1 & \xrightarrow{\pi_1} & G_1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow[\iota_2]{} & F_2 & \xrightarrow[\pi_2]{} & G_2 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

1. Montrer que la suite $0 \to E_1 \to F_1 \to G_1 \to 0$ est exacte si, et seulement si, la suite $0 \to E_2 \to F_2 \to G_2 \to 0$ exacte.

2. Dans ce cas, à renommages et isomorphismes près, on retrouve le diagramme de l'exercice 33. En particulier, si les injections ι, ι_1, ι_E et ι_F sont canoniques (ce qui n'est pas restrictif), on a $E_1 = E \cap F_1$ et $\mathrm{Ker}(\pi_G \circ \pi) = E + F_1$ (donc $G_2 \simeq F/(E + F_1)$).

Exercice 36. *(Dualité exacte et endomorphisme cotransposé)*
On considère un application bilinéaire $\Psi : E \times F \to G$ où G est un $\mathbf{k}$-module libre de rang 1. On dit que Ψ *est une dualité exacte entre E et F* lorsque les applications linéaires correspondantes

$$E \longrightarrow \mathrm{L}(F,G),\ x \longmapsto \big(y \mapsto \varphi(x,y)\big) \quad \text{et} \quad F \longrightarrow \mathrm{L}(E,G),\ y \longmapsto \big(x \mapsto \varphi(x,y)\big)$$

sont des isomorphismes. On en déduit que $E^\star \simeq F$ et $F^\star \simeq E$.
1. Lorsque l'on a une dualité exacte Ψ entre E et F, pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(F)$ on a une Ψ-transposée $\varphi^{\star_\Psi} : E \to E$ qui est l'unique application $\mathbf{k}$-linéaire satisfaisant

$$\Psi\big(\varphi^{\star_\Psi}(x), y\big) = \Psi\big(x, \varphi(y)\big) \text{ pour tous } x \in E \text{ et } y \in F.$$

On a comme pour la transposition usuelle $\varphi_1^{\star_\Psi} \circ \varphi_2^{\star_\Psi} = (\varphi_2 \circ \varphi_1)^{\star_\Psi}$. Et aussi, avec la définition symétrique et une notation légèrement ambivalente $(\varphi^{\star_\Psi})^{\star_\Psi} = \varphi$.
2. Soit E un $\mathbf{k}$-module libre de rang n et $k \in [\![1..n-1]\!]$.
Montrer qu'une dualité exacte entre $\bigwedge^k E$ et $\bigwedge^{n-k} E$ est donnée par

$$\Psi_k : \textstyle\bigwedge^k E \times \bigwedge^{n-k} E \longrightarrow \bigwedge^n E,\ \ (x,y) \longmapsto x \wedge y.$$

Montrer aussi que le cotransposé d'un endomorphisme $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(E)$ au sens usuel est égal à $\big(\bigwedge^{n-1} \varphi\big)^{\star_{\Psi_1}}$. Ainsi est expliqué le fait que la matrice de $\widetilde{\varphi}$ sur une base donnée est la transposée de la matrice des cofacteurs. Ceci donne aussi une « bonne » raison pour laquelle l'endomorphisme cotransposé est intrinsèque.

Problème 1. *(Pivot de Gauss, $A\,B\,A = A$, et rationalité linéaire)*
Soit $\mathbf{K}$ un corps discret. Si $x \in \mathbf{K}^n$ est un vecteur non nul, son *indice pivot* i est le plus petit indice i tel que $x_i \neq 0$. On dit que le coefficient x_i est le *pivot* de x. La *hauteur* $h(x)$ de x est l'entier $n - i + 1$ et l'on convient que $h(0) = 0$. Par exemple, pour $n = 4$ et $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ * \\ * \end{bmatrix}$, l'indice pivot de x est $i = 2$, et $h(x) = 3$. Les notions d'échelonnement qui suivent sont relatives à cette hauteur h.
On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ est *échelonnée en colonnes* si les colonnes non nulles de A ont des hauteurs distinctes ; on dit qu'elle est *strictement échelonnée* si de plus les lignes passant par les indices pivot sont des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^m$ (ces vecteurs sont nécessairement distincts). Voici une matrice strictement échelonnée (0 a été remplacé par un point) :

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{24} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{43} & a_{44} & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{71} & a_{72} & a_{73} & a_{74} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ a_{91} & a_{92} & a_{93} & a_{94} & a_{95} & \cdot \end{bmatrix}.$$

1. Soit $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ strictement échelonnée ; on définit $\overline{A} \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ en annulant les coefficients non pivots (les a_{ij} dans l'exemple ci-dessus) et $B = {}^{\mathrm{t}}\overline{A} \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbf{K})$. Vérifier que $ABA = A$.
Décrire les projecteurs AB, BA et la décomposition $\mathbf{K}^n = \operatorname{Im} AB \oplus \operatorname{Ker} AB$.
2. Soit $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ une matrice quelconque. Comment obtenir $Q \in \mathbb{GL}_m(\mathbf{K})$ telle que $A' = AQ$ soit strictement échelonnée ? Comment calculer $B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ vérifiant $ABA = A$?
3. Soient $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{K})$ et $y \in \mathbf{K}^n$. On suppose que le système linéaire $Ax = y$ admet une solution x sur un sur-anneau de $\mathbf{K}$. Montrer qu'il admet une solution sur $\mathbf{K}$.
4. Soient $\mathbf{K}_0 \subseteq \mathbf{K}$ un sous-corps et E, F deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbf{K}^n$. On suppose que E et F sont engendrés par des vecteurs à composantes dans $\mathbf{K}_0$. Montrer que $\mathbf{K}_0^n = (E \cap \mathbf{K}_0^n) \oplus (F \cap \mathbf{K}_0^n)$.
Soit $E \subseteq \mathbf{K}^n$ un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel. On dit que E *est* $\mathbf{K}_0$*-rationnel* s'il est engendré par des vecteurs à composantes dans $\mathbf{K}_0$.
5. Soit F un supplémentaire de E dans $\mathbf{K}^n$ engendré par des vecteurs de la base canonique de $\mathbf{K}^n$: $\mathbf{K}^n = E \oplus F$ et $\pi : \mathbf{K}^n \twoheadrightarrow E$ la projection associée.

a. Montrer que E est $\mathbf{K}_0$-rationnel si, et seulement si, $\pi(e_j) \in \mathbf{K}_0^n$ pour tout vecteur e_j de la base canonique.
b. En déduire l'existence d'un plus petit corps de rationalité pour E.
c. Quel est le corps de rationalité de l'image dans $\mathbf{K}^n$ d'une matrice strictement échelonnée en colonnes ?

Problème 2.
1. Algorithme de factorisation partielle. Étant donnés deux entiers a et b montrer que l'on peut calculer « rapidement » une famille finie d'entiers positifs p_i premiers entre eux deux à deux tels que $a = \pm \prod_{i=1}^n p_i^{\alpha_i}$ et $b = \pm \prod_{i=1}^n p_i^{\beta_i}$.
2. On considère un système linéaire $AX = B$ dans $\mathbb{Z}$ qui admet une infinité de solutions dans $\mathbb{Q}^m$. Pour savoir s'il admet une solution dans $\mathbb{Z}^m$ on peut essayer une méthode locale-globale. On commence par déterminer une solution dans $\mathbb{Q}$, qui est un vecteur $X \in \mathbb{Q}^m$. On trouve un entier d tel que $dX \in \mathbb{Z}^m$, de sorte que X est à coefficients dans $\mathbb{Z}[1/d]$. Il suffit ensuite de construire une solution dans chaque localisé $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}$ pour les p premiers qui divisent d et d'appliquer le principe local-global concret 2.3. Pour savoir s'il y a une solution dans $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}$ et en construire une, on peut utiliser la méthode du pivot, à condition de prendre pour pivot un élément de la matrice (ou plutôt de la partie restant à traiter de la matrice) qui divise tous les autres coefficients, c'est-à-dire un coefficient dans lequel p figure avec un exposant minimum.
L'inconvénient de cette méthode est qu'elle nécessite de factoriser d, ce qui peut la rendre impraticable.
Cependant, on peut légèrement modifier la méthode de façon à ne pas avoir à factoriser complètement d. On utilisera l'algorithme de factorisation partielle. On commence par faire comme si d était un nombre premier. Plus précisément on travaille avec l'anneau $\mathbb{Z}_{1+d\mathbb{Z}}$. On cherche si un coefficient de la matrice est étranger à d. Si l'on en trouve un, on le choisit comme pivot. Dans le cas contraire aucun coefficient de la matrice n'est étranger à d et (en utilisant si nécessaire l'algorithme de factorisation partielle) on est dans l'un des trois cas suivants :

— d divise tous les coefficients de la matrice, auquel cas, ou bien il divise aussi les coefficients de B et l'on est ramené à un problème plus simple, ou bien il ne divise pas un coefficient de B et le système linéaire n'admet pas de solution,
— d s'écrit sous forme d'un produit de facteurs deux à deux étrangers $d = d_1 \cdots d_k$ avec $k \geqslant 2$, auquel cas on peut travailler ensuite avec les localisations en les monoïdes $(1 + d_1\mathbb{Z})$, …, $(1 + d_k\mathbb{Z})$,
— d s'écrit comme une puissance pure d'un d' divisant d, ce qui nous ramène, avec d' à la place de d, à un problème du même type mais plus simple.

Vérifier que l'on peut exploiter récursivement l'idée exprimée ci-dessus. Écrire un algorithme et l'expérimenter. Examiner si l'algorithme obtenu s'exécute en temps raisonnable.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. *1.* On suppose sans perte de généralité $a_0 = b_0 = 1$. Lorsque l'on écrit que $fg = 1$, il vient

$$0 = a_n b_m,\ 0 = a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m,\ 0 = a_n b_{m-2} + a_{n-1} b_{m-1} + a_{n-2} b_m,$$

et ainsi de suite jusqu'au degré 1.
On montre alors par récurrence sur j que $\deg(a_n^j g) \leqslant m - j$.
En particulier, pour $j = m + 1$, on obtient $\deg(a_n^{m+1} g) \leqslant -1$, i.e. $a_n^{m+1} g = 0$. D'où $a_n^{m+1} = 0$. Enfin en raisonnant modulo $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(0)$, on obtient a_j nilpotent successivement pour $j = n - 1$, …, 1.
2a. On considère les polynômes sur l'anneau commutatif $\mathbf{B}[A]$:

$$f(T) = \det(\mathrm{I}_n - TA) \ \text{ et } \ g(T) = \det(\mathrm{I}_n + TA + T^2A^2 + \cdots + T^{e-1}A^{e-1}).$$

On a $f(T)g(T) = \det(\mathrm{I}_n - T^eA^e) = 1$. Le coefficient de degré $n - i$ de f est $\pm a_i$. On applique *1.*
2b. Il suffit de montrer que $\mathrm{Tr}(A)^{(e-1)n+1} = 0$, car $a_i = \pm \mathrm{Tr}\left(\bigwedge^{n-i}(A)\right)$.
On considère le déterminant défini par rapport à une base fixée $\mathcal{B}$ de $\mathbf{A}^n$. Si l'on prend la base canonique formée par les e_i, on a une égalité évidente

$$\mathrm{Tr}(f) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), e_2, \ldots, e_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}\big(e_1, e_2, \ldots, f(e_n)\big).$$

Elle peut être vue sous la forme suivante :

$$\mathrm{Tr}(f)\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n) = \det_{\mathcal{B}}(f(e_1), e_2, \ldots, e_n) + \cdots + \det_{\mathcal{B}}\big(e_1, e_2, \ldots, f(e_n)\big).$$

Sous cette forme on peut remplacer les e_i par n'importe quel système de n vecteurs de $\mathbf{A}^n$: les deux membres sont des formes n-linéaires alternées (en les e_i) sur $\mathbf{A}^n$, donc sont égales parce qu'elles coïncident sur une base.
Ainsi, multiplier un déterminant par $\mathrm{Tr}(f)$ revient à le remplacer par une somme de déterminants dans lesquels on a fait opérer f sur chacun des vecteurs.
On en déduit que l'expression $\mathrm{Tr}(f)^{n(e-1)+1}\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_n)$ est égale à une somme dont chaque terme est un déterminant de la forme

$$\det_{\mathcal{B}}\big(f^{m_1}(e_1), f^{m_2}(e_2), \ldots, , f^{m_n}(e_n)\big),$$

avec $\sum_i m_i = n(e-1) + 1$, donc au moins l'un des exposants m_i est $\geqslant e$.

Remarque. Cette solution pour la borne $n(e-1)+1$ est due à Gert Almkvist. Voir à ce sujet : ZEILBERGER D. *Gert Almkvist's generalization of a mistake of Bourbaki.* Contemporary Mathematics **143** (1993), p. 609–612. ∎

Exercice 3. *1.* Posons $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. On obtient $s^r \in \mathfrak{a}$ (pour un certain r), et $1 - as \in \mathfrak{a}$ (pour un certain a). On écrit $1 = a^r s^r + (1-as)(1+as+\cdots) \in \mathfrak{a}$.
2. $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle 1 \rangle$, $\mathfrak{a} + \mathfrak{c} = \langle 1 \rangle$ et $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{bc}$, donc $\mathfrak{a} + \mathfrak{bc} = \langle 1 \rangle$.

Exercice 4. *1.* Puisque f est homogène, on a $f(tx) = 0$ pour une nouvelle indéterminée t. D'où des $U_i \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n, t]$ tels que $f = \sum_{i=1}^{n} (X_i - tx_i)U_i$.
En faisant $t := x_1^{-1} X_1$, on obtient des $v_i \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ tels que

$$f = \sum_{i=2}^{n} (x_1 X_i - x_i X_1) v_i.$$

Enfin, puisque f est homogène de degré d, on peut remplacer v_i par sa composante homogène de degré $d-1$.
2. Considérons l'égalité $f = \sum_{k,j} (x_k X_j - x_j X_k) u_{kj}$, où les u_{kj} sont des polynômes homogènes de degré $d-1$. Il s'agit d'un système linéaire en les coefficients des u_{kj}. Puisque ce système admet une solution sur chaque localisé $\mathbf{A}_{x_i}$ et que les x_i sont comaximaux, il admet une solution sur $\mathbf{A}$.
3. Si $F = \sum_d F_d$ est la décomposition de $F \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ en composantes homogènes, on a $F(tx) = 0$ si, et seulement si, $F_d(x) = 0$ pour tout d, d'où le premier point de la question. Pour la saturation, montrons que si $X_i F \in I_x$ pour tout i, alors $F \in I_x$. Or on a $x_i F(tx) = 0$ donc, par comaximalité des x_i, on obtient $F(tx) = 0$, i.e. $F \in I_x$.

Exercice 6. Le polynôme Q, vu comme un polynôme à coefficients dans $\mathbf{B}'$, reste primitif donc régulier (Gauss-Joyal, point 2 du lemme 2.6). Puisque m_Q est injective, son déterminant $\det(m_Q) = P \in \mathbf{A}'[\underline{X}]$ est régulier (théorème 5.22, point *2*). Mais P est également nul dans $\mathbf{A}'[\underline{X}]$. Donc $\mathbf{A}'$ est l'anneau nul, autrement dit $1 \in \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(P)$.

Exercice 9. Soit $f(X)$ un idempotent de $\mathbf{A}[X]$. Il est clair que $e = f(0)$ est idempotent. On veut montrer que $f = e$. Pour cela on peut raisonner séparément modulo e et modulo $1-e$.
Si $e = 0$, alors $f = Xg$. On a $(Xg)(1-Xg) = 0$, or $1 - Xg$ est régulier, donc $g = 0$.
Si $e = 1$, on considère l'idempotent $1 - f$ et l'on est ramené au cas précédent.

Exercice 10. Pour la question *5* on montre d'abord le résultat lorsque $uv = 0$. Dans la situation générale, on note $u' = 1 - u$ et $v' = 1 - v$. On a alors un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(uv, uv', u'v, u'v')$ et en appliquant le cas particulier précédent on voit que les deux anneaux sont isomorphes au produit $\mathbf{A}/\langle uv' \rangle \times (\mathbf{A}/\langle uv \rangle)^2 \times \mathbf{A}/\langle u'v \rangle$.

Exercice 11. *2.* On a $\mathbf{K}[1/e_i] \simeq \mathbf{K}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(e_i)$ et $\mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(e_i) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a_i)\mathbf{K}$. Pour un élément x de $\mathbf{A}$, on écrit $dx = \sum_{i \in [\![1..n]\!]} x_i$ dans $\mathbf{K}$, avec $x_i = e_i dx = a_i x$. La décomposition est donc entièrement dans $\mathbf{A}$. Et $dx \equiv x_i \bmod \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a_i)$, donc la composante $\mathbf{K}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(e_i)$ du produit, quand on la voit comme l'idéal $e_i\mathbf{K}$, est formée des éléments de la forme $a_i x/y$ avec $x \in \mathbf{A}$ et y régulier dans $\mathbf{A}$. Mais y est régulier dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, chaque $y_i = a_i y$ est régulier modulo $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a_i)$, de sorte $\mathbf{K}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(e_i)$ s'identifie à $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a_i))$.

Exercice 12. *1.* Les zéros de $\mathbf{A}$ sont les trois « axes de coordonnées ».
Tout élément de $\mathbf{A}$ s'écrit de manière unique sous forme

$$u = a + xf(x) + yg(y) + zh(z),$$

avec f, g, $h \in \mathbb{Q}[T]$. Ceci implique que $x + y + z$ est régulier car

$$(x + y + z)u = x\big(a + xf(x)\big) + y\big(a + yg(y)\big) + z\big(a + zh(z)\big).$$

Donc les éléments $\dfrac{x}{x+y+z}$, $\dfrac{y}{x+y+z}$ et $\dfrac{z}{x+y+z}$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{K}$. On conclut avec l'exercice 11 en notant que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x) = \langle y, z\rangle$, et donc que

$$\mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x) \simeq \mathbb{Q}[X].$$

2. Les zéros de $\mathbf{B}$ sont les trois « plans de coordonnées ». Le système fondamental d'idempotents orthogonaux dans $\mathbf{L}$ est donné par $\dfrac{uv}{uv+vw+wu}$, $\dfrac{vw}{uv+vw+wu}$ et $\dfrac{wu}{uv+vw+wu}$.

Exercice 13. Il suffit de résoudre la question modulo a et modulo $1-a$.
Modulo a : $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}$.
Modulo $1-a$, $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. En recollant : $d = (1-a)b + a$ avec par exemple la matrice $A = A_2A_1$, où

$$A_1 = (1-a)\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = (1-a)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a-ab-1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1-a \\ a-ab-1 & a \end{bmatrix}.$$

Exercice 14. *1* et *2.* Cas $m = 2$. On a par manipulations élémentaires avec

$$e_1 = r_1 \vee r_2 = r_1 + s_1r_2 = r_2 + s_2r_1,$$

en notant que $e_1r_2 = r_2$ et $-r_2(r_2s_1) = -r_2s_1 = r_1r_2 - r_2$.

$$\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ r_2 & r_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} r_1 + r_2s_1 & r_2s_1 \\ r_2 & r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & r_2s_1 \\ r_2 & r_2 \end{bmatrix}$$
$$\longmapsto \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & r_1r_2 \end{bmatrix}.$$

En outre en posant $f = r_2s_1$, $e = 1 - f$ et $P = \begin{bmatrix} e & f \\ f & e \end{bmatrix}$ on a $P^2 = \mathrm{I}_2$, $er_1 = r_1$, $er_2 = r_1r_2$ et

$$P\begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} er_1 & fr_2 \\ fr_1 & er_2 \end{bmatrix}P = \begin{bmatrix} r_1 & f \\ 0 & r_1r_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e & f \\ f & e \end{bmatrix} =$$
$$\begin{bmatrix} r_1e + f & 0 \\ 0 & r_1r_2e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 & 0 \\ 0 & r_1r_2 \end{bmatrix}.$$

Exercice 15. On pose $\mathfrak{b}_i = \prod_{j:j\neq i} \mathfrak{a}_j$. On note $\varphi : \mathbf{A} \to \prod_{k=1}^n \mathbf{A}/\mathfrak{a}_k$ l'application canonique. Écrivons $a_{ij} + a_{ji} = 1$ pour $i \neq j$ avec $a_{ij} \in \mathfrak{a}_i$, $a_{ji} \in \mathfrak{a}_j$. On écrit

$$1 = \prod\nolimits_{k:k\neq i} (a_{ik} + a_{ki}) = \big(\prod\nolimits_{k:k\neq i} a_{ki}\big) + b_i = e_i + b_i \qquad (\#)$$

avec $b_i \in \mathfrak{a}_i$ et $e_i \in \mathfrak{b}_i$, donc

$$e_i \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}_i \quad \text{et} \quad e_i \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}_i \qquad (+)$$

En conséquence, pour $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$

$$\varphi\big(\sum\nolimits_{i=1}^n e_i x_i\big) = (x_1 \bmod \mathfrak{a}_1, \dots, x_n \bmod \mathfrak{a}_n)$$

ce qui montre que φ est surjective. Le théorème de factorisation donne alors l'isomorphisme $\theta : \mathbf{A}/\mathfrak{a} \to \prod_i \mathbf{A}/\mathfrak{a}_i$ car on a évidemment $\operatorname{Ker}\varphi = \bigcap_{k=1}^n \mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}$. Les congurences $(+)$ montrent que les $\pi(e_i) \in \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ donnent par θ le système fondamental d'idempotents orthogonaux associé à la structure de produit $\prod_i \mathbf{A}/\mathfrak{a}_i$. Vus dans ce produit, les éléments de $\mathfrak{a}_1$ sont ceux dont la première coordonnée est nulle : ils forment donc bien l'idéal engendré par $\varphi(1 - e_1)$. Autrement dit en remontant dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, $\pi(\mathfrak{a}_1) = \pi(\langle 1 - e_1\rangle)$, et en remontant dans $\mathbf{A}$, $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a} + \langle 1 - e_1\rangle$.
L'égalité $\bigcap_{k=1}^n \mathfrak{a}_k = \prod_{k=1}^n \mathfrak{a}_k$ se démontre par récurrence sur n pour $n \geqslant 2$ en notant que $(\#)$ implique que $\mathfrak{a}_i$ et $\mathfrak{b}_i$ sont comaximaux. Voyons l'initialisation, c'est-à-dire le cas $n = 2$: si $x \in \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2$ et si $a + b = 1$ avec $a \in \mathfrak{a}_1$ et $b \in \mathfrak{a}_2$, alors $x = ax + bx$, avec $ax \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ parce que $x \in \mathfrak{a}_2$ et $bx \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$ parce que $x \in \mathfrak{a}_1$, donc $x \in \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2$.

Exercice 18. La matrice $D_0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ transforme $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ en $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$, donc $D_0^2 = -\mathrm{I}_2$ et $D_0^3 = -D_0 = D_0^{-1}$.
On a aussi $D_0 = \mathrm{E}_{12}(1)\mathrm{E}_{21}(-1)\mathrm{E}_{12}(1)$, $D_0 D_q = -\mathrm{E}_{12}(q)$ et $D_q D_0 = -\mathrm{E}_{21}(q)$.

Exercice 21. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$ et $(f_1, \dots, f_n)$ les n colonnes de F. On peut supposer que le mineur principal inversible est en position nord-ouest de sorte que $(f_1, \dots, f_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{A}^n$.
Puisque $F(f_j) = f_j$, la matrice de F dans cette base est $G \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & * \\ 0 & * \end{bmatrix}$.
La matrice G est idempotente ainsi que sa transposée G'. On applique au projecteur G' l'opération que l'on vient de faire subir à F.
Puisque $G'(e_j) \in \bigoplus_{i\geqslant k+1} \mathbf{A}e_i$ pour $j \geqslant k+1$, la matrice de G' dans la nouvelle base est de la forme $H = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}$, d'où le résultat car F est semblable à ${}^{\mathrm{t}}H$.

Exercice 22. On a des $b_{ji} \in \mathbf{A}$ tels que $1 = \sum_{i,j} b_{ji}a_{ij}$. Soit $B \in \mathbf{A}^{m\times n}$ définie par $B = (b_{ji})$. Vérifions que $ABA = A$: $(ABA)_{ij} = \sum_{l,k} a_{il}b_{lk}a_{kj}$.
Mais $\begin{vmatrix} a_{il} & a_{ij} \\ a_{kl} & a_{kj} \end{vmatrix} = 0$, donc $(ABA)_{ij} = \sum_{l,k} a_{ij}a_{kl}b_{lk} = a_{ij}\sum_{l,k} a_{kl}b_{lk} = a_{ij}$.
En conséquence, AB est un projecteur.
Montrons que AB est de rang 1. On a $\operatorname{Tr}(AB) = \sum_i (AB)_{ii} = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ji} = 1$, donc $\mathcal{D}_1(AB) = 1$. Par ailleurs, $\mathcal{D}_2(AB) \subseteq \mathcal{D}_2(A) = 0$.

Exercice 23. *1.* Fixons une forme linéaire μ. L'application $E^{r+1} \to \mathbf{A}$ définie par
$$(y_0, \dots, y_r) \mapsto \textstyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i f(y_0, \dots, y_{i-1}, \widehat{y_i}, y_{i+1}, \dots, y_r)\, \mu(y_i),$$
où $\widehat{y_i}$ symbole de l'omission de l'élément, est une forme $(r+1)$-linéaire alternée. D'après l'hypothèse $\bigwedge_{r+1}(x_1, \dots, x_n) = 0$ et l'injectivité de $E \mapsto E^{\star\star}$, on obtient
$$\textstyle\sum_{i=0}^{r} (-1)^i f(y_0, \dots, y_{i-1}, \widehat{y_i}, y_{i+1}, \dots, y_r)\, y_i = 0.$$
Notons y au lieu de y_0 et réalisons l'opération suivante : dans l'expression
$$(-1)^i f(y, \dots, y_{i-1}, \widehat{y_i}, y_{i+1}, \dots, y_r),$$
amenons y entre y_{i-1} et y_i. La permutation ainsi réalisée nécessite une multiplication par $(-1)^{i-1}$. On obtient alors la deuxième égalité dans laquelle tous les signes « ont disparu ». Par exemple avec $r = 4$, l'expression
$$\begin{gathered} f(\widehat{y}, y_1, y_2, y_3, y_4)y - f(y, \widehat{y_1}, y_2, y_3, y_4)y_1 + f(y, y_1, \widehat{y_2}, y_3, y_4)y_2 - \\ f(y, y_1, y_2, \widehat{y_3}, y_4)y_3 + f(y, y_1, y_2, y_3, \widehat{y_4})y_4 = \\ f(y_1, y_2, y_3, y_4)y - f(y, y_2, y_3, y_4)y_1 + f(y, y_1, y_3, y_4)y_2 - \\ f(y, y_1, y_2, y_4)y_3 + f(y, y_1, y_2, y_3)y_4 \end{gathered}$$
n'est autre que
$$\begin{gathered} f(y_1, y_2, y_3, y_4)y - f(y, y_2, y_3, y_4)y_1 - f(y_1, y, y_3, y_4)y_2 - \\ f(y_1, y_2, y, y_4)y_3 - f(y_1, y_2, y_3, y)y_4. \end{gathered}$$
Une preuve plus expéditive : on applique une forme linéaire μ à la dernière expression ci-dessus, on vérifie que l'application obtenue $(y, y_1, y_2, y_3, y_4) \mapsto \mu(\dots)$ est 5-linéaire alternée donc nulle d'après les hypothèses.
2. Traitons le cas $r = 3$. On a une hypothèse
$$1 = \sum\nolimits_{ijk} \alpha_{ijk} f_{ijk}(x_i, x_j, x_k), \qquad f_{ijk} \text{ 3-linéaire alternée sur } E.$$
On définit $\pi : E \to E$ par :
$$\pi(x) = \sum\nolimits_{ijk} \alpha_{ijk}[f_{ijk}(x, x_j, x_k)x_i + f_{ijk}(x_i, x, x_k)x_j + f_{ijk}(x_i, x_j, x)x_k].$$
Il est clair que l'image de p est contenue dans le sous-module $\sum \mathbf{A}x_i$. De plus, pour $x \in \sum \mathbf{A}x_i$, on a
$$f_{ijk}(x, x_j, x_k)x_i + f_{ijk}(x_i, x, x_k)x_j + f_{ijk}(x_i, x_j, x)x_k = f_{ijk}(x_i, x_j, x_k)x.$$
D'où $\pi(x) = x$: l'endomorphisme $\pi : E \to E$ est un projecteur d'image $\sum \mathbf{A}x_i$. On voit que p est de la forme $\pi(x) = \sum_i \alpha_i(x)x_i$ i.e. $\pi = \psi \circ \varphi$ et que $\pi \circ \psi = \psi$.
3. Le module E en question est $\mathbf{A}^m$ et les vecteurs $x_1, \dots, x_n$ sont les colonnes de A. On a $\psi = A : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m$, et si l'on note $B \in \mathbf{A}^{n \times m}$ la matrice de $\varphi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$, on a bien $ABA = A$. Alors, l'application linéaire $AB : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^m$ est un projecteur de même image que A.

Exercice 26. Voyons d'abord le cas où $u = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. On dispose d'une base (e_I) de $\bigwedge^k(\mathbf{A}^n)$ indexée par les parties $I \subseteq \{1, \dots, n\}$ de cardinal k :
$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k} \qquad I = \{i_1 < \cdots < i_k\}.$$
Alors, u_k est diagonale dans la base (e_I) : $u_k(e_I) = \lambda_I e_I$ avec $\lambda_I = \prod_{i \in I} \lambda_i$. Il s'ensuit que $\det(u_k) = \prod_{\#I=k} \prod_{i \in I} \lambda_i$. Reste à déterminer, pour un j donné dans $[\![1..n]\!]$, le nombre d'occurrences de λ_j dans le produit ci-dessus. Autrement

dit, combien de parties I, de cardinal k, contenant j ? Autant que de parties de cardinal $k-1$ contenues dans $\{1,\cdots,n\}\setminus\{j\}$, i.e. $\binom{n-1}{k-1}$. Le résultat est démontré pour une matrice générique. Donc il est vrai pour une matrice quelconque. Le deuxième point résulte des égalités

$$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{n-k-1}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}=\binom{n}{k}.$$

Exercice 28. Le cas général se traite par récurrence sur n. On considère l'anneau de polynômes $\mathbb{Z}[(x_{ij})]$ à n^2 indéterminées et la matrice universelle $A=(x_{ij})$ à coefficients dans cet anneau. Notons $\Delta_{1k}\in\mathbb{Z}[(x_{ij})]$ le cofacteur de x_{1k} dans A. Ces cofacteurs vérifient les identités :

$$\sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{1j}\Delta_{1j}=\det A,\quad \sum\nolimits_{j=1}^{n} x_{ij}\Delta_{1j}=0\quad \text{pour } i>1.$$

Puisque les N_{kl} commutent deux à deux, la spécialisation $x_{kl}\mapsto N_{kl}$ est légitime. Notons $N'_{1j}=\Delta_{1j}(x_{kl}\mapsto N_{kl})$, alors on a

$$N'_{11}=\textstyle\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{n-1}}\varepsilon(\sigma)N_{2\sigma_2}N_{3\sigma_3}\dots N_{n\sigma_n}.$$

Définissons N' par :

$$N'=\begin{bmatrix} N'_{11} & 0 & \cdots & 0\\ N'_{12} & \mathrm{I}_m & & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & 0\\ N'_{1n} & 0 & \cdots & \mathrm{I}_m\end{bmatrix},\ \text{d'où}\ \ NN'=\begin{bmatrix}\Delta & N_{12} & \cdots & N_{1n}\\ 0 & N_{22} & \cdots & N_{2n}\\ \vdots & & & \vdots\\ 0 & N_{n2} & \cdots & N_{nn}\end{bmatrix}.$$

En prenant les déterminants, on obtient

$$\det(N)\det(N'_{11})=\det(\Delta)\det\begin{bmatrix} N_{22} & \cdots & N_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ N_{n2} & \cdots & N_{nn}\end{bmatrix}.$$

L'hypothèse de récurrence fournit les égalités

$$\det\begin{bmatrix} N_{22} & \cdots & N_{2n}\\ \vdots & & \vdots\\ N_{n2} & \cdots & N_{nn}\end{bmatrix}=\det\Big(\sum_{\sigma\in \mathrm{S}_{n-1}}\varepsilon(\sigma)N_{2\sigma_2}N_{3\sigma_3}\cdots N_{n\sigma_n}\Big)=\det(N'_{11}).$$

La simplification par l'élément régulier $\det(N'_{11})$ donne l'égalité $\det(N)=\det(\Delta)$.

Exercice 30.

1. On peut supposer $r\leqslant n$. On considère un mineur μ d'ordre r de A, sans perte de généralité on suppose la matrice carrée extraite correspondante A_1 située dans

le coin nord-ouest. On écrit

$$A = \begin{array}{|c|c|}\hline A_1 & X \\ \hline Y & Z \\ \hline \end{array},\ A' = \begin{array}{|c|c|}\hline \widetilde{A_1} & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array},\ A'A = \begin{array}{|c|c|}\hline \mu\,\mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array}$$

avec $\mu = \det(A_1)$. On partage B en $B_1 \in \mathbf{A}^{r\times p}$ et $B_2 \in \mathbf{A}^{(n-r)\times p}$

$$B = \begin{array}{|c|}\hline B_1 \\ \hline B_2 \\ \hline \end{array},\quad A'AB = \begin{array}{|c|}\hline \mu\,B_1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array} = 0.$$

Un mineur ν d'ordre s de B est le déterminant d'une matrice carrée extraite C dont au moins une ligne est dans B_1. On exprime ce mineur ν au moyen d'un développement de Laplace en partageant C en deux parties, l'une correspondant aux lignes empruntées à B_1, l'autre, éventuellement vide, correspondant aux lignes empruntées à B_2. On voit que $\mu\,\nu$ est dans l'idéal engendré par les coefficients de $\mu\,B_1$, donc $\mu\,\nu = 0$. Ce qu'il fallait démontrer.

2. Il suffit d'appliquer le point *1* avec l'anneau $\mathbf{A}/\mathcal{D}_1(AB)$.

3. Supposons par exemple $r + s \geqslant n + 2$. Le même calcul que dans le point *1* donne cette fois-ci $\mu^2\,\mathcal{D}_2(B_1) = \mathcal{D}_2(\mu\,B_1) \subseteq \mathcal{D}_2(AB)$. On utilise le développement de Laplace pour exprimer $\nu = \det(C)$, la matrice C a maintenant au moins deux lignes empruntées à B_1, on obtient donc $\mu^2\,\nu \in \mathcal{D}_2(AB)$.

Exercice 31. Notez que l'on est dans le contexte usuel des théorèmes de factorisation de Noether, ici les deux sous-modules sont notés N_1 et N_2, ce qui montre mieux la symétrie de la situation.

1. Si l'anneau est un corps $\mathbf{K}$ avec

$$\dim_{\mathbf{K}}(N_i) = n_i,\ \dim_{\mathbf{K}}(N_1 + N_2) = n \text{ et } \dim_{\mathbf{K}}(N_1 \cap N_2) = n',$$

la suite exacte est automatiquement scindée (théorème de la base incomplète) et l'on obtient l'égalité classique $n + n' = n_1 + n_2$.

2. Notons $N = N_1 \cap N_2$. La suite exacte est scindée si l'on a une section

$$\sigma : N_1 + N_2 \longrightarrow N_1 \times N_2.$$

On écrit $\sigma(x_1 + x_2) = \sigma_1(x_1) + \sigma_2(x_2)$, avec $\sigma_1(x_1) = \big(x_1 - \alpha_1(x_1), \alpha_1(x_1)\big)$ (en effet $\pi(\sigma_1(x_1)) = x_1$) et $\sigma_2(x_2) = \big(\alpha_2(x_2), x_2 - \alpha_2(x_2)\big)$.

On a donc $\alpha_1 : N_1 \to N$ et $\alpha_2 : N_2 \to N$. L'application σ est bien définie si, et seulement si, pour tout $y \in N$, on a $\sigma_1(y) = \sigma_2(y)$, i.e. $\alpha_1(y) + \alpha_2(y) = y$.

En résumé, la suite est scindée si, et seulement si, on peut trouver $\alpha_1 : N_1 \to N$ et $\alpha_2 : N_2 \to N$ vérifiant $\alpha_1(y) + \alpha_2(y) = y$ pour $y \in N$.

Cette condition est un peu mystérieuse. Elle est satisfaite par exemple si N est facteur direct dans N_1 en prenant $\alpha_2 = 0$ et α_1 une projection de N_1 sur N. Mais

en général, le critère n'est pas très parlant.
Prenons par exemple avec un anneau à pgcd $\mathbf{A}$, les sous-modules $N_1 = a_1\mathbf{A}$ et $N_2 = a_2\mathbf{A}$ du module $\mathbf{A}$. Si g est le pgcd et m le ppcm, on a $N = m\mathbf{A}$ avec $a_1 = gc_1$, $a_2 = gc_2$, $m = a_1c_2 = a_2c_1$. Pour obtenir une section il nous faut des $\alpha_i : N_i \to N$. On a alors $\alpha_1(a_1) = mx$, $\alpha_2(a_2) = my$, ce qui donne

$$\alpha_1(m) = c_2mx, \quad \alpha_2(m) = c_1my,$$

et l'égalité $\alpha_1(m)+\alpha_2(m) = m$ signifie $c_2x+c_1y = 1$. En bref les deux éléments c_1 et c_2 premiers entre eux doivent engendrer l'idéal $\langle 1\rangle$. Ainsi, la suite sera toujours scindée si $\mathbf{A}$ est un domaine de Bézout, mais pas toujours scindée dans le cas contraire.

Exercice 32. On étudie le complexe :

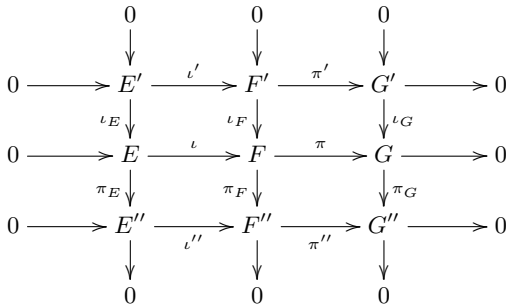
$$0 \longrightarrow M/(N_1 \cap N_2) \xrightarrow{\ j\ } M/N_1 \times M/N_2 \xrightarrow{\ \pi\ } M/(N_1 + N_2) \longrightarrow 0$$

où $j(\widehat{x}) = (\widetilde{x}, -\overset{\circ}{x})$ et $\pi(\widetilde{y}, \overset{\circ}{z}) = \overline{y} + \overline{z}$.
1. Le complexe est exact. Tout d'abord $j(\widehat{x}) = 0$ si, et seulement si, $\widetilde{x}$ et $\overset{\circ}{x}$ sont nuls, i.e. $x \in N_1 \cap N_2$. Ceci donne l'exactitude en $M/(N_1 \cap N_2)$. Ensuite $\pi(\widetilde{y}, 0) = \overline{y}$ donc π est surjective. Ceci donne l'exactitude en $M/(N_1 + N_2)$.
Soit maintenant un élément arbitraire $(\widetilde{y}, \overset{\circ}{z}) \in \operatorname{Ker}\pi$, i.e. $y + z \in N_1 + N_2$.
On écrit $y + z = y_1 + z_2$ avec $y_1 \in N_1$ et $z_2 \in N_2$, d'où $(y - y_1) = -(z - z_2)$.
Alors $\widetilde{y} = \widetilde{y - y_1}$, $\overset{\circ}{z} = z \overset{\circ}{-} z_2$ donc $(\widetilde{y}, \overset{\circ}{z}) = j(\widehat{x})$ pour $x = y - y_1$.
Ceci donne l'exactitude au milieu.
2. Si l'anneau est un corps $\mathbf{K}$ avec
$\dim_{\mathbf{K}}(M) = m$, $\dim_{\mathbf{K}}(N_i) = n_i$, $\dim_{\mathbf{K}}(N_1 + N_2) = n$ et $\dim_{\mathbf{K}}(N_1 \cap N_2) = n'$,
la suite exacte est automatiquement scindée (théorème de la base incomplète) et l'on obtient $(m - n) + (m - n') = (m - n_1) + (m - n_2)$, c'est-à-dire l'égalité classique $n + n' = n_1 + n_2$.
3. On prend les mêmes modules $M = \mathbf{A}$, $N_1 = a_1\mathbf{A} \subseteq M$, $N_2 = a_2\mathbf{A} \subseteq M$ que pour la fin de la solution de l'exercice 31. On suppose que $\mathbf{A}$ est un anneau à pgcd, on reprend les mêmes notations.
Une section $\sigma : \mathbf{A}/\langle a_1, a_2\rangle \to \mathbf{A}/\langle a_1\rangle \times \mathbf{A}/\langle a_2\rangle$ est a priori donnée par deux applications linéaires $\sigma_i : \mathbf{A}/\langle a_1, a_2\rangle \to \mathbf{A}/\langle a_i\rangle$. On les définit par

$$\sigma_1(\overline{1}) = \widetilde{uc_2} \text{ et } \sigma_2(\overline{1}) = \overset{\circ}{vc_1}.$$

Pour que $\pi(\sigma(\overline{1})) = \overline{1}$, il faut que $uc_2 + vc_1 \equiv 1 \mod \langle a_1, a_1\rangle$, ce qui signifie $\langle c_1, c_2\rangle = \langle 1\rangle$ dans $\mathbf{A}$. Ainsi on retrouve que la suite est scindée si $\mathbf{A}$ est de Bézout, et qu'elle peut ne pas être scindée dans le cas contraire.

Exercice 33. *1.* Rappelons le diagramme que l'on souhaite : les deux premières lignes et les deux premières colonnes sont des suites exactes courtes canoniques et $G'' = F/(E + F')$



Le théorème de factorisation de Noether donne un isomorphisme naturel

$$G' = F'/(E \cap F') \xrightarrow{j} (E + F')/E, \quad \text{avec } (E + F')/E \subseteq F/E.$$

Cet isomorphisme est défini par $j\big(\pi'(x)\big) = \pi(x) = \pi\big(\iota_F(x)\big)$. Cela nous dit que l'on a une application linéaire injective $\iota_G : G' \to F/E$ qui vérifie

$$\iota_G\big(\pi'(x)\big) = \pi\big(\iota_F(x)\big),$$

c'est-à-dire qui rend le diagramme commutatif.

Comme π' est surjective, ι_G est même l'unique application $\mathbf{A}$-linéaire qui rend le diagramme commutatif.

De même on a une unique application linéaire

$$E'' = E/(E \cap F') \xrightarrow{\iota''} F'' = F/F'$$

qui rend le diagramme commutatif, et ι'' est injective, d'image $(E + F')/F'$.

La surjection canonique $\theta : F \to F/(E + F')$ se factorise de manière unique via π parce que $\operatorname{Ker}\pi = E \subseteq E + F' = \operatorname{Ker}\theta$ et l'on obtient ainsi $\pi_G : G \to G''$ satisfaisant $\pi_G \circ \pi = \theta$.

De même on obtient une application linéaire surjective $\pi'' : F'' \to G''$ satisfaisant l'égalité $\pi'' \circ \pi_F = \theta$.

On a ainsi obtenu un diagramme commutatif complet. Il reste à voir que la troisième suite verticale et la troisième suite horizontale sont exactes.

Or $\operatorname{Ker}\pi_G = \pi(\operatorname{Ker}\theta) = (E + F')/E = S/E$ et $\operatorname{Im}\iota_G = \operatorname{Im} j = S/E$. Ceci montre que la suite verticale est exacte, et l'on vient de redécouvrir le théorème de Noether qui établit un isomorphisme naturel

$$G/\operatorname{Ker}\pi_G = (F/E)/(S/E) \xrightarrow{\alpha} F/S = G''$$

satisfaisant $\alpha\big(\overline{\pi(x)}\big) = \pi(x)$ pour tout $x \in F$.

Symétriquement la troisième suite horizontale est exacte.

2. On a déjà vu que la commutativité du diagramme sur les deux premières lignes (resp. colonnes) impose l'application linéaire ι_G (resp. ι''). Il nous reste à voir si l'affirmation analogue concernant π_G et π'' est correcte. On suppose que l'on a des applications linéaires λ_G et λ'' qui satisfont l'égalité $\lambda_G \circ \pi = \lambda'' \circ \pi_F$ et que toutes les lignes et colonnes sont exactes. On obtient donc $\operatorname{Ker}\lambda_G = \operatorname{Im}\iota_G = E + F'$, mais ceci ne force pas l'égalité $\lambda_G \circ \pi = \theta$. Par exemple, si β est un automorphisme arbitraire de G'', on peut prendre $\lambda_G = \beta \circ \pi_G$ et $\lambda'' = \beta \circ \pi''$.

Remarques.

i. Le point *2* montre une certaine absence de symétrie (regrettable) dans la situation. Cela sera élucidé d'une certaine manière dans l'exercice 34.

On peut néanmoins conclure cet exercice comme suit.
Supposons que :

— *les deux premières suites horizontales et les deux premières suites verticales sont des suites exactes courtes canoniques,*

— *et* $\theta = \pi_G \circ \pi = \pi'' \circ \pi_F$.

Alors il y a un unique diagramme commutatif de la forme annoncée, et il rend les troisièmes suites horizontale et verticale exactes.

Notons que ceci constitue une forme particulièrement précise des théorèmes de Noether dans la mesure où les isomorphismes de Noether sont ici complètement explicites et déterminés de manière unique.

ii. Remarquons aussi que l'hypothèse selon laquelle certaines injections et surjections sont canoniques est un peu artificielle dans la mesure où ι_G et ι'' ne sont pas des injections canoniques et π_G et π'' ne sont pas des surjections canoniques. Voir à ce sujet la remarque à la fin du corrigé de l'exercice 34. ∎

Exercice 34. *1.* Rappelons le diagramme donné en hypothèse dans le cas (non vraiment restrictif) où les injections et les surjections sont toutes canoniques.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ 0 & \longrightarrow & E_0 & \xrightarrow{\iota_0} & F' & \xrightarrow{\pi_0} & G_0 = F'/E_0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \jmath_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G = F/E & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

1a. L'application linéaire $\jmath_G$ doit être obtenue en factorisant $\pi \circ \iota_F$. Si elle existe, elle est unique, et elle existe si, et seulement si, $\operatorname{Ker}\pi_0 \subseteq \operatorname{Ker}(\pi \circ \iota_F)$. Or $\operatorname{Ker}\pi_0 = \operatorname{Im}\iota_0$. La condition équivaut donc à $\pi \circ \iota_F \circ \iota_0 = 0$. Or $\pi \circ \iota_F \circ \iota_0 = \pi \circ \iota \circ \jmath_E$ et $\pi \circ \iota = 0$.
1b. Puisque π_0 est surjective, on a $\operatorname{Im}\jmath_G = \operatorname{Im}(\jmath_G \circ \pi_0) = \operatorname{Im}(\pi \circ \iota_F) = \pi(F')$. Enfin $\pi^{-1}\big(\pi(F')\big) = E + F' = S$. Ainsi $\operatorname{Im}\jmath_G = S/E \subseteq F/E$.
1c. L'application $\jmath_G$ est injective si, et seulement si, le noyau de $\jmath_G \circ \pi_0$ est égal au noyau de π_0, qui est E_0, c'est-à-dire encore si $\operatorname{Ker}(\pi \circ \iota_F) = E_0$.
Or $\operatorname{Ker}(\pi \circ \iota_F) = \iota_F^{-1}(E) = E \cap F'$. Ainsi, la condition est bien $E_0 = E'$.
Ceci nous ramène à la situation de l'exercice 33.

2. Rappelons le diagramme donné en hypothèse dans lequel on peut supposer que ι est une injection canonique et π_F une surjection canonique $F \to F'' = F/F'$ avec $F' = \operatorname{Ker}\pi_F$.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \theta_G} & & \\ 0 & \longrightarrow & E_3 & \xrightarrow[\iota_3]{} & F'' & \xrightarrow[\pi_3]{} & G_3 & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

2a. Comme ι est une injection canonique, l'application linéaire $\beta : E \to E_3$ que l'on veut définir doit satisfaire pour $x \in E$ l'égalité $\iota_3\big(\beta(x)\big) = \pi_F(x)$, ce qui est possible si $\pi_F(E) \subseteq \iota_3(E_3)$, c'est-à-dire si $\pi_F(E) \subseteq \operatorname{Ker}\pi_3$, c'est-à-dire encore $\pi_3 \circ \pi_F \circ \iota = 0$. Or $\pi_3 \circ \pi_F \circ \iota = \theta_G \circ \pi \circ \iota$ et $\pi \circ \iota = 0$.
Ainsi β est bien définie, et elle est unique parce que ι_3 est injective.

2b. Puisque ι_3 est injective, on a
$$\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Ker}(\iota_3\circ\beta) = \operatorname{Ker}(\pi_F\circ\iota) = \iota^{-1}(\operatorname{Ker}\pi_F) = \iota^{-1}(F') = E\cap F'.$$
2c. L'application linéaire β est surjective si, et seulement si, $\operatorname{Im}(\iota_3\circ\beta)\supseteq\operatorname{Ker}\pi_3$, c'est-à-dire encore si $\pi_F(E)\supseteq\operatorname{Ker}\pi_3$, ou aussi $\pi_F^{-1}\big(\pi_F(E)\big)\supseteq\pi_F^{-1}\big(\operatorname{Ker}\pi_3\big)$, i.e. enfin $E+\operatorname{Ker}\pi_F\supseteq S_3$. Ainsi β est surjective si, et seulement si, $E+F'=S_3$. Dans ce cas, en prenant $E'=E\cap F'$ on retrouve à isomorphismes près la situation de l'exercice 33. Voyons ceci précisément.
Tout d'abord puisque β est surjective de noyau E', on a une unique application linéaire $\alpha_E = E/E'\to E_3$ qui satisfait $\alpha_E\circ\pi_E=\beta$ ($\pi_E : E\to E/E'$ surjection canonique). Et α_E est un isomorphisme.
Ensuite, puisque $F''=F/F'$ et $\operatorname{Ker}(\pi_3\circ\pi_F)=E'+F$, on a un unique application linéaire $\alpha_G : F/S = G''\to G_3$ qui satisfait $\alpha_G\circ\pi''=\pi_3$ (avec π'' comme dans l'exercice 33), et α_G est un isomorphisme.
Enfin, vu la commutativité du diagramme, on a $\alpha_G\circ\pi_G=\theta_G$ (avec π_G comme dans l'exercice 33).
Ainsi, on retrouve bien, modulo les isomorphismes α_E et α_G, les deux dernières lignes du diagramme de l'exercice 33.
Remarque. En se libérant de l'hypothèse rajoutée un peu artificiellement pour faciliter la démonstration, selon laquelle les injections et surjections données au départ sont canoniques, le point *1* donnerait l'énoncé suivant,
Un diagramme commutatif de suites exactes du type (I) *peut être complété en un diagramme commutatif complet* (C) *de suites exactes si, et seulement si, on a l'égalité* $\operatorname{Ker}(\iota\circ\iota_E)=\operatorname{Ker}\iota_E\cap\operatorname{Ker}\iota'$. *Et dans ce cas* (C) *est essentiellement unique.*

(I)
$$\begin{array}{ccccc}
 & & 0 & & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\iota'} & F' \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F
\end{array}$$

(C)
$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & E' & \xrightarrow{\iota'} & F' & \xrightarrow{\pi'} & G' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \\
0 & \longrightarrow & E'' & \xrightarrow{\iota''} & F'' & \xrightarrow{\pi''} & G'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

En outre, le point *2* fournit un théorème dual.
Un diagramme commutatif de suites exactes du type (I') *peut être complété en un diagramme commutatif complet* (C) *de suites exactes si, et seulement si, on*

a l'égalité $\operatorname{Ker}(\pi_G \circ \pi) = \operatorname{Ker}\pi + \operatorname{Ker}\pi_F$. *Et dans ce cas* (C) *est essentiellement unique.*

(I')

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \\ F'' & \xrightarrow[\pi'']{} & G'' & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & & 0 & & \end{array}$$

Remarque. La dualité qui apparaît ici entre les points *1* et *2* frise maintenant la perfection. Elle a donné lieu à une abstraction qui permet de mieux la comprendre : la théorie des catégories abéliennes. La catégorie opposée d'une catégorie abélienne étant elle-ême abélienne, un énoncé du style de *1* prouvé dans une catégorie abélienne fournit ipso facto un énoncé correct tel que *2.* ∎

Exercice 35. On rappelle le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & E_1 & \xrightarrow{\iota_1} & F_1 & \xrightarrow{\pi_1} & G_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \iota_E} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_F} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_G} & & \\ 0 & \longrightarrow & E & \xrightarrow{\iota} & F & \xrightarrow{\pi} & G & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi_E} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_F} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_G} & & \\ 0 & \longrightarrow & E_2 & \xrightarrow[\iota_2]{} & F_2 & \xrightarrow[\pi_2]{} & G_2 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

On suppose sans perte de généralité que ι, ι_1, ι_E et ι_F sont des injections canoniques, et π, π_1, π_E et π_F sont des surjections canoniques.
Notons S_2 le noyau de l'application linéaire $\pi_2 \circ \pi_F = \pi_G \circ \pi$.
1. Supposons tout d'abord la suite $0 \to E_1 \to F_1 \to G_1 \to 0$ exacte. Alors d'après le point *1* de l'exercice 34, on a $E_1 = E \cap F_1$, donc $E_2 = E/(E \cap F_1)$, et $\operatorname{Im}\iota_G = (E + F_1)/E \subseteq F/E$, donc $G_2 \simeq F/(E + F_1)$.
Ceci implique que la troisième ligne est exacte.
Supposons la suite $0 \to E_2 \to F_2 \to G_2 \to 0$ exacte. Alors d'après le point *2* de l'exercice 34, on a $\operatorname{Ker}\pi_E = E \cap F_1$, donc $E_1 = E \cap F_1$, et le noyau de l'application linéaire $F \to G_2$ doit être égal à $E + F_1$, ce qui implique $\operatorname{Ker}\pi_G = (E + F_1)/E$.
Comme $F_1/(E \cap F_1) \simeq (E + F_1)/E$, ceci implique que la première ligne est exacte.
2. Déjà démontré

Exercice 36. Laissé au lecteur.

Problème 1. *1.* Si A_j est une colonne non nulle de A, on a $BA_j = e_j$ donc $ABA_j = A_j$; ainsi AB est l'identité sur $\operatorname{Im} A$ donc $ABA = A$. La matrice AB est triangulaire inférieure, et ses coefficients diagonaux sont $0, 1$. La matrice BA est diagonale et ses coefficients diagonaux sont $0, 1$.

$$B = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \qquad BA = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix},$$

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{24} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{44} & \cdot & a_{43} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{74} & \cdot & a_{73} & \cdot & a_{71} & a_{72} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\ a_{94} & \cdot & a_{93} & \cdot & a_{91} & a_{92} & \cdot & a_{95} & \cdot \end{bmatrix}.$$

Le supplémentaire $\operatorname{Ker} AB$ de $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} AB$ dans $\mathbf{K}^n$ admet comme base les e_i pour les indices i de lignes ne contenant pas un indice pivot.
Dans l'exemple, (e_2, e_4, e_7, e_9) est une base de $\operatorname{Ker} AB$.
2. On obtient (Q, A') par la méthode (classique) d'échelonnement de Gauss. Si la matrice $B' \in M_{n,m}(\mathbf{K})$ vérifie $A'B'A' = A'$, alors $AQB'AQ = AQ$, donc la matrice $B = QB'$ vérifie $ABA = A$.
3. Considérons une matrice $B \in \mathbb{M}_{m,n}(\mathbf{K})$ telle que $ABA = A$. Alors, si $y = Ax$ pour un m-vecteur à coefficients dans un sur-anneau de $\mathbf{K}$, on a $A(By) = y$, d'où l'existence d'une solution sur $\mathbf{K}$, à savoir By.
4. Soient $(u_1, \dots, u_r)$ un système générateur du $\mathbf{K}$-espace vectoriel E, constitué de vecteurs de $\mathbf{K}_0^n$; idem pour $(v_1, \dots, v_s)$ et F. Soit $z \in \mathbf{K}_0^n$, que l'on cherche à écrire sous la forme $z = x_1u_1 + \cdots + x_ru_r + y_1v_1 + \cdots + y_sv_s$ avec les $x_i, y_j \in \mathbf{K}_0$. On obtient ainsi un système $\mathbf{K}_0$-linéaire en les inconnues x_i, y_j qui admet une solution sur $\mathbf{K}$, donc également sur $\mathbf{K}_0$.
5.a. Si tous les $\pi(e_j)$ sont dans $\mathbf{K}_0^n$, alors le sous-espace E, engendré par les $\pi(e_j)$, est $\mathbf{K}_0$-rationnel. Réciproquement, si E est $\mathbf{K}_0$-rationnel, comme F l'est aussi, on a, d'après la question précédente, $\pi(e_j) \in \mathbf{K}_0^n$ pour tout j.
5b. Facile maintenant : $\mathbf{K}_0$ est le sous-corps engendré par les composantes des vecteurs $\pi(e_j)$.
5c. Le corps de rationalité d'une matrice strictement échelonnée est le sous-corps engendré par les coefficients de la matrice. Par exemple avec $E = \operatorname{Im} A \subset \mathbf{K}^5$:

$$A = \begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} w_1 & w_2 & w_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ b & c & d \end{bmatrix} \end{array},$$

on obtient $E = \mathbf{K}w_1 \oplus \mathbf{K}w_2 \oplus \mathbf{K}w_3$ et l'on a $\mathbf{K}^5 = E \oplus F$ avec $F = \mathbf{K}e_2 \oplus \mathbf{K}e_5$. Puisque

$$e_1 - w_1 \in F, \quad e_3 - w_2 \in F, \quad e_4 - w_3 \in F,$$

on a $\pi(e_1) = w_1$, $\pi(e_3) = w_2$, $\pi(e_4) = w_3$ et $\pi(e_2) = \pi(e_5) = 0$. Le corps de rationalité de E est $\mathbf{K}_0 = \mathbf{k}(a, b, c, d)$, où $\mathbf{k}$ est le sous-corps premier de $\mathbf{K}$.

Commentaires bibliographiques

Le lemme de Gauss-Joyal est dans [79], qui lui donne son nom de baptême. Sur le sujet général de la comparaison entre les idéaux $\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)$ et $\mathrm{c}(fg)$ on peut consulter [40, 94, 144] et, dans cet ouvrage, les sections III-2 et III-3 et la proposition XI-3.14.

Concernant le traitement constructif de la noethérianité on peut consulter [MRR, 111, 146, 147, 157, 168, 169, 186].

L'ensemble de la section 5 se trouve plus ou moins dans [Northcott]. Par exemple la formule (12) page 44 se trouve sous une forme voisine dans le théorème 5 page 10. De même notre formule magique à la Cramer (17) page 44 est très proche du théorème 6 page 11 : Northcott attache une importance centrale à l'équation matricielle $A\,B\,A = A$. Sur ce sujet, voir aussi [Rao & Mitra] et [59, Díaz-Toca&al.].

La proposition 5.15 se trouve dans [Bhaskara Rao] théorème 5.5.

Concernant le théorème 5.26 : dans [Northcott] le théorème 18 page 122 établit l'équivalence des points *1* et *5* par une méthode qui n'est pas entièrement constructive, mais le théorème 5 page 10 permettrait de donner une formule explicite pour l'implication $5 \Rightarrow 1$.

Chapitre III

La méthode des coefficients indéterminés

Sommaire

Introduction

Weil Gauss ein echter Prophet der Wissenschaft ist,
deshalb reichen die Begriffe,
die er aus der Tiefe der Wissencshaft schöpft,
weit hinaus über den Zweck,
zu welchem sie aufgestellt wurden.
Kronecker
Vorlesungen Sommersemester 1891. Leçon 11 [18]

Trad. approx.
Parce que Gauss est un vrai Prophète de la Science,
les concepts qu'il puise aux profondeurs de la Science
vont au delà du but pour lequel ils ont été établis.

En 1816 Gauss publie un article fondamental [88] dans lequel il rectifie (sans la citer) la démonstration du théorème fondamental de l'algèbre donnée par Laplace quelques années auparavant. La démonstration de Laplace est elle-même remarquable en ce qu'elle est « purement algébrique » : elle ne réclame pour les nombres réels que deux propriétés très élémentaires : l'existence de la racine carrée d'un nombre $\geqslant 0$ et celle d'un zéro pour un polynôme de degré impair.
L'objectif de Gauss est de traiter ce théorème sans faire appel à un corps de nombres imaginaires, hypothétique, sur lequel se décomposerait en facteurs linéaires un polynôme réel arbitraire. La démonstration de Laplace suppose implicitement l'existence d'un tel corps $\mathbf{K}$ contenant $\mathbb{C} = \mathbb{R}[i]$, et montre que la décomposition en produit de facteurs linéaires a lieu en fait dans $\mathbb{C}[X]$.

La démonstration de Gauss s'affranchit de l'hypothèse du corps **K** et constitue un tour de force qui montre que l'on peut traiter les choses de manière purement formelle. Il prouve l'existence du pgcd de deux polynômes par l'algorithme d'Euclide ainsi que la relation de Bézout correspondante. Il démontre que tout polynôme symétrique s'écrit de manière unique comme polynôme en les fonctions symétriques élémentaires (en introduisant un ordre lexicographique sur les monômes). Il définit le discriminant d'un polynôme unitaire de manière purement formelle. Il démontre (sans recours aux racines) que tout polynôme se décompose en produit de polynômes de discriminant non nul. Il démontre (sans recours aux racines) qu'un polynôme admet un facteur carré si, et seulement si, son discriminant est nul (il est en caractéristique nulle). Il fait enfin fonctionner la démonstration de Laplace de façon purement formelle, sans recours à un corps de racines, en utilisant uniquement résultants et discriminants.
En bref il établit une « méthode générale des coefficients indéterminés » sur une base ferme, qui sera systématiquement reprise, notamment par Leopold Kronecker, Richard Dedekind, Jules Drach, Ernest Vessiot...

Dans ce chapitre nous introduisons la méthode des coefficients indéterminés et nous en donnons quelques applications.
Nous commençons par quelques généralités sur les anneaux de polynômes. Le lemme de Dedekind-Mertens et le théorème de Kronecker sont deux outils de base qui donnent des informations précises sur les coefficients du produit de deux polynômes. Ces deux résultats seront souvent utilisés dans le reste de l'ouvrage.
Nous étudions les propriétés élémentaires du discriminant et du résultant et nous introduisons l'outil fondamental qu'est l'algèbre de décomposition universelle d'un polynôme unitaire. Celle-ci permet de simplifier des preuves purement formelles à la Gauss en donnant un substitut formel au « corps de racines » du polynôme.
Tout ceci est très uniforme et fonctionne avec des anneaux commutatifs arbitraires. La lectrice ne verra apparaître les corps qu'à partir de la section 6.
Les applications que nous traitons concernent la théorie de Galois de base, les premiers pas en théorie algébrique des nombres, et le Nullstellensatz de Hilbert. Nous avons également consacré une section à la méthode de Newton en algèbre.

Deux mots sur les ensembles finis

Un ensemble E est dit *fini* lorsque l'on a explicitement une bijection entre E et un segment initial $\{ x \in \mathbb{N} \mid x < n \}$ de $\mathbb{N}$. Il est dit *finiment énumérable* lorsque l'on a explicitement une surjection d'un ensemble fini F sur E.
En général le contexte est suffisant pour faire la distinction entre les deux notions. Parfois, on a intérêt à être très précis. Nous ferons la distinction si

nécessaire en utilisant la notation $\mathrm{P_f}$ ou $\mathrm{P_{fe}}$: nous noterons $\mathrm{P_f}(S)$ *l'ensemble des parties finies* de l'ensemble S et $\mathrm{P_{fe}}(S)$ *l'ensemble des parties finiment énumérables*. En mathématiques constructives lorsque S est discret (resp. fini), on a l'égalité $\mathrm{P_f}(S) = \mathrm{P_{fe}}(S)$ et c'est un ensemble discret (resp. fini) [1]. Lorsque S *n'est pas* discret, $\mathrm{P_f}(S)$ *n'est pas* égal à $\mathrm{P_{fe}}(S)$.
Notons aussi que lorsque S est un ensemble fini toute partie détachable (cf. page 30) est finie : l'ensemble des parties finies est alors égal à l'ensemble des parties détachables.
Les parties finiment énumérées sont omniprésentes dans le discours mathématique usuel. Par exemple lorsque l'on parle d'un idéal de type fini on veut dire un idéal engendré par une partie finiment énumérée et non par une partie finie. De même quand nous parlons d'une *famille finie* $(a_i)_{i\in I}$ dans l'ensemble E, nous entendons que I est un ensemble fini, donc la partie $\{\, a_i \mid i \in I \,\} \subseteq E$ est finiment énumérée.
Enfin un ensemble non vide E est dit *énumérable* si l'on a une application surjective $\mathbb{N} \to E$.

1. Anneaux de polynômes

Algorithme de factorisation partielle

Nous supposons le lecteur familier avec l'algorithme d'Euclide étendu qui permet de calculer le pgcd unitaire de deux polynômes unitaires dans $\mathbf{K}[X]$ lorsque $\mathbf{K}$ est un corps discret (voir par exemple le problème 2).

1.1. Lemme. *Si* $\mathbf{K}$ *est un corps discret, on dispose d'un algorithme de* factorisation partielle *pour les familles finies de polynômes unitaires dans* $\mathbf{K}[X]$ *: une factorisation partielle pour une famille finie* $(g_1, \ldots, g_r)$ *est donnée par une famille finie* $(f_1, \ldots, f_s)$ *de polynômes unitaires deux à deux étrangers et par l'écriture de chaque* g_i *sous la forme*

$$g_i = \textstyle\prod_{k=1}^{s} f_k^{m_{k,i}} \ (m_{k,i} \in \mathbb{N}).$$

La famille $(f_1, \ldots, f_s)$ *s'appelle une* base de factorisation partielle *pour la famille* $(g_1, \ldots, g_r)$.

▷ Si les g_i sont deux à deux étrangers, il n'y a rien à faire. Sinon, supposons par exemple que $\mathrm{pgcd}(g_1, g_2) = h_0$, $g_1 = h_0 h_1$ et $g_2 = h_0 h_2$ avec $\deg(h_0) \geqslant 1$. On remplace la famille $(g_1, \ldots, g_r)$ par la famille $(h_0, h_1, h_2, g_3, \ldots, g_r)$. On note que la somme des degrés a diminué. On note aussi que l'on peut

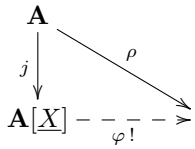
1. En mathématiques constructives on s'abstient en général de considérer l'« ensemble de toutes les parties d'un ensemble », même fini, car ce n'est pas un ensemble « raisonnable » : il ne semble pas possible de donner une définition claire de ses éléments (voir la discussion page 982). Quand nous avons utilisé la notation $\mathcal{P}_\ell$ pour « l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, \ell\}$ », page 43, il s'agissait en fait de l'ensemble des parties finies de $\{1, \ldots, \ell\}$.

supprimer dans la liste les polynômes égaux à 1, ou les occurrences multiples d'un même polynôme. On termine par récurrence sur la somme des degrés. Les détails sont laissés à la lectrice. □

Propriété universelle des anneaux de polynômes

Un anneau de polynômes $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ vérifie la propriété universelle qui le définit comme *l'anneau commutatif librement engendré par* $\mathbf{A}$ *et* n *nouveaux éléments.* C'est la propriété décrite au moyen de l'homomorphisme d'évaluation dans les termes suivants.

1.2. Proposition. *Étant donnés deux anneaux commutatifs* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$*, un homomorphisme* $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *et* n *éléments* $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{B}$ *il existe un unique homomorphisme* $\varphi : \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{A}[\underline{X}] \to \mathbf{B}$ *qui prolonge* ρ *et qui envoie les* X_i *sur les* b_i*.*



$\varphi(X_i) = b_i,\ i \in [\![1..n]\!]$.

Cet homomorphisme φ s'appelle *l'homomorphisme d'évaluation* (des X_i en les b_i). Si $P \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ a pour image P^ρ dans $\mathbf{B}[X_1, \ldots, X_n]$, on obtient l'égalité $\varphi(P) = P^\rho(b_1, \ldots, b_n)$. L'homomorphisme d'évaluation s'appelle encore une *spécialisation*, et l'on dit que $\varphi(P)$ est obtenu en *spécialisant* les X_i en les b_i. Lorsque $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, les éléments $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{B}$ sont dits *algébriquement indépendants sur* $\mathbf{A}$ si l'homomorphisme d'évaluation correspondant est injectif.
D'après la proposition 1.2 tout calcul fait dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$ se transfère dans $\mathbf{B}$ au moyen de l'homomorphisme d'évaluation.
Il est clair que S_n agit comme groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ par permutation des indéterminées : $(\sigma, Q) \mapsto Q(X_{\sigma 1}, \ldots, X_{\sigma n})$.
Le corollaire suivant résulte immédiatement de la proposition 1.2.

1.3. Corollaire. *Étant donnés* n *éléments* $b_1, \ldots, b_n$ *dans un anneau commutatif* $\mathbf{B}$*, il existe un unique homomorphisme* $\varphi : \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n] \to \mathbf{B}$ *qui envoie les* X_i *sur les* b_i*.*

Identités algébriques

Une identité algébrique est une égalité entre deux éléments de $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ définis de manière différente. Elle se transfère automatiquement dans tout anneau commutatif au moyen du corollaire précédent.
Comme l'anneau $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ a des propriétés particulières, il arrive que des identités algébriques soient plus faciles à démontrer sur $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ que dans « un anneau $\mathbf{B}$ arbitraire ». En conséquence, si la structure d'un

théorème se ramène à une famille d'identités algébriques, ce qui est très fréquent en algèbre commutative, on a souvent intérêt à utiliser un anneau de polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ en prenant comme indéterminées les éléments pertinents dans l'énoncé du théorème.
Les propriétés des anneaux $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ qui peuvent s'avérer utiles sont nombreuses. La première est qu'il s'agit d'un anneau intègre. Donc il se plonge dans son corps de fractions $\mathbb{Q}(X_1,\dots,X_n)$ qui offre toutes les facilités des corps discrets.
La deuxième est qu'il s'agit d'un anneau infini et intègre. En conséquence, «on peut faire disparaître les cas ennuyeux mais rares». Un cas est rare quand il correspond à l'annulation d'un polynôme Q non identiquement nul. Il suffit de vérifier l'égalité correspondant à l'identité algébrique lorsque celle-ci est évaluée pour les points de $\mathbb{Z}^n$ qui n'annulent pas Q. En effet, si l'identité algébrique à démontrer est $P=0$, on obtient que le polynôme PQ définit la fonction identiquement nulle sur $\mathbb{Z}^n$, ceci implique $PQ=0$ et donc $P=0$ puisque $Q\neq 0$ et $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ est intègre. Ceci est parfois appelé le «principe de prolongement des identités algébriques».
D'autres propriétés remarquables de $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ pourront parfois être utilisées, comme le fait que c'est un anneau factoriel, noethérien cohérent fortement discret de dimension de Krull finie.

Un exemple d'application

1.4. Lemme. *Pour A, $B\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, on a les résultats suivants.*

1. $\widetilde{AB}=\widetilde{B}\widetilde{A}$.
2. $\mathrm{C}_{AB}=\mathrm{C}_{BA}$.
3. $\widetilde{PAP^{-1}}=P\widetilde{A}P^{-1}$ *pour* $P\in\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$.
4. $\widetilde{\widetilde{A}}=\det(A)^{n-2}A$ *si* $n\geqslant 2$.
5. (Théorème de Cayley-Hamilton) $\mathrm{C}_A(A)=0$.
6. *Si* $\Gamma_A(X):=(-1)^{n+1}\big(\mathrm{C}_A(X)-\mathrm{C}_A(0)\big)/X$, *on a* $\widetilde{A}=\Gamma_A(A)$ *($n\geqslant 2$).*
   On a aussi $\mathrm{Tr}\left(\widetilde{A}\right)=(-1)^{n+1}\Gamma_A(0)$.
7. (Identités de Sylvester) *Soient $r\geqslant 1$, $s\geqslant 2$ avec $n=r+s$. Soient les matrices $C\in\mathbb{M}_r(\mathbf{A})$, $F\in\mathbb{M}_s(\mathbf{A})$, $D\in\mathbb{M}_{r,s}(\mathbf{A})$ et $E\in\mathbb{M}_{s,r}(\mathbf{A})$ extraites de la matrice A comme ci-dessous*

$$A=\begin{array}{|c|c|}\hline C & D\\ \hline E & F\\ \hline\end{array}.$$

   Notons $\alpha_i=\{1,\dots,r,r+i\}$ et $\mu_{i,j}=\det(A_{\alpha_i,\alpha_j})$ pour $i,j\in[\![1..s]\!]$. Alors :

$$\det(C)^{s-1}\det(A)=\det\left((\mu_{i,j})_{i,j\in[\![1..s]\!]}\right).$$

8. Si $\det A = 0$, *alors* $\bigwedge^2 \widetilde{A} = 0$.

▷ On peut prendre toutes les matrices à coefficients indéterminés sur $\mathbb{Z}$ et localiser en $\det P$. Dans ce cas A, B, C et P sont inversibles dans le corps des fractions de l'anneau $\mathbf{B} = \mathbb{Z}[(a_{ij}), (b_{ij}), (p_{ij})]$. Par ailleurs, la matrice $\widetilde{A}$ vérifie l'égalité $\widetilde{A}A = \det(A)\,\mathrm{I}_n$, ce qui la caractérise puisque $\det A$ est inversible. Ceci fournit le point *1* via l'égalité $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, les points *3* et *4*, et le point *6* via le point *5* et l'égalité $\mathrm{C}_A(0) = (-1)^n \det A$. Pour le point *2* on note que $AB = A(BA)A^{-1}$.
Pour le théorème de Cayley-Hamilton, on traite d'abord le cas de la *matrice compagne d'un polynôme unitaire* $f = T^n - \sum_{k=1}^{n} a_k T^{n-k}$:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_n \\ 1 & 0 & & & \vdots & a_{n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 & a_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit de la matrice de la «multiplication par t», $\mu_t : y \mapsto ty$ (où t est la classe de T) dans l'anneau quotient $\mathbf{A}[T]/\langle f(T)\rangle = \mathbf{A}[t]$, exprimée sur la base des monômes ordonnés par degrés croissants. En effet, d'une part un calcul direct montre que $\mathrm{C}_P(T) = f(T)$. D'autre part $f(\mu_t) = \mu_{f(t)} = 0$, donc $f(P) = 0$.
Par ailleurs, dans le cas de la matrice générique, le déterminant de la famille $(e_1, Ae_1, \ldots, A^{n-1}e_1)$ est nécessairement non nul, donc la matrice générique est semblable à la matrice compagne de son polynôme caractéristique sur le corps des fractions de $\mathbb{Z}[(a_{ij})]$.
7. Puisque C est inversible, on peut utiliser le pivot de Gauss généralisé, par multiplication à gauche par une matrice $\begin{array}{|c|c|}\hline C^{-1} & 0 \\ \hline E' & \mathrm{I}_s \\ \hline \end{array}$, ceci nous ramène au cas où $C = \mathrm{I}_r$ et $E = 0$.
Enfin le point *8* résulte de l'identité de Sylvester (point *7*) avec $s = 2$. □

Remarque. Le point *3* permet de définir l'*endomorphisme cotransposé* d'un endomorphisme d'un module libre de rang fini, à partir de la matrice cotransposée.

Poids, polynômes homogènes

On dit que l'on a défini un poids sur une algèbre de polynômes $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_k]$ lorsque l'on attribue à chaque indéterminée X_i un poids $w(X_i) \in \mathbb{N}$. On définit ensuite le poids du monôme $\underline{X^m} = X_1^{m_1} \cdots X_k^{m_k}$ par

$$w(\underline{X^m}) = \textstyle\sum_i m_i w(X_i),$$

de sorte que $w(\underline{X}^{\underline{m}+\underline{m}'}) = w(\underline{X}^{\underline{m}}) + w(\underline{X}^{\underline{m}'})$. Le degré d'un polynôme P pour ce poids, noté en général $w(P)$, est le plus grand des poids des monômes apparaissant avec un coefficient non nul. Ceci n'est bien défini que si l'on dispose d'un test d'égalité à 0 dans $\mathbf{A}$. Dans le cas contraire on se contente de définir la phrase « $w(P) \leqslant r$ ».
Un polynôme est dit *homogène* (pour un poids w) si tous ses monômes ont même poids.
Lorsque l'on dispose d'une identité algébrique et d'un poids, chaque composante homogène de l'identité algébrique fournit une identité algébrique particulière.
On peut aussi définir des poids à valeurs dans des monoïdes ordonnés plus compliqués que $(\mathbb{N}, 0, +, \geqslant)$. On demande alors que ce monoïde soit la partie positive d'un produit de groupes abéliens totalement ordonnés, ou plus généralement un monoïde à pgcd (cette notion sera introduite au chapitre XI).

Polynômes symétriques

On fixe n et $\mathbf{A}$ et l'on note $S_1, \ldots, S_n$ les *polynômes symétriques élémentaires en les* X_i dans $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$. Ils sont définis par l'égalité

$$T^n + S_1 T^{n-1} + S_2 T^{n-2} + \cdots + S_n = \prod_{i=1}^{n} (T + X_i).$$

On a $S_1 = \sum_i X_i$, $S_n = \prod_i X_i$, $S_k = \sum_{J \in \mathcal{P}_{k,n}} \prod_{i \in J} X_i$. Rappelons le théorème bien connu suivant (une démonstration est suggérée en exercice 3).

1.5. Théorème. (Polynômes symétriques élémentaires)

1. *Un polynôme $Q \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{A}[\underline{X}]$, invariant par les permutations de variables, s'écrit de manière unique comme un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires S_1, …, S_n. En d'autres termes*
   — *le sous-anneau des points fixes de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ par l'action du groupe symétrique S_n est l'anneau $\mathbf{A}[S_1, \ldots, S_n]$ engendré par $\mathbf{A}$ et les S_i, et*
   — *les S_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}$.*
2. *Notons $d(P)$ le degré total de $P \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ lorsque chaque X_i est affecté du poids 1, et $d_1(P)$ son degré en X_1. Notons $\delta(Q)$ le degré total de $Q \in \mathbf{A}[S_1, \ldots, S_n]$ lorsque chaque variable S_i est affectée du poids i et $\delta_1(Q)$ son degré total lorsque chaque variable S_i est affectée du poids 1. Supposons que $Q(S_1, \ldots, S_n)$ s'évalue en $P(\underline{X})$.*
   a. $d(P) = \delta(Q)$, et si Q est δ-homogène, alors P est d-homogène.
   b. $d_1(P) = \delta_1(Q)$.

3. $\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$ *est un module libre de rang* $n!$ *sur* $\mathbf{A}[S_1,\dots,S_n]$ *et une base est formée par les monômes* $X_1^{k_1}\cdots X_{n-1}^{k_{n-1}}$ *tels que* $k_i \in [\![0..n-i]\!]$ *pour chaque* i.

1.6. Corollaire. *Sur un anneau* $\mathbf{A}$ *on considère le polynôme générique*
$$f = T^n + f_1T^{n-1} + f_2T^{n-2} + \cdots + f_n,$$
où les f_i *sont des indéterminées.*
On a un homomorphisme injectif $j : \mathbf{A}[f_1,\dots,f_n] \to \mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$ *tel que les* $(-1)^k j(f_k)$ *sont les polynômes symétriques élémentaires en les* X_i.

En bref on peut toujours se ramener au cas où $f(T) = \prod_i (T - X_i)$, où les X_i sont d'autres indéterminées.

1.7. Corollaire. *Sur un anneau* $\mathbf{A}$ *on considère le polynôme générique*
$$f = f_0T^n + f_1T^{n-1} + f_2T^{n-2} + \cdots + f_n,$$
où les f_i *sont des indéterminées.*
On a un homomorphisme injectif $j : \mathbf{A}[f_0,\dots,f_n] \to \mathbf{B}{=}\mathbf{A}[F_0,X_1,\dots,X_n]$, *avec dans* $\mathbf{B}[T]$ *l'égalité suivante.*
$$j(f_0)\,T^n + j(f_1)\,T^{n-1} + \cdots + j(f_n) = F_0 \prod\nolimits_i (T - X_i)\,.$$

En bref, on peut toujours se ramener au cas où $f(T) = f_0 \prod_i (T - X_i)$, avec des indéterminées f_0, X_1, …, X_n.

▷ Il suffit de voir que si f_0, g_1, …, $g_n \in \mathbf{B}$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}$, alors il en va de même pour f_0, f_0g_1, …, f_0g_n. Il suffit de vérifier que f_0g_1, …, f_0g_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}[f_0]$. Cela résulte de ce que f_0 est régulier et de ce que g_1, …, g_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}[f_0]$. □

2. Lemme de Dedekind-Mertens

Rappelons que pour un polynôme f de $\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] = \mathbf{A}[\underline{X}]$, on appelle «contenu de f» et l'on note $\mathrm{c}_{\mathbf{A},\underline{X}}(f)$ ou $\mathrm{c}(f)$ l'idéal engendré par les coefficients de f.
Notons que l'on a toujours $\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g) \supseteq \mathrm{c}(fg)$ et donc $\mathrm{c}(f)^{k+1}\mathrm{c}(g) \supseteq \mathrm{c}(f)^k\mathrm{c}(fg)$ pour tout $k \geqslant 0$. Pour k assez grand cette inclusion devient une égalité.

2.1. Lemme de Dedekind-Mertens.
Pour $f, g \in \mathbf{A}[T]$ *avec* $m \geqslant \deg g$ *on a*
$$\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^m\mathrm{c}(fg).$$

▷ Tout d'abord on remarque que les produits f_ig_j sont les coefficients du polynôme $f(Y)g(X)$. Pareillement, pour des indéterminées $Y_0,\dots,Y_m$, le contenu du polynôme $f(Y_0)\cdots f(Y_m)g(X)$ est égal à $\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g)$.
Notons $h = fg$. Imaginons que dans l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X,Y_0,\dots,Y_m]$ on puisse montrer l'appartenance du polynôme $f(Y_0)\cdots f(Y_m)g(X)$ à l'idéal

$$\textstyle\sum_{j=0}^{m} \big(h(Y_j)\, \prod_{k,k\neq j} \langle f(Y_k)\rangle\big).$$

On en déduirait immédiatement que $\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g) \subseteq \mathrm{c}(f)^m\mathrm{c}(h)$.
À quelque chose près, c'est ce qui va arriver. On chasse les dénominateurs dans la formule d'interpolation de Lagrange (on a besoin d'au moins $1+\deg g$ points d'interpolation) :

$$g(X) = \textstyle\sum_{j=0}^{m} \ \dfrac{\prod_{k,k\neq j}(X-Y_k)}{\prod_{k,k\neq j}(Y_j-Y_k)}\ g(Y_j)\,.$$

On obtient dans l'anneau $\mathbf{B}$, en posant $\Delta = \prod_{j\neq k}(Y_j - Y_k)$:

$$\Delta \cdot g(X) \ \in\ \textstyle\sum_{j=0}^{m} \langle g(Y_j)\rangle\,.$$

Donc en multipliant par $f(Y_0)\cdots f(Y_m)$:

$$\Delta \cdot f(Y_0)\cdots f(Y_m)\cdot g(X) \ \in\ \textstyle\sum_{j=0}^{m} h(Y_j)\, \prod_{k,k\neq j} \langle f(Y_k)\rangle\,.$$

Si l'on montre que pour n'importe quel $Q \in \mathbf{B}$ on a $\mathrm{c}(Q) = \mathrm{c}(\Delta \cdot Q)$, l'appartenance précédente donne $\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g) \subseteq \mathrm{c}(f)^m\mathrm{c}(h)$.
On note que $\mathrm{c}(Y_i\, Q) = \mathrm{c}(Q)$ et surtout que

$$\mathrm{c}\big(Q(Y_0 \pm Y_1, Y_1, \ldots, Y_m)\big) \subseteq \mathrm{c}\big(Q(Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)\big).$$

Donc, en faisant $Y_0 = (Y_0 \pm Y_1) \mp Y_1$, $\mathrm{c}\big(Q(Y_0 \pm Y_1, Y_1, \ldots, Y_m)\big) = \mathrm{c}(Q)$.
Les polynômes suivants ont donc tous même contenu :
Q, $Q(Y_0+Y_1, Y_1, \ldots, Y_m)$, $Y_0\, Q(Y_0+Y_1, Y_1, \ldots, Y_m)$, $(Y_0-Y_1)\, Q(Y_0, Y_1, \ldots, Y_m)$.
D'où ensuite $\mathrm{c}(Q) = \mathrm{c}(\Delta \cdot Q)$. □

On en déduit les corollaires suivants.

2.2. Corollaire. *Si f_1, …, f_d sont d polynômes (à une indéterminée) de degré $\leqslant \delta$, on a, avec $e_i = 1 + (d-i)\delta$:*

$$\mathrm{c}(f_1)^{e_1}\mathrm{c}(f_2)^{e_2}\cdots\mathrm{c}(f_d)^{e_d} \subseteq \mathrm{c}(f_1 f_2 \cdots f_d).$$

▷ Soient $f = f_1$ et $g = f_2 \cdots f_d$. On a $\deg g \leqslant (d-1)\delta$ et $e_1 = 1 + (d-1)\delta$.
Le lemme de Dedekind-Mertens donne donc :
$\mathrm{c}(f)^{e_1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^{(d-1)\delta}\mathrm{c}(fg) \subseteq \mathrm{c}(fg)$, i.e. $\mathrm{c}(f_1)^{e_1}\mathrm{c}(f_2\cdots f_d) \subseteq \mathrm{c}(f_1 f_2 \cdots f_d)$.
On termine par récurrence sur d. □

2.3. Corollaire. *Soient f et $g \in \mathbf{A}[T]$.*

1. *Si $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(f)\big) = 0$, alors $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f) = 0$* (Lemme de McCoy).
2. *Si $\mathbf{A}$ est réduit, alors $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(f)\big)[T]$.*
3. *Le polynôme f est nilpotent si, et seulement si, chacun de ses coefficients est nilpotent.*
4. *Si $\mathrm{c}(f) = 1$, alors $\mathrm{c}(fg) = \mathrm{c}(g)$.*

▷ Soit $g \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f)$ et $m \geqslant \deg(g)$. Le lemme de Dedekind-Mertens implique :

$$\mathrm{c}(f)^{1+m} g = 0. \qquad (*)$$

1. Donc, $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\mathrm{c}(f) = 0$ implique $g = 0$.
2. Puisque l'anneau est réduit, $(*)$ implique $\mathrm{c}(f)g = 0$. Ainsi tout poly-

nôme g annulé par f est annulé par $\mathrm{c}(f)$.
Par ailleurs, $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(f)\big) = \mathbf{A} \cap \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f)$ et donc l'inclusion

$$\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f) \supseteq \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(f)\big)[T]$$

est toujours vraie (que $\mathbf{A}$ soit réduit ou non).
3. Si $f^2 = 0$, le lemme de Dedekind-Mertens implique $\mathrm{c}(f)^{2+\deg f} = 0$.
4. Immédiat d'après $\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^m\mathrm{c}(fg)$. □

3. Un théorème de Kronecker

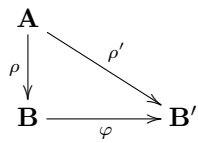
Algèbres et éléments entiers

Nous introduisons tout d'abord la terminologie des $\mathbf{A}$-algèbres. Les algèbres que nous considérons dans cet ouvrage sont associatives, commutatives et unitaires, sauf précision contraire.

3.1. Définition.

1. Une $\mathbf{A}$-*algèbre* est un anneau commutatif $\mathbf{B}$ avec un homomorphisme d'anneaux commutatifs $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$. Cela fait de $\mathbf{B}$ un $\mathbf{A}$-module. Lorsque $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, ou plus généralement si ρ est injectif, on dira que $\mathbf{B}$ est une *extension* de $\mathbf{A}$.

2. Un *morphisme* de l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ vers l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho'} \mathbf{B'}$ est un homomorphisme d'anneaux $\mathbf{B} \xrightarrow{\varphi} \mathbf{B'}$ vérifiant $\varphi \circ \rho = \rho'$. L'ensemble des morphismes d'$\mathbf{A}$-algèbres de $\mathbf{B}$ vers $\mathbf{B'}$ sera noté $\mathrm{Hom}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}, \mathbf{B'})$.



Remarques.
1) Nous n'avons pas voulu réserver la terminologie «extension» au cas des corps. Ceci nous obligera par la suite à utiliser dans le cas des corps des phrases comme : $\mathbf{L}$ est une extension de corps de $\mathbf{K}$, ou : $\mathbf{L}$ est un corps, extension de $\mathbf{K}$.
2) Tout anneau est une $\mathbb{Z}$-algèbre de manière unique et tout homomorphisme d'anneaux est un morphisme des $\mathbb{Z}$-algèbres correspondantes. La catégorie des anneaux commutatifs peut donc être vue comme un cas particulier parmi les catégories d'algèbres définies ci-dessus. ∎

Notation : Si $b \in \mathbf{B}$ et M est un $\mathbf{B}$-module, on note $\mu_{M,b}$ ou μ_b la multiplication par b dans M : $y \mapsto by$, $M \to M$. Ceci peut être vu comme une application $\mathbf{B}$-linéaire, ou, si $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre, comme une application $\mathbf{A}$-linéaire pour la structure de $\mathbf{A}$-module de M.

3.2. Définition. Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ des anneaux.

1. Un élément $x \in \mathbf{B}$ est dit *entier* sur $\mathbf{A}$ s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $x^k = a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k$ avec les $a_h \in \mathbf{A}$. Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, on dit aussi que x est *algébrique sur* $\mathbf{A}$.
2. Dans ce cas, le polynôme unitaire $P = X^k - (a_1 X^{k-1} + a_2 X^{k-2} + \cdots + a_k)$ est appelé une *relation de dépendance intégrale* de x sur $\mathbf{A}$. En fait, par abus de langage on dit aussi que l'égalité $P(x) = 0$ est une *relation de dépendance intégrale*. Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, on parle aussi de *relation de dépendance algébrique*.
3. L'anneau $\mathbf{B}$ est dit *entier* sur $\mathbf{A}$ si tout élément de $\mathbf{B}$ est entier sur $\mathbf{A}$. On dira aussi que l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ est *entière*. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont des corps discrets, on dit que $\mathbf{B}$ est *algébrique* sur $\mathbf{A}$.
4. Si $\rho : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ est une $\mathbf{C}$-algèbre avec $\rho(\mathbf{C}) = \mathbf{A}$, on dira que l'algèbre $\mathbf{B}$ est entière sur $\mathbf{C}$ si elle est entière sur $\mathbf{A}$.

Le théorème

3.3. Théorème. (Théorème de Kronecker) [120]
Soit dans $\mathbf{B}[T]$ *les polynômes*

$$f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i f_i T^{n-i},\ g = \sum_{j=0}^{m} (-1)^j g_j T^{m-j} \text{ et } h = fg = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r h_r T^{p-r},$$

où $p = m + n$. *Soit* $\mathbf{A} = \mathbf{Z}[h_0, \ldots, h_p]$ *le sous-anneau engendré par les coefficients de* h *(*$\mathbf{Z}$ *est le sous-anneau de* $\mathbf{B}$ *engendré par* $1_{\mathbf{B}}$*).*

1. *Chaque* $f_i g_j$ *est entier sur* $\mathbf{A}$.
2. *Dans le cas où on prend pour* f_i *et* g_j *des indéterminées sur l'anneau* $\mathbb{Z}$, *on trouve une relation de dépendance intégrale sur* $\mathbf{A}$ *pour* $z_{i,j} = f_i g_j$ *qui est homogène pour différents systèmes de poids attribués aux monômes :*
   a. *les poids respectifs de* $z_{k,\ell}$ *et* h_r *sont* $k + \ell$ *et* r.
   b. *les poids respectifs de* $z_{k,\ell}$ *et* h_r *sont* $p - k - \ell$ *et* $p - r$.
   c. *les poids de* $z_{k,\ell}$ *et* h_r *sont* $w(z_{k,\ell}) = w(h_r) = 1$.

   Naturellement ces relations de dépendance intégrale s'appliquent ensuite dans tout anneau.

▷ Il suffit de traiter le point *2.*
Voyons d'abord un cas générique intermédiaire. Nous prenons $f_0 = g_0 = 1$ et pour les autres f_i et g_j des indéterminées sur $\mathbb{Z}$. Les polynômes f et g sont donc des polynômes unitaires dans $\mathbf{B}[T]$ avec $\mathbf{B} = \mathbb{Z}[f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_m]$, et $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[h_1, \ldots, h_p]$.
On suppose sans perte de généralité que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m]$,

où les x_i et $y_j = x_{n+j}$ sont des indéterminées, les f_i sont les polynômes symétriques élémentaires en les x_i, et les g_j sont les polynômes symétriques élémentaires en les y_j (appliquer deux fois le corollaire 1.6). Si nous attribuons à x_i et y_j le poids 1, les $z_{k,\ell}$ et h_r sont homogènes et obtiennent les poids décrits en *2a*. Pour calculer une relation de dépendance intégrale pour $f_i g_j$ (avec éventuellement i ou $j = 0$) sur $\mathbf{A}$, on considère le sous-groupe $H_{i,j}$ de S_p formé par les σ qui vérifient $\sigma(f_i g_j) = f_i g_j$ (ce sous-groupe contient au moins toutes les permutations qui stabilisent $[\![1..n]\!]$). On considère alors le polynôme

$$P_{i,j}(T) = \prod\nolimits_{\tau \in \mathrm{S}_p/H_{i,j}} \big(T - \tau(f_i g_j)\big), \qquad (*)$$

où $\tau \in \mathrm{S}_p/H_{i,j}$ signifie que l'on prend exactement un τ dans chaque classe à gauche modulo $H_{i,j}$. Alors, $P_{i,j}$ est homogène pour les poids w_a décrits en *2a* (i, j étant fixés, on note w_a les poids *2a*, avec $w_a(T) = w_a(z_{i,j})$). En outre, $P_{i,j}$ est symétrique en les x_k ($k \in [\![1..p]\!]$). Il s'écrit donc de manière unique comme un polynôme $Q_{i,j}(\underline{h}, T)$ en les h_r et T, et $Q_{i,j}$ est w_a-homogène (théorème 1.5 points *1* et *2a*). Le degré en T de $Q_{i,j}$ est $d_{i,j} = (\mathrm{S}_p : H_{i,j})$. Pour $R \in \mathbf{C}[T]$, notons $\delta(R)$ l'entier $\deg_{x_1}(R) + \deg_T(R)$. On voit que δ est un poids, et que $\delta(f_i g_j) = w(f_i g_j) \leqslant 1$, $\delta(h_r) = w(h_r) \leqslant 1$ (avec $w(h_r) = 1$ si i, j, $r \geqslant 1$). En outre, chaque facteur de $P_{i,j}$ dans $(*)$ est de poids 1 (mais pas forcément homogène car on peut avoir $\delta(\sigma(f_i g_j)) = 0$). Ceci donne $\delta(Q_{i,j}) = d_{i,j}$ lorsque le polynôme est évalué dans $\mathbf{C}[T]$. En outre, d'après le théorème 1.5 point *2b*, lorsque l'on écrit un polynôme symétrique en $(x_1, \ldots, x_p)$, disons $S(\underline{x})$, comme polynôme $S_1(\underline{h})$ en les h_i, on a $\delta(S) = w(S_1)$. Ainsi $w(Q_{i,j}) = d_{i,j}$.

Pour traiter le point *2* proprement dit il suffit d'« homogénéiser ». En effet, si l'on pose $\widetilde{f}_i = f_i/f_0$ et $\widetilde{g}_j = g_j/g_0$, ce qui est légitime d'après le corollaire 1.7, on retombe pour les $\widetilde{f}_i$ et $\widetilde{g}_j$ sur la situation précédente pour ce qui concerne les poids *2a*. On obtient une relation de dépendance intégrale homogène pour $\widetilde{z}_{i,j} = \widetilde{f}_i \widetilde{g}_j$ sur le sous-anneau engendré par les $\widetilde{h}_r$:

$$Q_{i,j}(\widetilde{h}_1, \ldots, \widetilde{h}_p, \widetilde{z}_{i,j}) = 0,$$

avec $\widetilde{z}_{i,j} = f_i g_j / h_0$ et $\widetilde{h}_r = h_r/h_0$.

On multiplie l'identité algébrique obtenue par $h_0^{d_{i,j}}$ de manière à obtenir un polynôme unitaire en $z_{i,j}$.

Tous les dénominateurs ont disparu parce que $w(Q_{i,j}) = d_{i,j}$. On obtient :

$$R_{i,j}(h_0, \ldots, h_p, f_i g_j) = 0,$$

où $R_{i,j}(h_0, \ldots, h_p, T)$ est unitaire en T et homogène pour les poids w_a et w. Reste la question de l'homogénéité pour les poids w_b en *2b* : il suffit de noter que l'on a pour tout $R \in \mathbf{A}[T]$ l'égalité $w_a(R) + w_b(R) = pw(R)$. □

Exemple. Dans le cas où $m = n = 2$, le calcul indiqué donne les résultats suivants.
Lorsque $f_0 = g_0 = 1$ le coefficient g_1 annule le polynôme :

$$\begin{aligned} p_{01}(t) \;=\; & t^6 - 3h_1t^5 + (3h_1^2 + 2h_2)\,t^4 + (-h_1^3 - 4h_1h_2)\,t^3 \\ & +(2h_1^2h_2 + h_1h_3 + h_2^2 - 4h_4)\,t^2 + (-h_1^2h_3 - h_1h_2^2 + 4h_1h_4)\,t \\ & -h_1^2h_4 + h_1h_2h_3 - h_3^2\,, \end{aligned}$$

donc dans le cas général f_0g_1 annule le polynôme :

$$\begin{aligned} q_{01}(t) \;=\; & t^6 - 3h_1t^5 + (3h_1^2 + 2h_0h_2)\,t^4 + (-h_1^3 - 4h_0h_1h_2)\,t^3 \\ & +(2h_0h_1^2h_2 + h_0^2h_1h_3 + h_0^2h_2^2 - 4h_0^3h_4)\,t^2 \\ & +(-h_0^2h_1^2h_3 - h_0^2h_1h_2^2 + 4h_0^3h_1h_4)\,t - h_0^3h_1^2h_4 + h_0^3h_1h_2h_3 - h_0^4h_3^2\,. \end{aligned}$$

Lorsque $f_0 = g_0 = 1$ le coefficient g_2 annule le polynôme :

$$\begin{aligned} p_{02}(t) \;=\; & t^6 - h_2t^5 + (h_1h_3 - h_4)\,t^4 + (-h_1^2h_4 + 2h_2h_4 - h_3^2)\,t^3 \\ & +(h_1h_3h_4 - h_4^2)\,t^2 - h_2h_4^2\,t + h_4^3\,, \end{aligned}$$

donc f_0g_2 annule le polynôme :

$$\begin{aligned} q_{02}(t) \;=\; & t^6 - h_2t^5 + (h_1h_3 - h_0h_4)\,t^4 + (-h_1^2h_4 + 2h_0h_2h_4 - h_0h_3^2)\,t^3 \\ & +(h_0h_1h_3h_4 - h_0^2h_4^2)\,t^2 - h_0^2h_2h_4^2\,t + h_0^3h_4^3\,. \end{aligned}$$

Lorsque $f_0 = g_0 = 1$ le coefficient f_1g_1 annule le polynôme :

$$p_{11}(t) \;=\; t^3 - 2h_2t^2 + (h_1h_3 + h_2^2 - 4h_4)\,t + h_1^2h_4 - h_1h_2h_3 + h_3^2\,.$$

Lorsque $f_0 = g_0 = 1$ le coefficient f_1g_2 annule le polynôme :

$$\begin{aligned} p_{12}(t) \;=\; & t^6 - 3h_3t^5 + (2h_2h_4 + 3h_3^2)\,t^4 + (-4h_2h_3h_4 - h_3^3)\,t^3 \\ & +(h_1h_3h_4^2 + h_2^2h_4^2 + 2h_2h_3^2h_4 - 4h_4^3)\,t^2 \\ & +(-h_1h_3^2h_4^2 - h_2^2h_3h_4^2 + 4h_3h_4^3)\,t - h_1^2h_4^4 + h_1h_2h_3h_4^3 - h_3^2h_4^3\,. \end{aligned}$$

3.4. Corollaire. (Théorème de Kronecker en plusieurs variables)
Soit dans $\mathbf{B}[X_1, \dots, X_k]$ *les polynômes*

$$f = \textstyle\sum_\alpha f_\alpha X^\alpha,\;\; g = \sum_\beta b_\beta X^\beta \quad \textit{et} \quad h = fg = \sum_\gamma h_\gamma X^\gamma,$$

(ici, α*,* β*,* γ *sont des multi-indices, et si* $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k)$*,* X^α *est une notation pour* $X_1^{\alpha_1} \cdots X_k^{\alpha_k}$*). Soit* $\mathbf{A} = \mathbf{Z}[(h_\gamma)]$ *le sous-anneau engendré par les coefficients de* h *(*$\mathbf{Z}$ *est le sous-anneau de* $\mathbf{B}$ *engendré par* $1_{\mathbf{B}}$*). Alors, chaque* $f_\alpha g_\beta$ *est entier sur* $\mathbf{A}$*.*

▷ On applique ce qu'il est convenu d'appeler l'*astuce de Kronecker* : on pose $X_j = T^{n^j}$ avec n assez grand. Ceci transforme f, g et h en des polynômes $F(T)$, $G(T)$, $H(T)$ dont les coefficients sont respectivement ceux de f, g et h. □

4. L'algèbre de décomposition universelle pour un polynôme unitaire sur un anneau commutatif (1)

Avertissement. Dans un contexte où l'on manipule des algèbres il est parfois préférable de garder l'intuition qu'à la base, on a envie d'avoir un corps, même si c'est seulement un anneau commutatif. Dans un tel cas nous choisissons de donner un nom comme **k** à l'anneau de base. C'est ce que nous ferons dans cette section dédiée à l'algèbre de décomposition universelle.
Lorsque nous avons vraiment affaire à un corps discret, nous utiliserons plutôt une écriture telle que **K**.
Nous procédons maintenant à l'opération inverse de celle qui passait de l'anneau des polynômes au sous-anneau des polynômes symétriques.
En présence d'un polynôme unitaire $f = T^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k s_k T^{n-k} \in \mathbf{k}[T]$ sur un anneau **k**, nous voulons disposer d'une extension de **k** où le polynôme se décompose en facteurs linéaires. Une telle extension peut être construite de manière purement formelle. Elle s'appelle l'algèbre de décomposition universelle.

4.1. Définition et notation. Soit $f = T^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k s_k T^{n-k} \in \mathbf{k}[T]$ un polynôme unitaire de degré n. On note $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ l'*algèbre de décomposition universelle de f sur* **k** définie comme suit :

$$\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\mathcal{J}(f) = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n],$$

où $\mathcal{J}(f)$ est l'*idéal des relateurs symétriques* nécessaire pour identifier dans le quotient $\prod_{i=1}^{n}(T - x_i)$ avec $f(T)$. Précisément, si S_1, S_2, …, S_n sont les fonctions symétriques élémentaires des X_i, l'idéal $\mathcal{J}(f)$ est donné par :

$$\mathcal{J}(f) = \langle S_1 - s_1,\ S_2 - s_2, \ldots,\ S_n - s_n \rangle .$$

L'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ peut être caractérisée par la propriété suivante.

4.2. Fait. (Algèbre de décomposition universelle, propriété caractéristique)

1. *Soit* **C** *une* **k***-algèbre pour laquelle $f(T)$ se décompose en produit de facteurs $T - z_i$. Alors, il existe un unique homomorphisme de* **k***-algèbres de* **A** *vers* **C** *qui envoie les x_i sur les z_i.*
2. *Ceci caractérise l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$, à isomorphisme unique près.*
3. *Si en outre* **C** *est engendrée (comme* **k***-algèbre) par les z_i, elle est isomorphe à un quotient de* **A**.

D Pour le point *1* on utilise la proposition 1.2 qui décrit les algèbres de polynômes comme des algèbres librement engendrées par les indéterminées et le fait II-1.1 qui décrit les anneaux quotients comme ceux qui permettent

de factoriser de manière unique certains homomorphismes. Le point *2* résulte de la constatation qu'un objet qui résout un problème universel est toujours unique à isomorphisme unique près. □

Et en prenant $\mathbf{C} = \mathbf{A}$ on obtient que toute permutation de $\{1, \dots, n\}$ produit un (unique) $\mathbf{k}$-automorphisme de $\mathbf{A}$.
Dit autrement : le groupe S_n des permutations de $\{X_1, \dots, X_n\}$ agit sur $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ et fixe l'idéal $\mathcal{J}(f)$, donc l'action passe au quotient et ceci définit S_n comme groupe d'automorphismes de l'algèbre de décomposition universelle.
Pour étudier l'algèbre de décomposition universelle on introduit les *modules de Cauchy* qui sont les polynômes suivants :

$$\begin{aligned}
f_1(X_1) &= f(X_1)\\
f_2(X_1, X_2) &= \big(f_1(X_1) - f_1(X_2)\big)/(X_1 - X_2)\\
&\vdots\\
f_{k+1}(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \frac{f_k(X_1, \dots, X_{k-1}, X_k) - f_k(X_1, \dots, X_{k-1}, X_{k+1})}{X_k - X_{k+1}}\\
&\vdots\\
f_n(X_1, \dots, X_n) &= \frac{f_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-2}, X_{n-1}) - f_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-2}, X_n)}{X_{n-1} - X_n}.
\end{aligned}$$

Le fait suivant résulte de la propriété caractéristique des algèbres de décomposition universelle.

4.3. Fait. *Avec les notations précédentes pour les modules de Cauchy, soit* $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}[x_1]$ *et* $g_2(T) = f_2(x_1, T)$. *Alors, l'application* $\mathbf{k}_1$*-linéaire canonique* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f} \to \mathrm{Adu}_{\mathbf{k}_1,g_2}$ *(qui envoie chaque* x_i *(*$i \geqslant 2$*) de* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ *sur le* x_i *de* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k}_1,g_2}$*) est un isomorphisme.*

Exemples. (Modules de Cauchy)
Avec $n = 4$:

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= x^4 - s_1x^3 + s_2x^2 - s_3x + s_4\\
f_2(x, y) &= (y^3 + y^2x + yx^2 + x^3) - s_1(y^2 + yx + x^2) + s_2(y + x) - s_3\\
&= y^3 + y^2(x - s_1) + y(x^2 - s_1x + s_2) + (x^3 - s_1x^2 + s_2x - s_3)\\
f_3(x, y, z) &= (z^2 + y^2 + x^2 + zy + zx + yx) - s_1(z + y + x) + s_2\\
&= z^2 + z(y + x - s_1) + \big((y^2 + yx + x^2) - s_1(y + x) + s_2\big)\\
f_4(x, y, z, t) &= t + z + y + x - s_1.
\end{aligned}$$

Pour $f(T) = T^6$:

$$\begin{aligned}
f_2(x,y) &= y^5+y^4x+y^3x^2+y^2x^3+yx^4+x^5\\
f_3(x,y,z) &= (z^4+y^4+x^4)+(z^2y^2+z^2x^2+y^2x^2)+\\
&\quad (zy^3+zx^3+yz^3+yx^3+xz^3+xy^3)+\\
&\quad (zyx^2+zxy^2+yxz^2)\\
f_4(x,y,z,t) &= (t^3+z^3+y^3+x^3)+(tzy+tyx+tzx+zyx)+\\
&\quad t^2(z+y+x)+z^2(t+y+x)+\\
&\quad y^2(t+z+x)+x^2(t+z+y)\\
f_5(x,y,z,t,u) &= (u^2+t^2+z^2+y^2+x^2)+\\
&\quad (xu+xt+xz+xy+tu+zu+zt+yu+yt+yz)\\
f_6(x,y,z,t,u,v) &= v+u+t+z+y+x.
\end{aligned}$$

Plus généralement, pour $f(T)=T^n$, $f_k(t_1,\dots,t_k)$ est la somme de tous les monômes de degré $n+1-k$ en $t_1,\dots,t_k$.
Ceci permet par linéarité d'obtenir une description précise explicite des modules de Cauchy pour un polynôme arbitraire. ∎

D'après la remarque qui suit le dernier exemple, le polynôme f_i est symétrique en les variables X_1, …, X_i, unitaire en X_i, de degré total $n-i+1$. Le fait 4.2 implique que l'idéal $\mathcal{J}(f)$ est égal à l'idéal engendré par les modules de Cauchy. En effet, le quotient par ce dernier idéal réalise clairement la même propriété universelle que le quotient par $\mathcal{J}(f)$.
Donc l'algèbre de décomposition universelle est un $\mathbf{k}$-module libre de rang $n!$. Plus précisément, on obtient le résultat suivant.

4.4. Fait. *Le* $\mathbf{k}$*-module* $\mathbf{A}=\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ *est libre et une base est formée par les «monômes»* $x_1^{d_1}\cdots x_{n-1}^{d_{n-1}}$ *tels que pour* $k=1,\dots,n-1$ *on ait* $d_k\leqslant n-k$.

4.5. Corollaire. *En considérant l'algèbre de décomposition universelle du polynôme unitaire générique* $f(T)=T^n+\sum_{k=1}^n(-1)^kS_kT^{n-k}$*, où les* S_i *sont des indéterminées, on obtient une algèbre de polynômes* $\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$ *avec les* S_i *qui s'identifient aux polynômes symétriques élémentaires en les* x_i.

Commentaire. (Pour ceux qui connaissent les bases de Gröbner)
Dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps discret, les modules de Cauchy peuvent être vus comme une base de Gröbner de l'idéal $\mathcal{J}(f)$, pour l'ordre monomial lexicographique avec $X_1<X_2<\cdots<X_n$.
En fait, même si $\mathbf{k}$ n'est pas un corps discret, les modules de Cauchy fonctionnent comme une base de Gröbner : tout polynôme en les x_i se réécrit sur la base de monômes précédente par divisions successives par les modules de Cauchy. On divise tout d'abord par f_n par rapport à la variable X_n, ce qui la fait disparaître. Ensuite on divise par f_{n-1} par rapport à la variable X_{n-1}, ce qui la ramène en degré $\leqslant 1$, et ainsi de suite. ∎

5. Discriminant, diagonalisation

Définition du discriminant d'un polynôme unitaire

On définit le *discriminant* d'un polynôme unitaire f en une variable sur un anneau commutatif $\mathbf{A}$ en commençant par le cas où f est le polynôme unitaire générique de degré n :

$$f(T)=T^n-S_1T^{n-1}+S_2T^{n-2}+\cdots+(-1)^nS_n\in\mathbb{Z}[S_1,\ldots,S_n][T]=\mathbb{Z}[\underline{S}][T].$$

On peut écrire $f(T)=\prod_i(T-X_i)$ dans $\mathbb{Z}[X_1,\ldots,X_n]$ (corollaire 1.6), et l'on pose

$$\operatorname{disc}_T(f)=(-1)^{n(n-1)/2}\prod_{i=1}^n f'(X_i)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(X_i-X_j)^2. \qquad (1)$$

Comme manifestement ce polynôme en les X_i est invariant par permutation des variables il existe un unique polynôme en les S_i, $D_n(S_1,\ldots,S_n)\in\mathbb{Z}[\underline{S}]$ qui est égal à $\operatorname{disc}_T(f)$. En bref, les variables auxiliaires X_i peuvent bien disparaître.
Ensuite pour un polynôme « concret »

$$g(T)=T^n-s_1T^{n-1}+s_2T^{n-2}+\cdots+(-1)^ns_n\in\mathbf{A}[T],$$

on définit $\operatorname{disc}_T(g)=D_n(s_1,\ldots,s_n)$.
Naturellement, s'il arrive que $g(T)=\prod_{i=1}^n(T-b_i)$ dans un anneau $\mathbf{B}\supseteq\mathbf{A}$, on obtiendra $\operatorname{disc}_T(g)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_i-b_j)^2$ en évaluant la formule (1). En particulier, en utilisant l'algèbre de décomposition universelle on pourrait définir directement le discriminant par cette formule.
Un polynôme unitaire est dit *séparable* lorsque son discriminant est inversible.

Diagonalisation de matrices sur un anneau

Rappelons d'abord que si $f\in\mathbf{A}[T]$, un *zéro de f dans une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$* (donnée par un homomorphisme $\varphi:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$) est un $y\in\mathbf{B}$ qui annule le polynôme f^φ, image de f dans $\mathbf{B}[T]$.
Le zéro y est dit *simple* si en outre $f'(y)\in\mathbf{B}^\times$ (on dit aussi que c'est une *racine simple* de f).
Nous nous intéressons ici aux diagonalisations de matrices sur un anneau commutatif arbitraire, lorsque le polynôme caractéristique est *séparable*.
Nous avons tout d'abord le classique « lemme des noyaux » II-4.8.
Voici ensuite une généralisation du théorème qui affirme (dans le cas d'un corps discret) qu'un zéro simple du polynôme caractéristique définit un sous-espace propre de dimension 1.

5.1. Lemme. *Soit $n\geqslant 2$, $a\in\mathbf{A}$ et $A\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ une matrice dont le polynôme caractéristique $f(X)=\mathrm{C}_A(X)$ admet a comme zéro simple. Soit $g=f/(X-a)$, $h=X-a$, $K=\operatorname{Ker}h(A)$ et $I=\operatorname{Im}h(A)$.*

1. *On a $K=\operatorname{Im}g(A)$, $I=\operatorname{Ker}g(A)$ et $\mathbf{A}^n=I\oplus K$.*

2. *La matrice $g(A)$ est de rang* 1*, et $h(A)$ de rang $n-1$.*
3. *Si un polynôme $R(X)$ annule A, alors $R(a)=0$, c'est-à-dire R est multiple de $X-a$.*
4. *Les mineurs principaux d'ordre $n-1$ de $A-a\mathrm{I}_n$ sont comaximaux. Quand on localise en inversant un tel mineur, la matrice $g(A)$ devient simple de rang* 1*, les modules I et K deviennent libres de rangs $n-1$ et* 1*.*

▷ On suppose sans perte de généralité que $a=0$.
Alors, $f(X)=Xg(X)$, $h(A)=A$, $g(A)=\pm\widetilde{A}$, $\mathrm{Tr}\big(g(A)\big)=g(0)$ (lemme 1.4 point *6*), et $g(0)=f'(0)\in\mathbf{A}^\times$.
1. On écrit $g(X)=Xk(X)+g(0)$: cela montre que les polynômes $g(X)$ et X sont comaximaux. Vu le théorème de Cayley-Hamilton, le lemme des noyaux s'applique et donne le point *1.*
2. Notons $\mu_1,\ldots,\mu_n$ les mineurs principaux d'ordre $n-1$ de A.
Puisque $g(A)=\pm\widetilde{A}$, on obtient $g(0)=\mathrm{Tr}\big(g(A)\big)=\pm\,\mathrm{Tr}\,\widetilde{A}=\pm\sum_i\mu_i$. Ceci montre que $\mathrm{rg}\big(h(A)\big)=n-1$ et $\mathrm{rg}\big(g(A)\big)\geqslant 1$. Enfin, on sait que $\mathrm{rg}(\widetilde{A})\leqslant 1$ d'après le lemme 1.4 point *8*.
3. Supposons $R(A)=0$. En multipliant par $\widetilde{A}$, on obtient $R(0)\widetilde{A}=0$ (puisque $\widetilde{A}A=0$). En prenant la trace, $R(0)\,\mathrm{Tr}(\widetilde{A})=0$ donc $R(0)=0$.
Remarquons que le point *3* résulte aussi du point *4*.
4. On a déjà vu que les μ_i sont comaximaux. Après localisation en un μ_i, la matrice $g(A)$ devient simple de rang 1 en vertu du lemme de la liberté II-5.10. Donc I et K deviennent libres de rangs $n-1$ et 1. □

5.2. Proposition. (Diagonalisation d'une matrice dont le polynôme caractéristique est séparable) *Soit $A\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ une matrice dont le polynôme caractéristique $\mathrm{C}_A(X)$ est séparable, et un anneau $\mathbf{A}_1\supseteq\mathbf{A}$ sur lequel on peut écrire $\mathrm{C}_A(X)=\prod_{i=1}^n(X-x_i)$ (par exemple, $\mathbf{A}_1=\mathrm{Adu}_{\mathbf{A},f}$).*
Soit $K_i=\mathrm{Ker}(A-x_i\mathrm{I}_n)\subseteq\mathbf{A}_1^n$.

1. *$\mathbf{A}_1^n=\bigoplus_i K_i$.*
2. *Chaque K_i est l'image d'une matrice de rang* 1*.*
3. *Tout polynôme R qui annule A est multiple de C_A.*
4. *Après localisation en des éléments comaximaux de $\mathbf{A}_1$ la matrice est diagonalisable, semblable à $\mathrm{Diag}(x_1,\ldots,x_n)$.*

NB : si $\alpha\in\mathrm{End}_{\mathbf{A}_1}(\mathbf{A}_1^n)$ a pour matrice A, on a $\alpha|_{K_i}=x_i\,\mathrm{Id}_{K_i}$ pour chaque i.

▷ Conséquence immédiate du lemme des noyaux et du lemme 5.1. Pour rendre la matrice diagonalisable il suffira d'inverser un produit $\nu_1\cdots\nu_n$ où chaque ν_i est un mineur principal d'ordre $n-1$ de la matrice $A-x_i\mathrm{I}_n$ (ce qui fait a priori n^n localisations comaximales). □

Remarque. Un résultat analogue concernant une matrice qui annule un polynôme $\prod_i (X - x_i)$ séparable est donné en exercice X-4. La preuve est élémentaire. ∎

La matrice générique est diagonalisable

Considérons n^2 indéterminées $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ et notons A la matrice correspondante (elle est à coefficients dans $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[(a_{i,j})]$).

5.3. Proposition. *La matrice générique A est diagonalisable sur un anneau $\mathbf{B}$ contenant $\mathbb{Z}[(a_{i,j})] = \mathbf{A}$.*

$\mathbb{D}$ Soit $f(T) = T^n - s_1 T^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$ le polynôme caractéristique de A. Alors les coefficients s_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbb{Z}$. Il suffit pour s'en rendre compte de spécialiser A en la matrice compagne d'un polynôme unitaire générique.

En particulier, le discriminant $\Delta = \mathrm{disc}(f)$ est non nul dans l'anneau intègre $\mathbf{A}$. On considère alors l'anneau $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}[1/\Delta] \supseteq \mathbf{A}$ puis l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{C} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{A}_1, f}$. Notons x_i les éléments de $\mathbf{C}$ tels que $f(T) = \prod_i (T - x_i)$.

On applique enfin la proposition 5.2. Si l'on veut aboutir à une matrice diagonalisable, on inverse par exemple $a = \prod_i \det\big((A - x_i \mathrm{I}_n)_{1..n-1,1..n-1}\big)$. Il s'agit d'un élément de $\mathbf{A}$ et il suffit de se convaincre qu'il n'est pas nul en exhibant une matrice particulière, par exemple la matrice compagne du polynôme $X^n - 1$.

En définitive on considère $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}[1/(a\Delta)] \supseteq \mathbf{A}$ et l'on prend

$$\mathbf{B} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{A}_2, f} \supseteq \mathbf{A}_2.$$

□

La force du résultat précédent, « qui simplifie considérablement la vie » est illustrée dans les deux paragraphes qui suivent.

Identité concernant les polynômes caractéristiques

5.4. Proposition. *Soient A et $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ deux matrices qui ont le même polynôme caractéristique, et soit $g \in \mathbf{A}[T]$. Alors les matrices $g(A)$ et $g(B)$ ont même polynôme caractéristique.*

5.5. Corollaire.

1. *Si A est une matrice de polynôme caractéristique f, et si l'on peut écrire $f(T) = \prod_{i=1}^n (T - x_i)$ sur un anneau $\mathbf{A}_1 \supseteq \mathbf{A}$, alors le polynôme caractéristique de $g(A)$ est égal au produit $\prod_{i=1}^n \big(T - g(x_i)\big)$.*
2. *Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang fini n et $x \in \mathbf{B}$. On suppose que dans $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{B}$, on a $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(x)(T) = (T - x_1) \cdots (T - x_n)$. Alors, pour*

tout $g \in \mathbf{A}[T]$, on a les égalités suivantes :

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(g(x)\big)(T) = \big(T - g(x_1)\big)\cdots\big(T - g(x_n)\big),$$

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(g(x)\big) = \textstyle\sum_{i=1}^n g(x_i) \text{ et } \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(g(x)\big) = \prod_{i=1}^n g(x_i).$$

Démonstration de la proposition et du corollaire.
Point *1* du corollaire. On considère la matrice $\mathrm{Diag}(x_1, \ldots, x_n)$ qui a même polynôme caractéristique que A et on applique la proposition avec l'anneau $\mathbf{A}_1$.
Inversement, si le point *1* du corollaire est démontré pour $\mathbf{A}_1 = \mathrm{Adu}_{\mathbf{A},f}$, il implique la proposition 5.4 car le polynôme $\prod_{i=1}^n \big(T - g(x_i)\big)$ calculé dans $\mathrm{Adu}_{\mathbf{A},f}$ ne dépend que de f et g.
On note maintenant que la structure de l'énoncé du corollaire, point *1*, lorsque l'on prend $\mathbf{A}_1 = \mathrm{Adu}_{\mathbf{A},f}$, est une famille d'identités algébriques avec pour indéterminées les coefficients de la matrice A. Il suffit donc de le démontrer pour la matrice générique. Or elle est diagonalisable sur un suranneau (proposition 5.3), et pour une matrice diagonalisable le résultat est clair.
Enfin, le point *2* du corollaire est une conséquence immédiate du point *1*.□

Identité concernant les puissances extérieures

Les résultats suivants, analogues à la proposition 5.4 et au corollaire 5.5 peuvent être démontrés en suivant exactement les mêmes lignes.

5.6. Proposition. *Si φ est un endomorphisme d'un $\mathbf{A}$-module libre de rang fini, le polynôme caractéristique de $\bigwedge^k\varphi$ ne dépend que de l'entier k et du polynôme caractéristique de φ.*

5.7. Corollaire. *Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est une matrice de polynôme caractéristique f, et si $f(T) = \prod_{i=1}^n (T - x_i)$ dans un suranneau de $\mathbf{A}$, alors le polynôme caractéristique de $\bigwedge^k A$ est égal au produit*

$$\textstyle\prod_{J\in\mathcal{P}_{k,n}} (T - x_J), \text{ où } x_J = \prod_{i\in J} x_i.$$

Transformation de Tschirnhaus

5.8. Définition. Soient f et $g \in \mathbf{A}[T]$ avec f unitaire de degré p. On considère l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B} = \mathbf{A}[T]/\langle f\rangle$, qui est un $\mathbf{A}$-module libre de rang p. On définit le *transformé de Tschirnhaus de f par g*, noté $\mathrm{Tsch}_{\mathbf{A},g}(f)$ ou $\mathrm{Tsch}_g(f)$, par l'égalité

$$\mathrm{Tsch}_{\mathbf{A},g}(f) = \mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\overline{g}), \quad (\overline{g} \text{ est la classe de } g \text{ dans } \mathbf{B}).$$

La proposition 5.4 et le corollaire 5.5, donnent le résultat suivant.

5.9. Proposition. *Soient f et $g \in \mathbf{A}[T]$ avec f unitaire de degré p.*

1. *Si A est une matrice telle que $f(T) = \mathrm{C}_A(T)$, on a*
$$\mathrm{Tsch}_g(f)(T) = \mathrm{C}_{g(A)}(T).$$
2. *Si $f(T) = \prod_i (T - x_i)$ sur un anneau qui contient $\mathbf{A}$, on a*
$$\mathrm{Tsch}_g(f)(T) = \textstyle\prod_i \big(T - g(x_i)\big),$$
en particulier, on obtient avec $\mathbf{B} = \mathbf{A}[T]/\langle f\rangle$
$$\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(g) = \textstyle\prod_i g(x_i) \text{ et } \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(g) = \sum_i g(x_i).$$

Remarque. On peut aussi écrire $\mathrm{Tsch}_{\mathbf{A},g}(f)(T) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[T]/\mathbf{A}[T]}(T - \overline{g})$. En fait pour une notation entièrement non ambiguë on devrait noter $\mathrm{Tsch}(\mathbf{A}, f, g, T)$ au lieu de $\mathrm{Tsch}_{\mathbf{A},g}(f)$. Une ambiguïté analogue se trouve d'ailleurs dans la notation $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(g)$. ∎

Calcul du transformé de Tschirnhaus

Rappelons que la matrice C de l'endomorphisme μ_t de multiplication par t (la classe de T dans $\mathbf{B}$) est appelée la matrice compagne de f (voir page 92). Alors la matrice (sur la même base) de $\mu_{\overline{g}} = g(\mu_t)$ est la matrice $g(C)$. Donc $\mathrm{Tsch}_g(f)$ est le polynôme caractéristique [2] de $g(C)$.

Nouvelle version du discriminant

Rappelons (définition II-5.33) que lorsque $\mathbf{C} \supseteq \mathbf{A}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang fini et $x_1, \ldots, x_k \in \mathbf{C}$, on appelle discriminant de $(x_1, \ldots, x_k)$ le déterminant de la matrice $\big(\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(x_i x_j)\big)_{i,j\in[\![1..k]\!]}$. On le note $\mathrm{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_k)$. En outre, si $(x_1, \ldots, x_k)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{C}$, on note $\mathrm{Disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}$ la classe multiplicative de $\mathrm{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_k)$ modulo les carrés de $\mathbf{A}^\times$. On l'appelle le discriminant de l'extension $\mathbf{C}/\mathbf{A}$.
Nous faisons dans ce paragraphe le lien entre le discriminant des algèbres libres de rang fini et le discriminant des polynômes unitaires.
Insistons sur le caractère remarquable de l'implication *1a* ⇒ *1b* dans la proposition suivante.

5.10. Proposition. (Discriminant d'un polynôme unitaire et forme trace)
Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang fini n, $x \in \mathbf{B}$ et $f = \mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(x)(T)$. On a :
$$\mathrm{disc}(1, x, \ldots, x^{n-1}) = \mathrm{disc}(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(f'(x)\big).$$
On dit que $f'(x)$ est la différente *de x. Les résultats suivants en découlent.*

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

2. Le calcul rapide des déterminants et polynômes caractéristiques suscite un grand intérêt en calcul formel. On pourra par exemple consulter [Abdeljaoued & Lombardi]. Une autre formule que l'on peut utiliser pour le calcul du transformé de Tschirnhaus est $\mathrm{Tsch}_g(f) = \mathrm{Res}_X(f(X), T - g(X))$ (voir le lemme 7.3)

a. $\mathrm{disc}(f) \in \mathbf{A}^\times$.

b. $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B/A}} \in \mathbf{A}^\times$ *et* $(1, x, \dots, x^{n-1})$ *est une* $\mathbf{A}$*-base de* $\mathbf{B}$.

c. $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B/A}} \in \mathbf{A}^\times$ *et* $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$.

2. Si $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B/A}}$ *est régulier, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

a. $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B/A}}$ *et* $\mathrm{disc}(f)$ *sont associés.*

b. $(1, x, \dots, x^{n-1})$ *est une* $\mathbf{A}$*-base de* $\mathbf{B}$.

c. $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$.

3. Le discriminant d'un polynôme unitaire $g \in \mathbf{A}[T]$ *représente (modulo les carrés de* $\mathbf{A}^\times$*) le discriminant de l'extension* $\mathbf{A}[T]/\langle g\rangle$ *de* $\mathbf{A}$. *On a* $\mathrm{disc}_T(g) \in \mathbf{A}^\times$ *si, et seulement si,* $\langle g(T), g'(T)\rangle = \mathbf{A}$.

▷ Dans un sur-anneau $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{B}$, on peut écrire $f(T) = (T-x_1)\cdots(T-x_n)$. Pour un $g \in \mathbf{A}[T]$, en appliquant le corollaire 5.5, on obtient les égalités

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{B/A}}\big(g(x)\big) = g(x_1) + \cdots + g(x_n) \text{ et } \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(g(x)\big) = g(x_1)\cdots g(x_n).$$

On note $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ la matrice intervenant dans le calcul du discriminant de $(1, x, \dots, x^{n-1})$:

$$M = \big((a_{ij})_{i,j\in[\![0..n-1]\!]}\big), \qquad a_{ij} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B/A}}(x^{i+j}) = x_1^{i+j} + \cdots + x_n^{i+j}\,.$$

Soit $V \in \mathbb{M}_n(\mathbf{B}')$ la matrice de Vandermonde ayant pour lignes $[\,x_1^i \ \dots \ x_n^i\,]$ (où $i \in [\![0..n-1]\!]$). Alors $M = V\,{}^{\mathrm{t}}V$. On en déduit :

$$\det(M) = \det(V)^2 = \textstyle\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 = \mathrm{disc}(f)\,.$$

Ceci démontre la première égalité. Puisque $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(f'(x)\big) = f'(x_1)\cdots f'(x_n)$ et $f'(x_i) = \prod_{j|j\neq i}(x_i - x_j)$, il vient :

$$\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(f'(x)\big) = \textstyle\prod_{(i,j)|j\neq i}(x_i - x_j) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2.$$

La démonstration des conséquences est laissée à la lectrice (utiliser la proposition II-5.33). □

Discriminant d'une algèbre de décomposition universelle

L'égalité du discriminant « tracique » et du discriminant « polynomial », jointe à la formule de transitivité (théorème II-5.36) nous permet le calcul suivant.

5.11. Fait. (Discriminant d'une algèbre de décomposition universelle)
Soit f *un polynôme unitaire de degré* $n \geqslant 2$ *de* $\mathbf{k}[T]$ *et* $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$.
Alors $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A/k}} = \big(\mathrm{disc}_T(f)\big)^{n!/2}$.

▷ On reprend les notations de la section 4. On raisonne par récurrence sur n, le cas $n = 2$ étant clair. On a $\mathbf{A} = \mathbf{k}_1[x_2, \dots, x_n]$ avec

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}[x_1] \simeq \mathbf{k}[X_1]/\langle f(X_1)\rangle\,.$$

En outre, $\mathbf{A} \simeq \mathrm{Adu}_{\mathbf{k}_1,g_2}$ où

$$g_2(T) = f_2(x_1, T) = \big(f(T) - f(x_1)\big)/(T - x_1) \in \mathbf{k}_1[T] \subseteq \mathbf{A}[T].$$

La formule de transitivité des discriminants donne alors les égalités suivantes.

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{Disc}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}^{[\mathbf{A}:\mathbf{k}_1]}\ \mathrm{N}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}_1}) = (\mathrm{disc}\, f)^{(n-1)!}\ \mathrm{N}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}_1}).$$

En utilisant l'hypothèse de récurrence on obtient l'égalité

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}_1} = (\mathrm{disc}\, g_2)^{(n-1)!/2} = \big(\textstyle\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2\big)^{(n-1)!/2}.$$

Pour $i \in [\![2..n]\!]$, notons τ_i la transposition $(1, i)$; pour $z \in \mathbf{k}_1$, d'après le corollaire 5.5, $\mathrm{N}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(z) = z\prod_{i=2}^{n}\tau_i(z)$. Appliqué à $z = \prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2$, cela donne

$$\mathrm{N}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(z) = (\mathrm{disc}\, f)^{n-2},\ \text{ d'où }\ \mathrm{N}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}_1}) = (\mathrm{disc}\, f)^{(n-2)\cdot(n-1)!/2},$$

puis

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = (\mathrm{disc}\, f)^{(n-1)!+(n-2)\cdot(n-1)!/2} = (\mathrm{disc}\, f)^{n!/2}.$$

NB : un examen détaillé du calcul précédent montre que l'on a en fait calculé le discriminant de la base « canonique » de l'algèbre de décomposition universelle décrite dans le fait 4.4. □

5.12. Lemme. *(Mêmes hypothèses que pour le fait 5.11)*
Pour tout $z \in \mathbf{A}$ on a :

$$\mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z)(T) = \prod\nolimits_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\big(T - \sigma(z)\big).$$

En particulier, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z) = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\sigma(z)$ *et* $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z) = \prod_{\sigma\in\mathrm{S}_n}\sigma(z)$.

▷ Il suffit de montrer la formule pour la norme, car on obtient ensuite celle pour le polynôme caractéristique en remplaçant $\mathbf{k}$ par $\mathbf{k}[T]$ (ce qui remplace $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}[T]$). La formule pour la norme se prouve par récurrence sur le nombre de variables en utilisant le fait 4.3, la formule de transitivité pour les normes et le corollaire 5.5. □

6. Théorie de Galois de base (1)

Dans la section 6, **K** désigne un corps discret non trivial.

Factorisation et zéros

Rappelons qu'un anneau est intègre si tout élément est nul ou régulier [3]. Un sous-anneau d'un anneau intègre est intègre. Un corps discret est un anneau intègre. Un anneau **A** est intègre si, et seulement si, son anneau total de fractions Frac **A** est un corps discret. On dit alors que Frac **A** est le *corps de fractions* de **A**.

6.1. Proposition. *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *des anneaux et* $f \in \mathbf{A}[T]$ *un polynôme unitaire de degré* n.

1. *Si* z *est un zéro de* f *dans* **B**, $f(T)$ *est divisible par* $T - z$ *dans* $\mathbf{B}[T]$.
2. *On suppose désormais que* **B** *est intègre et non trivial* [4]. *Si* $z_1, \ldots, z_k$ *sont des zéros de* f *deux à deux distincts dans* **B**, *le polynôme* $f(T)$ *est divisible par* $\prod_{i=1}^{k}(T - z_i)$ *dans* $\mathbf{B}[T]$.
3. *Si en outre* $k = n$, *alors* $f(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - z_i)$, *et les* z_i *sont les seuls zéros de* f *dans* **B** *et dans toute extension intègre de* **B**.

D La démonstration est immédiate, certains résultats plus précis sont dans l'exercice 1 consacré à l'interpolation de Lagrange. □

Algèbres strictement finies sur un corps discret

6.2. Définition.
Une **K**-algèbre **A** est dite *strictement finie* si c'est un **K**-espace vectoriel libre de dimension finie.

Autrement dit, on connaît une base finie de **A** comme **K**-espace vectoriel. Dans ce cas, pour un $x \in \mathbf{A}$, la trace, la norme, le polynôme caractéristique de (la multiplication par) x, ainsi que le polynôme minimal de x sur **K**, noté $\mathrm{Min}_{\mathbf{K},x}(T)$ ou $\mathrm{Min}_x(T)$, peuvent se calculer par les méthodes standards de l'algèbre linéaire sur un corps discret. De même toute sous-**K**-algèbre finie de **A** est strictement finie et l'intersection de deux sous-algèbres strictement finies est strictement finie.

6.3. Lemme. *Soit* $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{K}$ *un anneau entier sur* **K**. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. **B** *est un corps discret.*

3. La notion est discutée plus en détail page 215.

4. On pourrait se passer de l'hypothèse négative « non trivial » en lisant l'hypothèse que les z_i sont « distincts » comme signifiant que les $z_i - z_j$ sont réguliers.

2. **B** *est sans diviseur de zéro :* $xy = 0 \Rightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$.

3. **B** *est connexe et réduit.*

En conséquence si **B** *est un corps discret, toute sous-*$\mathbf{K}$*-algèbre finie de* **B** *est un corps discret.*

▷ Les implications *1* $\Rightarrow$ *2* $\Rightarrow$ *3* sont claires.
3 $\Rightarrow$ *1.* Soit $x \in \mathbf{B}$, il annule un polynôme non nul de $\mathbf{K}[X]$ que l'on peut supposer de la forme $X^k\big(1-XR(X)\big)$. Alors $x\big(1-xR(x)\big)$ est nilpotent donc nul. L'élément $e = xR(x)$ est idempotent et $x = ex$. Si $e = 0$, alors $x = 0$. Si $e = 1$, alors x est inversible. □

6.4. Lemme. *Soient* $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{A}$ *avec* **A** *et* **L** *strictement finis sur* $\mathbf{K}$. *Si* **L** *est un corps discret, alors* **A** *est strictement finie sur* **L**.

▷ Démonstration laissée au lecteur (ou voir le fait VI-1.3 point *3*). □

Si g est un polynôme irréductible de $\mathbf{K}[T]$, l'algèbre quotient $\mathbf{K}[T]/\langle g\rangle$ est un corps discret strictement fini sur $\mathbf{K}$. En fait, comme corollaire des deux lemmes précédents on obtient que toute extension strictement finie de corps discrets s'obtient en itérant cette construction.

6.5. Fait. (Structure d'une extension strictement finie de corps discrets)
Soit $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_m]$ *un corps discret strictement fini sur* $\mathbf{K}$.
Pour $k \in [\![1..m+1]\!]$, *notons* $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}[(x_i)_{i<k}]$ *et* $f_k = \mathrm{Min}_{\mathbf{K}_k, x_k}(T)$, *de sorte que* $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$, *et pour* $k \in [\![1..m]\!]$, $\mathbf{K}_{k+1} \simeq \mathbf{K}_k[X_k]/\langle f_k(X_k)\rangle$.
Alors, pour $k < \ell$ *dans* $[\![1..m+1]\!]$, *l'inclusion* $\mathbf{K}_k \to \mathbf{K}_\ell$ *est une extension strictement finie de corps discrets, avec*

$$[\,\mathbf{K}_\ell : \mathbf{K}_k\,] = \textstyle\prod_{k\leqslant i<\ell} [\,\mathbf{K}_{i+1} : \mathbf{K}_i\,] = \prod_{k\leqslant i<\ell} \deg_T(f_i).$$

En outre, si $F_k \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_k]$ *est un polynôme unitaire en* X_k *pour lequel on a* $F_k\big((x_i)_{i<k}, X_k\big) = f_k(X_k)$, *on obtient par factorisation de l'homomorphisme d'évaluation, un isomorphisme*

$$\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_m]/\langle F_1, \ldots, F_m\rangle \xrightarrow{\sim} \mathbf{L}.$$

6.6. Définition. Soit $g \in \mathbf{K}[T]$ un polynôme unitaire, on appelle *corps de racines de* g *au dessus de* $\mathbf{K}$ un corps discret **L** extension de $\mathbf{K}$ dans lequel g se décompose complètement et qui est engendré comme $\mathbf{K}$-algèbre par les zéros de g.

Notez que **L** est fini sur $\mathbf{K}$ mais que l'on ne demande pas que **L** soit strictement fini sur $\mathbf{K}$ (d'ailleurs, il n'y a pas de démonstration constructive qu'un tel corps de racines doive être strictement fini sur $\mathbf{K}$). Ceci nécessite quelques subtilités dans le théorème qui suit.

6.7. Théorème. (Unicité du corps de racines dans le cas strictement fini) *Soit $f \in \mathbf{K}[T]$ un polynôme unitaire. On suppose qu'il existe un corps de racines $\mathbf{L}$ de f au dessus de $\mathbf{K}$.*

1. *Soit $\mathbf{M} \supseteq \mathbf{K}$ un corps discret strictement fini sur $\mathbf{K}$, engendré par $\mathbf{K}$ et des zéros de f dans $\mathbf{M}$. Le corps $\mathbf{M}$ est isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{L}$.*
2. *Supposons qu'il existe un corps de racines pour f strictement fini sur $\mathbf{K}$. Alors, tout corps de racines de f au dessus de $\mathbf{K}$ est isomorphe à $\mathbf{L}$ (qui est donc strictement fini sur $\mathbf{K}$).*
3. *Soient $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$ deux corps discrets non triviaux, $\tau : \mathbf{K}_1 \to \mathbf{K}_2$ un isomorphisme, $f_1 \in \mathbf{K}_1[T]$ un polynôme unitaire, $f_2 = f_1^\tau \in \mathbf{K}_2[T]$. Si $\mathbf{L}_i$ est un corps de racines strictement fini pour f_i sur $\mathbf{K}_i$ ($i = 1, 2$), alors τ se prolonge en un isomorphisme de $\mathbf{L}_1$ sur $\mathbf{L}_2$.*

D On montre seulement le point *1* dans un cas particulier (suffisamment général). Le reste est laissé à la lectrice.
On écrit $f(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - x_i)$ dans $\mathbf{L}[T]$. Supposons aussi que $\mathbf{M} = \mathbf{K}[y, z]$ avec $y \neq z$ et $f(y) = f(z) = 0$.
On a donc dans $\mathbf{M}[T]$ l'égalité $f(T) = (T - y)f_1(T) = (T - y)(T - z)f_2(T)$ (proposition 6.1).
Puisque $f(y) = 0$, le polynôme minimal $g(Y)$ de y sur $\mathbf{K}$ divise $f(Y)$ dans $\mathbf{K}[Y]$. Donc $\prod_{i=1}^{n} g(x_i) = 0$ dans $\mathbf{L}$ qui est un corps discret, et l'un des x_i, disons x_1, annule g. On obtient ici

$$\mathbf{K}[y] \simeq \mathbf{K}[Y]/\langle g(Y)\rangle \simeq \mathbf{K}[x_1] \subseteq \mathbf{L}.$$

Le corps discret $\mathbf{K}[y]$ est strictement fini sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{M}$ est strictement fini sur $\mathbf{K}[y]$ (lemme 6.4). Soit alors $h \in \mathbf{K}[Y, Z]$ un polynôme unitaire en Z tel que $h(y, Z)$ soit le polynôme minimal de z sur $\mathbf{K}[y]$.
Puisque $f_1(z) = 0$, le polynôme $h(y, Z)$ divise $f_1(Z) = f(Z)/(Z - y)$ dans $\mathbf{K}[y][Z]$, donc son image $h(x_1, Z)$ dans $\mathbf{K}[x_1][Z]$ est un polynôme irréductible qui divise $f(Z)/(Z - x_1)$. Donc $h(x_1, Z)$ admet pour zéro un des x_i pour $i \in [\![2..n]\!]$, disons x_2, et $h(x_1, Z)$ est le polynôme minimal de x_2 sur $\mathbf{K}[x_1]$. On obtient donc les isomorphismes

$$\mathbf{K}[y, z] \simeq \mathbf{K}[y][Z]/\langle h(y, Z)\rangle \simeq \mathbf{K}[x_1][Z]/\langle h(x_1, Z)\rangle \simeq \mathbf{K}[x_1, x_2] \subseteq \mathbf{L}.$$

Notons que l'on a aussi $\mathbf{K}[y, z] \simeq \mathbf{K}[Y, Z]/\langle g(Y), h(Y, Z)\rangle$. □

Remarque. Une inspection détaillée de la démonstration précédente conduit à la conclusion que si $\mathbf{L}$ est un corps de racines strictement fini sur $\mathbf{K}$, le groupe des $\mathbf{K}$-automorphismes de $\mathbf{L}$ est un groupe fini ayant au plus $[\mathbf{L} : \mathbf{K}]$ éléments. Si l'on ne suppose pas $\mathbf{L}$ strictement fini sur $\mathbf{K}$, on obtiendra seulement qu'il est absurde de supposer que ce groupe contient plus que $[\mathbf{L} : \mathbf{K}]$ éléments. ∎

Le cas élémentaire de la théorie de Galois

6.8. Définition et notation. Nous utiliserons les notations suivantes lorsqu'un groupe G opère sur un ensemble E.

- Pour $x \in E$, $\mathrm{St}_G(x) = \mathrm{St}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{\, \sigma \in G \,|\, \sigma(x) = x \,\}$ désigne le *stabilisateur* de x.
- $G.x$ désigne l'orbite de x sous G, et l'écriture $G.x = \{x_1, \ldots, x_k\}$ est une abréviation pour : $(x_1, \ldots, x_k)$ *est une énumération sans répétition de* $G.x$*, avec* $x_1 = x$.
- Pour $F \subseteq E$, $\mathrm{Stp}_G(F)$ ou $\mathrm{Stp}(F)$ désigne le stabilisateur point par point de F.
- Si H est un sous-groupe de G,
  - on note $|\, G : H \,|$ l'indice de H dans G,
  - on note $\mathrm{Fix}_E(H) = \mathrm{Fix}(H) = E^H = \{\, x \in E \,|\, \forall \sigma \in H,\ \sigma(x) = x \,\}$,
  - l'écriture $\sigma \in G/H$ signifie que l'on prend un élément $\sigma \in G$ dans chaque classe à gauche modulo H.

Lorsque G est un groupe fini opérant sur un anneau $\mathbf{B}$ on note pour $b \in \mathbf{B}$:

$$\mathrm{Tr}_G(b) = \sum_{\sigma\in G} \sigma(b),\ \mathrm{N}_G(b) = \prod_{\sigma\in G} \sigma(b),\ \text{et}\ \mathrm{C}_G(b)(T) = \prod_{\sigma\in G} \big(T - \sigma(b)\big).$$

Et si $G.b = \{b_1, \ldots, b_k\}$, (les b_i deux à deux distincts), on note :

$$\mathrm{Rv}_{G,b}(T) = \textstyle\prod_{i=1}^{k}(T - b_i).$$

Ce polynôme est appelé la *résolvante* de b (relativement à G). Il est clair que $\mathrm{Rv}_{G,b}^r = \mathrm{C}_G(b)$ avec $r = \big|\, G : \mathrm{St}_G(b) \,\big|$.

Étant donnée une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ on note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$ le groupe des $\mathbf{A}$-automorphismes de $\mathbf{B}$.

6.9. Définition. Si $\mathbf{L}$ est une extension strictement finie de $\mathbf{K}$, et un corps de racines pour un polynôme unitaire séparable sur $\mathbf{K}$, on dit que $\mathbf{L}$ est une *extension galoisienne* de $\mathbf{K}$, on note alors $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ au lieu de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ et l'on dit que c'est le *groupe de Galois* de l'extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$.

Notez bien que dans la définition d'une extension galoisienne $\mathbf{L}/\mathbf{K}$, est compris le fait que $\mathbf{L}$ est strictement fini (et non pas seulement fini) sur $\mathbf{K}$.

6.10. Proposition et définition. (Correspondance galoisienne)
Soit $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ *un corps strictement fini sur* $\mathbf{K}$.

1. *Le groupe* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ *est un sous-groupe détachable de* $\mathbb{GL}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$. *Si* H *est un sous-groupe de* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$*, le sous-corps* $\mathbf{L}^H$ *s'appelle le* corps fixe de H.
2. *On appelle* correspondance galoisienne *les deux applications* Fix *et* Stp *entre les deux ensembles suivants. D'une part* $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$ *est l'ensemble des sous-groupes finis de* $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$. *D'autre part* $\mathcal{K} = \mathcal{K}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$ *est l'ensemble des sous-extensions strictement finies de* $\mathbf{L}$.

3. Dans la correspondance galoisienne chacune des deux applications est décroissante. En outre, $H \subseteq \mathrm{Stp}(\mathbf{L}^H)$ pour tout $H \in \mathcal{G}$, $\mathbf{M} \subseteq \mathbf{L}^{\mathrm{Stp}(\mathbf{M})}$ pour tout $\mathbf{M} \in \mathcal{K}$, $\mathrm{Stp} \circ \mathrm{Fix} \circ \mathrm{Stp} = \mathrm{Stp}$ et $\mathrm{Fix} \circ \mathrm{Stp} \circ \mathrm{Fix} = \mathrm{Fix}$.

▷ Dans le point *1* il faut montrer que le sous-groupe est détachable et dans le point *2* que Fix et Stp agissent bien sur les deux ensembles tels qu'ils sont décrits. Ceci est basé sur l'algèbre linéaire en dimension finie sur les corps discrets. Nous laissons les détails au lecteur. □

Remarque. Bien que l'on puisse décider si un élément donné de $\mathbb{GL}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ est dans $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$, et bien qu'il soit facile de borner le nombre d'éléments de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$, il n'y a pas de méthode générale sûre pour calculer ce nombre. ■

On a comme conséquence du théorème 6.7 le corollaire suivant.

6.11. Théorème. (Théorème de prolongement des isomorphismes)
Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension galoisienne et $\mathbf{M}$ une sous-$\mathbf{K}$-extension finie de $\mathbf{L}$. Tout $\mathbf{K}$-homomorphisme $\tau : \mathbf{M} \to \mathbf{L}$ se prolonge en un élément $\widetilde{\tau}$ de $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$.

▷ $\mathbf{L}$ est le corps de racines d'un polynôme séparable $g \in \mathbf{K}[T]$. On remarque que puisque $\mathbf{L}$ est strictement fini sur $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ est strictement fini sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{L}$ strictement fini sur $\mathbf{M}$. Notons $\mathbf{M}'$ l'image de τ. C'est un corps strictement fini sur $\mathbf{K}$, donc $\mathbf{L}$ est strictement fini sur $\mathbf{M}'$. Ainsi $\mathbf{L}$ est un corps de racines pour g strictement fini sur $\mathbf{M}$ et sur $\mathbf{M}'$. D'après le théorème 6.7 (point *3*), on peut prolonger τ en un $\mathbf{K}$-isomorphisme $\widetilde{\tau} : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$. □

Lorsqu'un polynôme séparable sur $\mathbf{K}$ possède un corps de racines $\mathbf{L}$ strictement fini sur $\mathbf{K}$, le groupe $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ peut aussi être noté $\mathrm{Gal}_{\mathbf{K}}(f)$ dans la mesure où le théorème 6.7 donne l'unicité de $\mathbf{L}$ (à $\mathbf{K}$-automorphisme près).

Remarque. En mathématiques constructives on a les résultats suivants (triviaux en mathématiques classiques). Pour un sous-groupe H d'un groupe fini les propriétés suivantes sont équivalentes.

— H est fini.
— H est de type fini.
— H est détachable.

De même pour un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel M d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie les propriétés suivantes sont équivalentes.

— M est de dimension finie.
— M est de type fini (i.e., l'image d'une matrice).
— M est le noyau d'une matrice. ■

6.12. Proposition et définition. (Situation galoisienne élémentaire)
Soient deux anneaux $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Une situation galoisienne élémentaire *est définie comme suit.*

i. *On a un polynôme $Q \in \mathbf{A}[T]$ unitaire séparable de degré d et des éléments $y_1, y_2, \ldots, y_d$ de $\mathbf{B}$ tels que :*
$$Q(T) = \textstyle\prod_{i=1}^{d}(T - y_i).$$

ii. *On note $y = y_1$. On suppose pour chaque i que $\mathbf{B} = \mathbf{A}[y_i]$ et que $\langle Q\rangle$ est le noyau de l'homomorphisme de $\mathbf{A}$-algèbres $\mathbf{A}[T] \to \mathbf{B}$ qui envoie T en y_i (d'où $\mathbf{B} = \mathbf{A}[y] = \mathbf{A}[y_i] \simeq \mathbf{A}[T]/\langle Q\rangle$). Pour chaque i il existe donc un unique $\mathbf{A}$-automorphisme σ_i de $\mathbf{B}$ vérifiant $\sigma_i(y) = y_i$.*

iii. *On suppose que ces automorphismes forment un groupe, que l'on note G. En particulier, $|G| = d = [\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,]$.*

Dans une situation galoisienne élémentaire on a les résultats suivants.

1. *a.* $\mathrm{Fix}_{\mathbf{B}}(G) = \mathbf{A}$.

   b. Pour tout $z \in \mathbf{B}$, $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(z)(T) = \mathrm{C}_G(z)(T)$.

2. *Soit H un sous-groupe détachable de G, $\mathbf{A}' = \mathbf{B}^H$ et*
$$Q_H(T) = \textstyle\prod_{\sigma\in H}\big(T - \sigma(y)\big).$$
   Alors, on retrouve la situation galoisienne élémentaire avec $\mathbf{A}'$, $\mathbf{B}$, Q_H et $\big(\sigma(y)\big)_{\sigma\in H}$. En particulier, $\mathbf{B} = \mathbf{A}'[y]$ est un $\mathbf{A}'$-module libre de rang $|H| = [\,\mathbf{B} : \mathbf{A}'\,]$. En outre, H est égal à $\mathrm{Stp}_G(\mathbf{A}')$.

D *1a.* Considérons un $x = \sum_{k=0}^{d-1}\xi_k y^k$ dans $\mathbf{B}$ (avec les $\xi_k \in \mathbf{A}$) invariant par l'action de $G = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_d\}$. On a donc pour tout $\sigma \in G$, $x = \sum_{k=0}^{d-1}\xi_k\sigma(y)^k$. Si $V \in \mathbb{M}_n(\mathbf{B})$ est la matrice de Vandermonde
$$V = \begin{bmatrix} 1 & y_1 & y_1^2 & \cdots & y_1^{d-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & y_d & y_d^2 & \cdots & y_d^{d-1} \end{bmatrix},$$
on obtient
$$V\begin{bmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{d-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{bmatrix} = V\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$
Or, $\det({}^{t}VV) = \mathrm{disc}_T(Q) \in \mathbf{A}^\times$. Donc $[\,\xi_0\ \xi_1\ \cdots\ \xi_{d-1}\,] = [\,x\ 0\ \cdots\ 0\,]$, et $x = \xi_0 \in \mathbf{A}$.

1b. Puisque $\mathbf{B} \simeq \mathbf{A}[T]/\langle Q\rangle$, le corollaire 5.5 donne, pour $g \in \mathbf{A}[Y]$ et $z = g(y_1)$, les égalités
$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(z)(T) = \textstyle\prod_i\big(T - g(y_i)\big) = \prod_{\sigma\in G}\big(T - \sigma(g(y_1))\big) = \mathrm{C}_G(z)(T).$$

2. Il est clair que $\mathbf{B} = \mathbf{A}'[\sigma(y)]$ pour chaque $\sigma \in H$ et que Q_H est un polynôme séparable de $\mathbf{A}'[T]$. Il reste à voir que tout polynôme $P \in \mathbf{A}'[T]$

qui annule un $y_i = \sigma_i(y)$ ($\sigma_i \in H$) est multiple de Q_H. Pour tout $\sigma \in H$, puisque σ est un $\mathbf{A}'$-automorphisme de $\mathbf{B}$, on a $P\big(\sigma(y_i)\big) = \sigma\big(P(y_i)\big) = 0$. Ainsi P est divisible par chacun des $T - \sigma(y)$, pour $\sigma \in H$. Comme ces polynômes sont deux à deux comaximaux, P est multiple de leur produit Q_H. Enfin, si $\sigma_j \in G$ est un $\mathbf{A}'$-automorphisme de $\mathbf{B}$, $\sigma_j(y) = y_j$ doit être un zéro de Q_H. Mais puisque Q est séparable, les seuls y_i qui annulent Q_H sont les $\sigma(y)$ pour $\sigma \in H$. Donc $\sigma_j \in H$. □

Remarques. 1) Dans la situation galoisienne élémentaire rien ne dit que les y_i sont les seuls zéros de Q dans $\mathbf{B}$, ni que les σ_i soient les seuls $\mathbf{A}$-automorphismes de $\mathbf{B}$. Prenons par exemple $\mathbf{B} = \mathbf{K}^3$, et a, b, c distincts dans le corps discret $\mathbf{K}$. Le polynôme $Q = (T-a)(T-b)(T-c)$ admet 27 zéros dans $\mathbf{B}$, dont six qui ont Q pour polynôme minimal, ce qui fait six $\mathbf{K}$-automorphismes de $\mathbf{B}$.
En outre, si l'on prend $z_1 = (a, b, c)$, $z_2 = (b, a, b)$ et $z_3 = (c, c, a)$, on voit que $Q = (T - z_1)(T - z_2)(T - z_3)$, ce qui montre que la première condition n'implique pas la seconde. Par contre, avec $y_1 = (a, b, c)$, $y_2 = (b, c, a)$ et $y_3 = (c, a, b)$, on est dans la situation galoisienne élémentaire.
2) Concernant la condition *iii* pour définir la situation galoisienne élémentaire, on voit facilement qu'elle équivaut au fait que chaque σ_i permute les y_j. Cette condition n'est pas conséquence des deux premières comme le prouve l'exemple qui suit. Considérons le carré latin 5×5 suivant (dans chaque ligne et chaque colonne, les entiers sont différents), qui n'est pas la table d'un groupe :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \\ 5 & 3 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Chaque ligne définit une permutation $\sigma_i \in S_5$; ainsi $\sigma_1 = \mathrm{Id}$, $\sigma_2 = (12453)$, …, $\sigma_5 = (154)(23)$. Les σ_i ne forment pas un groupe (qui serait d'ordre 5) car σ_5 est d'ordre 6. Posons $\mathbf{B} = \mathbf{K}^5$ où $\mathbf{K}$ est un corps ayant au moins 5 éléments $a_1, \ldots, a_5$, $y = (a_1, \ldots, a_5) \in \mathbf{B}$, $y_i = \sigma_i(y)$ et

$$Q(T) = \textstyle\prod_i (T - y_i) = \prod_i (T - a_i) \in \mathbf{K}[T].$$

Alors, dans 6.12, les deux premières conditions *i*, *ii* sont vérifiées mais pas la condition *iii*.
Fort heureusement les choses sont plus simples dans le cas des corps. ∎

6.13. Lemme. *Soit* $\mathbf{L} = \mathbf{K}[y]$ *un corps discret strictement fini sur* $\mathbf{K}$. *Soit* Q *le polynôme minimal de* y *sur* $\mathbf{K}$. *Si* Q *est séparable et se factorise complètement dans* $\mathbf{L}[T]$, *on se trouve dans la situation galoisienne élémentaire et le groupe* G *correspondant est le groupe* $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ *de tous les* $\mathbf{K}$*-automorphismes de* $\mathbf{L}$.

D Notons $y = y_1, \ldots, y_d$ les zéros de Q (de degré d) dans $\mathbf{L}$. Chaque y_i annule Q et Q est irréductible dans $\mathbf{K}[T]$, donc Q est le polynôme minimal de y_i sur $\mathbf{K}$ et $\mathbf{K}[y_i]$ est un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel de $\mathbf{L}$, libre et de même dimension d, donc égal à $\mathbf{L}$. Enfin, puisque $\mathbf{L}$ est intègre, les y_i sont les seuls zéros de Q dans $\mathbf{L}$, donc tout $\mathbf{K}$-automorphisme de $\mathbf{L}$ est un σ_i, et les σ_i forment donc bien un groupe : le groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$. □

6.14. Théorème. (Correspondance galoisienne, le cas élémentaire)
Soit $\mathbf{L} = \mathbf{K}[y]$ un corps discret strictement fini sur $\mathbf{K}$. Soit Q le polynôme minimal de y sur $\mathbf{K}$. On suppose que Q est séparable et se factorise complètement dans $\mathbf{L}[T]$. En particulier, $\mathbf{L}$ est une extension galoisienne de $\mathbf{K}$. On a les résultats suivants.

1. *Les deux applications de la correspondance galoisienne sont deux bijections réciproques l'une de l'autre.*
2. *Pour tout $\mathbf{M} \in \mathcal{K}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}/\mathbf{M}$ est une extension galoisienne de groupe de Galois $\mathrm{Fix}(\mathbf{M})$ et $[\,\mathbf{L} : \mathbf{M}\,] = |\mathrm{Fix}(\mathbf{M})|$.*
3. *Si $H_1, H_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$ et $\mathbf{M}_i = \mathrm{Fix}(H_i) \in \mathcal{K}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$, alors :*
   — *$H_1 \cap H_2$ correspond à la sous-$\mathbf{K}$-algèbre engendrée par $\mathbf{M}_1$ et $\mathbf{M}_2$,*
   — *$\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ correspond au sous-groupe engendré par H_1 et H_2.*
4. *Si $H_1 \subseteq H_2$ dans $\mathcal{G}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$ et $\mathbf{M}_i = \mathrm{Fix}(H_i)$, alors $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2$ et on a l'égalité $|\,H_2 : H_1\,| = [\,\mathbf{M}_1 : \mathbf{M}_2\,]$.*
5. *Pour tout $z \in \mathbf{L}$, $\mathrm{C}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(z)(T) = \mathrm{C}_{\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})}(z)(T)$.*

D Il suffit de prouver le premier point. D'après la proposition 6.12 on a l'égalité $\mathrm{Stp} \circ \mathrm{Fix} = \mathrm{Id}_{\mathcal{G}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}}$.
Soit maintenant $\mathbf{M} \in \mathcal{K}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$. Puisque $\mathbf{L} = \mathbf{K}[y]$, on a $\mathbf{L} = \mathbf{M}[y]$. Comme $\mathbf{L}$ est strictement fini sur $\mathbf{M}$, on peut calculer le polynôme minimal P de y sur $\mathbf{M}$. Il divise Q donc il est séparable. Il se factorise complètement dans $\mathbf{L}[T]$. Ainsi, avec $\mathbf{M}$, $\mathbf{L} = \mathbf{M}[y]$ et P, on est dans les hypothèses du lemme 6.13, donc dans la situation galoisienne élémentaire. Les $\mathbf{M}$-automorphismes de $\mathbf{L}$ sont des $\mathbf{K}$-automorphismes donc ce sont exactement les éléments du stabilisateur $H = \mathrm{Stp}_G(\mathbf{M})$ (où $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$). Dans cette situation le point *1b* de la proposition 6.12 nous dit que $\mathrm{Fix}(H) = \mathbf{M}$. □

Nous venons d'établir que la correspondance galoisienne est bijective, ce qui est le théorème fondamental de la théorie de Galois, dans le cas élémentaire. Mais ce cas est en fait le cas « général » : chaque fois que l'on a une extension galoisienne on peut se ramener à la situation élémentaire (théorème 6.15 et théorème de l'élément primitif VI-1.9).

Construction d'un corps de racines au moyen d'une résolvante de Galois, théorie de Galois de base

Dans ce paragraphe $f \in \mathbf{K}[T]$ est un polynôme unitaire séparable de degré n et $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ avec $f(T) = \prod_i (T - x_i)$ dans $\mathbf{A}$.

Le but du paragraphe présent est de montrer le résultat suivant : si $\mathbf{K}$ est infini, et si l'on sait factoriser les polynômes unitaires séparables dans $\mathbf{K}[T]$, alors on sait construire un corps de racines pour n'importe quel polynôme unitaire séparable, et l'extension obtenue rentre dans le cadre élémentaire du théorème 6.14.
Nous construisons ce corps de racines par une méthode « uniforme ». Comme le corps de racines construit est strictement fini, le théorème 6.7 nous dit que tout autre corps de racines lui est isomorphe.

6.15. Théorème. *On introduit des indéterminées $u_1, \ldots, u_n$. Pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$ on note $u_\sigma = \sum_i u_i x_{\sigma i}$. On pose*

$$R(\underline{u}, T) := \prod\nolimits_{\sigma \in \mathrm{S}_n} (T - u_\sigma) \in \mathbf{K}[\underline{u}, T],$$

et $D(\underline{u}) := \mathrm{disc}_T(R) \in \mathbf{K}[\underline{u}]$.

1. *Un des coefficients de D est égal à $\pm \mathrm{disc}(f)^{(n-2)!(n!-1)}$.*

Dans la suite on suppose que l'on spécialise les u_i en des éléments $a_i \in \mathbf{K}$ et que $D(\underline{a}) \neq 0$ (c'est toujours possible si $\mathbf{K}$ est infini).

2. *Pour n'importe quel $\sigma \in \mathrm{S}_n$, l'élément $a_\sigma = \sum_i a_i x_{\sigma i}$ admet le polynôme $R(\underline{a}, T) \in \mathbf{K}[T]$ pour polynôme minimal, de sorte que*
$$\mathbf{A} = \mathbf{K}[a_\sigma] \simeq \mathbf{K}[T]/\langle R(\underline{a}, T)\rangle\,.$$
On note $a = a_{\mathrm{Id}} = \sum_i a_i x_i$.
3. *Les seuls éléments de $\mathbf{A}$ fixés par S_n sont les éléments de $\mathbf{K}$.*
4. *Supposons que l'on sache décomposer $R(\underline{a}, T)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbf{K}[T]$: $R(\underline{a}, T) = \prod_{j=1}^{\ell} Q_j$.*
   a. *Si $\ell = 1$, $\mathbf{A}$ est un corps, l'extension $\mathbf{A}/\mathbf{K}$ est un corps de racines pour le polynôme f, ainsi que pour $R(\underline{a}, T)$, et la situation relève du théorème 6.14. En particulier,* $\mathrm{Gal}(\mathbf{A}/\mathbf{K}) \simeq \mathrm{S}_n$.
   b. *Si $\ell > 1$, alors $\mathbf{A} \simeq \prod_j \mathbf{K}_j$ où*
   $$\mathbf{K}_j = \mathbf{K}[\pi_j(a)] = \mathbf{A}/\langle Q_j(a)\rangle \simeq \mathbf{K}[T]/\langle Q_j\rangle\,.$$
   ($\pi_j : \mathbf{A} \to \mathbf{K}_j$ est la projection canonique.)
   Soit H_j le sous-groupe de S_n qui stabilise l'idéal $\langle Q_j(a)\rangle_{\mathbf{A}}$. Alors :
      – *S_n opère transitivement sur les idéaux $\langle Q_j(a)\rangle_{\mathbf{A}}$, de sorte que les Q_j ont tous même degré, $|H_j| = \deg(Q_j) = [\,\mathbf{K}_j : \mathbf{K}\,]$, et les $\mathbf{K}_j$ sont des corps discrets deux à deux isomorphes,*

– *l'extension* $\mathbf{K}_1/\mathbf{K}$ *est un corps de racines pour* f*, ainsi que pour chacun des* Q_j*, et la situation relève du théorème 6.14, en particulier,* $H_1 = \mathrm{Gal}(\mathbf{K}_1/\mathbf{K})$.

$\mathbb{D}$ *1.* Le discriminant D est égal (au signe près) au produit des $u_\sigma - u_\tau$ pour $\sigma \neq \tau \in \mathrm{S}_n$. Chaque $u_\sigma - u_\tau$ est une somme d'éléments $u_i(x_{\sigma i} - x_{\tau i})$: chaque u_i a pour coefficient 0 ou un $x_j - x_k$ $(j \neq k)$. Le premier monôme pour l'ordre lexicographique qui apparaît dans le produit D est le monôme

$$u_1^{n!(n!-(n-1)!)} u_2^{n!\left((n-1)!-(n-2)!\right)} \cdots u_{n-1}^{n!(2!-1!)},$$

avec pour coefficient un produit d'éléments du type $x_i - x_j$ $(i \neq j)$. Plus précisément si $\delta = \mathrm{disc}(f)$, le coefficient en question sera, au signe près,

$$\delta^{(n-2)!(n!-1)}.$$

2. On utilise la proposition 5.10 puisque $R(\underline{a}, T)$ est le polynôme caractéristique de a (lemme 5.12).

3. Voir le point *1b* de la proposition 6.12.

4a. C'est clair.

4b. Le fait que $\mathbf{A} \simeq \prod_j \mathbf{K}_j$ résulte du théorème des restes chinois.

L'égalité $\prod_j Q_j(T) = \prod_\sigma (T - a_\sigma)$ dans $\mathbf{A}[T]$ reste valable dans $\mathbf{K}_1[T]$.

Donc, il existe pour tout j un σ_j tel que $Q_j\big(\pi_1(a_{\sigma_j})\big) = 0$, autrement dit, $Q_j(a_{\sigma_j}) \in \langle Q_1(a)\rangle_{\mathbf{A}}$. D'autre part, dans $\mathbf{A}$ on a $Q_j(a_{\sigma_j}) = \sigma_j\big(Q_j(a)\big)$ parce que $Q_j \in \mathbf{K}[T]$. Donc $\sigma_j\big(\langle Q_j(a)\rangle_{\mathbf{A}}\big) \subseteq \langle Q_1(a)\rangle_{\mathbf{A}}$.

Ceci nous donne une surjection $\sigma_j : \mathbf{A}/\langle Q_j(a)\rangle \to \mathbf{A}/\langle Q_1(a)\rangle$, i.e. une surjection $\mathbf{K}[T]/\langle Q_j\rangle \to \mathbf{K}[T]/\langle Q_1\rangle$. Il en résulte $\deg Q_1 \leqslant \deg Q_j$, et par symétrie $\deg Q_j = \deg Q_1$, d'où $\sigma_j\big(\langle Q_j(a)\rangle_{\mathbf{A}}\big) = \langle Q_1(a)\rangle_{\mathbf{A}}$.

Ainsi S_n opère transitivement sur les idéaux $\langle Q_j(a)\rangle_{\mathbf{A}}$ et les $\mathbf{K}_j$ sont deux à deux isomorphes. □

Remarque. La construction du corps de racines suggérée ici est en fait à peu près impraticable dès que le degré n de f est supérieur ou égal à 7, car elle nécessite de factoriser un polynôme de degré $n!$. Nous proposons dans le chapitre VII une méthode dynamique moins brutale qui a l'avantage supplémentaire de ne pas réclamer de savoir factoriser les polynômes séparables de $\mathbf{K}[T]$. La contrepartie de cette absence de factorisation sera que, bien que l'on sache calculer dans « un » corps de racines, on n'est a priori jamais certain de le connaître de manière complète (au sens où on connaîtrait sa dimension comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel). En outre, le même manque de précision se retrouve pour ce qui concerne le groupe de Galois. ■

Exemple. On considère le polynôme `p(T)`$\in \mathbb{Q}[T]$ ci-dessous. On demande à `Magma` de prendre au hasard une combinaison linéaire `z` des `xi` (les zéros de `p(T)` dans l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbb{Q},p}$), de calculer $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q},z}(T)$, puis de le factoriser. Le logiciel donne rapidement le

polynôme minimal `pm` de degré 720 et le décompose en un produit de 30 facteurs de degré 24 (le tout en une ou deux minutes). Un de ces facteurs est le polynôme `q`. Comme `q` est très encombrant, on demande à `Magma` de calculer une base de Gröbner de l'idéal engendré par les modules de Cauchy d'une part, et par `q(z)` d'autre part, ce qui fournit une description plus claire du corps de racines $\mathbf{A}/\langle q(z)\rangle$: `x6` est annulé par `p`, `x5` est annulé par un polynôme de degré 4 à coefficients dans $\mathbb{Q}[x_6]$, `x1`, ..., `x4` s'expriment en fonction de `x5` et `x6`. Le calcul de la base de Gröbner prend plusieurs heures. `Magma` peut ensuite calculer le groupe de Galois, qui est donné par deux générateurs. Voici les résultats :

```
p:=T^6 - 3*T^5 + 6*T^4 - 7*T^3 + 2*T^2 + T - 1;
z:=x1 + 2*x2 + 13*x3 - 24*x4 + 35*x5 - 436*x6;
pm:=T^720 + 147240*T^719 + 10877951340*T^718 + 537614218119000*T^717 +
    199948439927143652l0*T^716 + 596880113924932859498208*T^715 +
    14896247531385087685472255280*T^714 + ...
q:= T^24 + 4908*T^23 + 13278966*T^22 + 25122595960*T^21 +
    36160999067785*T^20 + 41348091425849608*T^19 +
    38304456918334801182*T^18 + 28901611463650323108996*T^17 +...
//on annule  q(z): description du corps des racines;
Affine Algebra of rank 6 over Rational Field
Variables: x1, x2, x3, x4, x5, x6
Quotient relations:
x1 + 18/37*x5^3*x6^5 - 45/37*x5^3*x6^4 + 104/37*x5^3*x6^3 - 3*x5^3*x6^2
    + 36/37*x5^3*x6 - 1/37*x5^3 - 27/37*x5^2*x6^5 + 135/74*x5^2*x6^4 -
    156/37*x5^2*x6^3 + 9/2*x5^2*x6^2 - 54/37*x5^2*x6 + 3/74*x5^2 +
    91/37*x5*x6^5 - 455/74*x5*x6^4 + 460/37*x5*x6^3 - 25/2*x5*x6^2 +
    108/37*x5*x6 + 31/74*x5 - 41/37*x6^5 + 205/74*x6^4 - 204/37*x6^3 +
    11/2*x6^2 - 45/37*x6 - 53/74,
x2 + x6 - 1,
x3 + x5 - 1,
x4 - 18/37*x5^3*x6^5 + 45/37*x5^3*x6^4 - 104/37*x5^3*x6^3 + 3*x5^3*x6^2
    - 36/37*x5^3*x6 + 1/37*x5^3 + 27/37*x5^2*x6^5 - 135/74*x5^2*x6^4 +
    156/37*x5^2*x6^3 - 9/2*x5^2*x6^2 + 54/37*x5^2*x6 - 3/74*x5^2 -
    91/37*x5*x6^5 + 455/74*x5*x6^4 - 460/37*x5*x6^3 + 25/2*x5*x6^2 -
    108/37*x5*x6 - 31/74*x5 + 41/37*x6^5 - 205/74*x6^4 + 204/37*x6^3 -
    11/2*x6^2 + 45/37*x6 - 21/74,
x5^4 - 2*x5^3 + x5^2*x6^2 - x5^2*x6 + 4*x5^2 - x5*x6^2 + x5*x6 - 3*x5 +
     x6^4 - 2*x6^3 + 4*x6^2 - 3*x6 - 1,
x6^6 - 3*x6^5 + 6*x6^4 - 7*x6^3 + 2*x6^2 + x6 - 1
// le groupe de Galois;
Permutation group acting on a set of cardinality 6
Order = 24 = 2^3 * 3
    (1, 4)(2, 5)(3, 6)
    (1, 2, 4, 6)
```

On notera que $\mathrm{disc}_T(p) = 2^4 \times 37^3$, ce qui n'est pas sans rapport avec les dénominateurs apparaissant dans la base de Gröbner. L'exemple sera repris

page 436 avec la méthode dynamique. ∎

Remarque. Nous interrompons ici le traitement de la théorie de Galois de base. Nous reprendrons le fil de ces idées dans les sections VI-1 et VI-2 qui peuvent être lues directement ici (les résultats des chapitres intermédiaires ne seront pas utilisés). Dans le chapitre VII nous aborderons une théorie plus sophistiquée qui s'avère nécessaire lorsque l'on ne dispose d'aucun algorithme de factorisation des polynômes séparables sur le corps de base. ∎

7. Le résultant

Le résultant est l'outil de base de la théorie de l'élimination. Ceci est basé sur le lemme d'élimination de base 7.5 qui s'applique avec n'importe quel anneau et sur son corollaire 7.7 pour le cas géométrique.

La théorie de l'élimination

La théorie de l'élimination s'intéresse aux systèmes d'équations polynomiales (ou *systèmes polynomiaux*).
Un tel système $(f_1, \ldots, f_s)$ dans $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]$, où $\mathbf{k}$ est un corps discret, peut admettre des zéros dans $\mathbf{k}^n$, ou dans $\mathbf{L}^n$, avec $\mathbf{L}$ un surcorps de $\mathbf{k}$, ou même $\mathbf{L}$ une $\mathbf{k}$-algèbre arbitraire. Les zéros dépendent seulement de l'idéal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ engendré par les f_i. Aussi on les appelle *les zéros de l'idéal* $\mathfrak{a}$.
Soit $\pi : \mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^r$ la projection qui oublie les $n - r$ dernières coordonnées. Si $V \subseteq \mathbf{L}^n$ est l'ensemble des zéros de $\mathfrak{a}$ sur $\mathbf{L}$, on est intéressé par une description aussi précise que possible de la projection $W = \pi(V)$. Si possible comme zéros d'un système polynomial en les variables $(X_1, \ldots, X_r)$.
Ici intervient de manière naturelle l'*idéal d'élimination* (élimination des variables X_{r+1}, …, X_n pour le système polynomial considéré), qui est défini par $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_r]$. En effet tout élément de W est clairement un zéro de $\mathfrak{b}$.
La réciproque n'est pas toujours vraie (et de toute manière pas du tout évidente), mais elle est vraie dans certains bons cas : si $\mathbf{L}$ est un corps algébriquement clos et si l'idéal est en position de Noether (théorème 9.5).
Un fait rassurant, et facile à établir par des considérations d'algèbre linéaire sur les corps discrets, est que l'idéal d'élimination $\mathfrak{b}$ « ne dépend pas » du corps de base $\mathbf{k}$ considéré. Plus précisément, si $\mathbf{k}_1$ est un surcorps de $\mathbf{k}$, on a les résultats suivants.

- L'idéal $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathbf{k}_1[X_1,\ldots,X_n]}$ ne dépend que de l'idéal $\mathfrak{a}$:
  c'est l'idéal $\mathfrak{a}_1$ de $\mathbf{k}_1[X_1, \ldots, X_n]$ engendré par $\mathfrak{a}$.
- L'idéal d'élimination $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}_1 \cap \mathbf{k}_1[X_1, \ldots, X_r]$ ne dépend que de $\mathfrak{b}$:
  c'est l'idéal de $\mathbf{k}_1[X_1, \ldots, X_r]$ engendré par $\mathfrak{b}$.

La théorie élémentaire de l'élimination se heurte à deux obstacles.
Le premier est la difficulté de calculer $\mathfrak{b}$ à partir de $\mathfrak{a}$, c'est-à-dire de calculer un système générateur fini de $\mathfrak{b}$ à partir du système polynomial $(f_1, \ldots, f_s)$. Ce calcul est rendu possible par la théorie des bases de Gröbner, que nous n'aborderons pas dans l'ouvrage. En outre ce calcul n'est pas uniforme, contrairement aux calculs liés à la théorie du résultant.
Le deuxième obstacle, c'est que les choses ne se passent de manière vraiment satisfaisante qu'avec les systèmes polynomiaux homogènes. L'exemple de base qui montre ceci est le déterminant. On considère un système linéaire générique $(f_1, \ldots, f_n)$ de $\mathbf{k}[\underline{a}][\underline{X}]$, où les variables a_{ij} dans $\underline{a}$ représentent les n^2 coefficients des n formes linéaires f_i, et les X_j sont les inconnues. Alors l'idéal $\langle \det(\underline{a}) \rangle$ de $\mathbf{k}[\underline{a}]$ est bien l'idéal d'élimination des variables X_j pour le système $(f_1, \ldots, f_n)$, mais à condition de ne prendre en compte que les zéros du système distincts de $\underline{0} = (0, \ldots, 0)$, c'est-à-dire de se situer dans un cadre entièrement homogène.
La simplicité du résultat est à mettre en regard avec la complication de la discussion, dans le cadre non homogène, pour les systèmes où les f_i sont des formes affines.
D'autre part, bien que les zéros de l'idéal $\langle \det(\underline{a}) \rangle$ correspondent effectivement aux systèmes qui admettent un zéro $\neq \underline{0}$, cet idéal n'est pas exactement égal à $\langle f_1, \ldots, f_n \rangle \cap \mathbf{k}[\underline{a}]$, il faut d'abord *saturer* $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ par rapport aux variables homogènes X_j, c'est-à-dire lui rajouter tous les g tels que, pour chaque $j \in [\![1..n]\!]$, $gX_j^N \in \mathfrak{a}$ pour un N assez grand. Dans le cas présent, ce saturé est l'idéal $\mathfrak{a} + \det(\underline{a})\mathbf{k}[\underline{a}][\underline{X}]$, chaque $\det(\underline{a})X_j$ est dans $\mathfrak{a}$, et l'intersection du saturé avec $\mathbf{k}[\underline{a}]$ est bien $\langle \det(\underline{a}) \rangle$.
Nous retiendrons de cette petite introduction à la théorie de l'élimination une définition : soient $\mathbf{k}$ un anneau commutatif, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ et $r \in [\![0..n-1]\!]$, on définit l'*idéal d'élimination des variables X_{r+1}, …, X_n pour l'idéal* $\mathfrak{a}$ comme étant l'idéal $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_r]$.
On prendra garde au fait que si $\mathbf{k}$ est un anneau arbitraire, l'idéal $\mathfrak{a}$ peut très bien être de type fini sans que $\mathfrak{b}$ le soit.

La matrice de Sylvester

Dans ce qui suit, on ne suppose pas l'anneau $\mathbf{A}$ discret, si bien que le degré d'un polynôme de $\mathbf{A}[X]$ n'est pas nécessairement connu de manière exacte. Du point de vue du calcul, on doit en général prendre les polynômes dans $\mathbf{A}[X]$ sous forme de *polynômes formels* c'est-à-dire des couples (f, p) où f est un polynôme et p majore son degré. Cette notion est également utile en cas de changement d'anneau de base, car un polynôme peut voir par exemple son degré baisser sans que l'on sache le tester (lors d'un passage dans un quotient par exemple).

Rappelons la définition de la matrice de Sylvester et du résultant de deux polynômes (des polynômes formels de degrés p et $q \geqslant 0$) :

$$\begin{aligned} f &= a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_0, \\ g &= b_q X^q + b_{q-1} X^{q-1} + \cdots + b_0. \end{aligned}$$

La *matrice de Sylvester* de f et g (en degrés p et q) est la matrice suivante

$$\mathrm{Syl}_X(f,p,g,q) = \underbrace{\begin{bmatrix} a_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & & \\ & \ddots & & & & & \ddots & \\ & & a_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_q & \cdots & \cdots & b_0 & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & b_q & \cdots & \cdots & b_0 \end{bmatrix}}_{p+q} \left.\begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} q \\ \\ \\ \\ p \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Cette matrice peut être vue comme la matrice dont les lignes sont les coordonnées des polynômes $X^{q-1}f$, …, Xf, f, $X^{p-1}g$, …, Xg, g sur la base $(X^{p+q-1}, X^{p+q-2}, \ldots, X, 1)$.
Le *résultant de f et g (en degrés p et q)*, noté $\mathrm{Res}_X(f,p,g,q)$, est le déterminant de cette matrice de Sylvester :

$$\mathrm{Res}_X(f,p,g,q) \stackrel{\text{def}}{=} \det\big(\mathrm{Syl}_X(f,p,g,q)\big). \tag{2}$$

Si le contexte est clair, on note aussi $\mathrm{Res}_X(f,g)$ ou $\mathrm{Res}(f,g)$. On a

$$\mathrm{Res}_X(f,p,g,q) = (-1)^{pq}\mathrm{Res}_X(g,q,f,p), \tag{3}$$

et aussi, pour $a, b \in \mathbf{A}$,

$$\mathrm{Res}_X(af,p,bg,q) = a^q b^p \mathrm{Res}_X(f,p,g,q). \tag{4}$$

Si $p = q = 0$, on obtient le déterminant d'une matrice vide, c'est-à-dire 1.

7.1. Fait. *Si $p \geqslant 1$ ou $q \geqslant 1$, alors* $\mathrm{Res}_X(f,p,g,q) \in \langle f,g\rangle_{\mathbf{A}[X]} \cap \mathbf{A}$. *Plus précisément, pour chaque $n \in [\![0..p+q-1]\!]$, il existe u_n et $v_n \in \mathbf{A}[X]$ tels que* $\deg u_n < q$, $\deg v_n < p$ *et*

$$X^n \,\mathrm{Res}_X(f,g) = u_n(X)f(X) + v_n(X)g(X). \tag{5}$$

D Soit S la transposée de $\mathrm{Syl}_X(f,p,g,q)$. Les colonnes de S expriment des polynômes $X^k f$ ou $X^\ell g$ sur la base des monômes de degrés $< p+q$. En utilisant la formule de Cramer

$$S\,\widetilde{S} = \det S \cdot \mathrm{I}_{p+q}\ ,$$

on voit que chaque $X^n\mathrm{Res}(f,g)$ (qui correspond à l'une des colonnes de la matrice du second membre) est une combinaison linéaire des colonnes de S. □

Remarque. On peut aussi voir l'égalité (5) dans le cas $n = 0$ comme exprimant le déterminant de la matrice ci-dessous développé selon la dernière colonne (il s'agit de la matrice de Sylvester dans laquelle on a remplacé dans la dernière colonne chaque coefficient par le « nom » de sa ligne) :

$$\begin{bmatrix}
a_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & & X^{q-1}f \\
& \ddots & & & & & \ddots & \\
& & a_p & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & f \\
b_q & \cdots & \cdots & b_0 & & & & X^{p-1}g \\
& \ddots & & & \ddots & & & \\
& & & b_q & \cdots & \cdots & b_0 & Xg \\
& & & & b_q & \cdots & \cdots & g
\end{bmatrix}.$$

■

7.2. Corollaire. *Soient f, $g \in \mathbf{A}[X]$ et $a \in \mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$, avec $f(a) = g(a) = 0$, et $p \geqslant 1$ ou $q \geqslant 1$, alors* $\mathrm{Res}_X(f,p,g,q) = 0$.

Notez que si les deux degrés sont surévalués le résultant s'annule, et l'interprétation intuitive est que les deux polynômes ont un zéro en commun « à l'infini ». Tandis que si $a_p = 1$, le résultant (pour f en degré p) est le même quel que soit le degré formel choisi pour g. Ceci permet alors de passer sans ambiguïté à la notation $\mathrm{Res}(f,g)$, comme dans le lemme suivant.

7.3. Lemme. *Soient f et $g \in \mathbf{A}[X]$ avec f unitaire de degré p.*

1. *On note $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$ et μ_g la multiplication par (la classe de) g dans $\mathbf{B}$, qui est un $\mathbf{A}$-module libre de rang p. Alors :*
$$\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(g) = \det \mu_g = \mathrm{Res}(f,g). \tag{6}$$
2. *Par suite*
$$\mathrm{Res}(f,gh) = \mathrm{Res}(f,g)\,\mathrm{Res}(f,h), \tag{7}$$
$$\mathrm{Res}(f,g+fh) = \mathrm{Res}(f,g). \tag{8}$$
3. *Pour toute matrice carrée $A \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A})$ dont le polynôme caractéristique est égal à f, on a*
$$\mathrm{Res}(f,g) = \det\big(g(A)\big). \tag{9}$$

4. Si l'on écrit $f = \prod_{i=1}^{p}(X - x_i)$ *dans une extension de* $\mathbf{A}$*, on obtient*

$$\mathrm{Res}(f, g) = \prod_{i=1}^{p} g(x_i). \tag{10}$$

▷ *1.* Par manipulations élémentaires de lignes, la matrice de Sylvester

$$\mathrm{Syl}_X(f, p, g, q) = \begin{bmatrix} 1 & a_{p-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & 1 & a_{p-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_q & \cdots & \cdots & b_0 & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & & b_q & \cdots & \cdots & b_0 \end{bmatrix}$$

est transformée en la matrice qui est visualisée ci-après, dans laquelle les lignes $q+1$, …, $q+p$ contiennent maintenant les restes de la division par f des polynômes $X^{p-1}g$, …, Xg, g. Ainsi la matrice $p \times p$ dans le coin sud-est, est exactement la matrice transposée de la matrice de l'endomorphisme μ_g de $\mathbf{B}$ sur la base des monômes. Et son déterminant est égal à celui de la matrice de Sylvester.

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{p-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \ddots & \\ & & 1 & a_{p-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \times & \cdots & \cdots & \cdots & \times \end{bmatrix}$$

2. Résulte du point *1.*

3 et *4.* Résultent de la proposition 5.9 via le point *1.*

On peut aussi donner les preuves directes suivantes.

4. Tout d'abord, de l'équation (7) on déduit la formule symétrique

$$\mathrm{Res}(f_1 f_2, g) = \mathrm{Res}(f_1, g)\,\mathrm{Res}(f_2, g)$$

pour f_1 et f_2 unitaires (utiliser les équations (3) et (4) et le fait que dans le cas où les coefficients de g sont des indéterminées on peut supposer $g = b_q g_1$ avec g_1 unitaire). Ensuite, un calcul direct donne $\mathrm{Res}(X - a, g) = g(a)$.

3. On doit démontrer $\mathrm{Res}(\mathrm{C}_A, g) = \det\big(g(A)\big)$ pour un polynôme g et une matrice A arbitraires. Il s'agit d'une identité algébrique concernant les coefficients de A et de g. On peut donc se limiter au cas où la matrice A est la matrice générique. Alors, elle se diagonalise dans un suranneau et l'on conclut en appliquant le point *4.* □

Remarque. Le point *4* offre une réciproque non négligeable au corollaire 7.2 : si $\mathbf{A}$ est intègre et si f et g sont deux polynômes unitaires de $\mathbf{A}[T]$ qui se factorisent complètement dans un anneau intègre contenant $\mathbf{A}$, ils ont un zéro commun si, et seulement si, leur résultant est nul. ∎

Dans le cas d'un corps discret non trivial $\mathbf{K}$ on a un peu mieux.

7.4. Fait. *Soient f et $g \in \mathbf{K}[X]$ de degrés p et $q \geqslant 1$, avec $\mathrm{Res}(f,g) = 0$. Alors, f et g ont un pgcd de degré $\geqslant 1$.*

▷ L'application $\mathbf{K}$-linéaire $(u,v) \mapsto uf + vg$ où $\deg u < q$ et $\deg v < p$ admet pour matrice sur les bases de monômes la transposée de la matrice de Sylvester. Soit donc $(u,v) \neq (0,0)$ dans le noyau. Le polynôme $uf = -vg$ est de degré $< p+q$. Donc $\deg\big(\mathrm{ppcm}(f,g)\big) < p+q$, et cela implique $\deg\big(\mathrm{pgcd}(f,g)\big) > 0$. □

Commentaire. La démonstration ci-dessus suppose que l'on connaisse la théorie élémentaire de la divisibilité (via l'algorithme d'Euclide) dans les anneaux du type $\mathbf{K}[X]$. Cette théorie montre l'existence d'un pgcd et d'un ppcm avec la relation

$$\mathrm{ppcm}(f,g)\ \mathrm{pgcd}(f,g) = \alpha fg, \qquad (\alpha \in \mathbf{K}^\times).$$

Une autre preuve consisterait à dire que dans un corps discret $\mathbf{L}$ qui est une extension de $\mathbf{K}$, les polynômes f et g sont scindés (i.e., se décomposent en facteurs de degré 1) ce qui implique, vu la remarque qui était faite juste avant, que f et g ont un zéro commun et donc un facteur commun de degré > 0. Il faut ensuite terminer en remarquant que le pgcd se calcule par l'algorithme d'Euclide et ne dépend donc pas du corps de base choisi (qui doit seulement contenir les coefficients de f et g). Néanmoins cette seconde démonstration, qui en quelque sorte donne « la vraie raison du théorème » suppose l'existence de $\mathbf{L}$ (qui n'est pas garantie d'un point de vue constructif) et elle n'évite nullement la théorie de la divisibilité dans $\mathbf{K}[X]$ via l'algorithme d'Euclide. ∎

7.5. Lemme d'élimination de base.
Soient f et $g \in \mathbf{A}[X]$ avec f unitaire de degré p. Alors, $R = \mathrm{Res}_X(f,g)$ est bien défini et l'idéal d'élimination $\mathfrak{a} = \langle f,g\rangle_{\mathbf{A}[X]} \cap \mathbf{A}$ vérifie

$$\mathfrak{a}^p \ \subseteq\ \mathrm{Res}_X(f,g)\mathbf{A} \ \subseteq\ \mathfrak{a}.$$

En particulier :

1. *R est inversible si, et seulement si, $1 \in \langle f,g\rangle$,*
2. *R est régulier si, et seulement si, $\mathfrak{a}$ est fidèle, et*

3. R est nilpotent si, et seulement si, $\mathfrak{a}$ est nilpotent.

▷ On sait déjà que $\mathrm{Res}_X(f,g) \in \langle f,g\rangle_{\mathbf{A}[X]}$.
On reprend les notations du lemme 7.3, point *1.* On note x la classe de X dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$. Une base de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$ est $(1, x, \ldots, x^{p-1})$. Soient $(\gamma_i)_{i\in[\![1..p]\!]}$ des éléments de $\mathfrak{a}$. Les éléments γ_1, $\gamma_2 x$, …, $\gamma_p x^{p-1}$ sont dans $\mathrm{Im}\,\mu_g$, donc la matrice $D = \mathrm{Diag}(\gamma_1, \ldots, \gamma_p)$ peut s'écrire sous la forme GB, où G est la matrice de μ_g sur la base des monômes. Par suite

$$\prod_{k=1}^{p} \gamma_k \;=\; \det D \;=\; \det G \,\det B \;=\; \mathrm{Res}(f,g)\,\det B.$$

Ainsi l'élément $\prod_{k=1}^{p}\gamma_k$ de $\mathfrak{a}^p$ appartient à $\langle \mathrm{Res}(f,g)\rangle_{\mathbf{A}}$. □

Le lemme d'élimination de base sera généralisé plus loin (lemme 9.2 et lemme d'élimination général IV-10.1).
L'appellation « idéal d'élimination » correspond aux faits suivants qui résultent du lemme précédent et du lemme 7.3 :

7.6. Corollaire. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre et f, $g \in \mathbf{A}[X]$. Si f est unitaire et se factorise complètement, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'idéal d'élimination $\langle f,g\rangle_{\mathbf{A}[X]} \cap \mathbf{A}$ est nul.*
2. *Le résultant $\mathrm{Res}_X(f,g) = 0$.*
3. *Les polynômes f et g ont une racine commune.*

Un corps discret $\mathbf{K}$ est dit *algébriquement clos* si tout polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$ se décompose en produit de facteurs $X - x_i$ ($x_i \in \mathbf{K}$).

7.7. Corollaire. *Soit $\mathbf{K}$ un corps discret algébriquement clos.*
On pose $\mathbf{A} = \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_m]$. Soient f et $g \in \mathbf{A}[X]$ avec f unitaire en X. Pour un élément arbitraire $\underline{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$ de $\mathbf{K}^m$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$\underline{\zeta}$ annule tous les polynômes de l'idéal d'élimination $\langle f,g\rangle \cap \mathbf{A}$.*
2. *$\mathrm{Res}_X\big(f(\underline{\zeta},X), g(\underline{\zeta},X)\big) = 0$.*
3. *$f(\underline{\zeta},X)$ et $g(\underline{\zeta},X)$ ont une racine commune.*

En conséquence si V est l'ensemble des zéros communs à f et g dans $\mathbf{K}^{m+1}$, et si $\pi : \mathbf{K}^{m+1} \to \mathbf{K}^m$ est la projection qui oublie la dernière coordonnée, alors $\pi(V)$ est l'ensemble des zéros de $\mathrm{Res}_X(f,g) \in \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_m]$.

Retour sur le discriminant

Lorsque $g = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$, le lemme 7.3 nous donne $\mathrm{Res}_X(g,g') = \prod_{i=1}^{n} g'(y_i)$ et donc

$$\mathrm{disc}(g) = (-1)^{n(n-1)/2}\mathrm{Res}_X(g,g'). \tag{11}$$

Comme l'égalité $g(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - y_i)$ peut toujours être réalisée dans l'algèbre de décomposition universelle si g est unitaire, on obtient que

l'égalité (11) est valable pour tout polynôme unitaire, sur tout anneau commutatif.
Le fait suivant résulte donc du lemme d'élimination de base.

7.8. Fait. *On considère un polynôme unitaire $g \in \mathbf{A}[X]$.*

- *On a $\langle g(X), g'(X)\rangle = \langle 1\rangle$ si, et seulement si,* $\operatorname{disc} g$ *est inversible.*
- *L'idéal $\langle g(X), g'(X)\rangle \cap \mathbf{A}$ est fidèle si, et seulement si,* $\operatorname{disc} g$ *est un élément régulier de* $\mathbf{A}$.

7.9. Fait. *Si $f = gh \in \mathbf{A}[X]$ avec g, h unitaires, on a l'égalité suivante :*

$$\operatorname{disc}(f) = \operatorname{disc}(g)\operatorname{disc}(h)\operatorname{Res}(g,h)^2 \tag{12}$$

▷ Cela résulte immédiatement des équations (7), (8) page 124 et (11). □

7.10. Corollaire. *Soit $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire et $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$.*

1. *Si f possède un facteur carré,* $\operatorname{disc} f = 0$. *Inversement, si* $\operatorname{disc} f = 0$ *et si $f(X) = \prod(X - x_i)$ dans un anneau intègre contenant $\mathbf{A}$, deux des zéros x_i sont égaux.*
2. *Supposons f séparable et $f = gh$ (g et h unitaires).*
   a. *Les polynômes g et h sont séparables et comaximaux.*
   b. *Il existe un idempotent e de $\mathbf{B}$ tel que $\langle e\rangle = \langle \pi(g)\rangle$.*
   On a $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}/\langle g\rangle \times \mathbf{B}/\langle h\rangle$.
3. *Supposons* $\operatorname{disc} f$ *régulier et $f = gh$ (g et h unitaires).*
   Alors, les éléments $\operatorname{disc} g$, $\operatorname{disc} h$ *et* $\operatorname{Res}(g,h)$ *sont réguliers.*

▷ Tout ceci résulte du fait 7.9, sauf peut-être l'idempotent e dans le point *2.* Si $gu + hv = 1$, il faut prendre $e = \overline{gu}$. □

7.11. Corollaire. *Soient $\mathbf{K}$ un corps discret, $f \in \mathbf{K}[X]$ un polynôme unitaire séparable et $\mathbf{B} = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$. Dans le point 2. du corollaire précédent, on associe à tout diviseur g de f l'idempotent e tel que $\langle \overline{g}\rangle = \langle e\rangle$. Ceci établit une bijection entre les diviseurs unitaires de f et les idempotents de $\mathbf{B}$. Cette bijection respecte la divisibilité.*

▷ La bijection réciproque est donnée par $e = \overline{v} \mapsto \operatorname{pgcd}(v, f)$. □

Nous introduisons maintenant les notions de sous-corps premier et de caractéristique d'un corps discret.
Plus généralement, si $\mathbf{A}$ est un anneau arbitraire, nous notons $\mathbb{Z}_{\mathbf{A}}$ le *sous-anneau premier de* $\mathbf{A}$ défini comme suit :

$$\mathbb{Z}_{\mathbf{A}} = \left\{\, n \cdot (m \cdot 1_A)^{-1} \mid n, m \in \mathbb{Z},\ m \cdot 1_{\mathbf{A}} \in \mathbf{A}^\times \,\right\}.$$

Si $\rho : \mathbb{Z} \to \mathbf{A}$ est l'unique homomorphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbf{A}$, le sous-anneau premier est donc isomorphe à $S^{-1}\mathbb{Z}/\operatorname{Ker}\rho$, où $S = \rho^{-1}(\mathbf{A}^\times)$.

Un anneau peut être appelé premier s'il est égal à son sous-anneau premier. En fait la terminologie n'est usuelle que dans le cas des corps.
Lorsque $\mathbf{K}$ est un corps discret, le sous-anneau premier est un sous-corps, appelé *sous-corps premier de* $\mathbf{K}$. Pour un $m > 0$ on dira que $\mathbf{K}$ *est de caractéristique* $> m$, et nous écrivons « $\mathrm{car}(\mathbf{K}) > m$ » si pour tout $n \in [\![1..m]\!]$, l'élément $n \cdot 1_{\mathbf{K}}$ est inversible.
Lorsque $\mathbf{K}$ est non trivial, s'il existe un $m > 0$ tel que $m \cdot 1_{\mathbf{K}} = 0$, alors il en existe un minimum, qui est un nombre premier p, et l'on dit que le corps *est de caractéristique* p. Lorsque le sous-corps premier de $\mathbf{K}$ est isomorphe à $\mathbb{Q}$, la tradition est de parler de *caractéristique nulle*, mais nous utiliserons aussi la terminologie de *caractéristique infinie* dans les contextes où cela est utile pour rester cohérent avec la notation précédente, par exemple dans le fait 7.12.
On peut concevoir [5] des corps discrets non triviaux dont la caractéristique n'est pas bien définie du point de vue constructif. Par contre pour un corps discret l'affirmation « $\mathrm{car}(\mathbf{K}) > m$ » est toujours décidable.

7.12. Fait. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret et* $f \in \mathbf{K}[X]$ *un polynôme unitaire. Si* $\mathrm{disc}\, f = 0$ *et* $\mathrm{car}(\mathbf{K}) > \deg f$, *$f$ possède un facteur carré de degré* $\geqslant 1$.

▷ Soit $n = \deg f$. Le polynôme f' est de degré $n-1$. Soit $g = \mathrm{pgcd}(f, f')$, on a $\deg g \in [\![1..n-1]\!]$ (fait 7.4). On écrit $f = gh$ donc

$$\mathrm{disc}(f) = \mathrm{Res}(g,h)^2 \,\mathrm{disc}(g)\,\mathrm{disc}(h).$$

Ainsi, $\mathrm{Res}(g,h) = 0$, ou $\mathrm{disc}(g) = 0$, ou $\mathrm{disc}(h) = 0$. Dans le premier cas, les polynômes g et h ont un pgcd k de degré $\geqslant 1$ et k^2 divise f. Dans les deux autres cas, puisque $\deg g < \deg f$ et $\deg h < \deg f$, on peut terminer par récurrence sur le degré, en notant que si $\deg f = 1$, alors $\mathrm{disc}\, f \neq 0$, ce qui assure l'initialisation. □

8. Théorie algébrique des nombres, premiers pas

Nous donnons ici quelques applications générales, en théorie des nombres élémentaire, des résultats précédemment obtenus dans ce chapitre. Pour entrevoir les multiples facettes passionnantes de la théorie des nombres, la lectrice pourra consulter le merveilleux ouvrage [Ireland & Rosen].

Algèbres finies, entières

Nous donnons quelques précisions par rapport à la définition 3.2.

5. Il peut aussi s'en présenter à nous comme résultat d'une construction compliquée dans une démonstration subtile.

8.1. Définition.

1. Une **A**-algèbre **B** est dite *finie* si **B** est un **A**-module de type fini. On dit aussi : **B** *est finie sur* **A**. Dans le cas d'une extension, on parlera d'*extension finie* de **A**.
2. Supposons $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. L'anneau **A** est dit *intégralement clos* dans **B** si tout élément de **B** entier sur **A** est dans **A**.

8.2. Fait. *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *et* $x \in \mathbf{B}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'élément* x *est entier sur* **A**.
2. *La sous-algèbre* $\mathbf{A}[x]$ *de* **B** *est finie.*
3. *Il existe un* **A***-module fidèle et de type fini* $M \subseteq \mathbf{B}$ *tel que* $xM \subseteq M$.

▷ *3* $\Rightarrow$ *1* (a fortiori *2* $\Rightarrow$ *1*.) On considère une matrice A à coefficients dans **A** qui représente $\mu_{x,M}$ (la multiplication par x dans M) sur un système générateur fini de M. Si f est le polynôme caractéristique de A, on a par le théorème de Cayley-Hamilton $0 = f(\mu_{x,M}) = \mu_{f(x),M}$ et puisque le module est fidèle, $f(x) = 0$.
Nous laissons le reste au lecteur. □

On a aussi facilement le fait suivant.

8.3. Fait. *Soit* **B** *une* **A***-algèbre et* **C** *une* **B***-algèbre.*

1. *Si* **C** *est finie sur* **B** *et* **B** *finie sur* **A***, alors* **C** *est finie sur* **A**.
2. *Une* **A***-algèbre engendrée par un nombre fini d'éléments entiers sur* **A** *est finie.*
3. *Les éléments de* **B** *entiers sur* **A** *forment un anneau intégralement clos dans* **B**. *On l'appelle la* clôture (ou fermeture) intégrale de **A** dans **B**.

8.4. Lemme. *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *et* $f \in \mathbf{B}[\underline{X}]$. *Le polynôme* f *est entier sur* $\mathbf{A}[\underline{X}]$ *si, et seulement si, chaque coefficient de* f *est entier sur* **A**.

▷ La condition est suffisante, d'après le point *3* du lemme précédent. Dans l'autre sens on considère une relation de dépendance intégrale $P(f) = 0$ pour f (avec $P \in \mathbf{A}[\underline{X}][T]$, unitaire). On a dans $\mathbf{B}[\underline{X}, T]$ une égalité

$$P(\underline{X}, T) = \big(T - f(\underline{X})\big)\,\big(T^n + u_{n-1}(\underline{X})T^{n-1} + \cdots + u_0(\underline{X})\big).$$

Puisque le coefficient de T^n dans le deuxième facteur est 1, le théorème de Kronecker en plusieurs variables 3.4 implique que chaque coefficient de f est entier sur **A**. □

8.5. Lemme. *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$*,* L *un* $\mathbf{B}$*-module libre de rang fini et* $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{B}}(L)$ *entier sur* $\mathbf{A}$*. Alors, les coefficients du polynôme caractéristique de* u *sont entiers sur* $\mathbf{A}$*. En particulier,* $\det(u)$ *et* $\mathrm{Tr}(u)$ *sont entiers sur* $\mathbf{A}$*.*

▷ Démontrons d'abord que $\det(u)$ est entier sur $\mathbf{A}$. Soit $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ une base fixée de L. Le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}[u]$ est un $\mathbf{A}$-module de type fini, et donc le module

$$E = \sum\nolimits_{i \in [\![1..n]\!], k \geqslant 0} \mathbf{A} u^k(e_i) \subseteq L$$

est un $\mathbf{A}$-module de type fini, avec $u(E) \subseteq E$. Introduisons le $\mathbf{A}$-module

$$D = \sum\nolimits_{\underline{x} \in E^n} \mathbf{A} \det_{\mathcal{E}}(\underline{x}) \subseteq \mathbf{B}.$$

Puisque E est un $\mathbf{A}$-module de type fini, D est un $\mathbf{A}$-module de type fini, et il est fidèle : $1 \in D$ car $\det_{\mathcal{E}}(\mathcal{E}) = 1$. Enfin, l'égalité

$$\det(u) \det_{\mathcal{E}}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathcal{E}}\big(u(x_1), \dots, u(x_n)\big)$$

et le fait que $u(E) \subseteq E$ montrent que $\det(u)D \subseteq D$.
Considérons ensuite $\mathbf{A}[X] \subseteq \mathbf{B}[X]$ et le $\mathbf{B}[X]$-module $L[X]$.
On a $X\mathrm{Id}_{L[X]} - u \in \mathrm{End}_{\mathbf{B}[X]}(L[X])$. Si u est entier sur $\mathbf{A}$, $X\mathrm{Id}_{L[X]} - u$ est entier sur $\mathbf{A}[X]$ donc $\mathrm{C}_u(X) = \det(X\mathrm{Id}_{L[X]} - u)$ est entier sur $\mathbf{A}[X]$. On conclut avec le lemme 8.4. □

8.6. Corollaire. *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ *avec* $\mathbf{C}$ *une* $\mathbf{B}$*-algèbre qui est un* $\mathbf{B}$*-module libre de rang fini. Soit* $x \in \mathbf{C}$ *entier sur* $\mathbf{A}$*. Alors,* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}(x)$*,* $\mathrm{N}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}(x)$ *et tous les coefficients de* $\mathrm{C}_{\mathbf{C}/\mathbf{B}}(x)$ *sont entiers sur* $\mathbf{A}$*. Si en plus* $\mathbf{B}$ *est un corps discret, les coefficients du polynôme minimal* $\mathrm{Min}_{\mathbf{B},x}$ *sont entiers sur* $\mathbf{A}$*.*

▷ On applique le lemme précédent avec $L = \mathbf{C}$ et $u = \mu_x$. Pour la dernière affirmation, on utilise le théorème de Kronecker et le fait que le polynôme minimal divise le polynôme caractéristique. □

Anneaux intégralement clos

8.7. Définition. Un anneau intègre $\mathbf{A}$ est dit *intégralement clos* s'il est intégralement clos dans son corps de fractions.

8.8. Fait. *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$*,* S *un monoïde de* $\mathbf{A}$*,* $x \in \mathbf{B}$ *et* $s \in S$*.*

1. *L'élément* $x/s \in \mathbf{B}_S$ *est entier sur* $\mathbf{A}_S$ *si, et seulement si, il existe* $u \in S$ *tel que* xu *est entier sur* $\mathbf{A}$*.*
2. *Si* $\mathbf{C}$ *est la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$*, alors* $\mathbf{C}_S$ *est la clôture intégrale de* $\mathbf{A}_S$ *dans* $\mathbf{B}_S$*.*
3. *Si* $\mathbf{A}$ *est intégralement clos, alors* $\mathbf{A}_S$ *également.*

D Il suffit de montrer le point *1.* Supposons d'abord x/s entier sur $\mathbf{A}_S$. On a par exemple une égalité dans $\mathbf{B}$

$$u(x^3 + a_2sx^2 + a_1s^2x + a_0s^3) = 0,$$

avec $u \in S$ et les $a_i \in \mathbf{A}$. En multipliant par u^2 on obtient

$$(ux)^3 + a_2us(ux)^2 + a_1u^2s^2(ux) + a_0u^3s^3 = 0$$

dans $\mathbf{B}$. Inversement supposons xu entier sur $\mathbf{A}$ avec $u \in S$. On a par exemple une égalité

$$(ux)^3 + a_2(ux)^2 + a_1(ux) + a_0 = 0$$

dans $\mathbf{B}$, donc dans $\mathbf{B}_S$:

$$x^3 + (a_2/u)x^2 + (a_1/u^2)x + (a_0/u^3) = 0.$$

□

8.9. Principe local-global concret. (Éléments entiers)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et $x \in \mathbf{B}$. On a les équivalences suivantes.

1. *L'élément x est entier sur $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est entier sur chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$.*
2. *Supposons $\mathbf{A}$ intègre : $\mathbf{A}$ est intégralement clos si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ est intégralement clos.*

D Il faut montrer dans le point *1* que si la condition est réalisée localement, elle l'est globalement. On considère donc un $x \in \mathbf{B}$ qui vérifie pour chaque i une relation $(s_ix)^k = a_{i,1}(s_ix)^{k-1} + a_{i,2}(s_ix)^{k-2} + \cdots + a_{i,k}$ avec les $a_{i,h} \in \mathbf{A}$ et les $s_i \in S_i$ (on peut supposer sans perte de généralité que les degrés sont les mêmes). On utilise alors une relation $\sum s_i^k u_i = 1$ pour obtenir une relation de dépendance intégrale de x sur $\mathbf{A}$. □

Le théorème de Kronecker implique facilement le lemme qui suit.

8.10. Lemme. (Théorème de Kronecker, cas d'un anneau intègre)
Soit $\mathbf{A}$ intégralement clos, de corps de fractions $\mathbf{K}$. Si l'on a $f = gh$ dans $\mathbf{K}[T]$ avec g, h unitaires et $f \in \mathbf{A}[T]$, alors g et h sont aussi dans $\mathbf{A}[T]$.

8.11. Lemme. *L'anneau $\mathbb{Z}$ ainsi que l'anneau $\mathbf{K}[X]$ lorsque $\mathbf{K}$ est un corps discret, sont intégralement clos.*

D En fait cela fonctionne avec tout anneau à pgcd intègre $\mathbf{A}$ (voir la section XI-2). Soient $f(T) = T^n - \sum_{k=0}^{n-1} f_kT^k$ et a/b une fraction réduite dans le corps des fractions de $\mathbf{A}$ avec $f(a/b) = 0$. En multipliant par b^n on obtient

$$a^n = b \sum_{k=0}^{n-1} f_k a^k b^{n-1-k}.$$

Puisque $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, $\operatorname{pgcd}(a^n, b) = 1$. Mais b divise a^n, donc b est inversible, et $a/b \in \mathbf{A}$. □

8.12. Théorème. *Si* $\mathbf{A}$ *est intégralement clos, il en est de même pour* $\mathbf{A}[X]$.

D Posons $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$. Si un élément f de $\mathbf{K}(X)$ est entier sur $\mathbf{A}[X]$, il est entier sur $\mathbf{K}[X]$, donc dans $\mathbf{K}[X]$ car $\mathbf{K}[X]$ est intégralement clos. On conclut avec le lemme 8.4 : tous les coefficients du polynôme f sont entiers sur $\mathbf{A}$, donc dans $\mathbf{A}$. □

Un corollaire intéressant du théorème de Kronecker est la propriété suivante (avec les mêmes notations que dans le théorème 3.3).

8.13. Proposition. *Soient* $f, g \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. *Supposons que* $\mathbf{A}$ *est intégralement clos, et que* $a \in \mathbf{A}$ *divise tous les coefficients de* $h = fg$, *alors* a *divise tous les* $f_\alpha\, g_\beta$. *Autrement dit*

$$\mathrm{c}(fg) \equiv 0 \mod a \iff \mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g) \equiv 0 \mod a.$$

D En effet, en considérant les polynômes f/a et g à coefficients dans le corps des fractions de $\mathbf{A}$, le théorème de Kronecker implique que $f_\alpha\, g_\beta/a$ est entier sur $\mathbf{A}$ car les h_γ/a sont dans $\mathbf{A}$. □

Décomposition de polynômes en produits de facteurs irréductibles

8.14. Lemme. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret. Les polynômes de* $\mathbf{K}[X]$ *se décomposent en produits de facteurs irréductibles si, et seulement si, on a un algorithme pour le calcul des zéros dans* $\mathbf{K}$ *d'un polynôme arbitraire de* $\mathbf{K}[X]$.

D La deuxième condition est a priori plus faible puisqu'elle revient à déterminer les facteurs de degré 1 pour un polynôme de $\mathbf{K}[X]$. Supposons cette condition vérifiée. Pour savoir s'il existe une décomposition $f = gh$ avec g et h unitaires de degrés > 0 fixés, on applique le théorème de Kronecker. On obtient pour chaque coefficient de g et h un nombre fini de possibilités (ce sont des zéros de polynômes unitaires que l'on peut expliciter en fonction des coefficients de f). □

8.15. Proposition. *Dans* $\mathbb{Z}[X]$ *et* $\mathbb{Q}[X]$ *les polynômes se décomposent en produits de facteurs irréductibles. Un polynôme non constant de* $\mathbb{Z}[X]$ *est irréductible dans* $\mathbb{Z}[X]$ *si, et seulement si, il est primitif et irréductible dans* $\mathbb{Q}[X]$.

D Pour $\mathbb{Q}[X]$ on applique le lemme 8.14. Il faut donc montrer que l'on sait déterminer les zéros rationnels d'un polynôme unitaire f à coefficients rationnels. On peut même supposer les coefficients de f entiers. La théorie élémentaire de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$ montre alors que si a/b est un zéro de f, a doit diviser le coefficient dominant et b le coefficient constant de f : il n'y a donc qu'un nombre fini de tests à faire.
Pour $\mathbb{Z}[X]$, un polynôme primitif f étant donné, on cherche à savoir s'il existe une décomposition $f = gh$ avec g et h de degrés > 0 fixés. On peut

supposer $f(0) \neq 0$. On applique le théorème de Kronecker. Un produit $g_0 h_j$ par exemple doit être un zéro dans $\mathbb{Z}$ d'un polynôme unitaire $q_{0,j}$ de $\mathbb{Z}[T]$ que l'on peut calculer. En particulier, $g_0 h_j$ doit diviser $q_{0,j}(0)$, ce qui ne laisse qu'un nombre fini de possibilités pour h_j.
Enfin pour le dernier point si un polynôme f primitif dans $\mathbb{Z}[X]$ se décompose sous la forme $f = gh$ dans $\mathbb{Q}[X]$ on peut supposer que g est primitif dans $\mathbb{Z}[X]$; soit alors a un coefficient de h, tous les ag_j sont dans $\mathbb{Z}$ (théorème de Kronecker), et une relation de Bézout $\sum_j g_j u_j = 1$ montre que $a \in \mathbb{Z}$.□

Corps de nombres

On appelle *corps de nombres* un corps discret $\mathbf{K}$ strictement fini sur $\mathbb{Q}$.

Clôture galoisienne

8.16. Théorème. (Corps de racines, théorème de l'élément primitif)

1. *Si f est un polynôme unitaire séparable de $\mathbb{Q}[X]$ il existe un corps de nombres $\mathbf{L}$ sur lequel on peut écrire $f(X) = \prod_i (X - x_i)$. En outre, avec un $\alpha \in \mathbf{L}$ on a :*

$$\mathbf{L} = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbb{Q}[\alpha] \simeq \mathbb{Q}[T]/\langle Q \rangle\,,$$

   où $Q(\alpha) = 0$ et le polynôme unitaire Q est irréductible dans $\mathbb{Q}[T]$ et se décompose complètement dans $\mathbf{L}[T]$.
   En particulier, l'extension $\mathbf{L}/\mathbb{Q}$ est galoisienne et le théorème 6.14 s'applique.

2. *Tout corps de nombres $\mathbf{K}$ est contenu dans une extension galoisienne du type précédent. En outre, il existe un $x \in \mathbf{K}$ tel que $\mathbf{K} = \mathbb{Q}[x]$.*

D *1.* Cela résulte du théorème 6.15 et de la proposition 8.15.
2. Un corps de nombres est engendré par un nombre fini d'éléments qui sont algébriques sur $\mathbb{Q}$. Chacun de ces éléments admet un polynôme minimal qui est irréductible sur $\mathbb{Q}$ donc séparable (fait 7.12). En prenant le ppcm f de ces polynômes on obtient un polynôme séparable. En appliquant le point *1* à f et en utilisant le théorème 6.7, on voit que $\mathbf{K}$ est isomorphe à un sous-corps de $\mathbf{L}$. Enfin comme la correspondance galoisienne est bijective et comme le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbb{Q})$ est fini, le corps $\mathbf{K}$ ne contient qu'un nombre fini, explicite, de sous-corps $\mathbf{K}_i$ strictement finis sur $\mathbb{Q}$. Si l'on choisit $x \in \mathbf{K}$ en dehors de la réunion de ces sous-corps (qui sont des sous-$\mathbb{Q}$-espaces vectoriels stricts), on a nécessairement $\mathbb{Q}[x] = \mathbf{K}$: c'est un sous-corps de $\mathbf{K}$ strictement fini sur $\mathbb{Q}$ et distinct de tous les $\mathbf{K}_i$. □

Élément cotransposé

Si $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang fini, on peut identifier $\mathbf{B}$ à une sous-algèbre commutative de $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(B)$, où B désigne le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$ privé de sa structure multiplicative, au moyen de l'homomorphisme $x \mapsto \mu_{\mathbf{B},x}$,

où $\mu_{\mathbf{B},x} = \mu_x$ est la multiplication par x dans $\mathbf{B}$. Alors, puisque $\widetilde{\mu}_x = G(\mu_x)$ pour un polynôme G de $\mathbf{A}[T]$ (lemme 1.4 point *6*), on peut définir $\widetilde{x}$ par l'égalité $\widetilde{x} = G(x)$, ou ce qui revient au même $\widetilde{\mu_x} = \mu_{\widetilde{x}}$. Si plus de précision est nécessaire, on utilisera la notation $\mathrm{Adj}_{\mathbf{B/A}}(x)$. Cet élément $\widetilde{x}$ s'appelle *l'élément cotransposé de x*. On a alors l'égalité importante :

$$x\ \widetilde{x} = x\ \ \mathrm{Adj}_{\mathbf{B/A}}(x) = \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(x). \tag{13}$$

Remarque. Notons aussi que les applications « norme de » et « élément cotransposé de » jouissent de propriétés de « $\mathbf{A}$-rationalité », qui résultent directement de leurs définitions : si $P \in \mathbf{B}[X_1, \ldots, X_k]$, alors en prenant les x_i dans $\mathbf{A}$, $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(P(x_1, \ldots, x_k)\big)$ et $\mathrm{Adj}_{\mathbf{B/A}}\big(P(x_1, \ldots, x_k)\big)$ sont donnés par des polynômes de $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_k]$.
En fait $\mathbf{B}[\underline{X}]$ est libre sur $\mathbf{A}[\underline{X}]$ avec la même base que celle de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$ et $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(P(\underline{x})\big)$ est donné par l'évaluation en $\underline{x}$ de $\mathrm{N}_{\mathbf{B}[\underline{X}]/\mathbf{A}[\underline{X}]}\big(P(\underline{X})\big)$ (même chose pour l'élément cotransposé). On utilisera par abus la notation $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(P(\underline{X})\big)$.
En outre, si $[\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,] = n$ et si P est homogène de degré d, alors $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}\big(P(\underline{X})\big)$ est homogène de degré nd et $\mathrm{Adj}_{\mathbf{B/A}}\big(P(\underline{X})\big)$ est homogène de degré $(n-1)\,d$.
∎

Anneau d'entiers d'un corps de nombres

Si $\mathbf{K}$ est un corps de nombres son *anneau d'entiers* est la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbf{K}$.

8.17. Proposition et définition. (Discriminant d'un corps de nombres)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps de nombres et* $\mathbf{Z}$ *son anneau d'entiers.*

1. *Un élément* y *de* $\mathbf{K}$ *est dans* $\mathbf{Z}$ *si, et seulement si,* $\mathrm{Min}_{\mathbb{Q},y}(X) \in \mathbb{Z}[X]$.
2. *On a* $\mathbf{K} = (\mathbb{N}^*)^{-1}\mathbf{Z}$.
3. *Supposons que* $\mathbf{K} = \mathbb{Q}[x]$ *avec* $x \in \mathbf{Z}$. *Soit* $f(X) = \mathrm{Min}_{\mathbb{Q},x}(X)$ *dans* $\mathbb{Z}[X]$ *et* Δ^2 *le plus grand facteur carré de* $\mathrm{disc}_X f$. *Alors,* $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}[x]$.
4. *L'anneau* $\mathbf{Z}$ *est un* $\mathbb{Z}$*-module libre de rang* $[\,\mathbf{K} : \mathbf{Q}\,]$.
5. *L'entier* $\mathrm{Disc}_{\mathbf{Z}/\mathbb{Z}}$ *est bien défini, on l'appelle le* discriminant du corps de nombres $\mathbf{K}$.

▷ *1.* Résulte du lemme 8.10 (théorème de Kronecker).
2. Soit $y \in \mathbf{K}$ et $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme non nul qui annule y. Si a est le coefficient dominant de g, ay est entier sur $\mathbb{Z}$.
3. Posons $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[x]$ et $n = [\,\mathbf{K} : \mathbf{Q}\,]$. Soit $z \in \mathbf{Z}$, que l'on écrit $h(x)/\delta$ avec $\delta \in \mathbb{N}^*$, $\langle\delta\rangle + \mathrm{c}(h) = \langle 1\rangle$ et $\deg h < n$. On a $\mathbf{A} + \mathbb{Z}z \subseteq \frac{1}{\delta}\mathbf{A}$ et il suffit donc de montrer que δ^2 divise $\mathrm{disc}_X(f)$. L'anneau $\mathbf{A}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n, avec la base $\mathcal{B}_0 = (1, x, \ldots, x^{n-1})$. La proposition 5.10 donne :

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbb{Z}} = \mathrm{disc}_{\mathbf{A}/\mathbb{Z}}(\mathcal{B}_0) = \mathrm{disc}_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathcal{B}_0) = \mathrm{disc}_X f.$$

Le $\mathbb{Z}$-module $M = \mathbf{A} + \mathbb{Z}z$ est également libre de rang n, avec une base $\mathcal{B}_1$, et l'on obtient les égalités

$$\mathrm{disc}_X f = \mathrm{disc}_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathcal{B}_0) = \mathrm{disc}_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}(\mathcal{B}_1) \times d^2,$$

où d est le déterminant de la matrice de $\mathcal{B}_0$ sur $\mathcal{B}_1$ (proposition II-5.33 *2*). Enfin $d = \pm\delta$ d'après le lemme 8.18 qui suit. Et l'on peut conclure.

4. On se place sans perte de généralité dans la situation du point *3.* Il n'y a qu'un nombre fini de $\mathbb{Z}$-modules de type fini entre $\mathbb{Z}[x]$ et $\frac{1}{\Delta}\mathbb{Z}[x]$. Et pour chacun d'entre eux on peut tester s'il est contenu dans $\mathbf{Z}$. Le plus grand possible est nécessairement égal à $\mathbf{Z}$. □

Remarques.

1) Comme corollaire, on voit que dans la situation du point *3*, si $\mathrm{disc}_X(f)$ est sans facteur carré, alors $\mathbf{Z} = \mathbb{Z}[x]$.

2) La démonstration du point *4* ne donne pas de moyen pratique pour calculer une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{Z}$. Pour quelques informations plus précises voir le problème 9 (lemme de la fourchette). En fait on ne connaît pas d'algorithme général « en temps polynomial » pour calculer une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{Z}$. ∎

8.18. Lemme. *Soient $N \subseteq M$ deux $\mathbf{A}$-modules libres de même rang n avec $M = N + \mathbf{A}z$. On suppose que pour un élément régulier $\delta \in \mathbf{A}$, on a $\delta z \in N$ et $\delta z = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de N. Alors, le déterminant d d'une matrice d'une base de N sur une base de M vérifie :*

$$d\,\langle \delta, a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle\delta\rangle \tag{14}$$

En particulier, $\langle \delta, a_1, \ldots, a_n\rangle$ est un idéal principal, et si δ, a_1, …, a_n sont comaximaux, alors $\langle d\rangle = \langle\delta\rangle$. En outre, $M/N \simeq \mathbf{A}/\langle d\rangle$.

D L'égalité (14) est laissée à la lectrice (voir l'exercice 20).

Il nous reste à montrer $M/N \simeq \mathbf{A}/\langle d\rangle$. En notant $\overline{z}$ la classe de z dans M/N, puisque $M/N \simeq \mathbf{A}\overline{z}$, on doit montrer que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(\overline{z}) = \langle d\rangle$, c'est-à-dire que $bz \in N \Leftrightarrow b \in \langle d\rangle$. Il est clair que $dz \in N$.

Si $bz \in N$, alors $b\delta z \in \delta N$, donc en écrivant $\delta z = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$, il vient $ba_i \in \langle\delta\rangle$, puis $b\,\langle \delta, a_1, \ldots, a_n\rangle \subseteq \langle\delta\rangle$. En multipliant par d et en simplifiant par δ, on obtient $b \in \langle d\rangle$. □

Théorie multiplicative des idéaux d'un corps de nombres

8.19. Définition. Un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau $\mathbf{A}$ est dit *inversible* s'il existe un idéal $\mathfrak{b}$ et un élément régulier a tels que $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a\rangle$.

8.20. Fait. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal inversible d'un anneau $\mathbf{A}$.*

1. *L'idéal $\mathfrak{a}$ est de type fini.*
2. *Si $\mathfrak{a}$ est engendré par k éléments et si $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a\rangle$ avec a régulier, alors $\mathfrak{b}$ est engendré par k éléments. En outre $\mathfrak{b} = (\langle a\rangle : \mathfrak{a})$.*

3. On a la règle $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\,\mathfrak{d} \;\Rightarrow\; \mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{d}$ *pour tous idéaux* $\mathfrak{c}$ *et* $\mathfrak{d}$.

4. Si $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ *il existe un unique* $\mathfrak{d}$ *tel que* $\mathfrak{d}\,\mathfrak{a} = \mathfrak{c}$*, à savoir* $\mathfrak{d} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a})$. *Et si* $\mathfrak{c}$ *est de type fini, il en va de même pour* $\mathfrak{d}$.

▷ *3.* Si $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}\,\mathfrak{d}$ en multipliant par $\mathfrak{b}$ on obtient $a\,\mathfrak{c} \subseteq a\,\mathfrak{d}$. Et puisque a est régulier, cela implique $\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{d}$.
1. Si $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a\rangle$, on trouve deux idéaux de type fini $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}$ tels que $a \in \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1$ et donc $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a\rangle \subseteq \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. On en déduit les égalités $\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. D'où $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1$ d'après le point *3*. De même, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1$.
2. Si $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_k\rangle$, on trouve $b_1, \ldots, b_k \in \mathfrak{b}$ tels que $\sum_i a_i b_i = a$.
En raisonnant comme au point *1* avec $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}_1 = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$ on obtient l'égalité $\mathfrak{b} = \langle b_1, \ldots, b_k\rangle$. Puisque $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a\rangle$, on a $\mathfrak{b} \subseteq (\langle a\rangle : \mathfrak{a})$. Réciproquement, si $x\mathfrak{a} \subseteq \langle a\rangle$, alors $x\,\langle a\rangle = x\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \subseteq a\,\mathfrak{b}$, donc $ax = ab$ pour un $b \in \mathfrak{b}$ et $x \in \mathfrak{b}$ car a est régulier.
4. De $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a\rangle$ on déduit $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} \subseteq \langle a\rangle$. Tous les éléments de $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$ étant multiples de a, en les divisant par a on obtient un idéal $\mathfrak{d}$, que l'on note $\frac{1}{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$, et avec lequel on obtient l'égalité $\mathfrak{a}\,\mathfrak{d} = \frac{1}{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{a} = \frac{1}{a}\,\mathfrak{c}\,\langle a\rangle = \mathfrak{c}$ car a est régulier.
Si $\mathfrak{c}$ est de type fini, $\mathfrak{d}$ est engendré par les éléments obtenus en divisant chaque générateur de $\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$ par a.
L'unicité de $\mathfrak{d}$ résulte du point *3*.
Il reste à montrer que $\mathfrak{d} = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a})$. L'inclusion $\mathfrak{d} \subseteq (\mathfrak{c} : \mathfrak{a})$ est immédiate. Réciproquement, si $x\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$, alors $x\,\langle a\rangle \subseteq \mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$, donc $x \in \frac{1}{a}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{b} = \mathfrak{d}$. □

Le théorème suivant est le théorème clé dans la théorie multiplicative des idéaux de corps de nombres. Nous en donnons deux démonstrations. Auparavant nous convions le lecteur à visiter le problème 3 qui donne le petit théorème de Kummer, lequel résout à moindres frais la question pour « presque tous » les idéaux de type fini des corps de nombres. Le problème 5 est également instructif car il donne une preuve directe de l'inversibilité de tous les idéaux de type fini non nuls ainsi que de leur décomposition unique en produit de « facteurs premiers » pour l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{1}]$.

8.21. Théorème. (Inversibilité des idéaux d'un corps de nombres)
Tout idéal de type fini non nul de l'anneau d'entiers $\mathbf{Z}$ *d'un corps de nombres* $\mathbf{K}$ *est inversible.*

▷ *Première démonstration.* (à la Kronecker [6])
Prenons par exemple $\mathfrak{a} = \langle \alpha, \beta, \gamma\rangle$. Notons $\mathbf{A} = \mathbb{Q}[X]$ et $\mathbf{B} = \mathbf{K}[X]$. L'algèbre $\mathbf{B}$ est libre sur $\mathbf{A}$ avec la même base que celle de $\mathbf{K}$ sur $\mathbb{Q}$. On considère le polynôme $g = \alpha + \beta X + \gamma X^2$ qui vérifie $\mathrm{c}_{\mathbf{Z}}(g) = \mathfrak{a}$. Puisque α, β, γ sont entiers sur $\mathbb{Z}$, g est entier sur $\mathbb{Z}[X]$. Soit $h(X) = \mathrm{Adj}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(g)$ l'élément cotransposé de g. On sait que h s'exprime comme un polynôme en g et en les

6. En fait Kronecker n'utilise pas l'*élément cotransposé* de $\alpha + \beta X + \gamma X^2$ (selon la définition que nous avons donnée), mais le produit de tous les conjugués de $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$ dans une extension galoisienne. Ceci introduit une légère variation dans la démonstration.

coefficients du polynôme caractéristique de g. En appliquant le corollaire 8.6 on en déduit que h est à coefficients dans $\mathbf{Z}$. Notons $\mathfrak{b}$ l'idéal de type fini de $\mathbf{Z}$ engendré par les coefficients de h. On a $gh = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(g) \in \mathbf{Z}[X] \cap \mathbb{Q}[X] = \mathbb{Z}[X]$. Soit d le pgcd des coefficients de gh. La proposition 8.13 nous dit qu'un élément arbitraire de $\mathbf{Z}$ divise d si, et seulement si, il divise tous les éléments de $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. En particulier, $d\mathbf{Z} \supseteq \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. Vu la relation de Bézout qui exprime d en fonction des coefficients de gh on a aussi $d \in \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. Donc $d\mathbf{Z} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$.
Deuxième démonstration. (à la Dedekind)
Tout d'abord on remarque qu'il suffit de savoir inverser les idéaux à deux générateurs en vertu de la remarque suivante. Pour trois idéaux arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ dans un anneau on a toujours l'égalité

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{c}+\mathfrak{a}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}\mathfrak{b}+\mathfrak{b}\mathfrak{c}+\mathfrak{a}\mathfrak{c}),$$

donc, si l'on sait inverser les idéaux à k générateurs ($k \geqslant 2$), on sait également inverser les idéaux à $k+1$ générateurs.
On considère donc un idéal $\langle \alpha, \beta \rangle$ avec $\alpha \neq 0$. Comme α est entier sur $\mathbb{Z}$, on peut trouver $\overline{\alpha} \in \mathbf{Z}$ tel que $\overline{\alpha}\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ainsi, quitte à remplacer (α, β) par $(\overline{\alpha}\alpha, \overline{\alpha}\beta)$, on se restreint à l'étude d'un idéal $\langle a, \beta \rangle$ avec $(a, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbf{Z}$. Soit $f \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire s'annulant en β. On écrit

$$f(X) = (X-\beta)h(X), \text{ où } h \in \mathbf{Z}[X]\,.$$

On a donc $f(aX) = (aX-\beta)h(aX)$, que l'on réécrit $f_1 = g_1 h_1$. Soit alors d le pgcd des coefficients de f_1 dans $\mathbb{Z}$. Avec $\mathfrak{b} = \mathrm{c}_{\mathbf{Z}}(h_1)$ et $\mathfrak{a} = \mathrm{c}_{\mathbf{Z}}(g_1) = \langle a, \beta \rangle$, on a clairement $d \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Par ailleurs, la proposition 8.13 nous dit qu'un élément arbitraire de $\mathbf{Z}$ divise tous les éléments de $\mathrm{c}_{\mathbf{Z}}(f_1) = \langle d \rangle$ si, et seulement si, il divise tous les éléments de l'idéal produit $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. En particulier, d divise tous les éléments de $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$. Ainsi $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \langle d \rangle$. □

Le théorème suivant montre que les idéaux de type fini d'un corps de nombres se comportent vis à vis des opérations élémentaires (somme, intersection, produit, division exacte) de manière essentiellement équivalente aux idéaux principaux de $\mathbb{Z}$, lesquels traduisent de façon très précise la théorie de la divisibilité pour les entiers naturels.
Rappelons que dans la bijection $n \mapsto n\mathbb{Z}$ ($n \in \mathbb{N}$, $n\mathbb{Z}$ idéal de type fini de $\mathbb{Z}$), le produit correspond au produit, la divisibilité à l'inclusion, le pgcd à la somme, le ppcm à l'intersection et la division exacte au transporteur.

8.22. Théorème. (Les idéaux de type fini d'un corps de nombres)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps de nombres et* $\mathbf{Z}$ *son anneau d'entiers.*

1. *Si* $\mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{c}$ *sont deux idéaux arbitraires, et si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini non nul de* $\mathbf{Z}$*, on a l'implication :*

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\,\mathfrak{c} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}\,.$$

2. *Si* $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{c}$ *sont deux idéaux de type fini, il existe un idéal de type fini* $\mathfrak{a}$ *tel que* $\mathfrak{a}\,\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$.

3. L'ensemble des idéaux de type fini de $\mathbf{Z}$ *est stable par intersections finies et l'on a les égalités suivantes (où* $\mathfrak{a}$*,* $\mathfrak{b}$*,* $\mathfrak{c}$ *désignent des idéaux de type fini de* $\mathbf{Z}$*) :*

a. $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}\,,$

b. $\mathfrak{a}\cap(\mathfrak{b}+\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c})\,,$

c. $\mathfrak{a}+(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})\,,$

d. $\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})\cap(\mathfrak{a}\mathfrak{c})\,,$

e. $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^n = \mathfrak{a}^n+\mathfrak{b}^n \quad (n\in\mathbb{N})\,.$

4. Si $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini non nul de* $\mathbf{Z}$ *l'anneau* $\mathbf{Z}/\mathfrak{a}$ *est fini. En particulier, on a des tests pour décider :*
- *si un* $x\in\mathbf{Z}$ *est dans* $\mathfrak{a}$*,*
- *si un* $x\in\mathbf{Z}$ *est inversible modulo* $\mathfrak{a}$*,*
- *si* $\mathfrak{a}$ *est contenu dans un autre idéal de type fini* $\mathfrak{b}$*,*
- *si* $\mathbf{Z}/\mathfrak{a}$ *est un corps discret (on dit alors que* $\mathfrak{a}$ *est un idéal maximal détachable).*

5. Tout idéal de type fini distinct de $\langle 0\rangle$ *et* $\langle 1\rangle$ *est égal à un produit d'idéaux maximaux inversibles détachables, et cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.*

D *1* et *2.* D'après le fait 8.20.

3. Si l'un des idéaux de type fini est nul tout est clair. On les suppose dans la suite non nuls.

3a. Soit $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{c}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Puisque $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, on obtient l'inclusion $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{c}$ (simplification par $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$). Inversement, $\mathfrak{c}\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{b}$ (simplification par $\mathfrak{a}$). De même $\mathfrak{c}\subseteq\mathfrak{a}$.

3c. On multiplie les deux membres par $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c} = (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})+(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$. Le membre de droite donne $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})$.
Le membre de gauche donne $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})+\mathfrak{a}(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})+(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}\cap\mathfrak{c})$.
Dans les deux cas cela fait $\mathfrak{a}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c})+\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.

3b. Les idéaux de type fini forment pour l'inclusion un treillis (le sup est la somme et le inf est l'intersection). On vient de voir qu'une des lois est distributive par rapport à l'autre. Il est classique dans un treillis que cela implique l'autre distributivité (voir page 633).

3d. L'application $\mathfrak{x}\mapsto\mathfrak{a}\mathfrak{x}$ (de l'ensemble des idéaux de type fini vers l'ensemble des idéaux de type fini multiples de $\mathfrak{a}$) est un isomorphisme pour la structure d'ordre d'après le point *1* Ceci implique qu'elle transforme le inf en le inf. Il suffit donc d'établir que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}\cap\mathfrak{a}\mathfrak{c}$ est multiple de $\mathfrak{a}$. Cela résulte du point *2.*

3e. Par exemple avec $n=3$, $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^3 = \mathfrak{a}^3+\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}+\mathfrak{a}\mathfrak{b}^2+\mathfrak{b}^3$.
En multipliant $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^3$ et $\mathfrak{a}^3+\mathfrak{b}^3$ par $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^2$ on trouve dans les deux cas $\mathfrak{a}^5+\mathfrak{a}^4\mathfrak{b}+\cdots+\mathfrak{a}\mathfrak{b}^4+\mathfrak{b}^5$.

4. On regarde $\mathbf{Z}$ comme un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $n = [\,\mathbf{K} : \mathbb{Q}\,]$. On se convainc facilement qu'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ contenant l'entier $m \neq 0$ peut être explicité comme un sous $\mathbb{Z}$-module de type fini de $\mathbb{Z}^n$ contenant $m\mathbb{Z}^n$.
5. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini $\neq \langle 0\rangle, \langle 1\rangle$. Les idéaux maximaux de type fini de $\mathbf{Z}$ contenant $\mathfrak{a}$ sont obtenus en déterminant les idéaux maximaux de type fini de $\mathbf{Z}/\mathfrak{a}$ (ce qui est possible parce que l'anneau $\mathbf{Z}/\mathfrak{a}$ est fini). Si $\mathfrak{p}$ est un idéal maximal de type fini contenant $\mathfrak{a}$, on peut écrire $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{p}$. En outre, on a l'égalité $|\,\mathbf{Z} : \mathfrak{a}\,| = |\,\mathbf{Z} : \mathfrak{b}\,|\,|\,\mathfrak{b} : \mathfrak{a}\,|$. On obtient alors la décomposition en produit d'idéaux maximaux de type fini par récurrence sur $|\,\mathbf{Z} : \mathfrak{a}\,|$. L'unicité résulte du fait que si un idéal maximal de type fini $\mathfrak{p}$ contient un produit d'idéaux maximaux de type fini, il est forcément égal à l'un d'entre eux, car sinon il serait comaximal avec le produit. □

Nous terminons cette section par quelques généralités concernant *les idéaux qui évitent le conducteur*. La situation en théorie des nombres est la suivante. On a un corps de nombres $\mathbf{K} = \mathbb{Q}[\alpha]$ avec α entier sur $\mathbb{Z}$. On note $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers de $\mathbf{K}$, c'est-à-dire la clôture intégrale de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbf{K}$. Bien que ce soit en principe possible, il n'est pas toujours facile d'obtenir une base de $\mathbf{Z}$ comme $\mathbb{Z}$-module, ni d'étudier la structure du monoïde (multiplicatif) des idéaux de type fini de $\mathbf{Z}$.
On suppose que l'on dispose d'un anneau $\mathbf{Z}'$ qui constitue une approximation de $\mathbf{Z}$ en ce sens que $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbf{Z}' \subseteq \mathbf{Z}$. Par exemple en un premier temps $\mathbf{Z}' = \mathbb{Z}[\alpha]$. On est intéressé par la structure multiplicative du groupe des idéaux fractionnaires de $\mathbf{Z}$([7]), et l'on veut s'appuyer sur celle de $\mathbf{Z}'$ pour l'étudier en détail.
Le théorème qui suit dit que « cela marche très bien pour la plupart des idéaux, c'est-à-dire pour tous ceux qui évitent le conducteur de $\mathbf{Z}'$ dans $\mathbf{Z}$ ».

8.23. Définition.
Soient deux anneaux $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathbf{B}$.

1. Le *conducteur de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$ est $(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = \{\, x \in \mathbf{B} \mid x\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \,\}$.
2. L'*extension de* $\mathfrak{a}$ est l'idéal $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ de $\mathbf{B}$.
3. La *contraction de* $\mathfrak{b}$ est l'idéal $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$.

Remarque. La terminologie concernant le conducteur est flottante. Des auteurs disent « conducteur de $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{A}$ » là où nous disons « conducteur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ ». Pour eux, conducteur est synonyme de transporteur. En théorie des nombres, Dedekind a introduit la notion de conducteur en tant qu'idéal attaché au « petit anneau » (un sous-anneau $\mathbf{A}$ de l'anneau d'entiers $\mathbf{Z}$ d'un corps de nombres, avec même corps de fractions). ■

7. Un idéal fractionnaire de $\mathbf{Z}$ est un sous-$\mathbf{Z}$-module de $\mathbf{K}$ de la forme $\frac{1}{m}\,\mathfrak{a}$ pour un $m \in \mathbb{Z}^\star$ et un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{Z}$, cf. page 583.

8.24. Théorème. (Théorème de Dedekind, idéaux qui évitent le conducteur) *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *deux anneaux et* $\mathfrak{f}$ *le conducteur de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$.

1. *L'idéal* $\mathfrak{f}$ *est l'annulateur du* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{B}/\mathbf{A}$. *C'est à la fois un idéal de* $\mathbf{A}$ *et un idéal de* $\mathbf{B}$*, et c'est le plus grand idéal pour cette propriété.*

On note $\mathcal{A}$ *(resp.* $\mathcal{B}$*) la classe des idéaux de* $\mathbf{A}$ *(resp. de* $\mathbf{B}$*) comaximaux à* $\mathfrak{f}$.

2. *Pour* $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$*, on a* $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$ *et pour* $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$*, on a* $\mathbf{B}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$.
3. $\mathcal{A}$ *est stable par multiplication, somme, intersection et vérifie :*
$$\mathfrak{a} \in \mathcal{A},\ \mathfrak{a}' \supseteq \mathfrak{a} \quad \Longrightarrow \quad \mathfrak{a}' \in \mathcal{A}.$$
En particulier, $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{A}$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{a}_1$ *et* $\mathfrak{a}_2 \in \mathcal{A}$*. Les mêmes propriétés sont valables pour* $\mathcal{B}$.
4. *L'extension et la contraction, restreintes respectivement à* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$*, sont deux correspondances réciproques l'une de l'autre. Elles préservent la multiplication, l'inclusion, l'intersection et le caractère de type fini.*
5. *On suppose* $\mathbf{B}$ *intègre. Alors, un idéal* $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$ *est inversible dans* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ *l'est dans* $\mathbf{B}$*. De même, un idéal* $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ *est inversible dans* $\mathbf{B}$ *si, et seulement si,* $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ *l'est dans* $\mathbf{A}$.

▷ On montre seulement quelques propriétés. Remarquons que l'on a toujours les inclusions $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A} \cap \mathfrak{a}\mathbf{B}$ et $(\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} \subseteq \mathfrak{b}$.
Soit $\mathfrak{a} \in \mathcal{A}$, donc $1 = a + f$ avec $a \in \mathfrak{a}$ et $f \in \mathfrak{f}$; a fortiori, $1 \in \mathfrak{a}\mathbf{B} + \mathfrak{f}$. Montrons que $\mathbf{A} \cap \mathfrak{a}\mathbf{B} = \mathfrak{a}$. On prend $x \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{a}\mathbf{B}$ et l'on écrit
$$x = xf + xa \in \mathfrak{a}\mathbf{B}\mathfrak{f} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}\mathbf{A} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a}\,.$$
D'où le résultat. On voit aussi que $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathfrak{a}\mathbf{B}$, donc le morphisme composé $\mathbf{A} \to \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$ est surjectif de noyau $\mathfrak{a}$, ce qui donne un isomorphisme $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$.
Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$, donc $1 = b + f$ avec $b \in \mathfrak{b}$, $f \in \mathfrak{f}$. Puisque $\mathfrak{f} \subseteq \mathbf{A}$, on a $b \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ donc $1 \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b} + \mathfrak{f}$. Montrons que $(\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} = \mathfrak{b}$.
Si $x \in \mathfrak{b}$, alors :
$$x = (b+f)x = bx + xf \in (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} + \mathfrak{b}\mathfrak{f} \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B} + \mathbf{A} \cap \mathfrak{b} \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B}.$$
Ainsi $\mathfrak{b} \subseteq (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B}$ puis $\mathfrak{b} = (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b})\mathbf{B}$. De plus, puisque $\mathbf{B} = \mathfrak{b} + \mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{b} + \mathbf{A}$, le morphisme composé $\mathbf{A} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est surjectif, de noyau $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$, ce qui donne un isomorphisme $\mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}$.
L'extension est multiplicative, donc la contraction (restreinte à $\mathcal{B}$) qui est son inverse, est également multiplicative. La contraction est compatible avec l'intersection, donc l'extension (restreinte à $\mathcal{A}$) qui est son inverse, est également compatible avec l'intersection.
Soit $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_n \rangle_{\mathbf{B}} \in \mathcal{B}$. Montrons que $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ est de type fini.
On écrit $1 = a + f^2$ avec $a \in \mathfrak{b}$, $f \in \mathfrak{f}$. Puisque $f \in \mathbf{A}$, on a $a \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$. Montrons que $(a, fb_1, \dots, fb_n)$ est un système générateur de $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$.
Soit $x \in \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ que l'on écrit $x = \sum_i y_i b_i$ avec $y_i \in \mathbf{B}$, alors :

$$x = \sum_i (y_i a + y_i f^2) b_i = xa + \sum_i (y_i f) f b_i \in \langle a, fb_1, \ldots, fb_n \rangle_{\mathbf{A}} .$$

Pour un idéal $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ (non nécessairement de type fini), on a en fait montré le résultat suivant : si $1 = a + f^2$ avec $a \in \mathfrak{b}$ et $f \in \mathfrak{f}$, alors $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} = \mathbf{A}a + f(f\mathfrak{b})$ (et $f\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathbf{A}$).
Soit $\mathfrak{b} \in \mathcal{B}$ un idéal inversible, montrons que $\mathfrak{a} = \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$ est un idéal inversible.
On écrit $1 = a + f$ avec $a \in \mathfrak{b}$ et $f \in \mathfrak{f}$, de sorte que $a \in \mathfrak{a}$.
Si $a = 0$, alors $1 = f \in \mathfrak{f}$, donc $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ et il n'y a rien à montrer. Sinon, a est régulier et il existe un idéal $\mathfrak{b}'$ de $\mathbf{B}$ tel que $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathbf{B}$.
Puisque les idéaux $a\mathbf{B}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ sont comaximaux à $\mathfrak{f}$, on peut appliquer le caractère multiplicatif de la contraction à l'égalité $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathbf{B}$ pour obtenir l'égalité $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = a\mathbf{A}$ avec $\mathfrak{a}' = \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}'$. □

9. Le Nullstellensatz de Hilbert

Nous illustrons dans cette section l'importance du résultant en montrant comment on peut en déduire le Nullstellensatz de Hilbert. Nous utiliserons une généralisation du lemme d'élimination de base.

Clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ et des corps finis

Soient $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ des corps discrets, on dit que $\mathbf{L}$ *est une clôture algébrique de* $\mathbf{K}$ si $\mathbf{L}$ est algébrique sur $\mathbf{K}$ et algébriquement clos.
La lectrice nous accordera que $\mathbb{Q}$ et les corps $\mathbb{F}_p$ possèdent une clôture algébrique. Ceci sera discuté plus en détail dans la section VI-1, avec notamment le théorème VI-1.18.

Le Nullstellensatz classique (cas algébriquement clos)

Le Nullstellensatz est un théorème qui concerne les systèmes d'équations polynomiales sur un corps discret. De manière très informelle sa signification peut être décrite comme suit : une affirmation de nature géométrique possède nécessairement un certificat algébrique. Ou encore : une démonstration en algèbre commutative peut (presque) toujours, si elle est suffisamment générale, être résumée par de simples identités algébriques.
Si l'on a des corps discrets $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$, et si $(\underline{f}) = (f_1, \ldots, f_s)$ est un système de polynômes dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{K}[\underline{X}]$, on dit que $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\underline{\xi})$ est un *zéro de* $(\underline{f})$ *dans* $\mathbf{L}^n$, ou encore un *zéro de* $(\underline{f})$ *à coordonnées dans* $\mathbf{L}$, si les équations $f_i(\underline{\xi}) = 0$ sont satisfaites. Notons $\mathfrak{f} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathbf{K}[\underline{X}]}$. Alors, tous les polynômes $g \in \mathfrak{f}$ s'annulent en un tel $(\underline{\xi})$. On parle donc aussi bien de $(\underline{\xi})$ comme *zéro de l'idéal* $\mathfrak{f}$ *dans* $\mathbf{L}^n$, ou *à coordonnées dans* $\mathbf{L}$.
Nous commençons par un fait presque évident.

9.1. Fait. *Soit* $\mathbf{k}$ *un anneau commutatif et* $h \in \mathbf{k}[X]$ *un polynôme unitaire de degré* $\geqslant 1$.

— *Si un multiple de* h *est dans* $\mathbf{k}$, *ce multiple est nul.*

— *Soient* f *et* $g \in \mathbf{k}[X]$ *de degrés formels* p *et* q. *Si* h *divise* f *et* g, *alors* $\mathrm{Res}_X(f,p,g,q) = 0$.

Voici maintenant une généralisation du lemme d'élimination de base 7.5.

9.2. Lemme. (Élimination d'une variable entre plusieurs polynômes)
Soient f, g_1, …, $g_r \in \mathbf{k}[X]$ $(r \geqslant 1)$, *avec* f *unitaire de degré* d.
On pose $\mathfrak{f} = \langle f, g_1, \dots, g_r\rangle$ *et* $\mathfrak{a} = \mathfrak{f} \cap \mathbf{k}$ *(c'est l'idéal d'élimination de la variable* X *dans* $\mathfrak{f}$*). On pose aussi :*

$$g(T,X) = g_1 + Tg_2 + \cdots + T^{r-1}g_r \in \mathbf{k}[T,X],$$
$$R(T) = R(f,g_1,\dots,g_r)(T) = \mathrm{Res}_X\big(f, g(T,X)\big) \in \mathbf{k}[T],$$
$$\mathfrak{b} = \mathfrak{R}(f,g_1,\dots,g_r) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{c}_{\mathbf{k},T}\big(R(f,g_1,\dots,g_r)(T)\big) \subseteq \mathbf{k}.$$

1. *L'idéal* $\mathfrak{b}$ *est engendré par* $d(r-1)+1$ *éléments et l'on a les inclusions :*

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}} = \sqrt{\mathfrak{a}}\,. \tag{15}$$

Plus précisément, posons $e_i = 1 + (d-i)(r-1)$, $i \in [\![1..d]\!]$, *alors pour des éléments arbitraires* a_1, …, $a_d \in \mathfrak{a}$, *on a :*

$$a_1^{e_1}a_2^{e_2}\cdots a_d^{e_d} \in \mathfrak{R}(f,g_1,\dots,g_r)\,.$$

En particulier, on a les équivalences suivantes.

$$1 \in \mathfrak{b} \iff 1 \in \mathfrak{a} \iff 1 \in \mathfrak{f}\,. \tag{16}$$

2. *Si* $\mathbf{k}$ *est un corps discret contenu dans un corps algébriquement clos discret* $\mathbf{L}$, *notons* h *le pgcd unitaire de* f, g_1, …, g_r *et* V *l'ensemble des zéros de* $\mathfrak{f}$ *dans* $\mathbf{L}^n$. *Alors, on a les équivalences suivantes :*

$$1 \in \mathfrak{b} \iff 1 \in \mathfrak{a} \iff 1 \in \mathfrak{f} \iff h = 1 \iff V = \emptyset \tag{17}$$

▷ *1.* On sait que $R(T)$ s'écrit

$$u(T,X)f(X) + v(T,X)g(T,X),$$

donc chaque coefficient de $R(T)$ est une combinaison linéaire de f et des g_i dans $\mathbf{k}[X]$. Ceci donne l'inclusion $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. L'inégalité $\deg_T(R) \leqslant d(r-1)$ donne la majoration pour le nombre de générateurs de $\mathfrak{b}$.
Si f_1, …, f_d sont d polynômes (à une indéterminée) de degré $< r$, on déduit du lemme de Dedekind-Mertens (voir corollaire 2.2) l'inclusion suivante.

$$(\star) \qquad \mathrm{c}(f_1)^{e_1}\mathrm{c}(f_2)^{e_2}\cdots\mathrm{c}(f_d)^{e_d} \subseteq \mathrm{c}(f_1f_2\cdots f_d).$$

Supposons $f(X) = (X-x_1)\cdots(X-x_d)$. On pose alors, pour $i \in [\![1..d]\!]$,

$$f_i(T) = g_1(x_i) + g_2(x_i)T + \cdots + g_r(x_i)T^{r-1},$$

de sorte que $f_1f_2\cdots f_d = \mathrm{Res}_X(f, g_1 + g_2T + \cdots + g_rT^{r-1})$.
Ainsi, pour $a_j \in \mathfrak{a} = \langle f, g_1, \dots, g_r\rangle_{\mathbf{k}[X]} \cap \mathbf{k}$, en évaluant en x_i, on ob-

tient $a_j \in \langle g_1(x_i), \ldots, g_r(x_i)\rangle = \mathrm{c}(f_i)$. En appliquant l'inclusion $(\star)$ on obtient l'appartenance $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_d^{e_d} \in \mathfrak{b}$.
Passons au cas général. On considère l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{k}' = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$. Le calcul précédent vaut pour $\mathbf{k}'$. Comme $\mathbf{k}' = \mathbf{k} \oplus E$ en tant que $\mathbf{k}$-module, on a l'égalité $(\mathfrak{b}\mathbf{k}') \cap \mathbf{k} = \mathfrak{b}$. Pour des $a_j \in \mathfrak{a}$, cela permet de conclure que $a_1^{e_1} a_2^{e_2} \cdots a_d^{e_d} \in \mathfrak{b}$, car le produit est dans $(\mathfrak{b}\mathbf{k}') \cap \mathbf{k}$.
2. Par définition du pgcd, on a $\mathfrak{f} = \langle h\rangle$. Par ailleurs, $h = 1 \Leftrightarrow V = \emptyset$. Donc tout est clair d'après le point *1.*
Voici cependant pour ce cas particulier une démonstration plus directe, qui donne l'origine de la démonstration magique du point 1.
Supposons que h soit égal à 1 ; alors dans ce cas $1 \in \mathfrak{f}$ et $1 \in \mathfrak{a}$. Supposons ensuite que h soit de degré $\geqslant 1$; alors $\mathfrak{a} = \langle 0\rangle$. On a donc obtenu les équivalences $1 \in \mathfrak{a} \iff 1 \in \mathfrak{f} \iff \deg(h) = 0$ et $\mathfrak{a} = \langle 0\rangle \iff \deg(h) \geqslant 1$.
Montrons maintenant l'équivalence $\deg(h) \geqslant 1 \iff \mathfrak{b} = \langle 0\rangle$.
Si $\deg(h) \geqslant 1$, alors $h(X)$ divise $g(T, X)$, donc $R(f, g_1, \ldots, g_r)(T) = 0$ (fait 9.1), i.e. $\mathfrak{b} = \langle 0\rangle$.
Inversement, supposons $\mathfrak{b} = \langle 0\rangle$. Alors, pour toute valeur du paramètre $t \in \mathbf{L}$, les polynômes $f(X)$ et $g(t, X)$ ont un zéro en commun dans $\mathbf{L}$ (f est unitaire et le résultant des deux polynômes est nul).
Considérons les zéros $\xi_1, \ldots, \xi_d \in \mathbf{L}$ de f. En prenant $d(r-1)+1$ valeurs distinctes de t, on trouvera un ξ_ℓ tel que $g(t, \xi_\ell) = 0$ pour au moins r valeurs de t. Ceci implique que $g(T, \xi_\ell)$ est identiquement nul, i.e. ξ_ℓ annule tous les g_i, et que h est multiple de $X - \xi_\ell$ donc $\deg(h) \geqslant 1$. □

Le point *2* du lemme 9.2 donne le corollaire suivant.

9.3. Corollaire. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret non trivial contenu dans un corps algébriquement clos* $\mathbf{L}$. *Reprenons les hypothèses du lemme 9.2, avec l'anneau* $\mathbf{k} = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$. *Alors, pour* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{L}^{n-1}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Il existe* $\xi \in \mathbf{L}$ *tel que* (α, ξ) *annule* $(f, g_1, \ldots, g_r)$.
2. α *est un zéro de l'idéal* $\mathfrak{b} = \mathfrak{R}(f, g_1, \ldots, g_r) \subseteq \mathbf{k}$.

Précisions : si le degré total des générateurs de $\mathfrak{f}$ *est majoré par* d, *on obtient comme générateurs de* $\mathfrak{b}$, $d(r-1)+1$ *polynômes de degré total majoré par* $2d^2$.

Remarque. Le corollaire précédent a la structure voulue pour enchaîner une récurrence qui nous permet une description des zéros de $\mathfrak{f}$ dans $\mathbf{L}^n$.
En effet, en partant de l'idéal de type fini $\mathfrak{f} \subseteq \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ on produit un idéal de type fini $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{k}$ avec la propriété suivante : *les zéros de* $\mathfrak{f}$ *dans* $\mathbf{L}^n$ *se projettent exactement sur les zéros de* $\mathfrak{b}$ *dans* $\mathbf{L}^{n-1}$. Plus précisément au dessus de chaque zéro de $\mathfrak{b}$ dans $\mathbf{L}^{n-1}$ se trouve un nombre fini, non nul, majoré par $\deg_{X_n}(f)$ de zéros de $\mathfrak{f}$ dans $\mathbf{L}^n$.
Donc ou bien tous les générateurs de $\mathfrak{b}$ sont nuls et le processus décrivant les

zéros de $\mathfrak{f}$ est terminé, ou bien un des générateurs de $\mathfrak{b}$ est non nul et l'on est près à faire à $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ ce que l'on a fait à $\mathfrak{f} \subseteq \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *à condition toutefois de trouver* un polynôme unitaire en X_{n-1} dans l'idéal $\mathfrak{b}$. Cette dernière question est réglée par le lemme de changement de variables suivant. ∎

9.4. Lemme. (Lemme de changements de variables)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret infini et* $g \neq 0$ *dans* $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *de degré* d. *Il existe* $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1}$ *tel que le polynôme*

$$g(X_1 + a_1 X_n, \ldots, X_{n-1} + a_{n-1} X_n, X_n)$$

soit de la forme $aX_n^d + h$ *avec* $a \in \mathbf{K}^\times$ *et* $\deg_{X_n} h < d$.

▷ Soit g_d la composante homogène de degré d de g. Alors :

$$g(X_1 + a_1 X_n, \ldots, X_{n-1} + a_{n-1} X_n, X_n) = g_d(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) X_n^d + h,$$

avec $\deg_{X_n} h < d$. Comme $g_d(X_1, \ldots, X_n)$ est homogène non nul, le polynôme $g_d(X_1, \ldots, X_{n-1}, 1)$ est non nul. Il existe donc $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1}$ tel que $g_d(a_1, \ldots, a_{n-1}, 1) \neq 0$. □

On obtient maintenant un « Nullstellensatz faible » (c'est-à-dire l'équivalence entre $V = \emptyset$ et $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle 1 \rangle$ dans le théorème) et une « mise en position de Noether » qui donne une description de V dans le cas non vide.

9.5. Théorème. (Nullstellensatz faible et mise en position de Noether)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret infini contenu dans un corps algébriquement clos* $\mathbf{L}$ *et* $(f_1, \ldots, f_s)$ *un système polynomial dans* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$.
Notons $\mathfrak{f} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle_{\mathbf{K}[\underline{X}]}$ *et* V *la variété des zéros de* $\mathfrak{f}$ *dans* $\mathbf{L}^n$.

1. *Ou bien* $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle = \langle 1 \rangle$, *et* $V = \emptyset$.
2. *Ou bien* $V \neq \emptyset$. *Alors, il existe un entier* $r \in [\![0..n]\!]$, *un changement de variables* $\mathbf{K}$*-linéaire (les nouvelles variables sont notées* $Y_1, \ldots, Y_n$*), et des idéaux de type fini* $\mathfrak{f}_j \subseteq \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_j]$ $(j \in [\![r..n]\!])$, *qui satisfont les propriétés suivantes.*
   - *On a* $\mathfrak{f} \cap \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r] = 0$. *Autrement dit, l'anneau* $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$ *s'identifie à un sous-anneau du quotient* $\mathbf{K}[\underline{X}]/\mathfrak{f}$.
   - *Chaque* Y_j $(j \in [\![r+1..n]\!])$ *est entier sur* $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$ *modulo* $\mathfrak{f}$. *Autrement dit l'anneau* $\mathbf{K}[\underline{X}]/\mathfrak{f}$ *est entier sur le sous-anneau* $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$.
   - *On a les inclusions* $\langle 0 \rangle = \mathfrak{f}_r \subseteq \mathfrak{f}_{r+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{f}_{n-1} \subseteq \mathfrak{f}$ *et pour chaque* $j \in [\![r..n]\!]$ *l'égalité* $\sqrt{\mathfrak{f}} \cap \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_j] = \sqrt{\mathfrak{f}_j}$.
   - *Pour les nouvelles coordonnées correspondant aux* Y_i, *soit* π_j *la projection* $\mathbf{L}^n \to \mathbf{L}^j$ *qui oublie les dernières coordonnées (*$j \in [\![1..n]\!]$*). Pour chaque* $j \in [\![r..n-1]\!]$ *la projection de la variété* $V \subseteq \mathbf{L}^n$ *sur* $\mathbf{L}^j$ *est exactement la variété* V_j *des zéros de* $\mathfrak{f}_j$. *En outre, pour chaque élément* α *de* V_j, *la fibre* $\pi_j^{-1}(\alpha)$ *est finie, non vide, avec un nombre d'éléments uniformément borné.*

En particulier :

- *Ou bien V est vide (et l'on peut convenir de $r = -1$).*
- *Ou bien V est finie non vide, $r = 0$ et les coordonnées des points de V sont algébriques sur $\mathbf{K}$.*
- *Ou bien $r \geqslant 1$ et la projection π_r envoie surjectivement la variété V sur $\mathbf{L}^r$ (donc V est infinie). Dans ce cas, si $\alpha \in \mathbf{K}^r$, les coordonnées des points de $\pi_r^{-1}(\alpha)$ sont algébriques sur $\mathbf{K}$.*

D On raisonne comme on l'a indiqué dans la remarque précédant le lemme de changement de variables. Notons que la première étape du processus n'a lieu que si le système polynomial de départ est non nul, auquel cas la première opération consiste en un changement de variables linéaire qui rend l'un des f_i unitaire en Y_n. □

Remarques.
1) Le nombre r ci-dessus correspond au nombre maximum d'indéterminées pour un anneau de polynômes $\mathbf{K}[Z_1, \ldots, Z_r]$ qui soit isomorphe à une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de $\mathbf{K}[\underline{X}]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$. Ceci est relié à la théorie de la dimension de Krull qui sera exposée au chapitre XIII (voir notamment le théorème XIII-5.4).
2) Supposons que les degrés des f_j soient majorés par d.
En s'appuyant sur le résultat énoncé à la fin du corollaire 9.3, on peut donner des précisions dans le théorème précédent en calculant a priori, uniquement en fonction des entiers n, s, j et d,

- d'une part une majoration pour le nombre de générateurs pour chaque idéal $\mathfrak{f}_j$,
- d'autre part une majoration pour les degrés de ces générateurs.

3) Le calcul des idéaux $\mathfrak{f}_j$ ainsi que toutes les affirmations du théorème qui ne concernent pas la variété V sont valables même lorsque l'on ne connaît pas de corps algébriquement clos $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{K}$. On utilise pour cela seulement les lemmes 9.2 et 9.4. On reprendra ceci dans les théorèmes VII-1.1 et VII-1.5. ■

La restriction introduite par l'hypothèse « $\mathbf{K}$ est infini » va disparaître dans le Nullstellensatz classique en raison de la constatation suivante.

9.6. Fait. *Soit $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ des corps discrets et h, f_1, …, $f_s \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$, alors $h \in \langle f_1, \ldots, f_s\rangle_{\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n]} \iff h \in \langle f_1, \ldots, f_s\rangle_{\mathbf{L}[X_1,\ldots,X_n]}$.*

D En effet, une égalité $h = \sum_i a_i f_i$, une fois les degrés des a_i fixés, peut être vue comme un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients des a_i. Le fait qu'un système linéaire admet une solution ne dépend pas du corps dans lequel on cherche la solution, du moment qu'il contient les coefficients du système linéaire : la méthode du pivot est un processus entièrement rationnel. □

Comme corollaire du Nullstellensatz faible et du fait précédent on obtient le Nullstellensatz classique.

9.7. Théorème. (Nullstellensatz classique)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret contenu dans un corps algébriquement clos* $\mathbf{L}$ *et des polynômes* g, f_1, …, f_s *dans* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. *Notons* V *la variété des zéros de* $(f_1, \ldots, f_s)$ *dans* $\mathbf{L}^n$.

1. *Ou bien il existe un point* ξ *de* V *tel que* $g(\xi) \neq 0$.
2. *Ou bien il existe un entier* N *tel que* $g^N \in \langle f_1, \ldots, f_s\rangle_{\mathbf{K}[\underline{X}]}$.

D Le cas $g = 0$ est clair, on suppose $g \neq 0$. On applique *l'astuce de Rabinovitch*, c'est-à-dire on introduit une indéterminée supplémentaire T et l'on remarque que g s'annule aux zéros de $(f_1, \ldots, f_s)$ si, et seulement si, le système $(1 - gT, f_1, \ldots, f_s)$ n'admet pas de solution. On applique alors le Nullstellensatz faible à ce nouveau système polynomial, avec $\mathbf{L}$ (qui est infini) à la place de $\mathbf{K}$. On obtient dans $\mathbf{K}[\underline{X}][T]$ (grâce au fait 9.6) une égalité

$$\big(1 - g(\underline{X})T\big)a(\underline{X}, T) + f_1(\underline{X})b_1(\underline{X}, T) + \cdots + f_s(\underline{X})b_s(\underline{X}, T) = 1.$$

Dans le localisé $\mathbf{K}[\underline{X}][1/g]$, on réalise la substitution $T = 1/g$. Plus précisément, en restant dans $\mathbf{K}[\underline{X}, T]$, si N est le plus grand des degrés en T des b_i, on multiplie l'égalité précédente par g^N et l'on remplace dans $g^N b_i(\underline{X}, T)$ chaque $g^N T^k$ par g^{N-k} modulo $(1 - gT)$. On obtient alors une égalité

$$\big(1 - g(\underline{X})T\big)a_1(\underline{X}, T) + f_1(\underline{X})c_1(\underline{X}) + \cdots + f_s(\underline{X})c_s(\underline{X}) = g^N,$$

dans laquelle nécessairement $a_1 = 0$, puisque, si l'on regarde a_1 dans $\mathbf{K}[\underline{X}][T]$, son coefficient formellement dominant en T est nul. □

Remarque. On notera que la séparation des différents cas dans les théorèmes 9.5 et 9.7 est explicite. ∎

9.8. Corollaire. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret contenu dans un corps algébriquement clos* $\mathbf{L}$ *et deux idéaux de type fini* $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_s\rangle$, $\mathfrak{b}$ *de* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. *Soit* $\mathbf{K}_0$ *le sous-corps de* $\mathbf{K}$ *engendré par les coefficients des* f_i.
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{K}[\underline{X}]}(\mathfrak{a})$.
2. $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{L}[\underline{X}]}(\mathfrak{a})$.
3. *Tout zéro de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathbf{L}^n$ *est un zéro de* $\mathfrak{b}$.
4. *Pour tout sous-corps* $\mathbf{K}_1$ *de* $\mathbf{L}$ *fini sur* $\mathbf{K}_0$, *tout zéro de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathbf{K}_1^n$ *est un zéro de* $\mathfrak{b}$.

En particulier, $\mathrm{D}_{\mathbf{K}[\underline{X}]}(\mathfrak{a}) = \mathrm{D}_{\mathbf{K}[\underline{X}]}(\mathfrak{b})$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *ont les mêmes zéros dans* $\mathbf{L}^n$.

D Conséquence immédiate du Nullstellensatz. □

Le Nullstellensatz formel

Nous passons maintenant à un *Nullstellensatz formel*, formel en ce sens qu'il s'applique (en mathématiques classiques) à un idéal arbitraire sur un anneau arbitraire. Néanmoins pour avoir un énoncé constructif nous nous contenterons d'un anneau de polynômes $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ pour notre anneau arbitraire et d'un idéal de type fini pour notre idéal arbitraire.
Cela peut sembler très restrictif, mais la pratique montre que ce n'est pas le cas, en raison du fait que l'on peut (presque) toujours appliquer la méthode des coefficients indéterminés à un problème d'algèbre commutative, méthode qui ramène le problème à un problème polynomial sur $\mathbb{Z}$. Une illustration en sera donnée ensuite.
Notons que pour lire l'énoncé, lorsque l'on parle d'un zéro d'un $f_i \in \mathbb{Z}[\underline{X}]$ sur un anneau $\mathbf{A}$, il faut d'abord voir f_i modulo $\operatorname{Ker}\varphi$, où φ est l'unique homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbf{A}$, d'image $\mathbf{A}_1 \simeq \mathbb{Z}/\operatorname{Ker}\varphi$. On se ramène ainsi à un polynôme $\overline{f_i}$ de $\mathbf{A}_1[\underline{X}] \subseteq \mathbf{A}[\underline{X}]$.

9.9. Théorème. (Nullstellensatz sur $\mathbb{Z}$, Nullstellensatz formel)
On écrit $\mathbb{Z}[\underline{X}] = \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ On considère g, f_1, …, f_s dans $\mathbb{Z}[\underline{X}]$

1. *Pour le système $(f_1, \ldots, f_s)$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. $1 \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.
   b. *Le système n'admet de zéro sur aucun corps discret non trivial.*
   c. *Le système n'admet de zéro sur aucun corps fini et sur aucune extension finie de $\mathbb{Q}$.*
   d. *Le système n'admet de zéro sur aucun corps fini.*
2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. $\exists N \in \mathbb{N},\ g^N \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.
   b. *Le polynôme g s'annule aux zéros du système $(f_1, \ldots, f_s)$ sur n'importe quel corps discret.*
   c. *Le polynôme g s'annule aux zéros du système $(f_1, \ldots, f_s)$ sur tout corps fini et sur toute extension finie de $\mathbb{Q}$.*
   d. *Le polynôme g s'annule aux zéros du système $(f_1, \ldots, f_s)$ sur tout corps fini.*

D Il suffit de démontrer la version faible *1*, car on passe ensuite à la version générale *2* en appliquant l'astuce de Rabinovitch. Pour ce qui concerne la version faible, la chose difficile est l'implication $d \Rightarrow a$.

Voyons d'abord $c \Rightarrow a$. On applique le Nullstellensatz faible en considérant $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$. Cela donne une appartenance :

$$m \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbb{Z}[\underline{X}]} \quad \text{avec } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \qquad (\star_{\mathbb{Q}}).$$

En appliquant le Nullstellensatz faible avec une clôture algébrique $\mathbf{L}_p$ de $\mathbb{F}_p$ on obtient aussi pour chaque nombre premier $p \mid m$ une appartenance :

$$1 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbb{Z}[\underline{X}]} + p\mathbb{Z}[\underline{X}] \qquad (\star_{\mathbb{F}_p}).$$

Or dans n'importe quel anneau, pour trois idéaux quelconques $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$, on a l'inclusion $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}) \subseteq \mathfrak{a}+\mathfrak{bc}$. En écrivant le m ci-dessus dans $(\star_{\mathbb{Q}})$ sous forme $\prod_j p_j^{k_j}$ avec les p_j premiers, on obtient donc

$$1 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbb{Z}[\underline{X}]} + m\mathbb{Z}[\underline{X}].$$

Cette appartenance, jointe à $(\star_{\mathbb{Q}})$, fournit $1 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbb{Z}[\underline{X}]}$.

$d \Rightarrow c$. Nous montrons qu'un zéro $(\underline{\xi})$ du système $(f_1, \dots, f_s)$ dans une extension finie de $\mathbb{Q}$ donne lieu à un zéro de $(f_1, \dots, f_s)$ dans une extension finie de $\mathbb{F}_p$ pour tous les nombres premiers, à l'exception d'un nombre fini d'entre eux.

En effet, soit $\mathbf{Q} = \mathbb{Q}[\alpha] \simeq \mathbb{Q}[X]/\langle h(X)\rangle$ (avec h unitaire irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$) une extension finie de $\mathbb{Q}$ et $(\underline{\xi}) \in \mathbf{Q}^n$ un zéro de $(f_1, \dots, f_s)$. Si $\xi_j = q_j(\alpha)$ avec $q_j \in \mathbb{Q}[X]$ pour $j \in [\![1..n]\!]$, cela signifie que

$$f_i(q_1, \dots, q_n) \equiv 0 \bmod h \quad \text{dans } \mathbb{Q}[X],\ i \in [\![1..s]\!].$$

Ceci reste vrai dans $\mathbb{F}_p[X]$ dès qu'aucun des dénominateurs figurant dans les q_j n'est multiple de p, à condition de prendre les fractions dans $\mathbb{F}_p$:

$$\overline{f_i}(\overline{q_1}, \dots, \overline{q_n}) \equiv 0 \bmod \overline{h} \quad \text{dans } \mathbb{F}_p[X],\ i \in [\![1..s]\!].$$

Pour un tel p, on prend un diviseur unitaire irréductible $h_p(X)$ de $\overline{h}(X)$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ et l'on considère le corps fini $\mathbf{F} = \mathbb{F}_p[X]/\langle h_p(X)\rangle$ avec α_p la classe de X. Alors, $\big(q_1(\alpha_p), \dots, q_n(\alpha_p)\big)$ est un zéro de $(f_1, \dots, f_s)$ dans $\mathbf{F}^n$. □

On a le corollaire immédiat suivant, avec des idéaux de type fini.

9.10. Corollaire. (Nullstellensatz sur $\mathbb{Z}$, Nullstellensatz formel, 2)
On écrit $\mathbb{Z}[\underline{X}] = \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$. Pour deux idéaux de type fini $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de $\mathbb{Z}[\underline{X}]$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathrm{D}_{\mathbb{Z}[\underline{X}]}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbb{Z}[\underline{X}]}(\mathfrak{b})$.
2. $\mathrm{D}_{\mathbf{K}}\big(\varphi(\mathfrak{a})\big) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{K}}\big(\varphi(\mathfrak{b})\big)$ *pour tout corps discret* $\mathbf{K}$ *et tout homomorphisme* $\varphi : \mathbb{Z}[\underline{X}] \to \mathbf{K}$.
3. *Même chose en se limitant aux extensions algébriques de* $\mathbb{Q}$ *et aux corps finis.*
4. *Même chose en se limitant aux corps finis.*

Un exemple d'application

Nous considérons le résultat suivant déjà démontré dans le lemme II-2.6 : *Un élément f de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est inversible si, et seulement si, $f(\underline{0})$ est inversible et $f - f(\underline{0})$ est nilpotent. Autrement dit* $\mathbf{A}[\underline{X}]^\times = \mathbf{A}^\times + \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)[\underline{X}]$.
On peut supposer que $fg = 1$ avec $f = 1 + Xf_1$ et $g = 1 + Xg_1$. On considère les coefficients de f_1 et g_1 comme des indéterminées. On est ramené à montrer le résultat suivant.
Une égalité $f_1 + g_1 + Xf_1g_1 = 0$ $(*)$ *implique que les coefficients de f_1 sont nilpotents.*
Or lorsque les indéterminées sont évaluées dans un corps, les coefficients de f_1 s'annulent aux zéros du système polynomial en les indéterminées donné par l'égalité $(*)$. On conclut par le Nullstellensatz formel.
Si l'on compare à la démonstration donnée pour le point *4* du lemme II-2.6, on peut constater que celle donnée ici est à la fois plus simple (pas besoin de trouver un calcul un peu subtil) et plus savante (utilisation du Nullstellensatz formel).
Note. D'autre exemples sont donnés dans l'exercice 29 et le problème XV-1.
∎

10. La méthode de Newton en algèbre

Soit $\mathbf{k}$ un anneau et $f_1, \ldots, f_s \in \mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. La *matrice jacobienne* du système est la matrice

$$\mathrm{JAC}_{X_1,\ldots,X_n}(f_1, \ldots, f_s) = \Big(\frac{\partial f_i}{\partial X_j}\Big)_{i\in[\![1..s]\!],j\in[\![1..n]\!]} \in \mathbf{k}[\underline{X}]^{s\times n}.$$

Celle-ci est encore notée $\mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f})$ ou $\mathrm{JAC}(\underline{f})$. On la visualise comme ceci :

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ f_i \\ \\ f_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial X_1} & \frac{\partial f_s}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial X_n} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Si $s = n$, on note $\mathrm{Jac}_{\underline{X}}(\underline{f})$ ou $\mathrm{Jac}_{X_1,\ldots,X_n}(f_1, \ldots, f_n)$ ou $\mathrm{Jac}(\underline{f})$ le *jacobien* du système $(\underline{f})$, c'est-à-dire le déterminant de la matrice jacobienne.
En analyse la méthode de Newton pour approcher un zéro d'une fonction différentiable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la suivante. On part d'un point x_0 qui est «proche d'une racine», en lequel la dérivée est «loin de 0» et l'on construit

une suite $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ par récurrence en posant

$$x_{m+1} = x_m - \frac{f(x_m)}{f'(x_m)}.$$

La méthode se généralise pour un système de p équations à p inconnues. Une solution d'un tel système est un zéro d'une fonction $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$. On applique « la même formule » que ci-dessus :

$$x_{m+1} = x_m - f'(x_m)^{-1} \cdot f(x_m).$$

où $f'(x)$ est la différentielle (la matrice jacobienne) de f au point $x \in \mathbb{R}^p$, qui doit être inversible dans un voisinage de x_0.
Cette méthode, et d'autres méthodes du calcul infinitésimal, s'appliquent dans certains cas également en algèbre, en remplaçant les infiniment petits leibniziens par des éléments nilpotents.
Si par exemple $\mathbf{A}$ est une $\mathbb{Q}$-algèbre et $x \in \mathbf{A}$ est nilpotent, la série formelle

$$1 + x + x^2/2 + x^3/6 + \dots$$

qui définit $\exp(x)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls dans $\mathbf{A}$ et définit donc un élément $1 + y$ avec y nilpotent. Comme l'égalité

$$\exp(x + x') = \exp(x)\exp(x'),$$

parce qu'elle a lieu en analyse, valide la même formule au niveau des séries formelles sur $\mathbb{Q}$, on obtiendra lorsque x et x' sont nilpotents dans $\mathbf{A}$ la même égalité dans $\mathbf{A}$. De même la série formelle

$$y - y^2/2 + y^3/3 - \dots,$$

qui définit $\log(1 + y)$, n'a qu'un nombre fini de termes dans $\mathbf{A}$ lorsque y est nilpotent et permet de définir $\log(1 + y)$ comme un élément nilpotent de $\mathbf{A}$.
En outre, pour x et y nilpotents, on obtient les égalités $\log\big(\exp(x)\big) = x$ et $\exp\big(\log(1+y)\big) = 1+y$ comme conséquences des égalités correspondantes pour les séries formelles.
Dans le même style on obtient facilement, en utilisant la série formelle inverse de $1 - x$, le résultat suivant.

10.1. Lemme. (Lemme des éléments résiduellement inversibles)

1. *Si $ef \equiv 1$ modulo le nilradical, alors e est inversible et*
$$e^{-1} = f \sum_{k\geqslant 0}(1 - ef)^k.$$
2. *Une matrice carrée $E \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ inversible modulo le nilradical est inversible. Supposons que $d\det(E) \equiv 1$ modulo le nilradical.*
Posons $F = d\widetilde{E}$ (où $\widetilde{E}$ est la matrice cotransposée de E). Alors, E^{-1} est dans le sous-anneau de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ engendré par les coefficients du polynôme caractéristique de E, d et E.
Plus précisément, la matrice $\mathrm{I}_n - EF = \big(1 - d\det(E)\big)\mathrm{I}_n$ est nilpotente et
$$E^{-1} = F \sum_{k\geqslant 0}\big(1 - d\det(E)\big)^k.$$

Passons à la méthode de Newton.

10.2. Théorème. (Méthode de Newton linéaire)
Soient $\mathfrak{N}$ un idéal d'un anneau $\mathbf{A}$, $\underline{f} = {}^{\mathrm{t}}[\, f_1 \ \cdots \ f_n \,]$ un vecteur dont les coordonnées sont des polynômes dans $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$, et $\underline{a} = {}^{\mathrm{t}}(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbf{A}^n$ un zéro simple approché *du système au sens suivant.*

- *La matrice jacobienne $J(\underline{a})$ de $\underline{f}$ au point $\underline{a}$ est inversible modulo $\mathfrak{N}$; soit $U \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ un tel inverse.*
- *Le vecteur $\underline{f}(\underline{a})$ est nul modulo $\mathfrak{N}$.*

Considérons la suite $(\underline{a}^{(m)})_{m \geqslant 1}$ dans $\mathbf{A}^n$ définie par l'itération de Newton linéaire :

$$\underline{a}^{(1)} = \underline{a}, \quad \underline{a}^{(m+1)} = \underline{a}^{(m)} - U \cdot \underline{f}(\underline{a}^{(m)}).$$

a. *Cette suite satisfait les exigences $\mathfrak{N}$-adiques suivantes :*

$$\underline{a}^{(1)} \equiv \underline{a} \mod \mathfrak{N}, \text{ et } \forall m, \ \underline{a}^{(m+1)} \equiv \underline{a}^{(m)} \text{ et } \underline{f}(\underline{a}^{(m)}) \equiv 0 \mod \mathfrak{N}^m.$$

b. *Cette suite est unique au sens suivant, si $\underline{b}^{(m)}$ est une autre suite vérifiant les exigences du point a, alors pour tout m, $\underline{a}^{(m)} \equiv \underline{b}^{(m)} \mod \mathfrak{N}^m$.*

c. *Soit $\mathbf{A}_1$ le sous-anneau engendré par les coefficients des f_i, par ceux de U et par les coordonnées de $\underline{a}$. Dans cet anneau soit $\mathfrak{N}_1$ l'idéal engendré par les coefficients de $\mathrm{I}_n - UJ(\underline{a})$ et les coordonnées de $\underline{a}$. Si les générateurs de $\mathfrak{N}_1$ sont nilpotents, la suite converge en un nombre fini d'étapes vers un vrai zéro du système $\underline{f}$, et c'est l'unique zéro du système congru à $\underline{a}$ modulo $\mathfrak{N}_1$.*

Sous les mêmes hypothèses, on a la méthode quadratique suivante.

10.3. Théorème. (Méthode de Newton quadratique)
Définissons les suites $(\underline{a}^{(m)})_{m \geqslant 0}$ dans $\mathbf{A}^n$ et $(U^{(m)})_{m \geqslant 0}$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, par l'itération de Newton quadratique suivante :

$$\begin{aligned} &\underline{a}^{(0)} = \underline{a}, && \underline{a}^{(m+1)} = \underline{a}^{(m)} - U^{(m)} \cdot \underline{f}(\underline{a}^{(m)}), \\ &U^{(0)} = U, && U^{(m+1)} = U^{(m)} \left(2\mathrm{I}_n - J(\underline{a}^{(m+1)})U^{(m)}\right). \end{aligned}$$

Alors, on obtient pour tout m les congruences suivantes :

$$\begin{aligned} &\underline{a}^{(m+1)} \equiv \underline{a}^{(m)} \quad \text{et} \quad U^{(m+1)} \equiv U^{(m)} && \mod \mathfrak{N}^{2^m} \\ &\underline{f}(\underline{a}^{(m)}) \equiv 0 \quad \text{et} \quad U^{(m)} J(\underline{a}^{(m)}) \equiv \mathrm{I}_n && \mod \mathfrak{N}^{2^m}. \end{aligned}$$

Nous laissons les démonstrations au lecteur (cf. [96]) en remarquant que l'itération concernant l'inverse de la matrice jacobienne peut être justifiée par la méthode de Newton linéaire ou par le calcul suivant dans un anneau non nécessairement commutatif :

$$(1 - ab)^2 = 1 - ab' \quad \text{avec} \quad b' = b(2 - ab).$$

10.4. Corollaire. (Lemme des idempotents résiduels)

1. *Pour tout anneau commutatif* $\mathbf{A}$ *:*
   a. *deux idempotents égaux modulo* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) = \sqrt{\langle 0\rangle}$ *sont égaux,*
   b. *tout idempotent* e *modulo un idéal* $\mathfrak{N}$ *se relève de manière unique en un idempotent* e' *modulo* $\mathfrak{N}^2$*. L'itération de Newton quadratique est donnée par* $e \mapsto 3e^2 - 2e^3$*.*
2. *De même toute matrice* $E \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ *idempotente modulo* $\mathfrak{N}$ *se relève en une matrice* F *idempotente modulo* $\mathfrak{N}^2$*. Le « relèvement» F est unique si l'on exige que* $F \in \mathbf{A}[E]$*. L'itération de Newton quadratique est donnée par* $E \mapsto 3E^2 - 2E^3$*.*

▷ *1a.* Laissé à la lectrice. Une version plus forte est démontrée dans le lemme IX-5.1.
1b. Considérer le polynôme $T^2 - T$, et noter que $2e - 1$ est inversible modulo $\mathfrak{N}$ puisque $(2e-1)^2 = 1$ modulo $\mathfrak{N}$.
2. On applique le point *1* avec l'anneau commutatif $\mathbf{A}[E] \subseteq \mathrm{End}(\mathbf{A}^n)$. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. *(Interpolation de Lagrange)* Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif.

1. Soient $f, g \in \mathbf{A}[X]$ et $a_1, \ldots, a_k$ des éléments de $\mathbf{A}$ tels que $a_i - a_j \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$ pour $i \neq j$.
   a. Si les a_i sont des zéros de f, f est multiple de $(X - a_1)\cdots(X - a_k)$.
   b. Si $f(a_i) = g(a_i)$ pour $i \in [\![1..k]\!]$ et si $\deg(f - g) < k$, alors $f = g$.
2. Si $\mathbf{A}$ est intègre et infini, l'élément f de $\mathbf{A}[X]$ est caractérisé par la fonction polynomiale qu'il définit sur $\mathbf{A}$.
3. *(Polynôme d'interpolation de Lagrange)* Soient $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{A}$ tels que les $x_i - x_j \in \mathbf{A}^\times$ (pour $i \neq j$). Alors, pour $(y_0, \ldots, y_n)$ dans $\mathbf{A}$ il existe exactement un polynôme f de degré $\leqslant n$ tel que pour chaque $j \in [\![0..n]\!]$ on ait $f(x_j) = y_j$.
   Plus précisément, le polynôme f_i de degré $\leqslant n$ tel que $f_i(x_i) = 1$ et $f_i(x_j) = 0$ pour $j \neq i$ est égal à
   $$f_i = \frac{\prod_{j\in[\![0..n]\!], j\neq i}(X - x_j)}{\prod_{j\in[\![0..n]\!], j\neq i}(x_i - x_j)},$$
   et le polynôme d'interpolation f ci-dessus est égal à $\sum_{i\in[\![0..n]\!]} y_i f_i$.
4. Avec les mêmes hypothèses, en posant $h = (X - x_0)\cdots(X - x_n)$, on obtient un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres : $\mathbf{A}[X]/\langle h\rangle \to \mathbf{A}^{n+1}$, $\overline{g} \mapsto \big(g(x_0), \ldots, g(x_n)\big)$.
5. Interprétez les résultats précédents avec l'algèbre linéaire (matrice et déterminant de Vandermonde) et avec le théorème des restes chinois (utilisez les idéaux deux à deux comaximaux $\langle X - x_i\rangle$).

Exercice 2. *(Générateurs de l'idéal d'un ensemble fini)* Voir aussi l'exercice XIV-4. Soit $\mathbf{K}$ un corps discret et $V \subset \mathbf{K}^n$ un ensemble fini. On va montrer que l'idéal $\mathfrak{a}(V) = \{ f \in \mathbf{K}[\underline{x}] \mid \forall\ w \in V,\ f(w) = 0 \}$ est engendré par n éléments (notez que cette borne ne dépend pas de $\#V$ et que le résultat est clair pour $n = 1$). On note $\pi_n : \mathbf{K}^n \to \mathbf{K}$ la n-ième projection et pour chaque $\xi \in \pi_n(V)$,

$$V_\xi = \left\{ (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in \mathbf{K}^{n-1} \mid (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi) \in V \right\}.$$

1. Soit $U \subset \mathbf{K}$ une partie finie et pour chaque $\xi \in U$, un polynôme
$$Q_\xi \in \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_{n-1}].$$
Expliciter un polynôme $Q \in \mathbf{K}[\underline{x}]$ vérifiant $Q(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi) = Q_\xi$ pour tout $\xi \in U$.

2. Soit $V \subset \mathbf{K}^n$ une partie telle que $\pi_n(V)$ soit finie. On suppose que pour chaque $\xi \in \pi_n(V)$, l'idéal $\mathfrak{a}(V_\xi)$ est engendré par m polynômes. Montrer que $\mathfrak{a}(V)$ est engendré par $m + 1$ polynômes. Conclure.

Exercice 3. *(Démonstration détaillée du théorème 1.5)*
On considère l'anneau $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{A}[\underline{X}]$ et l'on note $S_1, \ldots, S_n$ les fonctions symétriques élémentaires de $\underline{X}$. Tous les polynômes considérés sont des polynômes formels, car on ne suppose pas que $\mathbf{A}$ est discret. On introduit un autre jeu d'indéterminées, $(\underline{s}) = (s_1, \ldots, s_n)$, et sur l'anneau $\mathbf{A}[\underline{s}]$ on définit le poids δ par $\delta(s_i) = i$ (un polynôme formellement non nul a un poids formel bien défini). On note $\varphi : \mathbf{A}[\underline{s}] \to \mathbf{A}[\underline{X}]$ l'homomorphisme d'évaluation défini par $\varphi(s_i) = S_i$.
On considère sur les monômes de $\mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ l'ordre `deglex` pour lequel deux monômes sont d'abord comparés selon leur degré total, puis ensuite selon l'ordre lexicographique avec $X_1 > \cdots > X_n$. Ceci fournit pour un $f \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ (formellement non nul) une notion de *monôme formellement dominant* que l'on note $\mathrm{md}(f)$. Cet « ordre monomial » est clairement isomorphe à $(\mathbb{N}, \leqslant)$.

0. Vérifier que tout polynôme symétrique (i.e. invariant par l'action de S_n) de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est égal à un polynôme formellement symétrique, i.e. invariant par l'action de S_n en tant que polynôme formel.
1. (Injectivité de φ)
Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un exposant décroissant ($\alpha_1 \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n$).
On pose $\beta_i = \alpha_i - \alpha_{i+1}$ ($i \in [\![1..n-1]\!]$). Montrer que

$$\mathrm{md}(S_1^{\beta_1} S_2^{\beta_2} \cdots S_{n-1}^{\beta_{n-1}} S_n^{\alpha_n}) = X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_n^{\alpha_n}.$$

En déduire que φ est injectif.
2. (Fin de la démonstration des points 1. et 2. du théorème 1.5) Soit $f \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ un polynôme formellement symétrique, formellement non nul, et $\underline{X}^\alpha = \mathrm{md}(f)$.

— Montrer que α est décroissant. En déduire un algorithme pour écrire tout polynôme symétrique de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ comme un polynôme en $(S_1, \ldots, S_n)$ à coefficients dans $\mathbf{A}$, i.e. dans l'image de φ. La terminaison de l'algorithme peut être prouvée par récurrence sur l'ordre monomial, isomorphe à $\mathbb{N}$.
— À titre d'exemple, écrire le symétrisé du monôme $X_1^4 X_2^2 X_3$ dans $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_4]$ comme polynôme en les S_i.

3. (Démonstration du point 3. du théorème)
- Soit $g(T) \in \mathbf{B}[T]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$. Montrer que $\mathbf{B}[T]$ est un $\mathbf{B}[g]$-module libre de base $(1, T, \ldots, T^{n-1})$.
  En déduire que $\mathbf{A}[S_1, \ldots, S_{n-1}][X_n]$ est un module libre sur $\mathbf{A}[S_1, \ldots, S_{n-1}][S_n]$, de base $(1, X_n, \ldots, X_n^{n-1})$.
- On note $\underline{S}' = (S'_1, \ldots, S'_{n-1})$ les fonctions symétriques élémentaires des variables $(X_1, \ldots, X_{n-1})$. Montrer que $\mathbf{A}[\underline{S}', X_n] = \mathbf{A}[S_1, \ldots, S_{n-1}, X_n]$.
- Déduire des deux points précédents que $\mathbf{A}[\underline{S}', X_n]$ est un $\mathbf{A}[\underline{S}]$-module libre de base $(1, X_n, \ldots, X_n^{n-1})$.
- Conclure par récurrence sur n que la famille
$$\{\, X^\alpha \mid \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n,\ \forall k \in [\![1..n]\!],\ \alpha_k < k \,\}$$
forme une base de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ sur $\mathbf{A}[\underline{S}]$.

4. (Une autre démonstration du point 3 du théorème, et même plus, après avoir lu la section 4) Montrer que $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est canoniquement isomorphe à l'algèbre de décomposition universelle du polynôme $t^n + \sum_{k=1}^n (-1)^k s_k t^{n-k}$ sur l'anneau $\mathbf{A}[s_1, \ldots, s_n]$.

Exercice 4. On note S_1, …, $S_n \in \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ les n fonctions symétriques élémentaires.

1. Pour $n = 3$, vérifier que $X_1^3 + X_2^3 + X_3^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$. En déduire que pour tout n, $\sum_{i=1}^n X_i^3 = S_1^3 - 3S_1S_2 + 3S_3$.
2. En utilisant une méthode analogue à la question précédente, exprimer les polynômes $\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j$, $\sum_{i \neq j} X_i^3 X_j$, $\sum_{i<j} X_i^2 X_j^2$ à l'aide des fonctions symétriques élémentaires .
3. Énoncer un résultat général.

Exercice 5. *(Les sommes de Newton et les fonctions symétriques complètes)* On note $S_i \in \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ les fonctions symétriques élémentaires en convenant de prendre $S_i = 0$ pour $i > n$ et $S_0 = 1$.
Pour $r \geqslant 1$, on définit les *sommes de Newton* $P_r = X_1^r + \cdots + X_n^r$. On travaille dans l'anneau des séries formelles $\mathbf{A}[\underline{X}][[t]]$ et l'on introduit les séries
$$P(t) = \textstyle\sum_{r \geqslant 1} P_r\, t^r \quad \text{et} \quad E(t) = \sum_{r \geqslant 0} S_r\, t^r.$$

1. Vérifier l'égalité $P(t) = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{1 - X_i t}$.
2. Si $u \in \mathbf{B}[[t]]$ est inversible, on introduit sa dérivée logarithmique
$$D_{\log}(u) = u' u^{-1}.$$
On obtient ainsi un morphisme de groupes $D_{\log} : (\mathbf{B}[[t]]^\times, \times) \to (\mathbf{B}[[t]], +)$.
3. En utilisant la dérivée logarithmique, montrer la *relation de Newton* :
$$P(-t) = \tfrac{E'(t)}{E(t)}, \quad \text{ou encore } P(-t)E(t) = E'(t).$$
4. Pour $d \geqslant 1$, en déduire la formule de Newton :
$$\textstyle\sum_{r=1}^d (-1)^{r-1} P_r\, S_{d-r} = d\, S_d.$$

Pour $r \geqslant 0$, on définit la *fonction symétrique complète de degré r* par
$$H_r = \textstyle\sum_{|\alpha| = r} \underline{X}^\alpha.$$
Ainsi $H_1 = S_1$, $H_2 = \sum_{i \leqslant j} X_i X_j$, $H_3 = \sum_{i \leqslant j \leqslant k} X_i X_j X_k$. On définit la série :
$$H(t) = \textstyle\sum_{r \geqslant 1} H_r\, t^r.$$

5. Montrer l'égalité $H(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-X_i\,t}$.
6. En déduire l'égalité $H(t)\,E(-t) = 1$, puis pour $d \in [\![1..n]\!]$:
$$\sum_{r=0}^{d} (-1)^r S_r\, H_{d-r} = 0, \quad H_d \in \mathbf{A}[S_1, \ldots, S_d], \quad S_d \in \mathbf{A}[H_1, \ldots, H_d].$$
7. On considère l'homomorphisme $\varphi : \mathbf{A}[S_1, \ldots, S_n] \to \mathbf{A}[S_1, \ldots, S_n]$ défini par $\varphi(S_i) = H_i$. Montrer que $\varphi(H_d) = S_d$ pour $d \in [\![1..n]\!]$. Ainsi :
   — $\varphi \circ \varphi = \mathrm{I}_{\mathbf{A}[\underline{S}]}$,
   — H_1, …, H_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}$,
   — $\mathbf{A}[\underline{S}] = \mathbf{A}[\underline{H}]$, et l'expression de S_d en fonction de H_1, …, H_d est la même que celle de H_d en fonction de S_1, …, S_d.

Exercice 6. *(Formes équivalentes du lemme de Dedekind-Mertens)*
Les affirmations suivantes sont équivalentes (chacune des affirmations est universelle, i.e., valable pour tous polynômes et tous anneaux commutatifs) :
1. $\mathrm{c}(f) = \langle 1 \rangle \implies \mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(fg)$.
2. $\exists p \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{c}(f)^p \mathrm{c}(g) \subseteq \mathrm{c}(fg)$.
3. (Dedekind-Mertens, forme affaiblie) $\quad \exists p \in \mathbb{N}\ \ \mathrm{c}(f)^{p+1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^p \mathrm{c}(fg)$.
4. $\mathrm{Ann}\big(\mathrm{c}(f)\big) = 0 \implies \mathrm{Ann}\big(\mathrm{c}(fg)\big) = \mathrm{Ann}\big(\mathrm{c}(g)\big)$.
5. (McCoy) $\quad \big(\mathrm{Ann}(\mathrm{c}(f)\big) = 0,\ fg = 0) \implies g = 0$.
6. $(\mathrm{c}(f) = \langle 1 \rangle\,,\ fg = 0) \implies g = 0$.

Exercice 7. Soit $\mathfrak{c} = \mathrm{c}(f)$ le contenu de $f \in \mathbf{A}[T]$. Le lemme de Dedekind-Mertens donne : $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{c})[T] \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathfrak{c})\big)[T]$. Donner un exemple pour lequel il n'y a pas égalité.

Exercice 8. Déduire le théorème de Kronecker 3.3 du lemme de Dedekind-Mertens.

Exercice 9. *(Modules de Cauchy)* On peut donner une explication très précise pour le fait que l'idéal $\mathcal{J}(f)$ (définition 4.1) est égal à l'idéal engendré par les modules de Cauchy. Cela fonctionne avec une belle formule. Introduisons une nouvelle variable T. Démontrer les résultats suivants.

1. Dans $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n, T] = \mathbf{A}[\underline{X}, T]$, on a
$$\begin{aligned} f(T) \;=\; & f_1(X_1) + (T - X_1) f_2(X_1, X_2) + \\ & (T - X_1)(T - X_2) f_3(X_1, X_2, X_3) + \cdots + \\ & (T - X_1) \cdots (T - X_{n-1}) f_n(X_1, \ldots, X_n) + \\ & (T - X_1) \cdots (T - X_n) \end{aligned} \tag{18}$$
2. Dans le sous-$\mathbf{A}[\underline{X}]$-module de $\mathbf{A}[\underline{X}, T]$ formé par les polynômes de degré $\leqslant n$ en T, le polynôme $f(T) - (T - X_1) \cdots (T - X_n)$ possède deux expressions différentes :
   — D'une part, sur la base $(1, T, T^2, \ldots, T^n)$, il a pour coordonnées
   $$\big((-1)^n(s_n - S_n), \ldots, (s_2 - S_2), -(s_1 - S_1), 0\big).$$
   — D'autre part, sur la base
   $\big(1, (T - X_1), (T - X_1)(T - X_2), \ldots, (T - X_1) \cdots (T - X_n)\big)$,
   il a pour coordonnées $(f_1, f_2, \ldots, f_n, 0)$.

En conséquence sur l'anneau $\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$, chacun des deux vecteurs
$\big((-1)^n(s_n-S_n),\dots,(s_2-S_2),-(s_1-S_1)\big)$ et $(f_1,\dots,f_{n-1},f_n)$
s'exprime en fonction de l'autre au moyen d'une matrice unipotente (triangulaire avec des 1 sur la diagonale).

Exercice 10. *(Le polynôme X^p-a)* Soit $a\in\mathbf{A}^\times$ et p un nombre premier. On suppose que le polynôme X^p-a possède dans $\mathbf{A}[X]$ un diviseur unitaire non trivial. Montrer que a est une puissance p-ième dans $\mathbf{A}$.

Exercice 11. *(Avec le principe de prolongement des identités algébriques)*
Notons $S_n(\mathbf{A})$ le sous-module de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ constitué des matrices symétriques.
Pour $A\in S_n(\mathbf{A})$, notons φ_A l'endomorphisme de $S_n(\mathbf{A})$ défini par $S\mapsto {}^tASA$.
Calculer $\det(\varphi_A)$ en fonction de $\det(A)$. Montrer que C_{φ_A} ne dépend que de C_A.

Exercice 12. Soit $\mathbf{B}\supseteq\mathbf{A}$ une $\mathbf{A}$-algèbre intègre, libre de rang n, $\mathbf{K}=\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ et $\mathbf{L}=\mathrm{Frac}(\mathbf{B})$. Montrer que toute base de $\mathbf{B}/\mathbf{A}$ est une base de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$.

Exercice 13. Soient $f\in\mathbf{A}[X]$, $g\in\mathbf{A}[Y]$, $h\in\mathbf{A}[X,Y]$. Démontrer que
$$\mathrm{Res}_Y\big(g,\mathrm{Res}_X(f,h)\big)=\mathrm{Res}_X\big(f,\mathrm{Res}_Y(g,h)\big).$$

Exercice 14. *(Sommes de Newton et $\mathrm{Tr}(A^k)$)* Soit une matrice $A\in\mathbb{M}_n(\mathbf{B})$. On pose $\mathrm{C}_A(X)=X^n+\sum_{j=1}^n(-1)^j s_jX^{n-j}$, $s_0=1$ et $p_k=\mathrm{Tr}(A^k)$.
1. Montrer que les p_k et s_j sont reliés par les formules de Newton pour les sommes des puissances k-ièmes (exercice 5) : $\sum_{r=1}^d(-1)^{r-1}p_rs_{d-r}=ds_d$ $(d\in[\![1..n]\!])$.
2. Si $\mathrm{Tr}(A^k)=0$ pour $k\in[\![1..n]\!]$, et si $n!$ est régulier dans $\mathbf{B}$, alors $\mathrm{C}_A(X)=X^n$.
NB : cet exercice peut être considéré comme une variation sur le thème de la proposition 5.9.

Exercice 15. Soient $\mathbf{K}\subseteq\mathbf{L}$ deux corps finis, $q=\#\mathbf{K}$ et $n=[\,\mathbf{L}:\mathbf{K}\,]$. Le sous-anneau de $\mathbf{K}$ engendré par 1 est un corps $\mathbb{F}_p$ où p est un nombre premier, et $q=p^r$ pour un entier $r>0$. L'*automorphisme de Frobenius* de (la $\mathbf{K}$-extension) $\mathbf{L}$ est donné par $\sigma:\mathbf{L}\to\mathbf{L}$, $\sigma(x)=x^q$.
1. Soit R la réunion des racines dans $\mathbf{L}$ des $X^{q^d}-X$ avec $1\leqslant d<n$.
Montrer que $\#R<q^n$ et que pour $x\in\mathbf{L}\setminus R$, $\mathbf{L}=\mathbf{K}[x]$.
2. Ici $\mathbf{K}=\mathbb{F}_2$ et $\mathbf{L}=\mathbb{F}_2[X]/\langle\Phi_5(X)\rangle=\mathbb{F}_2[x]$ où $\Phi_5(X)$ est le polynôme cyclotomique $X^4+X^3+X^2+X+1$. Vérifier que $\mathbf{L}$ est bien un corps ; x est un élément primitif de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{K}$ mais n'est pas un générateur du groupe multiplicatif $\mathbf{L}^\times$.
3. Pour $x\in\mathbf{L}^\times$, notons $o(x)$ son ordre dans le groupe multiplicatif $\mathbf{L}^\times$. Montrer que $\mathbf{L}=\mathbf{K}[x]$ si, et seulement si, l'ordre de q dans le groupe $(\mathbb{Z}/\langle o(x)\rangle)^\times$ est n.

Exercice 16. Le but de cet exercice est de montrer que dans un corps discret le groupe des racines n-ièmes de l'unité est cyclique. En conséquence le groupe multiplicatif d'un corps fini est cyclique. On montre un résultat à peine plus général.
Montrer que dans un anneau commutatif non trivial $\mathbf{A}$, si des éléments $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ forment un groupe G pour la multiplication, et si x_i-x_j est régulier pour tout couple i,j $(i\neq j)$, alors G est cyclique.
Suggestion : d'après le théorème de structure des groupes abéliens finis, un groupe

abélien fini, noté additivement, dans lequel toute équation $dx = 0$ admet au plus d solutions est cyclique. Utilisez aussi l'exercice 1.

Exercice 17. *(Structure des corps finis, automorphisme de Frobenius)*
1. Démontrer que deux corps finis qui ont le même ordre sont isomorphes.
2. Si $\mathbf{F} \supseteq \mathbb{F}_p$ est un corps fini d'ordre p^r, montrer que $\tau : x \mapsto x^p$ définit un automorphisme de $\mathbf{F}$. On l'appelle l'*automorphisme de Frobenius*. Montrer le groupe des automorphismes de $\mathbf{F}$ est un groupe cyclique d'ordre r engendré par τ.
3. Dans le cas précédent, $\mathbf{F}$ est une extension galoisienne de $\mathbb{F}_p$. Préciser la correspondance galoisienne.
NB. On note souvent $\mathbb{F}_q$ un corps fini d'ordre q, tout en sachant qu'il s'agit d'une notation légèrement ambiguë si q n'est pas premier.

Exercice 18. *(Clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$)*
1. Pour chaque entier $r > 0$ construire un corps $\mathbb{F}_{p^{r!}}$ d'ordre $p^{r!}$. En procédant par récurrence on peut avoir une inclusion $\imath_r : \mathbb{F}_{p^{r!}} \hookrightarrow \mathbb{F}_{p^{(r+1)!}}$.
2. Construire un corps $\mathbb{F}_{p^\infty}$ en prenant la réunion des $\mathbb{F}_{p^{r!}}$ via les inclusions $\imath_r$. Montrer que $\mathbb{F}_{p^\infty}$ est un corps algébriquement clos qui contient une copie (unique) de chaque corps fini de caractéristique p.

Exercice 19. *(Ppcm de polynômes séparables)*
1. Soient x, x', y, $y' \in \mathbf{B}$. Montrer que $\langle x, x' \rangle \langle y, y' \rangle \langle x, y \rangle^2 \subseteq \langle xy, x'y + y'x \rangle$.
En déduire que le produit de deux polynômes unitaires séparables et comaximaux dans $\mathbf{A}[T]$ est un polynôme séparable.
2. Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, le ppcm de plusieurs polynômes séparables est séparable.

Exercice 20. *(Indice d'un sous-module de type fini dans un module libre)*
1. Soit $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$ et $E \subseteq \mathbf{A}^m$ le sous-module image de A. Montrer que $\mathcal{D}_m(A)$ ne dépend que de E. On appelle cet idéal l'*indice de E dans $L = \mathbf{A}^m$*, et on le note $|\, L : E \,|_{\mathbf{A}}$ (ou $|\, L : E \,|$). Remarquez que cet indice est nul dès que E ne s'approche pas suffisamment de L, par exemple si $n < m$.
Vérifier que, dans le cas où $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, on retrouve l'indice usuel du sous-groupe d'un groupe pour deux groupes abéliens libres de même rang.
2. Si $E \subseteq F$ sont des sous-modules de type fini de $L \simeq \mathbf{A}^m$, on a $|\, L : E \,| \subseteq |\, L : F \,|$.
3. Si en outre F est libre de rang m, on a la formule de transitivité
$$|\, L : E \,| = |\, L : F \,|\, |\, F : E \,|.$$
4. Si δ est un élément régulier de $\mathbf{A}$, on a $|\, \delta L : \delta E \,| = |\, L : E \,|$. En déduire l'égalité (14) page 136 annoncée dans le lemme 8.18.

Exercice 21. *(Précision sur le fait 8.20)* Soient dans un anneau $\mathbf{A}$ deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle a \rangle$ avec a régulier. Montrer que si $\mathfrak{a}$ est engendré par k éléments, on peut trouver dans $\mathfrak{b}$ un système générateur de k éléments.

Exercice 22. *(Décomposition d'un idéal en produit d'idéaux maximaux inversibles)* On considère un anneau intègre non trivial $\mathbf{A}$ *à divisibilité explicite*[8].

8. On dit qu'un anneau arbitraire est à divisibilité explicite lorsque l'on a un algorithme qui, pour a et $b \in \mathbf{A}$, teste si $\exists x$, $a = bx$, et en cas de réponse positive, fournit un x convenable.

1. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible et si $\mathfrak{b}$ est un idéal de type fini, il y a un test pour $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$.

Soient $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_n$ des idéaux maximaux (dans le sens que les quotients $\mathbf{A}/\mathfrak{q}_k$ dont des corps discrets non triviaux), un idéal de type fini $\mathfrak{b}$ et un élément a régulier de $\mathbf{A}$ vérifiant $a\mathbf{A} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{b}$.

2. Les $\mathfrak{q}_i$ sont inversibles et $\mathfrak{b}$ est le produit de certains des $\mathfrak{q}_i$ (et par suite il est inversible). En outre, cette décomposition de $\mathfrak{b}$ en produit d'idéaux maximaux de type fini est unique à l'ordre près des facteurs.

Exercice 23. *(Symbole de Legendre)*
Soit $\mathbf{k}$ un corps fini de cardinal q impair ; on définit le *symbole de Legendre*

$$\left(\frac{\bullet}{\mathbf{k}}\right) : \mathbf{k}^\times \longrightarrow \{\pm 1\},\ x \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est un carré dans } \mathbf{k}^\times, \\ -1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $\left(\frac{\cdot}{\mathbf{k}}\right)$ est un morphisme de groupes et que $\left(\frac{x}{\mathbf{k}}\right) = x^{\frac{q-1}{2}}$.
En particulier, -1 est un carré dans $\mathbf{k}^\times$ si, et seulement si, $q \equiv 1 \bmod 4$.
NB : si p est un nombre premier impair et x un entier étranger à p on retrouve sous la forme $\left(\frac{\overline{x}}{\mathbb{F}_p}\right)$ le symbole $\left(\frac{x}{p}\right)$ défini par Legendre.

Exercice 24. *(L'astuce de Rabinovitch)*
Soit $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}$ un idéal et $x \in \mathbf{A}$. On considère l'idéal suivant de $\mathbf{A}[T]$:

$$\mathfrak{b} = \langle \mathfrak{a}, 1 - xT \rangle = \mathfrak{a}[T] + \langle 1 - xT \rangle_{\mathbf{A}[T]}\,.$$

Montrer l'équivalence $x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \iff 1 \in \mathfrak{b}$.

Exercice 25. *(Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford)*
Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. On suppose que le polynôme caractéristique de M divise une puissance d'un polynôme séparable f.
1. Montrer qu'il existe D, $N \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ tels que :
— D et N sont des polynômes en M (à coefficients dans $\mathbf{A}$).
— $M = D + N$.
— $f(D) = 0$.
— N est nilpotente.
2. Montrer l'unicité de la décomposition ci-dessus. Y compris en affaiblissant la première contrainte : en demandant seulement $DN = ND$.

Exercice 26. *(Éléments séparablement entiers)*
Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. On dira que $z \in \mathbf{B}$ est *séparablement entier* sur $\mathbf{A}$ si z est racine d'un polynôme unitaire séparable de $\mathbf{A}[T]$. On cherche ici un exemple pour lequel la somme de deux éléments séparablement entiers est un élément nilpotent, non nul et non séparablement entier.
Soient $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]\big/\big\langle X^2 + bX + c\big\rangle$. On suppose que $\Delta = b^2 - 4c$ est une unité de $\mathbf{A}$. Pour $a \in \mathbf{A}$, calculer le polynôme caractéristique de ax sur $\mathbf{A}$ et son discriminant. En déduire un exemple comme annoncé lorsque $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \neq 0$.

Exercice 27. *(Mineurs d'ordre 2 de la matrice cotransposée)*
Cet exercice explicite le point *8* du lemme 1.4. Etant donnés $i, i' \in [\![1..n]\!]$ distincts, on note $\varepsilon_{i,i'}$ la signature de la permutation (I, i, i') où I est la suite $[\![1..n]\!]$ privée de (i, i'). Ou encore si $(e_1, \ldots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbf{A}^n$, $\varepsilon_{i,i'}$ est défini par

$$e_I \wedge e_i \wedge e_{i'} = \varepsilon_{i,i'}\, e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

On a $\varepsilon_{i,i'} = (-1)^{i+i'+1}$ si $i < i'$ et $\varepsilon_{i,i'} = (-1)^{i+i'}$ sinon.
Soient $\widetilde{A}$ la cotransposée de $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, $i \neq i'$, $j \neq j'$, $I = [\![1..n]\!] \setminus \{i, i'\}$, $J = [\![1..n]\!] \setminus \{j, j'\}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} \widetilde{A}_{i,j} & \widetilde{A}_{i,j'} \\ \widetilde{A}_{i',j} & \widetilde{A}_{i',j'} \end{vmatrix} = \varepsilon_{i,i'}\varepsilon_{j,j'} \det(A) \det(A_{J,I}).$$

En déduire que si $\det(A) = 0$, alors $\widetilde{A}$ est de rang inférieur ou égal à 1.

Exercice 28. Soient f, $g \in \mathbf{A}[X]$ de degrés formels p, $q \geqslant 1$, et f_p, g_q leurs coefficients formellement dominants.
Soient $F(X,Y) = Y^p f(\frac{X}{Y})$ et $G(X,Y) = Y^q g(\frac{X}{Y})$ les polynômes homognéisés en leurs degrés formels. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathrm{Res}_X(f, p, g, q) \in \mathbf{A}^\times$.
2. f et g sont comaximaux dans $\mathbf{A}[X]$, et f_p et g_q sont comaximaux dans $\mathbf{A}$.
3. Il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que X^k et $Y^k \in \langle F, G\rangle$ dans $\mathbf{A}[X,Y]$.
4. On a $\langle X, Y\rangle^{p+q-1} \subseteq \langle F, G\rangle$ dans $\mathbf{A}[X,Y]$.

Exercice 29. *(Un exemple d'application du Nullstellensatz formel)*
Il s'agit ici de généraliser au cas d'un anneau commutatif arbitraire un résultat utile en théorie des corps discrets : *si l'on divise un polynôme $f(x)$ par le pgcd de f et f', on obtient un polynôme séparable.*
Pour un anneau arbitraire, on devra supposer que le pgcd de f et f' existe en un sens fort.
1. Soit $\mathbf{K}$ un corps discret, x une indéterminée, $f \in \mathbf{K}[x]$ un polynôme non nul de degré $n \geqslant 0$, $h = \mathrm{pgcd}(f, f')$ et $f_1 = f/h$.
On suppose que f se décompose en un produit de facteurs linéaires dans un corps discret contenant $\mathbf{K}$. Montrer que $\mathrm{Res}_x(f_1, {f_1}') \in \mathbf{K}^\times$, ou, ce qui revient au même, que $1 \in \langle f_1, f_1'\rangle \subseteq \mathbf{K}[x]$.
Si en outre $\deg(f) = n$ et $n! \in \mathbf{K}^\times$, alors f divise ${f_1}^n$.
2. Démontrer les mêmes résultats sans faire d'hypothèse de factorisation concernant f.
3. Soit $\mathbf{k}$ un anneau commutatif et $f \in \mathbf{k}[x]$ primitif de degré formel $n \geqslant 2$. On suppose que l'idéal $\langle f, f'\rangle$ est engendré par un polynôme h (nécessairement primitif).

a. Montrer qu'il existe des polynômes u, v, f_2, $f_1 \in \mathbf{k}[x]$, satisfaisant les égalités

$$uf_1 + vf_2 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} u & v \\ -f_2 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b. En utilisant le Nullstellensatz formel, montrer que $1 \in \langle f_1, f_1'\rangle \subseteq \mathbf{k}[x]$.

c. Si en outre $n! \in \mathbf{k}^\times$, alors peut-on montrer que f divise ${f_1}^n$?

4. Question subsidiaire. Donner une démonstration directe du point *3* qui n'utilise pas le Nullstellensatz formel.

Problème 1. *(Quelques résultants et discriminants utiles)*

1. Montrer que $\operatorname{disc}(X^n + c) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n c^{n-1}$. Plus généralement, montrer pour $n \geqslant 2$ l'égalité

$$\operatorname{disc}(X^n + bX + c) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \left(n^n c^{n-1} + (1-n)^{n-1} b^n\right).$$

2. Pour $n, m \in \mathbb{N}^*$, en posant $d = \operatorname{pgcd}(n, m)$, $n_1 = \dfrac{n}{d}$ et $m_1 = \dfrac{m}{d}$ montrer l'égalité :

$$\operatorname{Res}(X^n - a, X^m - b) = (-1)^n (b^{n_1} - a^{m_1})^d.$$

Plus généralement

$$\operatorname{Res}(\alpha X^n - a, n, \beta X^m - b, m) = (-1)^n (\alpha^{m_1} b^{n_1} - \beta^{n_1} a^{m_1})^d.$$

3. Notations comme au point *2*, avec $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Alors :

$$\operatorname{disc}(X^n + bX^m + c) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} c^{m-1} \left(n^{n_1} c^{n_1 - m_1} - (n-m)^{n_1 - m_1} m^{m_1} (-b)^{n_1}\right)^d.$$

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Φ_n le polynôme cyclotomique de niveau n (voir le problème 4). Alors, pour p premier $\geqslant 3$

$$\operatorname{disc}(\Phi_p) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2}.$$

5. Soient p premier et $k \geqslant 1$. Alors, $\Phi_{p^k}(X) = \Phi_p(X^{p^{k-1}})$ et :

$$\operatorname{disc}(\Phi_{p^k}) = (-1)^{\frac{\varphi(p^k)}{2}} p^{(k(p-1)-1)p^{k-1}} \qquad (p,k) \neq (2,1),$$

avec pour $p \neq 2$, $(-1)^{\frac{\varphi(p^k)}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$. Pour $p = 2$, on obtient $\operatorname{disc}(\Phi_4) = -4$ et $\operatorname{disc}(\Phi_{2^k}) = 2^{(k-1)2^{k-1}}$ pour $k \geqslant 3$. Par ailleurs, $\operatorname{disc}(\Phi_2) = 1$.

6. Soit $n \geqslant 1$ et ζ_n une racine primitive n-ième de l'unité.

Si n n'est pas la puissance d'un nombre premier, alors $\Phi_n(1) = 1$, et $1 - \zeta_n$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\zeta_n]$.

Si $n = p^k$ avec p premier, $k \geqslant 1$, alors $\Phi_n(1) = p$. Enfin $\Phi_1(1) = 0$.

7. Soit $\Delta_n = \operatorname{disc}(\Phi_n)$. Pour n, m premiers entre eux, on a la formule de multiplicativité $\Delta_{nm} = \Delta_n^{\varphi(m)} \Delta_m^{\varphi(n)}$ et l'égalité

$$\Delta_n = (-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod_{p|n} p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}} \qquad \text{pour } n \geqslant 3.$$

Problème 2. *(Anneaux euclidiens, l'exemple $\mathbb{Z}[i]$)*

Un *stathme euclidien* est une application $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{N}$ qui vérifie les propriétés suivantes [9] (grosso modo, on recopie la division euclidienne dans $\mathbb{N}$)

— $\varphi(a) = 0 \iff a = 0$.

— $\forall a, b \neq 0,\ \exists q, r, \quad a = bq + r$ et $\varphi(r) < \varphi(b)$.

Un *anneau euclidien* est un anneau intègre non trivial donné avec un stathme euclidien. Notez que l'anneau est discret. On peut alors faire avec la « division » qui est donnée par le stathme la même chose que l'on fait dans $\mathbb{Z}$ avec la division euclidienne.

Les exemples les plus connus sont les suivants.

— $\mathbb{Z}$, avec $\varphi(x) = |x|$,

— $\mathbf{K}[X]$ ($\mathbf{K}$ un corps discret), avec $\varphi(P) = 1 + \deg(P)$ pour $P \neq 0$,

9. Dans la littérature on trouve parfois un « stathme euclidien » défini comme une application $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$, ou $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbb{N} \cup \{-1\}$ (la valeur minimum étant toujours égale à $\varphi(0)$).

— $\mathbb{Z}[i] \simeq \mathbb{Z}[X]\big/\big\langle X^2+1\big\rangle$, avec $\varphi(m+in) = m^2+n^2$,
— $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \simeq \mathbb{Z}[X]\big/\big\langle X^2+2\big\rangle$, avec $\varphi(m+i\sqrt{2}n) = m^2+2n^2$.

Dans ces exemples on a en outre l'équivalence : $x \in \mathbf{A}^\times \iff \varphi(x) = 1$.

1. *(Algorithme d'Euclide étendu)* Pour tous a, b, il existe u, v, a_1, b_1, g tels que
$$\begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & v \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad ua_1 + vb_1 = 1.$$
En particulier, $\langle a, b\rangle = \langle g\rangle$ et g est un pgcd de a et b. Si $(a, b) \neq (0, 0)$, $\dfrac{ab}{g}$ est un ppcm de a et b.
2. a. Montrer que l'anneau $\mathbf{A}$ est principal.
   b. Faisons les hypothèses suivantes.
   — $\mathbf{A}^\times$ est une partie détachable de $\mathbf{A}$.
   — On dispose d'un test de primalité pour les éléments de $\mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^\times$ au sens suivant : étant donné $a \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^\times$ on sait décider si a est irréductible, et, en cas de réponse négative, écrire a sous la forme bc avec $b, c \in \mathbf{A} \setminus \mathbf{A}^\times$.
   Montrer qu'alors $\mathbf{A}$ vérifie le « théorème fondamental de l'arithmétique » (décomposition unique en facteurs premiers, à association près).

L'exemple $\mathbb{Z}[i]$. On rappelle que $z = m + in \mapsto \overline{z} = m - in$ est un automorphisme de $\mathbb{Z}[i]$ et que la norme $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathbb{Z}[i]/\mathbb{Z}}$ ($\mathrm{N}(z) = z\overline{z}$) est un stathme euclidien : prendre pour q ci-dessus un élément de $\mathbb{Z}[i]$ proche de $a/b \in \mathbb{Q}[i]$ et vérifier que $\mathrm{N}(r) \leqslant \mathrm{N}(b)/2$.

Pour connaître les éléments irréductibles de $\mathbb{Z}[i]$, il suffit de savoir décomposer tout nombre premier p. Ceci revient à déterminer les idéaux contenant $p\mathbb{Z}[i]$, c'est-à-dire encore les idéaux de $\mathbf{Z}_p := \mathbb{Z}[i]/\langle p\rangle$. Or $\mathbf{Z}_p \simeq \mathbb{F}_p[X]\big/\big\langle X^2+1\big\rangle$. On est donc ramené à trouver les diviseurs de X^2+1, donc à factoriser X^2+1, dans $\mathbb{F}_p[X]$.

3. Montrer qu'a priori trois cas qui peuvent se présenter.
   — X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$, et p est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
   — $X^2+1 = (X+u)(X-u)$ dans $\mathbb{F}_p[X]$ avec $u \neq -u$, et alors :
   $$\langle p\rangle = \langle i+u, p\rangle \, \langle i-u, p\rangle = \langle m+in\rangle \, \langle m-in\rangle \text{ et } p = m^2+n^2.$$
   — $X^2+1 = (X+u)^2$ dans $\mathbb{F}_p[X]$, et alors $\langle p\rangle = \langle i+u\rangle^2$. Ceci se produit uniquement pour $p = 2$, avec $2 = (-i)(1+i)^2$ (où $-i \in \mathbb{Z}[i]^\times$).
4. Si $p \equiv 3 \bmod 4$, alors -1 n'est pas un carré dans $\mathbb{F}_p$. Si $p \equiv 1 \bmod 4$, alors -1 est un carré dans $\mathbb{F}_p$. Dans ce cas donner un algorithme rapide pour écrire p sous forme m^2+n^2 dans $\mathbb{N}$.
5. Soit $z \in \mathbb{Z}[i]$. On peut écrire $z = m(n+qi)$ avec $m, n, q \in \mathbb{N}$ $\mathrm{pgcd}(n, q) = 1$. Donner un algorithme rapide pour décomposer z en facteurs premiers dans $\mathbb{Z}[i]$ connaissant une décomposition en facteurs premiers de $\mathrm{N}(z) = m^2(n^2+q^2)$ dans $\mathbb{N}$.
   Connaissant une décomposition en facteurs premiers de $s \in \mathbb{N}$, décrire sous quelle condition s est une somme de deux carrés, ainsi que le nombre d'écritures $s = a^2+b^2$ avec $0 < a \leqslant b$ dans $\mathbb{N}$.

6. Dire dans quels cas (relativement rares) on peut généraliser la démarche précédente pour décomposer en produit de facteurs premiers les idéaux de type fini d'un anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$, lorsque α est un entier algébrique.

Problème 3. *(Petit théorème de Kummer)*
Le problème 2 peut se généraliser pour des anneaux d'entiers principaux de la forme $\mathbb{Z}[\alpha]$, mais ce cas est relativement rare. Bien au contraire, le petit théorème de Kummer donne la décomposition d'un nombre premier (dans $\mathbb{N}$) en produits d'idéaux maximaux 2-engendrés pour presque tous les nombres premiers, dans tous les anneaux d'entiers. Ceci montre la supériorité intrinsèque des « nombres idéaux » introduits par Kummer. En outre, l'argument est extrêmement simple et ne nécessite que le théorème chinois. Cependant les nombres premiers qui ne tombent pas sous la coupe du petit théorème de Kummer constituent en fait le cœur de la théorie algébrique des nombres, c'est eux qui ont nécessité une mise au point fine de la théorie (selon deux méthodes distinctes par Kronecker et Dedekind), sans laquelle tout progrès décisif eût été impossible.
On considère un zéro α d'un polynôme unitaire irréductible $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$, de sorte que $\mathbb{Z}[\alpha] \simeq \mathbb{Z}[T]/\langle f(T)\rangle$. On note $\Delta = \mathrm{disc}(f)$.

1. Soit p un nombre premier qui ne divise pas Δ.
   — Montrer que $f(T)$ est séparable dans $\mathbb{F}_p[T]$.
   — On décompose $f(T)$ dans $\mathbb{F}_p[T]$ sous forme $\prod_{k=1}^{\ell} Q_k(T)$ avec les Q_k irréductibles unitaires distincts. On pose $q_k = Q_k(\alpha)$ (a vrai dire ce n'est défini que modulo p, mais on peut relever Q_k dans $\mathbb{Z}[T]$). Montrer que dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ on a $\langle p\rangle = \prod_{k=1}^{\ell} \langle p, q_k\rangle$ et que les idéaux $\langle p, q_k\rangle$ sont maximaux, distincts et inversibles. En particulier, si $\ell = 1$, $\langle p\rangle$ est maximal.
   — Montrer que cette décomposition reste valable dans tout anneau $\mathbf{A}$ tel que $\mathbb{Z}[\alpha] \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{Z}$, où $\mathbf{Z}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}[\alpha]$.
2. Soit $a \in \mathbb{Z}[\alpha]$ tel que $A = \mathrm{N}_{\mathbb{Z}[\alpha]/\mathbb{Z}}(a)$ soit étranger à Δ. Soit $\mathfrak{a} = \langle b_1, \ldots, b_r\rangle$ un idéal de type fini de $\mathbb{Z}[\alpha]$ contenant a. Montrer que dans $\mathbb{Z}[\alpha]$ l'idéal $\mathfrak{a}$ est inversible et se décompose en produits d'idéaux maximaux qui divisent les facteurs premiers de A. Enfin, cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs et tout ceci reste valable dans tout anneau $\mathbf{A}$ tel que ci-dessus.

Problème 4. *(Le polynôme cyclotomique Φ_n)*
Dans $\mathbf{A}[X]$, le polynôme $X^n - 1$ est séparable si, et seulement si, $n \in \mathbf{A}^\times$.
Notons $\mathbf{Q}_n$ un corps de racines au dessus de $\mathbb{Q}$ pour ce polynôme. Soit $\mathbb{U}_n$ le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{Q}_n$. C'est un groupe cyclique d'ordre n, qui possède donc $\varphi(n)$ générateurs (racines primitives n-ièmes de l'unité). On définit $\Phi_n(X) \in \mathbf{Q}_n[X]$ par $\Phi_n(X) = \prod_{o(\xi)=n}(X - \xi)$. C'est un polynôme unitaire de degré $\varphi(n)$. On a l'égalité fondamentale

$$X^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(X),$$

qui permet de démontrer par récurrence sur n que $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

1. On va montrer que $\Phi_n(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ (donc dans $\mathbb{Q}[X]$: proposition 8.15). Soient f, g deux polynômes unitaires de $\mathbb{Z}[X]$ avec $\Phi_n = fg$ et $\deg f \geqslant 1$; il faut prouver que $g = 1$.
   a. Il suffit de prouver que $f(\xi^p) = 0$ pour tout premier $p \not| n$ et pour tout zéro ξ de f dans $\mathbf{Q}_n$.
   b. On suppose que $g(\xi^p) = 0$ pour un zéro ξ de f dans $\mathbf{Q}_n$. Examiner ce qui se passe dans $\mathbb{F}_p[X]$ et conclure.
2. Fixons une racine ξ_n de Φ_n dans $\mathbf{Q}_n$.
   Montrer que $\mathbf{Q}_n = \mathbb{Q}(\xi_n)$ et qu'avec $(\mathbb{Q}, \mathbf{Q}_n, \Phi_n)$, on est dans la situation galoisienne élémentaire du lemme 6.13.
   Décrire des isomorphismes explicites de groupes :
   $$\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_n/\mathbb{Q}).$$
3. Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique 0. Que peut-on dire d'un corps de racines $\mathbf{L}$ de $X^n - 1$ au dessus de $\mathbf{K}$?

Problème 5. *(L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt[n]{1}]$: domaine de Prüfer, factorisation des idéaux)*
Soit $\Phi_n(X) \in \mathbb{Z}[X]$ le polynôme cyclotomique d'ordre n, irréductible sur $\mathbb{Q}$. On note $\mathbf{Q}_n = \mathbb{Q}(\zeta_n) \simeq \mathbb{Q}[X]/\langle\Phi_n\rangle$. Le groupe multiplicatif $\mathbb{U}_n$ engendré par ζ_n (racine primitive n-ième de l'unité) est cyclique d'ordre n.
On va démontrer entre autres que l'anneau $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\mathbb{U}_n] = \mathbb{Z}[\zeta_n] \simeq \mathbb{Z}[X]/\langle\Phi_n\rangle$ est un *domaine de Prüfer* : un anneau intègre dont les idéaux de type fini non nuls sont inversibles (cf. section VIII-4 et chapitre XII).
1. Soit $p \in \mathbb{N}$ un nombre premier. On montre ici que $\sqrt{p\mathbf{A}}$ est un idéal principal et on l'explicite comme un produit fini d'idéaux maximaux inversibles 2-engendrés.
On considère les facteurs irréductibles distincts de Φ_n modulo p que l'on relève en des polynômes unitaires $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{Z}[X]$. On note $g = f_1 \cdots f_k$ (de sorte que $\overline{g}$ est la partie sans facteur carré de Φ_n modulo p) et $\mathfrak{p}_i = \langle p, f_i(\zeta_n)\rangle$ pour $i \in [\![1..k]\!]$.

   a. Montrer que $\mathfrak{p}_i$ est un idéal maximal et que
   $$\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p, g(\zeta_n)\rangle = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$$
   b. Si p ne divise pas n, montrer que $\overline{g} = \overline{\Phi_n}$, donc $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p\rangle$ est un idéal principal.
   c. On suppose que p divise n et l'on écrit $n = mp^k$ avec $k \geqslant 1$, $\mathrm{pgcd}(m, p) = 1$. En étudiant la factorisation de Φ_n modulo p, montrer que $\overline{g} = \overline{\Phi_m}$. En déduire que $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p, \Phi_m(\zeta_n)\rangle$. Montrer ensuite que $p \in \langle\Phi_m(\zeta_n)\rangle$, et donc que $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle\Phi_m(\zeta_n)\rangle$ est un idéal principal.
   d. En déduire que $p\mathbf{A}$ est un produit de la forme $\mathfrak{p}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{p}_k^{e_k}$.

2. Soit $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$; montrer que $a\mathbf{A}$ est un produit d'idéaux maximaux inversibles à deux générateurs. En déduire que dans $\mathbf{A}$ tout idéal de type fini non nul se décompose en un produit d'idéaux maximaux inversibles 2-engendrés et que la décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.

Problème 6. *(Une propriété élémentaire des sommes de Gauss)*
On désigne par $\mathbf{k}$ un corps fini de cardinal q et $\mathbf{A}$ un anneau intègre. On considère :
— un « caractère multiplicatif » $\chi : \mathbf{k}^\times \to \mathbf{A}^\times$, i.e. un morphisme de groupes multiplicatifs,
— un « caractère additif » $\psi : \mathbf{k} \to \mathbf{A}^\times$, i.e. un morphisme de groupes
$$\psi : (\mathbf{k}, +) \to (\mathbf{A}^\times, \times).$$
On suppose que ni χ ni ψ ne sont triviaux et l'on prolonge χ à $\mathbf{k}$ tout entier via $\chi(0) = 0$. Enfin, on définit la somme de Gauss de χ, relativement à ψ, par :
$$G_\psi(\chi) = \sum_{x\in\mathbf{k}} \chi(x)\psi(x) = \sum_{x\in\mathbf{k}^\times} \chi(x)\psi(x).$$
On va montrer que
$$G_\psi(\chi)G_\psi(\chi^{-1}) = q\chi(-1),$$
et donner des applications arithmétiques de ce résultat (question *4*).
1. Soit G un groupe fini et $\varphi : G \to \mathbf{A}^\times$ un homomorphisme non trivial. Montrer que $\sum_{x\in G} \varphi(x) = 0$.
2. Montrer que :
$$\sum_{x+y=z} \chi(x)\chi^{-1}(y) = \begin{cases} -\chi(-1) & \text{si } z \neq 0, \\ (q-1)\chi(-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. En déduire que $G_\psi(\chi)G_\psi(\chi^{-1}) = q\chi(-1)$.
4. On considère $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$ où p est un nombre premier impair, $\mathbf{A} = \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$, et ζ une racine primitive p-ième de l'unité dans $\mathbf{A}$. Les caractères ψ et χ sont définis par :
$$\psi(i \bmod p) = \zeta^i, \qquad \chi(i \bmod p) = \left(\tfrac{i}{p}\right) \quad \text{(symbole de Legendre)}$$

a. Alors, $\chi = \chi^{-1}$, les sommes de Gauss $G_\psi(\chi)$, $G_\psi(\chi^{-1})$ sont égales à
$$\tau \overset{\text{def}}{=} \sum_{i\in\mathbb{F}_p^*} \left(\tfrac{i}{p}\right)\zeta^i,$$
et en posant $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ (de sorte que $p^* \equiv 1 \bmod 4$), on obtient :
$$\tau^2 = p^*, \quad \text{en particulier,} \quad \mathbb{Q}(\sqrt{p^*}) \subseteq \mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$$

b. On définit $\tau_0 = \sum_{i\in\mathbb{F}_p^{\times 2}} \zeta^i$, $\tau_1 = \sum_{i\in\mathbb{F}_p^\times\setminus\mathbb{F}_p^{\times 2}} \zeta^i$ de sorte que $\tau = \tau_0 - \tau_1$. Montrer que τ_0 et τ_1 sont les racines de $X^2 + X + \frac{1-p^*}{4}$ et que l'anneau $\mathbb{Z}[\tau_0] = \mathbb{Z}[\tau_1]$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$.

Problème 7. *(Le polynôme de Dedekind $f(X) = X^3 + X^2 - 2X + 8$)*
Le but de ce problème est de fournir un exemple d'anneau $\mathbf{A}$ d'entiers de corps de nombres qui n'est pas une $\mathbb{Z}$-algèbre monogène [10].

1. Montrer que f est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ et que $\operatorname{disc}(f) = -2\,012 = -2^2 \times 503$.
2. Soit α une racine de $f(X)$. Montrer que $\beta = 4\alpha^{-1}$ est entier sur $\mathbb{Z}$, que
$$\mathbf{A} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\alpha \oplus \mathbb{Z}\beta$$
est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$ et que $\operatorname{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbb{Z}} = -503$.
3. Montrer que le nombre premier $p = 2$ est totalement décomposé dans $\mathbf{A}$, autrement dit que $\mathbf{A}/2\mathbf{A} \simeq \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$. En déduire que $\mathbf{A}$ n'est pas une $\mathbb{Z}$-algèbre monogène.

10. Une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ est dite *monogène* lorsqu'elle est engendrée en tant qu'$\mathbf{A}$-algèbre par un unique élément x. Ainsi, $\mathbf{B} = \mathbf{A}_1[x]$, où $\mathbf{A}_1$ est l'image de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$.

4. *(Évitement du conducteur, Dedekind)* Soient $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}'$ deux anneaux, $\mathfrak{f}$ un idéal de $\mathbf{B}$ vérifiant $\mathfrak{f}\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{B}$; a fortiori $\mathfrak{f}\mathbf{B}' \subseteq \mathbf{B}'$ et $\mathfrak{f}$ est aussi un idéal de $\mathbf{B}'$. Alors, pour tout idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{B}$ tel que $1 \in \mathfrak{b} + \mathfrak{f}$, en posant $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\mathbf{B}'$, le morphisme canonique $\mathbf{B}/\mathfrak{b} \to \mathbf{B}'/\mathfrak{b}'$ est un isomorphisme.
5. En déduire que 2 est un *diviseur essentiel* de $\mathbf{A}$: on entend par là que 2 divise l'indice $|\,\mathbf{A} : \mathbb{Z}[x]\,|$ quelque soit l'élément primitif x de $\mathbb{Q}(\alpha)/\mathbb{Q}$ entier sur $\mathbb{Z}$.

Problème 8. *(Norme d'un idéal en terrain quasi-galoisien)*
Soit $(\mathbf{B}, \mathbf{A}, G)$ où $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ est un groupe fini, et $\mathbf{A} = \mathbf{B}^G = \mathrm{Fix}_{\mathbf{B}}(G)$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathbf{B}$, on note $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = \prod_{\sigma\in G} \sigma(\mathfrak{b})$ (idéal de $\mathbf{B}$) et $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}) = \mathbf{A} \cap \mathrm{N}'_G(\mathfrak{b})$ (idéal de $\mathbf{A}$).

1. Montrer que $\mathbf{B}$ est entier sur $\mathbf{A}$.
2. Soient $\mathbf{B} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ où $d \in \mathbb{Z}$ n'est pas un carré, τ l'automorphisme (noté aussi $z \mapsto \overline{z}$) défini par $\sqrt{d} \mapsto -\sqrt{d}$, et $G = \langle\tau\rangle$. Donc $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$. On suppose que $d \equiv 1 \bmod 4$ et l'on pose $\mathfrak{m} = \left\langle 1 + \sqrt{d}, 1 - \sqrt{d}\right\rangle$.
   a. On a $\mathfrak{m} = \overline{\mathfrak{m}}$, $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}^2 = 2\mathfrak{m}$ et $\mathrm{N}_G(\mathfrak{m}) = 2\mathbb{Z}$. En déduire que $\mathfrak{m}$ n'est pas inversible et que l'on n'a pas $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{m}) = \mathrm{N}_G(\mathfrak{m})\mathbf{B}$.
   b. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]/\mathfrak{m} \simeq \mathbb{F}_2$; donc $\mathfrak{m}$ est d'indice 2 dans $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ mais 2 n'est pas le pgcd des $\mathrm{N}_G(z)$, $z \in \mathfrak{m}$. Vérifier également que $\mathfrak{b} \mapsto |\,\mathbf{B} : \mathfrak{b}\,|$ n'est pas multiplicative sur les idéaux non nuls de $\mathbf{B}$.
3. On suppose $\mathbf{B}$ intégralement clos et $\mathbf{A}$ de Bézout. Soit $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{B}$ un idéal de type fini.
   a. Donner un $d \in \mathbf{A}$ tel que $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = d\mathbf{B}$. En particulier, si $\mathfrak{b}$ est non nul, il est inversible. Ainsi, $\mathbf{B}$ est un domaine de Prüfer.
   b. Montrer que $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}) = d\mathbf{A}$, donc $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = \mathrm{N}_G(\mathfrak{b})\mathbf{B}$.
   c. On suppose que le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est isomorphe à $\mathbf{A}/\langle a_1\rangle \times \cdots \times \mathbf{A}/\langle a_k\rangle$.
   Montrer que $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}) = \langle a_1 \cdots a_k\rangle_{\mathbf{A}}$.
   d. On suppose $\#G = 2$. Expliciter, en fonction d'un système générateur fini de $\mathfrak{b}$, des éléments $z_1, \ldots, z_m \in \mathfrak{b}$ tels que $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}) = \langle \mathrm{N}(z_i), i \in [\![1..m]\!]\rangle_{\mathbf{A}}$.

Problème 9. *(Lemme de la fourchette)*

1. Soit $\mathbf{A}$ un anneau intégralement clos de corps des fractions $\mathbf{k}$, $\mathbf{K}$ une extension finie séparable de $\mathbf{k}$ de degré n, $\mathbf{B}$ la clôture intégrale de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{K}$. Montrer qu'il existe une base $(\underline{e}) = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ contenue dans $\mathbf{B}$. On note $\Delta = \mathrm{disc}(\underline{e})$ et $(\underline{e}') = (e'_1, \ldots, e'_n)$ la base traciquement duale de $(\underline{e})$. Montrer les inclusions :
$$\textstyle\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{A}e_i \;\subseteq\; \mathbf{B} \;\subseteq\; \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{A}e'_i \;\subseteq\; \Delta^{-1}\bigoplus_{i=1}^n \mathbf{A}e_i.$$

Dans la suite $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$ et $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$; $\mathbf{K}$ est donc un corps de nombres et $\mathbf{B} = \mathbf{Z}$ est son anneau d'entiers. On considère un $x \in \mathbf{Z}$ tel que $\mathbf{K} = \mathbb{Q}[x]$.
Soit $f(X) = \mathrm{Min}_{\mathbb{Q},x}(X) \in \mathbb{Z}[X]$ et δ^2 le plus grand facteur carré de $\mathrm{disc}_X(f)$.

D'après la proposition 8.17, $\mathbf{Z}$ est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang $n = [\,\mathbf{L} : \mathbb{Q}\,]$, et l'on a $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \frac{1}{\delta}\mathbb{Z}[x]$. Ceci est légèrement plus précis que le résultat du point *1.*
On considère une $\mathbb{Z}$-algèbre de type fini $\mathbf{B}$ intermédiaire entre $\mathbb{Z}[x]$ et $\mathbf{Z}$. Comme c'est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, $\mathbf{B}$ est également un $\mathbb{Z}$-module libre de rang n. Le cas le plus important est celui où $\mathbf{B} = \mathbf{Z}$.
Le but du problème est de préciser une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{B}$ de la forme

$$\mathcal{B} = \left(\tfrac{g_0}{d_0}, \tfrac{g_1(x)}{d_1}, \tfrac{g_2(x)}{d_2}, \dots, \tfrac{g_{n-1}(x)}{d_{n-1}}\right)$$

avec $g_k \in \mathbb{Z}[X]$ de degré k pour tout k, et les $d_k > 0$ les plus petits possibles. On va établir ce résultat avec des polynômes unitaires g_k et $1 = d_0 \mid d_1 \mid d_2 \mid \cdots \mid d_{n-1}$.
Le corps $\mathbf{K}$ est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de base $(1, x, \dots, x^{n-1})$ et pour $k \in [\![0..n-1]\!]$, on note $\pi_k : \mathbf{K} \to \mathbb{Q}$ la forme linéaire composante sur x^k et :

$$Q_k = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{Q}\, x^i,\ Z_k = \frac{1}{\delta} \bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{Z}\, x^i, \quad \text{et } F_k = Q_k \cap \mathbf{B} = Z_k \cap \mathbf{B}.$$

Il est clair que $Q_0 = \mathbb{Q}$, $Q_{n-1} = \mathbf{K}$, $F_0 = \mathbb{Z}$ et $F_{n-1} = \mathbf{B}$.

2. Montrer que le $\mathbb{Z}$-module F_k est libre de rang $k+1$.
   Le $\mathbb{Z}$-module $\pi_k(F_k)$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de type fini de $\frac{1}{\delta}\mathbb{Z}$. Montrer qu'il est de la forme $\frac{1}{d_k}\mathbb{Z}$ pour un d_k qui divise δ. NB : a $d_0 = 1$.
3. On note y_k un élément de F_k tel que $\pi_k(y_k) = \frac{1}{d_k}$.
   On écrit y_k sous la forme $f_k(x)/d_k$, avec $f_k \in \mathbb{Q}[X]$ unitaire et de degré k. Il est clair que $y_0 = 1$. Mais les autres y_i ne sont pas déterminés de manière unique. Montrer que $(1, y_1, \dots, y_k)$ est une $\mathbb{Z}$-base de F_k.
4. Montrer que si $i + j \leqslant n-1$, on a $d_i d_j \mid d_{i+j}$. En particulier d_i divise d_k si $1 \leqslant i < k \leqslant n-1$. En déduire aussi que $d_1^{n(n-1)/2}$ divise δ.
5. Montrer que $d_k y_k \in \mathbb{Z}[x]$ pour chaque $k \in [\![0..n-1]\!]$. En déduire que $f_k \in \mathbb{Z}[X]$ et que $\big(1, f_1(x), \dots, f_{n-1}(x)\big)$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[x]$.
6. Montrer que $\mathcal{B} = \big(1, \frac{1}{d_1} f_1(x), \dots, \frac{1}{d_{n-1}} f_{n-1}(x)\big)$ est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{B}$ adaptée à l'inclusion $\mathbb{Z}[x] \subseteq \mathbf{B}$. Les d_i sont donc les facteurs invariants de cette inclusion, et $\prod_{i=1}^{n-1} d_i$ est égal à l'indice $\big|\, \mathbf{B} : \mathbb{Z}[x] \,\big|$ qui divise δ.

Problème 10. *(Changements de variables, automorphismes polynomiaux et méthode de Newton)*
Soient $F = (F_1, \dots, F_n)$ avec $F_i \in \mathbf{A}[X] = \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n]$ et $\theta_F : \mathbf{A}[X] \to \mathbf{A}[X]$ le morphisme de $\mathbf{A}$-algèbres réalisant $X_i \mapsto F_i$; on a donc $\theta_F(g) = g(F)$. On suppose que $\mathbf{A}[X] = \mathbf{A}[F]$: il existe donc $G_i \in \mathbf{A}[X]$ vérifiant $X_i = G_i(F)$, ce que l'on écrit classiquement (avec quelques abus) $X = G(F)$ et parfois $X = G \circ F$ (au sens des applications de $\mathbf{A}[X]^n$ dans $\mathbf{A}[X]^n$).
On notera le renversement $\theta_F \circ \theta_G = \mathrm{I}_{\mathbf{A}[X]}$.
On va montrer ici que $\theta_G \circ \theta_F = \mathrm{I}_{\mathbf{A}[X]}$ ou encore $X = F(G)$.
En conséquence (cf. question 1) G est déterminé de manière unique, θ_F est un automorphisme de $\mathbf{A}[X]$ et $F_1, \dots, F_n$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}$.
L'idée consiste à utiliser l'anneau des séries formelles $\mathbf{A}[[X]]$ ou du moins les quotients $\mathbf{A}[X]/\mathfrak{m}^d$ où $\mathfrak{m} = \langle X_1, \dots, X_n \rangle$. Soit $F = (F_1, \dots, F_n) \in \mathbf{A}[[X]]^n$; on

étudie à quelle condition il existe $G = (G_1, \dots, G_n)$, $G_i \in \mathbf{A}[[X]]$ sans terme constant, vérifiant $F(G) = X$. On a alors $F(0) = 0$, et en posant $J_0 = \mathrm{JAC}(F)(0)$, on obtient $J_0 \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ (puisque $\mathrm{JAC}(F)(0) \circ \mathrm{JAC}(G)(0) = \mathrm{I}_{\mathbf{A}^n}$).
On va montrer la réciproque : dans le cas où $F(0) = 0$ et $J_0 \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$, il existe $G = (G_1, \dots, G_n)$, avec les $G_i \in \mathbf{A}[[X]]$, $G_i(0) = 0$, et $F(G) = X$.

1. En admettant cette réciproque, montrer que G est unique et que $G(F) = X$.
2. Soit $\mathbf{S} \subset \mathbf{A}[[X]]$ l'ensemble des séries formelles sans terme constant ; $\mathbf{S}^n$ est, pour la loi de composition, un monoïde dont X est le neutre. On rappelle le principe de la méthode de Newton pour résoudre en z une équation $P(z) = 0$: introduire l'itérateur $\Phi : z \mapsto z - P'(z)^{-1}P(z)$ et la suite $z_{d+1} = \Phi(z_d)$ avec un z_0 adéquat ; ou bien une variante $\Phi : z \mapsto z - P'(z_0)^{-1}P(z)$. Pour résoudre en G, $F(G) - X = 0$, vérifier que cela conduit à l'itérateur sur $\mathbf{S}^n$:
$$\Phi : G \mapsto G - J_0^{-1} \cdot (F(G) - X)$$
3. On introduit $\mathrm{val} : \mathbf{A}[[X]] \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$: $\mathrm{val}(g) = d$ signifie que d est le degré (total) minimum des monômes de g, en convenant que $\mathrm{val}(0) = +\infty$. On a donc $\mathrm{val}(g) \geqslant d$ si, et seulement si, $g \in \mathfrak{m}^d$. On note pour g, $h \in \mathbf{A}[[X]]$ et G, $H \in \mathbf{A}[[X]]^n$:
$$d(f, g) = \tfrac{1}{2^{\mathrm{val}(f-g)}}, \qquad d(F, G) = \max_i d(F_i, G_i)$$
Montrer que Φ est contractant : $d\big(\Phi(G), \Phi(H)\big) \leqslant d(G, H)/2$. En déduire que Φ admet un unique point fixe $G \in \mathbf{S}^n$, unique solution de $F(G) = X$.
4. Résoudre le problème initial relatif aux polynômes.
5. Vérifier que les systèmes suivants sont des changements de variables et expliciter leurs inverses (dans $\mathbb{Z}[X, Y, Z]$ puis dans $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5]$) :
$$(X - 2fY - f^2Z,\ Y + fZ,\ Z) \ \text{ avec } \ f = XZ + Y^2,$$
$$(X_1 + 3X_2X_4^2 - 2X_3X_4X_5,\ X_2 + X_4^2X_5,\ X_3 + X_4^3,\ X_4 + X_5^3,\ X_5).$$

Problème 11. *(Finitude de l'ensemble des classes d'idéaux d'un anneau de nombres)*
Un *anneau de nombres* $\mathbf{A}$ est un anneau intègre qui en tant que groupe additif est un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini $n > 0$. Son corps des fractions $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ est un corps de nombres de degré n. On montre ici que l'ensemble des classes d'idéaux de type fini de $\mathbf{A}$ est fini (deux idéaux de type fini $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont dans la même classe s'il existe x et y non nuls dans $\mathbf{A}$ tels que $x\mathfrak{a} = y\mathfrak{b}$).
Pour $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}^n$, on note $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$.
1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et un $K > 0$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}^n$, il existe $y \in \mathbb{Z}^n$ et $m \in [\![1..d]\!]$ vérifiant $\|mx - y\|_\infty < K$.
Idée : pour $N \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $x \in \mathbb{Q}^n$, il existe $y \in \mathbb{Z}^n$ et $m \in [\![1..N^n]\!]$ vérifiant $\|mx - y\|_\infty < 1/N$.
2. On note $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathbf{K}/\mathbb{Q}}$. On fixe une $\mathbb{Q}$-base $(e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{K}$ constituée d'éléments de $\mathbf{A}$. On définit alors $\| \ \|_\infty : \mathbf{K} \to \mathbb{Q}_+$ par $\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$ où $x = \sum_i x_i e_i$. Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $|\mathrm{N}(x)| \leqslant C\|x\|_\infty^n$, $\forall x \in \mathbf{K}$.

3. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}^*$, attaché uniquement à $\mathbf{A}$, tel que pour tout $x \in \mathbf{K}$, il y ait $m \in [\![1..d]\!]$ et $q \in \mathbf{A}$ vérifiant $|\mathrm{N}(mx - q)| < 1$. En déduire que pour $a \in \mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{A} \setminus \{0\}$, il y a un $m \in [\![1..d]\!]$ tel que $|\mathrm{N}(ma - bq)| < |\mathrm{N}(b)|$.
4. On pose $D = d!$. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini non nul de $\mathbf{A}$. On veut montrer qu'il existe $b \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$ tel que $D\mathfrak{b} \subset \langle b \rangle$.

a. Soit $b \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$ tel que $|N(b)|$ soit minimum (ce qui du point de vue des mathématiques classiques ne pose pas de problème puisque pour $b \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$, on a $|N(b)| \in \mathbb{N}^*$). Montrer que b convient.

b. Fournir une preuve constructive de l'existence d'un tel b.

c. En déduire qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ associé à $\mathfrak{b}$ tel que $D \in \mathfrak{a}$.

5. Conclure.

Problème 12. *(Classes de similitude de matrices et classes d'idéaux)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau, $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ son anneau total des fractions, $f \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire de degré $n \geqslant 1$ et $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f \rangle$. On note $C_f \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ la matrice compagne de f. Deux idéaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{b}'$ d'un anneau $\mathbf{C}$ sont dits *associés*, ou *dans la même classe* s'il existe deux éléments réguliers b, $b' \in \mathbf{C}$ tels que $b'\mathfrak{b} = b\,\mathfrak{b}'$.
On étudie dans ce problème une correspondance bijective entre

— les classes de similitude (sur $\mathbf{A}$) de matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ semblables sur $\mathbf{K}$ à C_f d'une part, et
— les classes de certains idéaux de $\mathbf{B}$, à savoir ceux qui sont des $\mathbf{A}$-module libres de rang n, d'autre part.

1. Montrer que C_f est semblable sur $\mathbf{A}$ à sa transposée. Montrer que l'on peut prendre pour Q satisfaisant ${}^tC_f = Q^{-1}C_fQ$ une matrice de Hankel supérieure [11] de déterminant $(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$.
2. Montrer l'identité $QS = \mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - C_f)$, où $S = (x^{i+j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$.
3. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ semblable à C_f sur $\mathbf{K}$ et $P \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $PM = C_fP$ et $\det(P)$ régulier. On définit $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \mathbf{B}$ par

$$[\,\varepsilon_1 \ \ldots \ \varepsilon_n\,] = [\,1 \ x \ \ldots \ x^{n-1}\,] \cdot P\,.$$

a. Montrer que $x\,[\,\varepsilon_1 \ \ldots \ \varepsilon_n\,] = [\,\varepsilon_1 \ \ldots \ \varepsilon_n\,] \cdot M$, puis que $\mathfrak{b} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}\varepsilon_1 + \cdots + \mathbf{A}\varepsilon_n$ est un idéal de $\mathbf{B}$ et un $\mathbf{A}$-module libre de rang n de base $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Vérifier également que $\mathfrak{b}$ contient un élément de $\mathbf{A}$ régulier dans $\mathbf{A}$ (donc dans $\mathbf{B}$) et que la matrice de la multiplication par x dans cette base est M.

b. Montrer que la classe d'équivalence de $\mathfrak{b}$ ne dépend pas du choix de P puis qu'elle ne dépend que de la classe de similitude de M sur $\mathbf{A}$.

c. Montrer que la suite ci-dessous est exacte :

$$\mathbf{B}^n \xrightarrow{x\mathrm{I}_n - M} \mathbf{B}^n \xrightarrow{[\,\varepsilon_1 \ \cdots \ \varepsilon_n\,]} \mathfrak{b} = \mathbf{A}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}\varepsilon_n \to 0.$$

On a donc un isomorphisme de $\mathbf{B}$-modules $\mathfrak{b} \simeq \mathbf{B}^n/\mathrm{Im}(x\mathrm{I}_n - M)$.
Et la matrice $x\mathrm{I}_n - M$ est de rang $n-1$ si, et seulement si, $\mathfrak{b}$ est un idéal projectif de rang 1 (donc inversible car il contient un élément régulier).

11. Une matrice $R = ((r_{i,j})_{i,j})$ est *de Hankel* lorsque l'on a : $i + j = k + \ell \Rightarrow r_{ij} = r_{k\ell}$. Elle est *de Hankel supérieure* lorsque les coefficients en dessous de l'antidiagonale sont nuls.

4. Réciproquement, soit $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathbf{B}$ qui possède une $\mathbf{A}$-base $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$. Montrer que $\mathfrak{b}$ contient un élément régulier de $\mathbf{A}$ (donc régulier dans $\mathbf{B}$). Soit M la matrice de la multiplication par x dans cette base. Montrer que M est semblable à C_f sur $\mathbf{K}$ et que la classe d'idéaux associée à M est celle de $\mathfrak{b}$.
5. On reprend le contexte de la question *3.*

a. Donner une matrice $P' \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $P'\,{}^{\mathrm{t}}M = C_f P'$ et $\det(P')$ régulier.

b. On définit $\varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_n \in \mathbf{B}$ par l'égalité $[\,\varepsilon'_1 \ \dots \ \varepsilon'_n\,] = [\,1 \ x \ \dots \ x^{n-1}\,] \cdot P'$, et $\mathfrak{b}' = \mathbf{A}\varepsilon'_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}\varepsilon'_n$. Montrer que :
$$\begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{bmatrix} [\,\varepsilon_1 \ \dots \ \varepsilon_n\,] = \det(P)\,\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - M).$$
En déduire l'égalité d'idéaux $\mathfrak{b}'\mathfrak{b} = \det(P)\mathcal{D}_{n-1}(x\mathrm{I}_n - M)$.

c. On suppose $x\mathrm{I}_n - M$ de rang $n-1$.
Alors $\mathfrak{b}$ est un idéal inversible, et plus précisément $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \langle \det(P) \rangle$.
La suite $\mathbf{B}^n \xrightarrow{x\mathrm{I}_n - M} \mathbf{B}^n \xrightarrow{\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - M)} \mathbf{B}^n$ est exacte et $\mathfrak{b} \simeq \mathrm{Im}\,\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - M)$, cette dernière matrice étant de rang 1.

6. (Exemple) Soient $a \in \mathbf{A}$ un élément régulier, $f = X^n + \cdots + ab_0 \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire de degré n dont le coefficient constant est multiple de a et $\mathfrak{b} = \langle a, x \rangle \subseteq \mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$. Montrer que $\mathfrak{b}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang n, en expliciter une $\mathbf{A}$-base, les matrices M, P, P' correspondantes (notations de la question précédente) ainsi que l'idéal $\mathfrak{b}'$. Si a et b_0 sont comaximaux, montrer que $1 \in \mathcal{D}_{n-1}(x\mathrm{I}_n - M)$, donc $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathbf{B}$ et l'idéal $\mathfrak{b}$ est inversible.
7. (Eisenstein) Soient $a \in \mathbf{A}$ un élément régulier, $f = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme « Eisenstein en a », i.e. tel que
$a_i \equiv 0 \bmod a$ pour $i \in [\![0..n-1]\!]$ et $a_0 = b_0 a$ avec b_0 inversible modulo a.
Soit $\mathfrak{b} := \langle a, x \rangle \subseteq \mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$. Montrer, pour $k \in [\![1..n]\!]$, que $\mathfrak{b}^k$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang n. Plus précisément :
$$\mathfrak{b}^k = \bigoplus_{i=0}^{k-1} \mathbf{A}a x^i \oplus \bigoplus_{j=k}^{n-1} \mathbf{A}x^j = \left\langle a, x^k \right\rangle.$$
En particulier $\mathfrak{b}^n = a\mathbf{B}$ et $\mathfrak{b}$ est inversible.
Montrer également que les $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ et $\mathbf{A}/\langle a \rangle$ sont isomorphes.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. *1.* Interpolation de Lagrange : $Q = \sum_{\xi \in U} \left(\prod_{\zeta \in U \setminus \{\xi\}} \frac{x_n - \zeta}{\xi - \zeta} \right) Q_\xi$.
2. Supposons que chaque $\mathfrak{a}(V_\xi) \subset \mathbf{K}[x_1, \dots, x_{n-1}]$ (pour $\xi \in \pi_n(V)$) soit engendré par m polynômes :
$$\mathfrak{a}(V_\xi) = \left\langle f_j^\xi, j \in [\![1..m]\!] \right\rangle, \quad f_j^\xi \in \mathbf{K}[x_1, \dots, x_{n-1}].$$
D'après le point *1*, il existe $f_j \in \mathbf{K}[\underline{x}]$ vérifiant $f_j(x_1, \dots, x_{n-1}, \xi) = f_j^\xi$ pour tout $\xi \in \pi_n(V)$. On montre alors en s'appuyant sur le point *1* que :
$$\mathfrak{a}(V) = \langle P, f_1, \dots, f_m \rangle \qquad \text{avec } P = \prod_{\xi \in \pi_n(V)} (x_n - \xi).$$
On conclut par récurrence sur n.

Exercice 3. *4.* Considérons l'anneau de polynômes $\mathbf{B} = \mathbf{A}[s_1, \dots, s_n]$ où les s_i sont des indéterminées, puis le polynôme $f(t) = t^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k s_k t^{n-k} \in \mathbf{B}[t]$. Considérons aussi l'algèbre de décomposition universelle

$$\mathbf{C} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{B},f} = \mathbf{B}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n],$$

avec dans $\mathbf{C}[t]$, l'égalité $f(t) = \prod_{i=1}^{n} (t - x_i)$.
Soient $\rho : \mathbf{A}[X_1, \dots, X_n] \to \mathbf{A}[x_1, \dots, x_n]$ et $\varphi : \mathbf{A}[s_1, \dots, s_n] \to \mathbf{A}[S_1, \dots, S_n]$ les homomorphismes d'évaluation $X_i \mapsto x_i$ et $s_i \mapsto S_i$.
On a clairement $\rho(S_i) = s_i$. Donc, en notant ρ_1 la restriction de ρ à $\mathbf{A}[\underline{S}]$ et $\mathbf{A}[\underline{s}]$, on a $\varphi \circ \rho_1 = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}[\underline{S}]}$ et $\rho_1 \circ \varphi = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}[\underline{s}]}$. Ceci montre que les S_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}$ et l'on peut identifier $\mathbf{A}[\underline{S}]$ et $\mathbf{A}[\underline{s}] = \mathbf{B}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}[\underline{X}] & \underset{\psi}{\overset{\rho}{\rightleftarrows}} & \mathbf{A}[\underline{x}] \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathbf{A}[\underline{S}] & \underset{\varphi}{\overset{\rho_1}{\rightleftarrows}} & \mathbf{A}[\underline{s}] \end{array}$$

Par la propriété universelle de l'algèbre de décomposition universelle, il existe un (unique) $\mathbf{B}$-homomorphisme $\psi : \mathbf{C} \to \mathbf{A}[\underline{X}]$ qui envoie x_i sur X_i. Il s'ensuit que ρ et ψ sont deux isomorphismes réciproques l'un de l'autre. Ainsi les x_i sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est libre de rang $n!$ sur $\mathbf{A}[\underline{S}] = \mathbf{B}$, avec la base prescrite.
NB : cette démonstration ne semble pas pouvoir donner de manière simple le fait que les polynômes symétriques de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ sont dans $\mathbf{A}[\underline{S}]$.

Exercice 4. *1.* Soit $f = (X_1^3 + X_2^3 + \cdots + X_n^3) - (S_1^3 - 3S_2S_2 + 3S_3)$. C'est un polynôme symétrique homogène, donc $f = g(S_1, \dots, S_n)$ où $g = g(Y_1, \dots, Y_n)$ est homogène en poids, de poids 3 pour le poids $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n$.
L'égalité $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + n\alpha_n = 3$ implique $\alpha_i = 0$ pour $i > 3$, donc g ne dépend que de Y_1, Y_2, Y_3, disons $g = g(Y_1, Y_2, Y_3)$. Dans l'égalité

$$(X_1^3 + X_2^3 + \cdots + X_n^3) - (S_1^3 - 3S_2S_2 + 3S_3) = g(S_1, S_2, S_3),$$

on réalise $X_i := 0$ pour $i > 3$; on obtient $g(S_1', S_2', S_3') = 0$ où S_1', S_2', S_3' sont les fonctions symétriques élémentaires de X_1, X_2, X_3. On en déduit que $g = 0$ puis $f = 0$.
2. Pour le premier, on peut supposer $n = 3$; on trouve $S_1S_2 - 3S_3$. Pour les deux autres qui sont symétriques homogènes de degré 4, on travaille avec 4 indéterminées et l'on obtient $S_1^2S_2 - 2S_2^2 - S_1S_3 + 4S_4$ et $S_2^2 - 2S_1S_3 + 2S_4$.
3. Soient $n > d$ et $f(X_1, \dots, X_n)$ un polynôme symétrique homogène de degré d. Soit $h \in \mathbf{A}[X_1, \dots, X_d] = f(X_1, \dots, X_d, 0, \dots, 0)$. Si $h = 0$, alors $f = 0$.
On peut traduire ce résultat en disant que l'on a des isomorphismes de $\mathbf{A}$-modules au niveau des composantes symétriques homogènes de degré d :

$$\cdots \to \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{d+2}]_d^{\mathrm{sym.}} \xrightarrow{X_{d+2}:=0} \mathbf{A}[X_1, \dots, X_{d+1}]_d^{\mathrm{sym.}} \xrightarrow{X_{d+1}:=0} \mathbf{A}[X_1, \dots, X_d]_d^{\mathrm{sym.}}.$$

Exercice 7. On pose $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[U, V] / \langle U^2, V^2 \rangle = \mathbb{Z}[u, v] = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}u \oplus \mathbb{Z}v \oplus \mathbb{Z}uv$.
a. On prend $f = uT + v$ donc $\mathfrak{c} = \langle u, v \rangle$. On a alors

$$\mathrm{Ann}(u) = \mathbf{A}u,\ \mathrm{Ann}(v) = \mathbf{A}v,\ \mathrm{Ann}(\mathfrak{c}) = \mathrm{Ann}(u) \cap \mathrm{Ann}(v) = \mathbf{A}uv \text{ et } \mathrm{D}\big(\mathrm{Ann}(\mathfrak{c})\big) = \mathfrak{c}.$$

b. On pose $g = uT - v$. On a $fg = 0$ mais $g \notin \mathrm{Ann}(\mathfrak{c})[T]$; on a $u \in \mathrm{D}\big(\mathrm{Ann}(\mathfrak{c})\big)$ mais $u \notin \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}[T]}(f)$ (idem pour v).

Exercice 9. Il suffit de prouver le point *1.* On a

$$f(T) = f(X_1) + (T - X_1)f_2(X_1, T)$$

par définition de $f_1 = f$ et f_2. De même

$$f_2(X_1, T) = f_2(X_1, X_2) + (T - X_2)f_3(X_1, X_2, T)$$

par définition de f_3. Donc

$$f(T) = f(X_1) + (T - X_1)f_2(X_1, X_2) + (T - X_1)(T - X_2)f_3(X_1, X_2, T).$$

On continue jusqu'à

$$\begin{aligned} f_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-2}, T) \;=\; & f_{n-1}(X_1, \dots, X_{n-2}, X_{n-1}) + \\ & (T - X_{n-1})f_n(X_1, \dots, X_{n-1}, T), \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} f(T) \;=\; & f_1(X_1) + (T - X_1)f_2(X_1, X_2) + (T - X_1)(T - X_2)f_3(X_1, X_2, X_3) \\ & + \cdots + (T - X_1)\cdots(T - X_{n-1})f_n(X_1, \dots, X_{n-1}, T). \end{aligned}$$

Enfin $f_n(X_1, \dots, X_{n-1}, T)$ est unitaire de degré 1 en T donc

$$f_n(X_1, \dots, X_{n-1}, T) = f_n(X_1, \dots, X_{n-1}, X_n) + (T - X_n).$$

Notez que ceci prouve en particulier que $f_n = S_1 - s_1$.

Exercice 10. Soit $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire de degré d, avec $f \mid X^p - a$ et $1 \leqslant d \leqslant p-1$. Dans un anneau $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$, on écrit $f(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - \alpha_i)$, donc $\alpha_i^p = a$ et $\prod_i \alpha_i = b$ avec $b = (-1)^d f(0) \in \mathbf{A}$. En élevant à la puissance p, $a^d = b^p$. Mais $\operatorname{pgcd}(d, p) = 1$, donc $1 = ud + vp$, puis $a = a^{ud}a^{vp} = (b^u a^v)^p$.

Exercice 11. Notons e_{ij} la matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ ayant un seul coefficient non nul, le coefficient en position (i, j), égal à 1. Le module $S_n(\mathbf{A})$ est libre et une base est formée par les e_{ii} pour $i \in [\![1..n]\!]$ et les $e_{ij} + e_{ji}$ pour $1 \leqslant i < j < n$. Il suffit de traiter le cas où $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Alors, $\varphi_A = \operatorname{Diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2)$, et $\varphi_A(e_{ij} + e_{ji}) = \lambda_i\lambda_j(e_{ij} + e_{ji})$. D'où $\det(\varphi_A) = (\det A)^{n+1}$.

Exercice 12. Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbf{B}/\mathbf{A}$. Il est clair que $\underline{e}$ est une famille $\mathbf{K}$-libre. Soit $x = b/b' \in \mathbf{L}$ avec $b \in \mathbf{B}$, $b' \in \mathbf{B} \setminus \{0\}$; on écrit :

$$x = (b\widetilde{b'})/(b'\widetilde{b'}) = b\widetilde{b'}/\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b') \in \mathbf{K}e_1 + \cdots + \mathbf{K}e_n.$$

Exercice 14. *1.* Il suffit de le prouver pour la matrice générique $(a_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ à coefficients dans $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[(a_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]$: cette matrice est diagonalisable dans un suranneau de $\mathbf{A}$.

2. Résulte immédiatement du *1.*

Exercice 15. *1.* On a $\#R \leqslant \sum_{d=1}^{n-1} q^d < 1 + q + \cdots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$.

A fortiori, $\#R < q^n - 1 < q^n$. Soit $x \in \mathbf{L} \setminus R$ et $d = [\,\mathbf{K}[x] : \mathbf{K}\,]$. On a $x^{q^d} = x$, et comme $x \notin R$, c'est que $d = n$.

2. Le polynôme cyclotomique est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$. En effet, le seul polynôme irréductible de degré 2 de $\mathbb{F}_2[X]$ est $X^2 + X + 1$, Φ_5 est sans racine dans $\mathbb{F}_2$, et $\Phi_5 \neq (X^2 + X + 1)^2$. On a $\#\mathbf{L} = 2^4 = 16$, $\#\mathbf{L}^\times = 15$, mais $x^5 = 1$.

3. Soit $\sigma : \mathbf{L} \to \mathbf{L}$ l'automorphisme de Frobenius de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$, i.e. $\sigma(x) = x^q$. On vérifie facilement que $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x]$ si, et seulement si, les $\sigma^i(x)$, $i \in [\![0..n-1]\!]$, sont

deux à deux distincts. Cette condition équivaut à $\sigma^k(x) = x \Rightarrow k \equiv 0 \bmod n$, i.e. $x^{q^k} = x \Rightarrow k \equiv 0 \bmod n$. Mais

$$x^{q^k} = x \iff x^{q^k-1} = 1 \iff o(x) \mid q^k - 1 \iff q^k \equiv 1 \bmod o(x).$$

On en déduit, pour $x \in \mathbf{L}^\times$, que $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x]$ si, et seulement si, l'ordre de q dans le groupe des inversibles modulo $o(x)$ est exactement n.

Exercice 19. *1.* On a $\langle g, g'\rangle \langle g, h\rangle \subseteq \langle g, g'h\rangle = \langle g, g'h + gh'\rangle$.
De même, $\langle h, h'\rangle \langle g, h\rangle \subseteq \langle h, g'h + gh'\rangle$. En faisant le produit, il vient :

$$\langle g, g'\rangle \langle h, h'\rangle \langle g, h\rangle^2 \subseteq \langle g, g'h + h'g\rangle \langle h, g'h + h'g\rangle \subseteq \langle gh, g'h + h'g\rangle .$$

Pour le deuxième point de la question on applique le résultat que l'on vient d'établir et le fait 7.8. NB : cela résulte aussi de l'équation (12), fait 7.9.
2. Il suffit de traiter le cas de deux polynômes séparables f, $g \in \mathbf{A}[T]$.
Soit $h = \operatorname{pgcd}(f, g)$. On a $f = hf_1$, $g = hg_1$, avec $\operatorname{pgcd}(f_1, g_1) = 1$.
Puisque g est séparable, $\operatorname{pgcd}(h, g_1) = 1$, donc $\operatorname{pgcd}(hf_1, g_1) = 1 = \operatorname{pgcd}(f, g_1)$.
Les polynômes f, g_1 sont séparables, comaximaux, donc leur produit $\operatorname{ppcm}(f, g)$ est séparable.

Exercice 20. *1* et *2.* Ce sont des cas particuliers de ce qui est affirmé dans le fait II-5.5.
3. On suppose $L = \mathbf{A}^m$. Si $A \in \mathbb{M}_m(\mathbf{A})$ est une matrice dont les colonnes forment une base de F, elle est injective et son déterminant est régulier. Si B est une matrice correspondant à l'inclusion $F \subseteq E$, on a

$$|\, L : F \,| = \langle \det A\rangle, \quad |\, F : E \,| = \mathcal{D}_m(B) \quad \text{et} \quad |\, L : E \,| = \mathcal{D}_m(AB),$$

d'où l'égalité souhaitée.
4. On a $|\, N : \delta N \,| = \langle \delta^n\rangle$. On a aussi $|\, N : \delta M \,| = \delta^{n-1} \langle \delta, a_1, \ldots, a_n\rangle$: prendre pour système générateur de δM la famille $\delta e_1, \ldots, \delta e_n, \delta z$ où $e_1, \ldots, e_n$ est une base de N (on utilise $M = N + \mathbf{A}z$), et calculer l'idéal déterminantiel d'ordre n d'une matrice de type suivant (pour $n = 3$) : $\begin{bmatrix} \delta & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \delta & 0 & a_2 \\ 0 & 0 & \delta & a_3 \end{bmatrix}$.
Alors :

$$|\, N : \delta N \,| = |\, N : \delta M \,|\, |\, \delta M : \delta N \,| = |\, N : \delta M \,|\, |\, M : N \,|,$$

i.e. $\langle \delta^n\rangle = |\, M : N \,| \, \delta^{n-1} \langle \delta, a_1, \ldots, a_n\rangle$.
En simplifiant par δ^{n-1} on obtient l'égalité $\langle \delta\rangle = d \langle \delta, a_1, \ldots, a_n\rangle$.

Exercice 22. *1.* Si $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = a\mathbf{A}$ avec a régulier, alors $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$ équivaut à $\mathfrak{b}\mathfrak{a}' \subseteq a\mathbf{A}$. On note que le test fournit un idéal de type fini $\mathfrak{c} = \mathfrak{b}\mathfrak{a}'/a$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$ en cas de réponse positive, et un élément $b \notin \mathfrak{a}$ parmi les générateurs de $\mathfrak{b}$ en cas de réponse négative.
2. Il est clair que les $\mathfrak{q}_i$ sont inversibles (et donc de type fini).
On fait les tests $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_i$. Si une réponse est positive, par exemple $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q}_1$, on écrit $\mathfrak{c}\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{b}$, d'où $\mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{c}$, et l'on termine par récurrence.
Si tous les tests sont négatifs, on a des $x_i \in \mathfrak{b}$ et $y_i \in \mathbf{A}$ tels que $1 - x_i y_i \in \mathfrak{q}_i$ (on suppose ici que les quotients $\mathbf{A}/\mathfrak{q}_i$ sont des corps discrets), d'où en faisant le produit $1 - b \in \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{b}$ avec $b \in \mathfrak{b}$, donc $1 \in \mathfrak{b}$.
Voyons enfin la question de l'unicité. Supposons que $\mathfrak{b} = \mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_k$.
Il suffit de montrer que si un idéal maximal $\mathfrak{q}$ de type fini contient $\mathfrak{b}$, il est égal à l'un des $\mathfrak{q}_i$ ($i \in [\![1..k]\!]$).

Puisque l'on peut tester $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}_i$, si chacun des tests était négatif on aurait explicitement $1 \in \mathfrak{q} + \mathfrak{q}_i$ pour chaque i et donc $1 \in \mathfrak{q} + \mathfrak{b}$.
NB : si l'on ne suppose pas $\mathfrak{b}$ de type fini et $\mathbf{A}$ à divisibilité explicite, la démonstration du petit théorème de Kummer nécessiterait que l'on sache au moins tester $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{b}$ pour tout « sous-produit » $\mathfrak{q}$ de $\mathfrak{q}_1 \cdots \mathfrak{q}_n$.

Exercice 24. Supposons $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$; comme $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, dans $\mathbf{A}[T]/\mathfrak{b}$, $\overline{x}$ est nilpotent et inversible (puisque $\overline{x}\overline{T} = 1$), donc $\mathbf{A}[T]/\mathfrak{b}$ est l'anneau nul, i.e. $1 \in \mathfrak{b}$.
Inversement, supposons $1 \in \mathfrak{b}$ et raisonnons dans l'anneau $\mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}[T] = (\mathbf{A}/\mathfrak{a})[T]$. Puisque $1 \in \mathfrak{b}$, $1 - xT$ est inversible dans cet anneau, donc x est nilpotent dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, i.e. $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Exercice 25. *(Décomposition de Jordan-Chevalley-Dunford)*
Existence. On cherche un zéro D de f, « voisin de M », (i.e., avec $M - D$ nilpotent), dans l'anneau commutatif $\mathbf{K}[M]$. On a par hypothèse $f(M)^k = 0$ pour un $k \leqslant n$, et si $uf^k + vf' = 1$, on obtient $v(M)f'(M) = \mathrm{I}_n$.
En conséquence, la méthode de Newton, démarrant avec $x_0 = M$, donne la solution dans $\mathbf{K}[M]$ en $\lceil \log_2(k) \rceil$ itérations.
Unicité. La solution est unique, sous la condition $f(D) = 0$, dans tout anneau commutatif contenant $\mathbf{K}[M]$, par exemple dans $\mathbf{K}[M, N]$ si le couple (D, N) résout le problème posé.
Lorsque l'on suppose seulement que le polynôme minimal de D est séparable, l'unicité est plus délicate.
Un solution serait de démontrer directement que le polynôme caractéristique de D est nécessairement égal à celui de M, mais ce n'est pas si simple [12].
Appelons (D_1, N_1) la solution dans $\mathbf{K}[M]$ donnée par la méthode de Newton. Puisque D et N commutent, elles commutent avec $M = D + N$ et donc avec D_1 et N_1 car ils appartiennent à $\mathbf{K}[M]$. On en déduit que $D - D_1$ est nilpotente car elle est égale à $N_1 - N$ avec N et N_1 nilpotentes qui commutent. Or l'algèbre $\mathbf{K}[D, D_1]$ est étale d'après le théorème VI-1.7, donc elle est réduite, et $D = D_1$.

Exercice 26. On a $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}x$ avec x séparablement entier sur $\mathbf{A}$. Notons $z \mapsto \widetilde{z}$ l'automorphisme de l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ qui échange x et $-b - x$.
Pour $z \in \mathbf{B}$, on a $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(z)(T) = (T - z)(T - \widetilde{z})$.
Ainsi $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(ax)(T) = T^2 + abT + a^2c$, et son discriminant est égal à $a^2\Delta$.
Soit $\varepsilon \in \mathbf{A}$ nilpotent non nul et posons $y = (\varepsilon - 1)x$. Alors, y est séparablement entier sur $\mathbf{A}$ car $(\varepsilon - 1)^2\Delta$ est inversible. En outre, l'élément $z = x + y = \varepsilon x$ est nilpotent non nul. Supposons que $\varepsilon^2 = 0$ et soit $g \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme unitaire qui annule z, on va montrer que g n'est pas séparable.
Écrivons $g(X) = u + vX + X^2h(X)$, alors $z^2 = 0$, donc $u + vz = 0$.
Puisque $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}x$, on obtient $u = v\varepsilon = 0$, puis $g(X) = X\ell(X)$ avec $\ell(0) = v$ non inversible (sinon, $\varepsilon = 0$). Enfin, $\mathrm{disc}(g) = \mathrm{disc}(\ell)\ \mathrm{Res}(X, \ell)^2 = \mathrm{disc}(\ell)\ v^2$ est non inversible.

12. En caractéristique nulle, une astuce consiste à récupérer le polynôme caractéristique d'une matrice A à partir des $\mathrm{Tr}(A^k)$ en suivant la méthode de Le Verrier.

Exercice 27.
On va se ramener à $i = j = n-1$, $i' = j' = n$ à l'aide de matrices de permutations P_σ. On rappelle tout d'abord que :

$$(P_\tau A P_\sigma)_{i,j} = A_{\tau^{-1}(i),\sigma(j)}, \qquad \widetilde{P_\tau A P_\sigma} = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\tau) P_{\sigma^{-1}} \widetilde{A} P_{\tau^{-1}}$$

Notons $G(A,i,j,i',j')$ le membre gauche de l'égalité à démontrer. Alors :

$$G(P_\tau A P_\sigma, i, j, i', j') = G(A, \sigma(i), \tau^{-1}(j), \sigma(i'), \tau^{-1}(j'))$$

On a la même propriété d'invariance pour le membre droit. On peut donc supposer, quitte à remplacer A par $P_\tau A P_\sigma$, que $i = j = n-1$, $i' = j' = n$. On applique alors le point *7* du lemme III-1.4).

Exercice 28.
2 ⇒ 1. Si $f_p = 1$ ou $g_q = 1$ l'implication est claire d'après le lemme d'élimination de base. L'implication est donc valide après localisation en f_p ou g_q. On conclut par le principe local-global de base.
1 ⇒ 2. En développant le déterminant de la matrice de Sylvester selon la première colonne on obtient que $\mathrm{Res}_X(f,p,g,q) \in \langle f_p, g_q \rangle$.
Par ailleurs d'après le fait 7.1, $\mathrm{Res}_X(f,p,g,q)$ s'écrit toujours sous forme

$$u(X)f(X) + v(X)g(X).$$

1 ⇒ 4. La matrice de Sylvester $\mathrm{Syl}_X(f,p,g,q)$ page 123 peut être vue comme la matrice dont les lignes sont les coordonnées des polynômes

$$X^{q-1}F,\ \ldots,\ XY^{q-2}F,\ Y^{q-1}F,\ X^{p-1}G,\ \ldots,\ XY^{p-2}G,\ Y^{p-1}G$$

sur la base

$$(X^{p+q-1}, X^{p+q-2}Y, \ldots, XY^{p+q-2}, X^{p+q-1})$$

du module des polynômes homogènes de degré $p+q-1$. Si son déterminant est inversible, c'est que la matrice de l'application $(U,V) \mapsto UF + VG$ (pour les modules convenables à la source et au but) est surjective.

Exercice 29.
1. Si $n = \deg(f) = 1$ ou 0, on a $f_1 = f$ et les conclusions sont satisfaites. Si $n \geqslant 2$ on raisonne comme suit. On suppose que $f = \prod_k (x-a_k)^{m_k}$, avec les $a_k - a_\ell$ inversibles si $k \neq \ell$. On écrit $f = (x-a_k)^{m_k} f_k$ et l'on a $\langle f_k, x-a_k \rangle = \langle 1 \rangle$. On a :

$$f' = m_k (x-a_k)^{m_k-1} g_k + (x-a_k)^{m_k} g_k' = (x-a_k)^{m_k-1}\, u_k.$$

avec

$$u_k = m_k g_k + (x-a_k) g_k'.$$

Si $m_k = 0$ dans $\mathbf{K}$, on obtient que le pgcd h de f et f' est divisible par $(x-a_k)^{m_k}$. Si $m_k \in \mathbf{K}^\times$, alors $\langle u_k, x-a_k \rangle = \langle 1 \rangle$, et l'on obtient que f' est divisible par $(x-a_k)^{m_k-1}$ mais pas par $(x-a_k)^{m_k}$. En fin de compte, on obtient l'égalité

$$f_1 = \prod\nolimits_{k:m_k \in \mathbf{K}^\times} (x-a_k).$$

Dans tous les cas, h est séparable.
Et si tous les $m_k \in \mathbf{K}^\times$, (par exemple si $n! \in \mathbf{K}^\times$), alors f divise f_1^n.
2. Cette question ne se comprend que d'un point de vue constructif, car en mathématiques classiques tout corps possède une clôture algébrique, et il suffit alors de se reporter au point *1.*
Sans doute il faut attendre d'avoir lu le chapitre VII pour se convaincre que l'on peut toujours « faire comme si » l'on disposait d'un corps de racines pour le polynôme f. On considère d'abord les zéros x_k dans l'algèbre de décomposition

universelle $\mathbf{A}$ de f. Si $x_1 - x_2 \in \mathbf{A}^\times$, f est séparable, $h = 1$ et $f_1 = f$.
Sinon, on remplace $\mathbf{A}$ par un quotient de Galois $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$. Dans ce quotient $\mathbf{B}$, on a par exemple $x_1 = x_2$. On considère ensuite $x_1 - x_3$ dans $\mathbf{B}$. S'il est nul ou inversible, tout est OK (et on continue en comparant les autres paires de racines). Sinon, il faut considérer un quotient de Galois plus poussé. En fin de compte, après avoir renuméroté les x_i on est certain d'obtenir dans un quotient de Galois $\mathbf{C}$ de l'algèbre de décomposition universelle une égalité

$$f(x) = \prod_{k=1}^{\ell} (x - x_k)^{m_k}, \text{ avec les } x_k - x_j \in \mathbf{C}^\times \text{ pour } k \neq j.$$

La démonstration donnée au point *1* fonctionne alors dans ce nouveau cadre. On obtient en effet

$$f_1 = \prod_{k:k\leqslant\ell,\, m_k\in\mathbf{K}^\times} (x - x_k).$$

Puis $\mathrm{Res}_x(f_1, f_1')$ peut être calculé dans $\mathbf{C}$, où il est égal à un sous-produit de $\pm\prod_{j,k:j<k\leqslant\ell}(x_j - x_k)^2$. C'est donc un élément de $\mathbf{K} \cap \mathbf{C}^\times = \mathbf{K}^\times$.
Et si tous les $m_k \in \mathbf{K}^\times$, (par exemple si $n! \in \mathbf{K}^\times$), alors f divise f_1^n.
3a. Si $\langle f, f'\rangle = \langle h\rangle$, on a des polynômes u, v, f_2 et f_1 tels que

$$uf + vf' = h,\ hf_1 = f \text{ et } hf_2 = f'.$$

Cela donne $h(uf_1 + vf_2) = h$. Puisque h divise f, il est primitif donc régulier, d'où $uf_1 + vf_2 = 1$. Et l'égalité matricielle du point *3a* est bien satisfaite.

$$\begin{bmatrix} u & v \\ -f_2 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}.$$

3b. On considère l'anneau $\mathbb{Z}[(c_i)_{i\in[\![1..\ell]\!]}]$, où les c_i sont d'une part des indéterminées que l'on prend pour les coefficients des polynômes f, h, u, v, f_2 et f_1, et d'autre part des indéterminées pour obtenir une combinaison linéaire des coefficients de f égale à 1. On a choisi pour les polynômes en x les degrés formels correspondant aux équations que l'on a par hypothèse dans $\mathbf{k}[x]$.
On considère le système polynomial sur les indéterminées (c_i) qui correspond aux équations suivantes dans $\mathbb{Z}[(c_i)][x]$:

$$f \text{ est primitif},\ uf_1 + vf_2 = 1,\ hf_1 = f,\ hf_2 = f'.$$

Soit alors $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathbb{Z}[(c_i)]$ engendré par ce système polynomial de $\mathbb{Z}[(c_i)]$. On obtient ainsi l'anneau « générique » de la situation considérée :

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbb{Z}[(c_i)]/\mathfrak{a}.}$$

Il est clair que tout se passe dans le sous-anneau $\mathbf{k}'$ (de $\mathbf{k}$) quotient de l'anneau générique $\mathbf{A}$, obtenu en spécialisant les indéterminées c_i en leurs valeurs dans $\mathbf{k}$.
Si l'on évalue cette situation dans un corps fini $\mathbf{F}$, i.e. si l'on considère un homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{F}$, on a $1 \in \langle f_1(x), f_1'(x)\rangle \subseteq \mathbf{F}[x]$ en vertu du point *1*. En effet, comme on a forcé $f(x)$ à être primitif, son image dans $\mathbf{F}[x]$ est un polynôme non nul, et l'on peut appliquer le point *1*, en notant que tout corps fini possède une clôture algébrique. Notons que si au contraire $f(x)$ était le polynôme nul de $\mathbf{F}[x]$, les équations que l'on impose n'interdiraient pas d'avoir $f_1 = 0$.
Notons $\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \langle f_1(x), f_1'(x)\rangle \subseteq \mathbb{Z}[x, (c_i)_{i\in[\![1..\ell]\!]}]$. On a donc obtenu que le système polynomial qui correspond à l'idéal $\mathfrak{b}$ n'a de solution dans aucun corps fini.
Par le Nullstellensatz formel on en déduit que $1 \in \mathfrak{b}$, ce qui veut aussi dire que

$1 \in \langle f_1(x), f_1'(x)\rangle \subseteq \mathbf{A}[x]$. Et ceci implique que $1 \in \langle f_1(x), f_1'(x)\rangle \subseteq \mathbf{k}[x]$, car cette appartenance est déjà certifiée avec le sous-anneau $\mathbf{k}'$ de $\mathbf{k}$ qui est un quotient de $\mathbf{A}$.
Notez que l'on n'a pas besoin de démontrer le point *2* pour obtenir le résultat général du point *3b* (qui contient le point *2* comme cas particulier).
3c. Voyons la dernière question : *si en outre* $n! \in \mathbf{k}^\times$*, alors* f *divise* ${f_1}^n$ *?* Ici n est a priori le degré formel de f, qui peut être son vrai degré si on le connaît.
On doit introduire une indéterminée supplémentaire z pour l'inverse de $n!$.
Première solution partielle.
Notons R le reste de la division de ${f_1}^n$ par f (que l'on suppose ici unitaire). Alors on sait que pour tout zéro de l'idéal $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \langle zn! - 1\rangle$ dans un corps fini, les coefficients de R sont nuls. Le Nullstellensatz formel nous dit alors que les coefficients de R sont dans le nilradical $\sqrt{\mathfrak{c}}$ de $\mathfrak{c}$.
En conclusion, dans un anneau $\mathbf{k}$ tel que $n! \in \mathbf{k}^\times$, si les hypothèses sont satisfaites, et si f est unitaire, on peut affirmer que les coefficients de R sont nilpotents. Comme conséquence, une certaine puissance de $R = {f_1}^n - fq$ est nulle, et donc f divise une puissance de f_1.
Deuxième solution partielle.
On va obtenir la même conclusion finale sans supposer f unitaire.
On introduit une indéterminée z et l'on considère l'idéal

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{a} + \langle f(x), zn! - 1\rangle \subseteq \mathbb{Z}[x, z, (c_i)_{i\in[\![1..\ell]\!]}].$$

D'après le point *1*, le polynôme $f_1(x)$ s'annule en tout zéro de $\mathfrak{d}$ dans tout corps fini. Le Nullstellensatz formel implique qu'une puissance de f_1 est dans $\mathfrak{d}$, d'où il suit que dans $\mathbf{k}[x]$, f divise une puissance de f_1.
4. Merci au lecteur qui résoudra cette question, et qui éclaircira complètement le dernier point de la question *3*.

Problème 1.
1. Soit $f(X) = X^n + c = (X - x_1)\cdots(X - x_n)$. Alors, $f' = nX^{n-1}$ et

$$\mathrm{Res}(f, f') = f'(x_1)\cdots f'(x_n) = n^n(x_1\cdots x_n)^{n-1} = n^n\big((-1)^n c\big)^{n-1} = n^n c^{n-1}.$$

Variante :

$$\mathrm{Res}(f', f) = n^n \mathrm{Res}(X^{n-1}, f) = n^n \textstyle\prod_{i=1}^{n-1} f(0) = n^n c^{n-1}.$$

2. Soit $f(X) = X^n + bX + c = (X - x_1)\cdots(X - x_n)$;

$$\mathrm{disc}(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \textstyle\prod_{i=1}^n y_i \quad \text{avec} \quad y_i = f'(x_i) = nx_i^{n-1} + b\,.$$

Pour calculer le produit des y_i, on calcule le produit P des $x_i y_i$ (celui des x_i vaut $(-1)^n c$). On a $x_i y_i = nx_i^n + bx_i = ux_i + v$, avec $u = (1-n)b$, $v = -nc$. On utilise les fonctions symétriques élémentaires $S_j(x_1, \ldots, x_n)$ (presque toutes nulles) :

$$\textstyle\prod_{i=1}^n (ux_i + v) = \sum_{j=0}^n u^j S_j(x_1, \ldots, x_n) v^{n-j}.$$

Il vient :

$$P = v^n + u^n S_n + u^{n-1} S_{n-1} v = v^n + u^n(-1)^n c + u^{n-1}(-1)^{n-1} bv\,,$$

c'est-à-dire, en remplaçant u et v par leurs valeurs :

$$\begin{aligned} P &= (-1)^n n^n c^n + (n-1)^n b^n c - n(n-1)^{n-1} b^n c \\ &= (-1)^n n^n c^n + b^n c\big((n-1)^n - n(n-1)^{n-1}\big) \\ &= (-1)^n n^n c^n - b^n c(n-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

En divisant par $(-1)^n c$, on obtient le produit des y_i puis la formule annoncée.

3. Laissé à la sagacité de la lectrice qui pourra consulter [183].
4. En notant $\Delta_p = \operatorname{disc}(\Phi_p)$, on a l'égalité
$$\operatorname{disc}(X^p-1) = \operatorname{Res}(X-1,\Phi_p)^2 \operatorname{disc}(X-1)\Delta_p = \Phi_p(1)^2\Delta_p = p^2\Delta_p.$$
En utilisant $\operatorname{disc}(X^n-1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n (-1)^{n-1}$, on obtient :
$$\Delta_2 = 1, \qquad \Delta_p = (-1)^{\frac{p-1}{2}} p^{p-2} \quad \text{pour } p \geqslant 3.$$
5. Soit $q = p^{k-1}$; montrons d'abord que $r := \operatorname{Res}(X^q-1,\Phi_{p^k}) = p^q$.
Avec $X^q-1 = \prod_{i=1}^q (X-\zeta_i)$, on a $r = \prod_{i=1}^q \Phi_{p^k}(\zeta_i)$. Par ailleurs :
$$\Phi_{p^k}(X) = \tfrac{Y^p-1}{Y-1} = Y^{p-1}+\cdots+Y+1 \quad \text{avec} \quad Y = X^q.$$
En faisant $X := \zeta_i$, on doit faire $Y := 1$, on obtient $\Phi_{p^k}(\zeta_i) = p$, puis $r = p^q$.
On note $D_k = \operatorname{disc}(X^{p^k}-1)$. Puisque $X^{p^k}-1 = (X^q-1)\Phi_{p^k}(X)$, on a :
$$D_k = \operatorname{Res}(X^q-1,\Phi_{p^k})^2 D_{k-1} \operatorname{disc}(\Phi_{p^k}) = p^{2q} D_{k-1} \operatorname{disc}(\Phi_{p^k}).$$
On utilise $\operatorname{disc}(X^n-1) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n (-1)^{n-1}$ pour $n = p^k$ et q :
$$D_k/D_{k-1} = \varepsilon\, p^N, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad N = kp^k-(k-1)q = \big(k(p-1)+1\big)\,q.$$
Pour obtenir $\operatorname{disc}(\Phi_{p^k})$, il faut diviser D_k/D_{k-1} par p^{2q}, ce qui remplace l'exposant N par $N-2q = (k(p-1)-1)q$. Quant au signe ε, pour p impair :
$$\varepsilon = (-1)^{\frac{p^k-1}{2}}(-1)^{\frac{q-1}{2}} = (-1)^{\frac{p^k-q}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$
Pour $p=2$, $\varepsilon = 1$ pour $k \geqslant 3$ ou $k = 1$ et $\varepsilon = -1$ pour $k = 2$.
6. Si n n'est pas la puissance d'un nombre premier, on peut écrire $n = mp^k$ avec p premier, $\operatorname{pgcd}(m,p) = 1$, $k \geqslant 1$ et $m \geqslant 2$. Alors, $\Phi_n(X) = \Phi_m(X^{p^k})/\Phi_m(X^{p^{k-1}})$, égalité dans laquelle on réalise $X = 1$ pour obtenir $\Phi_n(1) = 1$. Les autres points sont faciles.
7. Soient f, g deux polynômes unitaires, avec $d = \deg f$, $e = \deg g$ et $d, e \geqslant 1$. Notons $\mathbf{A}[x] = \mathbf{A}[X]/\langle f(X)\rangle$, $\mathbf{A}[y] = \mathbf{A}[Y]/\langle g(Y)\rangle$. Notons $f \otimes g$ le polynôme caractéristique de $x \otimes y$ dans $\mathbf{A}[x] \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}[y] = \mathbf{A}[X,Y]/\langle f(X), g(Y)\rangle$. C'est un polynôme unitaire de degré de. Lorsque $f(X) = \prod_i (X-x_i)$, $g(Y) = \prod_j (Y-y_j)$, on obtient $(f\otimes g)(T) = \prod_{i,j}(T-x_iy_j)$. On voit facilement que
$$\operatorname{disc}(f\otimes g) = \textstyle\prod_{(i,j)<(i',j')}(x_iy_j - x_{i'}y_{j'})^2 = \operatorname{disc}(f)^e \operatorname{disc}(g)^d f(0)^e g(0)^d \pi\,,$$
où $\pi \in \mathbf{A}$ est le produit $\prod_{i\neq i',\, j\neq j'}(x_iy_j - x_{i'}y_{j'})$.
Soient n, $m \geqslant 2$ avec $\operatorname{pgcd}(n,m) = 1$, ζ_n, ζ_m, ζ_{nm} des racines de l'unité d'ordres respectifs n, m, nm. Par le théorème chinois, on obtient $\Phi_{nm} = \Phi_n \otimes \Phi_m$.
Comme $\Phi_n(0) = \Phi_m(0) = 1$ (car $n, m \geqslant 2$), on a l'égalité
$$\Delta_{nm} = \Delta_n^{\varphi(m)} \Delta_m^{\varphi(n)}\, \pi\,,$$
où $\pi \in \mathbb{Z}$ est le produit suivant.
$$\textstyle\prod_{i\neq i',\, j\neq j'}(\zeta_n^i\zeta_m^j - \zeta_n^{i'}\zeta_m^{j'}), \text{ pour } i,i' \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \text{ et } j,j' \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times.$$
Soit $C \subset (\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times \times (\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^\times$ l'ensemble des couples (a,b) avec a, b inversibles modulo nm, $a \not\equiv b \bmod n$, $a \not\equiv b \bmod m$. Le théorème chinois nous donne
$$\pi = \textstyle\prod_{(a,b)\in C}(\zeta_{nm}^a - \zeta_{nm}^b).$$
Soit $z \mapsto \overline{z}$ la conjugaison complexe. Alors, π est de la forme $z\overline{z}$, donc $\pi \in \mathbb{N}^*$.
En effet, $(a,b) \in C \Rightarrow (-a,-b) \in C$ avec $(a,b) \neq (-a,-b)$.
Par ailleurs, pour $c \in \mathbb{Z}$ non multiple de n, ni de m, considérons l'élément ζ_{nm}^c qui est d'ordre $nm/\operatorname{pgcd}(c,nm) = n'm'$ avec $n' = n/\operatorname{pgcd}(c,n) > 1$, $m' > 1$

et $\operatorname{pgcd}(n', m') = 1$. Donc $n'm'$ n'est pas la puissance d'un nombre premier, et, d'après la question précédente, $1 - \zeta_{nm}^c$ est inversible dans $\mathbb{Z}[\zeta_{nm}^c]$, a fortiori dans $\mathbb{Z}[\zeta_{nm}]$. On en déduit que π est inversible dans $\mathbb{Z}[\zeta_{nm}]$, donc dans $\mathbb{Z}$.
Bilan : $\pi = 1$, et $\Delta_{nm} = \Delta_n^{\varphi(m)} \Delta_m^{\varphi(n)}$.
Enfin, si la formule qui donne le discriminant cyclotomique est vérifiée pour deux entiers n, m étrangers entre eux, elle est vérifiée pour le produit nm (utiliser le premier point). Or elle est vraie pour des entiers puissances d'un premier d'après la question *5*, donc elle est vraie pour tout entier $\geqslant 3$.

Problème 2. *4.* Considérons $p \equiv 1 \bmod 4$. Le polynôme $Y^{\frac{p-1}{2}} - 1 \in \mathbb{F}_p[Y]$ est de degré $< \#\mathbb{F}_p^\times$. Il existe donc $y \in \mathbb{F}_p^\times$ non racine de ce polynôme ; on pose $x = y^{\frac{p-1}{4}}$ de sorte que $x^2 = y^{\frac{p-1}{2}} \neq 1$; mais $x^4 = 1$ donc $x^2 = -1$. En fait, pour la moitié des $y \in \mathbb{F}_p^\times$, on a $y^{\frac{p-1}{2}} = 1$ (les carrés), et pour l'autre moitié (les non-carrés), on a $y^{\frac{p-1}{2}} = -1$.
Voyons la question de l'algorithme rapide. On entend par là que le temps d'exécution a pour ordre de grandeur une petite puissance du nombre de chiffres de p.
On détermine d'abord un $x \in \mathbb{F}_p$ tel que $x^2 = -1$. Pour cela on tire au hasard des entiers y sur $[\![2..(p-1)/2]\!]$ et l'on calcule $y^{\frac{p-1}{4}}$ dans $\mathbb{F}_p$ (on utilise pour cela un algorithme rapide d'exponentiation modulo p). La probabilité d'échec (lorsque le résultat est ± 1) est de $1/2$ à chaque tirage.
Une fois trouvé un tel x, il reste à calculer $\operatorname{pgcd}(x + i, p)$ avec l'algorithme d'Euclide. Comme la norme est divisée par au moins 2 à chaque étape, l'algorithme est rapide.
NB : la méthode brutale qui consisterait à dire, « puisque $p \equiv 1 \bmod 4$, il possède un facteur de la forme $m + in$, et il ne reste qu'à essayer tous les $m < p$ », s'avère rapidement impraticable dès que p devient grand.
5. La décomposition des diviseurs premiers de m est traitée dans le point précédent. Il reste à décomposer $n + qi$.
Pour ce qui concerne la décomposition de $n^2 + q^2$, on sait déjà que les seuls nombres premiers y figurant sont 2 (avec l'exposant 1) ou des $p \equiv 1 \bmod 4$.
Si $u + vi$ est facteur d'un p qui divise $n^2 + q^2$, alors $u + vi$ ou $u - vi$ divise $n + qi$.
Si p figure avec l'exposant k dans $n^2 + q^2$, et si $u + vi$ divise $n + qi$, alors $u + vi$ figure avec l'exposant k dans $n + qi$.
Si $s = 2^k \prod_i p_i^{m_i} \prod_j q_j^{n_j}$ avec les $p_i \equiv 3 \bmod 4$ et les $q_j \equiv 1 \bmod 4$, alors la condition pour que s soit somme de deux carrés est que les m_i soient tous pairs.
On note qu'à une écriture $s = a^2 + b^2$ avec $0 < a \leqslant b$ correspondent deux éléments conjugués $a \pm ib$ définis à association près (par exemple multiplier par i revient à permuter a et b). Il s'ensuit que dans le cas où s est somme de deux carrés, le nombre d'écritures de s comme somme de deux carrés est égal à $(1/2)\prod_j (1 + n_j)$ sauf si les n_j sont tous pairs, auquel cas on rajoute ou retranche $1/2$ selon que l'on considère qu'une écriture $a^2 + 0^2$ est ou n'est pas légitime comme somme de deux carrés.

Par exemple avec $5 = \mathrm{N}(a)$, $a = 2 + i$ et $13 = \mathrm{N}(b)$, $b = 3 + 2i$ on obtient :

$$\begin{aligned}
5 = \mathrm{N}(a) \quad &\text{donne} \quad 5 = 2^2 + 1^2,\\
10 = \mathrm{N}\big(a(1+i)\big) = \mathrm{N}(1+3i) \quad &\text{donne} \quad 10 = 1^2 + 3^2,\\
5^3 = \mathrm{N}(a^3) = \mathrm{N}(5a) \quad &\text{donne} \quad 125 = 2^2 + 11^2 = 10^2 + 5^2,\\
5^4 = \mathrm{N}(a^4) = \mathrm{N}(5a^2) = \mathrm{N}(25) \quad &\text{donne} \quad 625 = 7^2 + 24^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2 + 0,\\
5^2 \times 13 = \mathrm{N}(a^2 b) = \mathrm{N}(a^2\overline{b}) = \mathrm{N}(5b) \quad &\text{donne} \quad 325 = 18^2 + 1 = 17^2 + 6^2 = 15^2 + 10^2.
\end{aligned}$$

De même $5^3 \times 13 = \mathrm{N}(a^3 b) = \mathrm{N}(a^3\overline{b}) = \mathrm{N}(5ab) = \mathrm{N}(5a\overline{b})$ donne

$$1625 = 16^2 + 37^2 = 28^2 + 29^2 = 20^2 + 35^2 = 40^2 + 5^2.$$

Et un calcul analogue donne

$$1105 = 5 \times 13 \times 17 = 9^2 + 32^2 = 33^2 + 4^2 = 23^2 + 24^2 = 31^2 + 12^2.$$

Problème 3. *1.* Le discriminant se spécialise et Δ est inversible modulo p. Ensuite on note que $\mathbb{Z}[\alpha]/\langle p\rangle \simeq \mathbb{F}_p[t] := \mathbb{F}_p[T]/\langle f(T)\rangle$. Ceci implique déjà que les idéaux $\langle q_k, p\rangle$ sont maximaux dans $\mathbb{Z}[\alpha]$. Pour $j \neq k$, $\langle Q_j(t)\rangle + \langle Q_k(t)\rangle = \langle 1\rangle$ dans $\mathbb{F}_p[t]$, donc $\langle q_j\rangle + \langle q_k\rangle + \langle p\rangle = \langle 1\rangle$ dans $\mathbb{Z}[\alpha]$. D'où $\langle q_j, p\rangle + \langle q_k, p\rangle = \langle 1\rangle$. Par le théorème chinois, le produit des $\langle q_k, p\rangle$ est donc égal à leur intersection, qui est égale à $\langle p\rangle$ parce que l'intersection des $\langle Q_j(t)\rangle$ dans $\mathbb{F}_p[t]$ est égale à leur produit, qui est nul.
Notons que l'égalité $\langle p\rangle = \prod_{k=1}^{\ell} \langle p, Q_k(\alpha)\rangle$ se maintient dans tout anneau contenant $\mathbb{Z}[\alpha]$. Même chose pour le caractère comaximal des idéaux.
Si l'on passe de $\mathbb{Z}[\alpha]$ à $\mathbf{A}$, la seule chose qui reste donc à vérifier est que les $\langle p, q_k\rangle$ restent bien des idéaux maximaux (stricts). C'est bien le cas et les corps quotients sont isomorphes. En effet, tout élément de $\mathbf{A}$ s'écrit a/m avec $a \in \mathbb{Z}[\alpha]$ et m^2 qui divise Δ (proposition 8.17), donc qui est étranger à p. Et l'homomorphisme naturel $\mathbb{Z}[\alpha]/\langle p, q_k\rangle \to \mathbf{A}/\langle p, q_k\rangle$ est un isomorphisme.
2. On applique l'exercice 22.

Problème 4. *1a.* On en déduit pour des premiers p_1, p_2, ... ne divisant pas n, que $f(\xi^{p_1 p_2 \cdots}) = 0$, i.e. $f(\xi^m) = 0$ pour tout m tel que $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$, ou encore que $f(\xi') = 0$ pour tout ξ', racine primitive n-ième de l'unité. Donc $f = \Phi_n$.
1b. Soit $h(X) = \mathrm{pgcd}_{\mathbb{Q}[X]}\big(f(X), g(X^p)\big)$. Par le théorème de Kronecker $h \in \mathbb{Z}[X]$. On a $h(\xi) = 0$ donc $\deg h \geqslant 1$. Raisonnons modulo p. On a $g(X^p) = g(X)^p$, donc $\overline{h} \mid \overline{f}$ et $\overline{h} \mid \overline{g}^p$. Si π est un facteur irréductible de $\overline{h}$, π^2 est un facteur carré de $X^n - \overline{1}$, mais $X^n - \overline{1}$ est séparable dans $\mathbb{F}_p[X]$.
Note : le discriminant du polynôme $X^n + c$ est $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n c^{n-1}$, en particulier celui de $X^n - 1$ est $(-1)^{\frac{(n+2)(n+3)}{2}} n^n$.
2. Si G un groupe cyclique d'ordre n, on a les isomorphismes classiques

$$\mathrm{End}(G) \simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \text{ (comme anneaux) et } \mathrm{Aut}(G) \simeq \big((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times, \times\big) \text{ (comme groupes).}$$

D'où des isomorphismes canoniques $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n) \simeq (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \simeq \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_n/\mathbb{Q})$.
Si $m \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, on obtient l'automorphisme σ_m de $\mathbf{Q}_n$ défini par $\sigma_m(\zeta) = \zeta^m$ pour $\zeta \in \mathbb{U}_n$.
3. Supposons connaître un corps de racines $\mathbf{L}$ en tant qu'extension strictement finie de $\mathbf{K}$. L'application $\sigma \mapsto \sigma|_{\mathbb{U}_n}$ un morphisme injectif de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ vers $\mathrm{Aut}(\mathbb{U}_n)$. En particulier, $\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ est isomorphe à un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$. Par ailleurs, pour toute racine primitive n-ième de l'unité ξ dans $\mathbf{L}$, on a $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\xi)$. Donc, tous

les facteurs irréductibles de $\Phi_n(X)$ dans $\mathbf{K}[X]$ ont même degré $[\mathbf{L}:\mathbf{K}]$. Mais il n'est pas évident a priori de préciser quel type d'opération sur $\mathbf{K}$ est nécessaire pour factoriser $\Phi_n(X)$ dans $\mathbf{K}[X]$. Voici un exemple où l'on peut déterminer de manière certaine $[\mathbf{L}:\mathbf{K}]$: p est premier $\geqslant 3$, $p^* = (-1)^{\frac{p-1}{2}}p$ et $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{p^*})$. Alors $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{Q}_p$ (Gauss), la seule racine p-ième de l'unité contenue dans $\mathbf{K}$ est 1 et $\Phi_p(X)$ se factorise dans $\mathbf{K}[X]$ en produit de deux polynômes irréductibles de même degré $\frac{p-1}{2}$.

Problème 5. *1a.* D'une part $\mathbf{A}/\mathfrak{p}_i \simeq \mathbb{F}_p[X]\big/\langle\overline{f_i}\rangle$ donc $\mathfrak{p}_i$ est maximal. D'autre part, on a un isomorphisme $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/p\mathbf{A} \xleftrightarrow{\sim} \mathbb{F}_p[X]\big/\langle\overline{\Phi_n}\rangle$:

$$h(\zeta_n) \bmod p \xleftrightarrow{\sim} \overline{h} \bmod \overline{\Phi_n} \quad \text{(pour tout } h \in \mathbb{Z}[X]\text{)}.$$

En notant $\pi : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \overline{\mathbf{A}}$ la surjection canonique, on a $\sqrt{p\mathbf{A}} = \pi^{-1}\big(\mathrm{D}_{\overline{\mathbf{A}}}(0)\big)$ et dans l'isomorphisme ci-dessus :

$$\mathrm{D}_{\overline{\mathbf{A}}}(0) \xleftrightarrow{\sim} \langle\overline{g}\rangle\big/\langle\overline{\Phi_n}\rangle = \textstyle\bigcap_i \langle\overline{f_i}\rangle\big/\langle\overline{\Phi_n}\rangle = \prod_i \langle\overline{f_i}\rangle\big/\langle\overline{\Phi_n}\rangle,$$

d'où le résultat.

1b. Résulte du fait que Φ_n est séparable modulo p.

1c. On vérifie facilement les égalités suivantes dans $\mathbb{Z}[X]$:

$$\Phi_n(X) = \Phi_{mp}(X^{p^{k-1}}) = \frac{\Phi_m(X^{p^k})}{\Phi_m(X^{p^{k-1}})},$$

et donc dans $\mathbb{F}_p[X]$, en notant φ l'indicateur d'Euler :

$$\Phi_n(X) = \frac{\Phi_m(X)^{p^k}}{\Phi_m(X)^{p^{k-1}}} = \Phi_m(X)^{\varphi(p^k)} \qquad \bmod p.$$

Le polynôme Φ_m est séparable modulo p, donc la partie sans facteur carré de Φ_n modulo p est $\overline{g} = \overline{\Phi_m}$; d'où $\sqrt{p\mathbf{A}} = \langle p, \Phi_m(\zeta_n)\rangle$.

Montrons que $p \in \langle\Phi_m(\zeta_n)\rangle$. Si $\zeta_p \in \mathbb{U}_n$ est une racine primitive p-ième de l'unité, on a l'égalité

$$\Phi_p(X) = \textstyle\sum_{i=0}^{p-1} X^i = \prod_{j=1}^{p-1}(X - \zeta_p^j),$$

d'où, en faisant $X := 1$:

$$p = \textstyle\prod_{j=1}^{p-1}(1 - \zeta_p^j) \in \langle 1 - \zeta_p\rangle\,.$$

En appliquant cela à $\zeta_p = \zeta_n^{mp^{k-1}}$, on obtient $p \in \big\langle 1 - \zeta_n^{mp^{k-1}}\big\rangle$. Mais $X^{mp^{k-1}} - 1$ est un multiple de Φ_m dans $\mathbb{Z}[X]$, donc $\zeta_n^{mp^{k-1}} - 1$ est un multiple de $\Phi_m(\zeta_n)$ dans $\mathbf{A}$, d'où $p \in \langle\Phi_m(\zeta_n)\rangle$.

1d. Comme $\sqrt{p\mathbf{A}} = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k = \langle\Phi_m(\zeta_n)\rangle$ est de type fini, il y a un exposant e tel que $(\mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k)^e \subseteq p\mathbf{A}$ et l'on applique l'exercice 22.

Note : on peut prendre $e = \varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$.

2. Le premier point est immédiat. Ensuite, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini non nul de $\mathbf{A}$, il contient un élément z non nul. Alors, $a = \mathrm{N}_{\mathbf{Q}_n/\mathbb{Q}}(z) = z\widetilde{z}$ est un entier non nul appartenant à $\mathfrak{a}$. On écrit $a\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{a}$ comme produit d'idéaux maximaux inversibles et l'on applique de nouveau à l'idéal $\mathfrak{a}$ l'exercice 22.

Problème 6. *1.* Soit $x_0 \in G$ tel que $\varphi(x_0) \neq 1$.

On écrit $\sum_{x\in G}\varphi(x) = \sum_{x\in G}\varphi(xx_0)$, donc $S\varphi(x_0) = S$ avec $S = \sum_{x\in G}\varphi(x)$, c'est-à-dire $\big(1 - \varphi(x_0)\big)S = 0$, d'où $S = 0$.

2. Remarquons d'abord que $\chi^{-1}(-1) = \chi(-1)$ puisque $\chi(-1)^2 = \chi\big((-1)^2\big) = 1$. On écrit :

$$\textstyle\sum_{x+y=z} \chi(x)\chi^{-1}(y) = \sum_{x\neq 0,z} \chi\left(\frac{x}{z-x}\right).$$

Si $z \neq 0$, l'application $x \mapsto \frac{x}{z-x}$ est une bijection de $\mathbf{k} \cup \{\infty\}$ sur $\mathbf{k} \cup \{\infty\}$ qui transforme z en ∞, ∞ en -1, 0 en 0, ce qui donne une bijection de $\mathbf{k}^\times \setminus \{z\}$ sur $\mathbf{k}^\times \setminus \{-1\}$. On peut donc écrire :

$$\textstyle\sum_{x+y=z} \chi(x)\chi^{-1}(y) = \sum_{v\in\mathbf{k}^\times\setminus\{-1\}} \chi(v) = \sum_{v\in\mathbf{k}^\times} \chi(v) - \chi(-1) = 0 - \chi(-1).$$

Si $z = 0$ on a l'égalité

$$\textstyle\sum_{x+y=z} \chi(x)\chi^{-1}(y) = \sum_{x\neq 0} \chi(-1) = (q-1)\chi(-1).$$

3. On écrit :

$$G_\psi(\chi)G_\psi(\chi^{-1}) = \textstyle\sum_{x,y} \chi(x)\chi^{-1}(y)\psi(x+y) = \sum_{z\in\mathbf{k}} S(z)\psi(z),$$

avec $S(z) = \sum_{x+y=z} \chi(x)\chi^{-1}(y)$. D'où :

$$\begin{aligned} G_\psi(\chi)G_\psi(\chi^{-1}) &= (q-1)\chi(-1) - \chi(-1)\textstyle\sum_{z\neq 0}\psi(z) \\ &= q\chi(-1) - \chi(-1)\textstyle\sum_{z\in\mathbf{k}}\psi(z) = q\chi(-1). \end{aligned}$$

4. Le premier point est immédiat. On a facilement $\tau_0\tau_1 = \frac{1-p^*}{4}$. Le reste suit.

Problème 7. *1.* Si $g(x) = 0$, avec $x \in \mathbb{Z}$ et $g(X) \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, alors $x \mid g(0)$. Ici $\pm1, \pm2, \pm4, \pm8$ ne sont pas racines de $f(X)$, donc ce polynôme est irréductible. Le discriminant du polynôme $X^3 + aX^2 + bX + c$ est :

$18abc - 4a^3c + a^2b^2 - 4b^3 - 27c^2$, d'où le résultat pour $a = 1$, $b = -2$, $c = 8$.

2. L'élément $\beta = 4\alpha^{-1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$ est entier sur $\mathbb{Z}$ puisque :

$$\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha + 8 = 0 \overset{/\alpha^3}{\Longrightarrow} 1 + \alpha^{-1} - 2\alpha^{-2} + 8\alpha^{-3} = 0 \overset{\times 8}{\Longrightarrow} 8 + 2\beta - \beta^2 + \beta^3 = 0.$$

Pour vérifier que $\mathbf{A} = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\alpha\oplus\mathbb{Z}\beta$ est un anneau, il suffit de voir que $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2 \in \mathbf{A}$. C'est clair pour $\alpha\beta = 4$. On a $\alpha^2 + \alpha - 2 + 2\beta = 0$, donc $\alpha^2 = 2 - \alpha - 2\beta$. Et $\beta^3 - \beta^2 + 2\beta + 8 = 0$ donc $\beta^2 = \beta - 2 - 8\beta^{-1} = \beta - 2 - 2\alpha$. L'expression de $(1, \alpha, \alpha^2)$ sur la base $(1, \alpha, \beta)$ est fournie par :

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ \alpha \\ \beta \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & \alpha & \alpha^2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \end{array}.$$

L'anneau $\mathbb{Z}[\alpha]$ est donc d'indice 2 dans $\mathbf{A}$; or

$$\mathrm{Disc}_{\mathbb{Z}[\alpha]/\mathbb{Z}} = |\,\mathbf{A} : \mathbb{Z}[\alpha]\,|^2 \cdot \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbb{Z}} \quad \text{donc} \quad \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbb{Z}} = -503.$$

Le discriminant de $\mathbf{A}$ étant sans facteur carré, $\mathbf{A}$ est l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\alpha)$.

3. Montrons que α, β et $\gamma := 1+\alpha+\beta$ forment, modulo 2, un système fondamental d'idempotents orthogonaux :

$$\alpha + \alpha^2 = 2 - 2\beta, \qquad \beta^2 - \beta = 2 - 2\alpha, \qquad \alpha\beta = 4,$$

d'où modulo 2 :

$\alpha \equiv \alpha^2$, $\beta \equiv \beta^2$, $\gamma^2 \equiv \gamma$, $\alpha + \beta + \gamma \equiv 1$, $\alpha\beta \equiv 0$, $\alpha\gamma \equiv 0$, $\beta\gamma \equiv 0$.

On a donc $\mathbf{A}/2\mathbf{A} = \mathbb{F}_2\overline{\alpha} \oplus \mathbb{F}_2\overline{\beta} \oplus \mathbb{F}_2\overline{\gamma}$. Si l'on veut calculer la factorisation de 2 dans $\mathbf{A}$, on remarque que (α, β, γ) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{A}$ et qu'en désignant par π le morphisme de réduction modulo 2, $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/2\mathbf{A}$, les idéaux premiers de $\mathbf{A}$ au dessus de 2, sont les images réciproques des idéaux premiers de $\mathbf{A}/2\mathbf{A}$. Par exemple : $\mathfrak{a} = \pi^{-1}(\{0\} \oplus \mathbb{F}_2\overline{\beta} \oplus \mathbb{F}_2\overline{\gamma}) = \langle 2\alpha, \beta, \gamma\rangle$. Ainsi en posant $\mathfrak{b} = \langle \alpha, 2\beta, \gamma\rangle$ et $\mathfrak{c} = \langle \alpha, \beta, 2\gamma\rangle$, on a $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{c} \simeq \mathbb{F}_2$ et $2\mathbf{A} = \mathfrak{abc} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$.

De manière générale, soit $\mathbf{K}$ un corps de nombres vérifiant : $[\,\mathbf{K} : \mathbb{Q}\,] \geqslant 3$ et 2 est totalement décomposé dans l'anneau d'entiers $\mathbf{Z_K}$. Alors, $\mathbf{Z_K}$ n'est pas monogène, i.e. il n'existe aucun $x \in \mathbf{Z_K}$ tel que $\mathbf{Z_K} = \mathbb{Z}[x]$. En effet, $\mathbf{Z_K}/2\mathbf{Z_K} \simeq \mathbb{F}_2^n$ et $\mathbb{F}_2^n$ n'admet pas d'élément primitif sur $\mathbb{F}_2$ si $n \geqslant 3$.

4. En multipliant $1 \in \mathfrak{f} + \mathfrak{b}$ par $\mathbf{B}'$, on obtient $\mathbf{B}' \subseteq \mathfrak{f}\mathbf{B}' + \mathfrak{b}' \subseteq \mathbf{B} + \mathfrak{b}'$, ce qui montre que $\mathbf{B} \to \mathbf{B}'/\mathfrak{b}'$ est surjective. Montrons que $\mathbf{B} \to \mathbf{B}'/\mathfrak{b}'$ est injective, i.e. $\mathfrak{b}' \cap \mathbf{B} = \mathfrak{b}$. En multipliant $1 \in \mathfrak{f} + \mathfrak{b}$ par $\mathfrak{b}' \cap \mathbf{B}$ on obtient les inclusions

$$\mathfrak{b}' \cap \mathbf{B} \subseteq (\mathfrak{b}' \cap \mathbf{B})\mathfrak{f} + (\mathfrak{b}' \cap \mathbf{B})\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}\mathbf{B}'\mathfrak{f} + \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}\mathbf{B} + \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}.$$

5. Dans le contexte précédent, soit $x \in \mathbf{Z_K}$ de degré $n = [\,\mathbf{K} : \mathbb{Q}\,]$.
Notons $d = |\,\mathbf{Z_K} : \mathbb{Z}[x]\,|$. On a $d\mathbf{Z_K} \subseteq \mathbb{Z}[x]$ et d peut servir de conducteur de $\mathbb{Z}[x]$ dans $\mathbf{Z_K}$. Si $2 \not| \, d$, par l'évitement de Dedekind, $\mathbf{Z_K}/2\mathbf{Z_K} \simeq \mathbb{Z}[x]/2\mathbb{Z}[x] = \mathbb{F}_2[\overline{x}]$. Or $\mathbf{Z_K}/2\mathbf{Z_K} \simeq \mathbb{F}_2^n$ n'admet pas d'élément primitif sur $\mathbb{F}_2$ pour $n \geqslant 3$.

Problème 8. *1.* $z \in \mathbf{B}$ est racine de $\prod_{\sigma\in G}(T - z)$, polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbf{A}$.

2. $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m}$ est clair. Calculons $\mathfrak{m}^2$ en écrivant $d = 4q + 1$, donc $1 + d = 2(2q + 1)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{m}^2 &= \left\langle 1 + 2\sqrt{d} + d, 1 - d, 1 - 2\sqrt{d} + d \right\rangle \\ &= 2\left\langle 2q + 1 + \sqrt{d}, 2q, 2q + 1 - \sqrt{d} \right\rangle = 2\left\langle 1 + \sqrt{d}, 1 - \sqrt{d} \right\rangle = 2\mathfrak{m}.\end{aligned}$$

Par ailleurs, comme $\mathbb{Z}$-module, $\mathfrak{m} = \mathbb{Z}(1 + \sqrt{d}) \oplus \mathbb{Z}(1 - \sqrt{d}) = 2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(1 \pm \sqrt{d})$. On ne peut pas simplifier $\mathfrak{m}^2 = 2\mathfrak{m}$ par $\mathfrak{m}$ (car $\mathfrak{m} \neq 2\mathbf{B}$ vu que $1 \pm \sqrt{d} \notin 2\mathbf{B}$), donc $\mathfrak{m}$ n'est pas inversible. On a $\mathrm{N}_G(\mathfrak{m}) = 2\mathbb{Z}$ donc $\mathrm{N}_G(\mathfrak{m})\mathbf{B} = 2\mathbf{B} \neq \mathrm{N}'_G(\mathfrak{m})$.
L'application canonique $\mathbb{Z} \to \mathbf{B}/\mathfrak{m}$ est surjective (puisque $x + y\sqrt{d} \equiv x + y \bmod \mathfrak{m}$), de noyau $2\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{F}_2 \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{m}$. Ou encore : $x + y\sqrt{d} \to (x + y) \bmod 2$ définit un morphisme surjectif *d'anneaux* $\mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbb{F}_2$, de noyau $\mathfrak{m}$.
Notons $\mathrm{N}(\mathfrak{b}) = \#(\mathbf{B}/\mathfrak{b})$ pour $\mathfrak{b}$ non nul. Si $z = x(1 + \sqrt{d}) + y(1 - \sqrt{d}) \in \mathfrak{m}$ avec x, $y \in \mathbb{Z}$, alors $\mathrm{N}_G(z) = (x + y)^2 - d(x - y)^2 \equiv 4xy \bmod 4$.
Donc $\mathrm{N}_G(z) \in 4\mathbb{Z}$ pour $z \in \mathfrak{m}$, mais $\mathrm{N}(\mathfrak{m}) = 2$. On a $\mathrm{N}(\mathfrak{m}^2) = \mathrm{N}(2\mathfrak{m}) = 4\mathrm{N}(\mathfrak{m}) = 8$, mais $\mathrm{N}(\mathfrak{m})^2 = 4$.

3. Soit $\mathfrak{b} = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ et n indéterminées $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Introduisons le polynôme normique $h(\underline{X})$:

$$h(\underline{X}) = \textstyle\prod_{\sigma\in G} h_\sigma(\underline{X}) \quad \text{avec} \quad h_\sigma(\underline{X}) = \sigma(b_1)X_1 + \cdots + \sigma(b_n)X_n.$$

On a $h(\underline{X}) \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. Notons d un générateur de $\mathrm{c}(h)_\mathbf{A}$. Comme $\mathbf{B}$ est intégralement clos et $\mathrm{c}(h)_\mathbf{B} = d\mathbf{B}$ principal, on peut appliquer la proposition 8.13 : on a alors $\prod_\sigma \mathrm{c}(h_\sigma)_\mathbf{B} = \mathrm{c}(h)_\mathbf{B} = d\mathbf{B}$, c'est-à-dire $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = d\mathbf{B}$.
On va utiliser $\mathbf{A}$ intégralement clos (car $\mathbf{A}$ est de Bézout). Soit $a \in \mathbf{A} \cap d\mathbf{B}$. Alors l'élément $a/d \in \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ est entier sur $\mathbf{A}$ (car $a/d \in \mathbf{B}$) donc $a/d \in \mathbf{A}$, i.e. $a \in d\mathbf{A}$.
Bilan : $\mathbf{A} \cap d\mathbf{B} = d\mathbf{A}$ i.e. $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}) = d\mathbf{A}$.
Par définition, les évaluations du polynôme normique h sur $\mathbf{B}^n$ sont les normes d'éléments de l'idéal $\mathfrak{b}$; elles appartiennent à l'idéal de $\mathbf{A}$ engendré par les coefficients du polynôme normique, cet idéal de $\mathbf{A}$ étant $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b})$.
Si $\#G = 2$, le coefficient de X_1X_2 dans h est :

$$h(1, 1, \ldots, 0) - h(1, 0, \ldots, 0) - h(0, 1, \ldots, 0) = \mathrm{N}_G(b_1 + b_2) - \mathrm{N}_G(b_1) - \mathrm{N}_G(b_2).$$

Ceci revient d'ailleurs à écrire $b_1\overline{b_2} + b_2\overline{b_1} = \mathrm{N}_G(b_1 + b_2) - \mathrm{N}_G(b_1) - \mathrm{N}_G(b_2)$. De même, le coefficient de X_iX_j dans h est, pour $i \neq j$, $\mathrm{N}_G(b_i + b_j) - \mathrm{N}_G(b_i) - \mathrm{N}_G(b_j)$.

En conséquence, l'idéal de $\mathbf{A}$ engendré par les normes $\mathrm{N}_G(b_i)$ et $\mathrm{N}_G(b_i+b_j)$ contient tous les coefficients de $h(\underline{X})$; c'est donc l'idéal $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b})$.

Problème 9. *(Lemme de la fourchette)*
1. Pour $x \in \mathbf{L}$, on a $x = \sum_j \mathrm{Tr}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(xe_j)e'_j$.
Si $x \in \mathbf{B}$, alors $\mathrm{Tr}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(xe_j)$ est un élément de $\mathbf{K}$ entier sur $\mathbf{A}$ donc dans $\mathbf{A}$. Ceci démontre l'inclusion du milieu.
En écrivant $e_i = \sum_j \mathrm{Tr}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(e_ie_j)e'_j$, on obtient

$$ {}^{\mathrm{t}}\underline{e} = A\,{}^{\mathrm{t}}\underline{e}' \text{ où } A = \big(\mathrm{Tr}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(e_ie_j)\big) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}), \text{ avec } \det(A) = \Delta, $$

d'où l'inclusion de droite.
2. Le $\mathbb{Z}$-module F_k est l'intersection de $\mathbf{B}$ et Z_k, qui sont deux sous-modules de type fini de Z_{n-1}, libre de rang n. C'est donc un $\mathbb{Z}$-module libre de rang fini. Et les deux inclusions $\delta Z_k \subseteq F_k \subseteq Z_k$ montrent que F_k est de rang $k+1$.
Le $\mathbb{Z}$-module $\pi_k(F_k)$ est un sous-$\mathbb{Z}$-module de type fini de $\frac{1}{\delta}\mathbb{Z}$. Donc il est engendré par a_k/δ (où a_k est le pgcd des numérateurs des générateurs).
Enfin, comme $1 = \pi_k(x^k)$, a_k doit diviser δ et l'on écrit $\frac{a_k}{\delta} = \frac{1}{d_k}$.
3. Soit $k \geqslant 1$ et $z \in F_k$, si $\pi_k(z) = a/d_k$ (avec $a \in \mathbb{Z}$) on a $\pi_k(z - ay_k) = 0$.
Donc $z - ay_k \in F_{k-1}$. Ainsi $F_k = \mathbb{Z}y_k \oplus F_{k-1}$ et l'on conclut par récurrence sur k que $z \in \bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{Z}y_k$.
4. On a $y_iy_j \in F_{i+j}$ donc $\frac{1}{d_id_j} = \pi_{i+j}(y_iy_j) \in \frac{1}{d_{i+j}}\mathbb{Z}$, autrement dit d_{i+j} est multiple de d_id_j.
5 et *6.* Montrons tout d'abord que $d_kF_k \subseteq \mathbb{Z}[x]$ par récurrence sur k. L'initialisation $k = 0$ est claire. On utilise ensuite le fait que $xy_{k-1} \in F_k$ et $\pi_k(xy_{k-1}) = \frac{1}{d_{k-1}}$, donc

$$ xy_{k-1} = \tfrac{d_k}{d_{k-1}}y_k + w_{k-1} \quad \text{avec } w_{k-1} \in F_{k-1}. $$

Il vient $d_ky_k = xd_{k-1}y_{k-1} - d_{k-1}w_{k-1}$ et le second membre est dans $\mathbb{Z}[x]$ par hypothèse de récurrence. Donc $d_ky_k \in \mathbb{Z}[x]$ et

$$ d_kF_k = d_k(\mathbb{Z}y_k \oplus F_{k-1}) = \mathbb{Z}d_ky_k \oplus d_kF_{k-1} \subseteq \mathbb{Z}[x] + d_{k-1}F_{k-1} \subseteq \mathbb{Z}[x]. $$

On a défini $f_k(X)$ unitaire de degré k dans $\mathbb{Q}[X]$ par l'égalité $f_k(x) = d_ky_k$.
Comme $(1, \dots, x^{n-1})$ est aussi bien une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbb{Z}[x]$, qu'une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}[x]$, et comme $d_ky_k \in \mathbb{Z}[X]$ on obtient $f_k \in \mathbb{Z}[X]$.
Tout le reste suit facilement.

Problème 10. *1.* Si $F(G) = X$, on a $\mathrm{JAC}(F)(0) \circ \mathrm{JAC}(G)(0) = \mathrm{I}_{\mathbf{A}^n}$.
Comme $\mathrm{JAC}(G)(0)$ est inversible, on applique le résultat à G. On a $H \in \mathbf{S}^n$ avec $G(H) = X$. Alors $F = F \circ G \circ H = H$. Donc F, G sont inverses l'un de l'autre (comme transformations de $\mathbf{S}^n$).
2. Immédiat. Et l'on peut vérifier a posteriori $\Phi(\mathbf{S}^n) \subseteq \mathbf{S}^n$ ainsi que l'équivalence :

$$ \Phi(G) = G \iff F(G) = X. $$

3. On écrit $F(X) = J_0 \cdot X + F_2(X)$, où le vecteur $F_2(X)$ est de degré $\geqslant 2$ en X.
Alors, $J_0^{-1} \cdot \big(F(G) - F(H)\big) = G - H + J_0^{-1} \cdot \big(F_2(G) - F_2(H)\big)$.
Puis $\Phi(G) - \Phi(H) = -J_0^{-1} \cdot \big(F_2(G) - F_2(H)\big)$. Supposons $G_i - H_i \in \mathfrak{m}^d$ $(d \geqslant 1)$, et montrons que chaque composante de $\Phi(G) - \Phi(H)$ appartient à $\mathfrak{m}^{d+1}$; il en résultera l'inégalité voulue. Une telle composante est une combinaison $\mathbf{A}$-linéaire de $G^\alpha - H^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| \geqslant 2$. Pour simplifier les notations, faisons $n = 3$ et écrivons :

$G^\alpha - H^\alpha = (G_1^{\alpha_1} - H_1^{\alpha_1})G_2^{\alpha_2}G_3^{\alpha_3} + (G_2^{\alpha_2} - H_2^{\alpha_2})H_1^{\alpha_1}G_3^{\alpha_3} + (G_3^{\alpha_3} - H_3^{\alpha_3})H_1^{\alpha_1}H_2^{\alpha_2}$.
Comme les H_i, G_i sont sans terme constant, on a $G^\alpha - H^\alpha \in \mathfrak{m}^{d+1}$, sauf peut-être pour $(\alpha_2, \alpha_3) = (0,0)$ ou $(\alpha_1, \alpha_3) = (0,0)$ ou $(\alpha_1, \alpha_3) = (0,0)$. Il reste à voir les cas particuliers, par exemple $\alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Dans ce cas, puisque $\alpha_1 - 1 \geqslant 1$:

$$G^\alpha - H^\alpha = G_1^{\alpha_1} - H_1^{\alpha_1} = (G_1 - H_1)\sum_{i+j=\alpha_1-1} G_1^i H_1^j \in \mathfrak{m}^{d+1}.$$

On a donc établi $d\big(\Phi(G), \Phi(H)\big) \leqslant d(G,H)/2$. Ceci assure en particulier qu'il existe au plus un point fixe de Φ. Soient $G^{(0)} \in \mathbf{S}^n$, par exemple $G^{(0)} = 0$, et la suite $G^{(d)}$ définie par récurrence au moyen de $G^{(d+1)} = \Phi(G^{(d)})$.
Pour $d \geqslant 1$, chaque composante de $G^{(d)} - G^{(d-1)}$ est dans $\mathfrak{m}^d$, ce qui permet de définir $G \in \mathbf{S}^n$ par $G = \sum_{d\geqslant 1}\big(G^{(d)} - G^{(d-1)}\big)$.
Alors, G est la limite des $G^{(d)}$ pour $d \mapsto \infty$, c'est un point fixe de Φ, i.e. $F(G) = X$.
4. Supposons $G(F) = X$, donc $G\big(F(0)\big) = 0$.
On pose $\widetilde{F} = F - F(0)$, $\widetilde{G} = G\big(X + F(0)\big)$. Alors, $\widetilde{F}(0) = \widetilde{G}(0) = 0$ et $\widetilde{G}(\widetilde{F}) = X$.
D'où $\widetilde{F}(\widetilde{G}) = X$, puis $F(G) = X$.
5. On vérifie dans les deux cas que $\mathrm{Jac}(F) = 1$. Pour le premier, on obtient G (de même degré maximum que F) en itérant Φ quatre fois :
$G = (-X^2Z^3 - 2XY^2Z^2 + 2XYZ + X - Y^4Z + 2Y^3,\ -XZ^2 - Y^2Z + Y,\ Z)$.
Pour le second, on obtient $G = (G_1, \ldots, G_5)$ en itérant Φ quatre fois :

$$\begin{aligned}
G_1 &= X_1 - 3X_2X_4^2 + 6X_2X_4X_5^3 - 3X_2X_5^6 + 2X_3X_4X_5 - 2X_3X_5^4 + \\
&\quad X_4^4X_5 - 4X_4^3X_5^4 + 6X_4^2X_5^7 - 4X_4X_5^{10} + X_5^{13},\\
G_2 &= X_2 - X_4^2X_5 + 2X_4X_5^4 - X_5^7,\\
G_3 &= X_3 - X_4^3 + 3X_4^2X_5^3 - 3X_4X_5^6 + X_5^9,\\
G_4 &= X_4 - X_5^3, \qquad G_5 = X_4.
\end{aligned}$$

On notera que le degré maximum de G est 13 alors que celui de F est 3.

Problème 11. *(Finitude de l'ensemble des classes d'idéaux d'un anneau de nombres)*
1a. Partageons l'intervalle semi-ouvert $[0,1[$ en N sous-intervalles $[i/N, (i+1)/N[$ de longueur $1/N$, pour $0 \leqslant i \leqslant N-1$. L'hyper-cube $[0,1[^n$ est une réunion de N^n petits hyper-cubes. Pour $x \in \mathbb{Q}^n$, notons $\lfloor x \rfloor$ le vecteur de $\mathbb{Z}^n$ dont la i-ième composante est la partie entière $\lfloor x_i \rfloor$ de la composante x_i. Pour $0 \leqslant k \leqslant N^n$, on considère les $N^n + 1$ vecteurs $kx - \lfloor kx \rfloor \in [0,1[^n$.
D'après le principe des tiroirs, il en existe deux qui sont dans le même petit hyper-cube, i.e. il existe h, k distincts, $0 \leqslant h < k \leqslant N^n$ avec :

$$\|(kx - \lfloor kx \rfloor) - (hx - \lfloor hx \rfloor)\|_\infty < 1/N$$

On pose $m = k - h \in [\![1..N^n]\!]$, $y = \lfloor kx \rfloor - \lfloor hx \rfloor \in \mathbb{Z}^n$. On a bien $\|mx - y\|_\infty < 1/N$.
1b. Prendre $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $N \geqslant 1/K$ et poser $d = N^n$.
2. Soient $c_{ij}^k \in \mathbb{Q}$ les constantes de structure définies par $e_ie_j = \sum_k c_{ij}^k e_k$.
Pour $x \in \mathbf{K}$, $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$, on veut calculer le coefficient a_{ij} de la matrice de la multiplication par x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On a :

$$xe_j = \sum\nolimits_{k,i} x_k c_{kj}^i e_i = \sum\nolimits_i \big(\sum\nolimits_k x_k c_{kj}^i\big)e_i \quad \text{donc} \quad a_{ij} = \sum\nolimits_k x_k c_{kj}^i.$$

Soit $M = \max_{i,j}\sum_k |c_{kj}^i|$. Alors $|a_{ij}| \leqslant M\,|x|$, donc $|\mathrm{N}(x)| \leqslant M^n\,|x|^n$, et l'on peut prendre $C = M^n$.

3. Soit $C > 0$ la constante de la question précédente. On prend $K > 0$ vérifiant $CK^n < 1$ et on lui applique la question *1*, ce qui nous fournit un $d \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbf{K}$, il y a $m \in [\![1..d]\!]$ et $q \in \mathbf{A}$ vérifiant $\|mx - q\|_\infty < K$ donc :

$$|\mathrm{N}(mx - q)| \leqslant C\|mx - q\|_\infty^n \leqslant CK^n < 1.$$

Pour le deuxième point de la question, on considère $x = a/b$.
4a. Pour $a \in \mathfrak{b}$, il y a $m \in [\![1..d]\!]$ et $q \in \mathbf{A}$ tels que $|\mathrm{N}(ma - bq)| < |\mathrm{N}(b)|$. La minimalité de $|\mathrm{N}(b)|$ fait que $ma - bq = 0$; donc $Da \in \langle b\rangle$ puis $D\mathfrak{b} \subseteq \langle b\rangle$.
4b. Si $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_k\rangle$, pour $b \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$, il existe $m_i \in [\![1..d]\!]$ et $q_i \in \mathbf{A}$ tels que $|\mathrm{N}(m_i b_i - bq_i)| < |\mathrm{N}(b)|$.
Ou bien $m_i b_i - bq_i = 0$ pour $i \in [\![1..k]\!]$, auquel cas $D\mathfrak{b} \subset \langle b\rangle$.
Ou bien il y a un $b' = m_i b_i - bq_i \neq 0$; ce b' appartient à $\mathfrak{b} \setminus \{0\}$ et $|\mathrm{N}(b')| < |\mathrm{N}(b)|$. On recommence alors avec b' à la place de b. Au départ, on peut utiliser pour b l'un des b_i non nul ; ce processus s'arrête car les valeurs absolues $|\mathrm{N}(b)|$ des normes sont des entiers > 0.
4c. On prend $\mathfrak{a} = (D/b)\,\mathfrak{b}$. C'est un idéal (entier) de $\mathbf{A}$, qui est associé à $\mathfrak{b}$ et qui contient D (car $\mathfrak{b}$ contient b).
5. Tout idéal de type fini non nul de $\mathbf{A}$ est donc associé à un idéal $\mathfrak{a}$ contenant D. Or il n'y a qu'un nombre fini de tels idéaux $\mathfrak{a}$ car leur ensemble s'identifie à celui des idéaux de l'anneau fini $\mathbf{A}/D\mathbf{A}$ (de cardinal D^n).

Problème 12. *(Classes de similitude de matrices et classes d'idéaux)*
On note $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$.
1. Notons C au lieu de C_f. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$. On vérifie que les ${}^tC^j e_n$, $j \in [\![0..n-1]\!]$, forment une base de $\mathbf{A}^n$ dans laquelle la matrice de ${}^tC$ est C. Si l'on note $Q' \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ la matrice ayant pour colonnes les ${}^tC^j e_n$, on a donc $Q'C = {}^tCQ'$. Vu que Q'est une matrice de Hankel inférieure, cf. ci-dessous, son inverse Q est de Hankel supérieure et vérifie $CQ = Q\,{}^tC$.
Si l'on utilise pour les lignes une numérotation de 0 à $n-1$ (au lieu de 1 à n), la matrice Q a pour coefficient d'indice (i,j) le coefficient de f en X^{i+j}.
Par exemple, si $f = X^5 + a_4X^4 + a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$, voici Q' :

$$Q' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_4 \\ 0 & 0 & 1 & -a_4 & -a_3 + a_4^2 \\ 0 & 1 & -a_4 & -a_3 + a_4^2 & -a_2 + 2a_3a_4 - a_4^3 \\ 1 & -a_4 & -a_3 + a_4^2 & -a_2 + 2a_3a_4 - a_4^3 & -a_1 + 2a_2a_4 + a_3^2 - 3a_3a_4^2 + a_4^4 \end{bmatrix}$$

et son inverse Q :

$$Q = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 1 \\ a_2 & a_3 & a_4 & 1 & 0 \\ a_3 & a_4 & 1 & 0 & 0 \\ a_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Remarque. Introduisons, en prenant $a_n = 1$, pour $i \in [\![0..n]\!]$, les polynômes de Horner $f_i(X) = \sum_{j=i}^n a_j X^{j-i}$ (en particulier $f_0(X) = f(X)$ et $f_n(X) = 1$).
Alors $\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$. De plus $xf_{i+1}(x) = f_i(x) - a_i$, donc la matrice de la multiplication par x dans cette base est ${}^tC_f$. Et la matrice Q ci-dessus est celle qui exprime la base $\big(f_1(x), \dots, f_n(x)\big)$ dans la base $(1, \dots, x^{n-1})$.∎

2. Dans $\mathbf{A}[X]$ la matrice $D = QS - \mathrm{Adj}(X\mathrm{I}_n - C_f)$ est triangulaire supérieure, de diagonale nulle et $D_{i,j} = X^{j-(i+1)}f$ pour $j > i$.
Donc dans $\mathbf{A}[x]$, $QS - \mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - C_f) = 0$.
3a. D'une part $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}$, donc $\mathfrak{b}$ est bien un idéal de $\mathbf{B}$.
D'autre part, en multipliant à droite par $\widetilde{P}$ l'égalité définissant les ε_i, on obtient que $\mathfrak{b} \ni \det(P)$, élément régulier de $\mathbf{A}$.
3b. Clair.
3c. Voir l'exercice IV-3
4. Si $P \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ exprime une $\mathbf{A}$-base de $\mathfrak{b}$ dans la $\mathbf{A}$-base $(1, x, \dots, x^{n-1})$ de $\mathbf{B}$, alors $\det(P) \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A}) \cap \mathfrak{b}$ (cf. *3a*).
Remarque : si $b \in \mathbf{B}$ est un élément régulier de $\mathbf{B}$, alors $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b) = b\widetilde{b}$ est un élément régulier de $\mathbf{A}$ (théorème II-5.22), multiple de b dans $\mathbf{B}$.
Dans $\mathbf{K}[x]$, $\mathbf{K}\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}\varepsilon_n$ est un idéal de $\mathbf{K}[x]$ contenant un élément régulier de $\mathbf{A}$, donc cet idéal est $\mathbf{K}[x]$. On dispose ainsi de deux $\mathbf{K}$-bases de $\mathbf{K}[x]$:

$$\mathbf{K}[x] = \mathbf{K}.\varepsilon_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}.\varepsilon_n = \mathbf{K}.1 \oplus \mathbf{K}.x \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}.x^{n-1}.$$

Donc la matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est conjuguée sur $\mathbf{K}$ de la matrice compagne de f.
5a. On a sur $\mathbf{K}$:

$${}^{\mathrm{t}}M = {}^{\mathrm{t}}P\ {}^{\mathrm{t}}C_f\ {}^{\mathrm{t}}P^{-1} = {}^{\mathrm{t}}PQ^{-1}\ C_f\ Q\ {}^{\mathrm{t}}P^{-1},$$

donc ${}^{\mathrm{t}}M = P'^{-1}C_fP'$ avec $P' = Q\,{}^{\mathrm{t}}\widetilde{P}$.
5b. Par définition :

$$N \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} \varepsilon'_1 \\ \vdots \\ \varepsilon'_n \end{bmatrix} [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n] = {}^{\mathrm{t}}P' \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix} [1, \dots, x^{n-1}]P = \widetilde{P}\,{}^{\mathrm{t}}QSP,$$

puis

$$\begin{aligned} N &= \det(P)P^{-1}\,\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - C_f)P \\ &= \det(P)\,\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - P^{-1}C_fP) \quad = \quad \det(P)\,\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - M). \end{aligned}$$

Cette égalité matricielle implique l'égalité d'idéaux

$$\mathfrak{b}'\mathfrak{b} = \det(P)\mathcal{D}_{n-1}(x\mathrm{I}_n - M)$$

car les coefficients de $\mathrm{Adj}(x\mathrm{I}_n - M)$ sont les mineurs d'ordre $n-1$ de $x\mathrm{I}_n - M$.
5c. Il s'agit de montrer de manière générale, que pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ de rang $n-1$, on a $\mathrm{Ker}\,\widetilde{A} = \mathrm{Im}\,A$; d'après le principe local-global de base, on peut supposer que A possède un mineur d'ordre $n-1$ inversible et d'après le lemme du mineur inversible II-5.9 que $A = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1, 0)$; dans ce cas, $\widetilde{A} = \mathrm{Diag}(0, \dots, 0, 1)$ et le résultat est clair.
Une fois obtenue l'égalité $\mathrm{Ker}\,\widetilde{A} = \mathrm{Im}\,A$, on a $\mathrm{Im}\,\widetilde{A} \simeq \mathbf{A}^n/\,\mathrm{Ker}\,\widetilde{A} = \mathbf{A}^n/\,\mathrm{Im}\,A$.
6. L'idéal $\mathfrak{b}$ a pour $\mathbf{A}$-base $(a, x, x^2, \dots, x^{n-1})$. La matrice $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ de la multiplication par x dans cette base est à quelque chose près la matrice C_f sauf que $M_{1n} = -b_0$ (au lieu de $-a_0$) et $M_{2,1} = a$ (au lieu de 1). On peut prendre pour P la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a, 1, \dots, 1)$, donc $\widetilde{P} = \mathrm{Diag}(1, a, \dots, a)$.
Déterminons l'idéal $\mathfrak{b}'$ qui vérifie $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathcal{D}_{n-1}(x\mathrm{I}_n - M)$; on introduit, en convenant de $a_n = 1$, $f_i(X) = \sum_{j=i}^{n} a_j X^{j-i}$ (donc $f_n(X) = 1$).
Alors $\big(f_1(x), af_2(x), \dots, af_n(x)\big)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathfrak{b}'$, donc $\mathfrak{b}' = \langle a, f_1(x)\rangle$.
Pour $n = 4$ par exemple, voici la matrice $x\mathrm{I}_n - M$:

$$x\mathrm{I}_n - M = \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & b_0 \\ -a & x & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & a_2 \\ 0 & 0 & -1 & x+a_3 \end{bmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{D}_{n-1}(x\mathrm{I}_n - M)$ contient a et b_0 ; donc, si $1 \in \langle a, b_0\rangle$, alors $1 \in \mathcal{D}_{n-1}(x\mathrm{I}_n - M)$ et $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = a\mathbf{B}$.

7. Montrons d'abord que $a \in \mathfrak{b}^k$ pour $k \in [\![1..n]\!]$. On va utiliser à plusieurs reprises que $a_i \equiv 0 \bmod a$. On a

$$b_0 a = -(a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n) \in x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{b}^2,$$

i.e. $b_0 a \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}^2$; mais b_0 est inversible modulo a donc modulo $\mathfrak{b}$ (car $\mathfrak{b}$ contient a) donc modulo toutes les puissances de $\mathfrak{b}$ d'oú $a \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}^2$. Ensuite, en utilisant que $a \in \mathfrak{b}^2$, on voit que

$$b_0 a = -(a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n) \in x\mathfrak{b}^2 \subseteq \mathfrak{b}^3,$$

et par un raisonnement analogue, $a \in \mathfrak{b}^3$. De proche en proche, on voit ainsi que $a \in \mathfrak{b}^k$ pour tout $k \leqslant n$.

Puisque $x^n \in a\mathbf{B}$, le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}a + \mathbf{A}x + \cdots + \mathbf{A}x^{n-1}$ est stable par x donc c'est un idéal de $\mathbf{B}$, égal à $\mathfrak{b}$ et $(a, x, \cdots, x^{n-1})$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathfrak{b}$.

De même, le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}a + \mathbf{A}ax + \mathbf{A}x^2 + \cdots + \mathbf{A}x^{n-1}$ est stable par x donc c'est un idéal. Il contient a^2, ax, x^2 et d'autre part, il est contenu dans $\mathfrak{b}^2$, donc c'est $\mathfrak{b}^2$.

Même chose pour les autres puissances de $\mathfrak{b}$.

Commentaires bibliographiques

La preuve du lemme de Dedekind-Mertens 2.1 page 95 est prise dans Northcott [144] (il l'attribue à Artin).

Le théorème de Kronecker 3.3 page 97 se trouve dans [120, Kronecker]. Il est également démontré par Dedekind [54] et Mertens [137].

Concernant les résultants et sous-résultants en une variable, un livre de référence est [Apéry & Jouanolou]. On regrettera cependant l'absence de bibliographie : même si les résultats sont soit très anciens soit complètement nouveaux, on ne voit pas l'utilité de cacher les sources exactes.

Un autre livre important pour les questions algorithmiques sur le sujet est l'ouvrage [Basu, Pollack & Roy].

La construction d'un corps de racines abstrait pour un polynôme séparable donnée dans le théorème 6.15 est (à très peu près) celle décrite par Jules Drach dans [63], qui semble être celui qui introduit l'algèbre de décomposition universelle comme outil fondamental pour étudier les extensions algébriques de corps.

La preuve télégraphique du théorème 8.12 nous a été suggérée par Thierry Coquand.

L'approche de Kronecker concernant la théorie des idéaux de corps de nombres fait l'objet d'un survey historique dans [85, Fontana&Loper].

La démonstration du Nullstellensatz donnée dans la section 9 est inspirée de celle dans [Basu, Pollack & Roy], elle même inspirée d'une démonstration de van der Waerden.

Chapitre IV

Modules de présentation finie

Sommaire

Introduction

Sur un anneau les modules de présentation finie jouent un peu le même rôle que les espaces vectoriels de dimension finie sur un corps : la théorie des modules de présentation finie est une manière un peu plus abstraite, et souvent profitable, d'aborder la question des systèmes linéaires.

Dans les premières sections du chapitre, on donne les bases de la théorie des modules de présentation finie.
Dans la section 7, on traite l'exemple des modules de présentation finie sur les anneaux principaux, et dans la section 8 celui des modules de présentation finie sur les anneaux zéro-dimensionnels.
Enfin la section 9 est consacrée aux invariants importants que sont les idéaux de Fitting, et la section 10 introduit l'idéal résultant, comme application directe des idéaux de Fitting.

1. Définition, changement de système générateur

Un module *de présentation finie* est un $\mathbf{A}$-module M donné par un nombre fini de générateurs et de relations. C'est donc un module de type fini avec un système générateur possédant un module des relations de type fini. De manière équivalente, c'est un module M isomorphe au conoyau d'une application linéaire

$$\gamma : \mathbf{A}^m \longrightarrow \mathbf{A}^q.$$

La matrice $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$ de γ a pour colonnes un système générateur du module des syzygies entre les générateurs g_i qui sont les images de la base canonique de $\mathbf{A}^q$ par la surjection $\pi : \mathbf{A}^q \to M$. Une telle matrice s'appelle une *matrice de présentation du module M pour le système générateur* $(g_1, \dots, g_q)$. Cela se traduit par :

— $[\, g_1 \ \cdots \ g_q \,]\, G = 0$, et

— toute syzygie entre les g_i est une combinaison linéaire des colonnes de G, i.e. : si $[\, g_1 \ \cdots \ g_q \,]\, C = 0$ avec $C \in \mathbf{A}^{q\times 1}$, il existe $C' \in \mathbf{A}^{m\times 1}$ tel que $C = G\, C'$.

Exemples. 1) Un module libre de rang k est un module de présentation finie présenté par une matrice colonne formée de k zéros [1]. Plus généralement toute matrice simple est la matrice de présentation d'un module libre de rang fini.

2) Rappelons qu'un module projectif de type fini est un module P isomorphe à l'image d'une matrice de projection $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ pour un certain entier n. Puisque $\mathbf{A}^n = \mathrm{Im}(F) \oplus \mathrm{Im}(\mathrm{I}_n - F)$, on obtient $P \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{I}_n - F)$. Ceci montre que tout module projectif de type fini est de présentation finie.

3) Soit $\varphi : V \to V$ un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie sur un corps discret $\mathbf{K}$. Considérons V comme un $\mathbf{K}[X]$-module avec la loi externe suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{K}[X] \times V \ \to \ V \\ (P, u) \qquad\quad \mapsto \ P \cdot u := P(\varphi)(u). \end{cases}$$

Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une base de V comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel et A la matrice de φ sur cette base. Alors, on peut montrer qu'une matrice de présentation de V comme $\mathbf{K}[X]$-module pour le système générateur $(u_1, \dots, u_n)$ est la matrice $X\, \mathrm{I}_n - A$ (voir l'exercice 3). ∎

1. Si l'on considère qu'une matrice est donnée par deux entiers $q, m \geqslant 0$ et une famille d'éléments de l'anneau indexée par les couples (i, j) avec $i \in [\![1..q]\!]$, $j \in [\![1..m]\!]$, on peut accepter une matrice vide de type $k \times 0$, qui serait la matrice canonique pour présenter un module libre de rang k.

1.0. Lemme. *Lorsque l'on change de système générateur fini pour un module de présentation finie, les syzygies entre les nouveaux générateurs forment de nouveau un module de type fini.*

▷ Supposons en effet, avec $M \simeq \operatorname{Coker} G$, qu'un autre système générateur de M soit $(h_1, \dots, h_r)$. On a donc des matrices $H_1 \in \mathbf{A}^{q\times r}$ et $H_2 \in \mathbf{A}^{r\times q}$ telles que

$$[\, g_1 \ \cdots \ g_q \,]\, H_1 = [\, h_1 \ \cdots \ h_r \,] \text{ et } [\, h_1 \ \cdots \ h_r \,]\, H_2 = [\, g_1 \ \cdots \ g_q \,].$$

Alors, le module des syzygies entre les h_j est engendré par les colonnes de H_2G et celles de $\mathrm{I}_r - H_2H_1$. En effet, d'une part on a clairement

$$[\, h_1 \ \cdots \ h_r \,]\, H_2\, G = 0 \ \text{ et } \ [\, h_1 \ \cdots \ h_r \,]\, (\mathrm{I}_r - H_2H_1) = 0.$$

D'autre part, si l'on a une syzygie $[\, h_1 \ \cdots \ h_r \,]\, C = 0$, on en déduit

$$[\, g_1 \ \cdots \ g_q \,]\, H_1C = 0,$$

donc $H_1C = GC'$ pour un certain vecteur colonne C' et

$$C = \big((\mathrm{I}_r - H_2H_1) + H_2H_1\big)C = (\mathrm{I}_r - H_2H_1)C + H_2GC' = HC'',$$

où $H = [\, \mathrm{I}_r - H_2H_1 \mid H_2G \,]$ et $C'' = \begin{bmatrix} C \\ C' \end{bmatrix}$. □

La possibilité de remplacer un système générateur par un autre tout en gardant un nombre fini de relations est un phénomène extrêmement général. Il s'applique à toutes formes de structures algébriques qui peuvent être définies par générateurs et relations. Par exemple, pour les structures dont tous les axiomes sont des égalités universelles. Voici comment cela fonctionne (il suffira de vérifier dans chaque cas que le raisonnement s'applique bien). Supposons que l'on a des générateurs $g_1, \dots, g_n$ et des relations

$$R_1(g_1, \dots, g_n),\ \dots,\ R_s(g_1, \dots, g_n),$$

qui « présentent » une structure M.

Si l'on a d'autres générateurs $h_1, \dots, h_m$, on les exprime en fonction des g_j sous forme $h_i = H_i(g_1, \dots, g_n)$. Notons $S_i(h_i, g_1, \dots, g_n)$ cette relation.

On exprime pareillement les g_j en fonction des h_i : $g_j = G_j(h_1, \dots, h_m)$. Notons $T_j(g_j, h_1, \dots, h_m)$ cette relation.

La structure ne change pas si l'on remplace la présentation

$$(g_1, \dots, g_n\ ;\ R_1, \dots, R_s)$$

par

$$(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m\ ;\ R_1, \dots, R_s, S_1, \dots, S_m).$$

Comme les relations T_j sont satisfaites, elles sont conséquences des relations $R_1, \dots, R_s, S_1, \dots, S_m$, donc la structure est toujours la même avec la présentation suivante :

$$(g_1, \dots, g_n, h_1, \dots, h_m\ ;\ R_1, \dots, R_s, S_1, \dots, S_m, T_1, \dots, T_n).$$

Maintenant, dans chacune des relations R_k et S_ℓ, on peut remplacer chaque g_j par son expression en fonction des h_i (qui est donnée dans T_j) et

cela ne change toujours pas la structure présentée. On obtient

$$(g_1, \ldots, g_n, h_1, \ldots, h_m \ ; \ R'_1, \ldots, R'_s, S'_1, \ldots, S'_m, T_1, \ldots, T_n).$$

Enfin, si l'on enlève un à un les couples $(g_j; T_j)$, il est clair que la structure ne change pas non plus, donc on obtient la présentation finie

$$(h_1, \ldots, h_m \ ; \ R'_1, \ldots, R'_s, S'_1, \ldots, S'_m).$$

On peut reprendre ce raisonnement sous une forme matricielle dans le cas des modules de présentation finie. Voici ce que cela donne.
Tout d'abord on constate que l'on ne change pas la structure de M lorsque l'on fait subir à la matrice de présentation G une des transformations suivantes.

1. Ajout d'une colonne nulle (ceci ne change pas le module des syzygies entre des générateurs fixés).
2. Suppression d'une colonne nulle, sauf à obtenir une matrice vide.
3. Remplacement de G, de type $q \times m$, par G' de type $(q+1) \times (m+1)$ obtenue à partir de G en rajoutant une ligne nulle en dessous puis une colonne à droite avec 1 en position $(q+1, m+1)$, (ceci revient à rajouter un vecteur parmi les générateurs, en indiquant sa dépendance par rapport aux générateurs précédents) :
$$G \ \mapsto \ G' \ = \ \begin{bmatrix} G & C \\ 0_{1,m} & 1 \end{bmatrix}.$$
4. Opération inverse de la précédente, sauf à aboutir à une matrice vide.
5. Ajout à une colonne d'une combinaison linéaire des autres colonnes (ceci ne change pas le module des syzygies entre des générateurs fixés).
6. Ajout à une ligne d'une combinaison linéaire des autres lignes, (par exemple si nous notons L_i la i-ième ligne, le remplacement de L_1 par $L_1 + \gamma L_2$ revient à remplacer le générateur g_2 par $g_2 - \gamma g_1$).
7. Permutation de colonnes ou de lignes.

On voit ensuite que si G et H sont deux matrices de présentation d'un même module M, on peut passer de l'une à l'autre au moyen des transformations décrites ci-dessus. Un peu mieux : on voit que pour tout système générateur fini de M, on peut construire à partir de G, en utilisant ces transformations, une matrice de présentation de M pour le nouveau système générateur. Notez qu'en conséquence, un changement de base de $\mathbf{A}^q$ ou $\mathbf{A}^m$, qui correspond à la multiplication de G (à gauche ou à droite) par une matrice inversible, peut être réalisé par les opérations décrites précédemment.
Précisément, on obtient le résultat suivant.

1.1. Lemme. *Soient deux matrices $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$ et $H \in \mathbf{A}^{r\times n}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Les matrices G et H présentent «le même» module, c'est-à-dire leurs conoyaux sont isomorphes.*
2. *Les deux matrices de la figure ci-dessous sont élémentairement équivalentes.*
3. *Les deux matrices de la figure ci-dessous sont équivalentes.*

	m	r	q	n
q	G	0	0	0
r	0	I_r	0	0

q	0	0	I_q	0
r	0	0	0	H

Les deux matrices

Comme conséquence du lemme 1.0, on obtient une reformulation plus abstraite de la cohérence comme suit.

1.2. Fait. *Un anneau est cohérent si, et seulement si, tout idéal de type fini est de présentation finie (en tant que $\mathbf{A}$-module). Un $\mathbf{A}$-module est cohérent si, et seulement si, tout sous-module de type fini est de présentation finie.*

Digression sur le calcul algébrique

Outre leur rapport direct avec la résolution des systèmes linéaires une autre raison de l'importance des modules de présentation finie est la suivante.
Chaque fois qu'un calcul algébrique aboutit à un «résultat intéressant» dans un $\mathbf{A}$-module M, ce calcul n'a fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments $x_1, \ldots, x_n$ de M et un nombre fini de relations entre les x_j, de sorte qu'il existe un module de présentation finie $P = \mathbf{A}^n/R$ et un homomorphisme surjectif $\theta : P \to x_1\mathbf{A} + \cdots + x_n\mathbf{A} \subseteq M$ qui envoie les e_j sur les x_j (où e_j désigne la classe modulo R du j-ième vecteur de la base canonique de $\mathbf{A}^n$), et tel que le «résultat intéressant» avait déjà lieu dans P pour les e_j.
En langage plus savant on exprime cette idée comme ceci. *Tout $\mathbf{A}$-module est limite inductive filtrante d'$\mathbf{A}$-modules de présentation finie.*
Mais cet énoncé nécessite un traitement un peu subtil en mathématiques constructives, et nous ne faisons donc que signaler son existence.

2. Idéaux de présentation finie

On considère un anneau $\mathbf{A}$ et un système générateur $(a_1, \dots, a_n) = (\underline{a})$ pour un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$. On s'intéresse à la structure de $\mathbf{A}$-module de $\mathfrak{a}$.

Syzygies triviales

Parmi les syzygies entre les a_i figurent ce que l'on appelle les *syzygies triviales* (ou *relateurs triviaux* si on les voit comme des relations de dépendance algébriques sur $\mathbf{k}$ lorsque $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre) :

$$a_i a_j - a_j a_i = 0 \ \text{ pour } \ i \neq j.$$

Si $\mathfrak{a}$ est de présentation finie, on pourra toujours prendre une matrice de présentation de $\mathfrak{a}$ pour le système générateur $(\underline{a})$ sous la forme

$$W = [\, R_{\underline{a}} \mid U \,],$$

où $R_{\underline{a}}$ est « la » *matrice des syzygies triviales* (l'ordre des colonnes est sans importance), de format $n \times n(n-1)/2$. Par exemple, pour $n = 5$

$$R_{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_2 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ -a_1 & 0 & a_3 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & -a_1 & -a_2 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & 0 & 0 & 0 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \end{bmatrix}.$$

2.1. Lemme. (Idéaux déterminantiels de la matrice des syzygies triviales) *Avec les notations ci-dessus, on a les résultats suivants.*

1. $\mathcal{D}_n(R_{\underline{a}}) = \{0\}$.
2. *Si* $1 \leqslant r < n$, *alors* $\mathcal{D}_r(R_{\underline{a}}) = \mathfrak{a}^r$ *et*
$$\mathfrak{a}^r + \mathcal{D}_r(U) \ \subseteq \ \mathcal{D}_r(W) \ \subseteq \ \mathfrak{a} + \mathcal{D}_r(U).$$
En particulier, on a l'équivalence
$$1 \in \mathcal{D}_{\mathbf{A},r}(W) \iff 1 \in \mathcal{D}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a},r}(\overline{U}), \quad \text{où } \ \overline{U} = U \bmod \mathfrak{a}.$$
3. $\mathcal{D}_n(W) = \mathcal{D}_n(U)$.

▷ *1.* Il s'agit d'identités algébriques et l'on peut prendre pour a_1, …, a_n des indéterminées sur $\mathbb{Z}$. Comme $[\, a_1 \ \cdots \ a_n \,] \cdot R_{\underline{a}} = 0$, on obtient l'égalité $\mathcal{D}_n(R_{\underline{a}})\, [\, a_1 \ \cdots \ a_n \,] = 0$. On conclut puisque a_1 est régulier.
2. L'inclusion $\mathcal{D}_r(R_{\underline{a}}) \subseteq \mathfrak{a}^r$ est évidente pour tout $r \geqslant 0$. Pour l'inclusion réciproque prenons par exemple $r = 4$ et $n \geqslant 5$ et montrons que

$$\{a_1^4,\, a_1^3 a_2,\, a_1^2 a_2^2,\, a_1^2 a_2 a_3,\, a_1 a_2 a_3 a_4\} \subseteq \mathcal{D}_4(R_{\underline{a}}).$$

Il suffit de considérer les matrices dessinées ci-après (nous avons supprimé les 0 et remplacé $\pm a_i$ par i pour mieux voir la structure) extraites de $R_{\underline{a}}$,

et les mineurs extraits sur les 4 dernières lignes.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & \\ 1 & & & 5 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 & & \\ 1 & & 4 & 5 \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & & \\ 1 & & 4 & \\ & 1 & & 5 \\ & & 2 & \\ & & & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & & & \\ 1 & 3 & & \\ & 2 & 4 & \\ & & 3 & 5 \\ & & & 4 \end{bmatrix}.$$

L'inclusion $\mathfrak{a}^r + \mathcal{D}_r(U) \subseteq \mathcal{D}_r(W)$ résulte de $\mathcal{D}_r(R_{\underline{a}}) + \mathcal{D}_r(U) \subseteq \mathcal{D}_r(W)$ et de l'égalité $\mathcal{D}_r(R_{\underline{a}}) = \mathfrak{a}^r$. L'inclusion $\mathcal{D}_r(W) \subseteq \mathfrak{a} + \mathcal{D}_r(U)$ est immédiate. Enfin l'équivalence finale résulte des inclusions précédentes et de l'égalité

$$\mathcal{D}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a},r}(\overline{U}) = \pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}}^{-1}\big(\mathfrak{a} + \mathcal{D}_r(U)\big).$$

3. On doit montrer que si une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ extraite de W contient une colonne dans $R_{\underline{a}}$, alors $\det A = 0$. Prenons par exemple la première colonne de A égale à la première colonne de $R_{\underline{a}}$: ${}^{\mathrm{t}}[\, a_2 \ -a_1 \ 0 \ \cdots \ 0\,]$. Le lemme 2.2 ci-après implique, lorsque $z_i = a_i$, $\det A = 0$, car les s_j sont nuls.□

Rappelons que $A_{\alpha,\,\beta}$ est la sous-matrice de A extraite sur les lignes α et les colonnes β. Introduisons aussi la notation « produit scalaire »

$$\langle x \,|\, y \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

pour deux vecteurs colonnes x et y.

2.2. Lemme. *Soient $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, $A_j = A_{1..n,j}$, et $z = {}^{\mathrm{t}}[\, z_1 \ \cdots \ z_n\,] \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ avec $A_1 = {}^{\mathrm{t}}[\, z_2 \ -z_1 \ 0 \ \cdots \ 0\,]$. En posant $s_j = \langle z \,|\, A_j \rangle$ pour $j \in [\![2..n]\!]$, on a*

$$\det A = \sum\nolimits_{j=2}^{n} (-1)^j \, s_j \, \det(A_{3..n,\,2..n\setminus\{j\}}).$$

En particulier, $\det A \in \langle s_2, \ldots, s_n \rangle$.

▷ Notons $B = A_{3..n,2..n}$, $B_j = A_{3..n,j}$ et $B_{\hat{\jmath}} = A_{3..n,\,2..n\setminus\{j\}}$. Le développement de Laplace du déterminant de A selon les deux premières lignes donne l'égalité :

$$\det A = \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \begin{vmatrix} z_2 & a_{1j} \\ -z_1 & a_{2j} \end{vmatrix} \det(B_{\hat{\jmath}}) = \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \, (z_1 a_{1j} + z_2 a_{2j}) \det(B_{\hat{\jmath}}).$$

L'écart entre cette égalité et l'égalité voulue est

$$\textstyle\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \, (z_3 a_{3j} + \cdots + z_n a_{nj}) \, \det(B_{\hat{\jmath}}). \qquad (*)$$

La syzygie de Cramer entre les colonnes d'une matrice avec $m = n_2$, donne pour B les égalités

$$\textstyle\sum_{j=2}^{n} (-1)^j \det(B_{\hat{\jmath}}) \, B_j = 0, \text{ a fortiori } \sum_{j=2}^{n} (-1)^j \, \langle y \,|\, B_j \rangle \det(B_{\hat{\jmath}}) = 0,$$

pour n'importe quel vecteur $y \in \mathbf{A}^{(n-2)\times 1}$. En prenant $y = {}^{\mathrm{t}}[\, z_3 \ \cdots \ z_n \,]$, on voit que l'écart $(*)$ est nul. □

Suites régulières

2.3. Définition. Une suite $(a_1, \ldots, a_k)$ dans un anneau $\mathbf{A}$ est *régulière* si chaque a_i est régulier dans l'anneau $\mathbf{A}/\langle a_j \,;\, j < i\rangle$.

Remarque. Nous avons retenu ici la définition de Bourbaki. La plupart des auteurs réclament en outre que l'idéal $\langle a_1, \ldots, a_k\rangle$ ne contienne pas 1. Mais l'expérience montre que cette négation introduit des complications inutiles dans les énoncés et les démonstrations. ∎

Comme premier exemple, pour tout anneau $\mathbf{k}$, la suite $(X_1, \ldots, X_k)$ est régulière dans $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_k]$.
Notre but est de monter qu'un idéal engendré par une suite régulière est un module de présentation finie.
Nous établissons d'abord un petit lemme et une proposition.
Rappelons qu'une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est dite *alternée* si c'est la matrice d'une forme bilinéaire alternée, i.e. $m_{ii} = 0$ et $m_{ij} + m_{ji} = 0$ pour $i, j \in [\![1..n]\!]$.
Le $\mathbf{A}$-module des matrices alternées est libre de rang $\frac{n(n-1)}{2}$ et admet une base naturelle. Par exemple, pour $n = 3$,

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.4. Lemme. *Soit* $a = {}^{\mathrm{t}}[\, \underline{a} \,] = {}^{\mathrm{t}}[\, a_1 \ \cdots \ a_n \,] \in \mathbf{A}^{n\times 1}$.

1. *Soit* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ *une matrice alternée ; on a* $\langle Ma \,|\, a\rangle = 0$.
2. *Un* $u \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ *est dans* $\operatorname{Im} R_{\underline{a}}$ *si, et seulement si, il existe une matrice alternée* $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ *telle que* $u = Ma$.

▷ *1.* En effet, $\langle Ma \,|\, a\rangle = \varphi(a, a)$, où φ est une forme bilinéaire alternée.
2. Par exemple, pour la première colonne de $R_{\underline{a}}$ avec $n = 4$, on a :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

et les $\frac{n(n-1)}{2}$ colonnes de $R_{\underline{a}}$ correspondent ainsi aux $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices alternées formant la base naturelle du $\mathbf{A}$-module des matrices alternées de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. □

2.5. Proposition. *Soit* $(z_1,\dots,z_n)=(\underline{z})$ *une suite régulière d'éléments de* $\mathbf{A}$ *et* $z={}^{\mathrm{t}}[\,z_1\ \cdots\ z_n\,]\in\mathbf{A}^{n\times 1}$. *Si* $\langle u\,|\,z\rangle=0$, *il existe une matrice alternée* $M\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ *telle que* $u=Mz$, *et donc* $u\in\operatorname{Im}R_{\underline{z}}$.

▷ On raisonne par récurrence sur n. Pour $n=2$, on part de $u_1z_1+u_2z_2=0$. Donc $u_2z_2=0$ dans $\mathbf{A}/\langle z_1\rangle$, et puisque z_2 est régulier modulo z_1, on a $u_2=0$ dans $\mathbf{A}/\langle z_1\rangle$, disons $u_2=-az_1$ dans $\mathbf{A}$. Il vient $u_1z_1-az_2z_1=0$, et comme z_1 est régulier, $u_1=az_2$, ce qui s'écrit $\begin{bmatrix}u_1\\u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&a\\-a&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\z_2\end{bmatrix}$.
Pour $n+1$ ($n\geqslant 2$), on part de $u_1z_1+\cdots+u_{n+1}z_{n+1}=0$. En utilisant le fait que z_{n+1} est régulier modulo $\langle z_1,\dots,z_n\rangle$, on obtient $u_{n+1}\in\langle z_1,\dots,z_n\rangle$, ce que l'on écrit $a_1z_1+\cdots+a_nz_n+u_{n+1}=0$. D'où :

$$(u_1-a_1z_{n+1})z_1+\cdots+(u_n-a_nz_{n+1})z_n=0.$$

Par hypothèse de récurrence, on sait construire $M\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ alternée avec :

$$\begin{bmatrix}u_1-a_1z_{n+1}\\\vdots\\u_n-a_nz_{n+1}\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{bmatrix},\ \text{i.e.}\ \begin{bmatrix}u_1\\\vdots\\u_n\end{bmatrix}=M\begin{bmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\end{bmatrix}+z_{n+1}\begin{bmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}.$$

Et l'on obtient le résultat voulu :

$$\begin{bmatrix}u_1\\\vdots\\u_n\\u_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}&&&a_1\\&M&&\vdots\\&&&a_n\\-a_1&\dots&-a_n&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\\vdots\\z_n\\z_{n+1}\end{bmatrix}.$$

□

2.6. Théorème. *Si* $(z_1,\dots,z_n)$ *est une suite régulière d'éléments de* $\mathbf{A}$, *l'idéal* $\langle z_1,\dots,z_n\rangle$ *est un* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie. Plus précisément, on a la suite exacte*

$$\mathbf{A}^{n(n-1)/2}\xrightarrow{R_{\underline{z}}}\mathbf{A}^n\xrightarrow{(z_1,\dots,z_n)}\langle z_1,\dots,z_n\rangle\longrightarrow 0.$$

Remarque. Les objets définis ci-dessus constituent une introduction au premier étage du *complexe de Koszul* descendant de $(z_1,\dots,z_n)$. ■

▷ Cela résulte de la proposition 2.5 et du lemme 2.4. □

Un exemple en géométrie

Voici pour commencer une évidence fort utile.

2.7. Proposition et définition. (Caractères d'une algèbre)
Soit $\imath:\mathbf{k}\to\mathbf{A}$ *une algèbre.*

- *Un homomorphisme de* $\mathbf{k}$*-algèbres* $\varphi:\mathbf{A}\to\mathbf{k}$ *est appelé un* caractère.
- *Si* $\mathbf{A}$ *possède un caractère* φ, *alors* $\varphi\circ\imath=\mathrm{Id}_{\mathbf{k}}$, $\imath\circ\varphi$ *est un projecteur et* $\mathbf{A}=\mathbf{k}.1_{\mathbf{A}}\oplus\operatorname{Ker}\varphi$. *En particulier, on peut identifier* $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{k}.1_{\mathbf{A}}$.

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

Soit maintenant $(\underline{f}) = (f_1, \dots, f_s)$ un système polynomial sur un anneau $\mathbf{k}$, avec les $f_i \in \mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. On note

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle .$$

Dans ce paragraphe, de façon informelle, nous dirons que $\mathbf{A}$ est l'*anneau de la variété affine* $\underline{f} = \underline{0}$.
Pour l'algèbre $\mathbf{A}$, les caractères $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$ sont donnés par les zéros dans $\mathbf{k}^n$ du système polynomial $(f_1, \dots, f_s)$:

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) = \big(\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_n)\big), \quad \underline{f}(\underline{\xi}) = \underline{0}.$$

Dans ce cas, on dit que $\underline{\xi} \in \mathbf{k}^n$ est un point de la variété $\underline{f} = \underline{0}$.
L'idéal

$$\mathfrak{m}_{\underline{\xi}} \stackrel{\text{def}}{=} \langle x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n \rangle_{\mathbf{A}}$$

est appelé l'*idéal du point* $\underline{\xi}$ *dans la variété*. On a alors comme cas particulier de la proposition 2.7 : $\mathbf{A} = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$, avec $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}} = \operatorname{Ker} \varphi$.
Dans ce paragraphe on montre que l'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ est un $\mathbf{A}$-module de présentation finie en explicitant une matrice de présentation pour le système générateur $(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n)$.
Par translation, il suffit de traiter le cas où $\underline{\xi} = \underline{0}$, ce que nous supposons désormais.
Le cas le plus simple, celui pour lequel il n'y a aucune équation, a déjà été traité dans le théorème 2.6.
Observons que tout $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ tel que $f(\underline{0}) = 0$ s'écrit, de plusieurs manières, sous la forme

$$f = X_1 u_1 + \cdots + X_n u_n, \qquad u_i \in \mathbf{k}[\underline{X}].$$

Si $X_1 v_1 + \cdots + X_n v_n$ est une autre écriture de f, on obtient par soustraction une syzygie entre les X_i dans $\mathbf{k}[\underline{X}]$, et donc :

$${}^{\mathrm{t}}[\, v_1 \ \cdots \ v_n \,] - {}^{\mathrm{t}}[\, u_1 \ \cdots \ u_n \,] \in \operatorname{Im} R_{\underline{X}}.$$

Pour le système polynomial $(f_1, \dots, f_s)$, on définit ainsi (de manière non unique) une famille de polynômes $(u_{ij})_{i \in [\![1..n]\!], j \in [\![1..s]\!]}$, avec $f_j = \sum_{i=1}^{n} X_i u_{ij}$. Ceci donne une matrice $U(\underline{X}) = (u_{ij})$ et son image $U(\underline{x}) = \big(u_{ij}(\underline{x})\big) \in \mathbf{A}^{n \times s}$.

2.8. Théorème. *Pour un système polynomial sur un anneau* $\mathbf{k}$ *et un zéro* $\underline{\xi} \in \mathbf{k}^n$*, l'idéal* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *du point* $\underline{\xi}$ *est un* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie. Plus précisément, avec les notations précédentes, pour le cas* $\underline{\xi} = \underline{0}$ *la matrice* $W = [\, R_{\underline{x}} \,|\, U(\underline{x}) \,]$ *est une matrice de présentation de l'idéal* $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$ *pour le système générateur* $(x_1, \dots, x_n)$*. Autrement dit on a une suite exacte*

$$\mathbf{A}^m \xrightarrow{[\, R_{\underline{x}} \,|\, U \,]} \mathbf{A}^n \xrightarrow{(x_1, \dots, x_n)} \mathfrak{m}_{\underline{0}} \longrightarrow 0 \qquad (m = \tfrac{n(n-1)}{2} + s).$$

$\mathbb{D}$ Prenons par exemple $n = 3$, $s = 4$, $X = {}^{\mathrm{t}}[\, X_1 \ X_2 \ X_3 \,]$ et pour économiser les indices écrivons $f_1 = X_1 a_1 + X_2 a_2 + X_3 a_3$, et f_2, f_3, f_4 en utilisant les lettres b, c, d. On prétend avoir la matrice de présentation suivante pour le

système générateur (x_1, x_2, x_3) de $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$:

$$\begin{bmatrix} x_2 & x_3 & 0 & a_1(\underline{x}) & b_1(\underline{x}) & c_1(\underline{x}) & d_1(\underline{x}) \\ -x_1 & 0 & x_3 & a_2(\underline{x}) & b_2(\underline{x}) & c_2(\underline{x}) & d_2(\underline{x}) \\ 0 & -x_1 & -x_2 & a_3(\underline{x}) & b_3(\underline{x}) & c_3(\underline{x}) & d_3(\underline{x}) \end{bmatrix}.$$

On définit $A = {}^{\mathrm{t}}[\, a_1\ a_2\ a_3\,]$ dans $\mathbf{k}[\underline{X}]^3$ (ainsi que B, C, D) de sorte que :

$$f_1 = \langle A \,|\, X\rangle,\ f_2 = \langle B \,|\, X\rangle\ \ldots.$$

Considérons une syzygie $v_1(\underline{x})x_1 + v_2(\underline{x})x_2 + v_3(\underline{x})x_3 = 0$ dans $\mathbf{A}$. On la remonte dans $\mathbf{k}[\underline{X}]$:

$$v_1X_1 + v_2X_2 + v_3X_3 \equiv 0 \bmod \langle \underline{f} \rangle.$$

Ce que l'on écrit

$$v_1X_1 + v_2X_2 + v_3X_3 = \alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma f_3 + \delta f_4, \qquad \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbf{k}[\underline{X}].$$

Donc, avec $V = {}^{\mathrm{t}}[\, v_1\ v_2\ v_3\,]$, $V - (\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D)$ est une syzygie pour (X_1, X_2, X_3), ce qui implique par la proposition 2.5

$$V - (\alpha A + \beta B + \gamma C + \delta D) \in \operatorname{Im} R_{\underline{X}}.$$

Ainsi, $V \in \operatorname{Im}[\, R_{\underline{X}} \,|\, U(\underline{X})\,]$, et ${}^{\mathrm{t}}[\, v_1(\underline{x})\ v_2(\underline{x})\ v_3(\underline{x})\,] \in \operatorname{Im}[\, R_{\underline{x}} \,|\, U(\underline{x})\,]$. □

3. Catégorie des modules de présentation finie

La catégorie des modules de présentation finie sur $\mathbf{A}$ peut être construite à partir de la catégorie des modules libres de rang fini sur $\mathbf{A}$ par un procédé purement catégorique.

1. Un module de présentation finie M est décrit par un triplet
$$(\mathrm{K}_M, \mathrm{G}_M, \mathrm{A}_M),$$
où A_M est une application linéaire entre les modules libres de rangs finis K_M et G_M. On a $M \simeq \operatorname{Coker} \mathrm{A}_M$ et $\pi_M : \mathrm{G}_M \to M$ est l'application linéaire surjective de noyau $\operatorname{Im} \mathrm{A}_M$. La matrice de l'application linéaire A_M est une matrice de présentation de M.

2. Une application linéaire φ du module M (décrit par $(\mathrm{K}_M, \mathrm{G}_M, \mathrm{A}_M)$) vers le module N (décrit par $(\mathrm{K}_N, \mathrm{G}_N, \mathrm{A}_N)$) est décrite par deux applications linéaires $\mathrm{K}_\varphi : \mathrm{K}_M \to \mathrm{K}_N$ et $\mathrm{G}_\varphi : \mathrm{G}_M \to \mathrm{G}_N$ soumises à la relation de commutation $\mathrm{G}_\varphi \circ \mathrm{A}_M = \mathrm{A}_N \circ \mathrm{K}_\varphi$.
$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{K}_M & \xrightarrow{\mathrm{A}_M} & \mathrm{G}_M & \xrightarrow{\pi_M} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{K}_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{G}_\varphi} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \mathrm{K}_N & \xrightarrow[\mathrm{A}_N]{} & \mathrm{G}_N & \xrightarrow[\pi_N]{} & N \end{array}$$

3. La somme de deux applications linéaires φ et ψ de M vers N représentées par $(\mathrm{K}_\varphi, \mathrm{G}_\varphi)$ et $(\mathrm{K}_\psi, \mathrm{G}_\psi)$ est représentée par $(\mathrm{K}_\varphi + \mathrm{K}_\psi,\ \mathrm{G}_\varphi + \mathrm{G}_\psi)$. L'application linéaire $a\varphi$ est représentée par $(a\mathrm{K}_\varphi, a\mathrm{G}_\varphi)$.

4. Pour représenter la composée de deux applications linéaires, on compose leurs représentations.

5. Enfin l'application linéaire φ de M vers N représentée par $(\mathrm{K}_\varphi, \mathrm{G}_\varphi)$ est nulle si, et seulement si, il existe $Z_\varphi : \mathrm{G}_M \to \mathrm{K}_N$ vérifiant $\mathrm{A}_N \circ Z_\varphi = \mathrm{G}_\varphi$.

Ceci montre que les problèmes concernant les modules de présentation finie peuvent toujours être interprétés comme des problèmes à propos de matrices, et se ramènent souvent à des problèmes de résolution de systèmes linéaires sur $\mathbf{A}$.
Par exemple, si l'on donne M, N et φ et si l'on cherche une application linéaire $\sigma : N \to M$ vérifiant $\varphi \circ \sigma = \mathrm{Id}_N$, il faut trouver des applications linéaires $\mathrm{K}_\sigma : \mathrm{K}_N \to \mathrm{K}_M$, $\mathrm{G}_\sigma : \mathrm{G}_N \to \mathrm{G}_M$ et $Z : \mathrm{G}_N \to \mathrm{K}_N$ qui vérifient :

$$\mathrm{G}_\sigma \circ \mathrm{A}_N = \mathrm{A}_M \circ \mathrm{K}_\sigma \quad \text{et} \quad \mathrm{A}_N \circ Z = \mathrm{G}_\varphi \circ \mathrm{G}_\sigma - \mathrm{Id}_{\mathrm{G}_N}.$$

Ceci n'est autre qu'un système linéaire ayant pour inconnues les coefficients des matrices des applications linéaires G_σ, K_σ et Z.
De manière analogue, si l'on se donne $\sigma : N \to M$ et si l'on se pose la question de savoir s'il existe $\varphi : M \to N$ vérifiant $\varphi \circ \sigma = \mathrm{Id}_N$, on devra résoudre un système linéaire dont les inconnues sont les coefficients des matrices des applications linéaires G_φ, K_φ et Z.
De même, si l'on se donne $\varphi : M \to N$ et si l'on se pose la question de savoir si φ est localement simple, on doit savoir s'il existe $\sigma : N \to M$ vérifiant $\varphi \circ \sigma \circ \varphi = \varphi$, et l'on obtient un système linéaire ayant pour inconnues les coefficients des matrices de G_σ, K_σ et Z.
On en déduit des principes local-globals correspondants.

3.1. Principe local-global concret. (Pour certaines propriétés des applications linéaires entre modules de présentation finie)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, $\varphi : M \to N$ une application linéaire entre modules de présentation finie. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'application $\mathbf{A}$-linéaire φ admet un inverse à gauche (resp. admet un inverse à droite, resp. est localement simple).*

2. *Pour $i \in [\![1..n]\!]$, l'application $\mathbf{A}_{S_i}$-linéaire $\varphi_{S_i} : M_{S_i} \to N_{S_i}$ admet un inverse à gauche (resp. un admet un inverse à droite, resp. est localement simple).*

4. Propriétés de stabilité

4.1. Proposition. *Soient N_1 et N_2 deux sous-$\mathbf{A}$-modules de type fini d'un $\mathbf{A}$-module M. Si $N_1 + N_2$ est de présentation finie, alors $N_1 \cap N_2$ est de type fini.*

D On peut reprendre presque mot pour mot la démonstration du point *1* du théorème II-3.4 (condition nécessaire). □

4.2. Proposition. *Soit N un sous-$\mathbf{A}$-module de M et $P = M/N$.*

1. *Si M est de présentation finie et N de type fini, P est de présentation finie.*
2. *Si M est de type fini et P de présentation finie, N est de type fini.*
3. *Si P et N sont de présentation finie, M est de présentation finie. Plus précisément, si A et B sont des matrices de présentation pour N et P, on a une matrice de présentation $D = \begin{array}{|c|c|}\hline A & C \\ \hline 0 & B \\ \hline \end{array}$ pour M.*

D *1.* On peut supposer que $M = \mathbf{A}^p/F$ avec F de type fini. Si N est de type fini, il s'écrit $N = (F'+F)/F$ où F' est de type fini, donc $P \simeq \mathbf{A}^p/(F+F')$.
2. On écrit $M = \mathbf{A}^p/F$, et $N = (F' + F)/F$. On a $P \simeq \mathbf{A}^p/(F' + F)$, donc $F' + F$ est de type fini (section 1), et N également.
3. Soient $x_1, \ldots, x_m$ des générateurs de N et $x_{m+1}, \ldots, x_n$ des éléments de M dont les classes modulo N engendrent P. Toute syzygie sur $(\overline{x_{m+1}}, \ldots, \overline{x_n})$ dans P donne une syzygie sur $(x_1, \ldots, x_n)$ dans M. De même, toute syzygie sur $(x_1, \ldots, x_n)$ dans M donne une syzygie sur $(\overline{x_{m+1}}, \ldots, \overline{x_n})$ dans P. Si A est une matrice de présentation de N pour $(x_1, \ldots, x_m)$ et si B est une matrice de présentation de P pour $(\overline{x_{m+1}}, \ldots, \overline{x_n})$, on obtient donc une matrice de présentation D de M pour $(x_1, \ldots, x_n)$ du format voulu. □

On notera que dans la démonstration du point *2* les sous-modules F et F' ne sont pas nécessairement de type fini.

Cohérence et présentation finie

Les propositions II-3.1 et II-3.7 (lorsque l'on prend $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{A}$-module M) se relisent sous la forme du théorème suivant.

4.3. Théorème. *Sur un anneau cohérent tout module de présentation finie est cohérent. Sur un anneau cohérent fortement discret tout module de présentation finie est cohérent fortement discret.*

4.4. Proposition. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau cohérent et $\varphi : M \to N$ une application linéaire entre $\mathbf{A}$-modules de présentation finie, alors* $\operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\varphi$ *et* $\operatorname{Coker}\varphi$ *sont des modules de présentation finie.*

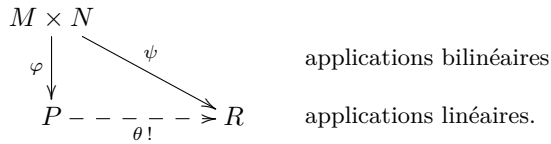
4.5. Proposition. *Soit N un sous-$\mathbf{A}$-module de type fini de M.*

1. *Si M est cohérent, M/N est cohérent.*
2. *Si M/N et N sont cohérents, M est cohérent.*

1. On considère un sous-module de type fini $P = \langle \overline{x_1}, \ldots, \overline{x_\ell} \rangle$ de M/N. Alors $P \simeq (\langle x_1, \ldots, x_\ell \rangle + N)/N$. On conclut par la proposition 4.2 qu'il est de présentation finie.
2. Soit Q un sous-module de type fini de M. Le module $(Q+N)/N$ est de type fini dans M/N donc de présentation finie. Puisque $(Q+N)/N$ et N sont de présentation finie, $Q+N$ également (proposition 4.2). Donc $Q \cap N$ est de type fini (proposition 4.1). Puisque N est cohérent, $Q \cap N$ est de présentation finie. Puisque $Q/(Q \cap N) \simeq (Q+N)/N$ et $Q \cap N$ sont de présentation finie, Q est de présentation finie (proposition 4.2). □

Produit tensoriel, puissances extérieures, puissances symétriques

Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules. Une application bilinéaire $\varphi : M \times N \to P$ est appelée un *produit tensoriel* des $\mathbf{A}$-modules M et N si toute application bilinéaire $\psi : M \times N \to R$ s'écrit de manière unique sous la forme $\psi = \theta \circ \varphi$, où θ est une application $\mathbf{A}$-linéaire de P vers R.



Il est alors clair que $\varphi : M \times N \to P$ est unique au sens catégorique, c'est-à-dire que pour tout autre produit tensoriel $\varphi' : M \times N \to P'$ il y a une application linéaire unique $\theta : P \to P'$ qui rend le diagramme convenable commutatif, et que θ est un isomorphisme.
Si $(\underline{g})$ est un système générateur de M et $(\underline{h})$ un système générateur de N, une application bilinéaire $\lambda : M \times N \to P$ est connue à partir de ses valeurs sur les éléments de $\underline{g} \times \underline{h}$. En outre, les valeurs $\lambda(x, y)$ sont liées par certaines contraintes, qui proviennent des syzygies entre éléments de $\underline{g}$ dans M et des syzygies entre éléments de $\underline{h}$ dans N.
Par exemple, si l'on a une syzygie $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 =_M 0$ entre des éléments x_i de $\underline{g}$, avec les a_i dans $\mathbf{A}$, cela fournit pour chaque $y \in \underline{h}$ la syzygie suivante dans P : $a_1\lambda(x_1, y) + a_2\lambda(x_2, y) + a_3\lambda(x_3, y) = 0$.
En fait : « ce sont les seules contraintes indispensables, et cela montre qu'un produit tensoriel peut être construit ».
Plus précisément, notons $x \otimes y$ à la place de (x, y) un élément arbitraire de $\underline{g} \times \underline{h}$. Considérons alors le $\mathbf{A}$-module P engendré par les $x \otimes y$, liés par

les syzygies décrites ci-dessus ($a_1(x_1 \otimes y) + a_2(x_2 \otimes y) + a_3(x_3 \otimes y) =_P 0$ pour l'exemple donné).

4.6. Proposition. *(Avec les notations ci-dessus)*

1. *Il existe une unique application bilinéaire $\varphi : M \times N \to P$ telle que pour tout $(x, y) \in \underline{g} \times \underline{h}$, on ait $\varphi(x, y) = x \otimes y$.*
2. *Cette application bilinéaire fait de P un produit tensoriel des modules M et N. En particulier, si M et N sont libres de bases $(\underline{g})$ et $(\underline{h})$, le module P est libre de base $(\underline{g} \otimes \underline{h}) := (x \otimes y)_{x \in \underline{g},\, y \in \underline{h}}$.*

D La démonstration est laissée à la lectrice. □

Ainsi, le produit tensoriel de deux $\mathbf{A}$-modules existe et peut toujours être défini à partir de présentations de ces modules. Il est noté $M \otimes_{\mathbf{A}} N$.
Le fait qui suit est plus ou moins une paraphrase de la proposition précédente, mais il ne peut être énoncé qu'une fois que l'on sait que les produits tensoriels existent.

4.7. Fait.

1. *Si deux modules sont de type fini (resp. de présentation finie) leur produit tensoriel l'est également.*
2. *Si M est libre de base $(g_i)_{i \in I}$ et N est libre de base $(h_j)_{j \in J}$, alors $M \otimes N$ est libre de base $(g_i \otimes h_j)_{(i,j) \in I \times J}$.*
3. *Si $M \simeq \operatorname{Coker} \alpha$ et $N \simeq \operatorname{Coker} \beta$, avec $\alpha : L_1 \to L_2$ et $\beta : L_3 \to L_4$, les modules L_i étant libres, alors l'application $\mathbf{A}$-linéaire*
$$(\alpha \otimes \mathrm{Id}_{L_4}) \oplus (\mathrm{Id}_{L_2} \otimes \beta) : (L_1 \otimes L_4) \oplus (L_2 \otimes L_3) \to L_2 \otimes L_4$$
a pour conoyau un produit tensoriel de M et N.

Commentaires.
1) Il y a des raisons profondes, données dans la théorie qui a pour nom *algèbre universelle*, qui font que la construction du produit tensoriel *ne peut pas ne pas marcher*. Mais cette théorie générale est un peu trop lourde pour être exposée dans cet ouvrage, et il vaut mieux s'imbiber de ce genre de choses par imprégnation sur des exemples.
2) Le lecteur habitué aux mathématiques classiques n'aura pas lu sans appréhension notre « présentation » du produit tensoriel de M et N, qui est un module construit à partir de présentations de M et N. S'il a lu Bourbaki, il aura remarqué que notre construction est la même que celle de l'illustre mathématicien multicéphale, à ceci près que Bourbaki se limite à une présentation « naturelle et universelle » : tout module est engendré par tous ses éléments liés par toutes leurs syzygies. Si la « présentation » de Bourbaki a le mérite de l'universalité, elle a l'inconvénient de la lourdeur de l'hippopotame.

En fait, en mathématiques constructives, on n'a pas la même « théorie des ensembles » sous-jacente qu'en mathématiques classiques. Une fois que l'on a *donné* un module M au moyen d'une présentation $\alpha : L_1 \to L_2$, on ne s'empresse pas d'oublier α comme on fait semblant de le faire en mathématiques classiques [2]. Bien au contraire, du point de vue constructif, le module M n'est rien d'autre qu'« un codage de l'application linéaire α » (par exemple sous forme d'une matrice si la présentation est finie), avec l'information complémentaire qu'il s'agit de la présentation d'un module. D'autre part, un « ensemble quotient » n'est pas vu comme un ensemble de classes d'équivalence, mais comme « le même préensemble muni d'une relation d'égalité moins fine » : l'ensemble quotient de $(E, =_E)$ par la relation d'équivalence $\sim$ est simplement l'ensemble $(E, \sim)$. En conséquence, notre construction du produit tensoriel, conforme à son implémentation sur machine, est entièrement « naturelle et universelle » dans le cadre de la théorie constructive des ensembles (la lectrice pourra consulter le simple et génial chapitre 3 de [Bishop], ou l'un des autres ouvrages de référence classiques pour les mathématiques constructives [Beeson, Bishop & Bridges, Bridges & Richman, MRR]).

3) Pour construire le produit tensoriel de deux modules *non* discrets M et N, nous avons besoin a priori de la notion de module librement engendré par un ensemble *non* discret. Pour la définition constructive de ce type de modules libres, voir l'exercice VIII-16. On peut cependant contourner la difficulté en ne faisant pas appel, dans la construction, à des systèmes générateurs de M et N. Les éléments du produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{A}} N$ sont seulement des sommes formelles $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ pour des familles finiment énumérées dans M et N. Le tout est de bien définir la relation d'équivalence qui donne par passage au quotient le module $M \otimes_{\mathbf{A}} N$. Les détails sont laissés au lecteur. ∎

D'après sa définition même, le produit tensoriel est « fonctoriel », i.e. si l'on a deux applications $\mathbf{A}$-linéaires $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$, alors il existe une unique application linéaire $h : M \otimes_{\mathbf{A}} N \to M' \otimes_{\mathbf{A}} N'$ vérifiant les égalités $h(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y)$ pour $x \in M$ et $y \in N$. Cette application linéaire est naturellement notée $h = f \otimes g$.

On a aussi des isomorphismes canoniques

$$M \otimes_{\mathbf{A}} N \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\mathbf{A}} M \quad \text{et} \quad M \otimes_{\mathbf{A}} (N \otimes_{\mathbf{A}} P) \xrightarrow{\sim} (M \otimes_{\mathbf{A}} N) \otimes_{\mathbf{A}} P,$$

ce que l'on exprime en disant que le produit tensoriel est commutatif et associatif.

Le fait suivant résulte immédiatement de la description du produit tensoriel par générateurs et relations.

---

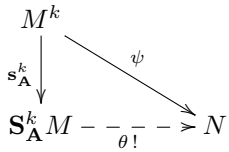
2. Une inspection détaillée de l'objet M construit selon la théorie des ensembles des mathématiques classiques montrerait d'ailleurs que ces dernières ne l'oublient pas non plus.

4.8. Fait. *Pour toute suite exacte de* $\mathbf{A}$*-modules* $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ *et pour tout* $\mathbf{A}$*-module* Q *la suite*

$$M \otimes_{\mathbf{A}} Q \xrightarrow{f\otimes \mathrm{Id}_Q} N \otimes_{\mathbf{A}} Q \xrightarrow{g\otimes \mathrm{Id}_Q} P \otimes_{\mathbf{A}} Q \to 0$$

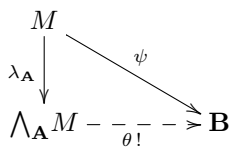
est exacte.

On exprime ce fait en disant que « le foncteur $\bullet \otimes Q$ est exact à droite ». Nous ne rappellerons pas en détail l'énoncé des problèmes universels que résolvent les puissances extérieures (déjà donné page 38), les *puissances symétriques* et l'*algèbre extérieure* d'un $\mathbf{A}$-module. Voici néanmoins les « petits diagrammes » correspondants pour les deux derniers.



applications multilinéaires symétriques

applications linéaires.



$\mathbf{A}$-modules

$\psi(x) \times \psi(x) = 0$ pour tout $x \in M$

$\mathbf{A}$-algèbres associatives.

Comme corollaire de la proposition 4.6 on obtient la proposition qui suit.

4.9. Proposition. *Si* M *est un* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie, alors il en va de même pour* $\bigwedge^k_{\mathbf{A}} M$ *et pour les puissances symétriques* $\mathbf{S}^k_{\mathbf{A}} M$ *(*$k \in \mathbb{N}$*). Plus précisément, si* M *est engendré par le système* $(x_1, \dots, x_n)$ *soumis à des syzygies* $r_j \in \mathbf{A}^n$*, on obtient les résultats suivants.*

1. *Le module* $\bigwedge^k_{\mathbf{A}} M$ *est engendré par les* k*-vecteurs*
$$x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_k} \text{ pour } 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n,$$
soumis aux syzygies obtenues en faisant le produit extérieur des syzygies r_j *par les* $(k-1)$*-vecteurs* $x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_{k-1}}$.
2. *Le module* $\mathbf{S}^k_{\mathbf{A}} M$ *est engendré par les tenseurs* k*-symétriques*
$$\mathbf{s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \text{ pour } 1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n,$$
soumis aux syzygies obtenues en faisant le produit des syzygies r_j *par les tenseurs* $(k-1)$*-symétriques* $\mathbf{s}(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}})$.

Par exemple, avec $n = 4$ et $k = 2$ une syzygie $a_1x_1 + \cdots + a_4x_4 = 0$ dans M donne lieu à 4 syzygies dans $\bigwedge^2_{\mathbf{A}} M$:

$$\begin{aligned}
a_2\,(x_1 \wedge x_2) \;+\; a_3\,(x_1 \wedge x_3) \;+\; a_4\,(x_1 \wedge x_4) &= 0\\
a_1\,(x_1 \wedge x_2) \;-\; a_3\,(x_2 \wedge x_3) \;-\; a_4\,(x_2 \wedge x_4) &= 0\\
a_1\,(x_1 \wedge x_3) \;+\; a_2\,(x_2 \wedge x_3) \;-\; a_4\,(x_3 \wedge x_4) &= 0\\
a_1\,(x_1 \wedge x_4) \;+\; a_2\,(x_2 \wedge x_4) \;+\; a_3\,(x_3 \wedge x_4) &= 0
\end{aligned}$$

et à 4 syzygies dans $\mathbf{S}^2_{\mathbf{A}}M$:

$$\begin{array}{l} a_1\,\mathbf{s}(x_1,x_1) + a_2\,\mathbf{s}(x_1,x_2) + a_3\,\mathbf{s}(x_1,x_3) + a_4\,\mathbf{s}(x_1,x_4) = 0\\ a_1\,\mathbf{s}(x_1,x_2) + a_2\,\mathbf{s}(x_2,x_2) + a_3\,\mathbf{s}(x_2,x_3) + a_4\,\mathbf{s}(x_2,x_4) = 0\\ a_1\,\mathbf{s}(x_1,x_3) + a_2\,\mathbf{s}(x_2,x_3) + a_3\,\mathbf{s}(x_3,x_3) + a_4\,\mathbf{s}(x_3,x_4) = 0\\ a_1\,\mathbf{s}(x_1,x_4) + a_2\,\mathbf{s}(x_2,x_4) + a_3\,\mathbf{s}(x_3,x_4) + a_4\,\mathbf{s}(x_4,x_4) = 0 \end{array}$$

Remarque. De manière plus générale, pour toute suite exacte :

$$K \xrightarrow{u} G \xrightarrow{p} M \to 0$$

on a une suite exacte :

$$K \otimes \textstyle\bigwedge^{k-1} G \xrightarrow{u'} \bigwedge^k G \xrightarrow{\bigwedge^k p} \bigwedge^k M \to 0$$

avec $u'(z\otimes y) = u(z)\wedge y$ pour $z\in K$, $y\in \bigwedge^{k-1} G$.
À droite, la surjectivité est immédiate et il est clair que $(\bigwedge^k p)\circ u' = 0$, ce qui permet de définir $p' : \operatorname{Coker} u' \to \bigwedge^k M$ par passage au quotient. Il reste à prouver que p' est un isomorphisme. Pour cela, il suffit de construire une application linéaire $q' : \bigwedge^k M \to \operatorname{Coker} u'$ qui soit l'inverse de p'. On n'a pas le choix : pour $x_1, \ldots, x_k \in M$ avec des antécédents $y_1, \ldots, y_k \in G$ par p

$$q'(x_1\wedge\cdots\wedge x_k) = y_1\wedge\cdots\wedge y_k \bmod \operatorname{Im} u'.$$

On laisse le soin à la lectrice de vérifier que q' est bien définie et convient. Le résultat analogue vaut pour les puissances symétriques. ∎

Exemple. Soit $\mathbf{B}$ l'anneau des polynômes $\mathbf{A}[x,y]$ en les indéterminées x et y sur un anneau $\mathbf{A}$ non trivial. On considère l'idéal $\mathfrak{b} = \langle x, y\rangle$ de $\mathbf{B}$, et on le regarde comme un $\mathbf{B}$-module que l'on note M. Alors, M admet le système générateur (x,y) pour lequel une matrice de présentation est égale à $\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$. On en déduit que $M\otimes_{\mathbf{B}} M$ admet $(x\otimes x, x\otimes y, y\otimes x, y\otimes y)$ pour système générateur, avec une matrice de présentation égale à :

$$\begin{array}{l} x\otimes x\\ x\otimes y\\ y\otimes x\\ y\otimes y \end{array} \qquad \begin{bmatrix} y & 0 & 0 & y\\ -x & 0 & y & 0\\ 0 & y & 0 & -x\\ 0 & -x & -x & 0 \end{bmatrix}$$

On en déduit les annulateurs suivants :

$$\operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(x\otimes y - y\otimes x) = \mathfrak{b}, \quad \operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(x\otimes y + y\otimes x) = \operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(2)\,\mathfrak{b},$$
$$\operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(x\otimes x) = \operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(x\otimes y) = \operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(y\otimes x) = \operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(y\otimes y) = 0.$$

Le dual $M^\star = \mathrm{L}_{\mathbf{B}}(M,\mathbf{B})$ de M est libre de rang 1, engendré par la forme

$$\alpha : M \longrightarrow \mathbf{B}, \quad z \longmapsto z,$$

ce qui donne seulement une information partielle sur la structure de M. Par exemple, pour toute forme linéaire $\beta : M \to \mathbf{B}$ on a $\beta(M)\subseteq\mathfrak{b}$ et donc M

ne possède pas de facteur direct libre de rang 1 (cf. proposition II-5.1).
De même, le dual $(M \otimes_{\mathbf{B}} M)^\star$ de $M \otimes_{\mathbf{B}} M$ est libre de rang 1, engendré par la forme

$$\varphi : M \otimes_{\mathbf{B}} M \longrightarrow \mathbf{B}, \quad z \otimes z' \longmapsto zz',$$

et $M \otimes_{\mathbf{B}} M$ ne possède pas de facteur direct libre de rang 1.
Concernant $\mathbf{S}^2_{\mathbf{B}}M$, on trouve qu'il admet un système générateur égal à $\big(\mathbf{s}(x,x), \mathbf{s}(x,y), \mathbf{s}(y,y)\big)$, avec la matrice de présentation

$$\begin{matrix} \mathbf{s}(x,x) \\ \mathbf{s}(x,y) \\ \mathbf{s}(y,y) \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} y & 0 \\ -x & y \\ 0 & -x \end{bmatrix}.$$

Concernant $\bigwedge^2_{\mathbf{B}} M$, on trouve qu'il est engendré par $x \wedge y$ avec la matrice de présentation $[\, x \; y \,]$ ce qui donne

$$\bigwedge\nolimits^2_{\mathbf{B}} M \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}.$$

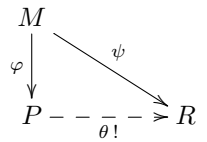
Mais attention au fait que $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{B}$-module est un quotient et non un sous-module de $\mathbf{B}$. ∎

Changement d'anneau de base

Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une algèbre. Tout $\mathbf{B}$-module P peut être muni d'une structure de $\mathbf{A}$-module via ρ en posant $a.x \stackrel{\text{def}}{=} \rho(a)x$.

4.10. Définition. Soit $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre.

1. Soit M un $\mathbf{A}$-module. Une application application $\mathbf{A}$-linéaire $\varphi : M \to P$, où P est un $\mathbf{B}$-module, est appelée un *morphisme d'extension des scalaires* (de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ pour M), ou encore un *changement d'anneau de base* (de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ pour M), si la propriété universelle suivante est satisfaite.
   Pour tout $\mathbf{B}$*-module* R*, toute application* $\mathbf{A}$*-linéaire* $\psi : M \to R$ *s'écrit de manière unique sous la forme* $\psi = \theta \circ \varphi$*, où* $\theta \in \mathrm{L}_{\mathbf{B}}(P, R)$.



$\mathbf{A}$-modules
applications $\mathbf{A}$-linéaires
$\mathbf{B}$-modules, applications $\mathbf{B}$-linéaires

2. Un $\mathbf{B}$-module P tel qu'il existe un $\mathbf{A}$-module M et un morphisme d'extension des scalaires $\varphi : M \to P$ est dit *étendu depuis* $\mathbf{A}$. On dira aussi que P *provient du* $\mathbf{A}$*-module* M *par extension des scalaires.*

Il est clair qu'un morphisme d'extension des scalaires $\varphi : M \to P$ est unique au sens catégorique, c'est-à-dire que pour tout autre morphisme d'extension

des scalaires $\varphi' : M \to P'$, il y a un unique $\theta \in \mathrm{L}_{\mathbf{B}}(P, P')$ qui rend le diagramme convenable commutatif, et que θ est un isomorphisme.
Si $(\underline{g})$ est un système générateur de M et P un $\mathbf{B}$-module arbitraire, une application $\mathbf{A}$-linéaire $\lambda : M \to P$ est connue à partir de ses valeurs sur les éléments x de $\underline{g}$. En outre, les valeurs $\lambda(x)$ sont liées par certaines contraintes, qui proviennent des syzygies entre éléments de $\underline{g}$ dans M. Par exemple, si l'on a une syzygie $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3 =_M 0$ entre des éléments x_i de $\underline{g}$, avec les a_i dans $\mathbf{A}$, cela fournit la syzygie suivante entre les $\lambda(x_i)$ dans P : $\rho(a_1)\lambda(x_1) + \rho(a_2)\lambda(x_2) + \rho(a_3)\lambda(x_3) = 0$.
En fait « ce sont les seules contraintes indispensables, et cela montre qu'une extension des scalaires peut être construite ».
Plus précisément, notons $\rho_\star(x)$ à la place de x (un élément arbitraire de $\underline{g}$). Considérons alors le $\mathbf{B}$-module M_1 engendré par les $\rho_\star(x)$, liés par les syzygies décrites ci-dessus $(\rho(a_1)\rho_\star(x_1) + \rho(a_2)\rho_\star(x_2) + \rho(a_3)\rho_\star(x_3) =_P 0$ pour l'exemple donné).

4.11. Proposition. *(Avec les notations ci-dessus)*

1. a. *Il existe une unique application* $\mathbf{A}$*-linéaire* $\varphi : M \to M_1$ *telle que pour tout* $x \in \underline{g}$*, on ait* $\varphi(x) = \rho_\star(x)$*.*

   b. *Cette application* $\mathbf{A}$*-linéaire fait de* M_1 *une extension des scalaires de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$ *pour* M*. On notera* $M_1 = \rho_\star(M)$*.*

   c. *Dans le cas d'un module de présentation finie, si* M *est (isomorphe au) conoyau d'une matrice* $F = (f_{i,j}) \in \mathbf{A}^{q\times m}$*, alors* M_1 *est (isomorphe au) conoyau de* la même matrice vue dans $\mathbf{B}$*, c'est-à-dire la matrice* $F^\rho = \big(\rho(f_{i,j})\big)$*. En particulier, si* M *est libre de base* $(\underline{g})$*,* M_1 *est libre de base* $\rho_\star(\underline{g})$*.*

2. *En conséquence l'extension des scalaires de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$ *pour un* $\mathbf{A}$*-module arbitraire existe et peut toujours être définie à partir d'une présentation de ce module. Si le module est de type fini (resp. de présentation finie) l'extension des scalaires l'est également.*

3. *Sachant que les extensions de scalaires existent, on peut décrire la construction précédente (de manière non circulaire) comme suit :*
   si $M \simeq \operatorname{Coker}\alpha$ *avec* $\alpha : L_1 \to L_2$*, les modules* L_i *étant libres, alors le module* $M_1 = \operatorname{Coker}\big(\rho_\star(\alpha)\big)$ *est une extension des scalaires de* $\mathbf{A}$ *à* $\mathbf{B}$ *pour le module* M*.*

4. *L'extension des scalaires est transitive : si* $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B} \xrightarrow{\rho'} \mathbf{C}$ *sont deux algèbres « successives» et si* $\rho'' = \rho' \circ \rho$ *définit l'algèbre « composée»,*
   l'application $\mathbf{C}$*-linéaire canonique* $\rho''_\star(M) \to \rho'_\star\big(\rho_\star(M)\big)$ *est un isomorphisme.*

5. *L'extension des scalaires et le produit tensoriel commutent : si M, N sont des $\mathbf{A}$-modules et $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorphisme d'anneaux, l'application $\mathbf{B}$-linéaire naturelle $\rho_\star(M \otimes_{\mathbf{A}} N) \to \rho_\star(M) \otimes_{\mathbf{B}} \rho_\star(N)$ est un isomorphisme.*
6. *De même l'extension des scalaires commute avec la construction des puissances extérieures, des puissances symétriques et de l'algèbre extérieure.*
7. *Vu comme $\mathbf{A}$-module, $\rho_\star(M)$ est isomorphe (de manière unique) au produit tensoriel $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M$ ($\mathbf{B}$ est ici muni de sa structure de $\mathbf{A}$-module via ρ). En outre, la « loi externe » $\mathbf{B} \times \rho_\star(M) \to \rho_\star(M)$, qui définit la structure de $\mathbf{B}$-module de $\rho_\star(M)$, s'interprète via l'isomorphisme précédent comme l'application $\mathbf{A}$-linéaire*
$$\pi \otimes_{\mathbf{A}} \mathrm{Id}_M : \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M \longrightarrow \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M,$$
obtenue à partir de l'application $\mathbf{A}$-linéaire $\pi : \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ « produit dans $\mathbf{B}$ » ($\pi(b \otimes c) = bc$).
8. *Pour toute suite exacte de $\mathbf{A}$-modules $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P \to 0$ la suite*
$$\rho_\star(M) \xrightarrow{\rho_\star(f)} \rho_\star(N) \xrightarrow{\rho_\star(g)} \rho_\star(P) \to 0$$
est exacte.

D La démonstration est laissée au lecteur. □

Ainsi, un $\mathbf{B}$-module P est étendu depuis $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est isomorphe à un module $\rho_\star(M)$. On prendra garde cependant au fait qu'un $\mathbf{B}$-module étendu peut provenir de plusieurs $\mathbf{A}$-modules non isomorphes : par exemple lorsque l'on étend un $\mathbb{Z}$-module à $\mathbb{Q}$, « on tue la torsion », et $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\langle 3 \rangle$ donnent tous deux par extension des scalaires un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension 1.

Remarque. Avec la notation tensorielle du point 7 l'isomorphisme canonique donné au point 5 s'écrit :
$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}} M \xrightarrow{\varphi} \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{B}} (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M) \simeq (\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{B}} \mathbf{B}) \otimes_{\mathbf{A}} M,$$
avec $\varphi(c \otimes x) = c \otimes (1_{\mathbf{B}} \otimes x)$. Nous reviendrons sur ce type d'« associativité » dans la remarque qui suit le corollaire VIII-1.15 page 458. ■

Modules d'applications linéaires

4.12. Proposition. *Si M et N sont des modules de présentation finie sur un anneau cohérent $\mathbf{A}$, alors $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M, N)$ est de présentation finie.*

D On reprend les notations de la section 3.
Donner un élément φ de $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M, N)$ revient à donner les matrices de G_φ et K_φ qui satisfont la condition $\mathrm{G}_\varphi \, \mathrm{A}_M = \mathrm{A}_N \, \mathrm{K}_\varphi$.
Puisque l'anneau est cohérent, les solutions de ce système linéaire forment

un **A**-module de type fini, engendré par exemple par les solutions correspondant à des applications linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell$ données par des couples de matrices $(\mathrm{G}_{\varphi_1}, \mathrm{K}_{\varphi_1}), \ldots, (\mathrm{G}_{\varphi_\ell}, \mathrm{K}_{\varphi_\ell})$. Donc $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) = \langle \varphi_1, \ldots, \varphi_\ell \rangle$.
Par ailleurs, une syzygie $\sum_i a_i \varphi_i = 0$ est vérifiée si, et seulement si, on a une application linéaire $Z_\varphi : \mathrm{G}_M \to \mathrm{K}_N$ vérifiant $\mathrm{A}_N\, Z_\varphi = \sum_i a_i \mathrm{G}_{\varphi_i}$. En prenant le système linéaire correspondant, dont les inconnues sont les a_i d'une part et les coefficients de la matrice de Z_φ d'autre part, on constate que le module des syzygies pour le système générateur $(\varphi_1, \ldots, \varphi_\ell)$ est bien de type fini. □

Le caractère local des modules de présentation finie

Le fait qu'un **A**-module est de présentation finie est une notion locale, au sens suivant.

4.13. Principe local-global concret. (Modules de présentation finie)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux d'un anneau **A**, *et M un* **A***-module. Alors, M est de présentation finie si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module de présentation finie.*

D Supposons que M_{S_i} soit un $\mathbf{A}_{S_i}$-module de présentation finie pour chaque i. Montrons que M est de présentation finie.
D'après le principe local-global II-3.6, M est de type fini. Soit $(g_1, \ldots, g_q)$ un système générateur de M.
Soient $(a_{i,h,1}, \ldots, a_{i,h,q}) \in \mathbf{A}_{S_i}^q$ des syzygies entre les $g_j/1 \in M_{S_i}$ (autrement dit, $\sum_j a_{i,h,j} g_j = 0$ dans M_{S_i}) pour $h = 1, \ldots, k_i$, qui engendrent le $\mathbf{A}_{S_i}$-module des syzygies entre les $g_j/1$.
On suppose sans perte de généralité que les $a_{i,h,j}$ sont de la forme $a'_{i,h,j}/1$, avec $a'_{i,h,j} \in \mathbf{A}$. Il existe alors un $s_i \in S_i$ convenable tel que les vecteurs

$$s_i\,(a'_{i,h,1}, \ldots, a'_{i,h,q}) = (b_{i,h,1}, \ldots, b_{i,h,q})$$

soient des **A**-syzygies entre les $g_j \in M$.
Montrons que les syzygies ainsi construites entre les g_j engendrent toutes les syzygies. Considérons pour cela une syzygie arbitraire $(c_1, \ldots, c_q)$ entre les g_j. Regardons la comme une syzygie entre les $g_j/1 \in M_{S_i}$, et écrivons la comme combinaison $\mathbf{A}_{S_i}$-linéaire des vecteurs $(b_{i,h,1}, \ldots, b_{i,h,q})$ dans $\mathbf{A}_{S_i}^q$. Après multiplication par un $s'_i \in S_i$ convenable on obtient une égalité dans $\mathbf{A}^q$:

$$s'_i(c_1, \ldots, c_q) = e_{i,1}(b_{i,1,1}, \ldots, b_{i,1,q}) + \cdots + e_{i,k_i}(b_{i,k_i,1}, \ldots, b_{i,k_i,q}).$$

On écrit $\sum_{i=1}^n u_i s'_i = 1$. On voit que $(c_1, \ldots, c_q)$ est combinaison **A**-linéaire des $(b_{i,h,1}, \ldots, b_{i,h,q})$. □

Tenseurs nuls

Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules arbitraires, et $t = \sum_{i\in[\![1..n]\!]} x_i\otimes y_i \in M\otimes N$.
L'égalité $\sum_i x_i\otimes y_i = 0$ ne dépend pas seulement a priori de la connaissance des sous-modules $\sum_i \mathbf{A}x_i \subseteq M$ et $\sum_i \mathbf{A}y_i \subseteq N$.
En conséquence la notation $\sum_i x_i \otimes y_i$ est en général lourde d'ambigüité, et dangereuse. On devrait la préciser comme suit : $\sum_i x_i \otimes_{\mathbf{A},M,N} y_i$, ou au moins écrire les égalités sous la forme

$$\textstyle\sum_i x_i \otimes y_i =_{M\otimes_{\mathbf{A}}N} \cdots$$

Cette précaution ne devient inutile que dans le cas où les deux modules M et N sont plats (voir le chapitre VIII), par exemple lorsque l'anneau $\mathbf{A}$ est un corps discret.

4.14. Lemme du tenseur nul. *Soit $M = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$ un module de type fini, N un autre module et $t = \sum_{i\in[\![1..n]\!]} x_i \otimes y_i \in M \otimes_{\mathbf{A}} N$.*
Avec $X = [\,x_1 \cdots x_n\,] \in M^{1\times n}$ et $Y = {}^{\mathrm{t}}[\,y_1 \cdots y_n\,] \in N^{n\times 1}$, on utilise la notation $t = X \odot Y$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $t =_{M\otimes_{\mathbf{A}}N} 0$.
2. *On a un $Z \in N^{m\times 1}$ et une matrice $G \in \mathbf{A}^{n\times m}$ qui vérifient :*

$$XG =_{M^m} 0 \quad \text{et} \quad GZ =_{N^n} Y\,. \tag{1}$$

D *2 $\Rightarrow$ 1.* De manière générale l'égalité $X \odot GZ = XG \odot Z$ est assurée pour toute matrice G à coefficients dans $\mathbf{A}$ parce que $x \otimes \alpha z = \alpha x \otimes z$ lorsque $x \in M$, $z \in N$ et $\alpha \in \mathbf{A}$.
1 $\Rightarrow$ 2.
L'égalité $t =_{M\otimes N} 0$ provient d'un nombre fini de syzygies à l'intérieur des modules M et N. Il existe donc un sous-module N' tel que

$$\mathbf{A}y_1 + \cdots + \mathbf{A}y_n \subseteq N' = \mathbf{A}z_1 + \cdots + \mathbf{A}z_m \subseteq N,$$

et $X \odot Y =_{M\otimes N'} 0$. On note $Z = {}^{\mathrm{t}}[\,z_1 \cdots z_m\,]$. On a alors une suite exacte

$$K \xrightarrow{a} L \xrightarrow{\pi} N' \to 0$$

où L est libre de base $(\ell_1, \ldots, \ell_m)$ et $\pi(\ell_j) = z_j$, qui donne une suite exacte

$$M \otimes K \xrightarrow{\mathrm{I}\otimes a} M \otimes L \xrightarrow{\mathrm{I}\otimes\pi} M \otimes N' \to 0$$

Si $U \in M^{1\times m}$ vérifie $U \odot Z =_{M\otimes N'} 0$, cela signifie que U vu comme élément de $M \otimes L \simeq M^n$, c'est-à-dire vu comme $\sum_j u_j \otimes_{M\otimes L} \ell_j$, est dans le sous-module $\mathrm{Ker}(\mathrm{I}\otimes\pi) = \mathrm{Im}(\mathrm{I}\otimes a)$, autrement dit

$$\textstyle\sum_j u_j \otimes_{M\otimes L} \ell_j = \sum_i x_i \otimes \sum_{ij} a_{ij}\ell_j = \sum_j \big(\sum_i a_{ij}x_i\big) \otimes \ell_j$$

pour des $a_{ij} \in \mathbf{A}$ qui vérifient $\sum_j a_{ij}z_j = 0$. Autrement dit $U = XA$ pour une matrice A vérifiant $AZ = 0$.
Si l'on écrit $Y = HZ$ avec $H \in \mathbf{A}^{n\times m}$, on a $XH \odot Z = 0$, ce qui donne une égalité $XH = XA$ avec une matrice A vérifiant $AZ = 0$.
On pose alors $G = H - A$ et l'on a $XG = 0$ et $GZ = HZ = Y$. □

5. Problèmes de classification des modules de présentation finie

Le premier théorème de classification concerne les $\mathbf{A}$-modules libres de rangs finis : deux $\mathbf{A}$-modules $M \simeq \mathbf{A}^m$ et $P \simeq \mathbf{A}^p$ avec $m \neq p$ ne peuvent être isomorphes que si $1 =_{\mathbf{A}} 0$ (proposition II-5.2).

Remarque. Notez que nous utilisons l'expression « M est un module libre de rang k » pour signifier que M est isomorphe à $\mathbf{A}^k$, même dans le cas où nous ignorons si l'anneau $\mathbf{A}$ est trivial ou non. Cela n'implique donc pas toujours a priori que l'entier k est bien déterminé. ∎

Rares sont les anneaux pour lesquels on dispose d'une classification complète « satisfaisante » des modules de présentation finie. Le cas des corps discrets est bien connu : tout module de présentation finie est libre (cela résulte du pivot chinois ou du lemme de la liberté). Dans cet ouvrage nous traiterons quelques généralisations de ce cas élémentaire : les anneaux de valuation, les anneaux principaux et les anneaux zéro-dimensionnels réduits (sections 7 et 8), et certains anneaux de Prüfer (proposition XII-6.5 et théorème XII-6.7).

Concernant la classification des modules de type fini, nous signalons les deux résultats d'unicité importants suivants.

Deux résultats concernant les modules de type fini

5.1. Théorème. *Soient* $\mathfrak{a}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n$ *et* $\mathfrak{b}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{b}_m$ *des idéaux de* $\mathbf{A}$ *avec* $n \leqslant m$. *Si un* $\mathbf{A}$*-module* M *est isomorphe à* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}_n$ *et à* $\mathbf{A}/\mathfrak{b}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{b}_m$, *alors :*

1. *on a* $\mathfrak{b}_k = \mathbf{A}$ *pour* $n < k \leqslant m$,
2. *et* $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{a}_k$ *pour* $1 \leqslant k \leqslant n$.

On dit que $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ *est la liste des* facteurs invariants[3] *du module* M.

▷ *1.* Il suffit de montrer que si $n < m$, alors $\mathfrak{b}_m = \mathbf{A}$, autrement dit que l'anneau $\mathbf{B} := \mathbf{A}/\mathfrak{b}_m$ est nul. En notant $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}_n$, on a

$$\mathbf{B}^m = \bigoplus_{j=1}^{m} \mathbf{A}/(\mathfrak{b}_j + \mathfrak{b}_m) \simeq M/\mathfrak{b}_m M \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{A}/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_m).$$

Or chaque $\mathbf{A}/(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_m)$ est un quotient de $\mathbf{B}$, donc il existe une application linéaire surjective de $\mathbf{B}^n$ sur $\mathbf{B}^m$ et par suite $\mathbf{B}$ est nul (proposition II-5.2). On suppose désormais sans perte de généralité que $m = n$.

2. Il suffit de montrer que $\mathfrak{b}_k \subseteq \mathfrak{a}_k$ pour $k \in [\![1..n]\!]$. Remarquons que pour un idéal $\mathfrak{a}$ et un élément x de $\mathbf{A}$, le noyau de l'application linéaire $y \mapsto yx \bmod \mathfrak{a}$, de $\mathbf{A}$ vers $x(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ est l'idéal $(\mathfrak{a} : x)$, et donc que

3. On notera que la liste donnée ici peut être raccourcie ou rallongée sur la fin par de termes $\mathfrak{a}_j = \langle 1 \rangle$ lorsque l'on n'a pas de test pour l'égalité en question. Un peu comme la liste des coefficients d'un polynôme qui peut être raccourcie ou rallongée par des 0 lorsque l'anneau n'est pas discret.

$$x(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \simeq \mathbf{A}/(\mathfrak{a} : x).$$

Soit maintenant $x \in \mathfrak{b}_k$. Pour $j \in [\![k..n]\!]$, on a $(\mathfrak{b}_j : x) = \mathbf{A}$, et donc :

$$xM \simeq \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbf{A}/(\mathfrak{b}_j : x) = \bigoplus_{j=1}^{k-1} \mathbf{A}/(\mathfrak{b}_j : x), \quad \text{et} \quad xM \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbf{A}/(\mathfrak{a}_i : x).$$

En appliquant le point *1* au module xM avec les entiers $k-1$ et n, nous obtenons $(\mathfrak{a}_k : x) = \mathbf{A}$, i.e. $x \in \mathfrak{a}_k$. □

Notez que dans le théorème précédent, on n'a fait aucune hypothèse concernant les idéaux (il n'est pas nécessaire qu'ils soient de type fini ou détachables pour que le résultat soit valide constructivement).

5.2. Théorème. *Soit M un $\mathbf{A}$-module de type fini et $\varphi : M \to M$ une application linéaire surjective. Alors, φ est un isomorphisme et son inverse est un polynôme en φ. Si un quotient M/N de M est isomorphe à M, alors $N = 0$.*

5.3. Corollaire. *Si M est un module de type fini, tout élément φ inversible à droite dans $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$ est inversible, et son inverse est un polynôme en φ.*

Démonstration du théorème 5.2.
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système générateur de M, $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\varphi] \subseteq \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$, et $\mathfrak{a} = \langle\varphi\rangle$ l'idéal de $\mathbf{B}$ engendré par φ. L'anneau $\mathbf{B}$ est commutatif et l'on regarde M comme un $\mathbf{B}$-module. Puisque l'application linéaire φ est surjective, il existe $P \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{a})$ avec $P\ {}^t[\,x_1\ \cdots\ x_n\,] = {}^t[\,x_1\ \cdots\ x_n\,]$, c.-à-d.

$$(\mathrm{I}_n - P)\ {}^t[\,x_1\ \cdots\ x_n\,] = {}^t[\,0\ \cdots\ 0\,].$$

(où $\mathrm{I}_n = (\mathrm{I}_n)_{\mathbf{B}}$ est la matrice identité de $\mathbb{M}_n(\mathbf{B})$), et donc

$$\det(\mathrm{I}_n - P)\ {}^t[\,x_1\ \cdots\ x_n\,] = \widetilde{(\mathrm{I}_n - P)}\,(\mathrm{I}_n - P)\ {}^t[\,x_1\ \cdots\ x_n\,] = {}^t[\,0\ \cdots\ 0\,].$$

Donc $\det(\mathrm{I}_n - P) = 0_{\mathbf{B}}$, or $\det(\mathrm{I}_n - P) = 1_{\mathbf{B}} - \varphi\,\psi$ avec $\psi \in \mathbf{B}$ (puisque P est à coefficients dans $\mathfrak{a} = \varphi\,\mathbf{B}$). Ainsi, $\varphi\,\psi = \psi\,\varphi = 1_{\mathbf{B}} = \mathrm{Id}_M : \varphi$ est inversible dans $\mathbf{B}$. □

6. Anneaux quasi intègres

Dans la définition suivante, nous modifions de manière infinitésimale la notion d'anneau intègre usuellement donnée en mathématiques constructives, non par plaisir, mais parce que notre définition correspond mieux aux algorithmes mettant en œuvre les anneaux intègres.

6.1. Définition. Un anneau est dit *intègre* si tout élément est nul ou régulier [4]. Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *quasi intègre* lorsque tout élément admet pour annulateur un (idéal engendré par un) idempotent.

4. Un anneau intègre est aussi appelé un *domaine d'intégrité* dans la littérature classique. Nous préférons garder « anneau intègre » et n'utiliser le mot « domaine » que dans des expressions composées comme « domaine de Bézout ». Notons aussi qu'en mathématiques constructives on établit une claire distinction entre les anneaux intègres et les anneaux sans diviseur de zéro. Voir la définition page 464.

Comme d'habitude, le «ou» dans la définition précédente doit être lu comme un ou explicite. En conséquence, un anneau intègre est un ensemble discret si, et seulement si, en outre il est trivial ou non trivial. Nos anneaux intègres non triviaux sont donc exactement les «discrete domains» de [MRR].
Dans cet ouvrage, il arrive que l'on parle d'un «élément non nul» dans un anneau intègre, mais on devrait en fait dire «élément régulier» pour ne pas exclure le cas de l'anneau trivial.

6.2. Fait. *Un anneau quasi intègre est réduit.*
▷ Si e est l'idempotent annulateur de x et si $x^2 = 0$, alors $x \in \langle e\rangle$, donc $x = ex = 0$. □

Un corps discret est un anneau intègre. Un anneau $\mathbf{A}$ est intègre si, et seulement si, son anneau total de fractions $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est un corps discret. Un produit fini d'anneaux quasi intègres est quasi intègre.
Un anneau est intègre si, et seulement si, il est quasi intègre et connexe.
Dans la littérature, un anneau quasi intègre est parfois appelé un *anneau de Baer* ou encore, en anglais, un *pp-ring* (principal ideals are projective, cf. section V-7).

Définition équationnelle des anneaux quasi intègres

Dans un anneau quasi intègre, pour $a \in \mathbf{A}$, notons e_a l'unique idempotent tel que $\mathrm{Ann}(a) = \langle 1 - e_a\rangle$. On a $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}[1/e_a] \times \mathbf{A}/\langle e_a\rangle$.
Dans l'anneau $\mathbf{A}[1/e_a]$, l'élément a est régulier, et dans $\mathbf{A}/\langle e_a\rangle$, a est nul. On a alors $e_{ab} = e_a e_b$, $e_a a = a$ et $e_0 = 0$.
Inversement, supposons qu'un anneau commutatif soit muni d'une loi unaire $a \mapsto a^\circ$ qui vérifie les trois axiomes suivants :

$$a^\circ\, a = a, \quad (ab)^\circ = a^\circ\, b^\circ, \quad 0^\circ = 0 \tag{2}$$

Alors, pour tout $a \in \mathbf{A}$, on a $\mathrm{Ann}(a) = \langle 1 - a^\circ\rangle$, et a° est idempotent, de sorte que l'anneau est quasi intègre. En effet, tout d'abord $(1 - a^\circ)a = 0$, et si $ax = 0$, alors

$$a^\circ\, x = a^\circ\, x^\circ\, x = (ax)^\circ\, x = 0^\circ\, x = 0,$$

donc $x = (1 - a^\circ)x$: ainsi $\mathrm{Ann}(a) = \langle 1 - a^\circ\rangle$. Voyons ensuite que a° est idempotent. Appliquons le résultat précédent à $x = 1 - a^\circ$ qui vérifie $ax = 0$ (d'après le premier axiome) : l'égalité $x = (1 - a^\circ)x$ donne $x = x^2$, i.e. l'élément $1 - a^\circ$ est idempotent.
Le lemme de scindage suivant est à peu près immédiat.

6.3. Lemme de scindage quasi intègre. *Soit n éléments $x_1, \ldots, x_n$ dans un anneau quasi intègre $\mathbf{A}$. Il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux (e_j) de cardinal 2^n tel que dans chacune des composantes $\mathbf{A}[1/e_j]$, chaque x_i est nul ou régulier.*

D Soit r_i l'idempotent tel que $\langle r_i\rangle = \mathrm{Ann}(x_i)$, et $s_i = 1-r_i$. En développant le produit $1 = \prod_{i=1}^{n}(r_i+s_i)$ on obtient le système fondamental d'idempotents orthogonaux indexé par $\mathcal{P}_n$: $e_J = \prod_{j\in J} r_j \prod_{k\notin J} s_k$. On peut supprimer certains éléments de ce système quand on sait qu'ils sont nuls. □

Des anneaux intègres aux anneaux quasi intègres

Le fait de pouvoir scinder systématiquement en deux composantes un anneau quasi intègre conduit à la méthode générale suivante. La différence essentielle avec le lemme de scindage précédent est que l'on ne connaît pas a priori la famille finie d'éléments qui va provoquer le scindage.

Machinerie locale-globale élémentaire n°1. *La plupart des algorithmes qui fonctionnent avec les anneaux intègres non triviaux peuvent être modifiés de manière à fonctionner avec les anneaux quasi intègres, en scindant l'anneau en deux composantes chaque fois que l'algorithme écrit pour les anneaux intègres utilise le test « cet élément est-il nul ou régulier ? ». Dans la première composante l'élément en question est nul, dans la seconde il est régulier.*

Un premier exemple d'application de cette machinerie locale-globale sera donné page 220. Mais déjà le corollaire 6.5 ci-dessous pourrait être obtenu à partir du cas intègre, où il est évident, en appliquant cette machinerie locale-globale.
Expliquons pourquoi nous parlons ici de machinerie locale-globale élémentaire. De manière générale un principe local-global dit qu'une propriété P est vraie si, et seulement si, elle est vraie « après localisation en des monoïdes comaximaux ». Dans le cas présent, les monoïdes comaximaux sont engendrés par des éléments $1-r_i$ où les r_i forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux. En conséquence l'anneau est simplement isomorphe au produit des localisés, et la situation est donc tout à fait simple, élémentaire.
Remarque. La lectrice aura remarqué la formulation très informelle que nous avons donnée pour cette machinerie locale-globale : « La plupart des algorithmes ... ». C'est qu'il nous a paru bien difficile de donner par avance des conditions très précises requises pour que la méthode indiquée fonctionne. On pourrait imaginer un algorithme qui fonctionne pour tout anneau intègre, mais de façon pas du tout uniforme, ce qui ferait que l'arbre correspondant que l'on construit dans le cas quasi intègre ne serait pas fini. Par exemple, dans le cas intègre, une situation de départ donnée exigerait trois tests (pour terminer le calcul) si les réponses sont $0,0,0$, mais quatre tests si les réponses sont $0,0,1,0$, puis cinq tests si ce sont les réponses $0,0,1,1,0$, puis six tests si ce sont les réponses $0,0,1,1,1,1$, puis sept tests si ce sont les réponses $0,0,1,1,1,0,1$, etc. Naturellement, on peut mettre en doute qu'un tel algorithme puisse exister sans qu'existe en même temps un anneau

intègre qui le mette en défaut. Autrement dit, un algorithme qui n'est pas suffisamment uniforme n'est sans doute pas un algorithme. Mais nous ne préjugeons de rien.
Même si nous n'avons pour le moment rencontré aucun exemple du type ci-dessus où la machinerie locale-globale élémentaire ne s'appliquerait pas, nous ne pouvons exclure a priori une telle possibilité. ∎

Annulateurs des idéaux de type fini dans les anneaux quasi intègres

Le lemme suivant peut être considéré comme une variante économique du lemme de scindage 6.3.

6.4. Lemme. *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des éléments d'un* **A***-module.*
Si l'on a $\mathrm{Ann}(x_i) = \langle r_i \rangle$ *où r_i est un idempotent ($i \in [\![1..n]\!]$), posons*
$s_i = 1 - r_i$, $t_1 = s_1$, $t_2 = r_1 s_2$, $t_3 = r_1 r_2 s_3$, …, $t_{n+1} = r_1 r_2 \cdots r_n$.
Alors, $(t_1, \ldots, t_{n+1})$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux et l'élément $x = x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n$ vérifie

$$\mathrm{Ann}(x_1, \ldots, x_n) = \mathrm{Ann}(x) = \langle t_{n+1} \rangle .$$

NB : dans la composante $t_k = 1$ ($k \in [\![1..n]\!]$), on a x_k régulier et $x_j = 0$ pour $j < k$, et dans la composante $t_{n+1} = 1$, on a $x_1 = \cdots = x_n = 0$.

6.5. Corollaire. *Sur un anneau quasi intègre* **A** *tout sous-module de type fini M d'un module libre a pour annulateur un idéal $\langle r \rangle$ avec r idempotent, et M contient un élément x ayant le même annulateur. Ceci s'applique en particulier à un idéal de type fini de* **A**.

Démonstration du lemme 6.4. On a $t_1 x_1 = x_1$ et

$$\begin{aligned} 1 &= s_1 + r_1 = s_1 + r_1(s_2 + r_2) = s_1 + r_1 s_2 + r_1 r_2 (s_3 + r_3) = \cdots \\ &= s_1 + r_1 s_2 + r_1 r_2 s_3 + \cdots + r_1 r_2 \cdots r_{n-1} s_n + r_1 r_2 \cdots r_n \end{aligned}$$

donc $t_1, \ldots, t_{n+1}$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux et $x = t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_n x_n$. Il est clair que

$$\langle t_{n+1} \rangle \subseteq \mathrm{Ann}(x_1, \ldots, x_n) \subseteq \mathrm{Ann}(x).$$

Inversement, soit $z \in \mathrm{Ann}(x)$. Alors $zx = 0$, donc $z t_i x_i = z t_i x = 0$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. Ainsi, $z t_i \in \mathrm{Ann}(x_i) = \langle r_i \rangle$ et $z t_i = z t_i r_i = 0$. Enfin, puisque $z = \sum_{i=1}^{n+1} z t_i$, on a $z = z t_{n+1} \in \langle t_{n+1} \rangle$. □

Principe local-global concret pour les anneaux quasi intègres

La propriété pour un anneau d'être quasi intègre est locale au sens suivant.

6.6. Principe local-global concret. (Anneaux quasi intègres)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de **A**. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est quasi intègre.*
2. *Pour* $i = 1, \ldots, n$, *chaque anneau* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est quasi intègre.*

▷ Soit $a \in \mathbf{A}$. Pour tout monoïde S de $\mathbf{A}$ on a $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}_S}(a) = \big(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a)\big)_S$. Donc l'annulateur $\mathfrak{a}$ de a est de type fini si, et seulement si, il l'est après localisation en les S_i (principe local-global II-3.6). Ensuite l'inclusion $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}^2$ relève du principe local-global concret de base (II-2.3 page 19). □

7. Anneaux de Bézout

Un anneau $\mathbf{A}$ est appelé un *anneau de Bézout* lorsque tout idéal de type fini est principal. Il revient au même de dire que tout idéal avec deux générateurs est principal :

$$\forall a, b \ \exists u, v, g, a_1, b_1 \quad (au + bv = g,\ a = ga_1,\ b = gb_1)\,. \tag{3}$$

Un anneau de Bézout est fortement discret si, et seulement si, la relation de divisibilité y est explicite.
Un *anneau local* est un anneau $\mathbf{A}$ où est vérifié l'axiome suivant :

$$\forall x, y \in \mathbf{A} \qquad x + y \in \mathbf{A}^\times \implies (x \in \mathbf{A}^\times \text{ ou } y \in \mathbf{A}^\times)\,. \tag{4}$$

Il revient au même de demander :

$$\forall x \in \mathbf{A} \qquad x \in \mathbf{A}^\times \text{ ou } 1 - x \in \mathbf{A}^\times\,.$$

Notez que selon cette définition l'anneau trivial est local. Par ailleurs, les «ou» doivent être compris dans leur sens constructif : l'alternative doit être explicite. La plupart des anneaux locaux avec lesquels on travaille usuellement en mathématiques classiques vérifient en fait la définition précédente si on les regarde d'un point de vue constructif.
Tout quotient d'un anneau local est local. Un corps discret est un anneau local.

7.1. Lemme. (Bézout toujours trivial pour un anneau local)
Un anneau est un anneau de Bézout local si, et seulement si, il vérifie la propriété suivante : $\forall a, b \in \mathbf{A}$, *a divise b ou b divise a.*

▷ La condition est évidemment suffisante. Supposons $\mathbf{A}$ de Bézout et local. On a $g(1 - ua_1 - vb_1) = 0$. Puisque $1 = ua_1 + vb_1 + (1 - ua_1 - vb_1)$, l'un des trois termes dans la somme est inversible. Si $1 - ua_1 - vb_1$ est inversible, alors $g = a = b = 0$. Si ua_1 est inversible, alors a_1 également, et a divise g qui divise b. Si vb_1 est inversible, alors b_1 également, et b divise g qui divise a. □

Les anneaux de Bézout locaux sont donc les «anneaux de valuation» au sens de Kaplansky. Nous préférerons la définition aujourd'hui usuelle : un *anneau de valuation* est un anneau de Bézout local réduit.

Modules de présentation finie sur les anneaux de valuation

Une matrice $B = (b_{i,j}) \in \mathbf{A}^{m\times n}$ est dite *en forme de Smith* si tout coefficient hors de la diagonale principale est nul, et si pour $1 \leqslant i < \inf(m,n)$, le coefficient diagonal $b_{i,i}$ divise le suivant $b_{i+1,i+1}$.

7.2. Proposition. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau de Bézout local.*

1. *Toute matrice de* $\mathbf{A}^{m\times n}$ *est élémentairement équivalente à une matrice en forme de Smith.*
2. *Tout* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie* M *est isomorphe à une somme directe de modules* $\mathbf{A}/\langle a_i\rangle$ *:* $M \simeq \bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{A}/\langle a_i\rangle$*, avec de plus, pour chaque* $i < p$*,* a_{i+1} *divise* a_i*.*

▷ *1.* On utilise la méthode du pivot de Gauss en choisissant comme premier pivot un coefficient de la matrice qui divise tous les autres. On termine par récurrence.
2. Conséquence directe du point *1.* □

Remarque. Ce résultat se complète par le théorème d'unicité (théorème 5.1) comme suit.

1. Dans la réduite en forme de Smith les idéaux $\langle b_{i,i}\rangle$ sont déterminés de manière unique.
2. Dans la décomposition $\bigoplus_{i=1}^{p} \mathbf{A}/\langle a_i\rangle$, les idéaux $\langle a_i\rangle$ sont déterminés de manière unique, à ceci près que des idéaux en surnombre peuvent être égaux à $\langle 1\rangle$: on peut supprimer les termes correspondants, mais ceci ne se fait à coup sûr que lorsque l'on a un test d'inversibilité dans l'anneau. ■

Un anneau $\mathbf{A}$ est appelé un *anneau de Bézout strict* lorsque tout vecteur $[\,u\ v\,] \in \mathbf{A}^2$ peut être transformé en un vecteur $[\,h\ 0\,]$ par multiplication par une matrice 2×2 inversible.
Voici maintenant un exemple d'utilisation de la machinerie locale-globale élémentaire n°1 (décrite page 217).

Exemple. On va montrer que *tout anneau de Bézout quasi intègre est un anneau de Bézout strict.*
Commençons par le cas intègre. Soient $u, v \in \mathbf{A}$:

$$\exists\, h, a, b, u_1, v_1 \quad (h = au + bv,\ u = hu_1,\ v = hv_1).$$

Si $\mathrm{Ann}(v) = 1$, alors $v = 0$ et $[\,u\ 0\,] = [\,u\ v\,]\,\mathrm{I}_2$.
Si $\mathrm{Ann}(v) = 0$, alors $\mathrm{Ann}(h) = 0$, $h(au_1 + bv_1) = h$, puis $au_1 + bv_1 = 1$.
Enfin, $[\,h\ 0\,] = [\,u\ v\,]\begin{bmatrix} a & -v_1 \\ b & u_1 \end{bmatrix}$ et la matrice est de déterminant 1.
Appliquons maintenant la machinerie locale-globale élémentaire n°1 expliquée page 217. On considère l'idempotent e tel que

$$\mathrm{Ann}(v) = \langle e\rangle \text{ et } f = 1 - e.$$

Dans $\mathbf{A}[1/e]$, on a $[\,u\;0\,] = [\,u\;v\,]\,\mathrm{I}_2$.
Dans $\mathbf{A}[1/f]$, on a $[\,h\;0\,] = [\,u\;v\,]\begin{bmatrix} a & -v_1 \\ b & u_1 \end{bmatrix}$.
Donc dans $\mathbf{A}$, on a $[\,ue+hf\;0\,] = [\,u\;v\,]\begin{bmatrix} fa+e & -fv_1 \\ fb & fu_1+e \end{bmatrix}$, et la matrice est de déterminant 1. ∎

Modules de présentation finie sur les anneaux principaux

Supposons que $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout strict. Si a et b sont deux éléments sur une même ligne (resp. colonne) dans une matrice M à coefficients dans $\mathbf{A}$, on peut postmultiplier (resp. prémultiplier) M par une matrice inversible, ce qui modifiera les colonnes (resp. les lignes) où se trouvent les coefficients a et b, lesquels seront remplacés par c et 0. Pour parler de cette transformation de matrices, nous parlerons de *manipulations de Bézout*. Les manipulations élémentaires peuvent être vues comme des cas particuliers de manipulations de Bézout.
Un anneau intègre est dit *principal* lorsqu'il est de Bézout et lorsque toute suite croissante d'idéaux principaux admet deux termes consécutifs égaux (cf. [MRR]). Autrement dit un anneau principal est un domaine de Bézout noethérien (cf. définition II-3.2) C'est par exemple le cas de $\mathbb{Z}$ ou de l'anneau de polynômes $\mathbf{K}[X]$ lorsque $\mathbf{K}$ est un corps discret.

7.3. Proposition. (Théorème de la base adaptée) *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau principal.*

1. *Toute matrice* $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$ *est équivalente à une matrice en forme de Smith. En notant* b_i *les coefficients diagonaux de la réduite, les idéaux principaux* $\langle b_1\rangle \supseteq \cdots \supseteq \langle b_q\rangle$ *(*$q = \inf(m,n)$*) sont des invariants de la matrice* A *à équivalence près. Une base* $(e_1,\dots,e_m)$ *de* $\mathbf{A}^m$ *telle que* $\mathrm{Im}(A) = \sum_{i=1}^m \langle b_i\rangle\ e_i$ *est appelée une* base adaptée au sous-module $\mathrm{Im}(A)$.
2. *Pour tout* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie* M*, il existe* r*,* $p \in \mathbb{N}$ *et des éléments réguliers* $a_1, \dots, a_p$*, avec* a_i *divise* a_{i+1} *pour* $i < p$*, tels que* M *est isomorphe à la somme directe* $\left(\bigoplus_{i=1}^p \mathbf{A}/\langle a_i\rangle\right) \oplus \mathbf{A}^r$.

Si en outre $\mathbf{A}$ *est fortement discret non trivial, on peut demander dans le point 2. qu'aucun* $\langle a_i\rangle$ *ne soit égal à* $\langle 1\rangle$*. Dans ce cas, on appelle* facteurs invariants du module M *les éléments de la liste* $\left(a_1,\dots,a_p,\underbrace{0,\dots,0}_{r\ fois}\right)$*. Et la liste des facteurs invariants de* M *est bien définie*[5] *« à association près».*

5. On retrouve la définition donnée dans le théorème 5.1. On notera cependant que l'ordre est renversé et que l'on a remplacé ici les idéaux principaux par leurs générateurs, tout ceci pour se conformer à la terminologie la plus fréquente.

Idée de la démonstration. Par des manipulations de Bézout sur les colonnes, on remplace la première ligne par un vecteur $(g_1, 0, \dots, 0)$. Par des manipulations de Bézout sur les lignes, on remplace la première colonne par un vecteur $(g_2, 0, \dots, 0)$. On continue le processus jusqu'à ce que pour un indice k, on ait $g_k\mathbf{A} = g_{k+1}\mathbf{A}$. Par exemple, avec k impair cela signifie que les dernières opérations de lignes au moyen de manipulations de Bézout ont été faites à tort, puisque g_k divisait la première colonne. On revient une étape en arrière, et l'on utilise g_k comme pivot de Gauss. On obtient ainsi une matrice de la forme

g	0	$\cdots$	0
0			
$\vdots$		B	
0			

Par récurrence on obtient une réduite «diagonale». On vérifie enfin que l'on peut passer, par manipulations de Bézout et manipulations élémentaires, d'une matrice $\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ à une matrice $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$ avec c divise d.
Le point *2.* est une conséquence directe du point *1.* □

Remarques.
1) Un algorithme plus simple peut être écrit si $\mathbf{A}$ est fortement discret.
2) On ne sait toujours pas (en 2011) si la conclusion de la proposition précédente est vraie sous la seule hypothèse que $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout intègre. On ne dispose ni de démonstration, ni de contre exemple.
On sait par contre le résultat vrai pour les anneaux de Bézout intègres de dimension $\leqslant 1$: voir la remarque qui suit le théorème XII-6.7. ∎

8. Anneaux zéro-dimensionnels

On dira qu'un anneau est *zéro-dimensionnel* lorsqu'il vérifie l'axiome suivant :

$$\forall x \in \mathbf{A}\ \exists a \in \mathbf{A}\ \exists k \in \mathbb{N} \qquad x^k = ax^{k+1} \tag{5}$$

Un anneau est dit *artinien* s'il est zéro-dimensionnel, cohérent et noethérien.

Propriétés de base

8.1. Fait.

- *Tout anneau fini, tout corps discret est zéro-dimensionnel.*
- *Tout quotient et tout localisé d'un anneau zéro-dimensionnel est zéro-dimensionnel.*

- *Tout produit fini d'anneaux zéro-dimensionnels est un anneau zéro-dimensionnel.*
- *Une algèbre de Boole (cf. section VII-3) est un anneau zéro-dimensionnel.*

8.2. Lemme. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel.*
2. $\forall x \in \mathbf{A}\ \exists s \in \mathbf{A}\ \exists d \in \mathbb{N}^*$ *tels que* $\langle x^d \rangle = \langle s \rangle$ *et* s *idempotent.*
3. *Pour tout idéal de type fini* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathbf{A}$*, il existe* $d \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\mathfrak{a}^d = \langle s \rangle$ *où* s *est un idempotent, et en particulier,* $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}^d) = \langle 1 - s \rangle$ *et* $\mathfrak{a}^e = \mathfrak{a}^d$ *pour* $e \geqslant d$*.*

▷ *1* $\Rightarrow$ *2.* Pour tout $x \in \mathbf{A}$, il existe $a \in \mathbf{A}$ et $k \in \mathbb{N}$ tels que $x^k = ax^{k+1}$.
Si $k = 0$ on a $\langle x \rangle = \langle 1 \rangle$, on prend $s = 1$ et $d = 1$.
Si $k \geqslant 1$, on prend $d = k$: en multipliant k fois par ax, on obtient les égalités $x^k = ax^{k+1} = a^2x^{k+2} = \cdots = a^kx^{2k}$. Donc l'élément $s = a^kx^k$ est un idempotent, $x^k = sx^k$, et $\langle x^k \rangle = \langle s \rangle$.
2 $\Rightarrow$ *1.* On a $s = bx^d$ et $x^ds = x^d$. Donc, en posant $a = bx^{d-1}$, on obtient les égalités $x^d = bx^{2d} = ax^{d+1}$.
2 $\Rightarrow$ *3.* Si $\mathfrak{a} = x_1\mathbf{A} + \cdots + x_n\mathbf{A}$, il existe des idempotents $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{A}$ et des entiers $d_1, \ldots, d_n \geqslant 1$ tels que $x_i^{d_i}\mathbf{A} = s_i\mathbf{A}$. Soit

$$s = 1 - (1 - s_1) \cdots (1 - s_n),$$

de sorte que $s\mathbf{A} = s_1\mathbf{A} + \cdots + s_n\mathbf{A}$. Il est clair que l'idempotent s appartient à $\mathfrak{a}$, donc à toutes les puissances de $\mathfrak{a}$. D'autre part, si $d \geqslant d_1 + \cdots + d_n - (n-1)$ on a

$$\mathfrak{a}^d \subseteq x_1^{d_1}\mathbf{A} + \cdots + x_n^{d_n}\mathbf{A} = s_1\mathbf{A} + \cdots + s_n\mathbf{A} = s\mathbf{A}.$$

En conclusion $\mathfrak{a}^d = s\mathbf{A}$.
Enfin, *3* implique clairement *2*. □

8.3. Corollaire. *Si* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini fidèle d'un anneau zéro-dimensionnel, alors* $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$*. En particulier, dans un anneau zéro-dimensionnel, tout élément régulier est inversible.*

▷ Pour d assez grand l'idéal $\mathfrak{a}^d$ est engendré par un idempotent s. Cet idéal est régulier, donc l'idempotent s est égal à 1. □

8.4. Lemme. (Anneaux zéro-dimensionnels locaux)
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel local.*
2. *Tout élément de* $\mathbf{A}$ *est inversible ou nilpotent.*
3. $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel et connexe.*

En conséquence un corps discret peut aussi être défini comme un anneau local zéro-dimensionnel réduit.

Anneaux zéro-dimensionnels réduits

Propriétés caractéristiques

Les équivalences du lemme suivant sont faciles (voir la démonstration du lemme analogue 8.2).

8.5. Lemme. (Anneaux zéro-dimensionnels réduits)
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel réduit.*
2. *Tout idéal principal est idempotent (i.e.,* $\forall a \in \mathbf{A},\ a \in \langle a^2 \rangle$*).*
3. *Tout idéal principal est engendré par un idempotent.*
4. *Tout idéal de type fini est engendré par un idempotent.*
5. *Pour toute liste finie* $(a_1, \dots, a_k)$ *d'éléments de* $\mathbf{A}$*, il existe des idempotents orthogonaux* $(e_1, \dots, e_k)$ *tels que pour* $j \in [\![1..k]\!]$
$$\langle a_1, \dots, a_j \rangle = \langle a_1 e_1 + \cdots + a_j e_j \rangle = \langle e_1 + \cdots + e_j \rangle .$$
6. *Tout idéal est idempotent.*
7. *Le produit de deux idéaux est toujours égal à leur intersection.*
8. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est quasi intègre et tout élément régulier est inversible.*

8.6. Fait.

1. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau arbitraire. Si* $\mathrm{Ann}(a) = \langle \varepsilon \rangle$ *avec* ε *idempotent , alors l'élément* $b = a + \varepsilon$ *est régulier et* $ab = a^2$*.*
2. *Si* $\mathbf{A}$ *est quasi intègre,* $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel réduit et tout idempotent de* $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ *est dans* $\mathbf{A}$*.*

D *1.* Regarder modulo ε et modulo $1 - \varepsilon$.
2. Pour un $a \in \mathbf{A}$, on doit trouver $x \in \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ tel que $a^2 x = a$.
On pose $b = a + (1 - e_a) \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$ donc $ab = a^2$, et l'on prend $x = b^{-1}$.
Soit maintenant a/b un idempotent de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. On a $a^2 = ab$.
— Modulo $1 - e_a$, on a $b = a$ et $a/b = 1 = e_a$ (car a est régulier).
— Modulo e_a, on a $a/b = 0 = e_a$ (car $a = 0$). En résumé $a/b = e_a$. □

8.7. Fait. *Un anneau zéro-dimensionnel réduit est cohérent. Il est fortement discret si, et seulement si, il y a un test d'égalité à zéro pour les idempotents.*

Exemple. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers. L'anneau $\mathbf{A} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \mathbb{Z}/\langle p \rangle$ est zéro-dimensionnel réduit mais il *n'est pas* dicret. ∎

On obtient aussi facilement les équivalences suivantes.

8.8. Fait. *Pour un anneau zéro-dimensionnel* $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est connexe (resp.* $\mathbf{A}$ *est connexe et réduit).*
2. $\mathbf{A}$ *est local (resp.* $\mathbf{A}$ *est local et réduit).*
3. $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ *est intègre (resp.* $\mathbf{A}$ *est intègre).*
4. $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ *est un corps discret (resp.* $\mathbf{A}$ *est un corps discret).*

Définition équationnelle des anneaux zéro-dimensionnels réduits
Un anneau non nécessairement commutatif vérifiant

$$\forall x\, \exists a \quad xax = x$$

est souvent qualifié de *Von Neumann régulier*. Dans le cas commutatif ce sont les anneaux zéro-dimensionnels réduits. On les appelle encore *anneaux absolument plats*, parce qu'ils sont également caractérisés par la propriété suivante : tout $\mathbf{A}$-module est plat (voir la proposition VIII-2.3).
Dans un anneau commutatif, deux éléments a et b sont dits *quasi inverses* si l'on a :

$$a^2b = a, \qquad b^2a = b \tag{6}$$

On dit aussi que b est le *quasi inverse* de a. On vérifie en effet qu'il est unique : si $a^2b = a = a^2c$, $b^2a = b$ et $c^2a = c$, alors

$$c - b = a(c^2 - b^2) = a(c-b)(c+b) = a^2(c-b)(c^2+b^2) = 0,$$

puisque $ab = a^2b^2$, $ac = a^2c^2$ et $a^2(c-b) = a - a = 0$.
Par ailleurs, si $x^2y = x$, on vérifie que xy^2 est quasi inverse de x.
Ainsi : *un anneau est zéro-dimensionnel réduit si, et seulement si, tout élément admet un quasi inverse.*
Comme le quasi inverse est unique, un anneau zéro-dimensionnel réduit peut être vu comme un anneau muni d'une loi unaire supplémentaire, $a \mapsto a^\bullet$ soumise à l'axiome (6) avec $a^\bullet$ à la place de b.
Notons que $(a^\bullet)^\bullet = a$ et $(a_1a_2)^\bullet = a_1^\bullet a_2^\bullet$.

8.9. Fait. *Un anneau zéro-dimensionnel réduit* $\mathbf{A}$ *est quasi intègre, avec l'idempotent* $e_a = aa^\bullet$ *:* $\mathrm{Ann}(a) = \langle 1 - e_a\rangle$. *On a* $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}[1/e_a] \times \mathbf{A}/\langle e_a\rangle$. *Dans* $\mathbf{A}[1/e_a]$, *a est inversible, et dans* $\mathbf{A}/\langle e_a\rangle$, *a est nul.*

Lemme de scindage zéro-dimensionnel
Le lemme de scindage suivant est à peu près immédiat, il se démontre comme le lemme de scindage quasi intègre 6.3.

8.10. Lemme. *Soit* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'éléments dans un anneau zéro-dimensionnel* $\mathbf{A}$. *Il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux* $(e_1, \ldots, e_n)$ *tel que dans chaque composante* $\mathbf{A}[1/e_j]$, *chaque* x_i *est nilpotent ou inversible.*

Des corps discrets aux anneaux zéro-dimensionnels réduits

Les anneaux zéro-dimensionnels réduits ressemblent beaucoup à des produits finis de corps discrets, et cela se manifeste précisément comme suit.

Machinerie locale-globale élémentaire n°2. *La plupart des algorithmes qui fonctionnent avec les corps discrets non triviaux peuvent être modifiés de manière à fonctionner avec les anneaux zéro-dimensionnels réduits, en scindant l'anneau en deux composantes chaque fois que l'algorithme écrit pour les corps discrets utilise le test « cet élément est-il nul ou inversible ? ». Dans la première composante l'élément en question est nul, dans la seconde il est inversible.*

Remarques. 1) Nous avons mis « la plupart » plutôt que « tous » dans la mesure où l'énoncé du résultat de l'algorithme pour les corps discrets doit être écrit sous une forme où n'apparaît pas qu'un corps discret est connexe. 2) Par ailleurs, la même remarque que celle que nous avons faite page 217 concernant la machinerie locale-globale élémentaire n°1 s'applique encore. L'algorithme donné dans le cas des corps discrets doit être suffisamment uniforme pour ne pas conduire à un arbre infini lorsque l'on veut le transformer en un algorithme pour les anneaux zéro-dimensionnels réduits. ∎

Nous donnons tout de suite un exemple d'application de cette machinerie.

8.11. Proposition. *Pour un anneau* $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est un anneau zéro-dimensionnel réduit.*
2. $\mathbf{A}[X]$ *est un anneau de Bézout strict et quasi intègre.*
3. $\mathbf{A}[X]$ *est un anneau de Bézout.*

D *1* $\Rightarrow$ *2.* Le fait est classique pour un corps discret : on utilise l'algorithme d'Euclide étendu pour calculer sous la forme $g(X) = a(X)u(X) + b(X)v(X)$ un pgcd de $a(X)$ et $b(X)$. En outre, on obtient une matrice $\begin{bmatrix} u & -b_1 \\ v & a_1 \end{bmatrix}$ de déterminant 1 qui transforme $[\,a \;\; b\,]$ en $[\,g \;\; 0\,]$. Cette matrice est le produit de matrices $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -q_i \end{bmatrix}$ où les q_i sont les quotients successifs.

Passons maintenant au cas d'un anneau zéro-dimensionnel réduit, donc quasi intègre. Tout d'abord $\mathbf{A}[X]$ est quasi intègre car l'annulateur d'un polynôme est l'intersection des annulateurs de ses coefficients (voir le corollaire III-2.3 *2*), donc engendré par le produit des idempotents correspondants. Concernant le caractère « Bézout strict » l'algorithme qui vient d'être expliqué pour les corps discrets bute a priori sur l'obstacle de la non inversibilité des coefficients dominants dans les divisions successives. Mais cet obstacle est à chaque fois contourné par la considération d'un idempotent e_i convenable, l'annulateur du coefficient à inverser. Dans $\mathbf{A}_i[1/e_i]$,

(où $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/u_i]$ est l'anneau «en cours» avec un certain idempotent u_i) le polynôme diviseur a un degré plus petit que prévu et l'on recommence avec le coefficient suivant. Dans $\mathbf{A}_i[1/f_i]$, ($f_i = 1 - e_i$ dans $\mathbf{A}_i$), le coefficient dominant du diviseur est inversible et la division peut être exécutée. On obtient de cette façon un arbre de calcul aux feuilles duquel on a le résultat souhaité. À chaque feuille le résultat est obtenu dans un localisé $\mathbf{A}[1/h]$ pour un certain idempotent h. Et les h aux feuilles de l'arbre forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Ceci permet de recoller toutes les égalités en une seule [6].

3 ⇒ 1. Cela résulte du lemme suivant.

Lemme. *Pour un anneau arbitraire* $\mathbf{A}$*, si l'idéal* $\langle a, X\rangle$ *est un idéal principal de* $\mathbf{A}[X]$*, alors* $\langle a\rangle = \langle e\rangle$ *pour un certain idempotent* e*.*

On suppose que $\langle a, X\rangle = \langle p(X)\rangle$ avec $p(X)q(X) = X$. On a donc

$$\langle a\rangle = \langle p(0)\rangle,\ \ p(0)q(0) = 0 \ \text{ et } \ 1 = p(0)q'(0) + p'(0)q(0),$$

d'où $p(0) = p(0)^2q'(0)$. Ainsi, $e = p(0)q'(0)$ est idempotent et $\langle a\rangle = \langle e\rangle$. □

Remarque. La notion d'anneau zéro-dimensionnel réduit peut être vue comme l'analogue non-noethérien de la notion de corps discret, puisque si l'algèbre de Boole des idempotents est infinie, la noethérianité est perdue. Illustrons ceci sur l'exemple du Nullstellensatz, pour lequel ce n'est pas clair a priori si la noethérianité est un ingrédient essentiel ou un simple accident. Un énoncé constructif précis du Nullstellensatz de Hilbert (forme faible) se formule comme suit.

Soit $\mathbf{k}$ *un corps discret non trivial,* $(f_1, \dots, f_s)$ *une liste d'éléments de* $\mathbf{k}[\underline{X}]$*, et* $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f}\rangle$ *l'algèbre quotient. Alors, ou bien* $1 \in \langle f_1, \dots, f_s\rangle$*, ou bien il existe un quotient de* $\mathbf{A}$ *qui est un* $\mathbf{k}$*-espace vectoriel non nul de dimension finie.*

Comme la preuve est donnée par un algorithme uniforme (pour plus de précisions voir le théorème VII-1.5 et l'exercice VII-3) on obtient par application de la machinerie locale-globale élémentaire n°2 le résultat ci-après, sans disjonction, qui implique le Nullstellensatz précédent pour un corps discret non trivial (cet exemple illustre aussi la première remarque page 226). Un $\mathbf{A}$-module M est dit *quasi libre* s'il est isomorphe à une somme directe finie d'idéaux $\langle e_i\rangle$ avec les e_i idempotents. On peut alors en outre imposer que $e_ie_j = e_j$ si $j > i$, car pour deux idempotents e et f, on a

$$\langle e\rangle \oplus \langle f\rangle \simeq \langle e \vee f\rangle \oplus \langle e \wedge f\rangle, \text{ où } e \wedge f = ef \text{ et } e \vee f = e + f - ef.$$

Soit $\mathbf{k}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit,* $(f_1, \dots, f_s)$ *une liste d'éléments de* $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ *et* $\mathbf{A}$ *l'algèbre quotient. Alors, l'idéal* $\langle f_1, \dots, f_s\rangle \cap \mathbf{k}$ *est engendré par un idempotent* e*, et en posant* $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}/\langle e\rangle$*, il existe un quotient* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{A}$ *qui est un* $\mathbf{k}_1$*-module quasi libre avec l'homomorphisme naturel* $\mathbf{k}_1 \to \mathbf{B}$ *injectif.* ∎

6. Pour une preuve plus directe, voir l'exercice 12

Modules de présentation finie sur les anneaux zéro-dimensionnels réduits

8.12. Théorème. (Le paradis des anneaux zéro-dimensionnels réduits)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit.*

1. *Toute matrice est équivalente à une matrice en forme de Smith avec des idempotents sur la diagonale principale.*
2. *Tout module de présentation finie est quasi libre.*
3. *Tout sous-module de type fini d'un module de présentation finie est facteur direct.*

D Les résultats sont classiques pour le cas des corps discrets (une preuve constructive peut être basée sur la méthode du pivot). La machinerie locale-globale élémentaire n°2 fournit alors (pour chacun des trois points) le résultat séparément dans chacun des $\mathbf{A}[1/e_j]$, après avoir scindé l'anneau en un produit de localisés $\mathbf{A}[1/e_j]$ pour un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_1,\ldots,e_k)$. Mais le résultat est justement formulé de façon à être vrai globalement dès qu'il est vrai dans chacune des composantes. □

Systèmes polynomiaux zéro-dimensionnels

Nous étudions dans ce paragraphe un exemple particulièrement important d'anneau zéro-dimensionnel, fourni par les algèbres quotients associées aux systèmes polynomiaux zéro-dimensionnels sur les corps discrets.
Rappelons le contexte étudié dans la section III-9 consacrée au Nullstellensatz de Hilbert. Si $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ sont des corps discrets, et si $(f_1,\ldots,f_s)$ est un système polynomial dans $\mathbf{K}[X_1,\ldots,X_n] = \mathbf{K}[\underline{X}]$, on dit que $(\xi_1,\ldots,\xi_n) = (\underline{\xi})$ est un zéro de $\underline{f}$ dans $\mathbf{L}^n$ si les équations $f_i(\underline{\xi}) = 0$ sont satisfaites.
L'étude de la variété des zéros du système est étroitement reliée à celle de l'*algèbre quotient associée au système polynomial*, à savoir

$$\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle = \mathbf{K}[\underline{x}] \quad (x_i \text{ est la classe de } X_i \text{ dans } \mathbf{A}).$$

En effet, il revient au même de se donner un zéro $(\underline{\xi})$ du système polynomial dans $\mathbf{L}^n$ ou de se donner un homomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{L}$ (ψ est défini par $\psi(x_i) = \xi_i$ pour $i \in [\![1..n]\!]$). Pour $h \in \mathbf{A}$, on note $h(\underline{\xi}) = \psi(h)$ l'évaluation de h en $\underline{\xi}$.
Lorsque $\mathbf{K}$ est infini, le théorème III-9.5 nous donne une mise en position de Noether par un changement de variables linéaire, et un entier $r \in [\![-1..n]\!]$ satisfaisant les propriétés suivantes [7] (nous ne changeons pas le nom de variables, ce qui est un léger abus).

7. Dans l'hypothèse du théorème III-9.5, on a mis que $\mathbf{K}$ est contenu dans un corps algébriquement clos $\mathbf{L}$, mais la démonstration des propriétés que nous signalons ici, basée sur le lemme III-9.2 et sur le lemme de changement de variables III-9.4, n'utilise pas l'existence du corps $\mathbf{L}$.

1. Si $r = -1$, alors $\mathbf{A} = 0$, c'est-à-dire $1 \in \langle \underline{f} \rangle$.
2. Si $r = 0$, chaque x_i est entier sur $\mathbf{K}$, et $\mathbf{A} \neq 0$.
3. Si $0 < r < n$, alors $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_r] \cap \langle \underline{f} \rangle = 0$ et les x_i pour $i \in [\![r+1..n]\!]$ sont entiers sur $\mathbf{K}[x_1, \dots, x_r]$ (qui est isomorphe à $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_r]$).
4. Si $r = n$, $\langle \underline{f} \rangle = 0$ et $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]$

8.13. Lemme. (Précisions sur le théorème III-9.5)

1. *Dans le cas où $r = 0$, l'algèbre quotient $\mathbf{A}$ est finie sur $\mathbf{K}$.*
2. *Si l'algèbre quotient $\mathbf{A}$ est finie sur $\mathbf{K}$, elle est strictement finie sur $\mathbf{K}$, et c'est un anneau zéro-dimensionnel. On dit alors que* le système polynomial est zéro-dimensionnel.
3. *Si l'anneau $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, alors $r \leqslant 0$.*
4. *Toute algèbre strictement finie sur le corps discret $\mathbf{K}$ peut être regardée comme (est isomorphe à) l'algèbre quotient d'un système polynomial zéro-dimensionnel sur $\mathbf{K}$.*

▷ *1.* En effet, si x_i annule le polynôme unitaire $p_i \in \mathbf{K}[T]$, l'algèbre $\mathbf{A}$ est un quotient de $\mathbf{B} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\langle (p_i(X_i))_{i \in [\![1..n]\!]} \rangle$, qui est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
2. On commence comme au point *1* Pour obtenir l'algèbre $\mathbf{A}$, il nous suffit de prendre le quotient de $\mathbf{B}$ par l'idéal $\langle f_1(\underline{z}), \dots, f_s(\underline{z}) \rangle$ (où les z_i sont les classes des X_i dans $\mathbf{B}$). On voit facilement que cet idéal est un sous-espace vectoriel de type fini de $\mathbf{B}$, donc le quotient est de nouveau un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, $\mathbf{A}$ est strictement finie sur $\mathbf{K}$.
Montrons que $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel. Tout $x \in \mathbf{A}$ annule son polynôme minimal, disons $f(T)$, de sorte que l'on a une égalité $x^k\big(1 + xg(x)\big) = 0$ (multiplier f par l'inverse du coefficient de plus bas degré non nul).
4. L'algèbre $\mathbf{A}$ est engendrée par un nombre fini d'éléments x_i (par exemple une base comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel), qui annulent chacun leur polynôme minimal, disons $p_i(T)$. Ainsi $\mathbf{A}$ est un quotient d'une algèbre

$$\mathbf{B} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\langle (p_i(X_i))_{i \in [\![1..n]\!]} \rangle = \mathbf{A}[z_1, \dots, z_n].$$

Le morphisme surjectif correspondant, de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$, est une application linéaire dont on peut calculer le noyau (puisque $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont de dimension finie), par exemple en précisant un système générateur $\big(g_1(\underline{z}), \dots, g_\ell(\underline{z})\big)$.
En conclusion, l'algèbre $\mathbf{A}$ est isomorphe à l'algèbre quotient associée au système polynomial $\big(p_1(X_1), \dots, p_n(X_n), g_1(\underline{X}), \dots, g_\ell(\underline{X})\big)$.
3. Ce point résulte des deux lemmes qui suivent. □

Remarque. Traditionnellement, on réserve l'appellation de système polynomial zéro-dimensionnel au cas $r = 0$, mais l'algèbre quotient est zéro-dimensionnelle aussi lorsque $r = -1$. ■

8.14. Lemme. *Si l'anneau* $\mathbf{C}[X_1, \dots, X_r]$ *est zéro-dimensionnel avec* $r > 0$*, alors l'anneau* $\mathbf{C}$ *est trivial.*

▷ On écrit $X_1^m\big(1 - X_1 P(X_1, \dots, X_r)\big) = 0$. Le coefficient de X_1^m est à la fois égal à 0 et à 1. □

8.15. Lemme. *Soit* $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$*,* $\mathbf{A}$ *entière sur* $\mathbf{k}$*. Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau zéro-dimensionnel,* $\mathbf{k}$ *est un anneau zéro-dimensionnel.*

▷ Soit $x \in \mathbf{k}$, on a un $y \in \mathbf{A}$ tel que $x^k = yx^{k+1}$. Supposons par exemple que $y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0 = 0$ avec les $b_i \in \mathbf{k}$.
Alors, $x^k = yx^{k+1} = y^2x^{k+2} = y^3x^{k+3}$, et donc

$$\begin{aligned} 0 &= (y^3 + b_2y^2 + b_1y + b_0)x^{k+3} \\ &= x^k + b_2x^{k+1} + b_1x^{k+2} + b_0x^{k+3} = x^k\big(1 + x(b_2 + b_1x + b_0x^2)\big). \end{aligned}$$

□

8.16. Théorème. (Système zéro-dimensionnel sur un corps discret)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret et* $(f_1, \dots, f_s)$ *dans* $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n] = \mathbf{K}[\underline{X}]$.
Notons $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]\big/\langle \underline{f} \rangle$ *l'algèbre quotient associée à ce système polynomial. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est finie sur* $\mathbf{K}$*.*
2. $\mathbf{A}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{K}$*.*
3. $\mathbf{A}$ *est un anneau zéro-dimensionnel.*

Si $\mathbf{K}$ *est contenu dans un corps discret algébriquement clos* $\mathbf{L}$*, ces propriétés sont aussi équivalentes aux suivantes.*

4. *Le système polynomial a un nombre fini de zéros dans* $\mathbf{L}^n$*.*
5. *Le système polynomial a un nombre borné de zéros dans* $\mathbf{L}^n$*.*

▷ Lorsque $\mathbf{K}$ est infini, on obtient les équivalences en appliquant le lemme 8.13 et le théorème III-9.5.
Dans le cas général, on peut également obtenir une mise en position de Noether en utilisant un changement de variables général non nécessairement linéaire comme celui donné en VII-1.4 (voir le théorème VII-1.5). □

Une variation sur le théorème précédent est donnée au théorème VI-3.15

Remarque. Plutôt que d'utiliser un changement de variables non linéaire comme proposé dans la démonstration précédente, on peut recourir à la technique de « changement de corps de base ». Cela fonctionne comme suit. On considère un corps infini $\mathbf{K}_1 \supseteq \mathbf{K}$, par exemple $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}(t)$, ou $\mathbf{K}_1$ un corps algébriquement clos contenant $\mathbf{K}$ si l'on sait en construire un. Alors l'équivalence des points *1*, *2* et *3* est assurée pour l'algèbre $\mathbf{A}_1$ pour le même système polynomial vu sur $\mathbf{K}_1$. L'algèbre $\mathbf{A}_1$ est obtenue à partir de $\mathbf{A}$ par extension des scalaires de $\mathbf{K}$ à $\mathbf{K}_1$. Il reste à voir que chacun des

trois points est vérifié pour $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est vérifié pour $\mathbf{A}_1$. Ce que nous laisserons au lecteur [8]. ∎

8.17. Théorème. (Théorème de Stickelberger)
Même contexte que le théorème 8.16, avec maintenant $\mathbf{K}$ *corps algébriquement clos.*

1. *Le système polynomial admet un nombre fini de zéros sur* $\mathbf{K}$.
   On les note $\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_\ell$.
2. *Pour chaque* $\underline{\xi}_k$ *il existe un idempotent* $e_k \in \mathbf{A}$ *satisfaisant* $e_k(\underline{\xi}_j) = \delta_{j,k}$ *(symbole de Kronecker) pour tous* $j \in [\![1..\ell]\!]$.
3. *Les idempotents* $(e_1, \ldots, e_\ell)$ *forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux de* $\mathbf{A}$.
4. *Chaque algèbre* $\mathbf{A}[1/e_k]$ *est un anneau local zéro-dimensionnel (tout élément est inversible ou nilpotent).*
5. *Notons* m_k *la dimension du* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel* $\mathbf{A}[1/e_k]$.
   On a $[\mathbf{A} : \mathbf{K}] = \sum_{k=1}^{\ell} m_k$ *et pour tout* $h \in \mathbf{A}$ *on a*
   $$\mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{K}}(h)(T) = \prod_{k=1}^{\ell} \big(T - h(\underline{\xi}_k)\big)^{m_k}.$$
   En particulier, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{K}}(h) = \sum_{k=1}^{\ell} m_k h(\underline{\xi}_k)$ *et* $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{K}}(h) = \prod_{k=1}^{\ell} h(\underline{\xi}_k)^{m_k}$.
6. *Notons* $\pi_k : \mathbf{A} \to \mathbf{K}$, $h \mapsto h(\underline{\xi}_k)$ *l'évaluation en* $\underline{\xi}_k$, *et* $\mathfrak{m}_k = \mathrm{Ker}\,\pi_k$.
   Alors $\langle e_k - 1\rangle = \mathfrak{m}_k^{m_k}$ *et* $\mathfrak{m}_k = \sqrt{\langle e_k - 1\rangle}$.

▷ On note $V = \{\underline{\xi}_1, \ldots, \underline{\xi}_\ell\}$ la variété des zéros du système dans $\mathbf{K}^n$.
2 et *3.* On a des interpolants de Lagrange en plusieurs variables. Ce sont des polynômes $L_k \in \mathbf{K}[\underline{X}]$ qui vérifient $L_k(\underline{\xi}_j) = \delta_{j,k}$. On considère les L_k comme des éléments de $\mathbf{A}$.
Puisque $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, il existe un entier d et un idempotent e_k avec $\langle e_k\rangle = \langle L_k\rangle^d$, donc $e_k L_k^d = L_k^d$ et $L_k^d b_k = e_k$ pour un certain b_k. Ceci implique que $e_k(\underline{\xi}_j) = \delta_{j,k}$.
Pour $j \neq k$, $e_j e_k$ est nul sur V, donc par le Nullstellensatz, $e_j e_k$ est nilpotent dans $\mathbf{A}$. Comme c'est un idempotent, $e_j e_k = 0$.
La somme des e_j est donc un idempotent e. Cet élément ne s'annule nulle part, c'est-à-dire qu'il a les mêmes zéros que 1. Par le Nullstellensatz, on obtient $1 \in \sqrt{\langle e\rangle}$. Ainsi $e = 1$ car c'est un idempotent inversible de $\mathbf{A}$.
4. La $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}[1/e_k] = \mathbf{A}/\langle 1 - e_k\rangle$ est l'algèbre quotient associée au système polynomial $(f_1, \ldots, f_s, 1 - e_k)$ qui admet $\underline{\xi}_k$ pour seul zéro. On considère un élément arbitraire $h \in \mathbf{A}_k$. En raisonnant comme au point précédent, on obtient par le Nullstellensatz que si $h(\underline{\xi}_k) = 0$, alors h est nilpotent, et si $h(\underline{\xi}_k) \neq 0$, alors h est inversible.

8. On pourra voir à ce sujet les théorèmes VIII-6.2, VIII-6.7 et VIII-6.8

5. Puisque $\mathbf{A} \simeq \prod_{k=1}^{\ell} \mathbf{A}_k$, il suffit de démontrer que pour $h \in \mathbf{A}_k$, on a l'égalité $\mathrm{C}_{\mathbf{A}_k/\mathbf{k}}(h)(T) = \big(T - h(\underline{\xi}_k)\big)^{m_k}$. On identifie $\mathbf{K}$ à son image dans $\mathbf{A}_k$. L'élément $h_k = h - h(\underline{\xi}_k)$ s'annule en $\underline{\xi}_k$, donc il est nilpotent. Si μ désigne la multiplication par h_k dans $\mathbf{A}_k$, μ est un endomorphisme nilpotent. Sur une base convenable, sa matrice est triangulaire stricte inférieure, et celle de la multiplication par h est triangulaire avec des $h(\underline{\xi}_k)$ sur la diagonale, donc son polynôme caractéristique est $\big(T - h(\underline{\xi}_k)\big)^{m_k}$.
6. On a clairement $e_k - 1 \in \mathfrak{m}_k$. Si $h \in \mathfrak{m}_k$, l'élément $e_k h$ est partout nul sur V, donc nilpotent. Donc $h^N e_k = 0$ pour un certain N et $h \in \sqrt{\langle e_k - 1\rangle}$. Pour voir que $\mathfrak{m}_k^{m_k} = \langle e_k - 1\rangle$, on peut se situer dans $\mathbf{A}_k$, où $\langle e_k - 1\rangle = 0$. Dans cet anneau, l'idéal $\mathfrak{m}_k$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension $m_k - 1$. Les puissances successives de $\mathfrak{m}_k$ forment alors une suite décroissante de sous-$\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies, qui stationne dès que deux termes consécutifs sont égaux. Ainsi $\mathfrak{m}_k^{m_k}$ est un idéal de type fini idempotent strict, donc nul. □

Remarques.
1) Le fait que le système polynomial est zéro-dimensionnel résulte d'un calcul rationnel dans le corps des coefficients (mise en position de Noether ou calcul de base de Gröbner).
2) Le point *5* du théorème de Stickelberger permet de calculer toutes les informations utiles sur les zéros du système en se basant sur la seule forme trace. En outre, la forme trace peut être calculée dans le corps des coefficients des polynômes du système. Ceci a des applications importantes en calcul formel (voir par exemple [Basu, Pollack & Roy]). ∎

Pour des exemples, on pourra consulter l'exercice 15 et le problème 1. Pour une étude purement locale des zéros isolés, voir la section IX-4.

9. Idéaux de Fitting

La théorie des idéaux de Fitting des modules de présentation finie est une machinerie calculatoire extrêmement efficace d'un point de vue théorique constructif. Elle a un coté « théorie de l'élimination » dans la mesure où elle est entièrement basée sur des calculs de déterminants, et elle a pendant un temps plus ou moins disparu de la littérature sous l'influence de l'idée qu'il fallait « éliminer l'élimination » pour se sortir du bourbier de calculs dont la signification ne semblait pas claire.
Les idéaux de Fitting redeviennent à la mode et c'est tant mieux. Pour plus de détails, on pourra consulter [Northcott].

Idéaux de Fitting d'un module de présentation finie

9.1. Définition.
Si $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$ est une matrice de présentation d'un $\mathbf{A}$-module M donné par q générateurs, les *idéaux de Fitting de M* sont les idéaux

$$\mathcal{F}_{\mathbf{A},n}(M) = \mathcal{F}_n(M) := \mathcal{D}_{\mathbf{A},q-n}(G)$$

où n est un entier arbitraire.

Cette définition est légitimée par le lemme facile mais fondamental suivant.

9.2. Lemme. *Les idéaux de Fitting du module de présentation finie M sont bien définis, autrement dit ces idéaux ne dépendent pas de la présentation choisie G pour M.*

▷ Pour prouver ce lemme il faut essentiellement voir que les idéaux $\mathcal{D}_{q-n}(G)$ ne changent pas,

1. d'une part, lorsque l'on rajoute une nouvelle syzygie, combinaison linéaire des syzygies déjà présentes,
2. d'autre part, lorsque l'on rajoute un nouvel élément à un système générateur, avec une syzygie qui exprime ce nouvel élément en fonction des anciens générateurs.

Les détails sont laissés à la lectrice. □

On a immédiatement les faits suivants.

9.3. Fait. *Pour tout module de présentation finie M avec q générateurs, on a les inclusions*

$$\langle 0\rangle = \mathcal{F}_{-1}(M) \subseteq \mathcal{F}_0(M) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_q(M) = \langle 1\rangle\,.$$

Si N est un module de présentation finie quotient de M, on a les inclusions $\mathcal{F}_k(M) \subseteq \mathcal{F}_k(N)$ pour tout $k \geqslant 0$.

Remarque. En particulier, si $\mathcal{F}_r(M) \neq \langle 1\rangle$ le module M ne peut pas être engendré par r éléments. On verra (lemme du nombre de générateurs local page 501) que la signification de l'égalité $\mathcal{F}_r(M) = \langle 1\rangle$ est que le module est *localement* engendré par r éléments. ■

9.4. Fait. *Soit M un $\mathbf{A}$-module libre de rang k. Alors,*

$$\mathcal{F}_0(M) = \cdots = \mathcal{F}_{k-1}(M) = \langle 0\rangle \subseteq \mathcal{F}_k(M) = \langle 1\rangle\,.$$

Plus généralement, si M est quasi libre isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^{k}\langle f_i\rangle$, où les f_i sont des idempotents tels que $f_if_j = f_j$ si $j > i$, alors $\mathcal{F}_k(M) = \langle 1\rangle$ et $\mathcal{F}_i(M) = \langle 1 - f_{i+1}\rangle$ pour $i \in [\![0..k-1]\!]$.

Remarquez que ceci fournit une preuve savante du fait que si un module est libre avec deux rangs distincts, l'anneau est trivial.

Exemples.
1. Pour un groupe abélien fini H considéré comme $\mathbb{Z}$-module, l'idéal $\mathcal{F}_0(H)$ est engendré par l'ordre du groupe tandis que l'annulateur est engendré par son exposant. En outre, la structure du groupe est entièrement caractérisée par ses idéaux de Fitting. Une généralisation est donnée dans l'exercice 16.

2. Reprenons le $\mathbf{B}$-module M de l'exemple page 208. Le calcul donne les résultats suivants.
- Pour M : $\mathcal{F}_0(M) = 0$, $\mathcal{F}_1(M) = \mathfrak{b}$ et $\mathcal{F}_2(M) = \langle 1\rangle$,
- pour $M' = M \otimes M$: $\mathcal{F}_0(M') = 0$, $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{b}^3$, $\mathcal{F}_2 = \mathfrak{b}^2$, $\mathcal{F}_3 = \mathfrak{b}$ et $\mathcal{F}_4 = \langle 1\rangle$,
- pour $M'' = \mathbf{S}^2(M)$: $\mathcal{F}_0(M'') = 0$, $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{b}^2$, $\mathcal{F}_2 = \mathfrak{b}$ et $\mathcal{F}_3 = \langle 1\rangle$,
- pour $\bigwedge^2 M$: $\mathcal{F}_0(\bigwedge^2 M) = \mathfrak{b}$ et $\mathcal{F}_1(\bigwedge^2 M) = \langle 1\rangle$. ∎

9.5. Fait. (Changement d'anneau de base)
Soit M un $\mathbf{A}$-module de présentation finie, $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorphisme d'anneaux, et $\rho_\star(M)$ le $\mathbf{B}$-module obtenu par extension des scalaires à $\mathbf{B}$. On a pour tout entier $n \geqslant 0$ l'égalité : $\big\langle \rho\big(\mathcal{F}_n(M)\big)\big\rangle = \mathcal{F}_n\big(\rho_\star(M)\big)$.
En particulier, si S est un monoïde, on a $\mathcal{F}_n(M_S) = \big(\mathcal{F}_n(M)\big)_S$.

Les deux faits suivants sont moins évidents.

9.6. Lemme. (Annulateur et premier idéal de Fitting)
Soit M un $\mathbf{A}$-module de présentation finie, engendré par q éléments, on a :
$$\mathrm{Ann}(M)^q \subseteq \mathcal{F}_0(M) \subseteq \mathrm{Ann}(M).$$
▷ Soit $(x_1, \ldots, x_q)$ un système générateur de M, $X = [\,x_1 \ \cdots \ x_q\,]$ et G une matrice de présentation associée à X. Soient a_1, …, $a_q \in \mathrm{Ann}(M)$. Alors, la matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_q)$ a pour colonnes des combinaisons linéaires des colonnes de G, donc son déterminant $a_1 \cdots a_q$ appartient à $\mathcal{F}_0(M)$. Ceci prouve la première inclusion.
Soit δ un mineur d'ordre q extrait de G. On va montrer que $\delta \in \mathrm{Ann}(M)$, d'où la deuxième inclusion. Si δ correspond à une sous-matrice H de G on a $X\,H = 0$, donc $\delta X = 0$, et cela signifie bien $\delta \in \mathrm{Ann}(M)$. □

9.7. Fait. (Idéaux de Fitting et suites exactes)
Soit $0 \to N \to M \to P \to 0$ une suite exacte de modules de présentation finie. Pour tout $p \geqslant 0$ on a
$$\mathcal{F}_p(M) \ \supseteq \ \textstyle\sum_{r\geqslant 0, s\geqslant 0, r+s=p} \mathcal{F}_r(N)\mathcal{F}_s(P),$$
et si $M \simeq N \oplus P$, l'inclusion est une égalité.
▷ On peut considérer que $N \subseteq M$ et $P = M/N$. On reprend les notations du point *3* de la proposition 4.2. On a une matrice de présentation D de M qui s'écrit «sous forme triangulaire»
$$D = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}.$$
Alors, tout produit d'un mineur d'ordre k de A et d'un mineur d'ordre ℓ de B est égal à un mineur d'ordre $k + \ell$ de D. Ceci implique le résultat annoncé pour les idéaux de Fitting.
Le deuxième cas est clair, avec $C = 0$. □

Exemple. Sur l'anneau de polynômes $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[a,b,c,d]$, considérons le module $M = \mathbf{A}g_1 + \mathbf{A}g_2 = \operatorname{Coker} F$ où $F = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Ici g_1 et g_2 sont les images de la base naturelle (e_1, e_2) de $\mathbf{A}^2$. Notons $\delta = \det(F)$.
On voit facilement que $\delta\, e_1$ est une base du sous-module $\operatorname{Im} F \cap e_1\mathbf{A}$ de $\mathbf{A}^2$. Soient $N = \mathbf{A}g_1$ et $P = M/N$. Alors le nodule N admet la matrice de présentation $[\,\delta\,]$ pour le système générateur (g_1) et P admet la matrice de présentation $[\,c\;d\,]$ pour le système générateur $(\overline{g_2})$.
En conséquence, on obtient $\mathcal{F}_0(M) = \mathcal{F}_0(N) = \langle\delta\rangle$ et $\mathcal{F}_0(P) = \langle c, d\rangle$, et l'inclusion $\mathcal{F}_0(N)\mathcal{F}_0(P) \subseteq \mathcal{F}_0(M)$ est stricte. ∎

Idéaux de Fitting d'un module de type fini

On peut généraliser la définition des idéaux de Fitting à un module de type fini arbitraire M comme suit. Si $(x_1, \ldots, x_q)$ est un système générateur de M et si $X = {}^{\mathrm{t}}[\,x_1 \;\cdots\; x_q\,]$, on définit $\mathcal{F}_{q-k}(M)$ comme l'idéal engendré par tous les mineurs d'ordre k de toutes les matrices $G \in \mathbf{A}^{k\times q}$ vérifiant $GX = 0$.
Une définition alternative est que chaque $\mathcal{F}_j(M)$ est la somme de tous les $\mathcal{F}_j(N)$ où N parcourt les modules de présentation finie qui s'envoient surjectivement sur M.
Ceci montre que les idéaux ainsi définis ne dépendent pas du système générateur considéré.

La remarque suivante est souvent utile.

9.8. Fait. *Soit M un $\mathbf{A}$-module de type fini.*

1. *Si $\mathcal{F}_k(M)$ est un idéal de type fini, M est le quotient d'un module de présentation finie M' pour lequel $\mathcal{F}_k(M') = \mathcal{F}_k(M)$.*
2. *Si tous les idéaux de Fitting sont de type fini, M est le quotient d'un module de présentation finie M' ayant les mêmes idéaux de Fitting que M.*

10. Idéal résultant

Dans ce qui suit, on considère un anneau $\mathbf{k}$ que l'on ne suppose pas discret. Le résultant de deux polynômes est à la base de la théorie de l'élimination. Si f, $g \in \mathbf{k}[X]$ avec f unitaire, le lemme d'élimination de base page 126 peut être lu dans l'algèbre $\mathbf{B} = \mathbf{k}[X]/\langle f\rangle$ en écrivant :

$$\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\overline{g}) \cap \mathbf{k} = \mathrm{D}_{\mathbf{k}}\big(\mathrm{Res}_X(f,g)\big).$$

Il se généralise alors avec le résultat suivant, que l'on peut voir comme une formulation très précise du lemme « lying over » (voir le lemme VI-3.12).

10.1. Lemme d'élimination général.

1. *Soient* $\mathbf{k} \xrightarrow{\rho} \mathbf{C}$ *une algèbre qui est un* $\mathbf{k}$*-module engendré par* m *éléments,* $\mathfrak{a} = \mathcal{F}_{\mathbf{k},0}(\mathbf{C})$ *son premier idéal de Fitting et* $\mathfrak{c} = \operatorname{Ker}\rho$. *Alors :*
   a. $\mathfrak{c} = \operatorname{Ann}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C})$,
   b. $\boxed{\mathfrak{c}^m \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}}$ *et donc* $\boxed{\mathrm{D}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{c}) = \mathrm{D}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{a})}$,
   c. *si par une extension des scalaires* $\varphi : \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ *on obtient l'algèbre* $\rho' : \mathbf{k}' \to \mathbf{C}'$, *alors l'idéal* $\mathfrak{a}' := \mathcal{F}_0(\mathbf{C}')$ *est égal à* $\varphi(\mathfrak{a})\mathbf{k}'$ *et en tant que* $\mathbf{k}'$*-module, il est isomorphe à* $\mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathfrak{a} \simeq \varphi_\star(\mathfrak{a})$.
2. *Soit* $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{k}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre qui est un* $\mathbf{k}$*-module libre de rang* m, *et* $\mathfrak{b}$ *un idéal de type fini de* $\mathbf{B}$.
   a. *L'idéal d'élimination* $\mathfrak{b} \cap \mathbf{k}$ *est le noyau de l'homomorphisme canonique* $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}$, *i.e. l'annulateur du* $\mathbf{k}$*-module* $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$.
   b. *Le* $\mathbf{k}$*-module* $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ *est de présentation finie et l'on a :*
   $\boxed{(\mathfrak{b} \cap \mathbf{k})^m \subseteq \mathcal{F}_0(\mathbf{B}/\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b} \cap \mathbf{k}}$ *et* $\boxed{\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{b}) \cap \mathbf{k} = \mathrm{D}_{\mathbf{k}}\big(\mathcal{F}_0(\mathbf{B}/\mathfrak{b})\big)}$.
   On note $\mathfrak{Res}(\mathfrak{b}) := \mathcal{F}_{\mathbf{k},0}(\mathbf{B}/\mathfrak{b})$, *on l'appelle l'*idéal résultant de $\mathfrak{b}$.

▷ *1a* et *1b.* En effet, $a \in \mathbf{k}$ annule $\mathbf{C}$ si, et seulement si, il annule $1_{\mathbf{C}}$, si, et seulement si, $\rho(a) = 0$. La double inclusion recherchée est donc donnée par le lemme 9.6 (valable aussi pour les modules de type fini).
1c. Les idéaux de Fitting se comportent bien par extension des scalaires.
2. On applique le point *1* avec $\mathbf{C} = \mathbf{B}/\mathfrak{b}$. □

Remarques. 1) L'idéal résultant dans le point *2* peut être décrit précisément comme suit. Si $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_s \rangle$ on considère l'*application de Sylvester généralisée*

$$\psi : \mathbf{B}^s \to \mathbf{B}, \quad (y_1, \dots, y_s) \mapsto \psi(\underline{y}) = \textstyle\sum_i y_i b_i.$$

C'est une application $\mathbf{k}$-linéaire entre $\mathbf{k}$-modules libres de rangs ms et m. Alors, on a $\mathfrak{Res}(\mathfrak{b}) = \mathcal{D}_m(\psi)$.
2) Cela fait beaucoup de générateurs pour l'idéal $\mathfrak{Res}(\mathfrak{b})$. En fait il existe diverses techniques pour diminuer le nombre de générateurs en remplaçant $\mathfrak{Res}(\mathfrak{b})$ par un idéal de type fini ayant nettement moins de générateurs mais ayant le même nilradical. Voir à ce sujet : le traitement donné en section III-9 avec notamment le lemme III-9.2, les résultats du chapitre XIII sur le nombre de générateurs radicaux d'un idéal radicalement de type fini (théorème XIV-1.3), et l'article [59]. ■

Voici maintenant un cas particulier du lemme d'élimination général. Ce théorème complète le lemme III-9.2.

10.2. Théorème. (Théorème d'élimination algébrique : l'idéal résultant)
Soit $(f, g_1, \ldots, g_r)$ des polynômes de $\mathbf{k}[X]$ avec f unitaire de degré m. On pose

$$\mathfrak{f} = \langle f, g_1, \ldots, g_r \rangle \subseteq \mathbf{k}[X] \text{ et } \mathbf{B} = \mathbf{k}[X]/\langle f \rangle .$$

*Notons $\psi : \mathbf{B}^r \to \mathbf{B}$ l'*application de Sylvester généralisée *définie par :*

$$(y_1, \ldots, y_r) \mapsto \psi(\underline{y}) = \textstyle\sum_i y_i \overline{g_i}.$$

Il s'agit d'une application $\mathbf{k}$-linéaire entre $\mathbf{k}$-modules libres de rangs respectifs mr et m. Notons $\mathfrak{a}$ l'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_m(\psi)$.

1. *$\mathfrak{a} = \mathcal{F}_{\mathbf{k},0}(\mathbf{k}[X]/\mathfrak{f})$, et l'on a*
$$(\mathfrak{f} \cap \mathbf{k})^m \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{f} \cap \mathbf{k}, \quad \text{et donc} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{k}[X]}(\mathfrak{f}) \cap \mathbf{k} = \mathrm{D}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{a}).$$
2. *Supposons que $\mathbf{k} = \mathbf{A}[Y_1, \ldots, Y_q]$ et que f et les g_i soient de degré total $\leqslant d$ dans $\mathbf{A}[\underline{Y}, X]$. Alors, les générateurs de $\mathcal{D}_m(\psi)$ sont de degré total $\leqslant d^2$ dans $\mathbf{A}[\underline{Y}]$.*
3. *L'idéal $\mathfrak{a}$ ne dépend que de $\mathfrak{f}$ (sous la seule hypothèse que $\mathfrak{f}$ contienne un polynôme unitaire). Nous l'appelons* l'idéal résultant de $\mathfrak{f}$ par rapport à l'indéterminée X *et nous le notons $\mathfrak{Res}_X(f, g_1, \ldots, g_r)$ ou $\mathfrak{Res}_X(\mathfrak{f})$, ou $\mathfrak{Res}(\mathfrak{f})$.*
4. *Si par une extension des scalaires $\theta : \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ on obtient l'idéal $\mathfrak{f}'$ de $\mathbf{k}'[X]$, alors l'idéal $\mathfrak{Res}_X(\mathfrak{f}') \subseteq \mathbf{k}'$ est égal à $\theta\big(\mathfrak{Res}_X(\mathfrak{f})\big)\mathbf{k}'$, et en tant que module il est isomorphe à $\mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathfrak{Res}_X(\mathfrak{f}) \simeq \theta_\star\big(\mathfrak{Res}_X(\mathfrak{f})\big)$.*

NB. Considérons la base $\mathcal{E} = (1, \ldots, X^{m-1})$ de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{k}$. Soit $F \in \mathbf{k}^{m \times mr}$ la matrice de ψ pour les bases déduites de $\mathcal{E}$. Ses colonnes sont les $X^j g_k \bmod f$ pour $j \in [\![0..m-1]\!]$, $k \in [\![1..r]\!]$ écrits sur la base $\mathcal{E}$. On dit que F est une *matrice de Sylvester généralisée*. Par définition on a $\mathfrak{Res}_X(\mathfrak{f}) = \mathcal{D}_m(F)$. ∎

▷ Posons $\mathfrak{b} = \mathfrak{f} \bmod f = \langle \overline{g_1}, \ldots, \overline{g_r} \rangle \subseteq \mathbf{B}$. On applique les points *2* et *1c* du lemme d'élimination général en remarquant que $\mathbf{k}[X]/\mathfrak{f} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}$, avec $\mathfrak{f} \cap \mathbf{k} = \mathfrak{b} \cap \mathbf{k}$. □

Remarque. Ainsi, le théorème 10.2 établit un lien très étroit entre idéal d'élimination et idéal résultant. Les avantages que présente l'idéal résultant sur l'idéal d'élimination sont les suivants

— l'idéal résultant est de type fini,
— son calcul est *uniforme*,
— il se comporte bien par extension des scalaires.

Notons que dans le cas où $\mathbf{k} = \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_q]$ avec $\mathbf{K}$ un corps discret, l'idéal d'élimination est aussi de type fini mais son calcul, par exemple via les bases de Gröbner, n'est pas uniforme.
Cependant l'idéal résultant n'est défini que lorsque $\mathfrak{f}$ contient un polynôme unitaire et ceci limite la portée du théorème. ∎

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées au lecteur, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

- Donner une preuve détaillée du lemme 1.1.
- Expliquez pourquoi les propositions II-3.1 et II-3.7 (lorsque l'on prend $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{A}$-module M) se relisent sous la forme du théorème 4.3.
- Démontrer les propositions 4.1 et 4.4. Donner une preuve détaillée des propositions 4.6 et 4.11. Montrer que $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.
- Justifier les affirmations contenues dans l'exemple page 208.
- Démontrer les lemmes ou faits 8.4, 8.5, 8.7 et 8.8.
- Donnez des algorithmes pour les trois points du théorème 8.12.
- Prouver le fait 9.8.

Exercice 2. Soient $M \subseteq N$ des $\mathbf{A}$-modules avec M en facteur direct dans N. Si N est de type fini (resp. de présentation finie), alors M également.

Exercice 3. *(Structure de $\mathbf{A}[X]$-module sur $\mathbf{A}^n$ associée à un $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau commuatif. On munit $\mathbf{A}^n$ d'une structure de $\mathbf{A}[X]$-module en posant

$$Q \cdot x = Q(A) \cdot x \text{ pour } Q \in \mathbf{A}[X] \text{ et } x \in \mathbf{A}^n.$$

On va donner une matrice de présentation pour ce $\mathbf{A}[X]$-module. Ceci généralise l'exemple 3) page 192 donné au début de la section 1, avec $\mathbf{A}$ un corps discret.
Soit $\theta_A : \mathbf{A}[X]^n \twoheadrightarrow \mathbf{A}^n$ l'unique $\mathbf{A}[X]$-morphisme qui transforme la base canonique de $\mathbf{A}[X]^n$ en celle de $\mathbf{A}^n$. En notant du même nom $(e_1, \dots, e_n)$ ces deux bases canoniques, θ_A transforme donc $Q_1 e_1 + \cdots + Q_n e_n$ en $Q_1(A)\cdot e_1 + \cdots + Q_n(A)\cdot e_n$.
On va montrer que la suite ci-dessous est exacte :

$$\mathbf{A}[X]^n \xrightarrow{X\mathrm{I}_n - A} \mathbf{A}[X]^n \xrightarrow{\theta_A} \mathbf{A}^n \to 0$$

Autrement dit $\mathbf{A}^n$ est un $\mathbf{A}[X]$-module de présentation finie et $X\mathrm{I}_n - A$ est une matrice de présentation pour le système générateur $(e_1, \dots, e_n)$.
1. Montrer que l'on a une somme directe de $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{A}[X]^n = \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) \oplus \mathbf{A}^n$.
2. Conclure.

Exercice 4. *(Description des tenseurs nuls)*
Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules arbitraires, et $z = \sum_{i\in[\![1..n]\!]} x_i \otimes y_i \in M \otimes N$.
1. Montrer que $z = 0$ si, et seulement si, il existe un sous-module de type fini M_1 de M tel que l'on ait $\sum_{i\in[\![1..n]\!]} x_i \otimes y_i =_{M_1\otimes N} 0$.
2. On écrit $M_1 = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_p$ avec $p \geqslant n$. On pose $y_k =_N 0$ pour $n < k \leqslant p$. Utiliser le lemme du tenseur nul avec l'égalité $\sum_{i\in[\![1..p]\!]} x_i \otimes y_i =_{M_1\otimes N} 0$ pour donner une caractérisation des tenseurs nuls dans la situation générale.

Exercice 5. Soit M un $\mathbf{A}$-module, $\mathfrak{a}$ un idéal et S un monoïde de $\mathbf{A}$.
1. Montrer que l'application linéaire canonique $M \to M/\mathfrak{a}M$ résout le problème universel de l'extension des scalaires pour l'homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ (i.e., selon la définition 4.10, cette application linéaire est un morphisme d'extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ pour M). En déduire que l'application linéaire naturelle $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \otimes_{\mathbf{A}} M \to M/\mathfrak{a}M$ est un isomorphisme.

2. Montrer que l'application linéaire canonique $M \to M_S$ résout le problème universel de l'extension des scalaires pour l'homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_S$. En déduire que l'application linéaire naturelle $\mathbf{A}_S \otimes_{\mathbf{A}} M \to M_S$ est un isomorphisme.

Exercice 6. Toute matrice sur un anneau de Bézout intègre est équivalente à une matrice de la forme $\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ avec T triangulaire et les éléments sur la diagonale de T non nuls (naturellement, les lignes ou colonnes indiquées nulles peuvent être absentes). Cette équivalence peut être obtenue par des manipulations de Bézout. Généraliser aux anneaux quasi intègres en utilisant la méthode générale expliquée page 217.

Exercice 7. *(Anneaux de Bézout strict)*

1. Pour un anneau $\mathbf{A}$, montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- *a.* Si $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$, il existe $Q \in \mathbb{GL}_m(\mathbf{A})$ telle que AQ soit triangulaire inférieure.
- *b.* Même chose qu'en a avec $(n, m) = (1, 2)$, i.e. $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout strict.
- *c.* Pour a, $b \in \mathbf{A}$, il existe x, $y \in \mathbf{A}$ comaximaux tels que $ax + by = 0$.
- *d.* Pour $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbf{A}$, il existe $d \in \mathbf{A}$ et $(\underline{a'}) = (a'_1, \ldots, a'_n)$ comaximaux vérifiant $(\underline{a}) = d(\underline{a'})$; on a alors $\langle \underline{a} \rangle = \langle d \rangle$.
- *e.* Même chose qu'en d avec $n = 2$.

2. Montrer que la classe des anneaux de Bézout strict est stable par produit fini, par quotient et par localisation.

Dans la suite, on suppose que $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout strict.

3. Soient a, b, $d_2 \in \mathbf{A}$ tels que $\langle a, b \rangle = \langle d_2 \rangle$. Montrer qu'il existe a_2, $b_2 \in \mathbf{A}$ comaximaux tels que $(a, b) = d_2(a_2, b_2)$. On pourra considérer d_1, a_1, b_1, u_1, v_1 avec $(a, b) = d_1(a_1, b_1)$, $1 = u_1a_1 + v_1b_1$ et introduire :

$$(\star) \quad \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & a_1 \\ -u_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ k_{12} \end{bmatrix} \text{ où } d_1 = k_{12}d_2,\ d_2 = k_{21}d_1,\ \varepsilon = k_{12}k_{21} - 1.$$

4. Même chose que dans le point précédent mais avec un nombre quelconque d'éléments c'est-à-dire pour $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbf{A}$ et d donnés vérifiant $\langle \underline{a} \rangle = \langle d \rangle$, il existe $(\underline{a'}) = (a'_1, \ldots, a'_n)$, comaximaux, tels que $\underline{a} = d\underline{a'}$.

5. Montrer que toute matrice diagonale $\mathrm{Diag}(a_1, \ldots, a_n)$ est $\mathbb{SL}_n$-équivalente à une autre matrice diagonale $\mathrm{Diag}(b_1, \ldots, b_n)$ avec $b_1 \mid b_2 \mid \cdots \mid b_n$.

De plus, si l'on pose $\mathfrak{a}_i = \langle a_i \rangle$, $\mathfrak{b}_i = \langle b_i \rangle$, on a $\mathfrak{b}_i = S_i(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ où S_i est la « i-ème fonction symétrique élémentaire de $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ » obtenue en remplaçant le produit par l'intersection. Par exemple :

$$S_2(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3) = (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) + (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_3) + (\mathfrak{a}_2 \cap \mathfrak{a}_3).$$

En particulier, $\mathfrak{b}_1 = \sum_i \mathfrak{a}_i$, $\mathfrak{b}_n = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$. De plus $\prod_i \mathbf{A}/\mathfrak{a}_i \simeq \prod_i \mathbf{A}/\mathfrak{b}_i$.

Ce dernier résultat sera généralisé aux anneaux arithmétiques (corollaire XII-1.7).

D'autres « vraies » fonctions symétriques élémentaires d'idéaux interviennent dans l'exercice 16.

Exercice 8. *(Anneaux de Smith, ou elementary divisor rings)*
Définissons un *anneau de Smith* comme un anneau sur lequel toute matrice admet une forme réduite de Smith, (cf. la section 7 page 220). Un tel anneau est de Bézout strict (cf. l'exercice 7). Puisque sur un anneau de Bézout strict, toute matrice carrée diagonale est équivalente à une matrice de Smith (exercice 7, question *5*), un anneau est de Smith si, et seulement si, toute matrice est équivalente à une matrice « diagonale », sans condition de divisibilité sur les coefficients. Ces anneaux ont été en particulier étudiés par Kaplansky dans [116], y compris pour le cas non commutatif, puis par Gillman & Henriksen dans [90]. Nous nous limitons ici au cas commutatif.
Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathbf{A}$ est un anneau de Smith.
2. $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout strict et toute matrice triangulaire dans $\mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ est équivalente à une matrice diagonale.
3. L'anneau $\mathbf{A}$ est de Bézout strict, et si $1 \in \langle a, b, c\rangle$, alors il existe (p, q), (p', q') tels que $1 = pp'a + qp'b + qq'c$.
4. L'anneau $\mathbf{A}$ est de Bézout strict, et si $\langle a, b, c\rangle = \langle g\rangle$, alors il existe (p, q), (p', q') tels que $g = pp'a + qp'b + qq'c$.

Ceci donne un joli théorème de structure pour les modules de présentation finie, en tenant compte pour l'unicité du théorème 5.1. Notez aussi que ce théorème implique l'unicité de la réduite de Smith d'une matrice A (en considérant le module conoyau) au sens suivant : en notant b_i les coefficients diagonaux de la réduite, les idéaux principaux $\langle b_1\rangle \supseteq \cdots \supseteq \langle b_q\rangle$ ($q = \inf(m, n)$) sont des invariants de la matrice A à équivalence près.
En termes de modules, ces idéaux principaux caractérisent, à un automorphisme près de $\mathbf{A}^m$, le morphisme d'inclusion $P = \mathrm{Im}(A) \to \mathbf{A}^m$.
Une base $(e_1, \ldots, e_m)$ de $\mathbf{A}^m$ telle que $P = b_1\mathbf{A}\, e_1 + \cdots + b_m\mathbf{A}\, e_m$ est appelée une *base de $\mathbf{A}^m$ adaptée au sous-module P.*
Posons $b_r = 0$ si $m \geqslant r > n$, on a $\langle b_1\rangle \supseteq \cdots \supseteq \langle b_r\rangle$. Les idéaux principaux $\neq \langle 1\rangle$ de cette liste sont les facteurs invariants du module $M = \mathrm{Coker}(A)$. Le théorème 5.1 nous dit que cette liste caractérise la structure du module M.
Notons enfin que les anneaux de Smith sont stables par produit fini, localisation et passage au quotient.

Exercice 9. *(Exemple élémentaire de détermination du groupe des inversibles)*
1. Soit $\mathbf{k}$ un anneau réduit et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[Y, Z]/\langle YZ\rangle = \mathbf{k}[y, z]$ avec $yz = 0$. Montrer en utilisant une mise en position de Noether de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}$, que $\mathbf{A}^\times = \mathbf{k}^\times$.
2. Soit $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[a, b, X, Y]/\langle X - aY, Y - bX\rangle = \mathbb{Z}[\alpha, \beta, x, y]$ avec $x = \alpha y$ et $y = \beta x$. Montrer que $\mathbf{A}^\times = \{\pm 1\}$; on a donc $\mathbf{A}x = \mathbf{A}y$ mais $y \notin \mathbf{A}^\times x$.

Exercice 10. *(Conditions suffisantes pour la surjectivité de $\mathbf{A}^\times \to (\mathbf{A}/\mathfrak{a})^\times$)*
Voir aussi l'exercice IX-16.
Pour un idéal $\mathfrak{a}$ d'un anneau $\mathbf{A}$, on considère la propriété ($\star$) :

($\star$) $\qquad \mathbf{A}^\times \to (\mathbf{A}/\mathfrak{a})^\times$ est surjectif,

i.e., pour $x \in \mathbf{A}$ inversible modulo $\mathfrak{a}$, il existe $y \in \mathbf{A}^\times$ tel que $y \equiv x \bmod \mathfrak{a}$, ou encore : si $\mathbf{A}x + \mathfrak{a}$ rencontre $\mathbf{A}^\times$, alors $x + \mathfrak{a}$ rencontre $\mathbf{A}^\times$.
1. Montrer que ($\star$) est vérifiée quand $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel.

2. Si $(\star)$ est vérifiée pour tout idéal principal $\mathfrak{a}$, elle l'est pour tout idéal $\mathfrak{a}$.
3. On suppose $(\star)$ vérifiée. Soient x, y deux éléments d'un $\mathbf{A}$-module tels que $\mathbf{A}x = \mathbf{A}y$; montrer que $y = ux$ pour un $u \in \mathbf{A}^\times$.
NB : l'exercice 9 fournit un exemple d'anneau $\mathbf{A}$ avec x, $y \in \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}x = \mathbf{A}y$, mais $y \notin \mathbf{A}^\times x$.
4. Soient $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, $\pi : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{A}'$ la surjection canonique et $\mathfrak{a}' = \pi(\mathfrak{a})$. Montrer que si $(\star)$ est vérifiée pour $(\mathbf{A}', \mathfrak{a}')$, elle l'est pour $(\mathbf{A}, \mathfrak{a})$.

Exercice 11. *(Calcul d'un sous-module de torsion)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau cohérent intègre et M un $\mathbf{A}$-module de présentation finie. Alors le sous-module de torsion de M est un module de présentation finie.
Plus précisément si l'on a une matrice de présentation E pour M avec une suite exacte

$$\mathbf{A}^n \xrightarrow{E} \mathbf{A}^\ell \xrightarrow{\pi} M \to 0$$

et si F est une matrice telle que l'on ait une suite exacte

$$\mathbf{A}^m \xrightarrow{F} \mathbf{A}^\ell \xrightarrow{{}^tE} \mathbf{A}^n$$

(l'existence de la matrice F résulte du fait que $\mathbf{A}$ est cohérent) alors le sous-module de torsion $\mathrm{T}(M)$ de M est égal à $\pi(\mathrm{Ker}\ {}^tF)$ et isomorphe à $\mathrm{Ker}\ {}^tF/\mathrm{Im}\,E$.
Montrer aussi que le résultat se généralise au cas où $\mathbf{A}$ est cohérent et quasi intègre.

Exercice 12. *(L'algorithme d'Euclide dans le cas zéro-dimensionnel réduit)*
On donne ici une version plus uniforme de la démonstration de la proposition 8.11 et on la généralise. On considère un anneau zéro-dimensionnel réduit $\mathbf{A}$.
1. Soient $\mathbf{B}$ un anneau quelconque et $b \in \mathbf{B}$ tel que $\langle b\rangle$ soit engendré par un idempotent. Pour $a \in \mathbf{B}$ donner une matrice $M \in \mathbb{E}_2(\mathbf{B})$ et $d \in \mathbf{B}$ vérifiant l'égalité $M \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$. En particulier $\langle a, b\rangle = \langle d\rangle$.
2. Donner un algorithme d'Euclide « uniforme » pour deux polynômes de $\mathbf{A}[X]$.
3. L'anneau $\mathbf{A}[X]$ est un anneau de Smith : donner un algorithme qui réduit toute matrice sur $\mathbf{A}[X]$ à une forme de Smith au moyen de manipulations élémentaires de lignes et de colonnes.

Exercice 13. *(Dépendance linéaire en dimension 0)*
On donne ici la généralisation du théorème selon lequel $n+1$ vecteurs de $\mathbf{K}^n$ sont linéairement dépendants, du cas des corps discrets à celui des anneaux zéro-dimensionnels réduits. Notez que la syzygie, pour être digne de ce nom, doit avoir des coefficients comaximaux.
Soit $\mathbf{K}$ un anneau zéro-dimensionnel réduit, et $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathbf{K}^n$.
1. Construire un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_j)_{j\in[\![1..n+1]\!]}$ de façon à ce que, dans chaque composante $\mathbf{K}[1/e_j]$, le vecteur y_j soit combinaison linéaire des y_i qui le précèdent.
2. En déduire qu'il existe un système d'éléments comaximaux $(a_1, \ldots, a_{n+1})$ dans $\mathbf{K}$ tel que $\sum_i a_i y_i = 0$.

Remarques. 1) On rappelle la convention selon laquelle on accepte que certains éléments d'un système fondamental d'idempotents orthogonaux soient nuls : on voit sur cet exemple que l'énoncé de la propriété désirée en est grandement facilité.

2) On pourra au choix, ou bien donner un traitement adéquat de la matrice des y_i par des manipulations élémentaires en s'appuyant sur le lemme 6.4, ou bien traiter le cas des corps discrets puis utiliser la machinerie locale globale élémentaire n°2 page 226. ∎

Exercice 14. Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$. Montrer que $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ est zéro-dimensionnel.

Exercice 15. *(Présentation d'une algèbre qui est libre finie comme module)*
Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang n de base $\underline{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. On note

$$\varphi : \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] \twoheadrightarrow \mathbf{B}$$

l'homomorphisme (surjectif) d'$\mathbf{A}$-algèbres qui réalise $X_i \mapsto e_i$. On note c_{ij}^k les constantes de structure définies par $e_i e_j = \sum_k c_{ij}^k e_k$. On considère $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ définis par $1 = \sum_k a_k e_k$ et l'on pose :

$$R_0 = 1 - \textstyle\sum_k a_k X_k, \qquad R_{ij} = X_i X_j - \sum c_{ij}^k X_k.$$

On note $\mathfrak{a} = \langle R_0, R_{ij}, i \leqslant j \rangle$. Montrer que tout $f \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ est congru modulo $\mathfrak{a}$ à un polynôme homogène de degré 1. En déduire que $\operatorname{Ker} \varphi = \mathfrak{a}$.

Exercice 16. *(Quelques calculs d'idéaux de Fitting)*
1. Déterminer les idéaux de Fitting d'un $\mathbf{A}$-module présenté par une matrice en forme de Smith.
2. Déterminer les idéaux de Fitting de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$.
3. Soit E un $\mathbf{A}$-module de type fini et $\mathfrak{a}$ un idéal. Montrer que

$$\mathcal{F}_k(E \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \mathcal{F}_{k-1}(E) + \mathcal{F}_k(E)\,\mathfrak{a}.$$

4. Déterminer les idéaux de Fitting du $\mathbf{A}$-module $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}_n$ dans le cas où $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n$.
5. Déterminer les idéaux de Fitting du $\mathbf{A}$-module $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{a}_n$ sans faire d'hypothèse d'inclusion pour les idéaux $\mathfrak{a}_k$.
Comparer $\mathcal{F}_0(M)$ et $\operatorname{Ann}(M)$.

Exercice 17. *(Les idéaux de Fitting d'un $\mathbf{A}$-module de type fini)*
Montrer que les faits 9.3, 9.5, 9.7 et le lemme 9.6 restent valables avec les modules de type fini.

Exercice 18. Une des propriétés caractéristiques des *anneaux de Prüfer* (qui seront étudiés au chapitre XII) est la suivante : si $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$, $B \in \mathbf{A}^{n\times 1}$, et si les idéaux déterminantiels de A et $[\,A \,|\, B\,]$ sont les mêmes, alors le système linéaire $AX = B$ admet une solution.
1. Soit un module de type fini M sur un anneau de Prüfer et N un quotient de M. Montrer que si M et N ont les mêmes idéaux de Fitting, alors $M = N$.
2. Montrer que si un module de type fini M sur un anneau de Prüfer a ses idéaux de Fitting qui sont de type fini, c'est un module de présentation finie.

Exercice 19. *(Idéaux de Kaplansky)*
Pour un $\mathbf{A}$-module M et un entier r on note $\mathcal{K}_r(M)$ l'idéal somme de tous les transporteurs $\big(\langle m_1, \ldots m_r\rangle : M\big)$ pour tous les systèmes $(m_1, \ldots m_r)$ dans M. On l'appelle *l'idéal de Kaplansky d'ordre r du module M*. Ainsi, $\mathcal{K}_0(M) = \operatorname{Ann}(M)$, et si M est engendré par q éléments, on a $\mathcal{K}_q(M) = \langle 1\rangle$.

— Montrer que si $\mathcal{K}_q(M) = \langle 1 \rangle$, M est de type fini.
— Montrer que si M est de type fini, alors pour tout entier r on a les inclusions
$$\mathcal{F}_r(M) \subseteq \mathcal{K}_r(M) \subseteq \sqrt{\mathcal{F}_r(M)} = \sqrt{\mathcal{K}_r(M)}.$$
NB : voir aussi l'exercice IX-12.

Exercice 20. *(Un exemple élémentaire d'idéaux résultants)*
Soient $f, g_1, \ldots, g_r \in \mathbf{A}[X]$, f unitaire de degré $d \geqslant 1$ et $\mathfrak{f} = \langle f, g_1, \ldots, g_r \rangle \subseteq \mathbf{A}[X]$. On va comparer l'idéal
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{R}(f, g_1, \ldots, g_r) = \mathrm{c}_T\big(\mathrm{Res}(f, g_1 + g_2 T + \cdots + g_r T^{r-1})\big)$$
(section III-9), et l'idéal résultant $\mathfrak{b} = \mathfrak{Res}(\mathfrak{f}) = \mathcal{F}_{\mathbf{A},0}(\mathbf{A}[X]/\mathfrak{f})$ (voir le lemme d'élimination général de la section 10).
1. On pose $\mathfrak{a}' = \mathrm{c}_{\underline{T}}\big(\mathrm{Res}(f, g_1 T_1 + g_2 T_2 + \cdots + g_r T_r)\big)$. Montrer les inclusions :
$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{f} \cap \mathbf{A}.$$
2. Soient $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[a, b, c]$ où a, b, c sont trois indéterminées, $f = X^d$, $g_1 = a$, $g_2 = b$ et $g_3 = c$. Déterminer les idéaux $\mathfrak{f} \cap \mathbf{A}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$ et vérifier qu'ils sont distincts. Vérifier également que $\mathfrak{R}(f, g_1, g_2, g_3)$ dépend de l'ordre des g_i.
Est-ce que l'on $(\mathfrak{f} \cap \mathbf{A})^d \subseteq \mathfrak{a}$?

Exercice 21. *(Relateurs et idéal d'élimination)*
Soient $f_1(\underline{X}), \ldots, f_s(\underline{X}) \in \mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ ($\mathbf{k}$ est un anneau commutatif). Notons $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{k}[\underline{Y}] = \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_s]$ l'idéal des relateurs sur $\mathbf{k}$ de $(f_1, \ldots, f_s)$, c'est-à-dire $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}\,\varphi$, où $\varphi : \mathbf{k}[\underline{Y}] \to \mathbf{k}[\underline{X}]$ est le morphisme d'évaluation $Y_i \mapsto f_i$. On note $g_i = f_i(\underline{X}) - Y_i \in \mathbf{k}[\underline{Y}, \underline{X}]$ et $\mathfrak{f} = \langle g_1, \ldots, g_s \rangle$.
Montrer que $\mathfrak{a} = \mathfrak{f} \cap \mathbf{k}[\underline{Y}]$. Ainsi, $\mathfrak{a}$ est l'idéal d'élimination des variables X_j dans le système polynomial des g_i.

Exercice 22. *(Localisation d'un anneau zéro-dimensionnel)*
Tout quotient ou localisé d'un anneau zéro-dimensionnel est zéro-dimensionnel. On s'intéresse ici aux localisations obtenues en inversant un seul élément.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau zéro-dimensionnel et $a \in \mathbf{A}$.

1. L'anneau $\mathbf{A}[1/a]$ s'identifie à un facteur de $\mathbf{A}$. Plus précisément si e est l'idempotent tel que $\langle e \rangle = \langle a^d \rangle$ pour d assez grand on a un unique isomorphisme $\mathbf{A}[1/e] \to \mathbf{A}[1/a]$ qui factorise les homomorphismes $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/e]$ et $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/a]$.
2. Si $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie sur un corps discret $\mathbf{k}$, il en est de même pour $\mathbf{A}[1/a]$.
3. Dans le cas où $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x] = \mathbf{k}[X]/\langle f \rangle$,
   a. l'algèbre $\mathbf{A}[1/g(x)]$ est isomorphe à une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[X]/\langle h \rangle$ où h est un diviseur de f (le polynôme h est « la partie de f étrangère à g », avec possiblement $h = 1$),
   b. l'algèbre $\mathbf{A}[1/f'(x)]$ est isomorphe à une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[X]/\langle f_1 \rangle$ où f_1 est un polynôme séparable (f_1 est « la partie sans carré » de f, c'est-à-dire la partie étrangère à f').

Exercice 23. Si M est un $\mathbf{A}$-module de présentation finie, pour tout $k \geqslant 1$ on a l'inclusion $\boxed{\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(M)\, \mathcal{F}_k(M) \subseteq \mathcal{F}_{k-1}(M)}$.

Exercice 24. *(Anneau réduit dont l'anneau total des fractions est zéro-dimensionnel)* (D'après *Quentel Y.,* Sur la compacité du spectre minimal d'un anneau. *Bull. Soc. Math. France,* **99**, *(1971), 265–272.* Voir aussi le problème XIII-1)
Soit $\mathbf{A}$ un anneau réduit et $\mathbf{K}$ son anneau total de fractions. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathbf{K}$ est zéro-dimensionnel.
2. Pour tout $x \in \mathbf{A}$ il existe un $y \in \mathbf{A}$ tel que $xy = 0$ et $\langle x, y\rangle$ contient un élément régulier.
3. Les deux conditions suivantes sont réalisées :
   a. tout idéal de type fini fidèle de $\mathbf{A}$ contient un élément régulier,
   b. pour tout $x \in \mathbf{A}$ il existe un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ tel que $x\mathfrak{a} = 0$ et $\langle x\rangle + \mathfrak{a}$ est fidèle.

Exercice 25. *(Forme réduite de Frobenius pour un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathbf{K}$ *corps discret non trivial)* Soit $\varphi : V \to V$ un endomorphisme d'un $\mathbf{K}$-espace vectoriel V de dimension n, et F la matrice de φ sur une base donnée $(e_1, \dots, e_n)$. On notera ν_φ et χ_φ le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de φ. On munit V d'une structure de $\mathbf{K}[X]$-module en définissant la loi externe suivante

$$\mathbf{K}[X] \times V \to V, \quad (P, v) \mapsto P \cdot_\varphi v = P(\varphi)(v).$$

En particulier $X \cdot_\varphi v = \varphi(v)$. On note V_φ le $\mathbf{K}[X]$-module ainsi obtenu. Les sous-modules de V_φ sont exactement les sous-$\mathbf{K}$-espaces vectoriels stables par φ.
1. Pour tout y non nul de V_φ, le sous-module $\mathbf{K}[X] \cdot_\varphi y$ est le plus petit sous-espace vectoriel φ-stable de V contenant y. On le notera aussi $\mathbf{K}[\varphi] \cdot y$.
Il admet une $\mathbf{K}$-base de la forme $\mathcal{B}_{y,\varphi} = \big(y, \varphi(y), \dots, \varphi^{k-1}(y)\big)$, où

$$\varphi^k(y) = a_0 y + \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} a_j \varphi^j(y)$$

est la première relation de dépendance $\mathbf{K}$-linéaire qui se présente entre y et ses transformés successifs par φ. On appelle *polynôme minimal de* y *pour* φ et l'on note $\nu_{y,\varphi}(X)$ le polynôme $X^k - \sum_{j=0}^{k-1} a_j X^j$. On a alors les résultats suivants.

— En tant que $\mathbf{K}[X]$-module, le sous-espace $\mathbf{K}[\varphi]\cdot y$ est isomorphe à $\mathbf{K}[X]/\langle\nu_{y,\varphi}\rangle$. L'isomorphisme est donné par

$$\mathbf{K}[X]/\langle\nu_{y,\varphi}\rangle \longrightarrow \mathbf{K}[\varphi] \cdot y, \quad \overline{g} \longmapsto g \cdot_\varphi y.$$

En particulier, en notant $x = \overline{X}$, l'image de $(1, x, \dots, x^{k-1})$ ($\mathbf{K}$-base de $\mathbf{K}[X]/\langle\nu_{y,\varphi}\rangle$), est la base $\mathcal{B}_{y,\varphi}$.

— La matrice de la restriction de φ à $\mathbf{K}[\varphi] \cdot y$ sur la base $\mathcal{B}_{y,\varphi}$ est la matrice compagne du polynôme $\nu_{y,\varphi}(X)$:

$$C_{\nu_{y,\varphi}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & a_{k-2} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & a_{k-1} \end{bmatrix}.$$

2. On note encore φ l'extension de φ en un endomorphisme de $V[X] = \mathbf{K}[X] \otimes_{\mathbf{K}} V$. On note $\theta_\varphi : V[X] \to V_\varphi$ l'unique application $\mathbf{K}[X]$-linéaire qui donne l'identité sur V. L'exercice 3 montre que la suite ci-dessous est exacte :

$$V[X] \xrightarrow{X\mathrm{Id}_V - \varphi} V[X] \xrightarrow{\theta_\varphi} V \longrightarrow 0.$$

Autrement dit V_φ est un $\mathbf{K}[X]$-module de présentation finie et $X\mathrm{I}_n - F$ est une matrice de présentation de V_φ pour le système générateur $(e_1, \dots, e_n)$.
Comme $\mathbf{K}[X]$ est un anneau principal (à divisibilité explicite donc fortement discret) on peut appliquer le théorème de structure donné par la proposition 7.3.

— Expliciter ce que ce théorème de structure donne en terme de décomposition de V en somme directe de sous-espaces vectoriels stables (par φ).
— Donner une forme réduite de la matrice de φ qui résulte du théorème de structure. Comparer les facteurs invariants du $\mathbf{K}[X]$-module V_φ avec le polynôme caractéristique χ_φ et le polynôme minimal ν_φ de φ.
— Montrer que les facteurs invariants du $\mathbf{K}[X]$-module V_φ caractérisent la classe de similitude de φ comme endomorphisme de V. On les appelle les *invariants de similitude de l'endomorphisme* φ.
— Les invariants de similitude peuvent être calculés dans le sous-corps $\mathbf{K}_1$ engendré par les coefficient de F. Ils ne changent pas si l'on étend les scalaires à n'importe quel surcorps de $\mathbf{K}$.
— Expliquer ce que donne le lemme des noyaux II-4.8 lorsque l'on a une décomposition du polynôme minimal ν_φ de φ en un produits de polynômes deux à deux étrangers. Par exemple on peut considérer une base de factorisation partielle obtenue à partir la famille des invariants de similitude.

Exercice 26. *(Endomorphismes semi-simples) Suite de l'exercice 25.*
Un endomorphisme φ de $V \simeq \mathbf{K}^n$ est dit *semi-simple* si tout sous-espace vectoriel stable est supplémentaire d'un sous-espace stable.

1. Si $f = g^2 h \in \mathbf{K}[X]$, de degré r, l'endomorphisme
$$\varphi : V \longrightarrow V,\ \overline{g} \mapsto x\overline{g}, \quad \text{où } V = \mathbf{K}[X]/\langle f \rangle \text{ et } x = \overline{X},$$
qui est représenté sur la base $(1, x, \dots, x^{r-1})$ par la matrice compagne de f, n'est pas semi simple.
2. Si le polynôme caractéristique χ_φ se décompose sous forme $\prod_i h_i^{m_i}$ avec les h_i irréductibles unitaires deux à deux distincts, l'endomorphisme φ est semi-simple si, et seulement si, son polynôme minimal est sans facteur carré, c'est-à-dire égal à $\prod_i h_i$.
3. Supposons $\mathbf{K}$ algébriquement clos. Un endomorphisme est semi-simple si, et seulement si, il est diagonalisable.
4. Soit S un sous-espace stable de V. On peut certifier de manière algorithmique une des deux alternatives de la disjonction suivante :
   — le sous-espace S admet un supplémentaire stable T, OU
   — le polynôme minimal ν_φ admet un facteur carré.

Dans le premier cas, on a décomposé ν_φ en un produit $\prod_{j=1}^m f_j$ de polynômes deux à deux étrangers, et l'on obtient, en posant

$$K_j = \mathrm{Ker}\left(f_j(\varphi)\right) \text{ et } \mathbf{K}_j = \mathbf{K}[X]/\langle f_j\rangle\,,$$

— $S = \bigoplus_{j=1}^m S_j$, où $S_j = S \cap K_j$,
— $T = \bigoplus_{j=1}^m T_j$, où $T_j = T \cap K_j$,
— S_j et T_j sont des $\mathbf{K}_j$-modules libres de rang fini,
— pour chaque j, $K_j = S_j \oplus T_j$.

5. Si sur le corps $\mathbf{K}$ on sait décomposer le polynôme minimal de φ en produit de polynômes séparables, on sait tester si φ est semi-simple, et expliciter ce caractère semi-simple lorsque la réponse est positive.

Problème 1. *(Un exemple de système zéro-dimensionnel)*
Soient $\mathbf{k}$ un anneau et a, b, $c \in \mathbb{N}^*$ avec $a \leqslant b \leqslant c$ et au moins une inégalité stricte. On définit trois polynômes $f_i \in \mathbf{k}[X,Y,Z]$:

$$f_1 = X^c + Y^b + Z^a, \quad f_2 = X^a + Y^c + Z^b, \quad f_3 = X^b + Y^a + Z^c.$$

Il s'agit d'étudier le système défini par ces trois polynômes. On note $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x,y,z]$ la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[X,Y,Z]/\langle f_1, f_2, f_3\rangle$.
1. Pour un anneau quelconque $\mathbf{k}$, $\mathbf{A}$ est-elle libre finie sur $\mathbf{k}$? Si oui, calculer une base et donner la dimension.
2. Étudier de manière détaillée le système pour $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$ et $(a,b,c) = (2,2,3)$: déterminer tous les zéros du système dans une certaine extension finie de $\mathbb{Q}$ (à préciser), leur nombre et leurs multiplicités.
3. L'algèbre localisée $\mathbf{A}_{1+\langle x,y,z\rangle}$ est-elle libre sur $\mathbf{k}$? Si oui, donner une base.

Problème 2. *(L'idéal résultant générique)*
Soient d, r deux entiers fixés avec $d \geqslant 1$. On étudie dans cet exercice l'idéal résultant générique $\mathfrak{b} = \mathfrak{Res}(f, g_1, \ldots, g_r)$ où f est unitaire de degré d, et g_1, …, g_r sont de degré $d-1$, les coefficients de ces polynômes étant des indéterminées sur $\mathbb{Z}$. L'anneau de base est donc $\mathbf{k} = \mathbb{Z}[(a_i)_{i\in[\![1..d]\!]}, (b_{ji})_{j\in[\![1..r]\!], i\in[\![1..d]\!]}]$ avec

$$f = X^d + \textstyle\sum_{i=1}^d a_i X^{d-i} \quad \text{et} \quad g_j = \sum_{i=1}^d b_{ji} X^{d-i}.$$

1. Mettre des poids sur les a_i et b_{ij} de façon à ce que $\mathfrak{b}$ soit un idéal homogène.
2. Si S est la matrice de Sylvester généralisée de $(f, g_1, \ldots, g_r)$, préciser le poids des coefficients de S et ceux de ses mineurs d'ordre d.
3. A l'aide d'un système de Calcul Formel, étudier le nombre minimal de générateurs de $\mathfrak{b}$. On pourra remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$, introduire l'idéal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{k}$ engendré par toutes les indéterminées et considérer $E = \mathfrak{b}/\mathfrak{m}\mathfrak{b}$ qui est un $\mathbf{k}/\mathfrak{m} = \mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie.

Problème 3. *(Nakayama homogène et suites régulières)*
1. (Suite régulière et indépendance algébrique) Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une suite régulière d'un anneau $\mathbf{A}$ et $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$ un sous-anneau tel que $\mathbf{k} \cap \langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \{0\}$. Montrer que a_1, …, a_n sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}$.
2. (Nakayama homogène) Soient $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \ldots$ un anneau gradué et $E = E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots$ un $\mathbf{A}$-module gradué.
On note $\mathbf{A}_+$ l'idéal $\mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \ldots$, si bien que $\mathbf{A}/\mathbf{A}_+ \simeq \mathbf{A}_0$.
a. Si $\mathbf{A}_+ E = E$, alors $E = 0$.

b. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments homogènes de E. Si les e_i engendrent le $\mathbf{A}_0$-module $E/\mathbf{A}_+E$, alors ils engendrent le $\mathbf{A}$-module E.

Notez que l'on n'a pas supposé E de type fini.

3. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \oplus \mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \dots$ un anneau gradué et $h_1, \dots, h_d$ des éléments homogènes de l'idéal $\mathbf{B}_+$. On note $\mathfrak{b} = \langle h_1, \dots, h_d\rangle$ et $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0[h_1, \dots, h_d]$. On a donc $\mathbf{B}_0 \cap \mathfrak{b} = \{0\}$, et $\mathbf{A}$ est un sous-anneau gradué de $\mathbf{B}$. Enfin, soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments homogènes de $\mathbf{B}$ qui engendrent le $\mathbf{B}_0$-module $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$.

a. Vérifier que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$ et que $\mathfrak{b} = \mathbf{A}_+\mathbf{B}$ puis montrer que les e_i forment un système générateur du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$.

b. On suppose que $(h_1, \dots, h_d)$ est une suite régulière et que les e_i forment une base du $\mathbf{B}_0$-module $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$. Montrer que $h_1, \dots, h_d$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{B}_0$ et que les e_i forment une base du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$.

Bilan : Soit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \oplus \mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \dots$ un anneau gradué et $(h_1, \dots, h_d)$ une suite régulière homogène de l'idéal $\mathbf{B}_+$. Si $\mathbf{B}/\langle h_1, \dots, h_d\rangle$ est un $\mathbf{B}_0$-module libre, alors $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{B}_0[h_1, \dots, h_d]$-module libre et $\mathbf{B}_0[h_1, \dots, h_d]$ est un anneau de polynômes en $(h_1, \dots, h_d)$.

4. En guise de réciproque. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 \oplus \mathbf{B}_1 \oplus \mathbf{B}_2 \oplus \dots$ un anneau gradué et $h_1, \dots, h_d$ des éléments homogènes de l'idéal $\mathbf{B}_+$, algébriquement indépendants sur $\mathbf{B}_0$. Si $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{B}_0[h_1, \dots, h_d]$-module libre, alors la suite $(h_1, \dots, h_d)$ est régulière.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. Il suffit d'appliquer la proposition 4.2. Directement : on considère un projecteur $\pi : N \to N$ ayant pour image M. Si X est un système générateur de N, $\pi(X)$ est un système générateur de M. Si N est de présentation finie, le module de syzygies pour $\pi(X)$ est obtenu en prenant les syzygies pour X dans N et les syzygies $\pi(x) = x$ pour chaque élément x de X.

Exercice 3. On note pour commencer que $\theta_A \circ (X\mathrm{I}_n - A) = 0$ et que θ_A est l'identité sur $\mathbf{A}^n$.

1. Montrons que $\mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) \cap \mathbf{A}^n = 0$. Soit $x \in \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) \cap \mathbf{A}^n$, les calculs préliminaires donnent $\theta_A(x) = x$ et $\theta_A(x) = 0$. Montrons que $\mathbf{A}[X]^n = \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) + \mathbf{A}^n$. Il suffit de voir que $X^k e_i \in \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) + \mathbf{A}^n$ pour $k \geqslant 0$ et $i \in [\![1..n]\!]$. Si $k = 0$ c'est clair, pour $k > 0$ on écrit :

$$X^k\mathrm{I}_n - A^k = (X\mathrm{I}_n - A) \textstyle\sum_{j+\ell=k-1} X^j A^\ell.$$

En appliquant cette égalité à e_i, on obtient $X^k e_i - A^k e_i \in \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A)$, donc $X^k e_i \in \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) + A^k e_i \subseteq \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A) + \mathbf{A}^n$.

2. Soit $y \in \mathrm{Ker}\,\theta_A$. On écrit $y = z + w$ avec $z \in \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A)$ et $w \in \mathbf{A}^n$.
Donc $0 = \theta_A(y) = \theta_A(z) + \theta_A(w) = 0 + w$ et $y = z \in \mathrm{Im}(X\mathrm{I}_n - A)$.

Exercice 7. *1* et *2.* laissés à la lectrice.

3. Par construction, ε annule d_2 (i.e. annule a, b). On a donc les égalités

$$d_2 \begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & a_1 \\ -u_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_2\varepsilon \\ d_2k_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & a_1 \\ -u_1 & b_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ d_1 \end{bmatrix} = d_1 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Reste à voir que $1 \in \langle a_2, b_2\rangle$. En inversant la matrice 2×2 dans $(\star)$ (de déterminant 1), on voit que l'idéal $\langle a_2, b_2\rangle$ contient ε et k_{12}, donc il contient $1 = k_{12}k_{21} - \varepsilon$.

4. Par récurrence sur n, $n=2$ étant la question précédente. Supposons $n \geqslant 3$. Par récurrence, il existe $b_1, \ldots, b_{n-1}$ comaximaux et d tels que
$$(a_1, \ldots, a_{n-1}) = d(b_1, \ldots, b_{n-1}), \text{ donc } \langle \underline{a} \rangle = \langle d, a_n \rangle .$$
Le point *3* donne u, v comaximaux et δ tels que $(d, a_n) = \delta(u, v)$.
Alors $(a_1, \ldots, a_n) = (db_1, \ldots, db_{n-1}, \delta v) = \delta(ub_1, \ldots, ub_{n-1}, v)$.
Et $\langle ub_1, \ldots, ub_{n-1}, v \rangle = \langle u, v \rangle = \langle 1 \rangle$.
5. D'abord pour $n=2$ avec (a,b). Il y a d avec $(a,b) = d(a',b')$ et $1 = ua' + vb'$. On pose $m = da'b' = ab' = ba' \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$; on a $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle m \rangle$ car si $x \in \langle a \rangle \cap \langle b \rangle$, on écrit $x = x(ua' + vb') \in \langle ba' \rangle + \langle ab' \rangle = \langle m \rangle$. La $\mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$-équivalence est fournie par l'égalité ci-dessous :
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ vb' & ua' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & -b' \\ v & u \end{bmatrix}.$$
Pour $n \geqslant 3$. En utilisant le cas $n=2$ pour les positions $(1,2)$, $(1,3)$, …, $(1,n)$, on obtient $\mathrm{Diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \sim \mathrm{Diag}(a'_1, a'_2, \ldots, a'_n)$ avec $a'_1 \mid a'_i$ pour $i \geqslant 2$.
Par récurrence, $\mathrm{Diag}(a'_2, \ldots, a'_n) \sim \mathrm{Diag}(b_2, \ldots, b_n)$ avec $b_2 \mid b_3 \cdots \mid b_n$. On vérifie alors que $a'_1 \mid b_2$ et l'on pose $b_1 = a'_1$. Le lecteur scrupuleux vérifiera la propriété concernant les fonctions symétriques élémentaires.

Exercice 8. *(Anneaux de Smith, ou elementary divisor rings)*
Calcul préliminaire avec $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ et B de la forme :
$$B = \begin{bmatrix} p' & q' \\ * & * \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} p & * \\ q & * \end{bmatrix}.$$
Le coefficient b_{11} de B est égal à $b_{11} = p'(pa+qb) + q'qc$.
2 $\Rightarrow$ *3.* La matrice A est équivalente à une matrice diagonale $\mathrm{Diag}(g,h)$, ce qui donne (p,q) et (p',q') comaximaux avec $g = p'(pa+qb)+q'qc$ (calcul préliminaire). Et l'on a $\langle a,b,c \rangle = \langle g,h \rangle$. Comme $\mathbf{A}$ est de Bézout strict, on peut supposer $g \mid h$ et puisque $1 \in \langle a,b,c \rangle$, g est inversible et donc 1 s'écrit comme voulu.
3 $\Rightarrow$ *4.* Attention, ici g est imposé. Mais d'après la question *4* de l'exercice 7, on peut écrire $(a,b,c) = g\,(a',b',c')$ avec (a',b',c') comaximaux. On applique le point *3* à (a',b',c') et on multiplie le résultat obtenu par g.
4 $\Rightarrow$ *2.* Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ triangulaire, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$. Avec les paramètres du point *4*, on construit (calcul préliminaire) une matrice B équivalente à A de coefficient $b_{11} = g$. Comme g divise tous les coefficients de B, on a $B \overset{\mathbb{E}_2(\mathbf{A})}{\sim} \mathrm{Diag}(g,h)$.
1 $\Leftrightarrow$ *2.* Laissé à la lectrice (qui pourra consulter l'article de Kaplansky).

Exercice 9. *1.* Soit $s = y + z$; alors $\mathbf{k}[s]$ est un anneau de polynômes en s, et y, z sont entiers sur $\mathbf{k}[s]$, car zéros de $(T-y)(T-z) = T(T-s) \in \mathbf{k}[s][T]$. On vérifie facilement que $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{k}[s]$ avec $(1,y)$ pour base. Pour u, $v \in \mathbf{k}[s]$, la norme sur $\mathbf{k}[s]$ de $u+vy$ est :
$$\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}[s]}(u+vy) = (u+vy)(u+vz) = u^2 + suv = u(u+sv).$$
L'élément $u+vy$ est inversible dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, $u(u+sv)$ est inversible dans $\mathbf{k}[s]$. Comme $\mathbf{k}$ est réduit, $(\mathbf{k}[s])^\times = \mathbf{k}^\times$; donc $u \in \mathbf{k}^\times$ et $v = 0$.
2. On a $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\alpha,\beta,y] = \mathbb{Z}[a,b,Y]/\langle (ab-1)Y \rangle$ avec $y(\alpha\beta - 1) = 0$. Soit t une indéterminée sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbf{k} = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$. Considérons la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[y,z]$ avec la seule relation $yz = 0$. On a un morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{k}[y,z]$ qui réalise

$$\alpha \mapsto t(z+1),\ \beta \mapsto t^{-1},\ y \mapsto y,$$

et l'on vérifie que c'est une injection.
Alors un élément $w \in \mathbf{A}^\times$ est aussi dans $\mathbf{k}[y,z]^\times$, et comme $\mathbf{k}$ est réduit, $w \in \mathbf{k}^\times$. Enfin, les inversibles de $\mathbf{k} = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$ sont les $\pm t^k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $w = \pm 1$.

Exercice 10. *1.* On sait que $\langle x^n\rangle = \langle e\rangle$. On cherche $y \in \mathbf{A}^\times$ tel que $y \equiv x \bmod \mathfrak{a}$ sur les composantes $\mathbf{A}_e$ et $\mathbf{A}_{1-e}$; d'abord, on a $x^n(1-ax) = 0$ et x inversible modulo $\mathfrak{a}$, donc $ax \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$ puis $e \equiv 1 \bmod \mathfrak{a}$, i.e. $1-e \in \mathfrak{a}$.
Dans la composante $\mathbf{A}_e$, x est inversible, donc on peut prendre $y = x$. Dans la composante $\mathbf{A}_{1-e}$, $1 \in \mathfrak{a}$, donc on peut prendre $y = 1$. Globalement, on propose donc $y = ex + 1 - e$ qui est bien inversible (d'inverse $ea^n x^{n-1} + 1 - e$) et qui vérifie $y \equiv x \bmod \mathfrak{a}$. Remarque : $y = ex + (1-e)u$ avec $u \in \mathbf{A}^\times$ convient aussi.
2. Soit x inversible modulo $\mathfrak{a}$ donc $1 - ax \in \mathfrak{a}$ pour un certain $a \in \mathbf{A}$.
Alors, x est inversible modulo l'idéal principal $\langle 1-ax\rangle$, donc il existe $y \in \mathbf{A}^\times$ tel que $y \equiv x \bmod \langle 1-ax\rangle$, a fortiori $y \equiv x \bmod \mathfrak{a}$.
3. On écrit $y = bx$, $x = ay$ donc $(1-ab)x = 0$; b est inversible modulo $\langle 1-ab\rangle$ donc il existe $u \in \mathbf{A}^\times$ tel que $u \equiv b \bmod \langle 1-ab\rangle$ d'où $ux = bx = y$.
4. Soit x inversible modulo $\mathfrak{a}$. Alors $\pi(x)$ est inversible modulo $\mathfrak{a}'$, d'où $y \in \mathbf{A}$ tel que $\pi(y)$ soit inversible dans $\mathbf{A}'$ et $\pi(y) \equiv \pi(x) \bmod \mathfrak{a}'$. Alors, y est inversible dans $\mathbf{A}$ et $y - x \in \mathfrak{a} + \operatorname{Rad}\mathbf{A}$, i.e. $y = x + a + z$ avec $a \in \mathfrak{a}$ et $z \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$. Ainsi, l'élément $y - z$ est inversible dans $\mathbf{A}$, et $y - z \equiv x \bmod \mathfrak{a}$.

Exercice 11. Appelons $\mathbf{A}_1$ le corps de fractions de $\mathbf{A}$ et mettons un indice 1 pour indiquer que nous faisons une extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}_1$. Ainsi M_1 est le $\mathbf{A}_1$-espace vectoriel correspondant à la suite exacte

$$\mathbf{A}_1^n \xrightarrow{E_1} \mathbf{A}_1^\ell \xrightarrow{\pi_1} M_1 \to 0$$

et le sous-module $\mathrm{T}(M)$ de M est le noyau de l'application $\mathbf{A}$-linéaire naturelle de M vers M_1, i.e. le module $\pi(\mathbf{A}^\ell \cap \operatorname{Ker}\pi_1)$, ou encore le module $\pi(\mathbf{A}^\ell \cap \operatorname{Im} E_1)$ (en regardant $\mathbf{A}^\ell$ comme un sous-module de $\mathbf{A}_1^\ell$).

La suite exacte $\mathbf{A}^m \xrightarrow{F} \mathbf{A}^\ell \xrightarrow{{}^tE} \mathbf{A}^n$ donne par localisation la suite exacte

$$\mathbf{A}_1^m \xrightarrow{F_1} \mathbf{A}_1^\ell \xrightarrow{{}^tE_1} \mathbf{A}_1^n$$

et puisque $\mathbf{A}_1$ est un corps discret cela donne par dualité la suite exacte

$$\mathbf{A}_1^n \xrightarrow{E_1} \mathbf{A}_1^\ell \xrightarrow{{}^tF_1} \mathbf{A}_1^m.$$

Ainsi $\operatorname{Im} E_1 = \operatorname{Ker}{}^tF_1$, donc $\mathbf{A}^\ell \cap \operatorname{Im} E_1 = \mathbf{A}^\ell \cap \operatorname{Ker}{}^tF_1$. Enfin on a l'égalité $\mathbf{A}^\ell \cap \operatorname{Ker}{}^tF_1 = \operatorname{Ker}{}^tF$ car le morphisme naturel $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_1$ est injectif.
Conclusion : $\mathrm{T}(M)$ est égal à $\pi(\operatorname{Ker}{}^tF)$, isomorphe à $\operatorname{Ker}{}^tF/\operatorname{Im} E$, donc de présentation finie (parce que $\mathbf{A}$ est cohérent).
Si $\mathbf{A}$ est cohérent quasi intègre l'anneau total des fractions $\mathbf{A}_1 = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit, et tous les arguments donnés dans le cas intègre fonctionnent pareillement.

Exercice 12. Tous les résultats peuvent être obtenus à partir du cas des corps discrets, cas pour lequel les algorithmes sont classiques, en utilisant la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux zéro-dimensionnels réduits. On va préciser ici un peu cette affirmation de caractère très général.
Faisons deux remarques préliminaires pour un anneau quelconque $\mathbf{A}$.
Premièrement, soit e idempotent et E une matrice élémentaire modulo $1-e$.

Si l'on relève E en une matrice $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, alors la matrice $(1-e)\mathrm{I}_n + eF \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ est élémentaire, elle agit comme E dans la composante $\mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$, et elle ne fait rien dans la composante $\mathbf{A}/\langle e\rangle$. Ceci permet de comprendre comment on peut récupérer les résultats souhaités sur $\mathbf{A}$ en utilisant des résultats analogues modulo les idempotents $1-e_i$ lorsque l'on dispose d'un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_1, \ldots, e_k)$ (fourni par l'algorithme que l'on construit).
Deuxièmement, si $g \in \mathbf{A}[X]$ est unitaire de degré $m \geqslant 0$, pour tout $f \in \mathbf{A}[X]$, on peut diviser f par g : $f = gq + r$ avec r de degré formel $m-1$.
1. Soit e l'idempotent tel que $\langle e\rangle = \langle b\rangle$. Il suffit de résoudre la question modulo e et $1-e$. Dans la branche $e=1$, b est inversible, $\langle a, b\rangle = \langle 1\rangle$ et le problème est résolu (pivot de Gauss). Dans la branche $e=0$, b est nul et le problème est résolu. Si $e = bx$, on trouve $d = e + (1-e)a$ et

$$M = \mathrm{E}_{21}(-be)\mathrm{E}_{12}\big(ex(1-a)\big) = \begin{bmatrix} 1 & ex(1-a) \\ -eb & ae + (1-e) \end{bmatrix}.$$

2. On part de deux polynômes f et g. On va construire un polynôme h et une matrice $M \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A}[X])$ telles que $M \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}$. A fortiori $\langle f, g\rangle = \langle h\rangle$.
On procède par récurrence sur m, degré formel de g, de coefficient formellement dominant b. Si l'on amorce la récurrence à $m=-1$, $g=0$ et $\mathrm{I}_2 \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ 0 \end{bmatrix}$.
On peut traiter $m=0$, avec $g \in \mathbf{A}$ et utiliser le point *1* ($\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]$, $a = f$, $b = g$). Mais il est inutile de traiter ce cas à part (et donc on n'utilise plus le point *1*). En effet, si e l'idempotent tel que $\langle e\rangle = \langle b\rangle$, il suffit de résoudre la question modulo e et $1-e$ et ce qui suit est valide pour tout $m \geqslant 0$.
Dans la branche $e=1$, b est inversible, et puisque $m \geqslant 0$, on peut réaliser une division euclidienne classique de f par g : $f = qg - r$ avec le degré formel de r égal à $m-1$. Ce qui donne une matrice $N \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A}[X])$ telle que $N \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ r \end{bmatrix}$, à savoir $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & q \end{bmatrix}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence.
Dans la branche $e=0$, g est de degré formel $m-1$ et l'hypothèse de récurrence s'applique.
Dans la suite, on utilise le point *2* en disant que l'on passe de ${}^{\mathrm{t}}[\,f\ g\,]$ à ${}^{\mathrm{t}}[\,h\ 0\,]$ au moyen de « manipulations de Bézout ».
3. En s'appuyant sur le résultat du point *2* on s'inspire de la démonstration de la proposition 7.3 (un anneau principal est un anneau de Smith). Si l'on était sur un corps discret non trivial, l'algorithme terminerait en un nombre fini d'étapes qui peut être borné directement en fonction de (D, m, n), où D est le degré maximum des coefficients de la matrice $M \in \mathbf{A}[X]^{m\times n}$ que l'on désire réduire à la forme de Smith. Il s'ensuit que lorsque $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit le nombre de scindages produits par les calculs de pgcd (comme au point *2*) est lui aussi borné en fonction de (D, m, n), où D est maintenant le degré formel maximum des coefficients de la matrice. Ceci montre que l'algorithme complet, compte tenu de la remarque préliminaire, termine lui aussi en un nombre d'étapes borné en fonction de (D, m, n).
Remarque. Les algorithmes ne demandent pas que $\mathbf{A}$ soit discret. ∎

Exercice 15. Il est clair que $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$. Soit $\mathcal{E} \subseteq \mathbf{A}[\underline{X}]$ l'ensemble des polynômes f congrus modulo $\mathfrak{a}$ à un polynôme homogène de degré 1.
On a $1 \in \mathcal{E}$ et $f \in \mathcal{E} \Rightarrow X_i f \in \mathcal{E}$ car si $f \equiv \sum_j \alpha_j X_j \bmod \mathfrak{a}$, alors :

$$X_i f \equiv \textstyle\sum_j \alpha_j X_i X_j \equiv \sum_{j,k} \alpha_j c_{ij}^k X_k \bmod \mathfrak{a}.$$

Donc $\mathcal{E} = \mathbf{A}[\underline{X}]$. Soit $f \in \operatorname{Ker}\varphi$; on écrit $f \equiv \sum_k \alpha_k X_k \bmod \mathfrak{a}$.
Alors $\varphi(f) = 0 = \sum_k \alpha_k e_k$, donc $\alpha_k = 0$, puis $f \in \mathfrak{a}$.

Exercice 16.
2. Si $\mathfrak{a}$ est de type fini une matrice de présentation du module $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est une matrice ligne L ayant pour coefficients des générateurs de l'idéal. On en déduit que $\mathcal{D}_1(L) = \mathfrak{a}$. Donc $\mathcal{F}_{-1}(M) = 0 \subseteq \mathcal{F}_0(M) = \mathfrak{a} \subseteq \mathcal{F}_1(M) = \langle 1\rangle$. Le résultat se généralise à un idéal $\mathfrak{a}$ arbitraire.
3. Résulte de *2* et du fait 9.7.
4 et *5.* Dans le cas général en appliquant *2* et *3* on trouve :

$$\mathcal{F}_0(M) = \textstyle\prod_{i=1}^n \mathfrak{a}_i,\ \mathcal{F}_{n-1}(M) = \sum_{i=1}^n \mathfrak{a}_i,$$

et pour les idéaux intermédiaires les « fonctions symétriques »

$$\mathcal{F}_{n-k}(M) = \textstyle\sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} \prod_{\ell=1}^k \mathfrak{a}_{i_\ell}.$$

Par ailleurs, $\operatorname{Ann}(M) = \mathfrak{a}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_n$.
Lorsque $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n$ le résultat est un peu plus simple

$$\mathcal{F}_{n-1}(M) = \mathfrak{a}_n,\ \mathcal{F}_{n-2}(M) = \mathfrak{a}_n\,\mathfrak{a}_{n-1},\ \ldots\ \mathcal{F}_{n-k}(M) = \mathfrak{a}_n \cdots \mathfrak{a}_{n-k+1}.$$

On retrouve alors pour le point *1* le résultat du calcul direct donné par les idéaux déterminantiels d'une matrice en forme de Smith.

Exercice 18. Montrons le point *1* (après, on peut appliquer le fait 9.8).
Prenons $M = \langle g_1, \ldots, g_q\rangle$. On considère une syzygie $\sum_i \alpha_i g_i =_N 0$. Le but est de montrer que le vecteur colonne $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$ est une syzygie dans M.
Premier cas, M est de présentation finie.
La colonne V, rajoutée à une matrice de présentation F de M pour $(g_1, \ldots, g_q)$ ne change pas les idéaux déterminantiels de cette matrice, donc V est une combinaison linéaire des colonnes de F.
Deuxième cas, M est de type fini.
Puisque $\mathcal{D}_1(V) \subseteq \mathcal{F}_{q-1}(M)$, il existe une matrice F_1 de syzygies pour $(g_1, \ldots, g_q)$ dans M avec $\mathcal{D}_1(V) \subseteq \mathcal{D}_1(F_1)$. Puisque $\mathcal{D}_2(V|F_1) \subseteq \mathcal{F}_{q-2}(M)$, il existe une matrice F_2 de syzygies pour $(g_1, \ldots, g_q)$ dans M avec $\mathcal{D}_2(V|F_1) \subseteq \mathcal{D}_2(F_1|F_2)$, mais aussi bien sûr $\mathcal{D}_1(V|F_1) \subseteq \mathcal{D}_1(F_1|F_2)$. Et ainsi de suite jusqu'à : il existe une matrice $F = [\,F_1 \mid \cdots \mid F_q\,]$ de syzygies pour $(g_1, \ldots, g_q)$ dans M telle que les idéaux déterminantiels de $[V|F]$ soient contenus dans ceux de F. Donc V est une combinaison linéaire des colonnes de F.

Exercice 19. Si un idéal de Kaplansky est égal à 1, cela implique que le module est de type fini, car le module est de type fini pour des $\mathbf{A}[1/a_i]$ avec des a_i comaximaux.
Morale : les idéaux de Kaplansky sont un peu plus généraux, mais apparemment sans utilité dans le cas où le module n'est pas de type fini. Notons quand même que les idéaux de Kaplansky présentent l'avantage sur les idéaux de Fitting de permettre de caractériser les modules de type fini.
Pour le deuxième point, voici ce qui se passe.
Si a est un générateur typique de $\mathcal{K}_r(M)$ et si M est engendré par $(g_1, ..., g_q)$, on

sait qu'il y a $(h_1, ..., h_r)$ dans M tels que aM est contenu dans $\langle h_1, ..., h_r\rangle$.
Une matrice de syzygies pour le système générateur $(g_1, ..., g_q, h_1, ..., h_r)$ est alors de la forme suivante $\begin{bmatrix} a\mathrm{I}_q \\ B \end{bmatrix}$ avec B de format $r \times q$. On a simplement écrit que l'on peut exprimer ag_j en fonction des h_i. Donc dans l'idéal de Fitting d'ordre r du module il y a un générateur typique qui est le déterminant de $a\mathrm{I}_q$ c'est-à-dire a^q. Ainsi, tout générateur typique du Kaplansky est dans le nilradical du Fitting correspondant. Notez que l'exposant qui intervient ici est simplement le nombre de générateurs du module.
Si maintenant a est un générateur typique de $\mathcal{F}_r(M)$ on obtient a comme mineur d'ordre $q - r$ pour une matrice de syzygies entre q générateurs $(g_1, ..., g_q)$. Quitte à renuméroter les générateurs, cette matrice peut s'écrire $\begin{bmatrix} N \\ D \end{bmatrix}$ avec D carrée d'ordre $q - r$, N de type $r \times (q - r)$, et $\det D = a$.
Par combinaisons linéaires des colonnes (précisément en faisant le produit à droite par la matrice cotransposée de D) on obtient d'autres syzygies pour les mêmes générateurs sous la forme $\begin{bmatrix} N' \\ a\mathrm{I}_{q-r} \end{bmatrix}$ et cela implique exactement que les $q - r$ derniers générateurs multipliés par a tombent dans le module engendré par les r premiers. Bref tout générateur typique du Fitting est aussi un générateur typique du Kaplansky correspondant.

Exercice 20.
2. On a $\mathfrak{f} \cap \mathbf{A} = \langle a, b, c\rangle$ (si $x \in \mathbf{A}$ vérifie $x \in \left\langle X^d, a, b, c\right\rangle_{\mathbf{A}[X]}$, faire $X := 0$), et aussi $\mathfrak{b} = \langle a, b, c\rangle^d$. L'idéal $\mathfrak{a}$ est le contenu en T du polynôme $(a + bT + cT^2)^d$ tandis que $\mathfrak{a}'$ est le contenu en $\underline{T}$ du polynôme $(aT_1 + bT_2 + cT_3)^d$. Par exemple pour $d = 2$:

$$\mathfrak{a} = \left\langle a^2, ab^2, 2ab, 2ac + b^2, b^3, b^2c, 2bc, c^2\right\rangle, \quad \mathfrak{a}' = \left\langle a^2, 2ab, 2ac, b^2, 2bc, c^2\right\rangle.$$

On a $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{a}' \subsetneq \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{f} \cap \mathbf{A}$ et $\mathfrak{b} = (\mathfrak{f} \cap \mathbf{A})^d$. On voit aussi que $\mathfrak{a}$ n'est pas symétrique en a, b, c. Toujours pour $d = 2$, on a $(\mathfrak{f} \cap \mathbf{A})^4 \subsetneq \mathfrak{a}$ et $(\mathfrak{f} \cap \mathbf{A})^3 \not\subset \mathfrak{a}'$. Pour d quelconque, il semblerait que $(\mathfrak{f} \cap \mathbf{A})^{3d-2} \subseteq \mathfrak{a}$.

Exercice 21. Soit $\widetilde{\varphi} : \mathbf{k}[\underline{X}, \underline{Y}] \to \mathbf{k}[\underline{X}]$ le morphisme d'évaluation $Y_i \mapsto f_i$, l'anneau de base étant $\mathbf{k}[\underline{X}]$. On a :

$$\operatorname{Ker}\widetilde{\varphi} = \langle Y_1 - f_1, \ldots, Y_s - f_s\rangle = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle,$$

et puisque $\widetilde{\varphi}$ prolonge φ, $\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{k}[\underline{Y}] \cap \operatorname{Ker}\widetilde{\varphi}$, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 22. *1.* Puisque $\langle e\rangle = \left\langle a^d\right\rangle$ les filtres engendrés par e et a sont les mêmes.
2. $\mathbf{A}[1/a]$ est isomorphe à $\mathbf{A}/\langle 1 - e\rangle$ et $\langle 1 - e\rangle$ est un sous-$\mathbf{k}$-espace vectoriel de type fini de $\mathbf{A}$.
3a. On a dans $\mathbf{k}[X]$ l'égalité $f = hf_0$ avec f_0 divise une puissance de g et $\langle h, g\rangle = 1$. Donc dans $\mathbf{A}[1/g(x)]$, $h(x) = 0$ et dans $\mathbf{k}[X]/\langle h\rangle$, $g(x)$ et $f_0(x)$ sont inversibles. Ceci montre que $\mathbf{A}[1/g(x)]$ est isomorphe à $\mathbf{k}[X]/\langle h\rangle$.
3b. Mêmes notations avec $g = f'$ et $f_1 = h$. Une relation $f_1u + f'v = 1$ donne l'égalité $f_1(u + f_0'v) + f_1'(f_0v) = 1$, donc f_1 est bien séparable.
Notez que si f se factorise sous forme $\prod_k (x - a_k)^{m_k}$, alors $(x - a_k)$ divise f'

si, et seulement si, $m_k \geqslant 2$ (ceci indépendamment de la caractéristique du corps discret $\mathbf{k}$), donc f_1 est le produit des $(x - a_k)$ qui ne figurent pas au carré dans f.

Exercice 23. Soit $F \in \mathbb{M}_{q,n}$ une matrice de présentation de M pour un système générateur $(x_1, \ldots, x_q)$. Dire que $a \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(M)$, c'est dire que les ax_i sont nuls, c'est-à-dire que la matrice $a\,\mathrm{I}_q$ a pour colonnes des combinaisons linéaires des colonnes de F, donc que la matrice F peut être élargie avec la matrice $a\,\mathrm{I}_q$, sans changer ses idéaux déterminantiels.
Avec cette nouvelle matrice de présentation $F' = \left[\begin{array}{c|c} F & a\,\mathrm{I}_q \end{array}\right]$, il est clair qu'en multipliant un mineur d'ordre $r < q$ par a on obtient un mineur d'ordre $r + 1$. Donc avec $k = q - r$, on obtient l'inclusion $a\,\mathcal{F}_k(M) \subseteq \mathcal{F}_{k-1}(M)$.

Remarque. Puisque $\mathcal{F}_q(M) = \langle 1 \rangle$, ceci donne une nouvelle démonstration de l'inclusion : $\mathrm{Ann}(M)^q \subseteq \mathcal{F}_0(M)$. ∎

Exercice 24. On voit tout de suite que le point *1* signifie :

$$\forall x \in \mathbf{A},\ \exists b \in \mathbf{A},\ z \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A}) \text{ tels que } x(z - bx) = 0$$

Donc *1* ⇔ *2*. Pour l'implication directe, prendre $y = z - bx$.
2 ⇒ *3b*. Prendre $\mathfrak{a} = \langle y \rangle$.
1 ⇒ *3a*. Car dans $\mathbf{K}$ un idéal de type fini fidèle est égal à $\langle 1 \rangle$.
3 ⇒ *1*. Prendre pour z un élément régulier de $\langle x \rangle + \mathfrak{a}$.

Exercice 25. *(Forme réduite de Frobenius pour un endomorphisme d'un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie,* $\mathbf{K}$ *corps discret)*
1. Laissé au lecteur. Voir aussi page 91.
2. On obtient les résultats précis suivants.

- La réduction de Smith de la matrice $X\mathrm{I}_n - F$ est du type
  $$L\,(X\mathrm{I}_n - F)\,C = \mathrm{Diag}(1, \ldots, 1, f_1, \ldots, f_k),\ k \in \mathbb{N}^*,\ L,\ C \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K}[X])$$
  avec pour f_i des polynômes unitaires de degrés > 0 vérifiant $f_1 \mid \cdots \mid f_k$.
- Le $\mathbf{K}[X]$-module V_φ est somme directe de sous-espaces stables $\mathbf{K}[\varphi] \cdot v_i$ avec $\nu_{v_i,\varphi} = f_i$. Il est isomorphe à
  $$\mathbf{K}[X]/\langle f_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbf{K}[X]/\langle f_k \rangle\,.$$
- La matrice F est semblable à une matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les matrices compagnes des polynômes f_i. Cette forme réduite de la matrice de φ est appelée *forme de Frobenius*.
- Le polynôme f_k est égal au polynôme minimal ν_φ de φ. Le polynôme caractéristique χ_φ de φ est égal au produit des f_i.
- Si $\chi_\varphi = \nu_\varphi$, alors $V_\varphi = \mathbf{K}[\varphi] \cdot y$ pour un $y \in V$, et la forme réduite de Frobenius de F est la matrice compagne de χ_φ.
- Considérons une base de factorisation partielle $(g_1, \ldots, g_r)$ pour les invariants de similitude $(f_1, \ldots, f_k)$ de φ, avec $\nu_\varphi = \prod_{i=1}^r g_i^{\ell_i}$. Le lemme des noyaux donne la somme directe $V = \bigoplus_{i=1}^r \mathrm{Ker}\, g_i^{\ell_i}$, chaque sous-espace $V_i = \mathrm{Ker}\, g_i^{\ell_i}$ est stable et si l'on note φ_i la restriction de φ_i à V_i, on a $\nu_{\varphi_i} = g_i^{\ell_i}$, et les invariants de similitude de φ_i sont tous des puissances de g_i.

— La description précédente reste valable si l'on a une décomposition de ν_φ plus fine que celle donnée par la base de factorisation partielle des invariants de similitude.
— Si $\ell_i = 1$ pour un i, tous les invariants de similitude de φ_i sont égaux à g_i et V_i est un $\mathbf{K}[X]/\langle g_i\rangle$-module libre.
— Si $\mathbf{K}$ est algébriquement clos, on retrouve la forme réduite de Jordan classique et décomposant ν_φ en produit de facteurs du premier degré.

Exercice 26. *(Endomorphismes semi-simples)* Suite de l'exercice 25.
On traite seulement le point *4*.
On commence par calculer les invariants de similitude de φ et ceux de $\psi = \varphi|_S$. On calcule ensuite une base de factorisation partielle $(g_1, \dots, g_s)$ pour cette famille de polynômes. Comme ν_ψ divise ν_φ, tous les g_i divisent ν_φ.
Si l'un des g_i apparaît avec un exposant > 1 dans ν_φ, on a trouvé un facteur carré dans ν_φ, on a terminé.
Sinon, chacun des invariants de similitude de φ et de ψ est un produit $\prod_{i\in J} g_i$ (sans exposant) pour une partie J de $[\![1..s]\!]$.
On applique le lemme des noyaux correspondant à la décomposition $\nu_\varphi = \prod_{i=1}^{s} g_i$.
Notons $K_i = \operatorname{Ker} g_i(\varphi)$, $S_i = S \cap K_i$, $\varphi_i : K_i \to K_i$ et $\psi_i : S_i \to S_i$ les restrictions de φ, et $\mathbf{K}_i = \mathbf{K}[X]/\langle g_i\rangle = \mathbf{K}[x_i]$ (x_i est donc la classe de X modulo g_i).
Il suffit de d'établir l'un des deux termes de l'alternative demandée pour chacun des triplets (K_i, S_i, φ_i).
La liste des invariants de similitude de φ_i est formée de v_i polynômes tous égaux à g_i. Cela signifie que K_i est un $\mathbf{K}_i$-module libre de rang v_i.
La liste des invariants de similitude de ψ_i est la même liste, mais plus courte, disons de longueur u_i. Le sous-espace S_i est un $\mathbf{K}_i$-module libre de rang u_i.
On regarde désormais K_i sous la forme $\mathbf{K}_i^{v_i}$.
Si $u_i = 0$ on pose $T_i = K_i$, et si $u_i = v_i$ on pose $T_i = 0$. En dehors de ces cas simples, on fait l'étude suivante.
Tout élément $x \in K_i$ donne un vecteur colonne de $\mathbf{K}_i^{v_i}$. Chacune des coordonnées ainsi obtenue est un élément $h(x_i)$ de $\mathbf{K}_i$. En calculant une base de factorisation partielle pour h et g_i, on peut décider que l'une des alternatives suivantes a certainement lieu :
— $h(x_i) = 0$, OU
— $h(x_i)$ est inversible, OU
— g_i se décompose en un produit de plusieurs facteurs.
En bref, ou bien on découvre un facteur carré de g_i (et l'algorithme se termine), ou bien g_i se décompose en un produit de facteurs deux à deux étrangers, ce qui ramène le problème à un problème « plus simple » (les degrés des facteurs sont plus petits, et ne descendront jamais en dessous de 1), ou bien $\mathbf{K}_i$ se comporte au cours du calcul comme s'il était un corps.
Ce que nous venons de dire à propos d'un élément arbitraire de K_i, nous l'appliquons pour une base de S_i comme $\mathbf{K}_i$-module. Nous traitons la matrice obtenue par la méthode du pivot, du moins si $\mathbf{K}_i$ veut bien se comporter comme un corps au cours du calcul, et nous calculons ainsi un supplémentaire stable T_i, isomorphe à $\mathbf{K}_i^{v_i - u_i}$, de S_i dans K_i.
Remarque. Pour plus de détails sur les deux exercices présédents on peut consulter le chapitre 7 de [Díaz, Lombardi & Quitté] . ∎

Problème 1. D'abord, le cycle $\sigma = (1,2,3)$ réalise $\sigma(f_1) = f_2$, $\sigma(f_2) = f_3$ et $\sigma(f_3) = f_1$. Donc $C_3 = \langle\sigma\rangle$ opère sur $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x,y,z]$. Si de plus $a = b$ ou $b = c$, alors $\{f_1, f_2, f_3\}$ est invariant par S_3. Enfin, remarquons que l'origine est un zéro du système, mais aussi l'existence de solutions avec $x = y = z \neq 0$ (dans une extension de $\mathbf{k}$).

1. Il y a deux cas de figure : le cas $a \leqslant b < c$, le plus facile à étudier (cas I), et le cas $a < b = c$ (cas II).

• cas I ($b < c$).

On considère la relation d'ordre `deglex` sur les monômes de $\mathbf{k}[X,Y,Z]$ (voir l'exercice III-3). Montrons que $\mathbf{A} = \sum_{p,q,r:\max(p,q,r)<c} \mathbf{k}\, x^p y^q z^r$.

Soit $m = x^i y^j z^k$ vérifiant $\max(i,j,k) \geqslant c$. Si $i \geqslant c$, on remplace dans m, x^c par $x^{i-c}x^c = -x^{i-c}(y^b + z^a)$. Même chose si $j \geqslant c$ ou si $k \geqslant c$. Il vient alors

$$m = -(m_1 + m_2) \text{ avec } m_1, m_2 = \begin{cases} x^{i-c}y^{b+j}z^k,\ x^{i-c}y^j z^{a+k} & \text{si } i \geqslant c, \\ x^{a+i}y^{j-c}z^k,\ x^i y^{j-c} z^{b+k} & \text{si } j \geqslant c, \\ x^{b+i}y^j z^{k-c},\ x^i y^{a+j} z^{k-c} & \text{si } k \geqslant c. \end{cases}$$

On voit alors que $m_1 < m$ et $m_2 < m$; on termine par récurrence. La lectrice vérifiera que les $x^p y^q z^r$ avec p, q, $r < c$ forment une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}$. Pour ceux qui connaissent : lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret, (f_1, f_2, f_3) est une base de Gröbner pour la relation d'ordre `deglex`. Bilan : $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{A} = c^3$.

• cas II ($a < b = c$). Ce cas est plus difficile. On suppose d'abord que 2 est inversible dans $\mathbf{k}$. On introduit :

$$\begin{aligned} g_1 &= -f_1 + f_2 + f_3 = 2Z^c + X^a + Y^a - Z^a, \\ g_2 &= f_1 - f_2 + f_3 = 2X^c - X^a + Y^a + Z^a, \\ g_3 &= f_1 + f_2 - f_3 = 2Y^c + X^a - Y^a + Z^a. \end{aligned}$$

On a alors :

$$2f_1 = g_2 + g_3, \quad 2f_2 = g_1 + g_3, \quad 2f_3 = g_1 + g_2,$$

de sorte que $\langle f_1, f_2, f_3\rangle = \langle g_1, g_2, g_3\rangle$. On peut alors opérer avec les g_j comme on a fait avec les f_i dans le cas I. Si $\mathbf{k}$ est un corps discret, (g_1, g_2, g_3) est une base de Gröbner pour la relation d'ordre gradué lexicographique `deglex`.

Bilan : $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{A} = c^3$ et les $x^p y^q z^r$ avec p, q, $r < c$ forment une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}$.

• Le cas II avec un corps discret $\mathbf{k}$ de caractéristique 2 est laissé à la sagacité du lecteur. L'anneau $\mathbf{A}$ n'est pas toujours zéro-dimensionnel ! Ceci arrive par exemple pour $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ et $(a,b) = (1,3)$, $(1,7)$, $(2,6)$, $(3,9)$. Quand il est zéro-dimensionnel, il semble que $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{A} < c^3$.

2. Pour $(a,b,c) = (2,2,3)$, on sait que $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[x,y,z] = 3^3 = 27$. On utilise le théorème de Stickelberger 8.17, sauf que l'on ne connaît pas les zéros du système. On vérifie, à l'aide d'un système de Calcul Formel, que le polynôme caractéristique de x sur $\mathbf{k}$ se factorise en polynômes irréductibles ($\mathbf{k} = \mathbb{Q}$) :

$$C_x = t^8(t+2)(t^3 - t^2 + 1)^2(t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 6t + 4)(t^4 + t^3 + t^2 - t + 2)^2,$$

mais la factorisation de C_{x+2y} est du type $1^8 \cdot 1^1 \cdot 4^1 \cdot 4^1 \cdot 4^1 \cdot 6^1$. En conséquence, la projection $(x,y,z) \mapsto x$ ne sépare pas les zéros du système, tandis que la projection $(x,y,z) \mapsto x + 2y$ le fait. De plus, on voit que l'origine est le seul zéro avec multiplicité (égale à 8). Aidé de la factorisation de C_x et en réalisant quelques petits calculs supplémentaires, on obtient :

— Un (autre) zéro défini sur $\mathbf{k}$, $(x,y,z) = (-2,-2,-2)$ et il est simple.

— Si α, β, γ sont les trois racines distinctes de $t^3 - t^2 + 1$, on obtient 6 zéros simples en faisant agir le groupe S_3 sur le zéro (α, β, γ). Si s_1, s_2, s_3 sont les fonctions symétriques élémentaires de (X, Y, Z), alors, sur $\mathbb{Q}$, on a l'égalité d'idéaux $\langle f_1, f_2, f_3, s_1 - 1\rangle = \langle s_1 - 1, s_2, s_3 + 1\rangle$, i.e. l'algèbre de ces 6 zéros est l'algèbre de décomposition universelle du polynôme $t^3 - t^2 + 1$.

— Soit δ_i une racine de $t^4 + t^3 + t^2 - t + 2$ ($i \in [\![1..4]\!]$).
En posant $y = x = \delta_i$ et $z = 2/(x+1) = -(x^3 + x - 2)/2$, on obtient un zéro du système. Le polynôme minimal de z sur $\mathbb{Q}$ est celui que l'on voit dans la factorisation de C_x : $t^4 - 2t^3 + 4t^2 - 6t + 4$. On obtient ainsi quatre zéros simples du système.

— On peut faire agir A_3 sur les quatre zéros précédents.

On a donc obtenu $1 + 6 + 3 \times 4 = 19$ zéros simples et un zéro de multiplicité 8. Le compte est bon.

Remarque : alors que $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[x, y, z] = 27$, on a :

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[x] = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[y] = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[z] = 14,$$
$$\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[x, y] = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[x, z] = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[y, z] = 23.$$

Ainsi, ni $\mathbf{k}[x, y]$, ni $\mathbf{k}[x, y, z]$ ne sont libres sur $\mathbf{k}[x]$, et $\mathbf{k}[x, y, z]$ n'est pas libre sur $\mathbf{k}[x, y]$.

3. Si $\mathbf{k}$ est un corps discret, dans le cas I en caractéristique $\neq 2$, on trouve, de manière expérimentale, que l'algèbre locale de l'origine est $\mathbf{k}[X, Y, Z]/\langle X^a, Y^a, Z^a\rangle$ et donc la multiplicité de l'origine serait a^3. Quant au cas II, cela semble bien mystérieux.

Problème 2. *1.* On met les poids suivants sur $\mathbf{k}[X]$: X est de poids 1, et le poids de a_i et b_{ji} est i. Ainsi f et g_j sont homogènes de poids d. On vérifie facilement pour tout $k \geqslant 0$ que $(X^k g_j) \bmod f$ est homogène de poids $d + k$.

2. On indexe les d lignes de S par $1, \ldots, d$, la ligne i correspondant au poids i via $i \leftrightarrow X^{d-i} \leftrightarrow a_i$. La matrice S est la concaténation horizontale de r matrices carrées d'ordre d, la j-ième matrice carrée étant celle de la multiplication par g_j modulo f dans la base $(X^{d-1}, \ldots, X, 1)$. Si l'on numérote par $(0, 1, \ldots, d-1)$, les colonnes de la première sous-matrice carrée d'ordre d de S (correspondant à g_1), alors le coefficient d'indice (i, j) est homogène de poids $i + j$. Idem pour les autres coefficients avec des conventions analogues.

Par exemple, pour $d = 3$, si $f = X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3$, $g = b_1X^2 + b_2X + b_3$, la matrice de la multiplication par g mod f est :

$$\begin{array}{c} \\ X^{d-1} \leftrightarrow 1 \\ X^{d-2} \leftrightarrow 2 \\ X^{d-3} \leftrightarrow 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} g & Xg \bmod f & X^2 g \bmod f \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_1 & -a_1b_1 + b_2 & a_1^2 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + b_3 \\ b_2 & -a_2 b_1 + b_3 & a_1 a_2 b_1 - a_2 b_2 - a_3 b_1 \\ b_3 & -a_3 b_1 & a_1 a_3 b_1 - a_3 b_2 \end{bmatrix} \end{array} \text{ de poids } \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}.$$

Soit M une sous-matrice d'ordre d de S, $(k_1, \ldots, k_d)$ les exposants de X correspondant à ses colonnes ($k_i \in [\![0..d-1]\!]$, et les colonnes sont des $X^{k_i} g_j \bmod f$). Alors, $\det(M)$ est homogène, et son poids est la somme des poids des coefficients diagonaux, c'est-à-dire

$$(1 + k_1) + (2 + k_2) + \cdots + (d + k_d) = d(d+1)/2 + \textstyle\sum_{i=1}^{d} k_i.$$

Par exemple, le poids du premier mineur d'ordre d de S (correspondant à la multiplication par g_1) est $d(d+1)/2 + \sum_{k=0}^{d-1} k = d^2$.
Le poids de chacun des $\binom{rd}{d}$ mineurs est minoré par $d(d+1)/2$ (borne obtenue pour $k_i = 0$) et majoré par $d(3d-1)/2$, (borne obtenue pour $k_i = d-1$). Ces bornes sont atteintes si $r \geqslant d$.
3. Le nombre $\dim_{\mathbb{Q}} E$ minore le cardinal de n'importe quel système générateur de $\mathfrak{b}$. On trouve de manière expérimentale, pour des petites valeurs de r et d, que $\dim_{\mathbb{Q}} E = r^d$. Mais on a mieux. En effet, la considération d'objets gradués permet d'affirmer le résultat suivant (Nakayama homogène, problème 3) : toute famille graduée de $\mathfrak{b}$ dont l'image dans E est un système générateur homogène du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué E est un système générateur (homogène) de $\mathfrak{b}$. En particulier, il existe un système générateur homogène de $\mathfrak{b}$ de cardinal $\dim_{\mathbb{Q}} E$, de manière conjecturale, r^d. On peut aller plus loin en examinant les poids des systèmes générateurs homogènes minimaux de $\mathfrak{b}$: ceux-ci sont uniques et fournies par la série (finie) du $\mathbb{Q}$-espace vectoriel gradué E. Par exemple, pour $d = 5$, $r = 2$, cette série est

$$6t^{25} + 4t^{24} + 6t^{23} + 6t^{22} + 6t^{21} + 2t^{20} + 2t^{19},$$

ce qui signifie que dans n'importe quel système générateur homogène minimal de $\mathfrak{b}$, il y a exactement 6 polynômes de poids 25, 4 polynômes de poids 24, ..., 2 polynômes de poids 19 (avec $6 + 4 + \cdots + 2 = 32 = 2^5 = r^d$). Dans cet exemple, le nombre $\binom{rd}{d}$ de mineurs d'ordre d de S est 252.
De manière conjecturale, il semblerait que $\mathfrak{b}$ soit engendré par des polynômes homogènes de poids $\leqslant d^2$, avec $\binom{d+r-1}{r-1}$ polynômes de poids d^2 exactement.

Problème 3.
1. On fait une démonstration par récurrence sur n.
Cas $n = 0$: résultat trivial.
Pour $n \geqslant 1$, on considère $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\langle a_1 \rangle$. On a $\mathbf{k} \hookrightarrow \mathbf{A}'$ car $\mathbf{k} \cap \langle a_1 \rangle = \{0\}$. La suite $(\overline{a_2}, \cdots, \overline{a_n})$ dans $\mathbf{A}'$ vérifie les bonnes hypothèses pour la récurrence sur n. Supposons $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ avec $f \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ et $\deg_{X_1}(f) \leqslant d$.
On écrit $f = X_1 q(X_1, \ldots, X_n) + r(X_2, \ldots, X_n)$ avec q, r à coefficients dans $\mathbf{k}$ et q de degré $\leqslant d-1$ en X_1. Dans $\mathbf{A}'$, on a $r(\overline{a_2}, \ldots, \overline{a_n}) = 0$. Par récurrence sur n, on a $r = 0$. Puisque a_1 est régulier, $q(a_1, \ldots, a_n) = 0$. Par récurrence sur d, on obtient $q = 0$, donc $f = 0$.
2a. Par définition, $\mathbf{A}_+ E \subseteq E_1 \oplus E_2 \oplus \ldots$; et comme $\mathbf{A}_+ E = E$, c'est que $E_0 = 0$. Alors $\mathbf{A}_+ E \subseteq E_2 \oplus E_3 \oplus \ldots$, et en utilisant de nouveau $\mathbf{A}_+ E = E$, il vient $E_1 = 0$. Et ainsi de suite, $E_n = 0$ pour tout n, donc $E = 0$.
2b. Soit F le sous-$\mathbf{A}$-module de E engendré par les e_i. C'est un sous-module gradué car les e_i sont homogènes. L'hypothèse équivaut à $F + \mathbf{A}_+ E = E$ ou encore $\mathbf{A}_+(E/F) = E/F$. D'après la question *2a*, on a $E/F = 0$ i.e. $E = F$: les e_i engendrent le $\mathbf{A}$-module E.
3a. Il est clair que $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0$ et $\mathfrak{b} = \mathbf{A}_+ \mathbf{B}$. En appliquant la question précédente au $\mathbf{A}$-module gradué $\mathbf{B}$ et aux e_i, on obtient que les e_i forment un système générateur du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$.
3b. Notons $S = \sum_i \mathbf{B}_0 e_i$ (en fait, c'est une somme directe).
Montrons que $\langle h_1, \ldots, h_d \rangle \cap S = \{0\}$. Si $s = \sum_i \lambda_i e_i \in \langle h_1, \ldots, h_d \rangle$ avec $\lambda_i \in \mathbf{B}_0$,

alors en réduisant modulo $\langle h_1, \dots, h_d\rangle$, il vient $\sum_i \lambda_i \overline{e_i} = 0$ donc $\lambda_i = 0$ pour tout i et $s = 0$.
Pour $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, notons $h^\alpha = h_1^{\alpha_1} \cdots h_d^{\alpha_d}$. Montrons que :

$$(\star) \qquad \sum\nolimits_\alpha s_\alpha h^\alpha = 0 \text{ avec } s_\alpha \in S \implies s_\alpha = 0 \quad \text{pour tout } \alpha.$$

Pour cela, on va prouver par récurrence descendante sur i, que :

$$\big(f \in S[X_i, \dots, X_d] \text{ et } f(h_i, \dots, h_d) \equiv 0 \bmod \langle h_1, \dots, h_{i-1}\rangle\big) \implies f = 0.$$

D'abord pour $i = d$. L'hypothèse est $s_m h_d^m + \cdots + s_1 h_d + s_0 \equiv 0 \bmod \langle h_1, \dots, h_{d-1}\rangle$ et on veut $s_k = 0$ pour tout k. On a $s_0 \in S \cap \langle h_1, \dots, h_d\rangle = \{0\}$. On peut simplifier la congruence par h_d (qui est régulier modulo $\langle h_1, \dots, h_{d-1}\rangle$) pour obtenir $s_m h_d^{m-1} + \cdots + s_1 \equiv 0 \bmod \langle h_1, \dots, h_{d-1}\rangle$. En itérant le procédé, on obtient que tous les s_k sont nuls.
Passons de $i+1$ à i.
Soit $f \in S[X_i, \dots, X_d]$ de degré $\leqslant m$ avec $f(h_i, \dots, h_d) \equiv 0 \bmod \langle h_1, \dots, h_{i-1}\rangle$. On écrit $f = X_i q(X_i, \dots X_d) + r(X_{i+1}, \dots, X_d)$ avec q, r à coefficients dans S et q de degré $\leqslant m-1$. On a donc $r(h_{i+1}, \dots, h_d) \equiv 0 \bmod \langle h_1, \dots, h_i\rangle$, d'où par récurrence sur i, $r = 0$. On peut simplifier la congruence par h_i (qui est régulier modulo $\langle h_1, \dots, h_{i-1}\rangle$) pour obtenir $q(h_i, \dots, h_d) \equiv 0 \bmod \langle h_1, \dots, h_{i-1}\rangle$. Donc $q = 0$ par récurrence sur m, puis $f = 0$.
Bilan : on a donc le résultat pour $i = 1$ et ce résultat n'est autre que $(\star)$.
Une fois $(\star)$ prouvé, on peut montrer que les e_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{A}$. Soit $\sum_i a_i e_i = 0$ avec $a_i \in \mathbf{A}$; on écrit $a_i = \sum_\alpha \lambda_{\alpha,i} h^\alpha$ et

$$\sum\nolimits_i a_i e_i = \sum\nolimits_{i,\alpha} \lambda_{i,\alpha} h^\alpha e_i = \sum\nolimits_\alpha s_\alpha h^\alpha \quad \text{avec} \quad s_\alpha = \sum\nolimits_i \lambda_{i,\alpha} e_i \in S.$$

Donc $s_\alpha = 0$ pour tout α, puis $\lambda_{i,\alpha} = 0$ pour tout i, et $a_i = 0$.
4. De manière générale, si $(a_1, \dots, a_d)$ est une suite régulière d'un anneau $\mathbf{A}$, elle est L-régulière pour tout $\mathbf{A}$-module libre L (laissé à la lectrice). On applique ceci à l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{B}_0[h_1, \dots, h_d]$, à la suite $(h_1, \dots, h_d)$ (qui est bien une suite régulière de $\mathbf{A}$) et à $L = \mathbf{B}$ (qui est un $\mathbf{A}$-module libre par hypothèse).

Commentaires bibliographiques

Bourbaki (Algèbre, chapitre X, ou Algèbre commutative chapitre I) appelle module *pseudo cohérent* ce que nous appelons module cohérent (conformément à l'usage le plus répandu, notamment dans la littérature anglaise), et *module cohérent* ce que nous appelons module cohérent de présentation finie. Ceci est naturellement à relier aux « Faisceaux Algébriques Cohérents » de J.-P. Serre (précurseurs des faisceaux de modules sur un schéma de Grothendieck) qui sont localement donnés par des modules de présentation finie cohérents. Signalons aussi que [Stacks-Project] adopte la définition de Bourbaki pour les modules cohérents.

Le théorème 5.1 est recopié de [MRR] chap. V, th. 2.4. Le théorème 5.2 est recopié de [MRR] chap. III, exercice 9 p. 80.
La référence standard pour les idéaux de Fitting est [Northcott].

Pour ce qui concerne les structures algébriques purement équationnelles et l'algèbre universelle on peut consulter [Burris & Sankappanavar].
Une première introduction aux catégories se trouve dans [Cohn].
Des livres consacrés au sujet que l'on peut recommander sont [Mac Lane] et [Lawvere & Rosebrugh].
Les idéaux de Kaplansky d'un module M étudiés dans l'exercice 19 sont utilisés dans [Kunz, Chap. IV] et [Ischebeck & Rao, Chap. 9].
Les anneaux de Bézout strict (exercice 7) et les anneaux de Smith (exercice 8) ont été étudiés par Kaplansky dans [116] dans un cadre plus général d'anneaux non nécessairement commutatifs. Il les appelle respectivement des « Hermite rings » et des « elementary divisor rings ». Mais cette terminologie n'est pas fixée. Dans [Lam06], où l'exercice 7 trouve sa source, Lam utilise *K-Hermite ring* pour anneau de Bézout strict. Cela est à distinguer de *Hermite ring* : aujourd'hui un anneau $\mathbf{A}$ est appelé *anneau de Hermite* si tout $\mathbf{A}$-module stablement libre est libre, c'est-à-dire encore si tout vecteur unimodulaire est complétable (voir chapitre V, section V-4). Quant aux « diviseurs élémentaires » ils sont désormais souvent utilisés dans un sens plus particulier. Par exemple, il est fréquent de trouver écrit que le $\mathbb{Z}$-module

$$\mathbb{Z}/\langle 900\rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 10\rangle \simeq \mathbb{Z}/\langle 25\rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 5\rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 4\rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 2\rangle \oplus \mathbb{Z}/\langle 9\rangle$$

admet pour facteurs invariants la liste $(10, 900)$ et pour diviseurs élémentaires la liste non ordonnée $(25, 5, 4, 2, 9)$.
L'exercice 11 nous a été communiqué par Thierry Coquand.

Chapitre V

Modules projectifs de type fini, 1

Sommaire

1. Introduction

Rappelons qu'un module projectif de type fini est un module isomorphe à un facteur direct dans un **A**-module libre de rang fini. Cette notion s'avère être la généralisation naturelle, pour les modules sur un anneau commutatif, de la notion d'espace vectoriel de dimension finie sur un corps discret. Ce chapitre développe la théorie de base de ces modules.

Une des motivations initiales de ce livre était de comprendre *en termes concrets* les théorèmes suivants concernant les modules projectifs de type fini.

1.1. Théorème. (Théorème de structure locale des modules projectifs de type fini) *Un* **A***-module* P *est projectif de type fini si, et seulement si, il est* localement libre *au sens suivant. Il existe des éléments comaximaux* $s_1, \ldots, s_\ell$ *dans* **A** *tels que les modules* P_{s_i} *obtenus à partir de* P *en étendant les scalaires aux anneaux* $\mathbf{A}_{s_i} = \mathbf{A}[1/s_i]$ *sont libres.*

1.2. Théorème. (Caractérisation des modules projectifs de type fini par leurs idéaux de Fitting) *Un* **A***-module de présentation finie est projectif si, et seulement si, ses idéaux de Fitting sont (des idéaux principaux engendrés par des) idempotents.*

1.3. Théorème. (Décomposition d'un module projectif de type fini en somme directe de modules de rang constant) *Si* P *est un* **A***-module projectif de type fini engendré par* n *éléments, il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux* $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ *(certains éventuellement nuls) tel que chaque* $r_k P$ *soit un module projectif de rang* k *sur l'anneau* $\mathbf{A}/\langle 1 - r_k\rangle$. *Alors,* $P = \bigoplus_{k>0} r_k P$ *et* $\mathrm{Ann}(P) = \langle r_0\rangle$.

Dans cette somme directe on peut naturellement se limiter aux indices $k > 0$ tels que $r_k \neq 0$.

1.4. Théorème. (Caractérisation des modules projectifs de type fini par la platitude) *Un* **A***-module de présentation finie est projectif si, et seulement si, il est plat.*

Dans ce chapitre nous démontrerons les trois premiers de ces théorèmes. Ils seront repris avec de nouvelles démonstrations dans le chapitre X. Le quatrième sera démontré dans le chapitre VIII consacré aux modules plats. D'autres théorèmes importants concernant les modules projectifs de type fini seront démontrés dans les chapitres X, XIV et XVI. La théorie des

algèbres qui sont des modules projectifs de type fini (nous les appelons des algèbres strictement finies) est développée dans le chapitre VI.

2. Généralités

Rappelons qu'un module projectif de type fini est de présentation finie (exemple 2, page 192).

Propriétés caractéristiques

Lorsque M et N sont deux $\mathbf{A}$-modules, on a une application $\mathbf{A}$-linéaire naturelle $\theta_{M,N} : M^\star \otimes N \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)$ donnée par

$$\theta_{M,N}(\alpha \otimes y) = \big(x \mapsto \alpha(x)y\big) \tag{1}$$

On note aussi θ_M pour $\theta_{M,M}$.

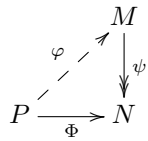
Remarque. On note parfois $\alpha \otimes y$ pour $\theta_{M,N}(\alpha \otimes y)$ mais ce n'est certainement pas recommandé lorsque $\theta_{M,N}$ n'est pas injective. ∎

Le théorème suivant donne quelques propriétés immédiatement équivalentes.

2.1. Théorème. (Modules projectifs de type fini)
Pour un $\mathbf{A}$-module P, les propriétés suivantes sont équivalentes.

- (a) *P est un* module projectif de type fini, *i.e. il existe un entier n, un $\mathbf{A}$-module N et un isomorphisme de $P \oplus N$ sur $\mathbf{A}^n$.*
- ($b1$) *Il existe un entier n, des éléments $(g_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ de P et des formes linéaires $(\alpha_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ sur P telles que pour tout $x \in P$, $x = \sum_i \alpha_i(x)\, g_i$.*
- ($b2$) *P est de type fini, et pour tout système fini de générateurs $(h_i)_{i\in[\![1..m]\!]}$ de P il existe des formes linéaires $(\beta_i)_{i\in[\![1..m]\!]}$ sur P telles que pour tout $x \in P$, $x = \sum_i \beta_i(x)\, h_i$.*
- ($b3$) *L'image de $P^\star \otimes_{\mathbf{A}} P$ dans $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,P)$ par l'homomorphisme canonique θ_P contient Id_P.*
- ($c1$) *Il existe un entier n et deux applications linéaires $\varphi : P \to \mathbf{A}^n$ et $\psi : \mathbf{A}^n \to P$, telles que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_P$. On a alors $\mathbf{A}^n = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\psi)$ et $P \simeq \mathrm{Im}(\varphi \circ \psi)$.*
- ($c2$) *Le module P est de type fini, et pour toute application linéaire surjective $\psi : \mathbf{A}^m \to P$, il existe une application linéaire $\varphi : P \to \mathbf{A}^m$ telle que $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}_P$. On a alors $\mathbf{A}^m = \mathrm{Im}(\varphi) \oplus \mathrm{Ker}(\psi)$ et $P \simeq \mathrm{Im}(\varphi \circ \psi)$.*
- ($c3$) *Comme ($c2$) mais en remplaçant $\mathbf{A}^m$ par un $\mathbf{A}$-module M arbitraire : le module P est de type fini, et pour toute application linéaire surjective $\psi : M \to P$, $\mathrm{Ker}(\psi)$ est facteur direct.*

($c4$) *Le module P est de type fini et le foncteur $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,\bullet)$ transforme les applications linéaires surjectives en applications surjectives.*
Autrement dit : pour tous $\mathbf{A}$-modules M, N, pour toute application linéaire surjective $\psi : M \to N$ et toute application linéaire $\Phi : P \to N$, il existe une application linéaire $\varphi : P \to M$ telle que $\psi \circ \varphi = \Phi$.



D Le point ($b1$) (resp. ($b2$)) n'est qu'une reformulation de ($c1$) (resp. ($c2$)).
Le point ($b3$) n'est qu'une reformulation de ($b1$).
On a trivialement ($c3$) $\Rightarrow$ ($c2$) $\Rightarrow$ ($c1$).
(a) $\Rightarrow$ ($c1$) Considérer les applications canoniques

$$P \to P \oplus N \text{ et } P \oplus N \to P.$$

($c1$) $\Rightarrow$ (a) Considérer $\pi = \varphi \circ \psi$. On a $\pi^2 = \pi$. Ceci définit une projection de $\mathbf{A}^n$ sur $\operatorname{Im}\pi = \operatorname{Im}\varphi \simeq P$ parallèlement à $N = \operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\psi$.
($b1$) $\Rightarrow$ ($c4$) Si $\Phi(g_i) = \psi(y_i)$ ($i \in [\![1..n]\!]$), on pose $\varphi(x) = \sum \alpha_i(x)\, y_i$. On a alors pour tout $x \in P$:

$$\Phi(x) = \Phi\big(\textstyle\sum \alpha_i(x)\, g_i\big) = \sum \alpha_i(x)\, \psi(y_i) = \psi\big(\sum \alpha_i(x)\, y_i\big) = \psi\big(\varphi(x)\big).$$

($c4$) $\Rightarrow$ ($c3$) On prend $N = P$ et $\Phi = \mathrm{Id}_P$. □

On a aussi directement ($b1$) $\Rightarrow$ ($b2$) comme suit : en exprimant les g_i comme combinaisons linéaires des h_j on obtient les β_j à partir des α_i.
En pratique, conformément à la définition initiale, nous considérerons un module projectif de type fini comme (copie par isomorphisme de l') image d'une matrice de projection F. Une telle matrice, ou l'application linéaire qu'elle représente, est encore appelée un *projecteur*. Plus généralement, tout endomorphisme idempotent d'un module M est appelé un *projecteur*.
Lorsque l'on voit un module projectif de type fini selon la définition ($c1$), la matrice de projection est celle de l'application linéaire $\varphi \circ \psi$. De même, si l'on utilise la définition ($b1$), la matrice de projection est celle ayant pour coefficients les $\alpha_i(g_j)$ en position (i,j).
Un système $\big((g_1,\dots,g_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big)$ qui vérifie ($b1$) est appelé un *système de coordonnées* pour le module projectif P. Certains auteurs parlent d'une *base* du module projectif de type fini, mais nous ne les suivrons pas.

2.2. Fait. (Dual d'un module projectif de type fini, 1)
Soit $\big((g_1,\dots,g_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big)$ un système de coordonnées pour un module projectif de type fini P. Alors :

- *les g_i engendrent P,*

- *les α_j engendrent* $\mathrm{L}(P, \mathbf{A}) = P^\star$,
- *le module $P^\star$ est projectif de type fini,*
- *le module $(P^\star)^\star$ est canoniquement isomorphe à P,*
- *via cette identification canonique, $\big((\alpha_1, \dots, \alpha_n), (g_1, \dots, g_n)\big)$ est un système de coordonnées pour $P^\star$.*

En particulier, si P est (isomorphe à) l'image d'une matrice de projection F, le module dual $P^\star$ est (isomorphe à) l'image de la matrice de projection ${}^{\mathrm{t}}F$.

▷ Le premier point est clair. Tout le reste est clair à partir du moment où on montre que $\lambda = \sum \lambda(g_i)\, \alpha_i$ pour tout $\lambda \in P^\star$. Or cette égalité se démontre en évaluant les deux membres en un élément x arbitraire de P :

$$\lambda(x) = \lambda\big(\textstyle\sum \alpha_i(x)\, g_i\big) = \sum \alpha_i(x)\, \lambda(g_i) = \big(\sum \lambda(g_i)\, \alpha_i\big)(x).$$

□

2.3. Théorème. *Soit $\mathbf{A}^m \xrightarrow{\psi} \mathbf{A}^q \xrightarrow{\pi} P \to 0$ une présentation d'un module P. Alors, P est projectif de type fini si, et seulement si, ψ est localement simple.*

Rappelons que « ψ est localement simple » signifie qu'il existe $\varphi : \mathbf{A}^q \to \mathbf{A}^m$ vérifiant $\psi\, \varphi\, \psi = \psi$. Par ailleurs, d'après le théorème II-5.14 toute application linéaire qui a un rang au sens de la définition II-5.7 est localement simple.

▷ Si ψ est localement simple, le fait II-5.18 nous dit que $\operatorname{Im}\psi$ est facteur direct, et $\operatorname{Coker}\psi$ est isomorphe à un supplémentaire de $\operatorname{Im}\psi$. Réciproquement, si le module $P := \operatorname{Coker}\psi$ est projectif, on applique à la projection $\pi : \mathbf{A}^q \to P$ la propriété $(c2)$ du théorème 2.1. On obtient $\tau : P \to \mathbf{A}^q$ avec $\pi \circ \tau = \mathrm{Id}_P$, de sorte que $\mathbf{A}^q = \operatorname{Im}\tau \oplus \operatorname{Im}\psi$. Donc $\operatorname{Im}\psi$ est projectif de type fini et l'on peut appliquer à $\psi : \mathbf{A}^m \to \operatorname{Im}\psi$ la propriété $(c2)$, ce qui nous donne φ sur la composante $\operatorname{Im}\psi$ (et l'on prend par exemple 0 sur $\operatorname{Im}\tau$). □

Principe local-global

Le fait qu'un $\mathbf{A}$-module est projectif de type fini est une notion locale au sens suivant.

2.4. Principe local-global concret. (Modules projectifs de type fini)
Soient $S_1, \dots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et P un $\mathbf{A}$-module.
Si les P_{S_i} sont libres, P est projectif de type fini.
Plus généralement, le module P est projectif de type fini si, et seulement si, les P_{S_i} sont des $\mathbf{A}_{S_i}$-modules projectifs de type fini.

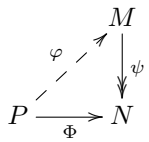
▷ Cela résulte du théorème 2.3, du principe local-global IV-4.13 pour les modules de présentation finie et du principe local-global II-5.19 pour les applications linéaires localement simples. □

Le principe local-global 2.4 établit l'implication «si» dans le théorème 1.1. La réciproque «seulement si» a de fait été démontrée au théorème II-5.26 ce qui nous donnera le théorème 6.1. Nous donnerons pour cette réciproque un énoncé plus précis et une démonstration plus conceptuelle avec le théorème X-1.5.

Modules projectifs et lemme de Schanuel

La notion de module projectif peut être définie pour des modules qui ne sont pas de type fini. Dans la suite nous utiliserons rarement de tels modules, mais il est cependant utile de donner quelques précisions sur ce sujet.

2.5. Définition. Un $\mathbf{A}$-module P (non nécessairement de type fini) est dit *projectif* s'il vérifie la propriété suivante.
Pour tous $\mathbf{A}$-modules M, N, pour toute application linéaire surjective $\psi : M \to N$ et toute application linéaire $\Phi : P \to N$, il existe une application linéaire $\varphi : P \to M$ telle que $\psi \circ \varphi = \Phi$.



Ainsi, vue la caractérisation (c4) dans le théorème 2.1, un $\mathbf{A}$-module est projectif de type fini si, et seulement si, il est projectif et de type fini. Dans le fait suivant, la dernière propriété est comme l'implication $(c4) \Rightarrow (c3)$ dans ce théorème.
Une application linéaire $\varphi : E \to F$ est appelée une *surjection scindée*, s'il existe $\psi : F \to E$ avec $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_F$. Dans ce cas on dit que ψ est une *section* de φ, et l'on a $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \psi(F) \simeq \operatorname{Ker}\varphi \oplus F$.
Une suite exacte courte est dite *scindée* si sa surjection est scindée.

2.6. Fait.

1. *Un module libre ayant pour base un ensemble en bijection avec* $\mathbb{N}$ *est projectif. Par exemple l'anneau des polynômes* $\mathbf{A}[X]$ *est un* $\mathbf{A}$*-module projectif.*
2. *Tout module en facteur direct dans un module projectif est projectif.*
3. *Si* P *est projectif, toute suite exacte courte* $0 \to N \to M \to P \to 0$ *est scindée.*

Commentaire. En mathématiques constructives les modules libres *ne sont pas toujours* projectifs. En outre, il semble impossible de réaliser tout module comme quotient d'un module libre et projectif. De même il semble impossible de mettre tout module projectif en facteur direct dans un module libre et projectif. Pour plus de détails sur ce sujet on peut consulter l'exercice VIII-16 et le livre [MRR]. ∎

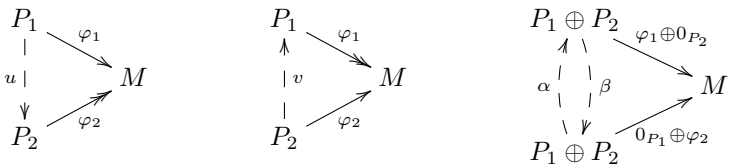
2.7. Lemme. *On considère deux applications* **A***-linéaires surjectives de même image*

$$P_1 \xrightarrow{\varphi_1} M \to 0 \text{ et } P_2 \xrightarrow{\varphi_2} M \to 0$$

avec P_1 et P_2 projectifs.

1. *Il existe des isomorphismes réciproques*
$$\alpha,\, \beta : P_1 \oplus P_2 \to P_1 \oplus P_2$$
tels que
$$(\varphi_1 \oplus 0_{P_2}) \circ \alpha = 0_{P_1} \oplus \varphi_2 \quad \text{et } \varphi_1 \oplus 0_{P_2} = (0_{P_1} \oplus \varphi_2) \circ \beta.$$
2. *Notons $K_1 = \operatorname{Ker} \varphi_1$ et $K_2 = \operatorname{Ker} \varphi_2$. Par restriction de α et β on obtient des isomorphismes réciproques entre $K_1 \oplus P_2$ et $P_1 \oplus K_2$.*

▷ Il existe $u : P_1 \to P_2$ tel que $\varphi_2 \circ u = \varphi_1$ et $v : P_2 \to P_1$ tel que $\varphi_1 \circ v = \varphi_2$.



On vérifie que α et β définis par les matrices ci-dessous conviennent.

$$\alpha = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{P_1} - vu & v \\ -u & \mathrm{Id}_{P_2} \end{bmatrix} \qquad \beta = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_{P_1} & -v \\ u & \mathrm{Id}_{P_2} - uv \end{bmatrix}.$$

NB : la matrice β est une variante sophistiquée de ce que serait la matrice cotransposée de α si Id_{P_1}, Id_{P_2}, u et v étaient des scalaires. □

2.8. Corollaire. (Lemme de Schanuel) *On considère deux suites exactes :*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & K_1 & \xrightarrow{j_1} & P_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M & \to & 0 \\ 0 & \to & K_2 & \xrightarrow{j_2} & P_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & M & \to & 0 \end{array}$$

avec les modules P_1 et P_2 projectifs. Alors, $K_1 \oplus P_2 \simeq K_2 \oplus P_1$.

Catégorie des modules projectifs de type fini

Une construction purement catégorique

La catégorie des modules projectifs de type fini sur **A** peut être construite à partir de la catégorie des modules libres de rang fini sur **A** par un procédé purement catégorique.

1. Un module projectif de type fini P est décrit par un couple $(\mathrm{L}_P, \mathrm{Pr}_P)$ où L_P est un module libre de rang fini et $\mathrm{Pr}_P \in \mathrm{End}(\mathrm{L}_P)$ est un projecteur. On a $P \simeq \operatorname{Im} \mathrm{Pr}_P \simeq \operatorname{Coker}(\mathrm{Id}_{\mathrm{L}_P} - \mathrm{Pr}_P)$.
2. Une application linéaire φ du module P (décrit par $(\mathrm{L}_P, \mathrm{Pr}_P)$) vers le module Q (décrit par $(\mathrm{L}_Q, \mathrm{Pr}_Q)$) est décrite par une application linéaire $\mathrm{L}_\varphi : \mathrm{L}_P \to \mathrm{L}_Q$ soumise aux relations de commutation

$$\mathrm{Pr}_Q \circ \mathrm{L}_\varphi = \mathrm{L}_\varphi = \mathrm{L}_\varphi \circ \mathrm{Pr}_P\,.$$

En d'autres termes L_φ est nulle sur $\mathrm{Ker}(\mathrm{Pr}_P)$ et son image est contenue dans $\mathrm{Im}(\mathrm{Pr}_Q)$.

3. L'identité de P est représentée par $\mathrm{L}_{\mathrm{Id}_P} = \mathrm{Pr}_P$.
4. La somme de deux applications linéaires φ et ψ de P vers Q représentées par L_φ et L_ψ est représentée par $\mathrm{L}_\varphi + \mathrm{L}_\psi$. L'application linéaire $a\varphi$ est représentée par $a\mathrm{L}_\varphi$.
5. Pour représenter la composée de deux applications linéaires, on compose leurs représentations.
6. Enfin, une application linéaire φ de P vers Q représentée par L_φ est nulle si, et seulement si, $\mathrm{L}_\varphi = 0$.

Ceci montre que les problèmes concernant les modules projectifs de type fini peuvent toujours être interprétés comme des problèmes à propos de matrices de projection, et se ramènent souvent à des problèmes de résolution de systèmes linéaires sur $\mathbf{A}$.

Une catégorie équivalente, mieux adaptée aux calculs, est la catégorie dont les objets sont les matrices de projection à coefficients dans $\mathbf{A}$, un morphisme de F vers G étant une matrice H de format convenable vérifiant les égalités

$$GH = H = HF.$$

Avec des systèmes de coordonnées

Le fait suivant reprend les affirmations du paragraphe précédent lorsque l'on prend le point de vue des systèmes de coordonnées.

2.9. Fait. *Soient P et Q deux modules projectifs de type fini avec des systèmes de coordonnées*

$$\big((x_1,\dots,x_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big) \text{ et } \big((y_1,\dots,y_m),(\beta_1,\dots,\beta_m)\big),$$

et soit $\varphi : P \to Q$ une application $\mathbf{A}$-linéaire.
Alors, on peut coder P et Q par les matrices

$$F \overset{\text{def}}{=} \big(\alpha_i(x_j)\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]} \qquad \text{et} \qquad G \overset{\text{def}}{=} \big(\beta_i(y_j)\big)_{i,j\in[\![1..m]\!]}.$$

Précisément, on a les isomorphismes

$$\pi_1 : P \to \mathrm{Im}\,F\,, \qquad x \mapsto {}^{\mathrm{t}}[\,\alpha_1(x)\ \cdots\ \alpha_n(x)\,],$$
$$\pi_2 : Q \to \mathrm{Im}\,G\,, \qquad y \mapsto {}^{\mathrm{t}}[\,\beta_1(y)\ \cdots\ \beta_m(y)\,].$$

Quant à l'application linéaire φ, elle est codée par la matrice

$$H \overset{\text{def}}{=} \big(\beta_i(\varphi(x_j))\big)_{i\in[\![1..n]\!],j\in[\![1..m]\!]}$$

qui vérifie $GH = H = HF$. La matrice H est celle de l'application linéaire

$$\mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^m, \quad \pi_1(x) + z \ \mapsto\ \pi_2\big(\varphi(x)\big) \qquad \textit{si } x \in P \textit{ et } z \in \mathrm{Ker}\,F.$$

On dira que la matrice H représente l'application linéaire φ dans les systèmes de coordonnées $\big((\underline{x}),(\underline{\alpha})\big)$ et $\big((\underline{y}),(\underline{\beta})\big)$.

Application : les isomorphismes entre modules projectifs de type fini

Le théorème suivant dit que, pour $F \in \mathbb{GA}_m(\mathbf{A})$ et $G \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$, si $\operatorname{Im} F$ et $\operatorname{Im} G$ sont isomorphes, quitte à « agrandir » les matrices F et G, elles peuvent être supposées semblables.

Dans le lemme qui suit, nous employons la notation $\operatorname{Diag}(M_1, \ldots, M_k)$ d'une manière plus large que celle utilisée jusqu'ici. Au lieu d'une liste d'éléments de l'anneau, nous considérons pour $(M_1, \ldots, M_k)$ une liste de matrices carrées. La matrice représentée ainsi est usuellement appelée une *matrice diagonale par blocs*.

2.10. Lemme. (Lemme d'élargissement)
On considère le codage matriciel de la catégorie des modules projectifs de type fini. Si un isomorphisme φ de $\operatorname{Im} F$ sur $\operatorname{Im} G$ est codé par U et son inverse codé par U', on obtient une matrice $A \in \mathbb{E}_{n+m}(\mathbf{A})$

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_m - F & -U' \\ U & \mathrm{I}_n - G \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ U & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_m & -U' \\ 0 & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_m & 0 \\ U & \mathrm{I}_n \end{bmatrix},$$

avec

$$\begin{bmatrix} 0_m & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} F & 0 \\ 0 & 0_n \end{bmatrix} A^{-1}. \tag{2}$$

Réciproquement, une conjugaison entre $\operatorname{Diag}(0_m, G)$ et $\operatorname{Diag}(F, 0_n)$ fournit un isomorphisme entre $\operatorname{Im} F$ et $\operatorname{Im} G$.

D La matrice suivante

$$\begin{array}{c} \\ \operatorname{Im} F \\ \operatorname{Ker} F \\ \operatorname{Im} G \\ \operatorname{Ker} G \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \operatorname{Im} F & \operatorname{Ker} F & \operatorname{Im} G & \operatorname{Ker} G \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\varphi^{-1} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} & 0 & 0 \\ \varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathrm{Id} \end{bmatrix} \end{array},$$

une fois remplacé $\operatorname{Im} F \oplus \operatorname{Ker} F$ par $\mathbf{A}^m$ et $\operatorname{Im} G \oplus \operatorname{Ker} G$ par $\mathbf{A}^n$, donne la matrice A. La présence du signe $-$ est due à la décomposition classique en produit de matrices élémentaires

$$\begin{bmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -a^{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Quand l'image d'une matrice de projection est libre

Si un projecteur $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ a pour image un module libre de rang r, son noyau n'est pas automatiquement libre, et la matrice n'est donc pas à tout coup semblable à la matrice standard $\mathrm{I}_{r,n}$.

Il est intéressant de savoir caractériser simplement le fait que l'image est libre.

2.11. Proposition. (Matrices de projection dont l'image est libre)
Soit $P \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. La matrice P est idempotente et d'image libre de rang r si, et seulement si, il existe deux matrices $X \in \mathbf{A}^{n\times r}$ et $Y \in \mathbf{A}^{r\times n}$ telles que $YX = \mathrm{I}_r$ et $P = XY$. On donne en outre les précisions suivantes.

1. $\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}\, Y$, $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im}\, X \simeq \mathrm{Im}\, Y$, *et les colonnes de X forment une base de* $\mathrm{Im}\, P$.
2. *Pour toutes matrices X', Y' de mêmes formats que X et Y et telles que $P = X'Y'$, il existe une unique matrice $U \in \mathbb{GL}_r(\mathbf{A})$ telle que*
$$X' = XU \ \text{ et } \ Y = UY'.$$
En fait, $U = YX'$, $U^{-1} = Y'X$ et $Y'X' = \mathrm{I}_r$.

$\mathbb{D}$ Supposons que P est idempotente d'image libre de rang r. Pour colonnes de X on prend une base de $\mathrm{Im}\, P$. Alors, il existe une unique matrice Y telle que $P = XY$. Puisque $PX = X$ (car $\mathrm{Im}\, X \subseteq \mathrm{Im}\, P$ et $P^2 = P$), on obtient $XYX = X$.
Puisque les colonnes de X sont indépendantes et que $X(\mathrm{I}_r - YX) = 0$, on obtient $\mathrm{I}_r = YX$.
Réciproquement, supposons $YX = \mathrm{I}_r$ et $P = XY$. Alors :
$$P^2 = XYXY = X\mathrm{I}_r Y = XY = P \ \text{ et } \ PX = XYX = X.$$
Donc $\mathrm{Im}\, P = \mathrm{Im}\, X$. En outre, les colonnes de X sont indépendantes car $XZ = 0$ implique $Z = YXZ = 0$.
1. La suite $\mathbf{A}^n \xrightarrow{\mathrm{I}_n - P} \mathbf{A}^n \xrightarrow{Y} \mathbf{A}^r$ est exacte. En effet, $Y(\mathrm{I}_n - P) = 0$, et si $YZ = 0$, alors $PZ = 0$, donc $Z = (\mathrm{I}_n - P)Z$. Ainsi :
$\mathrm{Ker}\, Y = \mathrm{Im}(\mathrm{I}_n - P) = \mathrm{Ker}\, P$, et $\mathrm{Im}\, Y \simeq \mathbf{A}^n/\mathrm{Ker}\, Y = \mathbf{A}^n/\mathrm{Ker}\, P \simeq \mathrm{Im}\, P$.
2. Si maintenant X', Y' sont de mêmes formats que X, Y, et si $P = X'Y'$, on pose $U = YX'$ et $V = Y'X$. Alors :
— $UV = YX'Y'X = YPX = YX = \mathrm{I}_r$,
— $X'V = X'Y'X = PX = X$, donc $X' = XU$,
— $UY' = YX'Y' = YP = Y$, donc $Y' = VY$.
Enfin $Y'X' = VYXU = VU = \mathrm{I}_r$. □

3. Modules projectifs de type fini sur les anneaux zéro-dimensionnels

Le théorème suivant généralise le théorème IV-8.12.

3.1. Théorème. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau zéro-dimensionnel.*

1. *Si $\mathbf{A}$ est réduit tout module de présentation finie M est quasi libre, et tout sous-module de type fini de M est en facteur direct.*
2. (Lemme de la liberté zéro-dimensionnelle)
Tout $\mathbf{A}$-module projectif de type fini est quasi libre.

3. *Toute matrice $G \in \mathbf{A}^{q\times m}$ de rang $\geqslant k$ est équivalente à une matrice*
$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{q-k,k} & G_1 \end{bmatrix}$$
avec $\mathcal{D}_r(G_1) = \mathcal{D}_{k+r}(G)$ pour tout $r \geqslant 0$. En particulier, toute matrice de rang k est simple.

4. *Tout module de présentation finie M tel que $\mathcal{F}_r(M) = \langle 1\rangle$ (c'est-à-dire localement engendré par r éléments, cf. la définition IX-2.5) est engendré par r éléments.*

5. (Théorème de la base incomplète)
Si un sous-module P d'un module projectif de type fini Q est projectif de type fini, il possède un supplémentaire. Si Q est libre de rang q et P libre de rang p, tout supplémentaire est libre de rang $q-p$.

6. *Soit Q un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $\varphi : Q \to Q$ un endomorphisme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *φ est injectif.*
   b. *φ est surjectif.*
   c. *φ est un isomorphisme.*

𝔻 Le point *1.* est un rappel du théorème IV-8.12.
2. On considère une matrice de présentation A du module et on commence par remarquer que puisque le module est projectif, $\mathcal{D}_1(A) = \langle e\rangle$ avec e idempotent. On peut considérer que la première étape du calcul se fait au niveau de l'anneau $\mathbf{A}_e = \mathbf{A}[1/e]$. On est ramené au cas où $\mathcal{D}_1(A) = e = 1$, ce que nous supposons désormais. On applique le point *3* avec $k = 1$ et l'on termine par récurrence.
Le point *3* est une sorte de lemme du mineur inversible (II-5.9) sans mineur inversible dans l'hypothèse. On applique avec l'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ le point *1* du théorème IV-8.12. On obtient alors la matrice voulue, mais seulement modulo $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$.
On remarque que la matrice $\mathrm{I}_k + R$ avec $R \in \mathbb{M}_k\big(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)\big)$ a un déterminant inversible, ce qui permet d'appliquer le lemme du mineur inversible.
4. Résulte du point *3* appliqué à une matrice de présentation du module.
5. Voyons d'abord le deuxième cas. Considérons la matrice G dont les vecteurs colonnes forment une base du sous-module P. Puisque G est la matrice d'une application linéaire injective, son idéal déterminantiel d'ordre p est régulier, donc égal à $\langle 1\rangle$ (corollaire IV-8.3). Il reste à appliquer le point *3*. Dans le cas général, si P est engendré par p éléments, considérons un module P' tel que $P \oplus P' \simeq \mathbf{A}^p$. Le module $Q \oplus P'$ est projectif de type fini, donc en facteur direct dans un module $L \simeq \mathbf{A}^n$. Alors, d'après le deuxième cas, $P \oplus P'$ est en facteur direct dans L. On en déduit que P est l'image d'une projection $\pi : L \to L$. Enfin, la restriction de π à Q est une projection qui a pour image P.

6. On sait déjà que b et c sont équivalents parce que Q est de type fini (théorème IV-5.2). Pour démontrer que a implique b, on peut supposer que Q est libre (quitte à considérer Q' tel que $Q \oplus Q'$ est libre). Alors, φ est représenté par une matrice dont le déterminant est régulier donc inversible.□

Le théorème précédent admet un corollaire important en théorie des nombres.

3.2. Corollaire. (Théorème un et demi)

1. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$. On suppose que c'est un $\mathbf{A}$-module de présentation finie avec $\mathcal{F}_1(\mathfrak{a}) = \langle 1\rangle$ et qu'il existe $a \in \mathfrak{a}$ tel que l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle a\rangle$ soit zéro-dimensionnel. Alors, il existe $c \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \langle a, c\rangle = \langle a^m, c\rangle$ pour tout $m \geqslant 1$.*
2. *Soit $\mathbf{Z}$ l'anneau d'entiers d'un corps de nombres $\mathbf{K}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini non nul de $\mathbf{Z}$. Pour tout $a \neq 0$ dans $\mathfrak{a}$ il existe $c \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \langle a, c\rangle = \langle a^m, c\rangle$ pour tout $m \geqslant 1$.*

D *1.* Le $\mathbf{B}$-module $\mathfrak{a}/a\mathfrak{a}$ est obtenu à partir du $\mathbf{A}$-module $\mathfrak{a}$ par extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$, donc son premier idéal de Fitting reste égal à $\langle 1\rangle$. On applique le point *4* du théorème 3.1 : il existe un $c \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}/a\mathfrak{a} = \langle c\rangle$ en tant que $\mathbf{B}$-module. Cela signifie $\mathfrak{a} = c\mathbf{A} + a\mathfrak{a}$ et donne le résultat souhaité.
2. Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ est un idéal de type fini de $\mathbf{Z}$, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \langle a\rangle$ (théorème III-8.21). Notons $\underline{x} = [\,x_1\ \cdots\ x_n\,]$. Il existe donc y_1, …, y_n dans $\mathfrak{b}$ tels que $\underline{x}\,{}^{\mathrm{t}}\underline{y} = \sum_i x_i y_i = a$. Si $y_i x_j = \alpha_{ij} a$, on a $\alpha_{ii} x_k = \alpha_{ki} x_i$. Donc, l'idéal $\mathfrak{a}$ devient principal dans $\mathbf{Z}[1/\alpha_{ii}]$, égal à $\langle x_i\rangle$, qui est libre de rang 1 (on peut supposer les x_i non nuls).
Puisque $\sum_i \alpha_{ii} = 1$, les α_{ii} sont comaximaux, donc $\mathfrak{a}$ est projectif de type fini et $\mathcal{F}_1(\mathfrak{a}) = \langle 1\rangle$ (ceci est vrai localement donc globalement).
Pour appliquer le point *1* il reste à vérifier que $\mathbf{Z}/\langle a\rangle$ est zéro-dimensionnel. L'élément a annule un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$ de coefficient constant non nul, ce que l'on écrit $aQ(a) = r \neq 0$. Donc, $\mathbf{Z}/\langle a\rangle$ est un quotient de $\mathbf{C} = \mathbf{Z}/\langle r\rangle$. Il suffit de montrer que $\mathbf{C}$ est zéro-dimensionnel. Notons $\mathbf{A} = \mathbb{Z}/\langle r\rangle$. Soit $\overline{u} \in \mathbf{C}$, u annule un polynôme unitaire $R \in \mathbb{Z}[T]$ de degré n. Donc l'anneau $\mathbf{A}[\overline{u}]$ est un quotient de l'anneau $\mathbf{A}[T]/\langle \overline{R}(T)\rangle$, qui est un $\mathbf{A}$-module libre de rang n, et donc est fini. Donc on peut trouver explicitement $k \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 1$ tels que $\overline{u}^k(1 - \overline{u}^\ell) = 0$. □

Remarque. La matrice $A = (\alpha_{ij})$ vérifie les égalités suivantes :

$$ {}^{\mathrm{t}}\underline{y}\,\underline{x} = aA,\ A^2 = A,\ \mathcal{D}_2(A) = 0,\ \mathrm{Tr}(A) = 1,\ \underline{x}A = \underline{x}. $$

On en déduit que A est une matrice de projection de rang 1. En outre, on a $\underline{x}(\mathrm{I}_n - A) = 0$. Et si $\underline{x}\,{}^{\mathrm{t}}\underline{z} = 0$, alors ${}^{\mathrm{t}}\underline{y}\,\underline{x}\,{}^{\mathrm{t}}\underline{z} = 0 = aA\,{}^{\mathrm{t}}\underline{z}$, donc $A\,{}^{\mathrm{t}}\underline{z} = 0$ et ${}^{\mathrm{t}}\underline{z} = (\mathrm{I}_n - A)\,{}^{\mathrm{t}}\underline{z}$. Ceci montre que $\mathrm{I}_n - A$ est une matrice de présentation de $\mathfrak{a}$ (sur le système générateur $(x_1, \ldots, x_n)$). Donc, $\mathfrak{a}$ est isomorphe comme $\mathbf{Z}$-module à $\mathrm{Im}\, A \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{I}_n - A)$. ∎

4. Modules stablement libres

Rappelons qu'un module M est dit *stablement libre* s'il *est supplémentaire d'un libre dans un libre*, autrement dit s'il existe un isomorphisme entre $\mathbf{A}^n$ et $M \oplus \mathbf{A}^r$ pour deux entiers r et n.
On dira alors [1] que M est *de rang* $s = n-r$. Le rang d'un module stablement libre sur un anneau non trivial est bien défini. En effet, si $M \oplus \mathbf{A}^r \simeq \mathbf{A}^n$ et $M \oplus \mathbf{A}^{r'} \simeq \mathbf{A}^{n'}$, alors on a $\mathbf{A}^r \oplus \mathbf{A}^{n'} \simeq \mathbf{A}^{r'} \oplus \mathbf{A}^n$ par le lemme de Shanuel 2.8. À partir d'un isomorphisme $M \oplus \mathbf{A}^r \to \mathbf{A}^n$, on obtient la projection $\pi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ sur $\mathbf{A}^r$ parallèlement à M. Cela donne aussi une application $\mathbf{A}$-linéaire surjective $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^r$ avec $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\varphi \simeq M$: il suffit de poser $\varphi(x) = \pi(x)$ pour tout $x \in \mathbf{A}^n$.
Inversement, si l'on a une application linéaire $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^r$ surjective, il existe $\psi : \mathbf{A}^r \to \mathbf{A}^n$ telle que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^r}$. Alors, $\pi = \psi \circ \varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ est une projection, avec $\operatorname{Ker}\pi = \operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Im}\pi = \operatorname{Im}\psi$ et $\operatorname{Ker}\pi \oplus \operatorname{Im}\pi = \mathbf{A}^n$. Et puisque $\operatorname{Im}\pi \simeq \operatorname{Im}\varphi = \mathbf{A}^r$, le module

$$M = \operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\pi \simeq \operatorname{Coker}\pi = \operatorname{Coker}\psi$$

est stablement libre, et isomorphe à $\operatorname{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}^n} - \pi)$. Rappelons que d'après le théorème II-5.22, dire que $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^r$ est surjective revient à dire que φ est de rang r, c'est-à-dire ici que $\mathcal{D}_r(\varphi) = \langle 1 \rangle$.
Enfin, si l'on part d'une application linéaire injective $\psi : \mathbf{A}^r \to \mathbf{A}^n$, dire qu'il existe $\varphi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^r$ telle que $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^r}$ revient à dire que $\mathcal{D}_r(\psi) = \langle 1 \rangle$ (théorème II-5.14). Résumons la discussion précédente.

4.1. Fait. *Pour un module M les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *M est stablement libre.*
2. *M est isomorphe au noyau d'une matrice surjective.*
3. *M est isomorphe au conoyau d'une matrice injective de rang maximum.*

Ce résultat peut permettre de définir un nouveau codage, spécifique pour les modules stablement libres. Un tel module sera codé par les matrices des applications linéaires φ et ψ. Concernant le dual de M il sera codé par les matrices transposées, comme indiqué dans le fait suivant.

4.2. Fait. *Avec les notations précédentes $M^\star$ est stablement libre, canoniquement isomorphe à* $\operatorname{Coker}{}^t\varphi$ *et à* $\operatorname{Ker}{}^t\psi$.

Ceci est un cas particulier du résultat plus général suivant (voir aussi le fait II-6.3).

---

1. Cette notion de rang sera généralisée, définitions 8.5 puis X-2.2, et le lecteur pourra constater qu'il s'agit bien de généralisations.

4.3. Proposition. *Soit $\varphi : E \to F$ une surjection scindée et $\psi : F \to E$ une section de φ.*
Notons $\pi : E \to E$ la projection $\psi \circ \varphi$, et $j : \operatorname{Ker}\varphi \to E$ l'injection canonique.

1. *$E = \operatorname{Im}\psi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$, $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Ker}\pi \simeq \operatorname{Coker}\pi = \operatorname{Coker}\psi$.*
2. *$\operatorname{Ker}{}^t j = \operatorname{Im}{}^t\varphi$ et ${}^t j$ est surjective, ce qui donne par factorisation un isomorphisme canonique $\operatorname{Coker}{}^t\varphi \xrightarrow{\sim} (\operatorname{Ker}\varphi)^\star$.*

▷ L'application linéaire ψ est un inverse généralisé de φ (définition II-5.16). On a donc $E = \operatorname{Im}\psi \oplus \operatorname{Ker}\varphi$, et ψ et φ définissent des isomorphismes réciproques entre F et $\operatorname{Im}\psi$. La proposition suit facilement (voir le fait II-5.17).□

Quand un module stablement libre est-il libre ?

On obtient alors les résultats suivants, formulés en termes de noyau d'une matrice surjective.

4.4. Proposition. (Quand un module stablement libre est libre, 1)
Soit $n = r + s$ et $R \in \mathbf{A}^{r\times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *R est surjective et le noyau de R est libre.*
2. *Il existe une matrice $S \in \mathbf{A}^{s\times n}$ telle que la matrice $\begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix}$ est inversible.*

En particulier, tout module stablement libre de rang 1 est libre.

▷ *1 ⇒ 2.* Si R est surjective, il existe $R' \in \mathbf{A}^{n\times r}$ avec $RR' = \mathrm{I}_r$.
Les matrices R et R' correspondent aux applications linéaires φ et ψ dans la discussion préliminaire. En particulier, on a $\mathbf{A}^n = \operatorname{Ker} R \oplus \operatorname{Im} R'$. On considère une matrice S' dont les vecteurs colonnes constituent une base du noyau de R. Puisque $\mathbf{A}^n = \operatorname{Ker} R \oplus \operatorname{Im} R'$, la matrice $A' = \begin{bmatrix} S' \mid R' \end{bmatrix}$ a pour colonnes une base de $\mathbf{A}^n$. Elle est inversible et son inverse est de la forme $\begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix}$ car R est la seule matrice qui vérifie $R\,A' = [\,0_{r,n-r} \mid \mathrm{I}_r\,]$.

2 ⇒ 1. Notons $A = \begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix}$ et posons $A' = A^{-1}$, que nous écrivons sous la forme $\begin{bmatrix} S' \mid R' \end{bmatrix}$. On a $RS' = 0_{r,n-r}$, donc

$$\operatorname{Im} S' \subseteq \operatorname{Ker} R \qquad (\alpha),$$

et $RR' = \mathrm{I}_r$. Donc

$$\operatorname{Ker} R \oplus \operatorname{Im} R' = \mathbf{A}^n = \operatorname{Im} S' \oplus \operatorname{Im} R' \qquad (\beta).$$

Enfin, (α) et (β) impliquent $\operatorname{Im} S' = \operatorname{Ker} R$.
Si M est un module stablement libre de rang 1, c'est le noyau d'une matrice surjective $R \in \mathbf{A}^{(n-1)\times n}$. Puisque la matrice est surjective, on obtient $1 \in \mathcal{D}_{n-1}(R)$, et cela donne la ligne S pour compléter R en une matrice inversible (développer le déterminant selon la première ligne). □

4.5. Corollaire. (Quand un module stablement libre est libre, 2)
On considère $R \in \mathbf{A}^{r\times n}$ et $R' \in \mathbf{A}^{n\times r}$ avec $RR' = \mathrm{I}_r$, $s := n - r$. Alors, les modules $\operatorname{Ker} R$ *et* $\operatorname{Coker} R'$ *sont isomorphes et les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le noyau de R est libre.*
2. *Il existe une matrice $S' \in \mathbf{A}^{s\times n}$ telle que $\left[\begin{array}{c|c} S' & R' \end{array}\right]$ est inversible.*
3. *Il existe une matrice $S' \in \mathbf{A}^{s\times n}$ et une matrice $S \in \mathbf{A}^{s\times n}$ telles que*

$$\begin{array}{|c|}\hline S \\ \hline R \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|}\hline S' & R' \\ \hline \end{array} = \mathrm{I}_n.$$

Rappelons qu'un vecteur $x \in \mathbf{A}^q$ est dit *unimodulaire* lorsque ses coordonnées sont des éléments comaximaux. Il est dit *complétable* s'il est le premier vecteur (ligne ou colonne) d'une matrice inversible.

4.6. Proposition. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Tout $\mathbf{A}$-module stablement libre de rang $\geqslant m$ est libre.*
2. *Tout vecteur unimodulaire dans $\mathbf{A}^{q\times 1}$ avec $q > m$ est complétable.*
3. *Tout vecteur unimodulaire dans $\mathbf{A}^q$ avec $q > m$ engendre un sous-module supplémentaire d'un module libre dans $\mathbf{A}^q$.*

▷ Les points *2* et *3* sont clairement équivalents.
1 ⇒ 3. Soit un vecteur unimodulaire $x \in \mathbf{A}^q$ avec $q > m$. Alors, on peut écrire $\mathbf{A}^q = M \oplus \mathbf{A}x$, et M est stablement libre de rang $q - 1 \geqslant m$, donc libre.
3 ⇒ 1. Soit M un $\mathbf{A}$-module stablement libre de rang $n \geqslant m$. On peut écrire $L = M \oplus \mathbf{A}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}x_r$, où $L \simeq \mathbf{A}^{n+r}$. Si $r = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, x_r est un vecteur unimodulaire dans L, donc par hypothèse $\mathbf{A}x_r$ admet un supplémentaire libre dans L. Ainsi, $L/\mathbf{A}x_r \simeq \mathbf{A}^{n+r-1}$, et il en est de même de $M \oplus \mathbf{A}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}x_{r-1}$, qui est isomorphe à $L/\mathbf{A}x_r$. On peut donc conclure par récurrence sur r que M est libre. □

Le stable range de Bass

La notion de stable range est liée aux manipulations élémentaires (de lignes ou de colonnes) et permet dans une certaine mesure de contrôler les modules stablement libres.

4.7. Définition. Soit $n \geqslant 0$. On dit qu'un anneau $\mathbf{A}$ est de *stable range (de Bass) inférieur ou égal à n* lorsque l'on peut « raccourcir » les vecteurs unimodulaires de longueur $n + 1$ au sens suivant :

$$1 \in \langle a, a_1, \ldots, a_n\rangle \implies \exists\, x_1, \ldots, x_n,\ 1 \in \langle a_1 + x_1 a, \ldots, a_n + x_n a\rangle.$$

Dans ce cas on écrit « $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$ ».

Dans l'acronyme Bdim, B fait allusion à «Bass».
La notation $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$ est légitimée d'une part par le point *1* dans le fait suivant, et d'autre part par des résultats à venir qui comparent la Bdim à des dimensions naturelles en algèbre commutative [2].
Le point *3* utilise l'idéal $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ qui sera défini au chapitre IX. La chose à savoir est qu'un élément de $\mathbf{A}$ est inversible si, et seulement si, il est inversible modulo $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$.

4.8. Fait. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau et* $\mathfrak{a}$ *un idéal.*

1. *Si* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$ *et* $n < m$ *alors* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < m$.
2. *Pour tout* $n \geqslant 0$, *on a* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n \Rightarrow \mathsf{Bdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} < n$. *En abrégé, on écrit cette implication sous forme :* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant \mathsf{Bdim}\,\mathbf{A}$.
3. *On a* $\mathsf{Bdim}(\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}) = \mathsf{Bdim}\,\mathbf{A}$ *(en utilisant la même abréviation).*

▷ *1.* On prend $m = n+1$. Soient $(a, a_0, \ldots, a_n)$ avec $1 \in \langle a, a_0, \ldots, a_n\rangle$. On a $1 = ua + va_0 + \ldots$, donc $1 \in \langle a', a_1, \ldots, a_n\rangle$ avec $a' = ua + va_0$. Donc on a x_1, …, x_n dans $\mathbf{A}$ avec $1 \in \langle a_1 + x_1a', \ldots, a_n + x_na'\rangle$, et par suite $1 \in \langle a_0 + y_0a, \ldots, a_n + y_na\rangle$ avec $y_0 = 0$ et $y_i = x_iu$ pour $i \geqslant 1$.
2 et *3.* Laissé à la lectrice □

4.9. Fait. (Vecteurs unimodulaires et transformations élémentaires)
Soit $n \geqslant 0$. *Si* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$ *et* $V \in \mathbf{A}^{n+1}$ *est unimodulaire, il peut être transformé en le vecteur* $(1, 0 \ldots, 0)$ *par des manipulations élémentaires.*

▷ Posons $V = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$, avec $1 \in \langle v_0, v_1, \ldots, v_n\rangle$. On applique la définition avec $a = v_0$, on obtient x_1, …, x_n tels que

$$1 \in \langle v_1 + x_1v_0, \ldots, v_n + x_nv_0\rangle\,.$$

Le vecteur V peut être transformé par manipulations élémentaires en le vecteur $V' = (v_0, v_1 + x_1v_0, \ldots, v_n + x_nv_0) = (v_0, v'_1, \ldots, v'_n)$, et l'on a des y_i tels que $\sum_{i=1}^{n} y_iv'_i = 1$. Par manipulations élémentaires, on peut transformer V' en $(1, v'_1, \ldots, v'_n)$, puis en $(1, 0, \ldots, 0)$. □

La proposition 4.6 et le fait 4.9 donnent le «théorème de Bass» suivant. En fait, le vrai théorème de Bass est plutôt la conjonction du théorème qui suit avec un théorème qui fournit une condition suffisante pour avoir $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$. Nous réaliserons différentes variantes dans les théorèmes XIV-1.4 et XIV-2.6 et le fait XIV-3.3.

4.10. Théorème. (Théorème de Bass, modules stablement libres)
Si $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$, *tout* $\mathbf{A}$*-module stablement libre de rang* $\geqslant n$ *est libre.*

2. Voir par exemple les résultats dans le chapitre XIV qui établissent une comparaison avec les dimensions de Krull et de Heitmann.

5. Constructions naturelles

5.1. Proposition. (Changement d'anneau de base)
Si P est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et si $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un homomorphisme d'anneaux, alors le $\mathbf{B}$-module $\rho_\star(P)$ obtenu par extension des scalaires à $\mathbf{B}$ est projectif de type fini. Si P est isomorphe à l'image d'une matrice de projection $F = (f_{i,j})$, $\rho_\star(P)$ est isomorphe à l'image de la même matrice vue dans $\mathbf{B}$*, c'est-à-dire la matrice de projection $F^\rho = \big(\rho(f_{i,j})\big)$.*

▷ Le changement d'anneau de base conserve les sommes directes et les projections. □

Dans la proposition qui suit, on peut a priori prendre pour ensembles d'indices $I = [\![1..m]\!]$ et $J = [\![1..n]\!]$, mais de toute manière $I \times J$, qui sert d'ensemble d'indices pour la matrice carrée qui définit le *produit de Kronecker* des deux matrices F et G n'est pas égal à $[\![1..mn]\!]$. Ceci est un argument important en faveur de la définition des matrices à la Bourbaki, c'est-à-dire avec des ensembles finis d'indices (pour les lignes et les colonnes) qui ne sont pas nécessairement du type $[\![1..m]\!]$.

5.2. Proposition. (Produit tensoriel)
Si P et Q sont des modules projectifs représentés par les matrices de projection $F = (p_{i,j})_{i,j\in I} \in \mathbf{A}^{I\times I}$ et $G = (q_{k,\ell})_{k,\ell\in J} \in \mathbf{A}^{J\times J}$, alors le produit tensoriel $P \otimes Q$ est un module projectif de type fini représenté par le produit de Kronecker

$$F \otimes G = \big(r_{(i,k),(j,\ell)}\big)_{(i,k),(j,\ell)\in I\times J},$$

où $r_{(i,k),(j,\ell)} = p_{i,j}q_{k,\ell}$.

▷ Supposons $P \oplus P' = \mathbf{A}^m$ et $Q \oplus Q' = \mathbf{A}^n$. La matrice F (resp. G) représente la projection sur P (resp. Q) parallèlement à P' (resp Q'). Alors, la matrice produit de Kronecker $F \otimes G$ représente la projection de $\mathbf{A}^m \otimes \mathbf{A}^n$ sur $P \otimes Q$, parallèlement au sous-espace $(P' \otimes Q) \oplus (P \otimes Q') \oplus (P' \otimes Q')$.□

5.3. Proposition. (Dual d'un module projectif de type fini, 2)
Si P est représenté par la matrice de projection $F = (p_{i,j})_{i,j\in I} \in \mathbf{A}^{I\times I}$, alors le dual de P est un module projectif de type fini représenté par la matrice transposée de F. Si x est un vecteur colonne dans $\operatorname{Im} F$ *et α un vecteur colonne dans l'image de ${}^{\mathrm{t}}F$, le scalaire $\alpha(x)$ est l'unique coefficient de la matrice ${}^{\mathrm{t}}\alpha\, x$.*

▷ Ce point résulte du fait 2.2. □

5.4. Proposition. (Modules d'applications linéaires)

1. *Si P ou Q est projectif de type fini, l'homomorphisme naturel (page 262)*
$$\theta_{P,Q} : P^\star \otimes Q \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P, Q)$$
est un isomorphisme.

2. Si P et Q sont projectifs de type fini, le module $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,Q)$ est un module projectif de type fini canoniquement isomorphe à $P^\star \otimes Q$, représenté par la matrice ${}^{\mathrm{t}}F \otimes G$.

3. Un $\mathbf{A}$-module P est projectif de type fini si, et seulement si, l'homomorphisme naturel θ_P est un isomorphisme.

1. Supposons $P \oplus P' = \mathbf{A}^m$. On a des isomorphismes

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^m, Q) &\simeq \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,Q) \oplus \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P',Q),\\ (\mathbf{A}^m)^\star \otimes Q &\simeq (P \oplus P')^\star \otimes Q\\ &\simeq (P^\star \oplus (P')^\star) \otimes Q\\ &\simeq \big(P^\star \otimes Q\big) \oplus \big((P')^\star \otimes Q\big).\end{aligned}$$

Ces isomorphismes sont compatibles avec les homomorphismes naturels

$$\begin{aligned}Q^m \simeq (\mathbf{A}^m)^\star \otimes Q &\longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^m, Q) \simeq Q^m,\\ P^\star \otimes Q &\longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,Q),\\ (P')^\star \otimes Q &\longrightarrow \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P',Q).\end{aligned}$$

Comme le premier est un isomorphisme, les autres le sont également.
Le cas où Q est projectif de type fini se traite de façon analogue.
2. Cas particulier du point *1.*
3. Résulte du point *1.* et du fait que P est projectif de type fini si l'image de θ_P contient Id_P (théorème 2.1 ($b3$)). □

En utilisant la commutation de l'extension des scalaires avec le produit tensoriel on obtient alors le corollaire suivant.

5.5. Corollaire. *Si P ou Q est projectif de type fini (sur $\mathbf{A}$), et si $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ est une algèbre, l'homomorphisme naturel*

$$\rho_\star\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,Q)\big) \to \mathrm{L}_{\mathbf{B}}\big(\rho_\star(P), \rho_\star(Q)\big)$$

est un isomorphisme.

6. Théorème de structure locale

Dans cet ouvrage, nous donnons plusieurs démonstrations du théorème de structure locale des modules projectifs de type fini. Il y a la voie ouverte par les idéaux de Fitting, qui solde la question le plus rapidement. C'est l'objet de cette section.
Il y a une méthode éclair basée sur une sorte de formule magique donnée en exercice X-3. Cette solution miracle est en fait directement inspirée par une autre approche du problème, basée sur la « relecture dynamique » du lemme de la liberté locale page 499. Cette relecture dynamique est expliquée page 889 dans la section XV-5.
Nous considérons cependant que ce qui éclaire le mieux la situation est une voie d'accès entièrement basée sur les matrices de projection et sur des

explications plus structurelles qui font intervenir l'usage systématique du déterminant des endomorphismes des modules projectifs de type fini. Ceci sera fait au chapitre X.

6.1. Théorème. (Structure locale et idéaux de Fitting d'un module projectif de type fini, 1)

1. *Un* $\mathbf{A}$*-module* P *de présentation finie est projectif de type fini si, et seulement si, ses idéaux de Fitting sont (engendrés par des) idempotents.*
2. *Plus précisément pour la réciproque, supposons qu'un* $\mathbf{A}$*-module* P *de présentation finie ait ses idéaux de Fitting idempotents, et que* $G \in \mathbf{A}^{q\times n}$ *soit une matrice de présentation de* P*, correspondant à un système de* q *générateurs.*
   Notons f_h *l'idempotent qui engendre* $\mathcal{F}_h(P)$*, et* $r_h := f_h - f_{h-1}$*.*
   a. $(r_0, \dots, r_q)$ *est un système fondamental d'idempotents orthogonaux.*
   b. *Soient* $t_{h,j}$ *un mineur d'ordre* $q-h$ *de* G*, et* $s_{h,j} := t_{h,j} r_h$*. Alors, le* $\mathbf{A}[1/s_{h,j}]$*-module* $P[1/s_{h,j}]$ *est libre de rang* h*.*
   c. *Les éléments* $s_{h,j}$ *sont comaximaux.*
   d. *On a* $r_k = 1$ *si, et seulement si, la matrice* G *est de rang* $q-k$*.*
   e. *Le module* P *est projectif de type fini.*
3. *En particulier, un module projectif de type fini devient libre après localisation en un nombre fini d'éléments comaximaux.*

D Le théorème 2.3 nous dit que le module P présenté par la matrice G est projectif si, et seulement si, la matrice G est localement simple. On applique ensuite la caractérisation des matrices localement simples par leurs idéaux déterminantiels donnée dans le théorème II-5.26, ainsi que la description précise de la structure des matrices localement simples donnée dans ce théorème (points *5* et *7* du théorème).
Note : Le point *3* peut être obtenu plus directement en appliquant le théorème II-5.26 à une matrice idempotente (donc localement simple) dont l'image est isomorphe au module P. □

Ainsi, les modules projectifs de type fini sont localement libres, au sens fort donné dans le théorème 1.1.

Dans la section X-1 nous donnerons une preuve alternative pour le théorème 1.1, plus intuitive et plus éclairante que celle que nous venons de fournir. En outre, les éléments comaximaux qui fournissent des localisations libres seront moins nombreux.

Remarque. On peut donc tester si un module de présentation finie est projectif ou non lorsque l'on sait tester si ses idéaux de Fitting sont idempotents

ou non. Ceci est possible si l'on sait tester l'appartenance $x \in \langle a_1, \ldots, a_h \rangle$ pour tout système $(x, a_1, \ldots, a_h)$ d'éléments de $\mathbf{A}$, c.-à-d. si l'anneau est fortement discret. On pourra comparer à [MRR] chap. III exercice 4 p. 96. ∎

Annulateur d'un module projectif de type fini

6.2. Lemme. *L'annulateur d'un module projectif de type fini P est égal à son premier idéal de Fitting $\mathcal{F}_0(P)$, il est engendré par un idempotent.*

▷ On sait que les idéaux de Fitting sont engendrés par des idempotents. On sait aussi que $\mathcal{F}_0(P) \subseteq \mathrm{Ann}(P)$ (lemme IV-9.6).
Voyons l'inclusion contraire. Le fait II-6.6 implique que l'annulateur d'un module de type fini se comporte bien par localisation, donc pour tout monoïde S, on a $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}_S}(P_S) = \big(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(P)\big)_S$. On sait qu'il en est de même pour les idéaux de Fitting d'un module de présentation finie. Par ailleurs, pour prouver une inclusion d'idéaux, on peut localiser en des éléments comaximaux. On choisit donc des éléments comaximaux qui rendent le module P libre, auquel cas le résultat est évident. □

La démonstration précédente illustre la force du théorème de structure locale (point *3* du théorème 6.1). La section suivante en est une autre illustration.

7. Modules localement monogènes projectifs et idéaux projectifs de type fini

Modules localement monogènes

Un $\mathbf{A}$-module M est dit *monogène* ou *cyclique* s'il est engendré par un seul élément : $M = \mathbf{A}a$. Autrement dit, s'il est isomorphe à un quotient $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$.

En mathématiques classiques un module est dit *localement monogène* s'il devient monogène après localisation en n'importe quel idéal premier. Il semble difficile de fournir un énoncé équivalent qui fasse sens en mathématiques constructives. Rappelons aussi que la remarque page 30 montre que la notion ne semble pas pertinente lorsque le module n'est pas supposé de type fini. Néanmoins lorsque l'on se limite aux modules de type fini il n'y a pas de problème. La définition suivante a déjà été donnée avant le fait II-2.5.

7.1. Définition. Un $\mathbf{A}$-module *de type fini* M est dit *localement monogène* s'il existe des monoïdes comaximaux S_1, …, S_n de $\mathbf{A}$ tels que chaque M_{S_j} est monogène comme $\mathbf{A}_{S_j}$-module. Dans le cas d'un idéal on parle d'*idéal localement principal*.

Notez que la propriété «locale concrète» dans la définition précédente, sans l'hypothèse que M est de type fini, implique que M est de type fini (principe local-global II-3.6).

Nous aurons besoin de la remarque suivante.

7.2. Fait. (Lemme des localisations successives, 1)
Si $s_1, \ldots, s_n$ sont des éléments comaximaux de $\mathbf{A}$ et si pour chaque i, on a des éléments $s_{i,1}, \ldots, s_{i,k_i}$, comaximaux dans $\mathbf{A}[1/s_i]$, alors les $s_i s_{i,j}$ sont comaximaux dans $\mathbf{A}$.

Voici maintenant, en point *3* du théorème suivant, une machinerie calculatoire efficace pour les modules localement monogènes.

7.3. Théorème. (Modules de type fini localement monogènes)
Soit $M = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$ un module de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Le module M est localement monogène.*
2. *Il existe n éléments comaximaux s_i de $\mathbf{A}$ tels que pour chaque i on ait l'égalité $M =_{\mathbf{A}_{s_i}} \langle x_i \rangle$.*
3. *Il existe une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ qui vérifie :*
$$\begin{cases} \sum a_{ii} = 1 \\ a_{\ell j} x_i = a_{\ell i} x_j \qquad \forall i, j, \ell \in [\![1..n]\!], \end{cases} \tag{3}$$
autrement dit, pour chaque ligne ℓ, la matrice suivante est formellement de rang $\leqslant 1$ (ses mineurs d'ordre 2 sont nuls)
$$\begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \cdots & a_{\ell n} \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$
4. $\bigwedge^2_{\mathbf{A}}(M) = 0$.
5. $\mathcal{F}_1(M) = \langle 1 \rangle$.
6*. *Après localisation en n'importe quel idéal premier, M est monogène.*
7*. *Après localisation en n'importe quel idéal maximal, M est monogène.*

D *3 ⇒ 2 ⇒ 1.* Clair, avec $s_i = a_{ii}$ dans le point *2*.
Montrons qu'un module monogène vérifie la condition *3*.
Si $M = \langle g \rangle$, on a $g = \sum_{i=1}^n u_i x_i$ et $x_i = y_i g$. Posons $b_{ij} = u_i y_j$.
Alors, pour tous i, j, $\ell \in [\![1..n]\!]$, on a $b_{\ell j} x_i = u_\ell y_i y_j g = b_{\ell i} x_j$. En outre :
$$g = \sum_{i=1}^n u_i x_i = \sum_{i=1}^n u_i y_i g = \big(\sum_{i=1}^n b_{ii}\big) g.$$
Posons $s = 1 - \sum_{i=1}^n b_{ii}$. On a $sg = 0$, et donc $sx_k = 0$ pour tout k.
Prenons $a_{ij} = b_{ij}$ pour $(i,j) \neq (n,n)$ et $a_{nn} = b_{nn} + s$. Alors, la matrice (a_{ij}) vérifie bien les équations (3).
1 ⇒ 3. La propriété *3* peut être vue comme l'existence d'une solution pour un système linéaire dont les coefficients s'expriment en fonction des

générateurs x_i. Or un module monogène vérifie la propriété *3.* On peut donc appliquer le principe local-global de base.
Ainsi, *1* $\Leftrightarrow$ *2* $\Leftrightarrow$ *3.*
1 $\Rightarrow$ *4* et *1* $\Rightarrow$ *5.* Parce que les foncteurs $\bigwedge^2_{\mathbf{A}} \bullet$ et $\mathcal{F}_1(\bullet)$ se comportent bien par localisation.
5 $\Rightarrow$ *1.* M est le quotient d'un module de présentation finie M' tel que $\mathcal{F}_1(M') = \langle 1 \rangle$, on peut donc supposer sans perte de généralité que M est de présentation finie avec une matrice de présentation $B \in \mathbf{A}^{n\times m}$. Par hypothèse, les mineurs d'ordre $n-1$ de la matrice B sont comaximaux. Lorsque l'on inverse l'un de ces mineurs, par le lemme du mineur inversible page 42, la matrice B est équivalente à une matrice

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & 0_{n-1,m-n+1} \\ 0_{1,n-1} & B_1 \end{bmatrix},$$

et la matrice $B_1 \in \mathbf{A}^{1\times(m-n+1)}$ est aussi une matrice de présentation de M.
Supposons *4* et $n \geqslant 2$, et montrons que M est, après localisation en des éléments comaximaux convenables, engendré par $n-1$ éléments. Cela suffira à montrer (en utilisant une récurrence sur n) que *4* $\Rightarrow$ *1*, en utilisant le fait 7.2.
Le module $\bigwedge^2_{\mathbf{A}}(M)$ est engendré par les $v_{j,k} = x_j \wedge x_k$ $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$ et les syzygies entre les $v_{j,k}$ sont toutes obtenues à partir des syzygies entre les x_i. Donc si $\bigwedge^2_{\mathbf{A}}(M) = 0$, M est le quotient d'un module de présentation finie M' tel que $\bigwedge^2_{\mathbf{A}}(M') = 0$. On suppose alors sans perte de généralité que M est de présentation finie avec une matrice de présentation $A = (a_{ij})$. Une matrice de présentation B pour $\bigwedge^2_{\mathbf{A}}(M)$ avec les générateurs $v_{j,k}$ est obtenue comme indiqué dans la proposition IV-4.9. C'est une matrice de format $\frac{n(n-1)}{2} \times m$ (pour un m convenable), et chaque coefficient de B est nul ou égal à un a_{ij}. Cette matrice est surjective donc $\mathcal{D}_{n(n-1)/2}(B) = \langle 1 \rangle$ et les a_{ij} sont comaximaux. Or lorsque l'on passe de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}[1/a_{ij}]$, x_i devient combinaison linéaire des x_k $(k \neq i)$ et M est engendré par $n-1$ éléments.
1 $\Rightarrow$ *6** $\Rightarrow$ *7**. Évident.
La preuve que *7** implique *3* est non constructive : on remplace dans la preuve que *1* implique *3* l'existence d'une solution pour un système linéaire en vertu du principe local-global de base, par l'existence d'une solution en vertu du principe local-global abstrait correspondant. □

Dans la suite, nous appellerons *matrice de localisation monogène pour le n-uplet* $(x_1, \ldots, x_n)$ une matrice (a_{ij}) qui vérifie les équations (3). Si les x_i sont des éléments de $\mathbf{A}$, ils engendrent un idéal localement principal et nous parlerons de *matrice de localisation principale.*

Remarque. Dans le cas d'un module engendré par 2 éléments $M = \mathbf{A}x + \mathbf{A}y$, les équations (3) sont très simples et une matrice de localisation monogène

pour (x,y) est une matrice $\begin{bmatrix} 1-u & -b \\ -a & u \end{bmatrix}$ qui vérifie :

$$\begin{vmatrix} 1-u & -b \\ x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a & u \\ x & y \end{vmatrix} = 0, \text{ i.e. } (1-u)y = bx \quad \text{et} \quad ux = ay \quad (4)$$

■

7.4. Proposition. *Soit $M = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$ un $\mathbf{A}$-module de type fini.*

1. *Si M est localement monogène et si $A = (a_{ij})$ est une matrice de localisation monogène pour $(x_1, \ldots, x_n)$, nous avons les résultats suivants.*
   a. $[\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]\, A = [\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]$.
   b. *Les idéaux $\mathcal{D}_2(A)$ et $\mathcal{D}_1(A^2 - A)$ annulent M.*
   c. *On a $a_{ii}M \subseteq \mathbf{A}x_i$, et sur l'anneau $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[\frac{1}{a_{ii}}]$, on a $M =_{\mathbf{A}_i} \mathbf{A}_i x_i$.*
   d. $\langle a_{1j}, \ldots, a_{nj} \rangle\, M = \mathbf{A}x_j$.
   e. *Plus généralement, pour n'importe quel élément $y = \sum \alpha_i x_i$ de M, si l'on pose $\alpha = {}^{\mathrm{t}}[\, \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n \,]$ et $\beta = A\,\alpha$, alors $y = \sum_i \beta_i x_i$ et l'on obtient une égalité de matrices carrées à coefficients dans M :*

$$\beta x = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} [\, x_1 \ \cdots \ x_n \,] = A\, y, \quad \textit{i.e.} \quad \forall i,j \ \beta_i x_j = a_{ij} y \quad (5)$$

   En particulier, $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle\, M = \mathbf{A}y$.

2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   - *M est isomorphe à l'image d'une matrice de projection de rang 1.*
   - *M est fidèle (i.e. $\mathrm{Ann}(M) = 0$) et localement monogène.*

   Dans ce cas, soit A une matrice de localisation monogène pour $(x_1, \ldots, x_n)$. On obtient :
   - *A est une matrice de projection de rang 1,*
   - *la suite ci-après est exacte : $\mathbf{A}^n \xrightarrow{\mathrm{I}_n - A} \mathbf{A}^n \xrightarrow{[\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]} M \to 0$,*
   - *$M \simeq \mathrm{Im}\, A$.*

▷ *1.* Le point *1c* est clair, et *1d* est un cas particulier de *1e*.

1a. La j-ème coordonnée de $[\,x_1\ \cdots\ x_n\,]\,A$ s'écrit :

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} a_{ij}x_i = \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_{ii}x_j = x_j.$$

1b. Montrons que tout mineur d'ordre 2 de A annule x_i : on considère la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} a_{ji} & a_{j\ell} & a_{jh} \\ a_{ki} & a_{k\ell} & a_{kh} \\ x_i & x_\ell & x_h \end{bmatrix}.$$

Son déterminant est nul (en développant par rapport à la première ligne) et le développement par rapport à la première colonne fournit

$$(a_{j\ell}a_{kh} - a_{jh}a_{k\ell})x_i = 0.$$

Montrons que $A^2 = A$ modulo $\mathrm{Ann}(M)$. Ce qui suit est écrit modulo cet annulateur. On vient de montrer que les mineurs d'ordre 2 de A sont nuls. Ainsi, A est une matrice de localisation monogène pour chacune de ses lignes L_i. D'après le point *1a* appliqué à L_i, on a $L_i\,A = L_i$, et donc $A^2 = A$.
1e. Notons $\underline{x} = [\,x_1\ \cdots\ x_n\,]$. D'une part

$$\sum\nolimits_i \beta_i x_i = \underline{x}\beta = \underline{x}A\alpha = \underline{x}\alpha = \sum\nolimits_i \alpha_i x_i.$$

D'autre part,

$$\beta_i x_j = \sum\nolimits_k \alpha_k\, a_{ik}\, x_j = \sum\nolimits_k \alpha_k\, a_{ij}\, x_k = a_{ij}\,\big(\sum\nolimits_k \alpha_k x_k\big) = a_{ij}\,y.$$

Ceci montre l'égalité (5) et l'on en déduit $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle\, M = \mathbf{A}y$.
2. Supposons tout d'abord que M est isomorphe à l'image d'une matrice de projection A de rang 1. Notons x_i la i-ème colonne de A. Comme $\mathcal{D}_2(A) = 0$, on a les égalités $a_{\ell j}x_i = a_{\ell i}x_j$ pour $i, j, \ell \in [\![1..n]\!]$. Ceci implique que sur l'anneau $\mathbf{A}[1/a_{\ell j}]$, M est engendré par x_j, et puisque $\mathcal{D}_1(A) = \langle 1 \rangle$, le module est localement monogène. Enfin, soit $b \in \mathrm{Ann}(M)$, alors $bA = 0$, et $\mathcal{D}_1(A) = \langle 1 \rangle$ implique $b = 0$: le module est fidèle.
Supposons maintenant que M est localement monogène, et que A est une matrice de localisation monogène pour un système générateur $(x_1, \ldots, x_n)$. Si M est fidèle, vu *1b*, on a $\mathcal{D}_2(A) = 0$ et $A^2 = A$ donc A est une matrice de projection de rang $\leqslant 1$. Puisque $\mathrm{Tr}(A) = 1$, A est de rang 1. Vu *1a*, la matrice $\mathrm{I}_n - A$ est une matrice de syzygies pour $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit maintenant $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ une syzygie arbitraire en les x_i. Posons comme dans *1e*

$$\beta = {}^{\mathrm{t}}[\,\beta_1\ \cdots\ \beta_n\,] = A\ {}^{\mathrm{t}}[\,\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n\,],$$

on obtient $\langle \beta_1, \ldots, \beta_n \rangle\, M = 0$ et, puisque M est fidèle, $\beta = 0$.
Ainsi, $A\ {}^{\mathrm{t}}[\,\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n\,] = 0$ et $(\mathrm{I}_n - A)\ {}^{\mathrm{t}}[\,\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n\,] = {}^{\mathrm{t}}[\,\alpha_1\ \cdots\ \alpha_n\,]$: toute syzygie pour $(x_1, \ldots, x_n)$ est une combinaison linéaire des colonnes de $\mathrm{I}_n - A$. Ceci montre que $\mathrm{I}_n - A$ est une matrice de présentation de M pour le système générateur $(x_1, \ldots, x_n)$. Puisque $A^2 = A$, on a $M \simeq \mathrm{Coker}(\mathrm{I}_n - A) \simeq \mathrm{Im}\,A$.□

Modules monogènes projectifs

La description suivante s'applique en particulier pour les idéaux principaux projectifs.

7.5. Lemme. *Pour un module monogène M, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *M est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.*
2. *$\mathrm{Ann}(M) = \langle s \rangle$ avec s idempotent.*
3. *$M \simeq \langle r \rangle$ avec r idempotent.*

D Les implications *2* $\Rightarrow$ *3* $\Rightarrow$ *1* sont évidentes, et l'implication *1* $\Rightarrow$ *2* est donnée dans le lemme 6.2.

□

On en déduit qu'un anneau $\mathbf{A}$ est *quasi intègre* si, et seulement si, tout idéal principal est projectif, ce qui justifie la terminologie anglaise de *pp-ring* (principal ideals are projective).

Modules localement monogènes projectifs

Le lemme suivant généralise l'équivalence donnée dans la proposition 7.4 entre module localement monogène fidèle et image d'une matrice de projection de rang 1.

7.6. Lemme. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *M est localement monogène et $\mathrm{Ann}(M)$ est engendré par un idempotent.*
2. *M est projectif de type fini et localement monogène.*
3. *M est isomorphe à l'image d'une matrice de projection de rang $\leqslant 1$.*

D *1* $\Rightarrow$ *2.* On localise en des éléments comaximaux qui rendent le module monogène et l'on applique le lemme 7.5.
Dans *2* et *3* on note F une matrice de projection, carrée d'ordre n, ayant M pour image. Après localisation en des éléments comaximaux elle devient semblable à une matrice de projection standard $\mathrm{I}_{k,n}$, k dépendant de la localisation.
2 $\Rightarrow$ *3.* Si $k > 1$, on obtient dans la localisation correspondante $\mathcal{F}_1(M) = \langle 0 \rangle$. Comme on a déjà $\mathcal{F}_1(M) = \langle 1 \rangle$, la localisation est triviale. Le rang de F est donc $\leqslant 1$ dans toutes les localisations.
3 $\Rightarrow$ *1.* Après localisation, comme la matrice est de rang $\leqslant 1$, on a $k \leqslant 1$. Le module devient donc monogène. Par ailleurs, d'après le lemme 6.2, $\mathrm{Ann}(M)$ est engendré par un idempotent. □

Idéaux projectifs de type fini

Rappelons qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est dit *fidèle* s'il est fidèle comme $\mathbf{A}$-module.

Remarque. Dans la terminologie la plus répandue, un idéal est appelé régulier s'il contient un élément régulier. A fortiori c'est un idéal fidèle. Nous n'utiliserons pas cette terminologie car elle nous semble prêter à confusion. ∎

7.7. Lemme.

1. *Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{a}$ de type fini et $\mathfrak{b}$ localement principal, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{bc} = \mathfrak{a}$.*
2. *Un idéal $\mathfrak{a}$ est projectif de type fini si, et seulement si, il est localement principal et son annulateur est engendré par un idempotent.*
3. *Un idéal $\mathfrak{a}$ est quasi libre si, et seulement si, il est principal et son annulateur est engendré par un idempotent.*
4. *Soient $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ des idéaux et $\mathfrak{b}$ un idéal projectif de type fini fidèle. Si $\mathfrak{ba}_1 = \mathfrak{ba}_2$, alors $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2$.*
5. *Un idéal est inversible si, et seulement si, il est localement principal et il contient un élément régulier.*

▷ *1.* Il suffit de montrer que pour un $a \in \mathfrak{b}$ arbitraire on a un idéal de type fini $\mathfrak{c}$ tel que $\mathfrak{b}\,\mathfrak{c} = \langle a \rangle$. Ceci est donné par le point *1e* de la proposition 7.4 lorsque $M = \mathfrak{b}$.
2. L'implication directe utilise le corollaire II-5.23 : si une application linéaire $\mathbf{A}^k \to \mathbf{A}$ est injective avec $k > 1$, l'anneau est trivial. Donc dans chaque localisation, l'idéal $\mathfrak{a}$ est non seulement libre mais monogène. L'implication réciproque est dans le lemme 7.6.
3. Pour l'implication directe, on écrit $\mathfrak{a} \simeq \bigoplus_{i \in [\![1..n]\!]} \langle e_i \rangle$, où les e_i sont des idempotents avec e_{i+1} multiple de e_i. On veut montrer que si $n > 1$, $e_2 = 0$. On localise l'injection $\mathfrak{a} \to \mathbf{A}$ en e_2 et l'on obtient une injection

$$\mathbf{A}_{e_2} \oplus \mathbf{A}_{e_2} \simeq e_1\mathbf{A}_{e_2} \oplus e_2\mathbf{A}_{e_2} \hookrightarrow \bigoplus e_i\mathbf{A}_{e_2} \simeq \mathfrak{a}\mathbf{A}_{e_2} \hookrightarrow \mathbf{A}_{e_2},$$

donc $\mathbf{A}_{e_2}$ est nul (corollaire II-5.23).
4. L'idéal $\mathfrak{b}$ devient libre (après localisation), et monogène d'après le point *2.* Si en plus il est fidèle, son annulateur est nul, et le générateur est un élément régulier.
5. Le point *1* implique qu'un idéal localement principal qui contient un élément régulier est inversible. Réciproquement, soit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ un idéal inversible. Il existe c régulier dans $\mathfrak{a}$ et un idéal $\mathfrak{b}$ tels que $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle c \rangle$. Soient $b_1, \ldots, b_n \in \mathfrak{b}$ avec $\sum_i a_i b_i = c$. On a pour chaque i, $j \in [\![1..n]\!]$ un $c_{ij} \in \mathbf{A}$ tel que $b_i a_j = c\, c_{ij}$. En utilisant le fait que c est régulier on vérifie sans peine que la matrice $(c_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une matrice de localisation principale pour $(a_1, \ldots, a_n)$. □

8. Déterminant, polynôme caractéristique, polynôme fondamental et polynôme rang

Si M est un $\mathbf{A}$-module, nous notons $M[X]$ le $\mathbf{A}[X]$-module obtenu par extension des scalaires.
Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau intègre, si P est un module projectif de type fini, isomorphe à l'image d'un projecteur $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$, on obtient par passage au corps des fractions un espace vectoriel P' de dimension finie, disons k. On en déduit que le polynôme caractéristique de la matrice F est égal à $(X-1)^k X^{n-k}$. De manière plus simple encore, le déterminant de la multiplication par X dans $P'[X]$ est égal à X^k, i.e. :

$$\det\big((\mathrm{I}_n - F) + XF\big) = X^k.$$

Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau arbitraire, nous allons voir que l'on peut définir l'analogue du polynôme X^k ci-dessus. Tout d'abord, nous introduisons le déterminant d'un endomorphisme d'un module projectif de type fini.

Le déterminant, le polynôme caractéristique et l'endomorphisme cotransposé

8.1. Théorème et définition. *Soit P un module projectif de type fini.*

1. *Soit $\varphi \in \mathrm{End}(P)$. Supposons que $P \oplus Q_1$ soit isomorphe à un module libre et notons $\varphi_1 = \varphi \oplus \mathrm{Id}_{Q_1}$.*
   a. *Le déterminant de φ_1 ne dépend que de φ. Le scalaire ainsi défini est appelé le* déterminant de l'endomorphisme φ. *On le note* $\det(\varphi)$ *ou* $\det\varphi$.
   b. *Le déterminant de l'endomorphisme $X\mathrm{Id}_{P[X]} - \varphi$ de $P[X]$ est appelé le* polynôme caractéristique de l'endomorphisme φ. *On le note* $\mathrm{C}_\varphi(X)$ *; et l'on a* $\mathrm{C}_{-\varphi}(0) = \det\varphi$.
   c. *Considérons l'endomorphisme cotransposé* $\mathrm{Adj}(\varphi_1) = \widetilde{\varphi_1}$ *de φ_1. Il opère sur P, et l'endomorphisme de P ainsi défini ne dépend que de φ. On l'appelle* l'endomorphisme cotransposé de φ *et on le note $\widetilde{\varphi}$ ou* $\mathrm{Adj}(\varphi)$.
   d. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme. Par extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$, on obtient un module projectif de type fini $\rho_\star(P)$ avec un endomorphisme $\rho_\star(\varphi)$. Alors les objets définis précédemment se comportent «fonctoriellemnt», c'est-à-dire précisément*

$$\det\big(\rho_\star(\varphi)\big) = \rho\big(\det(\varphi)\big), \qquad \mathrm{C}_{\rho_\star(\varphi)}(X) = \rho\big(\mathrm{C}_\varphi(X)\big),$$
$$\mathrm{Adj}\,\big(\rho_\star(\varphi)\big) = \rho_\star\big(\mathrm{Adj}(\varphi)\big).$$

2. *On a $\det(\mathrm{Id}_p) = 1$, et si $\psi : P \to P$ est un autre endomorphisme de P, on a :*

$$\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi)\det(\psi).$$

3. *Si P' est un autre module projectif de type fini et si* $\psi = \begin{array}{|c|c|}\hline \varphi & \gamma \\ \hline 0 & \varphi' \\ \hline \end{array}$ *est un endomorphisme de $P \oplus P'$ « triangulaire par blocs», on a*
$$\det(\psi) = dd' \quad \textit{et} \quad \widetilde{\psi} = \begin{array}{|c|c|}\hline d'\widetilde{\varphi} & \eta \\ \hline 0 & d\widetilde{\varphi'} \\ \hline \end{array}, \quad \textit{où } d = \det(\varphi),\ d' = \det(\varphi').$$

4. *Si $\varphi : P \to P$ et $\varphi' : P' \to P'$ sont des endomorphismes de modules projectifs de type fini, et si $\alpha \circ \varphi = \varphi' \circ \alpha$ pour un isomorphisme $\alpha : P \to P'$, alors* $\det(\varphi) = \det(\varphi')$.

5. *L'application linéaire φ est un isomorphisme (resp. est injective) si, et seulement si,* $\det(\varphi)$ *est inversible (resp. est régulier).*

6. *L'égalité classique suivante est satisfaite :*
$$\widetilde{\varphi} \circ \varphi \;=\; \varphi \circ \widetilde{\varphi} \;=\; \det(\varphi)\,\mathrm{Id}_P.$$

7. *Le théorème de Cayley-Hamilton s'applique :* $\mathrm{C}_\varphi(\varphi) = 0$.

8. *On note*
$$\Gamma_\varphi(X) \;:=\; -\frac{\mathrm{C}_{-\varphi}(-X) - \mathrm{C}_{-\varphi}(0)}{X} \;=\; \frac{-\,\mathrm{C}_{-\varphi}(-X) + \det(\varphi)}{X},$$
de sorte que $\mathrm{C}_{-\varphi}(-X) = -X\Gamma_\varphi(X) + \det(\varphi)$. *Alors* $\widetilde{\varphi} = \Gamma_\varphi(\varphi)$.

D On remarque que les définitions données dans le point *1* redonnent bien les objets usuels de même nom dans le cas où le module est libre. De même, la formule du point *8* donne, lorsque φ est un endomorphisme d'un module libre, le même Γ_φ que la formule du lemme III-1.4. Il n'y a donc pas de conflit de notations.

1a. Supposons que $\mathbf{A}^m \simeq P \oplus Q_1$ et $\mathbf{A}^n \simeq P \oplus Q_2$, et considérons la somme directe
$$\mathbf{A}^{m+n} \simeq P \,\oplus\, Q_1 \oplus P \,\oplus\, Q_2. \qquad (*)$$
On pose $\varphi_1 = \varphi \oplus \mathrm{Id}_{Q_1}$ et $\varphi_2 = \varphi \oplus \mathrm{Id}_{Q_2}$. On doit démontrer l'égalité $\det\varphi_1 = \det\varphi_2$. On considère l'endomorphisme
$$\phi = \varphi \,\oplus\, \mathrm{Id}_{Q_1} \oplus \mathrm{Id}_P \oplus \mathrm{Id}_{Q_2}$$
de $\mathbf{A}^{m+n}$, de sorte que ϕ est conjugué de $\varphi_1 \oplus \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^n}$ et de $\varphi_2 \oplus \mathrm{Id}_{\mathbf{A}^m}$. D'où $\det\phi = \det\varphi_1$ et $\det\phi = \det\varphi_2$.

1c. On procède pour ce point de la même manière. La cotransposition des endomorphismes vérifie le point *3* dans le cas des modules libres, donc $\widetilde{\phi}$ opère sur $P \oplus Q_1$ et se restreint en $\widetilde{\varphi_1}$. En outre, comme $\widetilde{\phi} = \Gamma_\phi(\phi)$, $\widetilde{\phi}$ opère sur chaque composante dans la somme directe $(*)$. De même $\widetilde{\phi}$ opère sur $P \oplus Q_2$ et se restreint en $\widetilde{\varphi_2}$. Ainsi, $\widetilde{\varphi_1}$ et $\widetilde{\varphi_2}$ opèrent tous deux sur P de la même manière que $\widetilde{\phi}$. Notez que $\widetilde{\varphi} = \Gamma_\phi(\varphi)$.

1d. Ce point résulte directement des définitions.

Tous les points restants du théorème résultent du cas libre (où le résultat est clair), du théorème de structure locale et du point *1d*. En effet les énoncés peuvent être certifiés en les vérifiant après localisation est éléments comaximaux, et les modules projectifs de type fini concernés deviennent simultanément libres après localisation en un système d'éléments comaximaux. Nous donnons néanmoins des démonstrations plus directes.
Les affirmations *2*, *3*, *4* et *5* résultent facilement des définitions, sachant que les résultats sont vrais dans le cas libre.
6. On a défini $\widetilde{\varphi}$ comme la restriction de $\widetilde{\varphi_1}$ à P. Et puisque φ_1 est un endomorphisme d'un module libre, on a

$$\widetilde{\varphi_1} \circ \varphi_1 = \det(\varphi_1)\,\mathrm{Id}_{P\oplus Q_1},$$

ce qui donne par restriction à P l'égalité souhaitée $\widetilde{\varphi} \circ \varphi = \det(\varphi)\,\mathrm{Id}_P$, car $\det\varphi = \det\varphi_1$.
7. Nous pouvons reproduire la preuve suivante, classique dans le cas des modules libres. Considérons l'endomorphisme

$$\psi = X\mathrm{Id}_{P[X]} - \varphi \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}[X]}(P[X]).$$

D'après le point *6* on a

$$\widetilde{\psi}\psi = \psi\widetilde{\psi} = \mathrm{C}_\varphi(X)\,\mathrm{Id}_{P[X]}. \qquad (+)$$

En outre, $\widetilde{\psi}$ est un polynôme en X à coefficients dans $\mathbf{A}[\varphi]$. Autrement dit $\widetilde{\psi} = \sum_{k\geqslant 0}\phi_k X^k$, avec les $\phi_k : P \to P$ qui sont dans $\mathbf{A}[\varphi]$. En posant $\mathrm{C}_\varphi(X) = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$ et en identifiant les deux membres de l'égalité $(+)$ on obtient (en convenant de $\phi_{-1} = 0$)

$$\phi_{k-1} - \phi_k\varphi = a_k\mathrm{Id}_P \text{ pour tout } k \geqslant 0.$$

Ainsi, $\mathrm{C}_\varphi(\varphi) = \sum_{k\geqslant 0}(\phi_{k-1} - \phi_k\varphi)\varphi^k = 0$.
8. Le polynôme Γ_φ a été défini de façon à vérifier

$$\mathrm{C}_{-\varphi}(-X) = -X\Gamma_\varphi(X) + \det(\varphi).$$

En évaluant $X := \varphi$, on obtient $\varphi\Gamma_\varphi(\varphi) = \det(\varphi)\mathrm{Id}_P$ (théorème de Cayley-Hamilton), d'où $\varphi\Gamma_\varphi(\varphi) = \varphi\widetilde{\varphi}$. En remplaçant φ par $\theta := T\mathrm{Id}_{P[T]} + \varphi$, on obtient $\theta\Gamma_\theta(\theta) = \theta\widetilde{\theta}$, puis $\Gamma_\theta(\theta) = \widetilde{\theta}$, car θ est un élément régulier de $\mathbf{A}[T,\varphi] = \mathbf{A}[\varphi][T]$. On termine en faisant $T := 0$. □

Remarque. Le déterminant de l'application identique de tout module projectif de type fini, y compris le module réduit à $\{0\}$, est égal à 1 (en suivant la définition ci-dessus). ∎

8.2. Corollaire. *Soit $\varphi : P \to P$ un endomorphisme d'un module projectif de type fini, et $x \in P$ vérifiant $\varphi(x) = 0$, alors* $\det(\varphi)x = 0$.

D Résulte de $\widetilde{\varphi} \circ \varphi = \det(\varphi)\mathrm{Id}_P$. □

Le polynôme fondamental et le polynôme rang

Nous sommes intéressés par le polynôme caractéristique de l'identité sur un module projectif de type fini. Il est cependant plus simple d'introduire un autre polynôme qui lui est directement relié et qui est l'analogue du polynôme X^k dont nous parlions au début de la section 8.

8.3. Définitions et notations. Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et φ un endomorphisme de P. On considère le $\mathbf{A}[X]$-module $P[X]$ et l'on définit les polynômes $\mathrm{F}_{\mathbf{A},\varphi}(X)$ et $\mathrm{R}_{\mathbf{A},P}(X)$ (ou $\mathrm{F}_\varphi(X)$ et $\mathrm{R}_P(X)$ si le contexte est clair) par les égalités suivantes :

$$\mathrm{F}_\varphi(X) = \det(\mathrm{Id}_{P[X]} + X\varphi) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_P(X) = \det(X\mathrm{Id}_{P[X]}).$$

Donc $\mathrm{R}_P(1+X) = \mathrm{F}_{\mathrm{Id}_P}(X)$.

- Le polynôme $\mathrm{F}_\varphi(X)$ est appelé le *polynôme fondamental* de l'endomorphisme φ.
- Le coefficient de X dans le polynôme fondamental est appelé la *trace* de φ et est noté $\mathrm{Tr}_P(\varphi)$.
- Le polynôme $\mathrm{R}_P(X)$ est appelé le *polynôme rang* du module P([3]).

On notera que

$$\mathrm{F}_\varphi(0) = 1 = \mathrm{R}_P(1), \;\; \mathrm{C}_\varphi(0) = \det(-\varphi), \;\; \text{et} \;\; \mathrm{F}_{a\varphi}(X) = \mathrm{F}_\varphi(aX),$$

mais $\mathrm{C}_\varphi(X)$ n'est pas toujours unitaire (voir l'exemple page 292).
On notera également que pour tout $a \in \mathbf{A}$ on obtient :

$$\det(a\varphi) = \det(a\,\mathrm{Id}_P)\det(\varphi) = \mathrm{R}_P(a)\det(\varphi). \tag{6}$$

On en déduit les égalités suivantes

$$\begin{gathered}\mathrm{R}_P(0) = \det(0_{\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(P)}),\\ \mathrm{C}_{-\varphi}(-X) = \det(\varphi - X\mathrm{Id}_{P[X]}) = \det\big(-(X\mathrm{Id}_{P[X]} - \varphi)\big) = \mathrm{R}_P(-1)\,\mathrm{C}_\varphi(X),\\ \det(\varphi) = \mathrm{R}_P(-1)\;\mathrm{C}_\varphi(0).\end{gathered}$$

La dernière égalité remplace l'égalité $\det(\varphi) = (-1)^k\,\mathrm{C}_\varphi(0)$ valable pour les modules libres de rang k.

Un polynôme $R(X)$ est dit *multiplicatif* si $R(1)=1$ et $R(XY)=R(X)R(Y)$.

8.4. Théorème. (Le système fondamental d'idempotents orthogonaux associé à un module projectif de type fini)

1. *Si P est un module projectif de type fini sur un anneau $\mathbf{A}$, son polynôme rang R_P est multiplicatif.*
2. *Autrement dit, les coefficients de $\mathrm{R}_P(X)$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Si $\mathrm{R}_P(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$, on note $\mathrm{e}_h(P) := r_h$: il est appelé* l'idempotent associé à l'entier h et au module P *(si $h > n$ on pose $\mathrm{e}_h(P) := 0$).*

3. Cette terminologie est justifiée par le fait que pour un module libre de rang k le polynôme rang est égal à X^k, ainsi que par le théorème 8.4.

3. *Tout polynôme rang* $\mathrm{R}_P(X)$ *est un élément régulier de* $\mathbf{A}[X]$.

4. *Une généralisation de l'égalité* $\mathrm{rg}(P\oplus Q) = \mathrm{rg}(P)+\mathrm{rg}(Q)$ *concernant les rangs des modules libres est donnée pour les modules projectifs de type fini par :*
$$\mathrm{R}_{P\oplus Q}(X) = \mathrm{R}_P(X)\ \mathrm{R}_Q(X)\,.$$

5. *Si* $P\oplus Q \simeq \mathbf{A}^n$ *et* $\mathrm{R}_P(X) = \sum_{k=0}^n r_k X^k$, *alors* $\mathrm{R}_Q(X) = \sum_{k=0}^n r_k X^{n-k}$.

6. *L'égalité* $\mathrm{R}_P(X) = 1$ *caractérise, parmi les modules projectifs de type fini, le module* $P = \{0\}$. *Elle équivaut aussi à* $\mathrm{e}_0(P) = \mathrm{R}_P(0) = 1$.

D *1* et *2.* Si μ_a désigne la multiplication par a dans $P[X,Y]$, on a clairement l'égalité $\mu_X\mu_Y = \mu_{XY}$, donc $\mathrm{R}_P(X)\ \mathrm{R}_P(Y) = \mathrm{R}_P(XY)$ (théorème 8.1.*2*). Puisque $\mathrm{R}_P(1) = \det(\mathrm{Id}_P) = 1$, on en déduit que les coefficients de $\mathrm{R}_P(X)$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux.
3. Résulte du lemme de McCoy (corollaire III-2.3). On pourrait aussi le démontrer en utilisant le principe local-global de base (en localisant en les r_i).
4. Résulte du point *3* dans le théorème 8.1.
5. Résulte des points *3* et *4* puisque $\big(\sum_{k=0}^n r_k X^k\big)\big(\sum_{k=0}^n r_{n-k} X^k\big) = X^n$.
6. On a $r_0 = \det(0_{\mathrm{End}(P)})$. Puisque les r_i forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux, les égalités $\mathrm{R}_P = 1$ et $r_0 = 1$ sont équivalentes.
Si $P = \{0\}$, alors $0_{\mathrm{End}(P)} = \mathrm{Id}_P$, donc $r_0 = \det(\mathrm{Id}_P) = 1$.
Si $r_0 = 1$, alors $0_{\mathrm{End}(P)}$ est inversible, donc $P = \{0\}$. □

Si P est un $\mathbf{A}$-module libre de rang k, on a $\mathrm{R}_P(X) = X^k$, la définition suivante est donc une extension légitime des modules libres aux modules projectifs de type fini.

8.5. Définition. Un module projectif de type fini P est dit *de rang égal à* k si $\mathrm{R}_P(X) = X^k$. Si l'on ne précise pas la valeur du rang, on dit simplement que le module est *de rang constant*. Nous utiliserons la notation $\mathrm{rg}(M) = k$ pour indiquer qu'un module (supposé projectif de rang constant) est de rang k.

Notons que d'après la proposition 8.11, tout module projectif de rang $k > 0$ est fidèle.

8.6. Fait. *Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un module projectif de rang constant* k *est unitaire de degré* k.

D On peut donner une élégante démonstration directe (voir l'exercice 20). On pourrait aussi éviter toute fatigue et utiliser un argument de localisation, en s'appuyant sur le théorème de structure locale et sur le fait 8.8, qui affirme que tout se passe bien pour le polynôme caractéristique par localisation. □

La convention dans la remarque suivante permet une formulation plus uniforme des théorèmes et des preuves dans la suite.

Remarque. Lorsque l'anneau $\mathbf{A}$ est réduit à $\{0\}$, tous les $\mathbf{A}$-modules sont triviaux. Néanmoins, conformément à la définition ci-dessus, le module nul sur l'anneau nul est un module projectif de rang constant égal à k, pour n'importe quelle valeur de l'entier $k \geqslant 0$. Par ailleurs, il est immédiat que si un module projectif de type fini P a deux rangs constants distincts, alors l'anneau est trivial : on a $\mathrm{R}_P(X) = 1_{\mathbf{A}} X^h = 1_{\mathbf{A}} X^k$ avec $h \neq k$ donc le coefficient de X^h est égal à la fois à $1_{\mathbf{A}}$ et à $0_{\mathbf{A}}$. ∎

Quelques calculs explicites

Le polynôme fondamental d'un endomorphisme φ est plus facile à utiliser que le polynôme caractéristique. Cela tient à ce que le polynôme fondamental est invariant lorsque l'on rajoute « en somme directe » un endomorphisme nul à φ. Ceci permet de ramener systématiquement et facilement le calcul d'un polynôme fondamental au cas où le module projectif est libre. De manière précise, on pourra calculer les polynômes précédemment définis en suivant le lemme ci-après.

8.7. Lemme. (Calcul explicite du déterminant, du polynôme fondamental, du polynôme caractéristique, du polynôme rang et de l'endomorphisme cotransposé)
Soit un $\mathbf{A}$-module $P \simeq \operatorname{Im} F$ avec $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$. Notons $Q = \operatorname{Ker}(F)$, de sorte que $P \oplus Q \simeq \mathbf{A}^n$, et $\mathrm{I}_n - F$ est la matrice de la projection π_Q sur Q parallèlement à P. Un endomorphisme φ de P est caractérisé par la matrice H de l'endomorphisme $\varphi_0 = \varphi \oplus 0_Q$ de $\mathbf{A}^n$. Une telle matrice H est soumise à l'unique restriction $F \cdot H \cdot F = H$. On pose $G = \mathrm{I}_n - F + H$.

1. *Calcul du déterminant :*
$$\det(\varphi) = \det(\varphi \oplus \mathrm{Id}_Q) = \det(G).$$
2. *Donc aussi*
$$\begin{aligned} \det(X\mathrm{Id}_{P[X,Y]} + Y\varphi) &= \det\big((X\mathrm{Id}_{P[X,Y]} + Y\varphi) \oplus \mathrm{Id}_Q\big) = \\ \det(\mathrm{I}_n - F + XF + YH) &= \det(\mathrm{I}_n + (X-1)F + YH). \end{aligned}$$
3. *Calcul du polynôme rang de P :*
$$\mathrm{R}_P(1+X) = \det\big((1+X)\mathrm{Id}_{P[X]}\big) = \det(\mathrm{I}_n + XF),$$
en particulier,
$$\mathrm{R}_P(0) = \det(\mathrm{I}_n - F),$$
et $\mathrm{R}_P(1+X) = 1 + u_1 X + \cdots + u_n X^n$, où u_h est la somme des mineurs principaux d'ordre h de la matrice F.

4. *Calcul du polynôme fondamental de φ :*

$$\mathrm{F}_\varphi(Y) = \det(\mathrm{Id}_{P[Y]} + Y\varphi) = \det(\mathrm{I}_n + YH) = 1 + \sum\nolimits_{k=1}^{n} v_k Y^k,$$

où v_k est la somme des mineurs principaux d'ordre k de la matrice H. En particulier, $\mathrm{Tr}_P(\varphi) = \mathrm{Tr}(H)$.

5. *Calcul du polynôme caractéristique de φ :*

$$\mathrm{C}_\varphi(X) = \det(X\mathrm{Id}_{P[X]} - \varphi) = \det(\mathrm{I}_n - H + (X-1)F).$$

6. *Calcul de l'endomorphisme cotransposé $\widetilde{\varphi}$ de φ : il est défini par la matrice*

$$\widetilde{G} \cdot F = F \cdot \widetilde{G} = \widetilde{G} - \det(\varphi)(\mathrm{I}_n - F).$$

Pour le dernier point on applique le point *3* du théorème 8.1 avec φ et Id_Q en remarquant que G est la matrice de $\psi = \varphi \oplus \mathrm{Id}_Q = \varphi_0 + \pi_Q$.
Notez que le polynôme caractéristique de Id_P est égal à $\mathrm{R}_P(X-1)$.
Le fait suivant est une conséquence immédiate de la proposition 5.1 et du lemme précédent.

8.8. Fait. *Le déterminant, l'endomorphisme cotransposé, le polynôme caractéristique, le polynôme fondamental et le polynôme rang se comportent bien par extension des scalaires via un homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.*
En particulier, si $\varphi : P \to P$ est un endomorphisme d'un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et S un monoïde de $\mathbf{A}$, alors $\det(\varphi)_S = \det(\varphi_S)$ *(ou, si l'on préfère,* $\det(\varphi)/1 =_{\mathbf{A}_S} \det(\varphi_S)$*). La même chose vaut pour l'endomorphisme cotransposé, le polynôme fondamental, le polynôme caractéristique et le polynôme rang.*

Exemple. Soit e un idempotent de $\mathbf{A}$ et $f = 1 - e$. Le module $\mathbf{A}$ est somme directe des sous-modules $e\mathbf{A}$ et $f\mathbf{A}$ qui sont donc projectifs de type fini. La matrice 1×1 ayant pour unique coefficient e est une matrice F dont l'image est $P = e\mathbf{A}$. Pour $a \in \mathbf{A}$ considérons $\mu_a = \mu_{P,a} \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(P)$. La matrice H a pour unique coefficient ea. On a alors en appliquant les formules précédentes :

$$\det(0_{e\mathbf{A}}) = f,\ \mathrm{R}_{e\mathbf{A}}(X) = f + eX,\ \mathrm{C}_{\mathrm{Id}_{e\mathbf{A}}}(X) = f - e + eX,$$
$$\det(\mu_a) = f + ea,$$
$$\mathrm{F}_{\mu_a}(X) = 1 + eaX,\ \mathrm{C}_{\mu_a}(X) = 1 - ea + e(X-1) = f - ea + eX.$$

Notez que le polynôme caractéristique de μ_a n'est pas unitaire si $e \neq 1, 0$.
Et l'on a bien le théorème de Cayley-Hamilton :

$$\mathrm{C}_{\mu_a}(\mu_a) = (f - ea)\mathrm{Id}_{e\mathbf{A}} + e\mu_a = (f - ea + ea)\mathrm{Id}_{e\mathbf{A}} = f\mathrm{Id}_{e\mathbf{A}} = 0_{e\mathbf{A}}.$$ ∎

Avec un système de coordonnées
Lorsque l'on utilise un système de coordonnées le lemme 8.7 conduit au résultat suivant.

8.9. Fait. *Soit P un module projectif de type fini avec un système de coordonnées $\big((x_1,\dots,x_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big)$ et φ un endomorphisme de P.*
On rappelle (fait 2.9) que l'on peut coder P par la matrice

$$F \overset{\text{def}}{=} \big(\alpha_i(x_j)\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]}$$

(P est isomorphe à $\operatorname{Im} F \subseteq \mathbf{A}^n$ au moyen de $x \mapsto \pi(x) = {}^{\mathrm{t}}[\,\alpha_1(x)\ \cdots\ \alpha_n(x)\,]$).
En outre l'endomorphisme φ est représenté par la matrice

$$H \overset{\text{def}}{=} \big(\alpha_i(\varphi(x_j))\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]}$$

qui vérifie $H = HF = FH$.

1. *On a $\mathrm{F}_\varphi(X) = \det(\mathrm{I}_n + XH)$ et $\operatorname{Tr}(\varphi) = \operatorname{Tr}(H) = \sum_i \alpha_i\big(\varphi(x_i)\big)$.*
2. *Pour $\nu \in P^\star$ et x, $y \in P$, rappelons que $\theta_P(\nu\otimes x)(y) = \nu(y)x$. La trace de cet endomorphisme est donnée par $\operatorname{Tr}_P\big(\theta_P(\nu\otimes x)\big) = \nu(x)$.*

▷ La matrice H est aussi celle de l'application $\mathbf{A}$-linéaire φ_0 introduite dans le lemme 8.7 :

$$\pi(x) + y \mapsto \pi\big(\varphi(x)\big) \text{ avec } \pi(x) \in \operatorname{Im} F \text{ et } y \in \operatorname{Ker} F.$$

Le point *2* résulte donc du lemme 8.7.
3. D'après le point *2*, on a :

$$\operatorname{Tr}\big(\theta_P(\nu\otimes x)\big) = \textstyle\sum_i \alpha_i(\nu(x_i)x) = \sum_i \nu(x_i)\alpha_i(x) = \nu\big(\sum_i \alpha_i(x)x_i\big) = \nu(x).$$

□

8.10. Lemme. *Soient M, N deux $\mathbf{k}$-modules projectifs de type fini et des endomorphismes $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbf{k}}(M)$ et $\psi \in \operatorname{End}_{\mathbf{k}}(N)$.*
Alors, $\operatorname{Tr}_{M\otimes N}(\varphi\otimes\psi) = \operatorname{Tr}_M(\varphi)\operatorname{Tr}_N(\psi)$.

▷ On considère des systèmes de coordonnées pour M et N et l'on applique la formule pour la trace des endomorphismes (fait 8.9). □

L'annulateur d'un module projectif de type fini

Nous avons déjà établi certains résultats concernant cet annulateur en nous appuyant sur le théorème de structure locale des modules projectifs de type fini, démontré en utilisant les idéaux de Fitting (voir le lemme 6.2).
Ici nous donnons quelques précisions supplémentaires en utilisant une démonstration qui ne s'appuie pas sur le théorème de structure locale.

8.11. Proposition. *Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On considère l'idéal $J_P = \langle \alpha(x) \mid \alpha \in P^\star,\ x \in P\rangle$. On note $r_0 = \mathrm{R}_P(0) = \mathrm{e}_0(P)$.*

1. *$\langle r_0\rangle = \operatorname{Ann}(P) = \operatorname{Ann}(J_P)$.*
2. *$J_P = \langle s_0\rangle$, où s_0 est l'idempotent $1 - r_0$.*

▷ On a évidemment $\operatorname{Ann}(P) \subseteq \operatorname{Ann}(J_P)$. Soit $\big((x_i)_{i\in[\![1..n]\!]},(\alpha_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ un système de coordonnées sur P. Alors :

$$J_P = \langle \alpha_i(x_j)\,;\, i,j \in [\![1..n]\!]\rangle\,,$$

et la matrice de projection $F = \big(\alpha_i(x_j)\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ a une image isomorphe à P.
Par définition, r_0 est l'idempotent $r_0 = \det(\mathrm{I}_n - F)$. Puisque $(\mathrm{I}_n - F)F = 0$, on a $r_0F = 0$, i.e. $r_0P = 0$.
Donc $\langle r_0\rangle \subseteq \mathrm{Ann}(P) \subseteq \mathrm{Ann}(J_P)$ et $J_P \subseteq \mathrm{Ann}(r_0)$.
Par ailleurs, on a $\mathrm{I}_n - F \equiv \mathrm{I}_n$ modulo J_P, donc en prenant les déterminants, on a $r_0 \equiv 1$ modulo J_P, c'est-à-dire $s_0 \in J_P$, puis $\mathrm{Ann}(J_P) \subseteq \mathrm{Ann}(s_0)$.
On peut donc conclure :
$\langle r_0\rangle \subseteq \mathrm{Ann}(P) \subseteq \mathrm{Ann}(J_P) \subseteq \mathrm{Ann}(s_0) = \langle r_0\rangle$ et $\langle s_0\rangle \subseteq J_P \subseteq \mathrm{Ann}(r_0) = \langle s_0\rangle$. □

Décomposition canonique d'un module projectif

8.12. Définition. Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini et $h \in \mathbb{N}$.
Si $r_h = \mathrm{e}_h(P)$, on note $P^{(h)}$ le sous-$\mathbf{A}$-module r_hP. Il est appelé le *composant du module P en rang h.*

Rappelons que pour un idempotent e et un $\mathbf{A}$-module M, le module obtenu par extension des scalaires à $\mathbf{A}[1/e] \simeq \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ s'identifie au sous-module eM, lui-même isomorphe au quotient $M/(1-e)M$.

8.13. Théorème. *Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.*

1. *Le module $r_hP = P^{(h)}$ est un $\mathbf{A}[1/r_h]$-module projectif de rang h.*
2. *Le module P est somme directe des $P^{(h)}$.*
3. *L'idéal $\langle r_0\rangle$ est l'annulateur du $\mathbf{A}$-module P.*
4. *Pour $h > 0$, $P^{(h)} = \{0\}$ implique $r_h = 0$.*

▷ *1.* Localiser en r_h : on obtient $\mathrm{R}_{P^{(h)}}(X) =_{\mathbf{A}[1/r_h]} \mathrm{R}_P(X) =_{\mathbf{A}[1/r_h]} X^h$.
2. Car les r_h forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux.
3. Déjà vu (proposition 8.11).
4. Résulte immédiatement du point *3.* □

Notez que, sauf si $r_h = 1$ ou $h = 0$, le module r_hP n'est pas de rang constant en tant que $\mathbf{A}$-module.
Le théorème précédent donne une démonstration « structurelle » du théorème 1.3.

Remarque. Si P est (isomorphe à) l'image d'une matrice de projection F les idempotents $r_k = \mathrm{e}_k(P)$ attachés au module P peuvent être reliés au polynôme caractéristique de la matrice F comme suit :
$$\det(X\mathrm{I}_n - F) = \textstyle\sum_{k=0}^{n} r_k X^{n-k}(X-1)^k.$$
(Notez que les $X^{n-k}(X-1)^k$ forment une base du module des polynômes de degré $\leqslant n$, triangulaire par rapport à la base usuelle.) ■

Polynôme rang et idéaux de Fitting

La démonstration du théorème 8.14 qui suit s'appuie sur le théorème 6.1, qui affirme qu'un module projectif de type fini devient libre après localisation en des éléments comaximaux.
Nous avons placé ce théorème ici car il répond aux questions que l'on se pose naturellement après le théorème 8.4. D'abord, vérifier qu'une matrice de projection est de rang k si, et seulement si, son image est un module projectif de rang constant k. Plus généralement, caractériser le système fondamental d'idempotents orthogonaux qui intervient dans le polynôme rang en termes des idéaux de Fitting du module.
En fait, on peut donner une démonstration alternative du théorème 8.14 sans passer par un argument de localisation, en s'appuyant sur les puissances extérieures (voir la proposition X-1.2).
Signalons que pour un module de présentation finie M l'égalité $\mathcal{F}_h(M) = \langle 1 \rangle$ signifie que M est localement engendré par h éléments (on a vu cela pour le cas $h = 1$ dans le théorème 7.3, dans le cas général, voir le lemme du nombre de générateurs local page 501 et la définition IX-2.5)

8.14. Théorème. (Structure locale et idéaux de Fitting d'un module projectif de type fini, 2)
Soient $F \in \mathbb{GA}_q(\mathbf{A})$, $P \simeq \operatorname{Im} F$ *et* $\mathrm{R}_P(X) = \sum_{i=0}^{q} r_i X^i$.

1. *Posons* $S(X) = \mathrm{R}_P(1+X) = 1 + u_1 X + \cdots + u_q X^q$ *(u_h est la somme des mineurs principaux d'ordre h de la matrice F).*
   On a pour tout $h \in [\![0..q]\!]$:
   $$\begin{cases} \mathcal{D}_h(F) = \langle r_h + \cdots + r_q \rangle = \langle r_h, \ldots, r_q \rangle = \langle u_h, \ldots, u_q \rangle \\ \mathcal{F}_h(P) = \langle r_0 + \cdots + r_h \rangle = \langle r_0, \ldots, r_h \rangle \end{cases}$$
2. *En particulier :*
   a. $\operatorname{rg}(F) = h \iff \operatorname{rg}(P) = h$,
   b. $\operatorname{rg}(F) \leqslant h \iff \deg \mathrm{R}_P \leqslant h$,
   c. $\operatorname{rg}(F) > h \iff r_0 = \cdots = r_h = 0 \iff \mathcal{F}_h(P) = 0$.

▷ L'égalité $\langle u_h, \ldots, u_q \rangle = \langle r_h, \ldots, r_q \rangle$ résulte des égalités
$$S(X) = \mathrm{R}_P(1+X) \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_P(X) = S(X-1).$$
Pour vérifier les égalités $\mathcal{D}_h(F) = \langle r_h + \cdots + r_q \rangle = \langle r_h, \ldots, r_q \rangle$ et
$$\mathcal{D}_{q-h}(\mathrm{I}_q - F) = \langle r_0 + \cdots + r_h \rangle = \langle r_0, \ldots, r_h \rangle,$$
il suffit de le faire après localisation en des éléments comaximaux. Or le noyau et l'image de F deviennent libres après localisation en des éléments comaximaux (théorème II-5.26 ou théorème 6.1), et la matrice devient donc semblable à une matrice de projection standard. □

9. Propriétés de caractère fini

Cette section veut illustrer l'idée que les bons concepts en algèbre sont ceux qui sont contrôlables par des procédures finies.
Nous avons en vue de mettre en évidence des « bonnes propriétés ». Il y a naturellement celles qui acceptent de se soumettre au principe local-global : pour que la propriété soit vraie il faut et suffit qu'elle le soit après localisation en des monoïdes comaximaux. C'est un phénomène que nous avons déjà beaucoup rencontré, et qui continuera par la suite.
Rappelons qu'une propriété est dite « de caractère fini » si elle est conservée par localisation (par passage de $\mathbf{A}$ à $S^{-1}\mathbf{A}$) et si, lorsqu'elle est vérifiée après localisation en S, alors elle est vérifiée après localisation en s pour un certain $s \in S$.
Dans le fait* II-2.12 nous avons démontré en mathématiques classiques que pour les propriétés de caractère fini, le principe local-global concret (localisation en des monoïdes comaximaux) est équivalent au principe local-global abstrait (localisation en tous les idéaux maximaux). Par contre, une preuve constructive du principe local-global concret contient une information plus précise a priori qu'une preuve classique du principe local-global abstrait.

9.1. Proposition. *Soit S un monoïde de $\mathbf{A}$.*

1. *Soit $AX = B$ un système linéaire sur $\mathbf{A}$. Alors, s'il admet une solution dans $\mathbf{A}_S$, il existe $s \in S$ tel qu'il admette une solution dans $\mathbf{A}_s$.*
2. *Soient M et N deux sous-$\mathbf{A}$-modules d'un même module,* avec M de type fini. *Alors, si $M_S \subseteq N_S$, il existe $s \in S$ tel que $M_s \subseteq N_s$.*
3. *Soient $\mathbf{A}$ un* anneau cohérent*, M, N, P des $\mathbf{A}$-modules* de présentation finie*, et deux applications linéaires $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to P$. Si la suite $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P$ devient exacte après localisation en S il existe $s \in S$ tel que la suite devienne exacte après localisation en s.*
4. *Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules* de présentation finie*. Si $M_S \simeq N_S$, il existe $s \in S$ tel que $M_s \simeq N_s$.*
5. *Soit M un $\mathbf{A}$-module de présentation finie. Si M_S est libre, il existe un $s \in S$ tel que M_s soit libre. De même, si M_S est stablement libre, il existe un $s \in S$ tel que M_s soit stablement libre.*
6. *Si un module de présentation finie devient projectif après localisation en S, il devient projectif après localisation en un élément s de S.*

▷ Montrons le point *3*. On trouve d'abord un $u \in S$ tel que $u\,\psi\big(\varphi(x_j)\big) = 0$ pour des générateurs x_j de N. On en déduit que $\psi \circ \varphi$ devient nul après localisation en u. Par ailleurs, les hypothèses assurent que $\operatorname{Ker}\psi$ est de type fini. Soient $y_1, \ldots, y_n$ des générateurs de $\operatorname{Ker}\psi$. Pour chacun d'eux on trouve un z_j dans N et un $s_j \in S$ tels que $s_j(\varphi(z_j) - y_j) = 0$. On prend

pour s le produit de u et des s_j.
Montrons le point *4*. Soient G et H des matrices de présentation pour M et N. Notons G_1 et H_1 les deux matrices données dans le lemme IV-1.1. Par hypothèse il existe deux matrices carrées Q et R à coefficients dans $\mathbf{A}$ telles que $v = \det(Q)\det(R) \in S$ et $Q\,G_1 =_{\mathbf{A}_S} H_1\,R$. Ceci signifie que l'on a sur $\mathbf{A}$ une égalité

$$w\,(Q\,G_1 - H_1\,R) = 0, \quad w \in S.$$

Il suffit donc de prendre $s = vw$. □

On a vu que l'extension des scalaires se comporte bien par rapport aux produits tensoriels, aux puissances extérieures et aux puissances symétriques. Pour le foncteur $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}$ les choses ne se passent pas toujours aussi bien. Des résultats importants pour la suite sont les suivants.

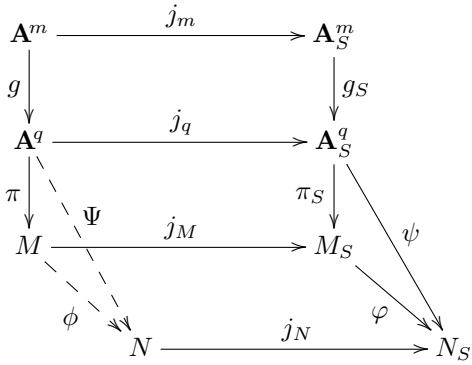
9.2. Proposition. *Soient $f : M \to N$ et $g : M \to N$ deux applications linéaires entre $\mathbf{A}$-modules,* avec M de type fini. *Alors, $f_S = g_S$ si, et seulement si, il existe $s \in S$ tel que $sf = sg$. En d'autres termes, l'application canonique $\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)\big)_S \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}_S}(M_S,N_S)$ est injective.*

9.3. Proposition. *Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules et $\varphi : M_S \to N_S$ une application $\mathbf{A}$-linéaire. On suppose que M est de présentation finie, ou que $\mathbf{A}$ est intègre, M de type fini et N sans torsion (i.e. $a \in \mathbf{A}$, $x \in N$, $ax = 0$ impliquent $a = 0$ ou $x = 0$).*
Alors, il existe une application $\mathbf{A}$-linéaire $\phi : M \to N$ et un $s \in S$ tels que

$$\forall x \in M \quad \varphi(x/1) = \phi(x)/s,$$

et l'application canonique $\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)\big)_S \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}_S}(M_S,N_S)$ est bijective.

D Le deuxième cas, facile, est laissé au lecteur. Pour suivre la démonstration du premier cas il faut regarder la figure ci-après. Supposons que M est le



Localisation des homomorphismes

conoyau de l'application linéaire $g : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^q$ avec une matrice $G = (g_{i,j})$ par rapport aux bases canoniques, alors d'après le fait II-6.4 le module M_S est le conoyau de l'application linéaire $g_S : \mathbf{A}_S^m \to \mathbf{A}_S^q$, représentée par la matrice $G_S = (g_{i,j}/1)$ sur les bases canoniques. On note

$$\mathbf{A}^m \xrightarrow{j_m} \mathbf{A}_S^m,\ \mathbf{A}^q \xrightarrow{j_q} \mathbf{A}_S^q,\ M \xrightarrow{j_M} M_S,\ N \xrightarrow{j_N} N_S,\ \mathbf{A}^q \xrightarrow{\pi} M,\ \mathbf{A}_S^q \xrightarrow{\pi_S} M_S,$$

les applications canoniques. Soit $\psi := \varphi \circ \pi_S$, de sorte que $\psi \circ g_S = 0$. Donc $\psi \circ g_S \circ j_m = 0 = \psi \circ j_q \circ g$. Il existe un $s \in S$, dénominateur commun pour les images par ψ des vecteurs de la base canonique. D'où une application linéaire $\Psi : \mathbf{A}^q \to N$ avec $(s\psi) \circ j_q = j_N \circ \Psi$.
Ainsi, $j_N \circ \Psi \circ g = s(j_m \circ g_S \circ \psi) = 0$. D'après la proposition 9.2 appliquée à $\Psi \circ g$, l'égalité $j_N \circ (\Psi \circ g) = 0$ dans N_S implique qu'il existe $s' \in S$ tel que $s'(\Psi \circ g) = 0$. Donc $s'\Psi$ se factorise sous forme $\phi \circ \pi$. On obtient alors

$$(ss'\varphi) \circ j_M \circ \pi = ss'(\varphi \circ \pi_S \circ j_q) = ss'\psi \circ j_q = s'j_N \circ \Psi = j_N \circ \phi \circ \pi,$$

et puisque π est surjective, $ss'\varphi \circ j_M = j_N \circ \phi$. Ainsi, pour tout $x \in M$, on a $\varphi(x/1) = \phi(x)/ss'$. □

9.4. Corollaire. *Supposons que M et N sont de présentation finie, ou qu'ils sont de type fini sans torsion et que $\mathbf{A}$ est intègre. Si $\varphi : M_S \to N_S$ est un isomorphisme, il existe $s \in S$ et un isomorphisme $\psi : M_s \to N_s$ tel que $\psi_S = \varphi$.*

D Soit $\varphi' : N_S \to M_S$ l'inverse de φ. D'après la proposition précédente, il existe $\phi : M \to N$, $\phi' : N \to M$, $s \in S$, $s' \in S$ tel que $\varphi = \phi_S/s$, $\varphi' = \phi'_S/s'$. Posons $t = ss'$ et définissons $\psi = \phi_t/s : M_t \to N_t$, $\psi' = \phi'_t/s' : N_t \to M_t$. Alors, $(\psi' \circ \psi)_S$ est l'identité sur M_S, et $(\psi \circ \psi')_S$ est l'identité sur N_S. On en déduit l'existence d'un $u \in S$ tel que $(\psi' \circ \psi)_{tu}$ est l'identité sur M_{tu}, et $(\psi \circ \psi')_{tu}$ est l'identité sur N_{tu}. En conséquence, $\psi_{tu} : M_{tu} \to N_{tu}$ est un isomorphisme tel que $(\psi_{tu})_S = \varphi$. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées à la lectrice, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

— Montrer les faits 2.6 et 2.9.
— Vérifier les détails du lemme 8.7.
— Montrer le fait 9.2 ainsi que le deuxième cas dans la proposition 9.3.

Exercice 2. *(Projecteurs ayant même image)*
Soient a, c dans un anneau $\mathbf{B}$ non nécessairement commutatif. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

— $ac = c$ et $ca = a$.
— $a^2 = a$, $c^2 = c$ et $a\mathbf{B} = c\mathbf{B}$.

Dans un tel cas on pose $h = c - a$ et $x = 1 + h$. Montrer les résultats suivants.

$ha = hc = 0$, $ah = ch = h$, $h^2 = 0$, $x \in \mathbf{B}^\times$, $ax = c$, $xa = x^{-1}a = a$ et $\boxed{x^{-1}ax = c}$.

On notera en passant que l'égalité $ax = c$ redonne l'égalité $a\mathbf{B} = c\mathbf{B}$.
Cas particulier. $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, M un $\mathbf{A}$-module, et $\mathbf{B} = \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$: deux projecteurs qui ont même image sont semblables.

Exercice 3. *(Deux projecteurs équivalents sont semblables)*
Soient dans un anneau $\mathbf{B}$ non nécessairement commutatif, deux idempotents *équivalents* ($a^2 = a$, $b^2 = b$, $\exists p, q \in \mathbf{B}^\times$, $b = paq$). On va montrer qu'il sont *conjugués* ($\exists d \in \mathbf{B}^\times$, $dad^{-1} = b$).

- Dans cette question, a, $b \in \mathbf{B}$ sont équivalents ($b = paq$), mais ne sont pas supposés idempotents. Montrer que l'élément $c = p^{-1}bp$ vérifie $a\mathbf{B} = c\mathbf{B}$.
- En particulier, si b est idempotent, c est un idempotent conjugué de b qui vérifie $a\mathbf{B} = c\mathbf{B}$. Conclure en utilisant l'exercice précédent.

Cas particulier. $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, M un $\mathbf{A}$-module, et $\mathbf{B} = \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M)$: deux projecteurs de M équivalents sont semblables.

Exercice 4. *(Une conséquence importante du lemme de Schanuel 2.8)*
1. On considère deux suites exactes :

$$0 \to K \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \xrightarrow{u} P_0 \to M \to 0$$
$$0 \to K' \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_1 \xrightarrow{u'} P'_0 \to M \to 0$$

avec les modules P_i, P'_i projectifs. Alors, on obtient un isomorphisme :

$$K \oplus \bigoplus_{i\equiv n-1 \bmod 2} P'_i \oplus \bigoplus_{j\equiv n \bmod 2} P_j \simeq K' \oplus \bigoplus_{k\equiv n-1 \bmod 2} P_k \oplus \bigoplus_{\ell\equiv n \bmod 2} P'_\ell$$

2. En déduire que si l'on a une suite exacte où les P_i, $i \in [\![1..n]\!]$ sont projectifs

$$0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0,$$

alors, pour toute suite exacte

$$0 \to K' \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_1 \to P'_0 \to M \to 0,$$

où les P'_i sont projectifs, le module K' est également projectif.

Exercice 5. On considère une suite exacte entre modules projectifs de type fini

$$0 \longrightarrow P_n \xrightarrow{u_n} P_{n-1} \xrightarrow{u_{n-1}} P_{n-2} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_2 \xrightarrow{u_2} P_1 \longrightarrow 0$$

Montrer que $\bigoplus_{i \text{ impair}} P_i \simeq \bigoplus_{j \text{ pair}} P_j$.
En déduire que si les P_i pour $i \geqslant 2$ sont stablement libres, il en est de même de P_1.

Exercice 6. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- L'anneau $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit.
- Les $\mathbf{A}$-modules de présentation finie sont toujours projectifs de type fini.
- Tout module $\mathbf{A}/\langle a\rangle$ est projectif de type fini.

(autrement dit, montrer la réciproque pour le point *1* dans le théorème 3.1).

Exercice 7. *(Projecteurs de rang 1, voir la proposition 7.4)*
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. On étudie différents systèmes polynomiaux en les a_{ij} dont l'annulation définit la sous-variété $\mathbb{GA}_{n,1}(\mathbf{A})$ de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. On note $\mathcal{D}'_2(A)$ l'idéal engendré par les mineurs ayant au moins l'un des « quatre coins » sur la diagonale (à ne pas confondre avec les mineurs principaux, sauf si $n = 2$).
1. Si A est un projecteur de rang $\leqslant 1$, alors $\mathrm{Ann}\, A$ est engendré par $1 - \mathrm{Tr}\, A$ (idempotent). En particulier, un projecteur de rang 1 est de trace 1.

2. Les égalités $\operatorname{Tr} A = 1$ et $\mathcal{D}'_2(A) = 0$ impliquent $A^2 = A$ et $\mathcal{D}_2(A) = 0$. Dans ce cas, A est un projecteur de rang 1 (mais on peut avoir $\operatorname{Tr} A = 1$ et $A^2 = A$ sans avoir $\mathcal{D}_2(A) = 0$, par exemple pour un projecteur de rang 3 sur un anneau où $2 = 0$). En conséquence, pour une matrice A quelconque on a

$$\langle 1 - \operatorname{Tr} A\rangle + \mathcal{D}_1(A^2 - A) \subseteq \langle 1 - \operatorname{Tr} A\rangle + \mathcal{D}'_2(A) = \langle 1 - \operatorname{Tr} A\rangle + \mathcal{D}_2(A)$$

sans avoir nécessairement l'égalité à gauche.
3. On considère le polynôme $\det\big(\mathrm{I}_n + (X-1)A\big)$ (si $A \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$, c'est le polynôme rang du module $P = \operatorname{Im} A$) et l'on note $r_1(A)$ son coefficient en X. On a alors l'égalité des trois idéaux suivants, qui définissent la sous-variété $\mathbb{GA}_{n,1}(\mathbf{A})$ de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$:

$$\langle 1 - \operatorname{Tr} A\rangle + \mathcal{D}'_2(A) = \langle 1 - \operatorname{Tr} A\rangle + \mathcal{D}_2(A) = \big\langle 1 - r_1(A)\big\rangle + \mathcal{D}_1(A^2 - A).$$

Préciser le cardinal de chaque système générateur.

Exercice 8. *(Projecteur de rang 1 ayant un coefficient régulier)*
Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ un projecteur de rang 1, L_i sa ligne i, C_j sa colonne j.
1. Fournir une preuve directe de l'égalité matricielle $C_j \cdot L_i = a_{ij} A$. En remarquant que $L_i \cdot C_j = a_{ij}$, en déduire l'égalité d'idéaux $\langle L_i\rangle \langle C_j\rangle = \langle a_{ij}\rangle$.
2. On suppose a_{ij} régulier ; donc $\langle L_i\rangle$ et $\langle C_j\rangle$ sont des idéaux inversibles, inverses l'un de l'autre. Fournir une preuve directe de l'exactitude au milieu de la suite :

$$\mathbf{A}^n \xrightarrow{\mathrm{I}_n - A} \mathbf{A}^n \xrightarrow{L_i} \langle L_i\rangle \to 0$$

et par conséquent $\langle L_i\rangle \simeq \operatorname{Im} A$.
3. Montrer que la matrice A est entièrement déterminée par L_i et C_j. Plus précisément, si l'anneau $\mathbf{A}$ est à divisibilité explicite :

- calculer la matrice A,
- en déduire à quelle condition une ligne L et une colonne C peuvent être la ligne i et la colonne j d'une matrice de projection de rang 1 (on suppose que le coefficient commun en position (i,j) est régulier).

4. Soit $C \in \operatorname{Im} A$, ${}^{\mathrm{t}}L \in \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A$ et $a = L \cdot C$. Montrer l'égalité matricielle $C \cdot L = aA$ et en déduire l'égalité d'idéaux $\langle L\rangle \langle {}^{\mathrm{t}}C\rangle = \langle a\rangle$. Si a est régulier, les idéaux $\langle L\rangle$ et $\langle {}^{\mathrm{t}}C\rangle$ sont inversibles, inverses l'un de l'autre, $\langle L\rangle \simeq \operatorname{Im} A$ et $\langle {}^{\mathrm{t}}C\rangle \simeq \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A$.

Exercice 9. Si un $\mathbf{A}$-module *de type fini* a ses idéaux de Fitting engendrés par des idempotents, il est projectif de type fini.

Exercice 10. *(Syzygies courtes)*
Notations, terminologie. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$.
Soient x_1, …, x_n des éléments d'un $\mathbf{A}$-module. On note $x = {}^{\mathrm{t}}[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,]$ et $x^\perp := \operatorname{Ker}({}^{\mathrm{t}}x) \subseteq \mathbf{A}^n$ le module des syzygies entre les x_i.
On dira d'une syzygie $z \in x^\perp$ qu'elle est « courte » si elle possède au plus deux coordonnées non nulles, i.e. si $z \in \mathbf{A}e_i \oplus \mathbf{A}e_j$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant n)$.

1. Soit $z \in x^\perp$. Montrer que la condition « z est somme de syzygies courtes » est une condition linéaire. En conséquence, si z est « localement » somme de syzygies courtes, elle l'est globalement.
2. En déduire que si $M = \sum \mathbf{A}x_i$ est un module localement monogène, alors tout élément de $x^\perp$ est somme de syzygies courtes.

3. Si toute syzygie entre trois éléments de $\mathbf{A}$ est somme de syzygies courtes, alors $\mathbf{A}$ est un *anneau arithmétique*, i.e., tout idéal $\langle x, y\rangle$ est localement principal.
4. Dans la question *2* donner une solution globale en utilisant une matrice de localisation monogène $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ pour x.

Exercice 11. *(Syzygies triviales)*
On utilise les notations de l'exercice 10. Maintenant $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$.
Pour $z \in \mathbf{A}^n$ on note $\langle z \,|\, x\rangle \overset{\text{def}}{=} \sum z_i x_i$. Le module des syzygies $x^\perp$ contient les « syzygies triviales » $x_j e_i - x_i e_j$ (qui sont un cas particulier de syzygies courtes). Dans les deux premières questions, on montre que si x est unimodulaire, alors $x^\perp$ est engendré par ces syzygies triviales. On fixe $y \in \mathbf{A}^n$ tel que $\langle x \,|\, y\rangle = 1$.

1. Rappeler pourquoi $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus x^\perp$.
2. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$, on définit $\pi_{ij} : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$ par
$$\pi_{ij}(z) = (z_i y_j - z_j y_i)(x_j e_i - x_i e_j),$$
si bien que $\operatorname{Im} \pi_{ij} \subseteq x^\perp \cap (\mathbf{A}e_i \oplus \mathbf{A}e_j)$. Montrer que $\pi = \sum_{i<j} \pi_{ij}$ est la projection sur $x^\perp$ parallèlement à $\mathbf{A}y$. En déduire le résultat sur les syzygies triviales. Voir aussi l'exercice II-4.

On ne suppose plus que x est unimodulaire. Soit $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ une matrice alternée.

3. Montrer qu'en posant $z = Mx$, on a $\langle x \,|\, z\rangle = 0$.
4. En quel sens, une matrice alternée est-elle « somme de petites matrices alternées » ? Faire le lien avec la définition de π_{ij} dans la question *2*.

Exercice 12. *(Matrices de projection qui ont une image libre)*
Soit $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ un projecteur dont l'image est libre de rang r ; d'après la proposition 2.11 il existe $X \in \mathbf{A}^{n\times r}$, $Y \in \mathbf{A}^{r\times n}$ vérifiant $YX = \mathrm{I}_r$ et $P = XY$.
1. On demande d'expliciter le lemme d'élargissement (lemme 2.10), autrement dit de calculer $A \in \mathbb{SL}_{n+r}(\mathbf{A})$ (et son inverse) telle que
$$A^{-1} \operatorname{Diag}(0_r, P) A = \mathrm{I}_{r,n+r}. \qquad (*)$$
2. On suppose que $X = {}^tY$ (donc P est symétrique).
Vérifier que l'on peut imposer à A d'être « orthonormale » i.e. ${}^tA = A^{-1}$.
Réciproquement, si $A \in \mathbb{SL}_{n+r}(\mathbf{A})$ est orthonormale et vérifie $(*)$, alors on peut écrire $P = X\,{}^tX$ avec $X \in \mathbf{A}^{n\times r}$ et ${}^tXX = \mathrm{I}_r$ (la matrice P est donc symétrique).

Exercice 13. *(Modules stablement libres de rang 1)*
Démonstration directe que tout module stablement libre de rang 1 est libre (proposition 4.4), en utilisant la formule de Binet-Cauchy (exercice II-25).
On considère deux matrices $R \in \mathbf{A}^{(n-1)\times n}$ et $R' \in \mathbf{A}^{n\times(n-1)}$ avec $RR' = \mathrm{I}_{n-1}$.
Montrer que $\operatorname{Ker} R$ est un module libre. Conclure.

Exercice 14. *(Vecteurs unimodulaires, modules M vérifiant $M \oplus \mathbf{A} \simeq \mathbf{A}^n$)*
Soient x, $y \in \mathbf{A}^n$ deux vecteurs et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ une matrice de première colonne x.
On construit une matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ de la manière suivante : sa première ligne est ${}^ty$ et ses $n-1$ dernières lignes sont les $n-1$ dernières lignes de $\widetilde{A}$, matrice adjointe de A.

1. Montrer que $\det(B) = \det(A)^{n-2}\,\langle x \,|\, y\rangle$ et que les $n-1$ dernières lignes de B appartiennent à $x^\perp := \operatorname{Ker}{}^t x$.

On suppose désormais que $\langle x \,|\, y\rangle = 1$. On sait alors que les deux modules stablement libres $x^\perp$ et $y^\perp$ sont duaux l'un de l'autre (faits 4.1 et 4.2) ; on détaille cette propriété de manière matricielle dans le cas où $y^\perp$ est libre.

2. Rappeler pourquoi $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}x \oplus y^\perp$ et $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus x^\perp$.
3. On suppose que $\mathbf{A}x$ possède un supplémentaire libre dans $\mathbf{A}^n$. Montrer de manière matricielle qu'il en est de même de $\mathbf{A}y$ en construisant une matrice inversible $n \times n$ « adaptée » à la décomposition $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus x^\perp$.

Exercice 15. *(Matrice de localisation principale symétrique)*
Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ possédant une matrice de localisation principale $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ symétrique. On pose $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$; en utilisant l'égalité (5) de la proposition 7.4, montrer que $\mathfrak{a}^2$ est principal et précisément : $\mathfrak{a}^2 = \left\langle x_1^2, \cdots, x_n^2\right\rangle = \left\langle x_1^2 + \cdots + x_n^2\right\rangle$.

Exercice 16. *(Au sujet de $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \oplus \mathbf{A}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$)*
Voir aussi les exercices VIII-10 et VIII-11, et le corollaire XII-1.7.
1. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$ vérifiant $1 \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$. Expliciter $\theta \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$ vérifiant $\theta(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \oplus (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$. En déduire que $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{b}$ est isomorphe à $\mathbf{A}/(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \oplus \mathbf{A}/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.
2. Soient a, $b \in \mathbf{A}$, $\mathfrak{a} = \langle a\rangle$, $\mathfrak{b} = \langle b\rangle$. On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$ telle que $A \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} * \\ 0 \end{bmatrix}$. Montrer que $1 \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) + (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$. Expliciter d et m tels que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} = \langle m\rangle$, $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \langle d\rangle$, ainsi qu'une équivalence matricielle entre $\operatorname{Diag}(a,b)$ et $\operatorname{Diag}(m,d)$.
3. Soient a, $b \in \mathbf{A}$ avec $a \in \left\langle a^2\right\rangle$. Montrer que a, b vérifient les conditions de la question *2.*
4. Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux de type fini tels que $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ soit localement principal. Montrer : $1 \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$, $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$ est de type fini et $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$.

Les exercices qui suivent apportent quelques précisions sur le déterminant, le polynôme caractéristique et le polynôme fondamental.

Exercice 17. Soient M un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, e un idempotent de $\mathbf{A}$, $f = 1 - e$ et φ un endomorphisme de M. Alors $M = eM \oplus fM$, de sorte que eM et fM sont projectifs de type fini. On a aussi $\varphi(eM) \subseteq eM$, et en notant $\varphi_e : eM \to eM$ l'endomorphisme induit par φ, on a :

$$\det(\varphi_e) = f + e\det(\varphi) \quad \text{et} \quad \det(e\varphi) = r_0 f + e\det(\varphi)$$
$$\mathrm{F}_{e\varphi}(X) = \mathrm{F}_{\varphi}(eX) = \mathrm{F}_{\varphi_e}(X) = f + e\,\mathrm{F}_{\varphi}(X)$$
$$\mathrm{C}_{\varphi_e}(X) = f + e\,\mathrm{C}_{\varphi}(X)$$
$$\mathrm{R}_{eM}(X) = f + e\,\mathrm{R}_{M}(X)$$

En outre, $e\det(\varphi)$ est le déterminant de φ_e en tant qu'endomorphisme du $\mathbf{A}[1/e]$-module eM.

Exercice 18. On considère le module quasi libre $M = \bigoplus_{k\in[\![1..n]\!]}(r_k\mathbf{A})^k$, où les r_k sont des idempotents orthogonaux. On a $M \simeq e_1\mathbf{A}\oplus\cdots\oplus e_n\mathbf{A}$ avec $e_k = \sum_{j=k}^n r_j$, et $e_k \mid e_{k+1}$ pour $k \in [\![1..n-1]\!]$ (cf. lemme II-5.25, et exercices II-10 et II-14).
On pose $r_0 = 1 - \sum_{i=1}^n r_i$ et $s_k = 1 - r_k$.
- Rappeler pourquoi $\mathrm{R}_{r_k\mathbf{A}}(X) = s_k + r_kX$.
- Montrer que $\mathrm{R}_M(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n = \prod_{k=1}^n (s_k + r_kX)^k$.
- Vérifier cette égalité par un calcul direct.

Exercice 19. *(Le déterminant, composante par composante)*
Soit φ un endomorphisme d'un module projectif de type fini M ayant n générateurs. Soient $r_h = \mathrm{e}_h(M)$ (pour $h \in [\![0..n]\!]$) et $d = \det(\varphi)$. Notons $\varphi^{(h)}$ l'endomorphisme du $\mathbf{A}$-module $M^{(h)}$ induit par φ, $d_h = r_hd$, $\delta_h = \det(\varphi^{(h)})$ et $s_h = 1 - r_h$.
1. On a les égalités suivantes :
$$d_0 = r_0,\ \delta_0 = 1,\ \delta_h = s_h + d_h \ \text{ et } \ d = d_0 + d_1 + \cdots + d_n = \delta_1 \times \cdots \times \delta_n.$$
2. En outre, d_h est le déterminant de $\varphi^{(h)}$ dans $\mathbf{A}[1/r_h]$ lorsque l'on voit $\varphi^{(h)}$ comme un endomorphisme du $\mathbf{A}[1/r_h]$-module $M^{(h)}$.
3. De la même manière, on a :
$$\mathrm{F}_{\varphi^{(h)}}(X) = s_h + r_h\,\mathrm{F}_\varphi(X) \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_{\varphi^{(h)}}(X) = s_h + r_h\,\mathrm{C}_\varphi(X).$$

Exercice 20. *(Polynôme caractéristique et polynôme fondamental en cas de rang constant)* Soit φ un endomorphisme d'un module M de rang constant h. On montrera les résultats suivants.
Le polynôme caractéristique de φ est unitaire de degré h et le polynôme fondamental de φ est de degré $\leqslant h$. Les homogénéises en degré h de $\mathrm{C}_\varphi(X)$ et $\mathrm{F}_\varphi(X)$ sont égaux respectivement à $\det(X\mathrm{Id}_M - Y\varphi)$ et $\det(Y\mathrm{Id}_M + X\varphi)$. Autrement dit on a les deux égalités
$$\mathrm{C}_\varphi(X) = X^h\,\mathrm{F}_\varphi(-1/X) \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_\varphi(X) = (-X)^h\,\mathrm{C}_\varphi(-1/X).$$
En outre, $\det(\varphi) = (-1)^h\,\mathrm{C}_\varphi(0)$ est égal au coefficient en X^h de $\mathrm{F}_\varphi(X)$.

Exercice 21. *(Polynôme caractéristique et polynôme fondamental, cas général)*
Soit φ un endomorphisme d'un module projectif de type fini M. Notons
$$\mathrm{F}_\varphi(X) = 1 + v_1X + \cdots + v_nX^n \text{ et } \mathrm{R}_M(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n.$$
Alors, on a les égalités suivantes.
$$\begin{aligned}
r_hv_k &= 0 \ \text{ pour } 0 \leqslant h < k \leqslant n,\\
\mathrm{C}_\varphi(X) &= r_0 + \textstyle\sum_{1\leqslant h\leqslant n} r_h\,X^h\ \mathrm{F}_\varphi(-1/X),\\
\mathrm{F}_\varphi(-X) &= r_0 + \textstyle\sum_{1\leqslant h\leqslant n} r_h\,X^h\ \mathrm{C}_\varphi(1/X),\\
\det(\varphi - X\mathrm{Id}_M) &= \mathrm{R}_M(-1)\ \mathrm{C}_\varphi(X),\\
\det(\varphi) &= r_0 + r_1v_1 + \cdots + r_nv_n = \mathrm{R}_M(-1)\ \mathrm{C}_\varphi(0).
\end{aligned}$$

Problème 1. *(Complétion de vecteurs unimodulaires : un résultat dû à Suslin)*
Un vecteur de $\mathbf{A}^n$ est dit *complétable* s'il est égal à la première colonne d'une matrice de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$. Il est alors unimodulaire. On veut montrer le résultat suivant.
Soient $b \in \mathbf{A}$ et $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{A}^n$ tels que $(\overline{a_1},\dots,\overline{a_n})$ soit complétable sur $\mathbf{A}/b\mathbf{A}$, alors $(a_1,\dots,a_n,b^n)$ est complétable (sur $\mathbf{A}$).
Par hypothèse, on a A, $D \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ vérifiant $A\,D \equiv \mathrm{I}_n \bmod b$, avec $[\,a_1\ \cdots\ a_n\,]$ pour première ligne de A. On veut trouver une matrice de $\mathbb{GL}_{n+1}(\mathbf{A})$ dont la première ligne soit $[\,a_1\ \cdots\ a_n\ b^n\,]$. Notons $a = \det(A)$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $\begin{bmatrix} A & b\,\mathrm{I}_n \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_{2n}(\mathbf{A})$.

Il s'agit maintenant de transformer le coin haut-droit $b\,\mathrm{I}_n$ de la matrice ci-dessus en $B' := \mathrm{Diag}(b^n, 1, \ldots, 1)$.

2. Montrer que l'on peut écrire $B' = bE + aF$ avec $E \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ et $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$.

3. Vérifier que $\begin{bmatrix} A & b\,\mathrm{I}_n \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & \widetilde{A}F \\ 0 & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B' \\ C & D' \end{bmatrix}$ avec $D' \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$.

4. Montrer que $\begin{bmatrix} A & B' \\ C & D' \end{bmatrix}$ est équivalente à une matrice $\begin{bmatrix} A & B' \\ C & D'' \end{bmatrix}$ où D'' a ses $n-1$ dernières colonnes nulles. En déduire l'existence d'une matrice inversible dont la première ligne est $[\,a_1 \ \cdots \ a_n \ b^n\,]$.

5. Exemple (Krusemeyer). Si $(x, y, z) \in \mathbf{A}^3$ est unimodulaire, (x, y, z^2) est complétable. Plus précisément, si $ux + vy + wz = 1$, la matrice ci-dessous convient :

$$\begin{bmatrix} x & y & z^2 \\ v^2 & w - uv & -x - 2vz \\ -w - uv & u^2 & -y + 2uz \end{bmatrix}.$$

Quel est son déterminant (indépendamment du fait que $ux + vy + wz = 1$) ?

6. Plus généralement, on a le résultat suivant (Suslin) : si $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est unimodulaire, alors $(a_0, a_1, a_2^2, \ldots, a_n^n)$ est complétable.

7. Montrer le résultat suivant (Suslin's $n!$ theorem) : si $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$ est unimodulaire, alors pour des exposants e_0, e_1, …, e_n tels que $n!$ divise $e_0 \cdot e_1 \cdots e_n$, le vecteur $(a_0^{e_0}, a_1^{e_1}, \ldots, a_n^{e_n})$ est complétable.

Problème 2. *(La n-sphère quand -1 est une somme de n carrés, avec I. Yengui)*

1. Soit $\mathbf{A}$ un anneau dans lequel -1 est une somme de 2 carrés et x_0, x_1, $x_2 \in \mathbf{A}$ vérifiant $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1$.

a. Montrer que le vecteur (x_0, x_1, x_2) est complétable en considérant une matrice $M = \begin{bmatrix} x_0 & u & a \\ x_1 & v & b \\ x_2 & 0 & c \end{bmatrix}$ où u, v sont des formes linéaires en x_0, x_1, x_2 et a, b, c sont des constantes.

b. Donner des exemples d'anneaux $\mathbf{A}$ dans lesquels -1 est une somme de 2 carrés.

2. On suppose que -1 est une somme de n carrés dans l'anneau $\mathbf{A}$.

a. On utilise la notation $A \overset{\mathcal{G}}{\sim} B$ page 937. Soit $(x_i)_{i \in [\![0..n]\!]}$ avec $x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1$. Montrer que

$${}^{\mathrm{t}}[\,x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_n\,] \overset{\mathbb{E}_{n+1}}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[\,1 \ 0 \ \cdots \ 0\,].$$

En particulier, ${}^{\mathrm{t}}[\,x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_n\,]$ est complétable.

b. Soit $m \geqslant n$, $x_0, x_1, \ldots, x_m$ et $y_{n+1}, \ldots, y_m$ vérifiant $\sum_{i=0}^{n} x_i^2 + \sum_{j=n+1}^{m} y_j x_j = 1$. Montrer que ${}^{\mathrm{t}}[\,x_0 \ x_1 \ \cdots \ x_m\,] \overset{\mathbb{E}_{m+1}}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[\,1 \ 0 \ \cdots \ 0\,]$.

3. On suppose qu'il existe $a \in \mathbf{A}$ tel que $1 + a^2$ soit nilpotent. C'est le cas si -1 est un carré dans $\mathbf{A}$, ou si 2 est nilpotent.

a. Soient x_0, $x_1 \in \mathbf{A}$ avec $x_0^2 + x_1^2 = 1$. Montrer que $\begin{bmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{bmatrix} \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A})$.

b. Soient x_0, x_1, …,x_n et y_2, …, y_n dans $\mathbf{A}$ tels que $x_0^2+x_1^2+\sum_{i=2}^n x_iy_i=1$. Montrer que ${}^t[\,x_0\ x_1\ \cdots\ x_n\,] \overset{\mathbb{E}_{n+1}}{\sim} {}^t[\,1\ 0\ \cdots\ 0\,]$.

c. Soit $\mathbf{k}$ un anneau, $\mathbf{k}[\underline{X},\underline{Y}]=\mathbf{k}[X_0,X_1,\dots,X_n,Y_2,\dots,Y_n]$ et
$$f=1-\left(X_0^2+X_1^2+\textstyle\sum_{i=2}^n X_iY_i\right).$$
On pose $\mathbf{A}_n=\mathbf{k}[x_0,x_1,\dots,x_n,y_2,\dots,y_n]=\mathbf{k}[\underline{X},\underline{Y}]/\langle f\rangle$. Donner des exemples pour lesquels, pour tout n, ${}^t[\,x_0\ x_1\ \cdots\ x_n\,]$ est complétable sans que -1 soit un carré dans $\mathbf{A}_n$.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 4. *1.* Par récurrence sur n, le cas $n=1$ étant exactement le lemme de Schanuel (corollaire 2.8). À partir de chaque suite exacte, on en construit une autre de longueur un de moins
$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \to & K & \to & P_{n-1} & \to & \cdots & \to & P_1\oplus P_0' & \xrightarrow{u\oplus \mathrm{I}_{P_0'}} & \operatorname{Im}u\oplus P_0' \ \to\ 0\\
0 & \to & K' & \to & P_{n-1}' & \to & \cdots & \to & P_1\oplus P_0' & \xrightarrow{u'\oplus \mathrm{I}_{P_0}} & \operatorname{Im}u'\oplus P_0 \ \to\ 0
\end{array}$$
Mais on a $\operatorname{Im}u\oplus P_0'\simeq \operatorname{Im}u'\oplus P_0$ d'après le lemme de Schanuel appliqué aux deux suites exactes courtes :
$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \operatorname{Im}u & \to & P_0 & \to & M & \to & 0\\
0 & \to & \operatorname{Im}u' & \to & P_0' & \to & M & \to & 0
\end{array}$$
On peut donc appliquer la récurrence (aux deux longues suites exactes de longueur un de moins), ce qui fournit le résultat demandé.
2. Conséquence immédiate de *1.*

Exercice 5. Montrons par récurrence sur i que $\operatorname{Im}u_i$ est un module projectif de type fini. C'est vrai pour $i=1$. Supposons le vrai pour $i\geqslant 1$; on a donc une application linéaire surjective $P_i\xrightarrow{u_i}\operatorname{Im}u_i$ où $\operatorname{Im}u_i$ est projectif de type fini et par conséquent $P_i\simeq\operatorname{Ker}u_i\oplus\operatorname{Im}u_i$. Mais $\operatorname{Ker}u_i=\operatorname{Im}u_{i+1}$ donc $\operatorname{Im}u_{i+1}$ est projectif de type fini. De plus $P_i\simeq\operatorname{Im}u_i\oplus\operatorname{Im}u_{i+1}$. Ensuite
$$\begin{array}{rcl}
P_1\oplus P_3\oplus P_5\oplus\cdots & \simeq & (\operatorname{Im}u_1\oplus\operatorname{Im}u_2)\oplus(\operatorname{Im}u_3\oplus\operatorname{Im}u_4)\oplus\cdots\\
& \simeq & \operatorname{Im}u_1\oplus(\operatorname{Im}u_2\oplus\operatorname{Im}u_3)\oplus(\operatorname{Im}u_4\oplus\operatorname{Im}u_5)\oplus\cdots\\
& \simeq & P_2\oplus P_4\oplus P_6\oplus\cdots
\end{array}$$

Exercice 7. On note A_1, …, A_n les colonnes de A et $t=\operatorname{Tr}A=\sum_i a_{ii}$.
1. On suppose que A est un projecteur de rang $\leqslant 1$. Vérifions d'abord $tA_j=A_j$: $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ki} & a_{kj}\end{vmatrix}=0$ et $A^2=A$, impliquent $ta_{kj}=\sum_i a_{ii}a_{kj}=\sum_i a_{ki}a_{ij}=a_{kj}$.
Donc $(1-t)A=0$, puis $(1-t)t=0$, i.e. t idempotent. De plus, si $aA=0$, alors $at=0$, i.e. $a=a(1-t)$.
2. Sur le localisé en a_{ii}, deux colonnes quelconques A_j, A_k sont multiples de A_i donc $A_j\wedge A_k=0$. D'où globalement $A_j\wedge A_k=0$, et donc $\mathcal{D}_2(A)=0$. Par ailleurs, en utilisant $\begin{vmatrix} a_{ik} & a_{ij}\\ a_{kk} & a_{kj}\end{vmatrix}=0$, on obtient $\sum_k a_{ik}a_{kj}=\sum_k a_{ij}a_{kk}=a_{ij}\operatorname{Tr}A=a_{ij}$, i.e. $A^2=A$.

3. Le système de droite est de cardinal $1+n^2$, celui du milieu de cardinal $1+\binom{n}{2}^2$. Pour obtenir celui de gauche, il faut compter les mineurs sans coin sur la diagonale. Supposons $n \geqslant 3$, il y en a $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}$, il en reste $\binom{n}{2}^2 - \binom{n}{2}\binom{n-2}{2} = (2n-3)\binom{n}{2}$ d'où le cardinal $1+(2n-3)\binom{n}{2}$. Pour $n=3$, chaque système est de cardinal 10. Pour $n>3$, $1+n^2$ est strictement plus petit que les deux autres.

Exercice 8. *1.* On a $\begin{vmatrix} a_{i\ell} & a_{ij} \\ a_{k\ell} & a_{kj} \end{vmatrix} = 0$, i.e. $a_{kj}a_{i\ell} = a_{ij}a_{k\ell}$.
C'est l'égalité $C_j \cdot L_i = a_{ij}A$. Quant à $L_i \cdot C_j$, c'est le coefficient en position (i,j) de $A^2 = A$, i.e. a_{ij}.
2. On a $L_i \cdot A = L_i$ donc $L_i \cdot (\mathrm{I}_n - A) = 0$. Réciproquement, pour $u \in \mathbf{A}^n$ tel que $\langle L_i \,|\, u\rangle = 0$, il faut montrer que $u = (\mathrm{I}_n - A)(u)$, i.e. $Au = 0$, i.e. $\langle L_k \,|\, u\rangle = 0$. Mais $a_{ij}L_k = a_{kj}L_i$ et comme a_{ij} est régulier, c'est immédiat.
3. L'égalité $a_{kj}a_{i\ell} = a_{ij}a_{k\ell}$ montre que $C \cdot L = a_{ij}A$. En outre, si $\mathbf{A}$ est à divisibilité explicite, on peut calculer A à partir de L et C.
Si l'on se donne une ligne L dont les coefficients sont appelés $a_{i\ell}$ ($\ell \in [\![1..n]\!]$) et une colonne C dont les coefficients sont appelés a_{kj} ($k \in [\![1..n]\!]$), avec l'élément commun a_{ij} régulier, les conditions sont les suivantes :

— chaque coefficient de $C \cdot L$ doit être divisible par a_{ij}, d'où $A = \dfrac{1}{a_{ij}} C \cdot L$,

— on doit avoir $\mathrm{Tr}(A) = a_{ij}$, i.e., $L \cdot C = a_{ij}$.

Naturellement, ces conditions sont directement reliées à l'inversibilité de l'idéal engendré par les coefficients de L.
4. Dans l'égalité matricielle $C \cdot L = (L \cdot C)\, A$ à démontrer, chaque membre est bilinéaire en (L, C). Or, l'égalité est vraie si ${}^{\mathrm{t}}L$ est une colonne de ${}^{\mathrm{t}}A$ et C une colonne de A, donc elle reste vraie pour ${}^{\mathrm{t}}L \in \mathrm{Im}\, {}^{\mathrm{t}}A$ et $C \in \mathrm{Im}\, A$. Le reste est facile.

Exercice 9. M est le quotient d'un module projectif de type fini P qui a les mêmes idéaux de Fitting que lui. Si $P \oplus N = \mathbf{A}^n$, $M \oplus N$ est un quotient de $\mathbf{A}^n$ avec les mêmes idéaux de Fitting. Donc il n'y a pas de relation non nulle entre les générateurs de $\mathbf{A}^n$ dans le quotient $M \oplus N$. Donc

$$M \oplus N = \mathbf{A}^n \quad \text{et} \quad P/M \simeq (P \oplus N)/(M \oplus N) = 0.$$

Exercice 10. *1.* Une syzygie $z = \sum z_k e_k$ est somme de syzygies courtes si, et seulement si, il existe des syzygies $z_{ij} \in \mathbf{A}e_i \oplus \mathbf{A}e_j$ telles que $z = \sum_{i<j} z_{ij}$. Ceci se relit comme suit :

$$\exists \alpha_{ij}, \beta_{ij} \in \mathbf{A},\ z_{ij} = \alpha_{ij}e_i + \beta_{ij}e_j,\ \langle z_{ij} \,|\, x\rangle = 0 \quad \text{et} \quad z = \textstyle\sum_{i<j} z_{ij}.$$

Cela équivaut à $z_k = \sum_{k<j} \alpha_{kj} + \sum_{i<k} \beta_{ik}$ ($k \in [\![1..n]\!]$) et $\alpha_{ij}x_i + \beta_{ij}x_j = 0$ (pour $i<j$). Il s'agit bien d'un système linéaire en les « inconnues » α_{ij}, β_{ij}.
2. En raisonnant localement, on peut supposer que les x_i sont multiples de x_1, ce que l'on écrit $b_i x_1 + x_i = 0$. D'où les syzygies $r_i = b_i e_1 + e_i$ pour $i \in [\![2..n]\!]$.
Soit $z \in x^{\perp}$. Posons $y = z - (z_2 r_2 + \cdots + z_n r_n)$, on a $y_i = 0$ pour $i \geqslant 2$, et donc y est une syzygie (très) courte. Ainsi, $z = y + \sum_{i=2} z_i r_i$ est une somme de syzygies courtes.
3. Soient $x,\ y \in \mathbf{A}$. On cherche s, t avec $s+t=1$, $sx \in \mathbf{A}y$ et $ty \in \mathbf{A}x$. On écrit la syzygie $(-1,-1,1)$ entre $(x, y, x+y)$ comme somme de syzygies courtes

$$(-1,-1,1) = (0, a, a') + (b, 0, b') + (c, c', 0).$$

En particulier, $a' + b' = 1$, et l'on conclut.

4. Par définition $\sum_i a_{ii} = 1$ et $\begin{vmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ x_j & x_k \end{vmatrix} = 0$. Ceci fournit de nombreuses syzygies courtes $a_{ij}e_k - a_{ik}e_j$. On retient les $r_{ik} = a_{ii}e_k - a_{ik}e_i$, i.e. celles correspondant à un « mineur diagonal » $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} \\ x_i & x_k \end{vmatrix}$. Pour $z \in \mathbf{A}^n$, on pose

$$y = Az \quad \text{et} \quad z' = \textstyle\sum_{i,k} z_k r_{ik} = \sum_{i,k} z_k(a_{ii}e_k - a_{ik}e_i).$$

Alors $z = z' + y$: en effet, le coefficient de e_j dans z' est

$$\big(\textstyle\sum_i a_{ii}\big)z_j - \sum_k a_{jk}z_k = z_j - (Az)_j.$$

Puisque $A^2 - A$ annule M, $z - y \in x^\perp$, donc $z \in x^\perp \Rightarrow y \in x^\perp$. Chaque $y_i e_i$ est un syzygie (très) courte puisque $y_i x_i = 0$. Donc $z = z' + y = z' + \sum y_i e_i$ est une somme de syzygies courtes.

Exercice 11. *1.* On écrit $z \in \mathbf{A}^n$ sous la forme

$$z = \langle x \,|\, z\rangle.y + (z - \langle x \,|\, z\rangle.y),$$

ce qui fournit la décomposition $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus x^\perp$.

2. Pour $i \leqslant j$, définissons $z_{ij} \in \mathbf{A}$ par $z_{ij} = z_i y_j - z_j y_i$ et posons

$$z' = \textstyle\sum_{i<j} z_{ij}(x_j e_i - x_i e_j) = \sum_{i\leqslant j} z_{ij}(x_j e_i - x_i e_j).$$

Pour k fixé, le coefficient de e_k dans la somme de droite est

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j\geqslant k} z_{kj}x_j - \sum_{i<k} z_{ik}x_i \;&=\; \textstyle\sum_{j\geqslant k}(z_k y_j - z_j y_k)x_j - \sum_{i<k}(z_i y_k - z_k y_i)x_i \\ &=\; z_k \textstyle\sum_{j=1}^n y_j x_j - y_k \sum_{j=1}^n z_j x_j \;=\; z_k - \langle z \,|\, x\rangle y_k\,.\end{aligned}$$

Ce qui signifie $z' = z - \langle z \,|\, x\rangle y$ et prouve le résultat demandé.

3. Si ψ est la forme bilinéaire alternée associée à la matrice, l'égalité $\langle x \,|\, z\rangle = 0$ signifie simplement que $\psi(x, x) = 0$.

4. On peut écrire une matrice alternée $n \times n$ comme somme de $\frac{n(n-1)}{2}$ petites matrices alternées. Pour $n = 3$, voici la matrice alternée permettant de faire le lien avec la question *2* (y est fixé et c'est z qui varie) :

$$M_z = \begin{bmatrix} 0 & z_1y_2 - z_2y_1 & z_1y_3 - z_3y_1 \\ -z_1y_2 + z_2y_1 & 0 & z_2y_3 - z_3y_2 \\ -z_1y_3 + z_3y_1 & -z_2y_3 + z_3y_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

La décomposition de M_z en petites matrices alternées fournit les π_{ij}. Il faut noter que $z \mapsto M_z$, $\mathbf{A}^n \to \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est une application linéaire et que $\pi(z) = M_z x$.

Exercice 12. *1.* On suit la méthode du cours. Elle conduit à poser :

$$A = \begin{bmatrix} 0_r & -Y \\ X & \mathrm{I}_n - P \end{bmatrix}, \quad A' = \begin{bmatrix} 0_r & Y \\ -X & \mathrm{I}_n - P \end{bmatrix}.$$

Ces matrices vérifient

$$A \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_r & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} A,\ AA' = \mathrm{I}_{n+r}.$$

2. Immédiat puisque l'on a les formules sous les yeux.

Exercice 13. La formule de Binet-Cauchy donne $1 = \det(RR') = \sum \delta_i \delta'_i$ avec $\delta_i = \det(R_{1..n-1,1..n\setminus i})$ et $\delta'_i = \det(R'_{1..n\setminus i,1..n-1})$.

On pose $S = [\,\delta'_1\ -\delta'_2\ \cdots\ (-1)^{n-1}\delta'_n\,]$. On vérifie que la matrice carrée $A = \begin{bmatrix} S \\ R \end{bmatrix}$ est de déterminant 1. Ceci montre que $\operatorname{Ker} R$ est libre (proposition 4.4).
En fait soit $S' = {}^{\mathrm{t}}[\,\delta_1\ -\delta_2\ \cdots\ (-1)^{n-1}\delta_n\,]$ et $A' = [S'\,R']$. Alors $AA' = \mathrm{I}_n$, et ceci montre que $S' \in \mathbf{A}^n$ est une base de $\operatorname{Ker} R$.

Exercice 14. *1.* On considère la matrice $B\,A$. Par définition de B, $B\,A$ est triangulaire supérieure, de diagonale $(\langle x \,|\, y\rangle, \delta, \ldots, \delta)$ où $\delta = \det(A)$. En prenant le déterminant, on obtient $\det(B)\det(A) = \langle x \,|\, y\rangle\,\delta^{n-1}$. Les identités algébriques annoncées sont donc vraies lorsque δ est inversible. Puisqu'il s'agit d'identités algébriques, elles sont toujours vraies. Le deuxième point de la question est immédiat.
2. On écrit $z \in \mathbf{A}^n$ sous la forme $z = \langle y \,|\, z\rangle\, x + (z - \langle y \,|\, z\rangle\, x)$, ce qui fournit la décomposition $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}x \oplus y^\perp$
3. L'hypothèse revient à dire que x est la première colonne d'une matrice inversible A. Donc y est la première ligne de la matrice inversible B ci-dessus. La matrice ${}^{\mathrm{t}}B$ est adaptée à la décomposition $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus x^\perp$.

Exercice 15. Notons $x = [\,x_1\ \cdots\ x_n\,]$. Pour $\alpha = {}^{\mathrm{t}}[\alpha_1, \ldots, \alpha_n]$ et $\beta = A\alpha$, l'égalité en question est :

$$\beta\, x = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix}\ x_1\ \cdots\ x_n\ \end{bmatrix} = x\,\alpha\,A \quad \text{avec} \quad x\,\beta = x\,\alpha.$$

Prenons $\alpha_i = x_i$. Puisque $xA = x$ et A est symétrique, on obtient $A\,{}^{\mathrm{t}}x = {}^{\mathrm{t}}x$, i.e. $\beta = {}^{\mathrm{t}}x$. D'où ${}^{\mathrm{t}}x\,x = x\,{}^{\mathrm{t}}x\,A = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)A$.
Finalement, $x_i x_j \in \left\langle x_1^2 + \cdots + x_n^2 \right\rangle$ $(i, j \in [\![1..n]\!])$.

Exercice 16. *1.* Soit $\alpha \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$ et $\beta \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ vérifiant $1 = \alpha + \beta$. Alors, la matrice $\theta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, de déterminant 1 et d'inverse $\theta^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}$, convient. En effet :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} \\ \mathfrak{a}+\mathfrak{b} \end{bmatrix} \subseteq \begin{bmatrix} \mathfrak{a} \\ \mathfrak{b} \end{bmatrix}.$$

À gauche, l'inclusion haute vient du fait que $\alpha\mathfrak{a} + \beta\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}$, celle du bas est triviale. À droite, l'inclusion haute vient du fait que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} + \beta(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{a}$, et celle du bas vient du fait que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} + \alpha(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \subseteq \mathfrak{b}$. Bilan : on a $\theta(\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}) \oplus (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$ avec $\theta = \begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{E}_2(\mathbf{A})$.

2. On peut prendre A de la forme $A = \begin{bmatrix} u & v \\ -b' & a' \end{bmatrix}$ avec $ua' + vb' = 1$ et $a'b = b'a$.
Posons $m = a'b = b'a$ et $d = ua + vb$. L'égalité $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} d \\ 0 \end{bmatrix}$ donne $a = da'$ et $b = db'$. Il est clair que $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b} = \langle m\rangle$ et $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \langle d\rangle$. On a $a' \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ et $b' \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$.

Donc $1 = \alpha + \beta$ avec $\alpha = vb' \in (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$, $\beta = ua' \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$. Pour expliciter une équivalence matricielle, il suffit d'utiliser une matrice θ de la question précédente : $\theta \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} vm \\ -a \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} - a' \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$, $\theta \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} um \\ b \end{bmatrix} = u \begin{bmatrix} m \\ 0 \end{bmatrix} + b' \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$.
D'où l'équivalence matricielle : $\theta \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v & u \\ -a' & b' \end{bmatrix}$.

3. L'hypothèse est $a = a^2x$ pour un certain x. Alors, l'élément $e = ax$ est idempotent et $\langle a \rangle = \langle e \rangle$. On doit résoudre $a'b = b'a$, $1 = ua' + vb'$, qui est un système linéaire en a', b', u, v.
Modulo $1 - e$, on a $ax = 1$, on prend $a' = a$, $b' = b$, $u = x$, $v = 0$.
Modulo e, on a $a = 0$, on prend $a' = a$, $b' = 1$, $u = 0$, $v = 1$.
Donc globalement :

$$a' = a, \quad b' = axb + (1 - ax)1 = 1 - ax + axb, \quad u = ax^2, \quad v = 1 - ax.$$

4. Soit $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ et $\mathfrak{b} = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$.
On écrit $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle z_1, \dots, z_{n+m} \rangle$ avec $z_1 = x_1$, …, $z_{n+m} = y_m$. Soient $s_1, \dots, s_{n+m}$ comaximaux tels que sur $\mathbf{A}_{s_i}$, on ait $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle z_i \rangle$.
Dans chaque localisé on a $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ ou $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, d'où $\{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}, \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}\} = \{\mathfrak{a}, \mathfrak{b}\}$, et :

$$1 \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}), \ \mathfrak{a}\mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}) \text{ et } \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \text{ est de type fini.}$$

Exercice 17. Nous reprenons les notations du lemme 8.7.
Voyons les déterminants de $e\varphi$ et φ_e. On a

$$\det(\varphi) = \det(\mathrm{I}_n - F + H), \det(e\varphi) = \det(\mathrm{I}_n - F + eH) \text{ et } \det(\varphi_e) = \det(\mathrm{I}_n - eF + eH).$$

On en déduit

$$e \det(\varphi_e) = \det(e\mathrm{I}_n - eF + eH) = e \det(\varphi) \text{ et}$$
$$f \det(\varphi_e) = \det(f\mathrm{I}_n - feF + feH) = \det(f\mathrm{I}_n) = f.$$

Donc $\det(\varphi_e) = f \det(\varphi_e) + e \det(\varphi_e) = f + e \det(\varphi)$.
De même $e \det(e\varphi) = \det(e\mathrm{I}_n - eF + eH) = e \det(\varphi)$ et

$$f \det(e\varphi) = \det(f\mathrm{I}_n - fF + feH) = f \det(\mathrm{I}_n - F) = f \, \mathrm{R}_M(0) = f\mathrm{e}_0(M).$$

En appliquant $\det(\varphi_e) = f + e \det(\varphi)$ aux endomorphismes $\mathrm{Id} + X\varphi$, $X\mathrm{Id} - \varphi$ et $X\mathrm{Id}$ du $\mathbf{A}[X]$-module $M[X]$ on obtient $\mathrm{F}_{\varphi_e}(X) = f + e\,\mathrm{F}_\varphi(X)$, $\mathrm{C}_{\varphi_e}(X) = f + e\,\mathrm{C}_\varphi(X)$ et $\mathrm{R}_{eM}(X) = f + e\,\mathrm{R}_M(X)$.
Par ailleurs, la matrice eH représente à la fois l'endomorphisme $e\varphi$ de M et l'endomorphisme φ_e de eM. On a donc $\mathrm{F}_{\varphi_e}(X) = \mathrm{F}_{e\varphi}(X) = \det(\mathrm{I}_n + eXH) = \mathrm{F}_\varphi(eX)$.
En ce qui concerne la dernière affirmation : on doit regarder $\det(\varphi_e)$ dans $\mathbf{A}/\langle f \rangle$, on obtient $e \det(\varphi)$ modulo $f\mathbf{A}$, et cela correspond à l'élément $e \det(\varphi)$ de $e\mathbf{A}$.

Exercice 19. *1.* On a $\varphi^{(h)} = \varphi_{r_h}$ en appliquant la notation de l'exercice 17.
Donc $\delta_h = s_h + d_h$. On a $\delta_0 = 1$ parce que $M^{(0)} = \{0\}$, et puisque $\delta_0 = s_0 + d_0$, cela donne $d_0 = r_0$.
L'égalité $d = d_0 + d_1 + \cdots + d_n$ est triviale.
L'égalité $d = \delta_1 \times \cdots \times \delta_n$ résulte du point *3* du théorème 8.1. On peut aussi démontrer $d_0 + d_1 + \cdots + d_n = \delta_1 \times \cdots \times \delta_n$ par un calcul direct.
2 et *3.* Déjà vus dans l'exercice 18.

Exercice 20. Rappel : pour $a \in \mathbf{A}$ on a $\det(a\varphi) = \mathrm{R}_M(a)\det(\varphi) = a^h \det(\varphi)$.
On se place alors sur l'anneau $\mathbf{A}[X, 1/X]$ et l'on considère le module $M[X, 1/X]$, on obtient

$$X^h \,\mathrm{F}_\varphi(-1/X) = \det\big(X(\mathrm{Id}_M - (1/X)\varphi)\big) = \det(X\mathrm{Id}_M - \varphi) = \mathrm{C}_\varphi(X).$$

En remplaçant X par $-1/X$ dans $\mathrm{C}_\varphi(X) = X^h \,\mathrm{F}_\varphi(-1/X)$ on obtient l'autre égalité. Les deux polynômes sont donc de degrés $\leqslant h$. Comme le coefficient constant de F_φ est égal à 1, on obtient aussi que C_φ est unitaire.
Pour les homogénéisés, le même calcul fonctionne.
Pour le déterminant on remarque que $\det(-\varphi) = \mathrm{C}_\varphi(0)$.

Exercice 21. On se place sur l'anneau $\mathbf{A}_{r_h}$ et l'on considère le module $r_h M$ et l'endomorphisme $\varphi^{(h)}$. On obtient un module de rang constant h. Donc $r_h \,\mathrm{F}_\varphi(X)$ et $r_h \,\mathrm{C}_\varphi(X)$ sont de degrés $\leqslant h$, et $r_h\big(X^h \,\mathrm{F}_\varphi(-1/X)\big) = r_h \,\mathrm{C}_\varphi(X)$. Il reste à faire la somme des égalités ainsi obtenues pour $h \in [\![1..n]\!]$.
Même calcul pour la deuxième égalité. Les deux dernières égalités étaient déjà connues, sauf pour $\det(\varphi) = r_0 + r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n$ qui peut se démontrer comme la première.

Problème 1. *1.* Soient $C, U \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telles que $AD = \mathrm{I}_n + bU$, $DA = \mathrm{I}_n + bC$. Alors :

$$\begin{bmatrix} A & b\mathrm{I}_n \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D & -b\mathrm{I}_n \\ -U & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ * & \mathrm{I}_n \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_{2n}(\mathbf{A}).$$

2. On travaille modulo a en remarquant que b est inversible modulo a. On peut donc, sur $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$ considérer $b^{-1}B'$: c'est une matrice diagonale de déterminant 1, donc elle appartient à $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}/a\mathbf{A})$ (cf exercice II-17), on la remonte en une matrice $E \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ et l'on obtient $B' \equiv bE \bmod a$.
3. Immédiat.
4. Il suffit d'utiliser la sous-matrice I_{n-1} qui figure dans B' pour tuer les coefficients des $n-1$ dernières colonnes de D'. La sous-matrice carrée d'ordre $n+1$ obtenue à partir de $\begin{bmatrix} A & B' \\ C & D'' \end{bmatrix}$ en supprimant les lignes 2 à n et les $n-1$ dernières colonnes est inversible de première ligne $[\,a_1 \ \cdots \ a_n \ b^n\,]$.
5. Modulo z, le vecteur $[\,x\ y\,]$ est complétable en $A := \begin{bmatrix} x & y \\ -v & u \end{bmatrix}$.
On a $\det(A) = a := ux + vy \equiv 1 \bmod z$ et l'on peut prendre $D = \widetilde{A}$.
On écrit $DA = a\,\mathrm{I}_2 = \mathrm{I}_2 - wz\mathrm{I}_2$, donc $C = -w\mathrm{I}_2$. La matrice $\begin{bmatrix} A & z\mathrm{I}_2 \\ C & D \end{bmatrix}$ est de déterminant $(a+wz)^2$. Pour trouver E, on utilise l'égalité

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & z^{-1} \end{bmatrix} = \mathrm{E}_{21}(-1)\mathrm{E}_{12}(1-z^{-1})\mathrm{E}_{21}(z)\mathrm{E}_{12}\big(z^{-1}(z^{-1}-1)\big)$$

et le fait que modulo a, $zw \equiv 1$. L'auteur de l'exercice a obtenu une matrice G plus compliquée que celle de Krusemeyer. Avec $p = (y+u)w - u$, $q = (x-v)w + v$:

$$G = \begin{bmatrix} x & y & z^2 \\ p(w-1)v - w & -p(w-1)u & y + u(z+1) \\ -q(w-1)v & q(w-1)u - w & -x + v(z+1) \end{bmatrix}.$$

On a $\det(G) = 1 + (xu + yv + zw - 1)(wz + 1)(yq - xp + 1)$ tandis que la matrice de Krusemeyer est de déterminant $(ux + vy + wz)^2$!
6. Immédiat par récurrence.

Problème 2. *1a.* On a $\det(M) = -(cx_1 - bx_2)u + (cx_0 - ax_2)v$.
Avec $u = -(cx_1 + bx_2)$, $v = cx_0 + ax_2$, on obtient $\det(M) = cx_0^2 + cx_1^2 - (a^2 + b^2)x_2^2$.
Il suffit de prendre $c = 1$ et a, $b \in \mathbf{A}$ tels que $-1 = a^2 + b^2$.
1b. Montrons que -1 est une somme de deux carrés si $\mathbf{A}$ contient un corps fini.
On peut supposer que $\mathbf{A}$ est un corps de cardinal impair q.
On considère les ensembles $A = \left\{ a^2 \;\middle|\; a \in \mathbf{A} \right\}$ et $B = \left\{ -1 - b^2 \;\middle|\; b \in \mathbf{A} \right\}$.
Ils ont $(q+1)/2$ éléments, donc $A \cap B \neq \emptyset$, ce qui donne le résultat.
Voici maintenant un résultat plus général : si $n \not\equiv 0 \bmod 4$, alors -1 est une somme de deux carrés dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. L'hypothèse peut s'écrire $\operatorname{pgcd}(n, 4) = 1, 2$ donc $2 \in n\mathbb{Z} + 4\mathbb{Z}$, $2 = nu + 4v$. On pose $m = -1 + nu = -4v + 1$; puisque $\operatorname{pgcd}(4n, m) = 1$, la progression arithmétique $4n\mathbb{N} + m$ contient un nombre premier p (Dirichlet), qui vérifie $p \equiv m \equiv -1 \bmod n$ et $p \equiv m \equiv 1 \bmod 4$.
D'après cette dernière congruence, p est une somme de deux carrés, $p = a^2 + b^2$, donc $-1 = a^2 + b^2$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
On en déduit que si $n.1_{\mathbf{A}} = 0$ avec $n \not\equiv 0 \bmod 4$ (c'est le cas si n est un nombre premier), alors -1 est une somme de deux carrés dans $\mathbf{A}$.
2a. Soient $a_1, \ldots, a_n$ tels que $-1 = \sum_{i=1}^n a_i^2$. On va utiliser :

$$\textstyle\sum_{i=1}^n (x_i - a_i x_0)(x_i + a_i x_0) = \sum_{i=1}^n x_i^2 - x_0^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$$

On a :

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_{n+1}}{\sim} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 + a_1 x_0 \\ \vdots \\ x_n + a_n x_0 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_{n+1}}{\sim} \begin{bmatrix} x_0 + h \\ x_1 + a_1 x_0 \\ \vdots \\ x_n + a_n x_0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c}\text{avec} \\ h = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x_i + a_i x_0)\end{array}$$

En prenant $\lambda_i = (1 - x_0)(x_i - a_i x_0)$, on obtient $h = 1 - x_0$ donc $x_0 + h = 1$.
Il est ensuite clair que

$${}^{\mathrm{t}}[1, x_1 + a_1 x_0, \ldots, x_n + a_n x_0] \overset{\mathbb{E}_{n+1}}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1, 0, \ldots, 0].$$

De manière explicite, en numérotant les $n+1$ lignes de 0 à n (au lieu de 1 à $n+1$) et en posant :

$$N = \textstyle\prod_{i=1}^n \mathrm{E}_{i,0}\big(-(x_i + a_i x_0)\big) \prod_{i=1}^n \mathrm{E}_{0,i}\big((1 - x_0)(x_i - a_i x_0)\big) \prod_{i=1}^n \mathrm{E}_{i,0}(a_i)$$
$$M = N^{-1} = \textstyle\prod_{i=1}^n \mathrm{E}_{i,0}(-a_i) \prod_{i=1}^n \mathrm{E}_{0,i}\big((x_0 - 1)(x_i - a_i x_0)\big) \prod_{i=1}^n \mathrm{E}_{i,0}(x_i + a_i x_0),$$

on obtient une matrice $M \in \mathbb{E}_{n+1}(\mathbf{A})$ de première colonne ${}^{\mathrm{t}}[\,x_0 \;\cdots\; x_n\,]$.
2b. On utilise $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle x_{n+1}, \ldots, x_m \rangle$. Les morphismes $\mathbb{E}_r(\mathbf{A}) \twoheadrightarrow \mathbb{E}_r(\mathbf{B})$ sont surjectifs. On obtient d'abord :

$${}^{\mathrm{t}}[x_0, \ldots, x_n] \overset{\mathbb{E}_{n+1}(\mathbf{B})}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1, 0, \ldots, 0],$$

donc des $x'_0, \ldots, x'_n \in \mathbf{A}$ avec en particulier $x'_0 \equiv 1 \bmod \langle x_{n+1}, \ldots, x_m \rangle$ tels que

$${}^{\mathrm{t}}[x_0, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m] \overset{\mathbb{E}_{m+1}(\mathbf{A})}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[x'_0, \ldots, x'_n, x_{n+1}, \ldots, x_m].$$

On en déduit facilement :

$${}^{\mathrm{t}}[x'_0, \ldots, x'_n, x_{n+1}, \ldots, x_m] \overset{\mathbb{E}_{m+1}(\mathbf{A})}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1, \ldots, x'_n, x_{n+1}, \ldots, x_m] \overset{\mathbb{E}_{m+1}(\mathbf{A})}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1, 0, \ldots, 0].$$

3a. On a $\begin{bmatrix} x_0 & -x_1 \\ x_1 & x_0 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_2(\mathbf{A})}{\sim} B = \begin{bmatrix} x_0+ax_1 & -x_1+ax_0 \\ x_1 & x_0 \end{bmatrix}$. En utilisant le fait que $1+a^2$ est nilpotent, on voit que x_0+ax_1 est inversible car

$$(x_0+ax_1)(x_0-ax_1) = x_0^2+x_1^2-(1+a^2)x_1^2 = 1-(1+a^2)x_1^2.$$

La matrice $B \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ possède un coefficient inversible donc elle est dans $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$.
3b. Raisonner d'abord modulo $\langle x_2, \ldots, x_n\rangle$, puis comme dans la question *2b*.
3c. On peut prendre $\mathbf{k} = \mathbb{Z}/2^e\mathbb{Z}$ avec $e \geqslant 2$: -1 n'est pas un carré dans $\mathbf{k}$. Et -1 n'est pas non plus un carré dans $\mathbf{A}_n$ puisqu'il y a des morphismes $\mathbf{A}_n \to \mathbf{k}$, par exemple le morphisme d'évaluation en $x_0 = 1$, $x_i = 0$ pour $i \geqslant 1$, $y_j = 0$ pour $j \geqslant 2$.

Commentaires bibliographiques

Concernant le théorème 6.1 et la caractérisation des modules projectifs de type fini par leurs idéaux de Fitting voir [Northcott] théorème 18 p. 122 et exercice 7 p. 49. Notons cependant que la preuve de Northcott n'est pas entièrement constructive, puisqu'il fait appel à un principe de recollement abstrait des modules projectifs de type fini.
Nous avons défini le déterminant d'un endomorphisme d'un module projectif de type fini comme dans [95, Goldman]. La différence réside dans le fait que nos démonstrations sont constructives.
Une étude sur la faisabilité du théorème de structure locale des modules projectifs de type fini se trouve dans [60, Díaz-Toca&Lombardi].
La proposition 9.3 concernant $\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)\big)_S$ est un résultat crucial que l'on trouve par exemple dans [Northcott], exercice 9 p. 50, et dans [Kunz] (chapitre IV, proposition 1.10). Ce résultat sera généralisé dans la proposition VIII-5.7.
Le problème 1 est dû à Suslin [182].

Chapitre VI

Algèbres strictement finies et algèbres galoisiennes

Sommaire

Introduction

Ce chapitre est consacré à une généralisation naturelle pour les anneaux commutatifs de la notion d'algèbre finie sur un corps. En mathématiques constructives, pour obtenir les conclusions dans le cas des corps, il est souvent nécessaire de supposer non seulement que l'algèbre est un espace vectoriel de type fini, mais plus précisément que le corps est discret et que l'on connaît une base de l'espace vectoriel. C'est ce qui nous a amené à introduire la notion d'algèbre strictement finie sur un corps discret.

La généralisation pertinente de cette notion aux anneaux commutatifs est donnée par les algèbres qui sont des modules projectifs de type fini sur l'anneau de base. Nous les appelons donc des algèbres strictement finies.

Les sections 1 et 2 qui ne concernent que les algèbres sur les corps discrets peuvent être lues directement après la section III-6. Même chose pour la section 7 si l'on prend à la base un corps discret (certaines démonstrations sont alors simplifiées).

La section 3 est une brève introduction aux algèbres de présentation finie, en insistant sur le cas des algèbres entières.

Le reste du chapitre est consacré aux algèbres strictement finies proprement dites.

Dans les sections 5 et 6 sont introduites les notions voisines d'algèbre strictement étale et d'algèbre séparable, qui généralisent la notion d'algèbre étale sur un corps discret.

Dans la section 7 on donne un exposé constructif des bases de la théorie des algèbres galoisiennes pour les anneaux commutatifs. Il s'agit en fait d'une théorie d'Artin-Galois, puisqu'elle reprend l'approche qu'Artin avait développée pour le cas des corps en partant directement d'un groupe fini d'automorphismes d'un corps, le corps de base n'apparaissant que comme un sous-produit des constructions qui s'ensuivent.

1. Algèbres étales sur un corps discret

Dans les sections 1 et 2, **K** désigne un corps discret non trivial

Rappelons qu'une **K**-algèbre **B** est dite finie (resp. strictement finie) si elle est de type fini en tant que **K**-espace vectoriel (resp. si **B** est un **K**-espace vectoriel de dimension finie). Si **B** est une **K**-algèbre finie, cela n'implique pas que l'on sache déterminer une base de **B** comme **K**-espace vectoriel, ni même que **B** soit discrète. Si elle est strictement finie, au contraire, on connaît une base finie de **B** comme **K**-espace vectoriel. Dans ce cas, pour un $x \in \mathbf{B}$, la trace, la norme, le polynôme caractéristique de (la multiplication par) x, ainsi que le polynôme minimal de x sur **K** peuvent se calculer par les méthodes standards de l'algèbre linéaire sur un corps discret. De même toute sous-**K**-algèbre finie de **B** est strictement finie et l'intersection de deux sous-algèbres strictement finies est strictement finie.

1.1. Définition. Soit **L** un corps discret et **A** une **L**-algèbre.

1. L'algèbre **A** est dite *étale (sur* **L***)* si elle est strictement finie et si le discriminant $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{L}}$ est inversible.
2. Un élément de **A** est dit *algébrique séparable (sur* **L***)* s'il annule un polynôme séparable.
3. L'algèbre **A** est dite *algébrique séparable (sur* **L***)* si tout élément de **A** est algébrique séparable sur **L**.

Lorsque f est un polynôme unitaire de $\mathbf{L}[X]$, l'algèbre quotient $\mathbf{L}[X]/\langle f\rangle$ est étale si, et seulement si, f est séparable (proposition III-5.10).

Théorèmes de structure des algèbres étales

La proposition III-5.10 donne le lemme qui suit.

1.2. Lemme. *Soit* **A** *une* **K***-algèbre strictement finie et* $a \in \mathbf{A}$*. Si le polynôme caractéristique* $\mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{K}}(a)(T)$ *est séparable, alors l'algèbre est étale et* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[a]$*.*

Dans le fait 1.3, les points *1* et *2* précisent certains points du lemme IV-8.5 et du fait IV-8.8 (concernant les anneaux zéro-dimensionnels réduits généraux), dans le cas d'une **K**-algèbre strictement finie réduite.
Des résultats généraux sur les extensions entières d'anneaux zéro-dimensionnels sont donnés dans la section 3 page 332 et suivantes.

1.3. Fait. *Soit* $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{K}$ *une algèbre strictement finie.*

1. *L'algèbre* **B** *est zéro-dimensionnelle. Si elle est réduite, pour tout* $a \in \mathbf{B}$ *il existe un unique idempotent* $e \in \mathbf{K}[a]$ *tel que* $\langle a\rangle = \langle e\rangle$*. En outre, lorsque* $e = 1$*, c'est-à-dire lorsque* a *est inversible,* $a^{-1} \in \mathbf{K}[a]$*.*
2. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

a. $\mathbf{B}$ *est un corps discret.*

b. $\mathbf{B}$ *est sans diviseur de zéro :* $xy = 0 \Rightarrow (x = 0$ ou $y = 0)$.

c. $\mathbf{B}$ *est connexe et réduite.*

d. Le polynôme minimal sur $\mathbf{K}$ *de n'importe quel élément de* $\mathbf{B}$ *est irréductible.*

3. Si $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L} \subseteq \mathbf{B}$ *et* $\mathbf{L}$ *est un corps discret strictement fini sur* $\mathbf{K}$*, alors* $\mathbf{B}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{L}$*. En outre,* $\mathbf{B}$ *est étale sur* $\mathbf{K}$ *si, et seulement si, elle est étale sur* $\mathbf{L}$ *et* $\mathbf{L}$ *est étale sur* $\mathbf{K}$*.*

4. Si $(e_1, \dots, e_r)$ *est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de* $\mathbf{B}$*,* $\mathbf{B}$ *est étale sur* $\mathbf{K}$ *si, et seulement si, chacune des composantes* $\mathbf{B}[1/e_i]$ *est étale sur* $\mathbf{K}$*.*

5. Si $\mathbf{B}$ *est étale elle est réduite.*

6. Si $\mathrm{car}(\mathbf{K}) > [\,\mathbf{B} : \mathbf{K}\,]$ *et si* $\mathbf{B}$ *est réduite, elle est étale.*

D *1.* L'élément a de $\mathbf{B}$ est annulé par un polynôme unitaire de $\mathbf{K}[T]$ que l'on écrit $uT^k\big(1 - T\,h(T)\big)$ avec $u \in \mathbf{K}^\times$, $k \geqslant 0$. Donc $\mathbf{B}$ est zéro-dimensionnelle. Si elle est réduite, $a\big(1 - ah(a)\big) = 0$. Alors, $e = ah(a)$ vérifie $a(1 - e) = 0$ et a fortiori $e(1 - e) = 0$. Ce qui permet de conclure.
2. L'équivalence de a, b et c est un cas particulier du lemme III-6.3. L'implication $d \Rightarrow c$ est claire. Voyons $b \Rightarrow d$. Soit x dans $\mathbf{B}$ et $f(X)$ son polynôme minimal sur $\mathbf{K}$. Si $f = gh$, avec g, h unitaires, alors $g(x)h(x) = 0$ donc $g(x) = 0$ ou $h(x) = 0$. Par exemple $g(x) = 0$, et puisque f est le polynôme minimal, f divise g, et $h = 1$.
3. Soit $(f_1, \dots, f_s)$ une $\mathbf{K}$-base de $\mathbf{L}$. On peut calculer une $\mathbf{L}$-base de $\mathbf{B}$ comme suit. La base commence avec $e_1 = 1$. Supposons avoir calculé des éléments e_1, …, e_r de $\mathbf{B}$ linéairement indépendants sur $\mathbf{L}$. Les $\mathbf{L}e_i$ sont en somme directe dans $\mathbf{B}$ et l'on a une $\mathbf{K}$-base $(e_i f_1, \dots, e_i f_s)$ pour chaque $\mathbf{L}e_i$. Si $rs = [\,\mathbf{B} : \mathbf{K}\,]$, on a terminé. Dans le cas contraire, on peut trouver $e_{r+1} \in \mathbf{B}$ qui n'est pas dans $F_r = \mathbf{L}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{L}e_r$.
Alors, $\mathbf{L}e_{r+1} \cap F_r = \{0\}$ (sinon, on exprimerait e_{r+1} comme $\mathbf{L}$-combinaison linéaire de $(e_1, \dots, e_r)$). Et l'on itère le processus en remplaçant $(e_1, \dots, e_r)$ par $(e_1, \dots, e_{r+1})$.
Une fois que l'on dispose d'une base de $\mathbf{B}$ comme $\mathbf{L}$-espace vectoriel, il reste à utiliser la formule de transitivité des discriminants (théorème II-5.36).
4. On utilise le théorème de structure II-4.3 page 34 pour les systèmes fondamentaux d'idempotents orthogonaux et la formule du discriminant d'une algèbre produit direct d'algèbres (proposition II-5.34).
5. Soit b un élément nilpotent de $\mathbf{B}$. Pour tout $x \in \mathbf{B}$ la multiplication par bx est un endomorphisme nilpotent μ_{bx} de $\mathbf{B}$. On peut alors trouver une $\mathbf{K}$-base de $\mathbf{B}$ dans laquelle la matrice de μ_{bx} est strictement triangulaire, donc $\mathrm{Tr}(\mu_{bx}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(bx) = 0$.
Ainsi b est dans le noyau de l'application $\mathbf{K}$-linéaire

$$tr : \mathbf{B} \to \mathrm{L}_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}, \mathbf{K}), \quad b \mapsto (x \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(bx)).$$

Enfin, tr est un isomorphisme puisque $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}$ est inversible, donc $b = 0$.
6. Avec la notation précédente, on suppose $\mathbf{B}$ réduite et l'on veut montrer que l'application $\mathbf{K}$-linéaire tr est un isomorphisme.
Il suffit de montrer que $\mathrm{Ker}\, tr = 0$. Supposons $tr(b) = 0$, alors $\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(bx) = 0$ pour tout x et en particulier $\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(b^n) = 0$ pour tout $n > 0$. Donc l'endomorphisme μ_b de multiplication par b vérifie $\mathrm{Tr}(\mu_b^n) = 0$ pour tout $n > 0$. Les formules qui relient les sommes de Newton aux fonctions symétriques élémentaires montrent alors que le polynôme caractéristique de μ_b est égal à $T^{[\mathbf{B}:\mathbf{K}]}$ (cf. exercice III-14). Le théorème de Cayley-Hamilton et le fait que $\mathbf{B}$ est réduite permettent de conclure que $b = 0$. □

1.4. Théorème. (Théorème de structure des $\mathbf{K}$-algèbres étales, 1)
Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{K}$-algèbre étale.

1. *Tout idéal $\langle b_1, \dots, b_r\rangle_{\mathbf{B}}$ est engendré par un idempotent e qui appartient à $\langle b_1, \dots, b_r\rangle_{\mathbf{K}[b_1,\dots,b_r]}$. Et l'algèbre quotient est étale sur $\mathbf{K}$.*
2. *Soit $\mathbf{A}$ une sous-$\mathbf{K}$-algèbre de type fini de $\mathbf{B}$.*
   a. *$\mathbf{A}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre étale.*
   b. *Il existe un entier $r \geqslant 1$ et un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_1, \dots, e_r)$ de $\mathbf{A}$ tel que, pour chaque $i \in [\![1..r]\!]$, $\mathbf{B}[1/e_i]$ est un module libre de rang fini sur $\mathbf{A}[1/e_i]$. En d'autres termes, $\mathbf{B}$ est un module quasi libre sur $\mathbf{A}$.*
3. *$\mathbf{B}$ est algébrique séparable sur $\mathbf{K}$.*
4. *Pour tout $b \in \mathbf{B}$, le polynôme caractéristique $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(b)$ est un produit de polynômes séparables.*

▷ *1.* Si l'idéal est principal cela résulte du fait 1.3 point *1.* Par ailleurs, pour deux idempotents e_1, e_2, on a $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_1 + e_2 - e_1e_2\rangle$. Enfin l'algèbre quotient est elle même étale sur $\mathbf{K}$ d'après la formule du discriminant d'une algèbre produit direct.
2. Il suffit de démontrer le point *b*, car alors on conclut en utilisant la formule de transitivité des discriminants pour chaque $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{A}[1/e_i] \subseteq \mathbf{B}[1/e_i]$ et la formule du discriminant d'une algèbre produit direct.
Pour démontrer le point *b*, on essaie de calculer une base de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$ en utilisant la méthode indiquée dans le cas où $\mathbf{A}$ est un corps discret dont on connaît une $\mathbf{K}$-base, donnée dans le fait 1.3 *3.* Le point où l'algorithme risque d'achopper est lorsque $e_{r+1}\mathbf{A} \cap F_r$ n'est pas réduit à $\{0\}$. On a alors une égalité $\alpha_{r+1}e_{r+1} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i e_i$ avec tous les α_i dans $\mathbf{A}$, et $\alpha_{r+1} \neq 0$ mais non inversible dans $\mathbf{A}$. Ceci implique (point *1*) que l'on trouve un idempotent $e \neq 0, 1$ dans $\mathbf{K}[\alpha_{r+1}] \subseteq \mathbf{A}$. On recommence alors avec les deux localisations en e et $1 - e$. Enfin, on remarque que le nombre de scindages ainsi opérés est a priori borné par $[\mathbf{B} : \mathbf{K}]$.

3 et *4*. Résultent facilement de *2*. □

Remarque. Une généralisation du point *1* du théorème précédent se trouve dans les lemmes 3.13 et 3.14. ∎

On peut construire des **K**-algèbres étales de proche en proche en vertu du lemme suivant, qui prolonge le lemme 1.2.

1.5. Lemme. *Soit* **A** *une* **K***-algèbre étale et* $f \in \mathbf{A}[T]$ *un polynôme unitaire séparable. Alors,* $\mathbf{A}[T]/\langle f\rangle$ *est une* **K***-algèbre étale.*

▷ On regarde d'abord $\mathbf{A}[T]/\langle f\rangle$ comme une **A**-algèbre libre de rang $\deg f$. On a $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}} = \mathrm{disc}(f)$ (proposition III-5.10 point *3*). On conclut par la formule de transitivité des discriminants. □

Les deux théorèmes qui suivent sont des corollaires.

1.6. Théorème. *Soit* **B** *une* **K***-algèbre. Les éléments de* **B** *algébriques séparables sur* **K** *forment une sous-algèbre* **A***. En outre, tout élément de* **B** *qui annule un polynôme unitaire séparable de* $\mathbf{A}[T]$ *est dans* **A***.*

▷ Montrons d'abord que si x est algébrique séparable sur **K** et y annule un polynôme unitaire séparable g de $\mathbf{K}[x][Y]$, alors tout élément de $\mathbf{K}[x,y]$ est algébrique séparable sur **K**. Si $f \in \mathbf{K}[X]$ séparable annule x, alors la sous-algèbre $\mathbf{K}[x,y]$ est un quotient $\mathbf{K}[X,Y]/\langle f(X), g(X,Y)\rangle$. Cette **K**-algèbre est étale d'après le lemme 1.5.
En raisonnant par récurrence, on peut itérer la construction précédente. On obtient le résultat souhaité en notant qu'une **K**-algèbre étale est algébrique séparable sur **K**, et que tout quotient d'une telle algèbre est encore algébrique séparable sur **K**. □

Voici une variante «strictement finie». Nous redonnons la démonstration car les variations, bien que simples, sont significatives des précautions à prendre dans le cas strictement fini.

1.7. Théorème. (Caractérisation des **K**-algèbres étales)
Soit **B** *une* **K***-algèbre strictement finie donnée sous la forme* $\mathbf{K}[x_1,\dots,x_n]$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. **B** *est étale sur* **K***.*
2. *Le polynôme minimal sur* **K** *de chacun des* x_i *est séparable.*
3. **B** *est algébrique séparable sur* **K***.*

En particulier, un corps **L** *qui est une extension galoisienne de* **K** *est étale sur* **K***.*

▷ *1* ⇒ *3*. D'après le théorème 1.4.
2 ⇒ *1*. Traitons d'abord le cas d'une **K**-algèbre strictement finie $\mathbf{A}[x]$ où **A** est étale sur **K** et où le polynôme minimal f de x sur **K** est séparable. On a alors un homomorphisme surjectif de la **K**-algèbre strictement finie $\mathbf{A}[T]/\langle f\rangle$

sur $\mathbf{A}[x]$ et le noyau de cet homomorphisme (qui se calcule comme noyau d'une application linéaire entre $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies) est de type fini, donc engendré par un idempotent e. La $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{C} = \mathbf{A}[T]/\langle f\rangle$ est étale d'après le lemme 1.5. On en déduit que $\mathbf{A}[x] \simeq \mathbf{C}/\langle e\rangle$ est étale sur $\mathbf{K}$.
On peut alors terminer par récurrence sur n. □

1.8. Corollaire. *Soit $f \in \mathbf{K}[T]$ un polynôme unitaire. L'algèbre de décomposition universelle* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ *est étale si, et seulement si, f est séparable.*

Remarque. On avait déjà ce résultat par calcul direct du discriminant de l'algèbre de décomposition universelle (fait III-5.11). ∎

1.9. Théorème. (Théorème de l'élément primitif)
Soit $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre étale.*

1. *Si* $\mathbf{K}$ *est infini ou si* $\mathbf{B}$ *est un corps discret,* $\mathbf{B}$ *est une algèbre monogène, précisément de la forme* $\mathbf{K}[b] \simeq \mathbf{K}[T]/\langle f\rangle$ *pour un* $b \in \mathbf{B}$ *et un* $f \in \mathbf{K}[T]$ *séparable.*
   Ceci s'applique en particulier pour un corps $\mathbf{L}$ *qui est une extension galoisienne de* $\mathbf{K}$*, de sorte que l'extension* $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ *relève du cas élémentaire étudié dans le théorème III-6.14.*
2. $\mathbf{B}$ *est un produit fini de* $\mathbf{K}$*-algèbres étales monogènes.*

▷ *1.* Il suffit de traiter le cas d'une algèbre à deux générateurs $\mathbf{B} = \mathbf{K}[x, z]$. On va chercher un générateur de $\mathbf{B}$ de la forme $\alpha x + \beta z$ avec α, $\beta \in \mathbf{K}$. On note f et g les polynômes minimaux de x et z sur $\mathbf{K}$. On sait qu'ils sont séparables. On note $\mathbf{C} = \mathbf{K}[X, Z]/\langle f(X), g(Z)\rangle = \mathbf{K}[\xi, \zeta]$. Il suffit de trouver α, $\beta \in \mathbf{K}$ tels que $\mathbf{C} = \mathbf{K}[\alpha\xi + \beta\zeta]$. Pour avoir ce résultat, il suffit que le polynôme caractéristique de $\alpha\xi + \beta\zeta$ soit séparable, car on peut alors appliquer le lemme 1.2. On introduit deux indéterminées a et b, et l'on note $h_{a,b}(T)$ le polynôme caractéristique de la multiplication par $a\xi + b\zeta$ dans $\mathbf{C}[a, b]$ vue comme $\mathbf{K}[a, b]$-algèbre libre de rang fini. En fait :

$$\mathbf{C}[a, b] \simeq \mathbf{K}[a, b][X, Z]/\langle f(X), g(Z)\rangle\,.$$

On note $d(a, b) = \mathrm{disc}_T(h_{a,b})$. On fait un calcul dans une « double algèbre de décomposition universelle » sur $\mathbf{C}[a, b]$, dans laquelle on factorise séparément f et g :

$$f(X) = \textstyle\prod_{i\in[\![1..n]\!]}(X - x_i) \;\text{ et }\; g(Z) = \prod_{i\in[\![1..k]\!]}(Z - z_j).$$

On obtient

$$\pm d(a, b) = \prod_{(i,j)\neq(k,\ell)} \big(a(x_i - x_k) + b\big(z_j - z_\ell\big)\big) = (a^{n^2-n}\mathrm{disc}\, f)^{p^2}(b^{p^2-p}\mathrm{disc}\, g)^n + \dots$$

Dans le membre le plus à droite des égalités ci-dessus on a indiqué le terme de plus haut degré lorsque l'on ordonne les monômes en a, b selon un ordre lexicographique. Ainsi le polynôme $d(a, b)$ a au moins un coefficient inversible. Il suffit de choisir α, β de façon que $d(\alpha, \beta) \in \mathbf{K}^\times$ pour obtenir

un élément $\alpha\xi + \beta\zeta$ de $\mathbf{C}$ dont le polynôme caractéristique est séparable. Ceci achève la démonstration pour le cas où $\mathbf{K}$ est infini.
Dans le cas où $\mathbf{B}$ est un corps discret on énumère les entiers de $\mathbf{K}$ jusqu'à obtenir α, β dans $\mathbf{K}$ avec $d(\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^\times$, ou à conclure que la caractéristique est égale à un nombre premier p. On énumère ensuite les puissances des coefficients de f et de g jusqu'à obtenir suffisamment d'éléments dans $\mathbf{K}$, ou à conclure que le corps $\mathbf{K}_0$ engendré par les coefficients de f et g est un corps fini. Dans ce cas, $\mathbf{K}_0[x,z]$ est lui même un corps fini et il est engendré par un générateur γ de son groupe multiplicatif, donc $\mathbf{K}[x,z] = \mathbf{K}[\gamma]$.
2. On reprend la preuve qui vient d'être donnée pour le cas où $\mathbf{B}$ est un corps discret. Si l'on n'arrive pas à la conclusion, c'est que la preuve a achoppé à un endroit précis, qui manifeste que $\mathbf{B}$ n'est pas un corps discret. Puisque l'on est avec une $\mathbf{K}$-algèbre strictement finie, cela nous fournit [1] un idempotent $e \neq 0, 1$ dans $\mathbf{B}$. Ainsi $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}[1/e] \times \mathbf{B}[1/(1-e)]$. On peut alors conclure par récurrence sur $[\,\mathbf{B} : \mathbf{K}\,]$. □

Algèbres étales sur un corps séparablement factoriel

Lorsque tout polynôme séparable sur $\mathbf{K}$ se décompose en un produit de facteurs irréductibles, le corps $\mathbf{K}$ est dit *séparablement factoriel*.

1.10. Lemme. *Un corps* $\mathbf{K}$ *est séparablement factoriel si, et seulement si, on a un test pour l'existence d'un zéro dans* $\mathbf{K}$ *pour un polynôme séparable arbitraire de* $\mathbf{K}[T]$.

▷ La deuxième condition est a priori plus faible puisqu'elle revient à déterminer les facteurs de degré 1 pour un polynôme séparable de $\mathbf{K}[X]$. Supposons cette condition vérifiée. La preuve est à peu près la même que pour le lemme III-8.14, mais demande quelques détails supplémentaires. On note $f(T) = T^n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j Y^j$, on fixe un entier $k \in [\![2..n-2]\!]$ et l'on cherche les polynômes $g = T^k + \sum_{j=0}^{k-1} b_j T^j$ qui divisent f. On va montrer qu'il n'y a qu'un nombre fini de possibilités, explicites, pour chacun des b_j. La démonstration du théorème de Kronecker utilise des polynômes universels $Q_{n,k,r}(a_0,\dots,a_{n-1},X) \in \mathbb{Z}[\underline{a},X]$, unitaires en X, tels que $Q_{n,k,r}(\underline{a},b_r) = 0$. Ces polynômes peuvent être calculés dans l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ comme suit. On pose

$$G(T) = \textstyle\prod_{i=1}^{k}(T - x_i) = T^k + \sum_{j=0}^{k-1} g_j T^j.$$

On considère l'orbite $(g_{r,1},\dots,g_{r,\ell})$ de g_r sous l'action de S_n, et l'on obtient

$$Q_{n,k,r}(\underline{a},X) = \textstyle\prod_{i=1}^{\ell}(X - g_{r,i}).$$

On en déduit que

$$\textstyle\prod_{\sigma\in \mathrm{S}_n}\big(W - \sigma(g_r)\big) = Q_{n,k,r}^{n!/ell}.$$

1. Pour plus de précisions voir la solution de l'exercice 2

Donc, d'après le lemme III-5.12, $\mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z)(X) = Q_{n,k,r}^{n!/ell}(X)$. Enfin, comme $\mathbf{A}$ est étale sur $\mathbf{K}$ (corollaire 1.8), le polynôme caractéristique de g_r annule un produit de polynômes séparables de $\mathbf{K}[T]$ d'après le théorème 1.4 *4*.
Ainsi, b_r doit être cherché parmi les zéros d'un nombre fini de polynômes séparables : il y a un nombre fini de possibilités, toutes explicites. □

1.11. Théorème. (Théorème de structure des $\mathbf{K}$-algèbres étales, 2)
Supposons $\mathbf{K}$ *séparablement factoriel. Une* $\mathbf{K}$*-algèbre* $\mathbf{B}$ *est étale si, et seulement si, elle est isomorphe à un produit fini de corps étales sur* $\mathbf{K}$.
D Conséquence du théorème de l'élément primitif (théorème 1.9). □

1.12. Corollaire. *Si* $\mathbf{L}$ *est un corps étale sur* $\mathbf{K}$ *et si* $\mathbf{K}$ *est séparablement factoriel, il en va de même pour* $\mathbf{L}$.
D Soit $f \in \mathbf{L}[T]$ un polynôme unitaire séparable. La $\mathbf{L}$-algèbre $\mathbf{B} = \mathbf{L}[T]/\langle f \rangle$ est étale, donc c'est aussi une $\mathbf{K}$-algèbre étale. On peut donc trouver un système fondamental d'idempotents orthogonaux tel que chaque composante correspondante de $\mathbf{B}$ est connexe. Cela revient à factoriser f en produit de facteurs irréductibles. □

1.13. Corollaire. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Toute* $\mathbf{K}$*-algèbre étale est isomorphe à un produit de corps étales sur* $\mathbf{K}$.
2. *Le corps* $\mathbf{K}$ *est séparablement factoriel.*
3. *Tout polynôme séparable possède un corps de racines qui est une extension strictement finie (donc galoisienne) de* $\mathbf{K}$.
4. *Tout polynôme séparable possède un corps de racines qui est étale sur* $\mathbf{K}$.

D Pour *2* ⇒ *4*, on utilise le fait que l'algèbre de décomposition universelle pour un polynôme séparable est étale (corollaire 1.8) et l'on applique le théorème 1.11. □

1.14. Corollaire. *Si* $\mathbf{K}$ *est séparablement factoriel et si* $(\mathbf{K}_i)$ *est une famille finie de corps étales sur* $\mathbf{K}$*, il existe une extension galoisienne* $\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{K}$ *qui contient une copie de chacun des* $\mathbf{K}_i$.
D Chaque $\mathbf{K}_i$ est isomorphe à un $\mathbf{K}[T]/\langle f_i \rangle$ avec f_i irréductible séparable. On considère le ppcm f des f_i puis un corps de racines de f. □

Corps parfaits, clôture séparable et clôture algébrique

Pour un corps $\mathbf{K}$ de caractéristique finie p l'application $x \mapsto x^p$ est un homomorphisme injectif.

En mathématiques classiques un corps $\mathbf{K}$ est dit *parfait* s'il est de caractéristique infinie, ou si, étant de caractéristique finie p, le morphisme $x \mapsto x^p$ est un isomorphisme.
En mathématiques constructives pour éviter la disjonction sur la caractéristique dans le « ou » ci-dessus (qui peut ne pas être explicite), on formule la chose comme suit : *si p est un nombre premier tel que $p.1_{\mathbf{K}} = 0_{\mathbf{K}}$, alors l'homomorphisme $\mathbf{K} \to \mathbf{K}$, $x \mapsto x^p$ est surjectif.*
Le corps des rationnels $\mathbb{Q}$ et les corps finis (dont le corps trivial) sont parfaits.
Soit $\mathbf{K}$ un corps de caractéristique finie p. Un surcorps $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ est appelé une *clôture parfaite* de $\mathbf{K}$ si c'est un corps parfait et si tout élément de $\mathbf{L}$, élevé à une certaine puissance p^k est un élément de $\mathbf{K}$.

1.15. Lemme. *Un corps discret $\mathbf{K}$ de caractéristique finie p possède une clôture parfaite $\mathbf{L}$, unique à isomorphisme unique près.*
En outre, $\mathbf{K}$ est une partie détachable de $\mathbf{L}$ si, et seulement si, il existe un test pour « $\exists x \in \mathbf{K},\ y = x^p$?» (avec extraction de la racine p-ième de y quand elle existe).

Idée de la démonstration. Un élément de $\mathbf{L}$ est codé par un couple (x, k), où $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbf{K}$. Ce code représente la racine p^k-ième de x.
L'égalité dans $\mathbf{L}$, $(x, k) =_{\mathbf{L}} (y, \ell)$, est définie par $x^{p^\ell} = y^{p^k}$ (dans $\mathbf{K}$), de sorte que $(x^p, k+1) =_{\mathbf{L}} (x, k)$. □

1.16. Lemme. (Algorithme de factorisation sans carrés)
Si $\mathbf{K}$ est un corps discret parfait, on dispose d'un algorithme de factorisation sans carrés *des listes de polynômes de $\mathbf{K}[X]$ au sens suivant. Une factorisation sans carrés d'une famille $(g_1, \ldots, g_r)$ est donnée par :*

- *une famille $(f_1, \ldots, f_s)$ de polynômes séparables deux à deux étrangers,*
- *l'écriture de chaque g_i sous forme*
$$g_i = \prod_{k=1}^{s} f_k^{m_{k,i}} \ (m_{k,i} \in \mathbb{N}).$$

Idée de la démonstration. On commence par calculer une base de factorisation partielle pour la famille $(g_i)_{i \in [\![1..r]\!]}$ (voir le lemme III-1.1). Si certains des polynômes dans la base sont de la forme $h(X^p)$, on sait les écrire sous forme $g(X)^p$, on remplace alors h par g. On itère ce processus jusqu'à ce que tous les polynômes de la famille aient une dérivée non nulle. On introduit alors les dérivées des polynômes de la famille. Pour cette nouvelle famille on calcule une nouvelle base de factorisation partielle.
On itère le processus d'ensemble jusqu'à ce que l'objectif de départ soit atteint. Les détails sont laissés au lecteur. □

Un corps discret $\mathbf{K}$ est dit *séparablement clos* si tout polynôme unitaire séparable de $\mathbf{K}[X]$ se décompose en produit de facteurs $X - x_i$ ($x_i \in \mathbf{K}$).

Soient $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ des corps discrets. On dit que $\mathbf{L}$ *est une clôture séparable de* $\mathbf{K}$ si $\mathbf{L}$ est séparablement clos et algébrique séparable sur $\mathbf{K}$.

1.17. Lemme.

1. *Un corps discret est algébriquement clos si, et seulement si, il est parfait et séparablement clos.*
2. *Si un corps discret* $\mathbf{K}$ *est parfait, tout corps étale sur* $\mathbf{K}$ *est parfait.*
3. *Si un corps discret parfait possède une clôture séparable, c'est aussi une clôture algébrique.*

▷ *1.* Résulte du lemme 1.16 et *3* résulte de *1* et *2*.
2. On considère $\mathbf{L}$ étale sur $\mathbf{K}$. On note $\sigma : \mathbf{L} \to \mathbf{L} : z \mapsto z^p$.
On sait que $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x] \simeq \mathbf{K}[X]/\langle f \rangle$ avec f le polynôme minimal de x sur $\mathbf{K}$. L'élément $y = x^p$ est zéro du polynôme f^σ, qui est séparable et irréductible sur $\mathbf{K}$ parce que σ est un automorphisme de $\mathbf{K}$. On obtient donc un isomorphisme $\mathbf{K}[X]/\langle f^\sigma \rangle \to \mathbf{K}[y] \subseteq \mathbf{L}$. Ainsi $\mathbf{K}[y]$ et $\mathbf{L}$ sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de même dimension, donc $\mathbf{K}[y] = \mathbf{L}$ et σ est surjectif. □

1.18. Théorème. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret séparablement factoriel et dénombrable.*

1. $\mathbf{K}$ *possède une clôture séparable* $\mathbf{L}$*, et toute clôture séparable de* $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{K}$*-isomorphe à* $\mathbf{L}$*.*
2. *Ceci s'applique pour* $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$*,* $\mathbb{Q}(X_1, \ldots, X_n)$*,* $\mathbb{F}_p$ *ou* $\mathbb{F}_p(X_1, \ldots, X_n)$*.*
3. *Si en outre* $\mathbf{K}$ *est parfait, alors* $\mathbf{L}$ *est une clôture algébrique de* $\mathbf{K}$ *et toute clôture algébrique de* $\mathbf{K}$ *est* $\mathbf{K}$*-isomorphe à* $\mathbf{L}$*.*

▷ Nous donnons seulement une esquisse de démonstration du point *1*.
Rappelons tout d'abord le point *2* du théorème III-6.7 : si un corps de racines pour $f \in \mathbf{K}[X]$ existe et est strictement fini sur $\mathbf{K}$, alors tout autre corps de racines pour f sur $\mathbf{K}$ est isomorphe au premier.
Admettons un moment que l'on sache construire un corps de racines strictement fini pour tout polynôme séparable sur $\mathbf{K}$. On énumère tous les polynômes unitaires séparables de $\mathbf{K}[X]$ en une suite infinie $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On appelle f_n le ppcm des polynômes p_0, …, p_n. On construit des corps de racines successifs $\mathbf{K}_0$, …, $\mathbf{K}_i$, … pour ces f_i.
En raison du résultat évoqué précédemment, on sait construire des homomorphismes injectifs de $\mathbf{K}$-algèbres,

$$\mathbf{K}_0 \xrightarrow{\jmath_1} \mathbf{K}_1 \xrightarrow{\jmath_2} \cdots\cdots \xrightarrow{\jmath_n} \mathbf{K}_n \xrightarrow{\jmath_{n+1}} \cdots$$

La clôture séparable de $\mathbf{K}$ est alors la limite inductive du système ainsi construit.
Il reste à voir pourquoi on sait construire un corps de racines strictement fini pour tout polynôme séparable f sur $\mathbf{K}$. Si le corps est infini cela est

donné par le théorème III-6.15. Dans le cas d'un corps fini, l'étude des corps finis montre directement comment construire un corps de racines. Dans le cas le plus général, on peut de toute manière construire un corps de racines par force brute, en rajoutant des racines l'une après l'autre : on considère un facteur irréductible h de f et le corps $\mathbf{K}[\xi_1] = \mathbf{K}[X]/\langle h\rangle$. Sur le nouveau corps $\mathbf{K}[\xi_1]$, on considère un facteur irréductible $h_1(X)$ de $f_1(X) = \frac{f(X)}{X-\xi_1}$ ce qui permet de construire $\mathbf{K}[\xi_1, \xi_2]$ etc ... Ce processus est possible en vertu du corollaire 1.12 car les corps successifs $\mathbf{K}[\xi_1]$, $\mathbf{K}[\xi_1, \xi_2]$ ... restent séparablement factoriels. □

Remarque. Il existe de nombreuses manières de construire une clôture algébrique de $\mathbb{Q}$. Celle qui est proposée dans le théorème précédent dépend de l'énumération que l'on choisit pour les polynômes unitaires séparables de $\mathbb{Q}[X]$ et elle manque de pertinence géométrique. De ce point de vue, la limite inductive que l'on construit présente en fait nettement moins d'intérêt que les corps de racines particuliers que l'on peut construire chaque fois que le besoin s'en fait sentir.
Il existe d'autres constructions, de nature *géométrique*, de clôtures algébriques de $\mathbb{Q}$ qui, elles, sont intéressantes en tant qu'objets globaux. La plus connue est celle via le corps des nombres réels algébriques auquel on rajoute un élément $i = \sqrt{-1}$.
Pour chaque nombre premier p, une autre clôture algébrique de $\mathbb{Q}$ également très pertinente est obtenue en passant par le corps intermédiaire formé par les nombres algébriques p-adiques. ∎

2. Théorie de Galois de base (2)

Cette section complète la section III-6 (voir aussi les théorèmes 1.7 et 1.9).

Quelques rappels. Une extension galoisienne de $\mathbf{K}$ est définie comme un corps strictement fini sur $\mathbf{K}$ qui est un corps de racines pour un polynôme séparable de $\mathbf{K}[T]$. D'après le théorème 1.9 une extension galoisienne de $\mathbf{K}$ relève toujours du cas élémentaire étudié dans le théorème III-6.14. Enfin, d'après le théorème III-6.7, un tel corps de racines est unique à un isomorphisme près. ∎

2.1. Définition. Un surcorps $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$ est dit *normal* (sur $\mathbf{K}$) si tout $x \in \mathbf{L}$ annule un polynôme unitaire de $\mathbf{K}[T]$ qui se décompose en produit de facteurs linéaires dans $\mathbf{L}[T]$.

Remarque. Notez que si $\mathbf{L}$ est une extension strictement finie de $\mathbf{K}$ ou plus généralement si $\mathbf{L}$ possède une base discrète comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel, alors le polynôme minimal d'un élément arbitraire de $\mathbf{K}$ existe. Si la condition de la définition ci-dessus est vérifiée, le polynôme minimal lui-même se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbf{L}[T]$. ∎

2.2. Fait. *Soit $f(T) \in \mathbf{K}[T]$ un polynôme unitaire et $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ un corps de racines pour f. Alors, $\mathbf{L}$ est une extension normale de $\mathbf{K}$.*

▷ On a $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$ où $f(T) = \prod_{i=1}^{n}(T - x_i)$. Soit $y = h(x_1, \ldots, x_n)$ un élément arbitraire de $\mathbf{L}$. On pose

$$g(X_1, \ldots, X_n, T) = \prod_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \big(T - h^\sigma(\underline{X})\big).$$

On a clairement $g(\underline{x}, y) = 0$. En outre, $g(\underline{x}, T) \in \mathbf{K}[T]$, car chacun des coefficients de $g(\underline{X})(T)$ dans $\mathbf{K}[\underline{X}]$ est un polynôme symétrique en les X_i, donc un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires, qui se spécialisent en des éléments de $\mathbf{K}$ (les coefficients de f) par le $\mathbf{K}$-homomorphisme $\underline{X} \mapsto \underline{x}$.□

2.3. Théorème. (Caractérisation des extensions galoisiennes)
Soit $\mathbf{L}$ un corps strictement fini sur $\mathbf{K}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$\mathbf{L}$ est une extension galoisienne de $\mathbf{K}$.*
2. *$\mathbf{L}$ est étale et normal sur $\mathbf{K}$.*
3. *$\mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ est fini et la correspondance galoisienne est bijective.*
4. *Il existe un groupe fini $G \subseteq \mathrm{Aut}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ dont le corps fixe est $\mathbf{K}$.*

Dans ce cas, dans le point 4, on a nécessairement $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$.

▷ *1 ⇒ 2.* C'est le fait 2.2.
2 ⇒ 1 et *3.* Par le théorème de l'élément primitif, $\mathbf{L} = \mathbf{K}[y]$ pour un y dans $\mathbf{L}$. Le polynôme minimal f de y sur $\mathbf{K}$ est séparable, et f se factorise complètement dans $\mathbf{L}[T]$ parce que $\mathbf{L}$ est normal sur $\mathbf{K}$. Donc $\mathbf{L}$ est un corps de racines pour f. En outre, le théorème III-6.14 s'applique.
4 ⇒ 2. Il suffit de montrer que tout $x \in \mathbf{L}$ annule un polynôme séparable de $\mathbf{K}[T]$ qui se factorise complètement dans $\mathbf{L}[T]$, car alors l'extension est normale (par définition) et étale (théorème 1.7). Posons

$$P(T) = \mathrm{Rv}_{G/H,x}(T) = \prod_{\sigma \in G/H} \big(T - \sigma(x)\big) \quad \text{où} \quad H = \mathrm{St}(x).$$

En indice, l'expression $\sigma \in G/H$ signifie que l'on prend un σ dans chaque classe à gauche modulo H. Le polynôme P est fixé par G, donc $P \in \mathbf{K}[T]$. Par ailleurs, $\mathrm{disc}(P) = \prod_{i,j \in [\![1..k]\!], i<j}(x_i - x_j)^2$ est inversible.
Enfin, vu que la correspondance galoisienne est bijective, et puisque le corps fixe de G est $\mathbf{K}$, dans le point *4*, on a nécessairement $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$. □

2.4. Théorème. (Correspondance galoisienne, complément)
Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension galoisienne de groupe de Galois $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$. Soient H un sous-groupe détachable de G, σ un élément de G, $H_\sigma = \sigma H \sigma^{-1}$.

1. *Le corps $\sigma(\mathbf{L}^H)$ est égal à $\mathbf{L}^{H_\sigma}$.*
2. *$\mathbf{L}^H$ est une extension galoisienne de $\mathbf{K}$ si, et seulement si, H est normal dans G. Dans ce cas le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}^H/\mathbf{K})$ est canoniquement isomorphe à G/H.*

1. Calcul immédiat.
2. Posons $\mathbf{M} = \mathbf{L}^H$. Par le théorème de l'élément primitif écrivons $\mathbf{M} = \mathbf{K}[y]$, de sorte que $H = \mathrm{St}(y)$. Le corps $\mathbf{M}$ est normal sur $\mathbf{K}$ si, et seulement si, pour chaque $\tau \in G$, on a $\tau(y) \in \mathbf{M}$, c'est-à-dire $\tau(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$. Et d'après le point *1* cela signifie $\tau H \tau^{-1} = H$ □

Nous reprenons le théorème III-6.14 en apportant quelques précisions.

2.5. Théorème. (Correspondance galoisienne, synthèse)
Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ *une extension galoisienne. La correspondance galoisienne fonctionne comme suit.*

1. *Pour tout* $\mathbf{M} \in \mathcal{K}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$, $\mathbf{L}/\mathbf{M}$ *est une extension galoisienne de groupe de Galois* $\mathrm{Fix}(\mathbf{M})$ *et* $[\,\mathbf{L} : \mathbf{M}\,] = \#\mathrm{Fix}(\mathbf{M})$.
2. *Si* $H_1, H_2 \in \mathcal{G}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$ *et* $\mathbf{M}_i = \mathrm{Fix}(H_i) \in \mathcal{K}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}$, *alors :*
   — $H_1 \cap H_2$ *correspond à la sous-*$\mathbf{K}$*-algèbre engendrée par* $\mathbf{M}_1$ *et* $\mathbf{M}_2$,
   — $\mathbf{M}_1 \cap \mathbf{M}_2$ *correspond au sous-groupe engendré par* H_1 *et* H_2.
3. *Si* $H_1 \subseteq H_2$, *alors :*
   — $\mathbf{M}_1 \supseteq \mathbf{M}_2$ *et* $(H_2 : H_1) = [\,\mathbf{M}_1 : \mathbf{M}_2\,]$,
   — $\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2$ *est une extension galoisienne si, et seulement si,* H_1 *est normal dans* H_2. *Dans ce cas le groupe* $\mathrm{Gal}(\mathbf{M}_1/\mathbf{M}_2)$ *est naturellement isomorphe à* H_2/H_1.

3. Algèbres de présentation finie

Généralités

Les algèbres de présentation finie sont aux systèmes d'équations polynomiales (ou *systèmes polynomiaux*) ce que sont les modules de présentation finie aux systèmes linéaires.
Nous présentons ici quelques faits généraux de base concernant ces algèbres. Les algèbres que nous considérons dans cette section sont associatives, commutatives et unitaires.

3.1. Définition. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre.

1. L'algèbre $\mathbf{A}$ est dite *de type fini* si elle est engendrée par une famille finie en tant que $\mathbf{k}$-algèbre. Ceci revient à dire qu'elle est isomorphe à une algèbre quotient $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$. On note alors $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, où x_i est l'image de X_i dans $\mathbf{A}$. Cette notation ne sous-entend pas que $\mathbf{A}$ est une extension de $\mathbf{k}$.
2. L'algèbre $\mathbf{A}$ est dite *de présentation finie* si elle est de présentation finie en tant que $\mathbf{k}$-algèbre. Ceci qui revient à dire qu'elle est isomorphe à une algèbre $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$, avec un idéal de type fini $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.

3. L'algèbre $\mathbf{A}$ est dite *réduite-de-présentation-finie* (en un seul mot) si elle est de présentation finie en tant que $\mathbf{k}$-algèbre réduite. Autrement dit si elle est isomorphe à une algèbre quotient $\mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]/\sqrt{\mathfrak{a}}$ avec un idéal de type fini $\mathfrak{a}$.
4. L'algèbre $\mathbf{A}$ est dite *strictement finie* si $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini. On dit aussi que $\mathbf{A}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{k}$. Dans le cas d'une extension, on parlera d'*extension strictement finie* de $\mathbf{k}$.
5. Si $\mathbf{A}$ est strictement finie on note
$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x),\ \ \mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x),\ \ \mathrm{F}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)(T)\ \text{ et }\ \mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)(T),$$
la trace, le déterminant, le polynôme fondamental et le polynôme caractéristique de l'application $\mathbf{k}$-linéaire $\mu_{\mathbf{A},x}\in\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$. En outre, en notant $g(T)=\mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)(T)$, l'élément $g'(x)$ est appelé *la différente de* x.

Notez que dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps discret, on retrouve bien la notion d'algèbre strictement finie donnée dans la définition III-6.2.

3.2. Fait. (Propriété universelle d'une algèbre de présentation finie)
L'algèbre de présentation finie $\mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]/\langle f_1,\dots,f_s\rangle=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$ *est caractérisée par la propriété suivante : si une* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{k}\xrightarrow{\varphi}\mathbf{A}$ *contient des éléments* $y_1,\dots,y_n$ *tels que les* $f_i^{\varphi}(y_1,\dots,y_n)$ *sont nuls, il existe un unique homomorphisme de* $\mathbf{k}$*-algèbres* $\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]\to\mathbf{A}$ *qui envoie les* x_i *sur les* y_i*.*

Changement de système générateur

3.3. Fait. *Lorsque l'on change de système générateur pour une algèbre de présentation finie* $\mathbf{A}$ *les relations entre les nouveaux générateurs forment de nouveau un idéal de type fini.*

Vous pouvez vous reporter à la section IV-1 et vérifier que ce qui a été expliqué un peu informellement page 193 fonctionne bien dans le cas présent.

Transitivité (algèbres de présentation finie)
3.4. Fait. *Si* $\mathbf{k}\xrightarrow{\lambda}\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}\xrightarrow{\rho}\mathbf{C}$ *sont deux algèbres de présentation finie, alors* $\mathbf{C}$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre de présentation finie.*

▷ Écrivons $\mathbf{A}=\mathbf{k}[\underline{y}]\simeq\mathbf{k}[\underline{Y}]/\langle g_1,\dots,g_t\rangle$ et $\mathbf{C}=\mathbf{A}[\underline{x}]\simeq\mathbf{A}[\underline{X}]/\langle f_1,\dots,f_s\rangle$.
Soient $F_1,\dots,F_s\in\mathbf{k}[\underline{Y},\underline{X}]$ des polynômes tels que $F_i(\underline{y},\underline{X})=f_i(\underline{X})$.
Alors, $\mathbf{C}=\mathbf{k}[\rho(\underline{y}),\underline{x}]\simeq\mathbf{k}[\underline{Y},\underline{X}]/\langle g_1,\dots,g_t,F_1,\dots,F_s\rangle$. □

Sous-algèbres
3.5. Fait. *Soient* $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{C}$ *deux* $\mathbf{k}$*-algèbres de type fini. Si* $\mathbf{C}$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre de présentation finie c'est aussi une* $\mathbf{A}$*-algèbre de présentation finie (avec «la même» présentation, lue dans* $\mathbf{A}$*).*

▷ Écrivons sans perte de généralité $\mathbf{C} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n] \simeq \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle$ et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_r]$. On a $\mathbf{A} \simeq \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_r]/\mathfrak{f}$ avec

$$\mathfrak{f} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \cap \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_r].$$

Notons $\pi : \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_r] \to \mathbf{A}$ le passage au quotient et pour $h \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$, $h^\pi \in \mathbf{A}[X_{r+1}, \ldots, X_n]$ son image :

$$h^\pi = h(x_1, \ldots, x_r, X_{r+1}, \ldots, X_n).$$

On considère l'homomorphisme

$$\gamma : \begin{array}{l} \mathbf{A}[X_{r+1}, \ldots, X_n]/\langle f_1^\pi, \ldots, f_s^\pi \rangle \simeq \\ \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]/\langle X_1 - x_1, \ldots, X_r - x_r, f_1^\pi, \ldots, f_s^\pi \rangle \end{array} \to \mathbf{C}.$$

C'est l'homomorphisme qui fixe $\mathbf{A}$ et envoie X_k sur x_k pour $k \in [\![r+1..n]\!]$. Il suffit de montrer que γ est injectif. Tout élément g de $\mathbf{A}[X_{r+1}, \ldots, X_n]$ peut s'écrire $g = G^\pi$ avec $G \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$.
Supposons que g modulo $\langle f_1^\pi, \ldots, f_s^\pi \rangle$ soit dans $\operatorname{Ker} \gamma$. On a alors

$$g(x_{r+1}, \ldots, x_n) = G(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

Donc $G \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$, ce qui donne $g \in \langle f_1^\pi, \ldots, f_s^\pi \rangle$ (après transformation par π). Ce que nous voulions. □

Remarque. La condition $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$ est indispensable pour le bon fonctionnement de la preuve. Par ailleurs, il faut noter que l'idéal $\mathfrak{f}$ n'est pas nécessairement de type fini. ■

Les zéros d'un système polynomial

Considérons un système polynomial $(\underline{f}) = (f_1, \ldots, f_s)$ dans $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$, et une $\mathbf{k}$-algèbre $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{B}$.

3.6. Définition. Un *zéro du système* $(\underline{f})$ *sur* $\mathbf{B}$ est un n-uplet

$$(\underline{\xi}) = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{B}^n$$

vérifiant $f_i^\rho(\underline{\xi}) = 0$ pour chaque i. L'ensemble des zéros de $(\underline{f})$ sur $\mathbf{B}$ est souvent appelé, de manière imagée, la *variété des zéros* sur $\mathbf{B}$ du système polynomial, et pour cela, on le note $\mathcal{Z}_{\mathbf{k}}(\underline{f}, \mathbf{B})$ ou $\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{B})$.

Certains zéros sont plus intéressants que d'autres : plus l'algèbre $\mathbf{B}$ est proche de $\mathbf{k}$ et plus le zéro est intéressant. On est particulièrement attentif aux zéros sur $\mathbf{k}$, ou à défaut sur des $\mathbf{k}$-algèbres finies.
Deux zéros sont a priori particulièrement décevants. Celui fourni par l'algèbre triviale, et le zéro $(x_1, \ldots, x_n)$ sur l'*algèbre quotient* associée au système polynomial, c'est-à-dire

$$\boxed{\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle.}$$

Néanmoins cette dernière algèbre joue un rôle central pour notre problème en raison de deux constatations. La première est la suivante.

3.7. Fait. *Pour toute* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{B}$ *l'ensemble des zéros de* $(\underline{f})$ *sur* $\mathbf{B}$ *s'identifie naturellement à l'ensemble des morphismes de* $\mathbf{k}$*-algèbres de* $\mathbf{A}$ *vers* $\mathbf{B}$*. En particulier, les zéros sur* $\mathbf{k}$ *s'identifient aux caractères de l'algèbre* $\mathbf{A}$*.*

Démonstration sur un exemple. Posons $\mathbb{Q}[x,y] = \mathbb{Q}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle$. Il revient au même de se donner un point réel (α,β) du cercle $X^2+Y^2=1$ ou un morphisme $\rho : \mathbb{Q}[x,y] \longrightarrow \mathbb{R}$ (celui qui envoie x et y sur α et β). □

On a donc une identification cruciale, que nous écrivons comme une égalité :

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \mathcal{Z}_{\mathbf{k}}(\underline{f},\mathbf{B}) \subseteq \mathbf{B}^n.}$$

En bref l'algèbre quotient $\mathbf{A}$ résume *de manière intrinsèque* les informations pertinentes contenues dans le système polynomial $(\underline{f})$. Ce pourquoi on dit aussi que $\mathcal{Z}_{\mathbf{k}}(\underline{f},\mathbf{B})$ est la *variété des zéros* de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{B}$.

La seconde constatation (étroitement reliée à la précédente d'ailleurs) est la suivante.
Du point de vue géométrique *deux systèmes polynomiaux* $(\underline{f})$ *et* $(\underline{g})$ *dans* $\mathbf{k}[\underline{X}]$ *qui ont les mêmes zéros*, sur n'importe quelle $\mathbf{k}$-algèbre, doivent être considérés comme *équivalents.* Si tel est le cas, notons $\mathbf{A}_1 = \mathbf{k}[\underline{x}]$ et $\mathbf{A}_2 = \mathbf{k}[\underline{y}]$ les deux algèbres quotients (on ne donne pas le même nom aux classes des X_i dans les deux quotients). Considérons le zéro canonique $(x_1,\dots,x_n)$ de $(\underline{f})$ dans $\mathbf{A}_1$. Puisque $\mathcal{Z}(\underline{f},\mathbf{A}_1) = \mathcal{Z}(\underline{g},\mathbf{A}_1)$, on doit avoir $g_j(\underline{x}) = 0$ pour chaque j. Cela signifie que $g_j(\underline{X})$ est nul modulo $\langle \underline{f}\rangle$. De même, chaque f_i doit être dans $\langle \underline{g}\rangle$.
Résumons cette deuxième constatation.

3.8. Fait. *Deux systèmes polynomiaux* $(\underline{f})$ *et* $(\underline{g})$ *dans* $\mathbf{k}[\underline{X}]$ *admettent les mêmes zéros, sur n'importe quelle* $\mathbf{k}$*-algèbre, si, et seulement si, ils définissent la même algèbre quotient.*

Exemple. Les cercles $x^2+y^2-3=0$ et $x^2+y^2-7=0$ ne peuvent pas être distingués par leurs points rationnels, ils n'en ont pas (puisque sur $\mathbb{Z}$, la congruence $a^2+b^2 \equiv 3c^2 \bmod 4$ entraîne a,b,c pairs), mais les $\mathbb{Q}$-algèbres quotients sont non isomorphes, et l'on peut constater sur $\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{7}]$ qu'ils ont des zéros distincts « quelque part ». ∎

Lorsque $\mathbf{k}$ est réduit et si l'on s'intéresse particulièrement aux zéros sur les $\mathbf{k}$-algèbres réduites, l'algèbre $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f}\rangle$ doit être remplacée par sa variante réduite, qui est une algèbre réduite-de-présentation-finie :

$$\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) = \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]/\sqrt{\langle f_1,\dots,f_s\rangle}\,.$$

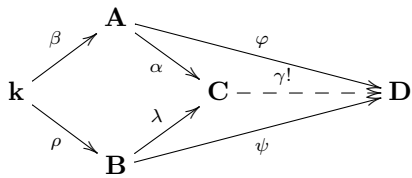
Nous poursuivrons cette discussion page 569 dans le paragraphe « Nullstellensatz et équivalence de deux catégories ».

Digression sur le calcul algébrique

Outre leur rapport direct avec la résolution des systèmes polynomiaux une autre raison de l'importance des algèbres de présentation finie est la suivante. Chaque fois qu'un calcul algébrique aboutit à un « résultat intéressant » dans une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{B}$, ce calcul n'a fait intervenir qu'un nombre fini d'éléments $y_1, \ldots, y_n$ de $\mathbf{B}$ et un nombre fini de relations entre les y_i, de sorte qu'il existe une $\mathbf{k}$-algèbre de présentation finie $\mathbf{C} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ et un morphisme surjectif $\theta : \mathbf{C} \to \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_n] \subseteq \mathbf{B}$ qui envoie les x_i sur les y_i et tel que le « résultat intéressant » avait déjà lieu dans $\mathbf{C}$ pour les x_i. En langage plus savant [2] : toute $\mathbf{k}$-algèbre est une limite inductive filtrante de $\mathbf{k}$-algèbres de présentation finie.

Produit tensoriel de deux k-algèbres

La *somme directe* de deux $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ dans la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres est donnée par la solution du problème universel suivant (« morphisme » signifie ici « homomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres »).
Trouver une $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{C}$ *et deux morphismes* $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *et* $\lambda : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *tels que, pour toute* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{D}$ *et pour tout couple de morphismes* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ *et* $\psi : \mathbf{B} \to \mathbf{D}$*, il existe un unique morphisme* $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ *tel que* $\varphi = \gamma \circ \alpha$ *et* $\psi = \gamma \circ \lambda$.



Notons que dans la catégorie des anneaux commutatifs, la propriété universelle ci-dessus signifie que $\mathbf{C}$, avec les deux morphismes α et λ, est la *somme amalgamée* des deux flèches $\beta : \mathbf{k} \to \mathbf{A}$ et $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{B}$. En anglais on dit que $\mathbf{C}$ est le push-out de β et ρ. En français on dit encore que l'on a un *carré cocartésien*, formé avec les 4 flèches β, ρ, α et λ.

3.9. Théorème. *On considère deux* $\mathbf{k}$*-algèbres* $\mathbf{k} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ *et* $\mathbf{k} \xrightarrow{\beta} \mathbf{A}$.
A. (Somme directe dans la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres)
Les algèbres $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *admettent une somme directe* $\mathbf{C}$ *dans la catégorie des* $\mathbf{k}$*-algèbres. En voici différentes descriptions possibles :*

1. *Si* $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$, $\mathbf{C} = \mathbf{B}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1^\rho, \ldots, f_s^\rho\rangle$ *avec les deux morphismes naturels* $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$ *et* $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$.

2. La lectrice notera que le paragraphe présent est directement recopié du paragraphe analogue pour les modules de présentation finie, page 195.

2. *Si en outre* $\mathbf{B} = \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_r] \simeq \mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_r]/\langle g_1, \ldots, g_t\rangle$ *est elle-même une* $\mathbf{k}$*-algèbre de présentation finie, on obtient*
$$\mathbf{C} \simeq \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_r]/\langle f_1, \ldots, f_s, g_1, \ldots, g_t\rangle\,.$$

3. *En général, on peut considérer le* $\mathbf{k}$*-module* $\mathbf{C} = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$*. Il est muni d'une structure d'anneau commutatif en définissant le produit par*
$$(x \otimes a) \cdot (y \otimes b) = xy \otimes ab.$$
On obtient une structure de $\mathbf{k}$*-algèbre et l'on a deux morphismes naturels* $\mathbf{B} \to \mathbf{C}$, $x \mapsto x \otimes 1$ *et* $\mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $a \mapsto 1 \otimes a$*. Ceci fait de* $\mathbf{C}$ *la somme directe de* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{A}$*.*

4. *Si* $\mathbf{B} = \mathbf{k}/\mathfrak{a}$*, on obtient* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{b}$ *où* $\mathfrak{b} = \beta(\mathfrak{a})\mathbf{A}$*.*

5. *Si* $\mathbf{B} = S^{-1}\mathbf{k}$*, on obtient* $\mathbf{C} \simeq U^{-1}\mathbf{A}$ *où* $U = \beta(S)$*.*

B. (Extension des scalaires)
On peut voir $\mathbf{C}$ *comme une* $\mathbf{B}$*-algèbre, on dit alors que* $\mathbf{C}$ *est la* $\mathbf{B}$*-algèbre obtenue à partir de* $\mathbf{A}$ *par* changement d'anneau de base*, ou encore par* extension des scalaires*. Il est logique alors de la noter* $\rho_\star(\mathbf{A})$*.*

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

On prendra garde au fait que $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$ n'implique pas en général $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$, en particulier dans le cas *4*.
Notons aussi que la tradition est de parler de *produit tensoriel de* $\mathbf{k}$*-algèbres* plutôt que de somme directe.

3.10. Fait. *Si* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *sont deux* $\mathbf{k}$*-algèbres, et* $(M, +)$ *est un groupe additif, se donner une structure de* $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$*-module sur* M *revient à se donner une loi externe de* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{A} \times M \to M$ *et une loi externe de* $\mathbf{B}$*-module* $\mathbf{B} \times M \to M$ *qui commutent, et qui «coïncident sur* $\mathbf{k}$*». On dit aussi que* M *est muni d'une* structure de $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-bimodule*.*

▷ L'explication est la suivante avec $\mathbf{k} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$, $\mathbf{k} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{A}$.
Si l'on a une structure de $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$-module sur M, on a les deux lois externes
$$\mathbf{B} \times M \to M,\ (c, m) \mapsto c \cdot m = (1 \otimes c)m, \text{ et}$$
$$\mathbf{A} \times M \to M,\ (b, m) \mapsto b \star m = (b \otimes 1)m.$$
Puisque $b \otimes c = (b \otimes 1)(1 \otimes c) = (1 \otimes c)(b \otimes 1)$, on doit avoir $b \star (c \cdot m) = c \cdot (b \star m)$.
Si $a \in \mathbf{k}$, $a(1 \otimes 1) = \alpha(a) \otimes 1 = 1 \otimes \rho(a)$ donc on doit avoir $\rho(a) \cdot m = \alpha(a) \star m$.
Ainsi les deux lois commutent et coïncident sur $\mathbf{k}$.
Inversement, à partir de deux lois externes qui commutent et coïncident sur $\mathbf{k}$, on peut définir $(b \otimes c)m$ par $b \star (c \cdot m)$. □

Voici un fait important, et facile, concernant l'extension des scalaires.

3.11. Fait. *On considère deux* $\mathbf{k}$*-algèbres* $\mathbf{k} \xrightarrow{\rho} \mathbf{k}'$ *et* $\mathbf{k} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{A}$ *et l'on note* $\mathbf{A}' = \rho_\star(\mathbf{A})$. *Si la* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{A}$ *est de type fini (resp. de présentation finie, finie, entière, strictement finie) il en va de même pour la* $\mathbf{k}'$*-algèbre* $\mathbf{A}'$.
▷ La démonstration est laissée à la lectrice. □

Algèbres entières

Le lemme lying over

Dans ce paragraphe et le suivant nous complétons ce qui a déjà été dit sur les algèbres entières dans la section III-8.

Le lemme qui suit exprime le contenu constructif du lemme de mathématiques classiques, appelé « lying over », qui affirme que si $\mathbf{B}$ est un anneau entier sur un sous-anneau $\mathbf{A}$, il y a toujours un idéal premier de $\mathbf{B}$ au dessus d'un idéal premier donné de $\mathbf{A}$.
Rappelons que nous notons $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ le nilradical de l'idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$.

3.12. Lemme. (Lying over)
Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *avec* $\mathbf{B}$ *entier sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$*, alors* $\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$*, ou ce qui revient au même*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{a}\mathbf{B}) \cap \mathbf{A} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}).$$

En particulier, $1 \in \mathfrak{a} \Leftrightarrow 1 \in \mathfrak{a}\mathbf{B}$.
▷ Si $x \in \mathfrak{a}\mathbf{B}$ on a $x = \sum a_i b_i$, avec $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathbf{B}$. Les b_i engendrent une sous-$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}'$ qui est finie. Soit G un système générateur fini (avec ℓ éléments) du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}'$. Soit $B_i \in \mathbb{M}_\ell(\mathbf{A})$ une matrice qui exprime la multiplication par b_i sur G. La multiplication par x est exprimée par la matrice $\sum a_i B_i$, qui est à coefficients dans $\mathfrak{a}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice, qui annule x (parce que $\mathbf{B}'$ est un $\mathbf{A}$-module fidèle), a donc tous ses coefficients (sauf le coefficient dominant) dans $\mathfrak{a}$. Lorsque $x \in \mathbf{A}$, ceci implique $x^\ell \in \mathfrak{a}$. □

Remarque. Indiquons comment on en déduit le lying over classique en mathématiques classiques. On considère le cas où $\mathfrak{a}$ est un idéal premier et l'on note $S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{a}$. Alors, $\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap S = (\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A}) \cap S$ est vide d'après le lemme 3.12. D'après le *lemme de Krull*, il existe donc un idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{B}$ tel que $\mathfrak{a}\mathbf{B} \subseteq \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$, ce qui implique $\mathfrak{p} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{a}$. Il serait également facile de déduire en mathématiques classiques le lemme 3.12 du lying over classique. ■

Exemple. On montre ici que la condition « $\mathbf{B}$ entier sur $\mathbf{A}$ » est cruciale dans le lying over. On considère $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, $\mathbf{B} = \mathbb{Z}[1/3]$ et $\mathfrak{a} = 3\mathbb{Z}$. Alors, on obtient $\mathfrak{a}\mathbf{B} = \langle 1 \rangle$, mais $\mathfrak{a} \neq \langle 1 \rangle$. ■

Algèbres entières sur un anneau zéro-dimensionnel

Nous examinons ici le cas particulier des algèbres sur un anneau zéro-dimensionnel.

Les algèbres entières sur les corps discrets sont un exemple important d'anneaux zéro-dimensionnels. Dans cette situation, on précise le point *3* du lemme IV-8.2 comme suit (voir aussi le théorème 1.4).

3.13. Lemme. *Une algèbre entière* $\mathbf{A}$ *sur un corps discret* $\mathbf{K}$ *est zéro-dimensionnelle. Plus précisément, soit* $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n\rangle = \langle \underline{a}\rangle$ *un idéal de type fini. Il existe un entier* d *et un idempotent* $s \in a_1\mathbf{K}[\underline{a}] + \cdots + a_n\mathbf{K}[\underline{a}]$ *tels que* $\mathfrak{a}^d = \langle s\rangle$.

▷ Un élément x de $\mathbf{A}$ est annulé par un polynôme unitaire de $\mathbf{K}[X]$ que l'on écrit $uX^k\big(1 - X\,h(X)\big)$ avec $u \in \mathbf{K}^\times$, $k \geqslant 0$ et donc $x^k\big(1 - xh(x)\big) = 0$. L'idempotent e_x tel que $\langle e_x\rangle = \langle x\rangle^d$ pour d assez grand est alors égal à $\big(xh(x)\big)^k$, et d est «assez grand» dès que $d \geqslant k$.

Dans le cas de l'idéal de type fini $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, chaque idempotent e_{a_i} est un élément de $a_i\mathbf{K}[a_i]$. Donc leur pgcd, qui est l'idempotent s dans l'énoncé du lemme, est dans $a_1\mathbf{K}[\underline{a}] + \cdots + a_n\mathbf{K}[\underline{a}]$ (car le pgcd de deux idempotents e et f est $e \vee f = e + f - ef$). □

3.14. Lemme. *Soit* $\mathbf{k}$ *un anneau zéro-dimensionnel et* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre entière sur* $\mathbf{k}$.

1. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel.*
2. *Plus précisément, si* $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n\rangle$, *il existe un entier* d *et un idempotent* $s \in a_1\mathbf{k}[\underline{a}] + \cdots + a_n\mathbf{k}[\underline{a}]$ *tel que* $\mathfrak{a}^d = \langle s\rangle$.
3. *En particulier, on obtient pour chaque* $a \in \mathbf{A}$ *une égalité*
$$a^d\big(1 - af(a)\big) = 0,$$
avec un $f(X) \in \mathbf{k}[X]$ *(donc,* $\big(af(a)\big)^d$ *est idempotent).*

NB : *on ne réclame pas que* $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{A}$ *soit injectif.*

▷ Il suffit de montrer le point *2.*

En appliquant la machinerie locale-globale élémentaire page 226, on étend le résultat du lemme 3.13 au cas où $\mathbf{k}$ est zéro-dimensionnel réduit. Ensuite on ramène le cas zéro-dimensionnel au cas zéro-dimensionnel réduit en passant au quotient par le nilradical et en utilisant «la méthode de Newton en algèbre» (section III-10). Plus précisément, posons $\mathfrak{N} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$. D'après le cas zéro-dimensionnel réduit, il existe x_1, …, $x_n \in \mathbf{k}[\underline{a}]$ tels que

$$s = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \text{ avec } s^2 \equiv s \bmod \mathfrak{N} \text{ et } sa_i \equiv a_i \bmod \mathfrak{N}.$$

L'élément s est congru modulo $\mathfrak{N}$ à un unique idempotent s_1, lequel s'écrit $sp(s)$ avec $p(T) \in \mathbb{Z}[T]$ (corollaire III-10.4). Puisque $s \in \mathbf{k}[\underline{a}]$, cela

donne une égalité $s_1 = a_1y_1 + \cdots + a_ny_n$ avec $y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{k}[\underline{a}]$. En outre, $s_1a_i \equiv sa_i \equiv a_i$ modulo $\mathfrak{N}$ pour chaque i. Puisque $(1-s_1)a_i \in \mathfrak{N}$, il existe k_i tel que $(1-s_1)a_i^{k_i} = 0$. Finalement avec $k = k_1 + \cdots + k_n$, on obtient $\mathfrak{a}^k = \langle s_1 \rangle$. □

Rappelons que le lemme IV-8.15 établit la réciproque suivante.
Soient $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$*, avec* $\mathbf{A}$ *entier sur* $\mathbf{k}$*. Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau zéro-dimensionnel, alors* $\mathbf{k}$ *est un anneau zéro-dimensionnel.*

Un Nullstellensatz faible

Le théorème suivant, pour l'implication *2* ⇒ *3* limitée au cas où $\mathbf{A}$ est un corps discret, est souvent appelé «Nullstellensatz faible» dans la littérature, car il peut servir de préliminaire au Nullstellensatz (en mathématiques classiques). C'est à distinguer des autres Nullstellensätze faibles déjà envisagés dans cet ouvrage.

3.15. Théorème. (Un Nullstellensatz faible)
Soit $\mathbf{K}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit et* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre de type fini. Pour les propriétés suivantes, on a 1* ⇒ *2* ⇔ *3.*

1. $\mathbf{A}$ *est un anneau local.*
2. $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel.*
3. $\mathbf{A}$ *est fini sur* $\mathbf{K}$*.*

NB : on ne suppose pas que $\rho : \mathbf{K} \to \mathbf{A}$ est injective.

◗ On sait déjà que *3* implique *2*. Voyons que *1* ou *2* implique *3*.
On peut remplacer $\mathbf{K}$ par $\rho(\mathbf{K})$ qui est également zéro-dimensionnel réduit, on a alors $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{A} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{K}[\underline{x}]$. Nous faisons une preuve par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est trivial. Passons de $n-1$ à n.
Si $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, il existe un polynôme $R \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ et un entier ℓ tel que $x_n^\ell\big(1 - x_nR(\underline{x})\big) = 0$. Le polynôme $X_n^\ell\big(1 - X_nR(\underline{X})\big)$ a l'un de ses coefficients égal à 1 et est donc primitif.
Si $\mathbf{A}$ est local, x_n ou $1 + x_n$ est inversible. Sans perte de généralité on suppose que x_n est inversible. Il existe un polynôme $R \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $1 + x_nR(\underline{x}) = 0$. Le polynôme $1 + X_nR(\underline{X})$ a l'un de ses coefficients égal à 1 et est donc primitif.
Dans les deux cas, on peut faire un changement de variables comme dans le lemme III-9.4 (cas d'un corps discret infini) ou VII-1.4 (cas général). On a alors $\mathbf{A} = \mathbf{K}[y_1, \ldots, y_n]$, et $\mathbf{A}$ est finie sur $\mathbf{A}_1 = \mathbf{K}[y_1, \ldots, y_{n-1}] \subseteq \mathbf{A}$.
Si $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, le lemme IV-8.15 implique que $\mathbf{A}_1$ est zéro-dimensionnel et l'on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence.
Si $\mathbf{A}$ est local, le point *3* du théorème IX-1.8 implique que $\mathbf{A}_1$ est local et l'on peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence. □

Remarque. Ce qui est nouveau pour l'implication *2* ⇒ *3* dans le théorème 3.15 par rapport au théorème IV-8.16, qui utilise la mise en position

de Noether, c'est donc le fait que l'on ne suppose pas l'algèbre de présentation finie mais seulement de type fini. Les deux démonstrations sont en définitive basées sur le lemme IV-8.15 et sur un lemme de changement de variables. ∎

Algèbres entières sur un anneau quasi intègre

On note $\operatorname{Reg}\mathbf{A}$ le filtre des éléments réguliers de l'anneau $\mathbf{A}$, de sorte que l'anneau total des fractions $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$ est égal à $(\operatorname{Reg}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}$.

3.16. Fait.
Soient $\mathbf{A}$ *un anneau quasi intègre,* $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$, $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre entière réduite et* $\mathbf{B}$ *la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{L}$.
Alors, $\mathbf{B}$ *est quasi intègre et* $\operatorname{Frac}\mathbf{B} = \mathbf{L} = (\operatorname{Reg}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$.

▷ $\mathbf{K}$ est zéro-dimensionnel réduit parce que $\mathbf{A}$ est quasi intègre (fait IV-8.6). L'anneau $\mathbf{L}$ est zéro-dimensionnel parce qu'il est entier sur $\mathbf{K}$. Comme il est réduit, il est quasi intègre. Comme $\mathbf{B}$ est intégralement clos dans $\mathbf{L}$, tout idempotent de $\mathbf{L}$ est dans $\mathbf{B}$, donc $\mathbf{B}$ est quasi intègre.
Considérons un $x \in \mathbf{L}$ et un polynôme unitaire $f \in \mathbf{K}[X]$ qui annule x. En chassant les dénominateurs on obtient un polynôme

$$g(X) = a_m X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{A}[X]$$

qui annule x, avec $a_m \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$. Alors, $y = a_m x$, entier sur $\mathbf{A}$, est dans $\mathbf{B}$ et $x \in (\operatorname{Reg}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. □

Algèbres qui sont des modules de présentation finie

3.17. Théorème. (Quand une $\mathbf{k}$-algèbre est un $\mathbf{k}$-module de présentation finie)

1. *Pour une* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. $\mathbf{A}$ *est un* $\mathbf{k}$*-module de présentation finie.*
   b. $\mathbf{A}$ *est finie et c'est une* $\mathbf{k}$*-algèbre de présentation finie.*
   c. $\mathbf{A}$ *est entière et de présentation finie sur* $\mathbf{k}$.
2. *Si ces conditions sont vérifiées et si en outre* $\mathbf{k}$ *est cohérent (resp. cohérent fortement discret), alors* $\mathbf{A}$ *est cohérent (resp. cohérent fortement discret).*

▷ *1a* ⇒ *1b.* Soit $\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{m} b_i\mathbf{k}$ un $\mathbf{k}$-module de présentation finie. On doit donner une présentation finie de $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{k}$-algèbre. On considère le système générateur $(b_1, \ldots, b_m)$. D'une part, on prend les relations $\mathbf{k}$-linéaires données par la présentation de $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{k}$-module. D'autre part on écrit chaque $b_i b_j$ comme combinaison $\mathbf{k}$-linéaire des b_k. Modulo ces dernières relations, tout polynôme en les b_i à coefficients dans $\mathbf{k}$ se réécrit comme une combinaison $\mathbf{k}$-linéaire des b_i. Il s'évalue donc à 0 dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, (en tant que polynôme) il est dans l'idéal engendré par toutes les relations

que l'on a données.
1b $\iff$ *1c.* Clair.
1b $\Rightarrow$ *1a.* On suppose que $\mathbf{A}$ est finie sur $\mathbf{k}$ avec

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle .$$

Pour chaque i, soit $t_i(X_i) \in \mathbf{k}[X_i]$ un polynôme unitaire tel que $t_i(x_i) = 0$, et $\delta_i = \deg t_i$. On a

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle t_1, \dots, t_n, h_1, \dots, h_s \rangle ,$$

où les h_j sont les f_j réduits modulo $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$.
Les « monômes » $\underline{x}^{\underline{d}} = x_1^{d_1} \cdots x_n^{d_n}$ où $d_1 < \delta_1, \dots, d_n < \delta_n$ (ce que nous notons $\underline{d} < \underline{\delta}$) forment une base de l'algèbre $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{t} \rangle$ et un système générateur G du $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$. Une relation arbitraire entre ces générateurs est obtenue lorsque l'on écrit $\sum_{j=1}^{s} g_j(\underline{x}) h_j(\underline{x}) = 0$, à condition de l'exprimer comme une combinaison $\mathbf{k}$-linéaire d'éléments de G. On peut naturellement se limiter aux g_j qui sont de degré $< \delta_i$ en chaque variable X_i. Si l'on fixe un indice $j \in [\![1..s]\!]$ et un monôme $\underline{x}^{\underline{d}}$ avec $\underline{d} < \underline{\delta}$, on obtient une relation de dépendance $\mathbf{k}$-linéaire entre les éléments de G en réécrivant $\underline{X}^{\underline{d}} h_j(\underline{X})$ modulo $\langle t_1, \dots, t_n \rangle$ et en disant que la combinaison linéaire des éléments de G ainsi obtenue est nulle. Ces relations engendrent le $\mathbf{k}$-module des syzygies entre les éléments de G.
2. Si $\mathbf{k}$ est cohérent (resp. cohérent fortement discret), alors on sait que $\mathbf{A}$ est cohérent (resp. cohérent fortement discret) en tant que $\mathbf{k}$-module (puisqu'il est de présentation finie). Soit $(b_i)_{i=1}^{m}$ un système générateur de $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{k}$-module et $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{A}^n$. L'idéal $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ est le $\mathbf{k}$-module de type fini engendré par les $v_i b_j$, donc il est détachable si $\mathbf{k}$ est fortement discret.
En outre, une $\mathbf{A}$-syzygie pour v peut se réécrire comme une $\mathbf{k}$-syzygie entre les $v_i b_j$. Donc un système générateur du $\mathbf{k}$-module des $\mathbf{k}$-syzygies entre les $v_i b_j$ donne par relecture un système générateur du $\mathbf{A}$-module des $\mathbf{A}$-syzygies entre les v_i.

□

Algèbre entière sur un anneau intégralement clos
On généralise ici la proposition III-8.17.

3.18. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau intégralement clos,* $\mathbf{K}$ *son corps de fractions,* $\mathbf{L}$ *un surcorps strictement fini sur* $\mathbf{K}$ *et* $\mathbf{B}$ *la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{L}$. *Pour* $z \in \mathbf{L}$, *notons* $\mu_{\mathbf{L},z} \in \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(\mathbf{L})$ *la multiplication par* z, *puis* $\nu_z(X)$ *et* $\chi_z(X)$ *le polynôme minimal et le polynôme caractéristique de* $\mu_{\mathbf{L},z}$ *(ce sont des éléments de* $\mathbf{K}[X]$*).*

1. *Pour* $z \in \mathbf{L}$, *on a :* $z \in \mathbf{B} \iff \nu_z \in \mathbf{A}[X] \iff \chi_z \in \mathbf{A}[X]$. *En particulier, pour* $z \in \mathbf{B}$, $\mathrm{N}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(z)$ *et* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(z) \in \mathbf{A}$.

On suppose maintenant que $\mathbf{L}$ *est étale sur* $\mathbf{K}$, *i.e. que* $\mathrm{Disc}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}} \in \mathbf{K}^{\times}$.

2. Soit x un élément de $\mathbf{B}$ tel que $\mathbf{K}[x] = \mathbf{L}$. On note $\Delta_x = \mathrm{disc}(\chi_x)$.

a. $\mathbf{A}[x] \simeq \mathbf{A}[X]/\langle\chi_x\rangle$, $\mathbf{A}$-module libre de rang $[\mathbf{L} : \mathbf{K}]$.

b. On a $\mathbf{A}[x][1/\Delta_x] = \mathbf{B}[1/\Delta_x]$, anneau intégralement clos.

c. Si $\mathbf{A}$ est un anneau à pgcd, si $\Delta_x = d^2 b$ et b est sans facteur carré, alors $\mathbf{A}[x][1/d] = \mathbf{B}[1/d]$ et c'est un anneau est intégralement clos.

3. Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{K}$ contenue dans $\mathbf{B}$ et $M \subseteq \mathbf{B}$ le $\mathbf{A}$-module de base $\mathcal{B}$.

a. L'élément $\Delta = \mathrm{disc}_{\mathbf{L}/\mathbf{K}}(\mathcal{B})$ est dans $\mathbf{A}$.

b. Pour tout $x \in \mathbf{B}$, $\Delta x \in M$, autrement dit $M \subseteq \mathbf{B} \subseteq \frac{1}{\Delta} M$.

c. Si $\mathbf{A}$ est un anneau à pgcd, pour tout $x \in \mathbf{B}$, il existe $\delta \in \mathbf{A}$, tel que δ^2 divise Δ et $\delta x \in M$.
Si en outre $\Delta = d^2 b$ avec b sans facteur carré, $M \subseteq \mathbf{B} \subseteq \frac{1}{d} M$.

1. Si $z \in \mathbf{B}$, il annule un polynôme unitaire $h(X) \in \mathbf{A}[X]$, et le polynôme ν_z divise h dans $\mathbf{K}[X]$. Comme ν_z est unitaire et $\mathbf{A}$ intégralement clos, on obtient $\nu_z \in \mathbf{A}[X]$ par le lemme III-8.10.
Par ailleurs dans $\mathbf{K}[X]$, ν_z divise χ_z et χ_z divise une puissance de ν_z, donc, toujours par le lemme III-8.10, $\nu_z \in \mathbf{A}[X]$ équivaut à $\chi_z \in \mathbf{A}[X]$.
2a. Clair : $(1, x, \ldots, x^{[\mathbf{L} : \mathbf{K}]-1})$ est à la fois une base de $\mathbf{A}[x]$ sur $\mathbf{A}$ et de $\mathbf{L}$ sur $\mathbf{K}$. Notez que par hypothèse $\chi_x = \nu_x$.
2b. Considérons le cas particulier de *3b* où $M = \mathbf{A}[x]$.
On obtient $\mathbf{B}[1/\Delta_x] = \mathbf{A}[x][1/\Delta_x]$, et comme $\mathbf{B}$ est intégralement clos, il en va de même pour $\mathbf{B}[1/\Delta_x]$.
2c. Cas particulier de *3c* avec $M = \mathbf{A}[x]$, en raisonnant comme en *3c*.
3a. Conséquence immédiate de *1*.
3b. Écrivons $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ et $x = \sum_i x_i b_i$ avec les $x_i \in \mathbf{K}$. Considérons par exemple le coefficient x_1, supposé non nul. Le n-uplet $\mathcal{B}' = (x, b_2, \ldots, b_n)$ est une $\mathbf{K}$-base de $\mathbf{L}$ contenue dans $\mathbf{B}$. La matrice de $\mathcal{B}'$ sur $\mathcal{B}$ a pour déterminant x_1. Donc $x_1^2 \Delta = x_1^2 \,\mathrm{disc}(\mathcal{B}) = \mathrm{disc}(\mathcal{B}') \in \mathbf{A}$. A fortiori $(x_1\Delta)^2 \in \mathbf{A}$, et puisque $\mathbf{A}$ est intégralement clos, $x_1 \Delta \in \mathbf{A}$. Ainsi toutes les coordonnées sur $\mathcal{B}$ de Δx sont dans $\mathbf{A}$.
3c. Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau à pgcd, on écrit l'élément x_1 comme une fraction réduite $x_1 = a_1/\delta_1$. Alors, puisque $x_1^2 \Delta \in \mathbf{A}$, δ_1^2 divise $a_1^2 \Delta$, et comme $\mathrm{pgcd}(a_1, \delta_1) = 1$, l'élément δ_1^2 divise Δ. On fait de même pour chacun des $x_i = a_i/\delta_i$. Si δ est le ppcm des δ_i, δ^2 est le ppcm des δ_i^2, donc il divise Δ, et $\delta x \in M$. □

4. Algèbres strictement finies

Le module dual et la trace

Si P et Q sont des $\mathbf{k}$-modules projectifs de type fini on a un isomorphisme canonique $\theta_{P,Q} : P^\star \otimes_{\mathbf{k}} Q \to \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(P,Q)$.
Lorsque le contexte est clair on peut identifier $\alpha \otimes x \in P^\star \otimes_{\mathbf{k}} Q$ avec l'application $\mathbf{k}$-linéaire correspondante $y \mapsto \alpha(y)x$.
En particulier, un système de coordonnées de P, $\big((x_1,\dots,x_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big)$, est caractérisé par l'égalité :

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i \otimes x_i = \mathrm{Id}_P. \tag{1}$$

De manière duale on a, modulo l'identification de P avec $(P^\star)^\star$:

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \otimes \alpha_i = \mathrm{Id}_{P^\star}. \tag{2}$$

Cette équation signifie que pour tout $\gamma \in P^\star$ on a $\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\alpha_i$.

4.1. Définition et notation. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre.
Le dual $\mathbf{A}^\star$ du $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ est muni d'une structure de $\mathbf{A}$-module via la loi externe $(a,\alpha) \mapsto a \centerdot \alpha \overset{\text{def}}{=} \alpha \circ \mu_a$, i.e. $(a \centerdot \alpha)(x) = \alpha(ax)$.

Les faits V-2.9 et/ou V-8.9 donnent le résultat suivant.

4.2. Fait. *Soit $\big((x_1,\dots,x_n),(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\big)$ un système de coordonnées pour la $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie $\mathbf{A}$, alors l'application $\mathbf{k}$-linéaire $\mu_{\mathbf{A},a}$ est représentée dans ce système par la matrice $\big(\alpha_i(ax_j)\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ et l'on a*

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \sum\nolimits_{i=1}^{n} x_i \centerdot \alpha_i, \quad \big(i.e., \forall a \in \mathbf{A},\ \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a) = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_i(ax_i)\big). \tag{3}$$

Norme et élément cotransposé

Nous introduisons la notion d'*élément cotransposé* dans une algèbre strictement finie. Il suffit de reprendre ce qui a été dit dans le cas d'une algèbre libre de rang fini page 135. Si $\mathbf{A}$ est strictement finie sur $\mathbf{k}$ on peut identifier $\mathbf{A}$ à une sous-$\mathbf{k}$-algèbre commutative de $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(A)$, où A désigne le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ privé de sa structure multiplicative, au moyen de l'homomorphisme de multiplication $x \mapsto \mu_{A,x} = \mu_x$. Alors, puisque $\widetilde{\mu}_x = G(\mu_x)$ pour un polynôme G de $\mathbf{k}[T]$ (point *8* du théorème V-8.1), on peut définir $\widetilde{x}$ par l'égalité $\widetilde{x} = G(x)$, ou ce qui revient au même $\widetilde{\mu_x} = \mu_{\widetilde{x}}$. Si plus de précision est nécessaire on utilisera la notation $\mathrm{Adj}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)$. Cet élément $\widetilde{x}$ s'appelle *l'élément cotransposé de x*. L'égalité $\widetilde{\mu_x}\,\mu_x = \det(\mu_x)\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ donne alors :

$$x\ \mathrm{Adj}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x) = \mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x) \tag{4}$$

4.3. Lemme. *Soit* $\mathbf{k} \xrightarrow{\rho} \mathbf{A}$ *une algèbre strictement finie,* $x \in \mathbf{A}$ *et* $y \in \mathbf{k}$.

1. *On a* $x \in \mathbf{A}^\times$ *si, et seulement si,* $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x) \in \mathbf{A}^\times$.
   Dans ce cas $x^{-1} = \widetilde{x}/\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)$.
2. x *est régulier dans* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si,* $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)$ *est régulier dans* $\mathbf{k}$. *Dans ce cas* $\widetilde{x}$ *est également régulier.*
3. $\rho(\mathbf{k})$ *est facteur direct dans* $\mathbf{A}$.

Notons $e = \mathrm{e}_0(\mathbf{A})$ *(de sorte que* $\langle e\rangle_{\mathbf{k}} = \mathrm{Ann}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$*).*

4. *On a* $\rho(y) \in \mathbf{A}^\times$ *si, et seulement si,* $y \in (\mathbf{k}/\langle e\rangle)^\times$.
5. $\rho(y)$ *est régulier dans* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si,* y *est régulier dans* $\mathbf{k}/\langle e\rangle$.

NB. Si $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module fidèle, i.e., si ρ est injectif, on identifie $\mathbf{k}$ à $\rho(\mathbf{k})$. Alors, $\mathbf{k}$ est facteur direct dans $\mathbf{A}$, et un élément y de $\mathbf{k}$ est inversible (resp. régulier) dans $\mathbf{k}$ si, et seulement si, il est inversible (resp. régulier) dans $\mathbf{A}$.

D *1.* Dans un module projectif de type fini un endomorphisme (ici μ_x) est bijectif si, et seulement si, son déterminant est inversible.
2. Dans un module projectif de type fini un endomorphisme est injectif si, et seulement si, son déterminant est régulier.
Les points *3*, *4* et *5* peuvent être démontrés après localisation en des éléments comaximaux de $\mathbf{k}$. D'après le théorème de structure locale on est ramené au cas où $\mathbf{A}$ est libre de rang fini, disons k. Si $k = 0$, alors $e = 1$, donc $\mathbf{A}$ et $\mathbf{k}/\langle e\rangle$ sont triviaux et tout est clair (même si c'est un peu troublant). Examinons le cas où $k \geqslant 1$, d'où $e = 0$ et identifions $\mathbf{k}$ à $\rho(\mathbf{k})$.
Les points *4* et *5* découlent alors des points *1* et *2* parce que $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(y) = y^k$.
Pour le point *3*, on considère une base $(b_1, \ldots, b_k)$ de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}$ et des éléments $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{k}$ tels que $\sum_i a_i b_i = 1$. On a $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\sum_i a_i b_i) = 1$. Par ailleurs, pour $y_1, \ldots, y_k \in \mathbf{k}$, $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\sum_i y_i b_i)$ s'écrit comme un polynôme homogène de degré k dans $\mathbf{k}[\underline{y}]$ (voir la remarque page 135), et donc

$$\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\textstyle\sum_i a_i b_i) = \sum_i a_i \beta_i = 1$$

pour des $\beta_i \in \mathbf{k}$ convenables. On considère l'élément $\beta \in \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$ défini par $\beta(\sum_i x_i b_i) = \sum_i x_i \beta_i$.
Alors, $\beta(1) = 1$, donc $\beta(z) = z$ pour $z \in \mathbf{k}$, $\mathrm{Im}\,\beta = \mathbf{k}$ et $\beta \circ \beta = \beta$. □

Transitivité et rang

Lorsque $\mathbf{A}$ est de rang constant n, nous noterons $[\,\mathbf{A} : \mathbf{k}\,] = n$. Ceci généralise la notation déjà définie dans le cas des algèbres libres, et cela sera généralisé au chapitre X (notation X-3.6). Dans ce paragraphe, m et n désignent des entiers.

4.4. Fait. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre strictement finie,* M *un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini et* $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre strictement finie.*

1. *M est aussi un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini.*
2. *Supposons* $\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}\, M = m$ *et notons* $f(T) = \mathrm{R}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}) \in \mathbb{B}(\mathbf{k})[T]$ *le polynôme rang de* $\mathbf{A}$ *comme* $\mathbf{k}$*-module, alors* $\mathrm{R}_{\mathbf{k}}(M) = f^m(T) = f(T^m)$.
3. $\mathbf{B}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{k}$ *et* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} \circ \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$.

1. Supposons que $\mathbf{A} \oplus E \simeq \mathbf{k}^r$ ($\mathbf{k}$-modules) et $M \oplus N \simeq \mathbf{A}^s$ ($\mathbf{A}$-modules). Alors $M \oplus N \oplus E^s \simeq \mathbf{k}^{rs}$ ($\mathbf{k}$-modules). On peut redire ceci avec des systèmes de coordonnées sous la forme suivante : si $\big((x_1, \ldots, x_n), (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\big)$ est un système de coordonnées pour le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ et $\big((y_1, \ldots, y_m), (\beta_1, \ldots, \beta_m)\big)$ un système de coordonnées pour le $\mathbf{A}$-module M, alors $\big((x_i y_j), (\alpha_i \circ \beta_j)\big)$ est un système de coordonnées pour le $\mathbf{k}$-module M.
2. Laissé au lecteur (qui peut s'appuyer sur la description précédente du système de coordonnées, ou consulter la démonstration du lemme X-3.8).
3. On travaille avec des systèmes de coordonnées comme dans le point *1* et l'on applique le fait 4.2 concernant la trace. □

4.5. Théorème. *Soient* $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *des anneaux. Supposons que* $\mathbf{B}$ *est strictement fini sur* $\mathbf{A}$.

1. *L'anneau* $\mathbf{B}$ *est strictement fini sur* $\mathbf{k}$ *si, et seulement si,* $\mathbf{A}$ *est strictement fini sur* $\mathbf{k}$.
2. *Si* $[\,\mathbf{A} : \mathbf{k}\,] = n$ *et* $[\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,] = m$, *alors* $[\,\mathbf{B} : \mathbf{k}\,] = mn$.
3. *Si* $[\,\mathbf{B} : \mathbf{k}\,] = mn$ *et* $[\,\mathbf{B} : \mathbf{A}\,] = m$, *alors* $[\,\mathbf{A} : \mathbf{k}\,] = n$.

1. Si $\mathbf{B}$ est strictement fini sur $\mathbf{k}$, alors $\mathbf{A}$ est strictement fini sur $\mathbf{k}$: cela résulte de ce que $\mathbf{A}$ est facteur direct dans $\mathbf{B}$ (lemme 4.3 point *3*), qui est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini.
L'implication réciproque est dans le lemme 4.4.
2 et *3.* Résultent du fait 4.4 en notant que le seul polynôme multiplicatif f de $\mathbf{k}[T]$ qui vérifie $f^m(T) = T^{mn}$ est $f = T^n$ puisque $f^m(T) = f(T^m)$. □

Remarque. Des formules de transitivité plus générales (dans le cas de rang non constant) sont données en section X-3 dans le paragraphe «Formules de transitivité» page 561 (voir notamment le corollaire X-3.9 et le théorème X-3.10). ■

5. Formes linéaires dualisantes, algèbres strictement étales

5.1. Définition. *(Forme bilinéaire symétrique non dégénérée, forme linéaire dualisante, algèbre strictement étale)*
Soit M un $\mathbf{k}$-module et $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre.

1. Si $\phi : M \times M \to \mathbf{k}$ est une forme bilinéaire symétrique, on lui associe l'application $\mathbf{k}$-linéaire $\varphi : M \to M^\star$ définie par $\varphi(x) = \phi(x, \bullet) = \phi(\bullet, x)$.
   On dit que ϕ est *non dégénérée* si φ est un isomorphisme.
2. Si $\lambda \in \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = \mathbf{A}^\star$, on lui associe la forme $\mathbf{k}$-bilinéaire symétrique sur $\mathbf{A}$, notée $\Phi_{\mathbf{A}/\mathbf{k},\lambda} = \Phi_\lambda$ et définie par $\Phi_\lambda(x, y) = \lambda(xy)$.
   On dit que la forme linéaire λ est *dualisante* si Φ_λ est non dégénérée.
   On appelle *algèbre de Frobenius* une algèbre pour laquelle il existe une forme linéaire dualisante.
3. Si $\mathbf{A}$ est strictement finie sur $\mathbf{k}$ on appelle *forme trace* (ou *forme bilinéaire tracique*) la forme $\Phi_{\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}}$.
4. L'algèbre $\mathbf{A}$ est dite *strictement étale* sur $\mathbf{k}$ si elle est strictement finie et si la trace est dualisante, i.e. la forme trace est non dégénérée.

Remarque. Si $\mathbf{A}$ est libre de base $(\underline{e}) = (e_1, \ldots, e_n)$ sur $\mathbf{k}$, la matrice de ϕ et celle de φ coïncident (pour les bases convenables). En outre, ϕ est non dégénérée si, et seulement si, $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\underline{e})$ est inversible. On note que lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret on retrouve la définition 1.1 pour une algèbre étale [3]. ∎

Formes dualisantes

5.2. Théorème. (Caractérisation des formes dualisantes dans le cas strictement fini)
Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre et $\lambda \in \mathbf{A}^\star$. Pour $x \in \mathbf{A}$, notons $x^\star = x \,.\, \lambda \in \mathbf{A}^\star$.

1. *Si $\mathbf{A}$ est strictement finie et si λ est dualisante, alors pour tout système générateur $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$, il existe un système $(y_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ tel que l'on ait*
   $$\textstyle\sum_{i=1}^n y_i^\star \otimes x_i = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}, \quad i.e. \quad \forall x \in \mathbf{A},\ x = \sum_{i=1}^n \lambda(xy_i)x_i \qquad (5)$$
   En outre, si $\mathbf{A}$ est fidèle, λ est surjective.
2. *Réciproquement, s'il existe deux systèmes $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$, $(y_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ tels que $\sum_i y_i^\star \otimes x_i = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, alors :*
   — *$\mathbf{A}$ est strictement finie,*

3. Nous n'avons pas donné la définition générale d'une algèbre étale. Il se trouve que les algèbres étales sur les corps discrets sont toujours strictement étales (au moins en mathématiques classiques, c'est en rapport avec le théorème 6.14), mais que ce n'est plus le cas pour un anneau commutatif arbitraire, d'où la nécessité d'introduire ici la terminologie « strictement étale ».

— *la forme λ est dualisante,*
— *et l'on a l'égalité $\sum_i x_i^\star \otimes y_i = \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$.*

3. *Si $\mathbf{A}$ est strictement finie, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *λ est dualisante.*
   b. *λ est une base du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^\star$ (qui est donc libre de rang 1).*
   c. *λ engendre le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^\star$, i.e. $\mathbf{A} \,.\, \lambda = \mathbf{A}^\star$.*

▷ *1.* D'une part $y \mapsto y^\star$ est un isomorphisme de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{A}^\star$, et d'autre part tout système générateur est la première composante d'un système de coordonnées. Voyons la surjectivité. Comme $\mathbf{A}$ est fidèle on peut supposer que $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathbf{k}$ engendré par les $\lambda(y_i)$. L'égalité (5) donne l'appartenance $1 = \sum_i \lambda(y_i)x_i \in \mathfrak{a}\mathbf{A}$. Comme $\mathbf{A}$ est entière sur $\mathbf{k}$, le lying over (lemme 3.12) montre que $1 \in \mathfrak{a}$.
2. L'égalité (5) donne $\alpha = \sum_i \alpha(x_i)y_i^\star$ pour $\alpha \in \mathbf{A}^\star$. Ceci prouve que $y \mapsto y^\star$ est surjective. Par ailleurs, si $x^\star = 0$, alors on a $\lambda(xy_i) = 0$, puis $x = 0$. Ainsi λ est dualisante.
Enfin, l'égalité $\alpha = \sum_i \alpha(x_i)y_i^\star$ donne avec $\alpha = x^\star$: $x^\star = \sum_i \lambda(x_i x)y_i^\star$. Et puisque $z \mapsto z^\star$ est un $\mathbf{k}$-isomorphisme, $x = \sum_i \lambda(x_i x)y_i$.
3a ⇔ 3b. « λ est dualisante » signifie que $x \mapsto x^\star$ est un isomorphisme, i.e. que λ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{A}^\star$. L'implication $c \Rightarrow a$ résulte du point *2* car un système de coordonnées s'écrit $\big((x_i),(y_i^\star)\big)$. □

Exemples. Voir les exercices 10 à 12 et le problème 2.
1) Si $f \in \mathbf{k}[X]$ est unitaire, l'algèbre $\mathbf{k}[x] = \mathbf{k}[X]/\langle f(X)\rangle$ est une algèbre de Frobenius (exercice 11).
2) L'algèbre $\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[X,Y]/\langle X^2, Y^2, XY\rangle$ n'est pas une algèbre de Frobenius (exercice 12). ■

Extension des scalaires

5.3. Fait. (Stabilité des formes dualisantes par extension des scalaires)
On considère deux $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{A}$ et l'on note $\mathbf{A}' = \mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$.
Si la forme $\alpha \in \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{k})$ est dualisante, il en va de même pour la forme $\alpha' \in \mathrm{L}_{\mathbf{k}'}(\mathbf{A}',\mathbf{k}')$ obtenue par extension des scalaires.
Comme conséquence, une algèbre de Frobenius reste une algèbre de Frobenius par extension des scalaires.

Transitivité pour les formes dualisantes

5.4. Fait. *Soient $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie, $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre strictement finie, $\beta \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B},\mathbf{A})$ et $\alpha \in \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{k})$.*

1. *Si α et β sont dualisantes, il en va de même pour $\alpha \circ \beta$.*
2. *Si $\alpha \circ \beta$ est dualisante et β surjective (par exemple $\mathbf{B}$ est fidèle et β est dualisante), alors α est dualisante.*

$\triangleright$ Si $\big((a_i),(\alpha_i)\big)$ est un système de coordonnées de $\mathbf{A}/\mathbf{k}$ et $\big((b_j),(\beta_j)\big)$ un système de coordonnées de $\mathbf{B}/\mathbf{A}$, alors $\big((a_ib_j),(\alpha_i\circ\beta_j)\big)$ est un système de coordonnées de $\mathbf{B}/\mathbf{k}$.
1. Pour $a\in\mathbf{A}$, $b\in\mathbf{B}$, $\eta\in \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{k})$ et $\epsilon\in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B},\mathbf{A})$ on vérifie facilement que $ab\,.\,(\eta\circ\epsilon)=(a\,.\,\eta)\circ(b\,.\,\epsilon)$.
Puisque α est dualisante, on a des $u_i\in\mathbf{A}$ tels que $u_i\,.\,\alpha=\alpha_i$ pour $i\in[\![1..n]\!]$.
Puisque β est dualisante, on a des $v_j\in\mathbf{B}$ tels que $v_j\,.\,\beta=\beta_j$ pour $j\in[\![1..m]\!]$.
Alors, $u_iv_j\,.\,(\alpha\circ\beta)=\alpha_i\circ\beta_j$, et ceci montre que $\alpha\circ\beta$ est dualisante.
2. Soit $\alpha'\in\mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{k})$ que l'on cherche à l'écrire sous la forme $a\,.\,\alpha$. Remarquons que pour tout $b_0\in\mathbf{B}$, on a $\big(b_0\,.\,(\alpha'\circ\beta)\big)|_{\mathbf{A}}=\beta(b_0)\,.\,\alpha'$; en particulier, si $\beta(b_0)=1$, alors $\big(b_0\,.\,(\alpha'\circ\beta)\big)|_{\mathbf{A}}=\alpha'$. Puisque $\alpha\circ\beta$ est dualisante, il existe $b\in\mathbf{B}$ tel que $\alpha'\circ\beta=b\,.\,(\alpha\circ\beta)$. En multipliant cette égalité par $b_0.$, on obtient, par restriction à $\mathbf{A}$, $\alpha'=\big((b_0b)\,.\,(\alpha\circ\beta)\big)|_{\mathbf{A}}=\beta(b_0b)\,.\,\alpha$. □

Algèbres strictement étales

Le théorème suivant est un corollaire immédiat du théorème 5.2.

5.5. Théorème. (Caractérisation des algèbres strictement étales) *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre strictement finie. Pour* $x\in\mathbf{A}$*, on note* $x^\star=x\,.\,\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\in\mathbf{A}^\star$.

1. *Si* $\mathbf{A}$ *est strictement étale, alors pour tout système générateur* $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$*, il existe un système* $(y_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ *tel que l'on ait*

$$\sum\nolimits_{i=1}^{n} y_i^\star\otimes x_i=\mathrm{Id}_{\mathbf{A}},\quad \textit{i.e.}\quad \forall x\in\mathbf{A},\ x=\sum\nolimits_{i=1}^{n}\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(xy_i)x_i \tag{6}$$

   Un tel couple $\big((x_i),(y_i)\big)$ *est appelé un* système tracique de coordonnées.
   Si en outre $\mathbf{A}$ *est fidèle,* $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est surjective.*

2. *Réciproquement, si l'on a un couple* $\big((x_i)_{i\in[\![1..n]\!]},(y_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ *qui vérifie* (6)*, alors* $\mathbf{A}$ *est strictement étale, et l'on a* $\sum_i x_i^\star\otimes y_i=\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$.

3. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est dualisante (i.e.* $\mathbf{A}$ *est strictement étale).*
   b. $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est une base du* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{A}^\star$ *(qui est donc libre de rang* 1*).*
   c. $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *engendre le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{A}^\star$.

Extension des scalaires

Le fait qui suit prolonge les faits 3.11 et 5.3.

5.6. Fait. *On considère deux* $\mathbf{k}$*-algèbres* $\mathbf{k}'$ *et* $\mathbf{A}$ *et l'on note* $\mathbf{A}'=\mathbf{k}'\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{A}$.

1. *Si* $\mathbf{A}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$*, alors* $\mathbf{A}'$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}'$.
2. *Si* $\mathbf{k}'$ *est strictement finie et contient* $\mathbf{k}$*, et si* $\mathbf{A}'$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}'$*, alors* $\mathbf{A}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$.

D *1.* Laissé à la lectrice.
2. Supposons d'abord $\mathbf{A}$ libre sur $\mathbf{k}$. Soit $\Delta = \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\underline{e}) \in \mathbf{k}$ pour une base $\underline{e}$ de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}$. Par extension des scalaires on obtient l'égalité $\Delta = \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}'} \in \mathbf{k}'$. Si Δ est inversible dans $\mathbf{k}'$ il est inversible dans $\mathbf{k}$ d'après le lemme 4.3. Dans le cas général on se ramène au cas précédent par localisation en des éléments comaximaux de $\mathbf{k}$. □

Transitivité pour les algèbres strictement étales

5.7. Fait. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre strictement finie et* $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre strictement étale.*

1. *Si* $\mathbf{A}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$*, alors* $\mathbf{B}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$*.*
2. *Si* $\mathbf{B}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$ *et fidèle sur* $\mathbf{A}$*, alors* $\mathbf{A}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$*.*

D Résulte de 5.4 et 4.4. □

Séparabilité et nilpotence

5.8. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre strictement étale.*

1. *Si* $\mathbf{k}$ *est réduit,* $\mathbf{A}$ *également.*
2. *L'idéal* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ *est engendré par l'image de* $\mathrm{D}_{\mathbf{k}}(0)$ *dans* $\mathbf{A}$*.*
3. *Si* $\mathbf{k}'$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre réduite,* $\mathbf{A}' = \mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ *est réduite.*

D *1.* On raisonne à peu près comme dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps discret (fait 1.3). On suppose d'abord que $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{k}$. Soit $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$. Pour tout $x \in \mathbf{A}$ la multiplication par ax est un endomorphisme nilpotent μ_{ax} de $\mathbf{A}$. Sa matrice est nilpotente donc les coefficients de son polynôme caractéristique sont nilpotents (voir par exemple l'exercice II-2), donc nuls puisque $\mathbf{k}$ est réduit. En particulier, $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(ax) = 0$. Ainsi a est dans le noyau de l'application $\mathbf{k}$-linéaire $tr : a \mapsto \big(x \mapsto \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(ax)\big)$. Or tr est un isomorphisme par hypothèse donc $a = 0$.
Dans le cas général on se ramène au cas où $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{k}$ par le théorème de structure locale des modules projectifs de type fini (en tenant compte du fait 5.6 *1*).
Le point *3* résulte de *1* et du fait 5.6 *1.* Le point *2* résulte de *3*, en considérant $\mathbf{k}' = \mathbf{k}_{\mathrm{red}}$. □

La même technique prouve le lemme suivant.

5.9. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{k}$ *et si* $a \in \mathbf{A}$ *est nilpotent, les coefficients de* $\mathrm{F}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a)(T)$ *sont nilpotents (hormis le coefficient constant).*

Produits tensoriels

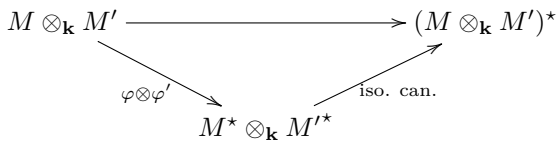
Si ϕ et ϕ' sont deux formes bilinéaires symétriques sur M et M', on définit une forme bilinéaire symétrique sur $M \otimes_{\mathbf{k}} M'$, notée $\phi \otimes \phi'$ par :

$$(\phi \otimes \phi')(x \otimes x', y \otimes y') = \phi(x,y)\phi'(x',y').$$

5.10. Proposition. (Produit tensoriel de deux formes non dégénérées)
Soient M, M' deux $\mathbf{k}$-modules projectifs de type fini et $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ deux $\mathbf{k}$-algèbres strictement finies.

1. *Si ϕ sur M et ϕ' sur M' sont deux formes bilinéaires symétriques non dégénérées, il en est de même de $\phi \otimes \phi'$.*
2. *Si $\lambda \in \mathbf{A}^\star$ et $\lambda' \in \mathbf{A}'^\star$ sont deux formes $\mathbf{k}$-linéaires dualisantes, il en est de même de $\lambda \otimes \lambda' \in (\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}')^\star$.*

1. L'application $\mathbf{k}$-linéaire canonique $M^\star \otimes_{\mathbf{k}} M'^\star \to (M \otimes_{\mathbf{k}} M')^\star$ est un isomorphisme puisque M, M' sont projectifs de type fini. Soit $\varphi : M \to M^\star$ l'isomorphisme associé à ϕ, et $\varphi' : M' \to M'^\star$ celui associé à ϕ'. Le morphisme associé à $\phi \otimes \phi'$ est composé de deux isomorphismes donc est un isomorphisme :



2. Résulte de $\Phi_{\lambda \otimes \lambda'} = \Phi_\lambda \otimes \Phi_{\lambda'}$. □

La proposition précédente et le lemme V-8.10 donnent le résultat suivant.

5.11. Corollaire. *Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ deux $\mathbf{k}$-algèbres strictement finies. Alors :*

$$\Phi_{\mathrm{Tr}_{(\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{C})/\mathbf{k}}} = \Phi_{\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}} \otimes \Phi_{\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}}.$$

En particulier, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{C}$ est strictement étale si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{C}$ sont strictement étales. (Pour le calcul précis du discriminant, voir l'exercice 7.)

Éléments entiers, idempotents, diagonalisation

Le théorème suivant est une conséquence subtile du remarquable lemme III-8.5. Il sera utile en théorie de Galois pour le théorème VII-6.4.

5.12. Théorème. *Soit $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ un homomorphisme injectif d'anneaux avec $\mathbf{k}$ intégralement clos dans $\mathbf{k}'$, et $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre strictement étale. Par extension des scalaires on obtient $\mathbf{A}' = \rho_\star(\mathbf{A}) \simeq \mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ strictement étale sur $\mathbf{k}'$.*

1. *L'homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'$ est injectif.*
2. *L'anneau $\mathbf{A}$ est intégralement clos dans $\mathbf{A}'$.*

3. Tout idempotent de $\mathbf{A}'$ *est dans* $\mathbf{A}$.

▷ Le point *3* est un cas particulier du point *2*.

1. On applique le théorème de structure locale des modules projectifs de type fini et le principe local-global II-6.7 pour les suites exactes.

2. On peut identifier $\mathbf{k}$ à un sous-anneau de $\mathbf{k}'$ et $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{A}'$. Rappelons que $\mathbf{A}$ est finie, donc entière, sur $\mathbf{k}$. Il suffit de traiter le cas où $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{k}$ (théorème de structure locale des modules projectifs de type fini et principe local-global III-8.9 pour les éléments entiers).
Soit $\underline{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}$ et $\underline{h}$ la base duale relativement à la forme trace. Si $n = 0$ ou $n = 1$ le résultat est évident. On suppose $n \geqslant 2$. Notons que $\underline{e}$ est aussi une base de $\mathbf{A}'$ sur $\mathbf{k}'$. En outre, puisque, pour $a \in \mathbf{A}$, les endomorphismes $\mu_{\mathbf{A},a}$ et $\mu_{\mathbf{A}',a}$ ont la même matrice sur $\underline{e}$, la forme trace sur $\mathbf{A}'$ est une extension de la forme trace sur $\mathbf{A}$ et $\underline{h}$ reste la base duale relativement à la forme trace dans $\mathbf{A}'$. Soit $x = \sum_i x_i e_i$ un élément de $\mathbf{A}'$ entier sur $\mathbf{A}$ ($x_i \in \mathbf{k}'$). On doit montrer que les x_i sont dans $\mathbf{k}$, ou ce qui revient au même, entiers sur $\mathbf{k}$. Or xh_i est entier sur $\mathbf{k}$. La matrice de $\mu_{\mathbf{A}',xh_i}$ est donc un élément de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k}')$ entier sur $\mathbf{k}$. Par suite son polynôme caractéristique a ses coefficients entiers sur $\mathbf{k}$ (lemme III-8.5), donc dans $\mathbf{k}$, et en particulier $x_i = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}'}(xh_i) \in \mathbf{k}$. □

5.13. Lemme. *La* $\mathbf{k}$*-algèbre produit* $\mathbf{k}^n$ *est strictement étale, le discriminant de la base canonique est égal à* 1. *Si* $\mathbf{k}$ *est un anneau connexe non trivial, cette* $\mathbf{k}$*-algèbre possède exactement* n *caractères et* $n!$ *automorphismes (ceux que l'on voit au premier coup d'oeil).*

▷ L'affirmation concernant le discriminant est claire (proposition II-5.34). On a évidemment comme caractères les n projections naturelles $\pi_i : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}$ sur chacun des facteurs, et comme $\mathbf{k}$-automorphismes les $n!$ automorphismes obtenus par permutation des coordonnées. Soit e_i l'idempotent défini par $\mathrm{Ker}\,\pi_i = \langle 1 - e_i \rangle$. Si $\pi : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}$ est un caractère, les $\pi(e_i)$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{k}$. Puisque $\mathbf{k}$ est connexe non trivial, ils sont tous nuls sauf un, $\pi(e_j) = 1$ par exemple. Alors, $\pi = \pi_j$, car ce sont des applications $\mathbf{k}$-linéaires qui coïncident sur les e_i. Enfin, comme conséquence tout $\mathbf{k}$-automorphisme de $\mathbf{k}^n$ permute les e_i. □

5.14. Définition. *(Algèbres diagonales)*

1. Une $\mathbf{k}$-algèbre est dite *diagonale* si elle est isomorphe à une algèbre produit $\mathbf{k}^n$ pour un $n \in \mathbb{N}$. En particulier, elle est strictement étale.
2. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie et $\mathbf{L}$ une $\mathbf{k}$-algèbre.
   On dit que $\mathbf{L}$ *diagonalise* $\mathbf{A}$ si $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ est une $\mathbf{L}$-algèbre diagonale.

5.15. Fait. (Algèbres diagonales monogènes)
Soit $f \in \mathbf{k}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X]/\langle f\rangle$.

1. *La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ est diagonale si, et seulement si, f est séparable et se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbf{k}[X]$.*
2. *Dans ce cas, si $\mathbf{k}$ est connexe non trivial, f admet exactement n zéros dans $\mathbf{k}$, et la décomposition de f est unique à l'ordre des facteurs près.*
3. *Une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{L}$ diagonalise $\mathbf{A}$ si, et seulement si,* $\mathrm{disc}(f)$ *est inversible dans $\mathbf{L}$ et f se décompose en facteurs linéaires dans $\mathbf{L}[X]$.*

▷ *1.* Si f est séparable et se factorise complètement, on a un isomorphisme $\mathbf{A} \simeq \mathbf{k}^n$ par le théorème d'interpolation de Lagrange (exercice III-1). Montrons la réciproque. Tout caractère $\mathbf{k}[X] \to \mathbf{k}$ est un homomorphisme d'évaluation, donc tout caractère $\mathbf{A} \to \mathbf{k}$ est l'évaluation en un zéro de f dans $\mathbf{k}$. Ainsi l'isomorphisme donné en hypothèse est de la forme

$$\overline{g} \mapsto \big(g(x_1), \dots, g(x_n)\big) \quad (x_i \in \mathbf{k} \text{ et } f(x_i) = 0).$$

Soit alors g_i vérifiant $g_i(x_i) = 1$ et, pour $j \neq i$, $g_i(x_j) = 0$. Pour $j \neq i$, l'élément $x_i - x_j$ divise $g_i(x_i) - g_i(x_j) = 1$, donc $x_i - x_j$ est inversible. Ceci implique que $f = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)$ (toujours par Lagrange).
2. Avec les notations précédentes on doit montrer que les seuls zéros de f dans $\mathbf{k}$ sont les x_i. Un zéro de f correspond à un caractère $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$. On doit donc démontrer que $\mathbf{k}^n$ n'admet pas d'autre caractère que les projections sur chaque facteur. Or cela a été démontré dans le lemme 5.13.
3. Appliquer le point *1* à la $\mathbf{L}$-algèbre $\mathbf{L} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \simeq \mathbf{L}[X]/\langle f\rangle$. □

Remarques.
1) Le point *2* nécessite $\mathbf{k}$ connexe.
2) (Exercice laissé au lecteur) Si $\mathbf{k}$ est un corps discret et si A est une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$, dire que $\mathbf{L}$ diagonalise $\mathbf{k}[A]$ signifie que cette matrice est «diagonalisable» dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{L})$, au sens (faible) que $\mathbf{L}^n$ est somme directe des sous-espaces propres de A.
3) La décomposition d'un anneau $\mathbf{A}$ en produit fini d'anneaux connexes non nuls, quand elle est possible, est unique à l'ordre des facteurs près. Chaque facteur connexe, isomorphe à un localisé $\mathbf{A}[1/e]$, correspond en effet à un idempotent e *indécomposable*[4]. Ceci peut être compris comme conséquence de la structure des algèbres de Boole finies (voir le théorème VII-3.3). On peut aussi obtenir le résultat en raisonnant avec un système fondamental d'idempotents orthogonaux comme dans la démonstration du lemme 5.13.
4) Dans le point *2*, l'hypothèse «non trivial» donne un énoncé plus usuel. Sans cette hypothèse on aurait dit dans la première partie de la phrase :

4. L'idempotent e est dit indécomposable si une égalité $e = e_1 + e_2$ avec e_1, e_2 idempotents et $e_1e_2 = 0$ implique $e_1 = 0$ ou $e_2 = 0$

tout zéro de f est donné par l'un des x_i correspondant à la décomposition supposée de f en facteurs linéaires.
5) Pour l'essentiel le fait précédent est une reformulation plus abstraite du théorème d'interpolation de Lagrange. ∎

5.16. Proposition. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret séparablement factoriel et* $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre strictement finie. Alors,* $\mathbf{B}$ *est étale si, et seulement si, elle est diagonalisée par un surcorps de* $\mathbf{K}$ *étale sur* $\mathbf{K}$*.*

▷ Supposons $\mathbf{B}$ étale. Elle est isomorphe à un produit de corps $\mathbf{K}_i$ étales sur $\mathbf{K}$ (théorème 1.11) et il existe un corps $\mathbf{L}$ étale sur $\mathbf{K}$, extension galoisienne qui contient une copie de chaque $\mathbf{K}_i$ (corollaire 1.14). On voit facilement que $\mathbf{L}$ diagonalise $\mathbf{B}$.
Supposons qu'un corps $\mathbf{L}$ étale sur $\mathbf{K}$ diagonalise $\mathbf{B}$. Alors, $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B/K}}$ est inversible dans $\mathbf{L}$ donc dans $\mathbf{K}$: $\mathbf{B}$ est étale. □

6. Algèbres séparables, idempotent de séparabilité

Les résultats de cette section seront utilisés dans la section 7 consacrée aux algèbres galoisiennes, mais uniquement pour le théorème 7.19 qui établit la correspondance galoisienne dans le cas connexe.
Par ailleurs, ils sont également très utiles pour l'étude du module des différentielles. Nous nous limiterons ici à parler de dérivations.

6.1. Définitions et notations. Soit une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$.

1. L'algèbre $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$, appelée *algèbre enveloppante* de $\mathbf{A}$, est notée $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$.
2. Cette $\mathbf{k}$-algèbre possède deux structures naturelles de $\mathbf{A}$-algèbre, données respectivement par les homomorphismes $g_{\mathbf{A/k}} : a \mapsto a \otimes 1$ (structure à gauche) et $d_{\mathbf{A/k}} : a \mapsto 1 \otimes a$ (structure à droite). Nous utiliserons la notation abrégée suivante pour les deux structures de $\mathbf{A}$-module correspondantes : pour $a \in \mathbf{A}$ et $\gamma \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$,
$$a \cdot \gamma = g_{\mathbf{A/k}}(a)\gamma = (a \otimes 1)\gamma \quad \text{et} \quad \gamma \cdot a = d_{\mathbf{A/k}}(a)\gamma = \gamma(1 \otimes a).$$
3. Nous noterons $\mathrm{J}_{\mathbf{A/k}}$ (ou J si le contexte est clair) l'idéal de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ engendré par les éléments de la forme $a \otimes 1 - 1 \otimes a = a \cdot 1_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}} - 1_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}} \cdot a$.
4. Nous introduisons aussi les applications $\mathbf{k}$-linéaires suivantes :
$$\Delta_{\mathbf{A/k}} : \mathbf{A} \to \mathrm{J}_{\mathbf{A/k}}, \quad a \mapsto a \otimes 1 - 1 \otimes a. \tag{7}$$
$$\mu_{\mathbf{A/k}} : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{A}, \ a \otimes b \mapsto ab \quad \text{(multiplication)} \tag{8}$$
5. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini, $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, il en est de même de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ et l'on a la description suivante possible des objets précédents.

— $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}[y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_n] = \mathbf{k}[\underline{y}, \underline{z}]$ avec $y_i = x_i \otimes 1$, $z_i = 1 \otimes x_i$.
— Pour $a = a(\underline{x}) \in \mathbf{A}$, et $h(\underline{y}, \underline{z}) \in \mathbf{k}[\underline{y}, \underline{z}]$, on a :
  — $g_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a) = a(\underline{y})$, $d_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a) = a(\underline{z})$,
  — $a \cdot h = a(\underline{y})h(\underline{y}, \underline{z})$, $h \cdot a = a(\underline{z})h(\underline{y}, \underline{z})$,
  — $\Delta_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a) = a(\underline{y}) - a(\underline{z})$,
  — et $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(h) = h(\underline{x}, \underline{x})$.
— $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est l'idéal de $\mathbf{k}[\underline{y}, \underline{z}]$ engendré par les $y_i - z_i$.

6. Enfin, dans le cas où $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \mathbf{k}[\underline{x}]$, autrement dit lorsque $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de présentation finie, il en est de même de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ (voir le théorème 3.9).
$$\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n]/\big\langle \underline{f}(\underline{Y}), \underline{f}(\underline{Z}) \big\rangle = \mathbf{k}[\underline{y}, \underline{z}]$$

Notons que $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a \cdot \gamma) = a\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma) = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma \cdot a)$ pour $\gamma \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ et $a \in \mathbf{A}$.

Vers l'idempotent de séparabilité

6.2. Fait.

1. *L'application $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est un caractère de $\mathbf{A}$-algèbres (pour les deux structures).*
2. *On a $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{Ker}(\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$. Donc $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ et*
$$\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = (\mathbf{A} \otimes 1) \oplus \mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = (1 \otimes \mathbf{A}) \oplus \mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}},$$
et $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est le $\mathbf{A}$-module à gauche (ou à droite) engendré par $\mathrm{Im}\,\Delta_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$.
3. *Dans le cas où $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1, \dots, f_s \rangle = \mathbf{k}[\underline{x}]$ on obtient*
$$\mathbf{k}[\underline{y}, \underline{z}] = \mathbf{k}[\underline{y}] \oplus \langle y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n \rangle = \mathbf{k}[\underline{z}] \oplus \langle y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n \rangle\,.$$

▷ L'inclusion $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} \subseteq \mathrm{Ker}(\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ est claire. En notant Δ pour $\Delta_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$, on a :
$\sum_i a_i \otimes b_i = \big(\sum_i a_i b_i\big) \otimes 1 - \sum_i a_i \cdot \Delta(b_i) = 1 \otimes \big(\sum_i a_i b_i\big) - \sum_i \Delta(a_i) \cdot b_i$.
On en déduit $\mathrm{Ker}(\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ est le $\mathbf{A}$-module (à droite ou à gauche) engendré par $\mathrm{Im}\,\Delta$ et donc qu'il est contenu dans $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$. On conclut avec IV-2.7. □

Exemple. Pour $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X]$, on a $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \simeq \mathbf{k}[Y, Z]$ avec les homomorphismes
$$h(X) \mapsto h(Y) \text{ (à gauche) et } h(X) \mapsto h(Z) \text{ (à droite)}$$
donc $h \cdot g = h(Y)g$ et $g \cdot h = h(Z)g$. On a aussi
$\Delta_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(h) = h(Y) - h(Z)$, $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\big(g(Y, Z)\big) = g(X, X)$ et $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \langle Y - Z \rangle$.
On voit que $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est libre de base $Y - Z$ sur $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, et comme $\mathbf{A}$-module à gauche, il est libre de base $\big((Y - Z)Z^n\big)_{n \in \mathbb{N}}$. ■

6.3. Fait. *On note Δ pour $\Delta_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$.*

1. *Pour $a, b \in \mathbf{A}$ on a $\Delta(ab) = \Delta(a) \cdot b + a \cdot \Delta(b)$. Plus généralement,*
$$\begin{aligned}\Delta(a_1 \cdots a_n) = {} & \Delta(a_1) \cdot a_2 \cdots a_n + a_1 \cdot \Delta(a_2) \cdot a_3 \cdots a_n + \cdots \\ & + a_1 \cdots a_{n-2} \cdot \Delta(a_{n-1}) \cdot a_n + a_1 \cdots a_{n-1} \cdot \Delta(a_n).\end{aligned}$$

2. Si $\mathbf{A}$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre de type fini, engendrée par* $(x_1, \dots, x_r)$, $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est un idéal de type fini de* $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$*, engendré par* $(\Delta(x_1), \dots, \Delta(x_r))$.

3. Sur l'idéal $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$*, les deux structures de* $\mathbf{A}$*-modules à gauche et à droite coïncident. De plus, pour* $\alpha \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ *et* $\gamma \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$*, on a :*

$$\gamma\alpha = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma) \cdot \alpha = \alpha \cdot \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma) \tag{9}$$

▷ *1.* Calcul immédiat. Le point *2* en résulte puisque $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est l'idéal engendré par l'image de Δ, et que pour tout «monôme» en les générateurs, par exemple $x^3y^4z^2$, $\Delta(x^3y^4z^2)$ est égal à une combinaison linéaire (à coefficients dans $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$) des images des générateurs $\Delta(x)$, $\Delta(y)$ et $\Delta(z)$.
3. L'idéal $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ est un $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$-module, donc il est stable pour les deux lois de $\mathbf{A}$-module. Montrons que ces deux structures coïncident. Si $\alpha \in \mathfrak{a}$, pour tout $a \in \mathbf{A}$ on a $0 = \alpha(a \cdot 1 - 1 \cdot a) = a \cdot \alpha - \alpha \cdot a$.
L'égalité (9) découle du fait que $\gamma - \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma) \cdot 1$ et $\gamma - 1 \cdot \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma)$ sont dans $\mathrm{Ker}\, \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$. □

6.4. Lemme. *L'idéal* $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est engendré par un idempotent si, et seulement si,*

$$1 \in \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\big(\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})\big).$$

De plus, si $1 = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\varepsilon)$ *avec* $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$*, alors* ε *est un idempotent, et l'on a*

$$\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}) = \langle \varepsilon \rangle \;\; \textit{et} \;\; \mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \langle 1 - \varepsilon \rangle\,,$$

de sorte que ε *est déterminé de manière unique.*

▷ On omet les $\mathbf{A}/\mathbf{k}$ en indice. Si $\mathrm{J} = \langle \varepsilon \rangle$ avec un idempotent ε, on obtient les égalités $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}) = \langle 1 - \varepsilon \rangle$ et $\mu(1 - \varepsilon) = 1$.
Réciproquement, supposons $1 = \mu(\varepsilon)$ avec $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J})$. Alors $\mu(1 - \varepsilon) = 0$, donc $1 - \varepsilon \in \mathrm{J}$, puis $(1 - \varepsilon)\varepsilon = 0$, i.e. ε est idempotent.
Et l'égalité $1 = (1 - \varepsilon) + \varepsilon$ implique que $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}) = \langle \varepsilon \rangle$ et $\mathrm{J} = \langle 1 - \varepsilon \rangle$. □

Matrice bezoutienne d'un système polynomial

Soient $f_1, \dots, f_s \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]$.
On définit la *matrice bezoutienne* du système $(\underline{f}) = (f_1, \dots, f_s)$ en les variables $(Y_1, \dots, Y_n, Z_1, \dots, Z_n)$ par

$$\mathrm{BZ}_{\underline{Y},\underline{Z}}(\underline{f}) = (b_{ij})_{i \in [\![1..s]\!], j \in [\![1..n]\!]}, \;\; \text{où}$$
$$b_{ij} = \tfrac{f_i(Z_{1..j-1}, Y_j, Y_{j+1..n}) - f_i(Z_{1..j-1}, Z_j, Y_{j+1..n})}{Y_j - Z_j}\,.$$

Ainsi pour $n = 2$, $s = 3$:

$$\mathrm{BZ}_{\underline{Y},\underline{Z}}(f_1, f_2, f_3) = \begin{bmatrix} \frac{f_1(Y_1,Y_2) - f_1(Z_1,Y_2)}{Y_1 - Z_1} & \frac{f_1(Z_1,Y_2) - f_1(Z_1,Z_2)}{Y_2 - Z_2} \\ \frac{f_2(Y_1,Y_2) - f_2(Z_1,Y_2)}{Y_1 - Z_1} & \frac{f_2(Z_1,Y_2) - f_2(Z_1,Z_2)}{Y_2 - Z_2} \\ \frac{f_3(Y_1,Y_2) - f_3(Z_1,Y_2)}{Y_1 - Z_1} & \frac{f_3(Z_1,Y_2) - f_3(Z_1,Z_2)}{Y_2 - Z_2} \end{bmatrix}.$$

Pour $n = 3$, la ligne i de la matrice bezoutienne est :
$\left[\frac{f_i(Y_1,Y_2,Y_3)-f_i(Z_1,Y_2,Y_3)}{Y_1-Z_1} \;\; \frac{f_i(Z_1,Y_2,Y_3)-f_i(Z_1,Z_2,Y_3)}{Y_2-Z_2} \;\; \frac{f_i(Z_1,Z_2,Y_3)-f_i(Z_1,Z_2,Z_3)}{Y_3-Z_3} \right]$.
On a l'égalité :

$$\mathrm{BZ}_{\underline{Y},\underline{Z}}(\underline{f}) \cdot \begin{bmatrix} Y_1 - Z_1 \\ \vdots \\ Y_n - Z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(\underline{Y}) - f_1(\underline{Z}) \\ \vdots \\ f_s(\underline{Y}) - f_s(\underline{Z}) \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

De plus $\mathrm{BZ}_{\underline{X},\underline{X}}(\underline{f}) = \mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f})$, la matrice jacobienne de $(f_1, \ldots, f_s)$.
Considérons maintenant une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{k}[\underline{x}],$$

avec des polynômes f_i vérifiant $f_i(\underline{x}) = 0$ pour tout i. Son algèbre enveloppante est $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n]$ (notations de début de section).
Alors la matrice $\mathrm{BZ}_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f}) \in \mathbb{M}_{s,n}(\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}})$ a pour image par $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ la matrice jacobienne $\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(f_1, \ldots, f_s) \in \mathbb{M}_{s,n}(\mathbf{A})$.
Pour D mineur d'ordre n de $\mathrm{BZ}_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f})$, l'égalité $(\star)$ montre que $D\,(y_j - z_j) = 0$ pour $j \in [\![1..n]\!]$. Autrement dit $D \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$. La matrice bezoutienne nous permet donc de construire des éléments de l'idéal $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$.
En outre, $\delta := \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(D)$ est le mineur correspondant dans $\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(\underline{f})$.
Donnons une application lorsque la transposée ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(\underline{f}) : \mathbf{A}^s \to \mathbf{A}^n$ est surjective, i.e. $1 \in \mathcal{D}_n(\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(\underline{f}))$. On a donc une égalité $1 = \sum_{I \in \mathcal{P}_n} u_I \delta_I$ dans $\mathbf{A}$, où δ_I est le mineur de la matrice extraite de $\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(\underline{f})$ sur les lignes d'indices $i \in I$. En posant $\varepsilon = \sum_{I \in \mathcal{P}_n} u_I D_I \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, on obtient $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\varepsilon) = 1$ avec $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$.
Bilan : ε est ce que l'on appelle l'idempotent de séparabilité de $\mathbf{A}$, et $\mathbf{A}$ est une algèbre séparable, notions définies plus loin (définition 6.10).
Donc, si $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de présentation finie $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle$ et si l'application linéaire ${}^{\mathrm{t}}\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(\underline{f}) : \mathbf{A}^s \to \mathbf{A}^n$ est surjective, alors $\mathbf{A}$ est séparable.
Plus généralement, pour une algèbre de présentation finie $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle$, on va voir que $\mathrm{Coker}\left({}^{\mathrm{t}}\mathrm{JAC}_{\underline{x}}(\underline{f})\right)$ et $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}/\mathrm{J}^2_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ sont des $\mathbf{A}$-modules isomorphes (théorème 6.7).

Dérivations

6.5. Définition. Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre et M un $\mathbf{A}$-module.
On appelle $\mathbf{k}$-*dérivation de* $\mathbf{A}$ *dans* M, une application $\mathbf{k}$-linéaire δ qui vérifie l'égalité de Leibniz

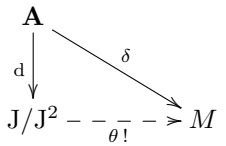
$$\delta(ab) = a\delta(b) + b\delta(a).$$

On note $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, M)$ le $\mathbf{A}$-module des $\mathbf{k}$-dérivations de $\mathbf{A}$ dans M. Une dérivation de $\mathbf{A}$ « tout court » est une dérivation à valeurs dans $\mathbf{A}$. Lorsque le contexte est clair, $\mathrm{Der}(\mathbf{A})$ est une abréviation pour $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$.

Notez que $\delta(1) = 0$ car $1^2 = 1$, et donc $\delta|_{\mathbf{k}} = 0$.

6.6. Théorème et définition. (Dérivation universelle de Kähler)
Le contexte est celui de la définition 6.1.

1. *Sur* J/J^2 *les deux structures de* $\mathbf{A}$*-module (à gauche et à droite) coïncident.*
2. *L'application composée* $\mathrm{d} : \mathbf{A} \to \mathrm{J}/\mathrm{J}^2$*, définie par* $\mathrm{d}(a) = \overline{\Delta(a)}$*, est une* $\mathbf{k}$*-dérivation.*
3. *C'est une* $\mathbf{k}$*-dérivation universelle au sens suivant.*
   Pour tout $\mathbf{A}$*-module* M *et toute* $\mathbf{k}$*-dérivation* $\delta : \mathbf{A} \to M$*, il existe une unique application* $\mathbf{A}$*-linéaire* $\theta : \mathrm{J}/\mathrm{J}^2 \to M$ *telle que* $\theta \circ \mathrm{d} = \delta$*.*

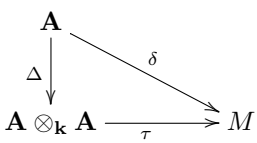


$\mathbf{k}$*-dérivations*

applications $\mathbf{A}$*-linéaires.*

Le $\mathbf{A}$*-module* J/J^2*, noté* $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$*, est appelé le* module des différentielles (de Kähler) de $\mathbf{A}$.

D Les points *1* et *2* sont laissés à la lectrice.
3. L'unicité est claire, montrons l'existence.
On définit l'application $\mathbf{k}$-linéaire $\tau : \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \to M$



$\tau(a \otimes b) = -a\,\delta(b)$.

Le diagramme commute et τ est $\mathbf{A}$-linéaire à gauche.
Il reste à voir que $\tau(\mathrm{J}^2) = 0$, car θ est alors définie par restriction et passage au quotient de τ. On vérifie que $\tau(\Delta(a)\Delta(b)) = b\delta(a) + a\delta(b) - \delta(ab) = 0$.□

On considère maintenant le cas d'une algèbre de présentation finie

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle = \mathbf{k}[\underline{x}].$$

On va utiliser les notations 6.1. On rappelle que la matrice jacobienne du système polynomial est définie comme

$$\mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f}) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \\ f_i \\ \\ \\ f_s \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \frac{\partial f_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial X_1} & \frac{\partial f_2}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial X_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial X_1} & \frac{\partial f_s}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial X_n} \end{bmatrix} \end{array}.$$

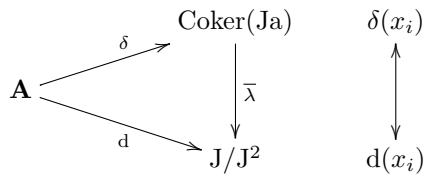
Dans le théorème qui suit, on note $\mathrm{Ja} = {}^{\mathrm{t}}\mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f}) : \mathbf{A}^s \to \mathbf{A}^n$ l'application linéaire définie par la matrice transposée, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$. On définit

$$\begin{aligned} \delta : \mathbf{A} \to \mathrm{Coker}(\mathrm{Ja}) \quad &: \quad g(\underline{x}) \mapsto \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i}(\underline{x})\, \overline{e_i}, \\ \lambda : \mathbf{A}^n \to \mathrm{J}/\mathrm{J}^2 \quad &: \quad e_i \mapsto \mathrm{d}(x_i) = \overline{y_i - z_i}. \end{aligned}$$

6.7. Théorème. (Dérivation universelle via la jacobienne)

1. *L'application δ est une $\mathbf{k}$-dérivation avec $\delta(x_i) = \overline{e_i}$.*
2. *L'application $\mathbf{A}$-linéaire λ induit par passage au quotient un isomorphisme $\overline{\lambda}$ de* $\mathrm{Coker}(\mathrm{Ja})$ *sur* J/J^2.

En conséquence, δ est également une dérivation universelle.



▷ *1.* Laissé au lecteur.

2. On commence par montrer l'inclusion $\mathrm{Im}(\mathrm{Ja}) \subseteq \mathrm{Ker}\,\lambda$, i.e. pour chaque k :

$$\lambda\big(\textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial X_i}(\underline{x})\, e_i\big) = 0.$$

Pour $g \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ on utilise une formule de Taylor à l'ordre 1 :

$$g(\underline{y}) \equiv g(\underline{z}) + \textstyle\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial X_i}(\underline{z})\,(y_i - z_i) \bmod \mathrm{J}^2.$$

Pour $g = f_k$ on a $f_k(\underline{y}) = f_k(\underline{z}) = 0$, donc $\sum_{i=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial X_i}(\underline{z})\,(y_i - z_i) \in \mathrm{J}^2$. Ceci démontre l'égalité ci-dessus en tenant compte de la loi de $\mathbf{A}$-module sur J/J^2. Cela montre que λ passe au quotient, avec

$$\overline{\lambda} : \delta(x_i) = \overline{e_i} \mapsto \mathrm{d}(x_i) = \overline{y_i - z_i}.$$

Par ailleurs, puisque δ est une $\mathbf{k}$-dérivation, la propriété universelle de la dérivation $\mathrm{d} : \mathbf{A} \to \mathrm{J}/\mathrm{J}^2$ nous donne une factorisation $\mathbf{A}$-linéaire

$$\mathrm{J}/\mathrm{J}^2 \to \mathrm{Coker}(\mathrm{Ja}) \ : \ \mathrm{d}(x_i) \mapsto \delta(x_i).$$

Il est clair que les deux applications sont réciproques l'une de l'autre. □

Idempotent de séparabilité d'une algèbre strictement étale

Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie. Pour $a \in \mathbf{A}$, notons $a^\star = a \,.\, \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$. On a une application $\mathbf{k}$-linéaire canonique $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$, composée de l'application linéaire $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{A}^\star \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$, $a \otimes b \mapsto a^\star \otimes b$, et de l'isomorphisme naturel $\mathbf{A}^\star \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \to \mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$.

Si $\mathbf{A}$ est strictement étale ces applications linéaires sont toutes des isomorphismes. Alors, si $\big((x_i),(y_i)\big)$ est un système tracique de coordonnées,

l'élément $\sum_i x_i \otimes y_i$ est indépendant du choix du système car son image dans $\mathrm{End}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A})$ est $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$. En particulier, $\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i y_i \otimes x_i$.
Le théorème suivant dégage les propriétés caractéristiques de cet élément $\sum_i x_i \otimes y_i$. Ces propriétés conduisent à la notion d'algèbre séparable.

6.8. Théorème. (Idempotent de séparabilité d'une algèbre strictement étale) *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre strictement étale et* $\big((x_i),(y_i)\big)$ *un système tracique de coordonnées de* $\mathbf{A}$*. Alors, l'élément* $\varepsilon = \sum_i x_i \otimes y_i \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ *vérifie les conditions du lemme 6.4. En particulier,* ε *est idempotent et l'on a*

$$\sum\nolimits_i x_i y_i = 1, \quad a \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot a \quad \forall a \in \mathbf{A}.$$

NB : on démontre la réciproque (pour les algèbres strictement finies) un peu plus loin (théorème 6.13).

Preuve dans le cas galoisien (à lire après le théorème 7.11).
Soit $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ une algèbre galoisienne. Puisque le résultat à prouver est indépendant du système tracique de coordonnées, on peut supposer que les familles (x_i) et (y_i) sont deux systèmes d'éléments de $\mathbf{A}$ vérifiant les conditions du point *2* du théorème d'Artin 7.11.
Dire que $\mu(\varepsilon) = 1$ consiste à dire que $\sum_i x_i y_i = 1$, ce que vérifie $\big((x_i),(y_i)\big)$.
Pour montrer que $\sum_i a x_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes a y_i$, il suffit d'appliquer ψ_G ; on note $(g_\sigma)_\sigma$ l'image du membre gauche, $(d_\sigma)_\sigma$ l'image du membre droit. On obtient, en notant δ le symbole de Kronecker :

$$g_\sigma = \textstyle\sum_i a x_i \sigma(y_i) = a\delta_{\sigma,\mathrm{Id}}, \qquad d_\sigma = \sum_i x_i \sigma(a y_i) = \sigma(a)\delta_{\sigma,\mathrm{Id}}.$$

On a bien l'égalité puisque les composantes des deux familles (d_σ) et (g_σ) sont nulles sauf en l'indice $\sigma = \mathrm{Id}$, indice pour lequel leur valeur (commune) est a.
Remarquons que ε est égal à l'élément $\varepsilon_{\mathrm{Id}}$ introduit dans le lemme 7.10. Son image par φ_G est l'idempotent e_{Id}, ce qui confirme que ε est idempotent.□

Preuve (générale) dans le cas strictement étale.
On note Tr pour $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ et $m_\varepsilon : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ la multiplication par ε. On a :

$$\mathrm{Tr}(ab) = \sum\nolimits_i \mathrm{Tr}(a y_i)\,\mathrm{Tr}(b x_i), \qquad a, b \in \mathbf{A}. \tag{$\star$}$$

En effet, cela découle facilement de l'égalité $a = \sum_i \mathrm{Tr}(a y_i) x_i$.
On réécrit $(\star)$ comme l'égalité des deux formes $\mathbf{k}$-linéaires, $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{k}$:

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} \circ \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{k}} \circ m_\varepsilon. \tag{$*$}$$

Montrons que $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J})$. Soient $z \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, $z' \in \mathrm{J}$. En évaluant l'égalité $(*)$ en zz', on obtient :

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\left(\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(zz')\right) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{k}}(\varepsilon z z').$$

Mais $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(zz') = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z)\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(z') = 0$ car $z' \in \mathrm{J} = \mathrm{Ker}\,\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$. On en déduit que $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{k}}(\varepsilon z z') = 0$ pour tout $z \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$. Comme $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{k}}$ est non

dégénérée on obtient $\varepsilon z' = 0$. Ainsi $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J})$.
Il reste à montrer que $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\varepsilon) = 1$, i.e. $s = \sum_i x_i y_i = 1$.
L'égalité $\mathrm{Tr}(x) = \sum_i \mathrm{Tr}(x x_i y_i)$ (fait V-8.9) exprime que $\mathrm{Tr}\big((1-s)x\big) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{A}$ donc $s = 1$. □

Algèbres séparables

6.9. Théorème. *Pour une* $\mathbf{k}$*-algèbre* $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est projectif comme* $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$*-module.*
2. $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est engendré par un idempotent de* $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$*.*
3. $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *est de type fini et idempotent.*
4. $1 \in \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\big(\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})\big)$*.*
5. *Il existe* $n \in \mathbb{N}$*, et* $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{A}$ *tels que* $\sum_i x_i y_i = 1$ *et pour tout* $a \in \mathbf{A}$*,* $\sum_i a x_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes a y_i$*.*

Dans le cas où $\mathbf{A}$ *est de type fini, on a aussi l'équivalence avec :*

6. $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = 0$.[5]

On note alors $\varepsilon_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *l'unique idempotent qui engendre l'idéal* $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$.

▷ Puisque $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$, les points *1* et *2* sont équivalents en application du lemme V-7.5 concernant les modules monogènes projectifs. Les points *2* et *3* sont équivalents en application du lemme II-4.6 sur les idéaux idempotents de type fini. Le lemme 6.4 donne l'équivalence de *2* et *4*.
3 ⇔ *6*. Si $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini, alors $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est un idéal de type fini de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, donc la condition *3* se réduit à : $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est idempotent, i.e. $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = 0$.
Enfin *5* est la forme concrète de *4*. □

6.10. Définition. On appelle *algèbre séparable* une algèbre qui vérifie les propriétés équivalentes énoncées au théorème 6.9. L'idempotent $\varepsilon_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ s'appelle *l'idempotent de séparabilité* de $\mathbf{A}$.

Commentaire. Il faut noter que Bourbaki utilise une notion d'extension séparable pour les corps assez différente de la définition ci-dessus. En mathématiques classiques les algèbres sur un corps $\mathbf{K}$ «séparables au sens de la définition 6.10» sont les algèbres «finies et séparables au sens de Bourbaki» (voir le théorème 6.14). Beaucoup d'auteurs suivent Bourbaki au moins pour les extensions algébriques de corps, qu'elles soient finies ou pas. Dans le cas d'une $\mathbf{K}$-algèbre algébrique sur un corps discret $\mathbf{K}$, la définition à la

5. Lorsque $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle = \mathbf{k}[\underline{x}]$, le théorème 6.7 donne la condition suivante pour $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = 0$: la matrice $\mathrm{Ja}(\underline{x})$, transposée de la matrice jacobienne du système, est surjective, i.e. $1 \in \mathcal{D}_n(\mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f})(\underline{x}))$.

Bourbaki signifie que tout élément de l'algèbre annule un polynôme unitaire séparable de $\mathbf{K}[T]$. ∎

6.11. Fait. (Stabilité des algèbres séparables par extension des scalaires)
Soit $\imath : \mathbf{k} \to \mathbf{A}$ et $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ deux $\mathbf{k}$-algèbres et $\mathbf{A}' = \rho_\star(\mathbf{A})$.
On a un isomorphisme canonique $\rho_\star(\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}) \to \mathbf{A}'^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}'}$ et le diagramme ci-dessous commute

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} & \xrightarrow{\rho^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}} & \mathbf{A}'^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}'} \\ \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}} & & \downarrow{\scriptstyle \mu_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}'}} \\ \mathbf{A} & \xrightarrow{\rho} & \mathbf{A}' \end{array}$$

En particulier, une algèbre séparable reste séparable par extension des scalaires.

D La démonstration est laissée à la lectrice. □

Nous montrons maintenant la réciproque du théorème 6.8, ce qui nécessite un lemme préparatoire.

6.12. Lemme. *Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie et $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ son algèbre enveloppante.*

1. *$\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre à gauche strictement finie dont la trace est donnée par $\gamma_g \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} \otimes \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ (où $\gamma_g : \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \to \mathbf{A}$ est l'isomorphisme canonique), i.e. pour $\alpha = \sum_i a_i \otimes b_i$:*
$$\mathrm{Tr}_{(\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{A})_{\mathrm{g}}}(\alpha) = \textstyle\sum_i a_i \, \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(b_i).$$
De même, $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre à droite strictement finie dont la trace est donnée par $\gamma_d \circ (\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{A}})$, i.e. $\mathrm{Tr}_{(\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{A})_{\mathrm{d}}}(\alpha) = \sum_i \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a_i) b_i$.
2. *Sur $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$, les formes $\mathbf{A}$-linéaires $\mathrm{Tr}_{(\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{A})_{\mathrm{g}}}$, $\mathrm{Tr}_{(\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}/\mathbf{A})_{\mathrm{d}}}$ et $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ coïncident, i.e. si $\alpha = \sum_i a_i \otimes b_i \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$:*
$$\textstyle\sum_i a_i b_i = \sum_i a_i \, \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(b_i) = \sum_i \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(a_i) b_i.$$

D *1.* Il s'agit d'un résultat structurel général : la trace se conserve par extension des scalaires (voir fait V-8.8). Autrement dit si $\mathbf{k}'$ est une $\mathbf{k}$-algèbre, $\mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}'$-algèbre strictement finie dont la trace est $\gamma \circ (\mathrm{Id}_{\mathbf{k}'} \otimes \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ où $\gamma : \mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ est l'isomorphisme canonique.
2. De manière générale, sous les hypothèses que E est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, $x \in E$, $\nu \in E^\star$ et $u = \theta_E(\nu \otimes x) \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(E)$, on obtient l'égalité $\mathrm{Tr}_E(u) = \nu(x)$ (voir le fait V-8.9).
On applique ceci à $E = \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, $x = \alpha \in E$ et $\nu = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} \in E^\star$, en notant qu'alors $u = \theta_E(\nu \otimes \alpha) = \mu_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}, \alpha}$. En effet, d'après le point *3* du fait 6.3, on a pour $\gamma \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, $\gamma\alpha = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\gamma) \cdot \alpha = \theta_E(\nu \otimes \alpha)(\gamma)$. □

6.13. Théorème. (Algèbres strictement étales et algèbres séparables)
Toute $\mathbf{k}$*-algèbre séparable et strictement finie* $\mathbf{A}$ *est strictement étale. Plus précisément, si* $\varepsilon_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \sum x_i \otimes y_i \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ *est l'idempotent de séparabilité de* $\mathbf{A}$*, alors* $\big((x_i),(y_i)\big)$ *est un système tracique de coordonnées de* $\mathbf{A}/\mathbf{k}$*.*
En résumé une algèbre strictement finie est séparable si, et seulement si, elle est strictement étale.

NB : précisément, le lien entre les deux notions est obtenu par la relation qui lie l'idempotent de séparabilité et les systèmes de coordonnées, comme cela ressort du théorème direct 6.8 et du théorème réciproque 6.13.

▷ Soit $x \in \mathbf{A}$, alors $(x \otimes 1)\varepsilon_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \sum_i xx_i \otimes y_i$ est dans $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$, donc d'après le lemme 6.12, on a $\sum_i xx_iy_i = \sum_i \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x_ix)y_i$.
Et comme $\sum_i x_iy_i = 1$, cela donne $x = \sum_i \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x_ix)y_i$. On conclut par la caractérisation des algèbres strictement étales donnée dans le fait 5.5.□

Le théorème suivant renforce le théorème précédent et montre que l'existence d'un idempotent de séparabilité est une condition de finitude très forte.

6.14. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre séparable.*
On suppose que $\mathbf{A}$ *possède un* système de coordonnées*, dans le sens suivant : on a un ensemble discret* I*, une famille* $(a_i)_{i\in I}$ *dans* $\mathbf{A}$ *et une famille* $(\alpha_i)_{i\in I}$ *dans le* $\mathbf{k}$*-module dual* $\mathbf{A}^\star = \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{k})$*, telles que pour tout* $x \in \mathbf{A}$ *on ait*

$$x = \textstyle\sum_{i\in J_x} \alpha_i(x)a_i,$$

ici J_x *est une partie finie de* I*, et tous les* $\alpha_i(x)$ *pour* $i \in I \setminus J_x$ *sont nuls. Alors,* $\mathbf{A}$ *est strictement finie, donc strictement étale.*
C'est par exemple le cas si $\mathbf{k}$ *est un corps discret et si* $\mathbf{A}$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre de présentation finie.*

▷ Concernant le cas particulier, l'algèbre quotient possède une base finie ou dénombrable de monômes, d'après la théorie des bases de Gröbner.
Soit $\varepsilon = \sum_{k=1}^r b_k \otimes c_k$ l'idempotent de séparabilité. On a $\varepsilon \cdot x = x \cdot \varepsilon$ pour tout $x \in \mathbf{A}$, et $\sum_{k=1}^r b_kc_k = 1$.
Pour $\alpha \in \mathbf{A}^\star$ et $x \in \mathbf{A}$, en appliquant $1 \otimes \alpha$ à $x \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot x$ on obtient :

$$\textstyle\sum_k xb_k\alpha(c_k) = \sum_k b_k\alpha(xc_k).$$

En notant J la partie finie $J = \bigcup J_{c_k}$, on obtient pour chaque k

$$c_k = \textstyle\sum_{i\in J} \alpha_i(c_k)a_i.$$

On écrit alors :

$$x = \textstyle\sum_{k\in[\![1..r]\!]} xb_kc_k = \sum_{k\in[\![1..r]\!],i\in J} xb_k\alpha_i(c_k)a_i = \sum_{i\in J,k\in[\![1..r]\!]} \alpha_i(c_kx)b_ka_i.$$

Ce qui donne maintenant un système de coordonnées fini pour $\mathbf{A}$, avec les éléments b_ka_i et les formes $x \mapsto \alpha_i(c_kx)$ pour $(i,k) \in J \times [\![1..r]\!]$. □

Commentaire. Notons que lorsque l'on a un système de coordonnées pour un module, le module est projectif au sens usuel. La définition d'un système de coordonnées pour un module M revient à dire que M est isomorphe à un facteur direct du module $\mathbf{A}^{(I)}$. Ce dernier module, librement engendré

par I, est projectif parce que I est discret.
En mathématiques classiques, tout module projectif possède un système de coordonnées, parce que tous les ensembles sont discrets, donc le théorème précédent s'applique : toute $\mathbf{k}$-algèbre séparable qui est un $\mathbf{k}$-module projectif est strictement finie. Par la même occasion *toute algèbre séparable sur un corps discret ou sur un anneau zéro-dimensionnel réduit est strictement finie.* ∎

Dans le cas d'une algèbre de présentation finie sur un corps discret, les théorèmes 6.9 et 6.14 donnent le résultat suivant.

6.15. Corollaire. *Pour $f_1, \ldots, f_s \in \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'algèbre quotient $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{x}]$ est strictement étale.*
2. *L'algèbre quotient est séparable.*
3. *La matrice $\mathrm{Ja}(\underline{x})$, transposée de la matrice jacobienne du système polynomial, est surjective.*

Nous allons maintenant montrer qu'une algèbre séparable ressemble beaucoup à une algèbre diagonale, y compris dans le cas où l'anneau de base est quelconque.
Considérons la $\mathbf{k}$-algèbre diagonale $\mathbf{k}^n$. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ sa base canonique et $p_i : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}$ la forme coordonnée relative à e_i. Alors on a :

$e_i \in \mathbb{B}(\mathbf{k}^n)$, $p_i \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n, \mathbf{k})$, $p_i(e_i) = 1$ et $xe_i = p_i(x)e_i \ \forall x \in \mathbf{k}^n$.

Il s'agit en quelque sorte de généraliser cela aux algèbres séparables.

6.16. Lemme. (Caractères d'une algèbre séparable)
Soit $\mathbf{A}$ une $\mathbf{k}$-algèbre séparable avec $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$.

1. *Notons $\imath : \mathbf{k} \to \mathbf{A}$ l'injection canonique. Si $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$, $\imath \circ \varphi$ est un projecteur d'image $\mathbf{k}.1$, donc*
$$\mathbf{A} = \mathbf{k}.1 \oplus \mathrm{Ker}\,\varphi \quad \textit{et} \quad \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \imath \circ \varphi) = \mathrm{Ker}\,\varphi.$$
En fait l'idéal $\mathrm{Ker}\,\varphi$ est engendré par un idempotent de $\mathbf{A}$, on notera ε_φ l'idempotent complémentaire.
2. *Pour $\varphi, \varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$, on a $\varphi'(\varepsilon_\varphi) = \varphi(\varepsilon_{\varphi'})$.*
Cet élément, noté $e_{\{\varphi,\varphi'\}}$ est un idempotent de $\mathbf{k}$ et l'on a :
$$\varepsilon_\varphi\varepsilon_{\varphi'} = e_{\{\varphi,\varphi'\}}\varepsilon_\varphi = e_{\{\varphi,\varphi'\}}\varepsilon_{\varphi'} = \varphi(\varepsilon_\varphi\varepsilon_{\varphi'}) = \varphi'(\varepsilon_\varphi\varepsilon_{\varphi'}),$$
$$\langle \mathrm{Im}(\varphi - \varphi') \rangle_{\mathbf{k}} = \left\langle 1 - e_{\{\varphi,\varphi'\}} \right\rangle_{\mathbf{k}} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Ann}_{\mathbf{k}}(\varphi - \varphi') = \left\langle e_{\{\varphi,\varphi'\}} \right\rangle_{\mathbf{k}}.$$
3. *En conséquence on a les équivalences :*
$$e_{\{\varphi,\varphi'\}} = 1 \iff \varepsilon_\varphi = \varepsilon_{\varphi'} \iff \varphi = \varphi', \ \textit{et}$$
$$e_{\{\varphi,\varphi'\}} = 0 \iff \varepsilon_\varphi\varepsilon_{\varphi'} = 0.$$
4. *Si $\mathbf{k}$ est connexe, deux idempotents ε_φ, (pour $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$), sont égaux ou orthogonaux.*

D Soit $\varepsilon_{\mathbf{A/k}} = \sum x_i \otimes y_i$. On sait que $a \cdot \varepsilon_{\mathbf{A/k}} = \varepsilon_{\mathbf{A/k}} \cdot a$ pour tout $a \in \mathbf{A}$, que $\sum x_i \otimes y_i = \sum y_i \otimes x_i$ et que $\sum_i x_i y_i = 1$.
1. La première affirmation est valable pour tout caractère de toute algèbre $\mathbf{A}$ (proposition IV-2.7). Il reste à voir que $\operatorname{Ker}\varphi$ est engendré par un idempotent. On considère l'homomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\nu = \mu_{\mathbf{A/k}} \circ (\varphi \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}) : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \mathbf{A}$, et l'élément $\varepsilon = \nu(\varepsilon_{\mathbf{A/k}})$. Ainsi $\varepsilon = \sum_i \varphi(x_i) y_i$ est un idempotent et l'on obtient les égalités

$$\varphi(\varepsilon) = \textstyle\sum_i \varphi(x_i)\varphi(y_i) = \varphi(\sum_i x_i y_i) = \varphi(1) = 1.$$

Donc $1 - \varepsilon \in \operatorname{Ker}\varphi$.
En appliquant ν à l'égalité $\sum_i a x_i \otimes y_i = \sum_i x_i \otimes a y_i$, on obtient $\varphi(a)\varepsilon = a\varepsilon$. Donc $a \in \operatorname{Ker}\varphi$ implique $a = (1-\varepsilon)a$, et $\operatorname{Ker}\varphi = \langle 1 - \varepsilon \rangle$.
2. On a pour $a \in \mathbf{A}$:

$$\varphi'(a)\varphi'(\varepsilon_\varphi) = \varphi'(a\varepsilon_\varphi) = \varphi'(\varphi(a)\varepsilon_\varphi) = \varphi(a)\varphi'(\varepsilon_\varphi). \qquad (\star)$$

Pour $a = \varepsilon_{\varphi'}$, on obtient $\varphi'(\varepsilon_\varphi) = \varphi(\varepsilon_{\varphi'})\varphi'(\varepsilon_\varphi)$.
Par symétrie, $\varphi(\varepsilon_{\varphi'}) = \varphi'(\varepsilon_\varphi)$. Notons e cet idempotent de $\mathbf{k}$. Par définition, on a $a\varepsilon_\varphi = \varphi(a)\varepsilon_\varphi$. En faisant $a = \varepsilon_{\varphi'}$, on obtient $\varepsilon_{\varphi'}\varepsilon_\varphi = e\varepsilon_\varphi$.
Enfin, notons $\mathfrak{a} = \langle \operatorname{Im}(\varphi - \varphi') \rangle$. La relation $(\star)$ montre que $\mathfrak{a}e = 0$. D'autre part $1 - e = (\varphi - \varphi')(\varepsilon_\varphi) \in \mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{a} = \langle 1 - e \rangle_{\mathbf{k}}$ et $\operatorname{Ann}_{\mathbf{k}}(\mathfrak{a}) = \langle e \rangle_{\mathbf{k}}$.
3 et *4*. Découlent du point précédent. □

6.17. Lemme. (Sous-algèbre séparable d'une extension diagonale)
Soit $\mathbf{k}$ *un anneau* connexe non trivial, $\mathbf{B} = \mathbf{k}^n$, $p_i : \mathbf{B} \to \mathbf{k}$ *la i-ième projection canonique,* e_i *l'idempotent défini par* $\operatorname{Ker} p_i = \langle 1 - e_i \rangle$ $(i \in [\![1..n]\!])$.
Pour une partie finie I *de* $[\![1..n]\!]$ *on note* $e_I = \sum_{i \in I} e_i$.
Soit $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre séparable avec* $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{k}^n$ *et* π_i *la restriction de* p_i *à* $\mathbf{A}$ *pour* $i \in [\![1..n]\!]$.

1. *On considère la relation d'équivalence sur* $[\![1..n]\!]$ *définie par* $\pi_i = \pi_j$. *La partition correspondante* $\mathcal{P}$ *est un ensemble fini de parties finies de* $[\![1..n]\!]$. *Pour* $J \in \mathcal{P}$ *on note* π_J *la valeur commune des* π_j *pour* $j \in J$.
2. $\mathbf{A}$ *est un* $\mathbf{k}$*-module-libre de base* $\{ e_J \mid J \in \mathcal{P} \}$.
3. $\mathbf{A}^\star$ *est un* $\mathbf{k}$*-module-libre de base* $\{ \pi_J \mid J \in \mathcal{P} \} = \operatorname{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$.

D *1.* Comme $\mathbf{k}$ est connexe non trivial, tout idempotent de $\mathbf{B}$ est de la forme e_I pour une unique partie finie I de $[\![1..n]\!]$.
Soit $i \in [\![1..n]\!]$. D'après le lemme 6.16 il existe un et un seul idempotent ε_i de $\mathbf{A}$ tel que $\pi_i(\varepsilon_i) = 1$ et $a\varepsilon_i = \pi_i(a)\varepsilon_i$ pour tout $a \in \mathbf{A}$. Cet idempotent est aussi un idempotent de $\mathbf{B}$ donc de la forme e_{J_i} pour une partie finie J_i de $[\![1..n]\!]$. Puisque $\pi_i(\varepsilon_i) = p_i(e_{J_i}) = 1$, on a $i \in J_i$, et la réunion des J_i est $[\![1..n]\!]$. Deux J_i distincts sont disjoints d'après le dernier point du lemme 6.16. Les J_i forment donc une partition finie formée de parties finies de $[\![1..n]\!]$.

Si $\pi_i = \pi_j$, alors $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ donc $J_i = J_j$. Si $J_i = J_j$, alors $\varepsilon_i = \varepsilon_j$ et $\pi_i(\varepsilon_j) = 1$. Le point *2* du lemme 6.16 donne $1 \in \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(\pi_i - \pi_j)$, donc $\pi_i = \pi_j$.
2. Résulte du point *1.*
3. Soit $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$. Les $\varphi(e_J)$ sont des idempotents de $\mathbf{k}$. Comme $\mathbf{k}$ est connexe, on a $\varphi(e_J) = 0$ ou 1. Mais les $(e_J)_{J\in\mathcal{P}}$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux, donc il y a un seul $J \in \mathcal{P}$ pour lequel $\varphi(e_J) = 1$ et par suite $\varphi = \pi_J$. Le reste est immédiat. □

7. Algèbres galoisiennes, théorie générale

Dans la théorie mise au point par Artin, on considère un groupe fini G d'automorphismes d'un corps discret $\mathbf{L}$, on appelle $\mathbf{K}$ le sous-corps des points fixes de G et l'on démontre que $\mathbf{L}$ est une extension galoisienne de $\mathbf{K}$, avec G pour groupe de Galois.
Dans la section présente on donne la généralisation de la théorie d'Artin pour des anneaux commutatifs au lieu de corps discrets. Une bonne idée de « comment cela peut fonctionner » est déjà donnée par le petit exemple significatif suivant, qui montre que l'hypothèse « corps discret » n'est pas essentielle.

Un petit exemple pour commencer
Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{A})$ un automorphisme d'ordre 3, G le groupe qu'il engendre. Supposons qu'il existe $x \in \mathbf{A}$ tel que $\sigma(x) - x \in \mathbf{A}^\times$. Posons $\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$ le sous-anneau des points fixes. Alors, $(1, x, x^2)$ est une base de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}$. En effet, soit V la matrice de Vandermonde

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & \sigma(x) & \sigma(x^2) \\ 1 & \sigma^2(x) & \sigma^2(x^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad x_i = \sigma^i(x).$$

On pose $\varepsilon = \sigma(x) - x$. Alors, $\det(V) = (x_1 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_0)$ est inversible :

$$\det(V) = \big(\sigma(x) - x\big) \cdot \sigma\big(\sigma(x) - x\big) \cdot \sigma^2\big(x - \sigma(x)\big) = -\varepsilon\sigma(\varepsilon)\sigma^2(\varepsilon).$$

Pour $y \in \mathbf{A}$, on cherche à écrire $y = \lambda_0 + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2$ avec les $\lambda_i \in \mathbf{k}$. On a alors nécessairement :

$$\begin{bmatrix} y \\ \sigma(y) \\ \sigma^2(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & \sigma(x) & \sigma(x^2) \\ 1 & \sigma^2(x) & \sigma^2(x^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Or le système linéaire ci-dessus a une et une seule solution dans $\mathbf{A}$. Puisque la solution est unique, $\sigma(\lambda_i) = \lambda_i$, i.e. $\lambda_i \in \mathbf{k}$ $(i = 0, 1, 2)$.
Finalement, $(1, x, x^2)$ est bien une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}$. ∎

Correspondance galoisienne, faits évidents

Ceci peut être considéré comme une reprise de la proposition III-6.10.

7.1. Fait. (Correspondance galoisienne, faits évidents)
On considère un groupe fini G d'automorphismes d'un anneau $\mathbf{A}$. On utilise les notations définies en III-6.8 : en particulier, $\mathbf{A}^H = \mathrm{Fix}_{\mathbf{A}}(H)$ pour un sous-groupe H de G. On pose $\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$.

1. *Si $H \subseteq H'$ sont deux sous-groupes de G, alors $\mathbf{A}^H \supseteq \mathbf{A}^{H'}$, et si H est le sous-groupe engendré par $H_1 \cup H_2$, alors $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{H_1} \cap \mathbf{A}^{H_2}$.*
2. *$H \subseteq \mathrm{Stp}(\mathbf{A}^H)$ pour tout sous-groupe H de G.*
3. *Si $\sigma \in G$ et H est un sous-groupe de G alors*
$$\sigma(\mathbf{A}^H) = \mathbf{A}^{\sigma H \sigma^{-1}}.$$
4. *Si $\mathbf{C} \subseteq \mathbf{C}'$ sont deux sous-$\mathbf{k}$-algèbres de $\mathbf{A}$, alors $\mathrm{Stp}(\mathbf{C}) \supseteq \mathrm{Stp}(\mathbf{C}')$, et si $\mathbf{C}$ est la sous-$\mathbf{k}$-algèbre engendrée par $\mathbf{C}_1 \cup \mathbf{C}_2$, alors*
$$\mathrm{Stp}(\mathbf{C}) = \mathrm{Stp}(\mathbf{C}_1) \cap \mathrm{Stp}(\mathbf{C}_2).$$
5. *$\mathbf{C} \subseteq \mathbf{A}^{\mathrm{Stp}(\mathbf{C})}$ pour toute sous-$\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$.*
6. *Après un aller-retour-aller on retombe sur l'arrivée du premier aller :*
$$\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{\mathrm{Stp}(\mathbf{A}^H)} \quad \textit{et} \quad \mathrm{Stp}(\mathbf{C}) = \mathrm{Stp}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{Stp}(\mathbf{C})}\right).$$

D Le dernier point est une conséquence directe des précédents, qui sont immédiats. Comme dans toutes les « dualités » de ce type. □

Une définition naturelle

Notons $\mathcal{G} = \mathcal{G}_G$ l'ensemble des sous-groupes finis (i.e., détachables) de G, et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_G$ l'ensemble des sous-anneaux de $\mathbf{A}$ qui sont de la forme $\mathrm{Fix}(H)$ pour un $H \in \mathcal{G}$. Considérons les restrictions de Fix et Stp aux ensembles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}$. Nous sommes intéressés pour déterminer dans quelles conditions on obtient ainsi deux bijections réciproques l'une de l'autre entre $\mathcal{G}$ et $\mathcal{A}$, et à donner une caractérisation agréable des sous-algèbres appartenant à $\mathcal{A}$.
Dans le cas où $\mathbf{A}$ est un corps discret, la théorie d'Artin montre que l'on se trouve dans une situation galoisienne classique : $\mathbf{A}$ est une extension galoisienne du sous-corps $\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$, G est le groupe de Galois de cette extension et $\mathcal{A}$ est l'ensemble de toutes les sous-extensions strictement finies de $\mathbf{A}$.
Cette théorie « d'Artin-Galois » a ensuite été généralisée à un anneau commutatif arbitraire $\mathbf{A}$, à condition d'imposer certaines contraintes au groupe G et aux sous-$\mathbf{k}$-algèbres de $\mathbf{A}$.
En fait, on veut que la notion correspondante d'algèbre galoisienne soit suffisamment stable. En particulier, on souhaite que lorsque l'on remplace $\mathbf{k}$ par un quotient non trivial $\mathbf{k}/\mathfrak{a}$ et $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}/\mathfrak{a}\mathbf{A}$, on maintienne la notion d'algèbre galoisienne. Il ne faut donc pas que deux automorphismes de $\mathbf{A}$

présents dans G puissent devenir un seul automorphisme en passant au quotient.
Ceci conduit à la définition suivante.

7.2. Définition. *(Applications bien séparées, automorphismes séparants, algèbres galoisiennes)*

1. Deux applications σ, σ' d'un ensemble E dans un anneau $\mathbf{A}$ sont dites *bien séparées* si
$$\langle\, \sigma(x) - \sigma'(x)\ ;\ x \in E \,\rangle_{\mathbf{A}} = \langle 1 \rangle\,.$$
2. Un automorphisme τ de $\mathbf{A}$ est dit *séparant* s'il est bien séparé de $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$.
3. Un groupe fini G qui opère sur $\mathbf{A}$ est dit *séparant*, si les éléments $\sigma \neq 1_G$ de G sont séparants (il revient au même de dire que toute paire d'éléments distincts de G donne deux automorphismes bien séparés).
On dira aussi que G opère *de façon séparante* sur $\mathbf{A}$.
4. Une *algèbre galoisienne* est par définition un triplet $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$, où $\mathbf{A}$ est un anneau, G est un groupe fini opérant sur $\mathbf{A}$ de façon séparante, et $\mathbf{k} = \mathrm{Fix}(G)$.

Commentaires.
1) Pour ce qui concerne la définition d'une algèbre galoisienne, nous n'avons pas voulu interdire un groupe fini opérant sur l'anneau trivial[6], et en conséquence nous ne définissons pas G comme un groupe d'automorphismes de $\mathbf{A}$, mais comme un groupe fini opérant sur $\mathbf{A}$. En fait, la définition implique que G opère toujours de manière fidèle sur $\mathbf{A}$ (et donc s'identifie à un sous-groupe de $\mathrm{Aut}(\mathbf{A})$) sauf dans le cas où l'anneau est trivial. Ceci présente plusieurs avantages.
D'une part, une algèbre galoisienne reste galoisienne, *avec le même groupe* G, pour toute extension des scalaires : il arrive que l'on ne sache pas si une extension des scalaires $\mathbf{k} \to \mathbf{k}'$, qui débarque au cours d'une démonstration, est triviale ou non.
D'autre part, le fait de ne pas changer de groupe est de toute manière plus confortable, pour n'importe quelle extension des scalaires.
2) Nous avons imposé la condition $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$, qui n'est pas dans le style catégorique usuel. Le lecteur qui le désire pourra rétablir une définition plus catégorique, en disant que le morphisme $\mathbf{k} \to \mathbf{A}$ établit un isomorphisme entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{A}^G$. Cela serait parfois nécessaire, par exemple dans le point *2* du fait 7.3. ∎

6. L'unique automorphisme de l'anneau trivial est séparant, et tout groupe fini opère sur l'anneau trivial de manière à en faire une algèbre galoisienne.

Exemples.
1) Soit $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ une extension galoisienne de corps discrets.
Alors $\big(\mathbf{K}, \mathbf{L}, \mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K})\big)$ est une algèbre galoisienne.
2) Nous démontrerons plus loin (théorème VII-4.10) que pour un polynôme unitaire $f \in \mathbf{k}[T]$ séparable, le triplet $(\mathbf{k}, \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}, \mathrm{S}_n)$ est une algèbre galoisienne.
3) Un automorphisme σ d'un anneau local $\mathbf{A}$ est séparant si, et seulement si, il existe un $x \in \mathbf{A}$ tel que $x - \sigma(x)$ est inversible. ∎

Les notions d'automorphisme séparant et d'algèbre galoisienne ont été mises au point de manière à vérifier les faits fondamentaux suivants.

7.3. Fait.

1. *Un automorphisme séparant σ d'un anneau $\mathbf{A}$ fournit par extension des scalaires $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un automorphisme séparant $\rho_\star(\sigma)$ de $\mathbf{B}$.*
2. *Si $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ est une algèbre galoisienne et si $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ est un homomorphisme d'anneaux, alors $(\mathbf{k}', \rho_\star(\mathbf{A}), G)$ est une algèbre galoisienne.*

▷ Le point *1*, ainsi que le point *2* dans le cas d'une extension des scalaires par localisation, sont faciles et laissés à la lectrice.
La démonstration du cas général pour le point *2* devra attendre le théorème 7.13. □

7.4. Principe local-global concret. (Algèbres galoisiennes)
Soit G un groupe fini opérant sur une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$.
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{k}$.
Alors, $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ est une algèbre galoisienne si, et seulement si, chaque triplet $(\mathbf{k}_{S_i}, \mathbf{A}_{S_i}, G)$ est une algèbre galoisienne.

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

Lemme de Dedekind

Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif. Considérons l'$\mathbf{A}$-algèbre puissance m-ième $\mathbf{A}^m$. Ses éléments seront vus comme des vecteurs colonnes et les lois sont les lois produit :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \star b_1 \\ \vdots \\ a_m \star b_m \end{bmatrix}, \quad a \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_1 \\ \vdots \\ aa_m \end{bmatrix}.$$

7.5. Lemme. *Soit C une partie finie de $\mathbf{A}^m$ qui « sépare les lignes » : i.e., $\langle x_i - x_j \,;\, x \in C\rangle_{\mathbf{A}} = \langle 1\rangle$ (pour $i \neq j \in [\![1..m]\!]$). Alors, l'$\mathbf{A}$-algèbre engendrée par C est égale à $\mathbf{A}^m$.*

D La remarque fondamentale est que dans le $\mathbf{A}$-module engendré par $1_{\mathbf{A}^m}$ et $x = {}^t[\, x_1 \ \cdots \ x_m \,]$ il y a les vecteurs
$x - x_2\, 1_{\mathbf{A}^m} = {}^t[\, x_1 - x_2 \ 0 \ * \ \cdots \ * \,]$ et $-x + x_1\, 1_{\mathbf{A}^m} = {}^t[\, 0 \ x_1 - x_2 \ * \ \cdots \ * \,]$.
Donc lorsque l'on suppose que l'idéal engendré par les $x_1 - x_2$ contient 1, cela implique que dans le $\mathbf{A}$-module engendré par C il y a un vecteur $g^{1,2}$ du type ${}^t[\, 1 \ 0 \ g_3^{1,2} \ \cdots \ g_m^{1,2} \,]$ et un vecteur $g^{2,1}$ du type ${}^t[\, 0 \ 1 \ g_3^{2,1} \ \cdots \ g_m^{2,1} \,]$. Même chose en remplaçant 1 et 2 par deux entiers $i \neq j \in [\![1..m]\!]$.
On en déduit que ${}^t[\, 1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \,] = g^{1,2} \cdot g^{1,3} \cdots g^{1,m}$, est dans l'$\mathbf{A}$-algèbre engendrée par C. De même, chaque vecteur de la base canonique de $\mathbf{A}^m$ sera dans l'$\mathbf{A}$-algèbre engendrée par C. On obtient en fait que $\mathbf{A}^m$ est l'image d'une matrice dont les colonnes sont les produits d'au plus m colonnes dans C. □

7.6. Notations. *(Contexte du lemme de Dedekind)*

- $\mathbf{A}$ est un anneau commutatif.
- $(M, \cdot, 1)$ est un monoïde.
- $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$ est une liste de m homomorphismes, deux à deux bien séparés, de $(M, \cdot, 1)$ dans $(\mathbf{A}, \cdot, 1)$.
- Pour $z \in M$ on note $\tau(z)$ l'élément de $\mathbf{A}^m$ défini par
$$\tau(z) = {}^t[\, \tau_1(z) \ \cdots \ \tau_m(z) \,].$$

7.7. Théorème. (Lemme de Dedekind)
Avec les notations 7.6 il existe $y_1, \ldots, y_r \in M$ tels que la matrice
$$[\, \tau(y_1) \mid \cdots \mid \tau(y_r) \,] = \big(\tau_i(y_j)\big)_{i \in [\![1..m]\!], j \in [\![1..r]\!]}$$
est surjective. En particulier, $\tau_1, \ldots, \tau_m$ sont $\mathbf{A}$-linéairement indépendants.
D Se déduit du lemme 7.5 en remarquant que, puisque $\tau(xy) = \tau(x)\tau(y)$, l'$\mathbf{A}$-algèbre engendrée par les $\tau(x)$ coïncide avec le $\mathbf{A}$-module engendré par les $\tau(x)$. □

Remarques.
1) Posons $F = \big(\tau_i(y_j)\big)_{ij} \in \mathbf{A}^{m \times r}$. L'indépendance linéaire des lignes signifie que $\mathcal{D}_m(F)$ est fidèle, tandis que la surjectivité de F signifie que $\mathcal{D}_m(F)$ contient 1. Parfois, le lemme de Dedekind est appelé « lemme d'indépendance des homomorphismes », lorsqu'on a en vue le cas où $\mathbf{A}$ est un corps discret. En fait, c'est seulement lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau zéro-dimensionnel que l'on peut déduire « $\mathcal{D}_m(F) = \langle 1 \rangle$ » de « $\mathcal{D}_m(F)$ fidèle ».
2) L'entier r peut être contrôlé à partir des données du problème. ∎

Théorème d'Artin et premières conséquences

7.8. Définition et notation. Soit une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$.

1. On peut munir le $\mathbf{k}$-module $\mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ d'une structure de $\mathbf{A}$-module par la loi externe
$$(y, \varphi) \mapsto \big(x \mapsto y\varphi(x)\big), \quad \mathbf{A} \times \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A}) \to \mathrm{L}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})\,.$$
On note alors $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ ce $\mathbf{A}$-module.

Soit $G = \{\sigma_1 = \mathrm{Id}, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ un groupe fini opérant (par $\mathbf{k}$-automorphismes) sur $\mathbf{A}$.

2. L'application $\mathbf{A}$-linéaire $\iota_G : \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A} \to \mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ est définie par
$$\iota_G\big((a_\sigma)_{\sigma\in G}\big) = \textstyle\sum_{\sigma\in G} a_\sigma \sigma\,.$$
3. L'application $\mathbf{k}$-linéaire $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A}$ est définie par
$$\psi_G(a \otimes b) = \big(a\sigma(b)\big)_{\sigma\in G}\,.$$
C'est un homomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres (à gauche).

7.9. Fait. *Avec les notations ci-dessus, et la structure à gauche pour le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, on a les résultats suivants.*

1. *Dire que ι_G est un isomorphisme signifie que $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ est un $\mathbf{A}$-module libre dont G est une base.*
2. *Si $\mathbf{A}$ est strictement étale de rang constant sur $\mathbf{k}$, dire que $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang fini signifie que $\mathbf{A}$ se diagonalise elle-même.*
3. *Dire que ψ_G est un isomorphisme signifie précisément la chose suivante. Le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ est libre de rang $\#G$, avec une base $\mathcal{B}$ telle que, après extension des scalaires de $\mathbf{k}$ à $\mathbf{A}$, l'application linéaire $\mu_{\mathbf{A},a}$, qui est devenue $\mu_{\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}},1\otimes a}$, est maintenant diagonale sur la base $\mathcal{B}$, avec pour matrice $\mathrm{Diag}\big(\sigma_1(a), \sigma_2(a), \ldots, \sigma_n(a)\big)$, ceci pour n'importe quel $a \in \mathbf{A}$.*

7.10. Lemme.
Soit $G = \{\sigma_1 = \mathrm{Id}, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$ un groupe fini opérant sur un anneau $\mathbf{A}$ et $\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$. Pour $y \in \mathbf{A}$ notons $y^\star$ l'élément de $\mathbf{A}^\star$ défini par $x \mapsto \mathrm{Tr}_G(xy)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ est une algèbre galoisienne.*
2. *Il existe $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ dans $\mathbf{A}$ tels que pour tout $\sigma \in G$ on ait*
$$\sum\nolimits_{i=1}^{r} x_i \sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{10}$$

Dans ce cas on a les résultats suivants.

3. *Pour $z \in \mathbf{A}$, on a $z = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}_G(zy_i)\, x_i = \sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}_G(zx_i)\, y_i$. Autrement dit, $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini et*
$$\big((x_1,\dots,x_r),(y_1^\star,\dots,y_r^\star)\big) \quad et \quad \big((y_1,\dots,y_r),(x_1^\star,\dots,x_r^\star)\big)$$
sont des systèmes de coordonnées.

4. *La forme $\mathrm{Tr}_G : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$ est dualisante, surjective.*

5. *Pour $\sigma \in G$, on pose $\varepsilon_\sigma = \sum_i \sigma(x_i) \otimes y_i \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$. Alors, $(\varepsilon_\sigma)_{\sigma\in G}$ est une $\mathbf{A}$-base « à gauche» de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$. De plus, pour a, $b \in \mathbf{A}$, on a*
$$b \otimes a = \textstyle\sum_\sigma b\sigma(a)\varepsilon_\sigma,$$
et l'image de cette base $(\varepsilon_\sigma)_\sigma$ par $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\tau\in G} \mathbf{A}$ est la $\mathbf{A}$-base canonique $(e_\sigma)_{\sigma\in G}$ de $\prod_{\tau\in G} \mathbf{A}$. En conséquence, ψ_G est un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres.

D *1 ⇒ 2.* D'après le lemme de Dedekind, il existe un entier r et des éléments x_1, …, x_r, y_1, …, $y_r \in \mathbf{A}$ tels que
$$\sum_{i=1}^{r} x_i \begin{bmatrix} \sigma_1(y_i) \\ \sigma_2(y_i) \\ \vdots \\ \sigma_n(y_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$
c'est-à-dire exactement, pour $\sigma \in G$, les équations (10).
2 ⇒ 1. Pour $\sigma \neq \mathrm{Id}$, on a $\sum_{i=1}^{r} x_i\big(y_i - \sigma(y_i)\big) = 1$, ce qui prouve que σ est séparant.
3. Pour $z \in \mathbf{A}$, on a les égalités
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{i=1}^{r} \mathrm{Tr}_G(zy_i)\, x_i \;&=\; \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(zy_i)x_i \;= \\ \textstyle\sum_{j=1}^{n} \sigma_j(z)\big(\sum_{i=1}^{r} \sigma_j(y_i)x_i\big) \;&= \sigma_1(z)\cdot 1 + \textstyle\sum_{j=2}^{n} \sigma_j(z)\cdot 0 = z. \end{aligned}$$
3 ⇒ 4. D'après le point *1* du théorème 5.2.
5. On a $\psi_G(\varepsilon_\sigma) = \big(\sum_i \sigma(x_i)\tau(y_i)\big)_\tau = e_\sigma$. Montrons maintenant l'égalité relative à $b \otimes a$. Vue la structure choisie de $\mathbf{A}$-module à gauche, on peut supposer $b = 1$. Alors :
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_\sigma \sigma(a)\varepsilon_\sigma \;&= \textstyle\sum_\sigma \sigma(a)\sum_i \sigma(x_i)\otimes y_i = \sum_i \mathrm{Tr}_G(ax_i)\otimes y_i \\ &= \textstyle\sum_i 1 \otimes \mathrm{Tr}_G(ax_i)y_i = 1 \otimes \sum_i \mathrm{Tr}_G(ax_i)y_i = 1 \otimes a. \end{aligned}$$
Ceci montre que $(\varepsilon_\sigma)_\sigma$ est un système générateur du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$. Comme son image par ψ_G est la $\mathbf{A}$-base canonique de $\prod_{\tau\in G} \mathbf{A}$, ce système est libre sur $\mathbf{A}$. Le reste en découle. □

Remarque. Voici une démonstration alternative de la surjectivité de la trace (point *4*). Pour $z = 1$, $1 = \sum_{i=1}^{r} t_i x_i$ avec $t_i = \mathrm{Tr}_G(y_i) \in \mathrm{Tr}_G(\mathbf{A}) \subseteq \mathbf{k}$. Introduisons le polynôme « normique » $N(T_1,\dots,T_r)$:
$$N(T_1,\dots,T_r) = \mathrm{N}_G\big(\textstyle\sum_{i=1}^{r} T_i x_i\big) = \prod_{\sigma\in G}\big(T_1\sigma(x_1) + \cdots + T_r\sigma(x_r)\big).$$

C'est un polynôme homogène de degré $n \geqslant 1$, invariant par G, donc à coefficients dans $\mathbf{k}$: $N(\underline{T}) = \sum_{|\alpha|=n} \lambda_\alpha \underline{T}^\alpha$ avec $\lambda_\alpha \in \mathbf{k}$. En conséquence, pour $u_1, \ldots, u_r \in \mathbf{k}$, on a $N(u_1, \ldots, u_r) \in \mathbf{k}u_1 + \cdots + \mathbf{k}u_r$. En particulier :

$$1 = \mathrm{N}_G(1) = \mathrm{N}_G\big(\textstyle\sum_{i=1}^r t_i x_i\big) = N(t_1, \ldots, t_r) \in \mathbf{k}t_1 + \cdots + \mathbf{k}t_r \subseteq \mathrm{Tr}_G(\mathbf{A}). \quad \blacksquare$$

7.11. Théorème. (Théorème d'Artin, version algèbres galoisiennes)
Soit $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ une algèbre galoisienne (notations 7.8).

1. *Le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ est projectif de rang constant $\#G$, et $\mathbf{k}$ est facteur direct dans $\mathbf{A}$.*
2. *Il existe $x_1, \ldots, x_r$ et $y_1, \ldots, y_r$ tels que pour tous $\sigma, \tau \in G$ on ait*
$$\forall \sigma, \tau \in G \qquad \sum_{i=1}^r \tau(x_i)\sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{11}$$
3. *La forme Tr_G est dualisante.*
4. *L'application $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A}$ est un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres. En particulier, $\mathbf{A}$ se diagonalise elle-même.*
5. *a.* $\mathrm{C}_G(x)(T) = \mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)(T)$, $\mathrm{Tr}_G = \mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ *et* $\mathrm{N}_G = \mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$,
   b. $\mathbf{A}$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$.
6. *Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, c'est une extension galoisienne de $\mathbf{k}$, et l'on a $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{A}/\mathbf{k})$.*

𝔇 Dans cette preuve, pour $x \in \mathbf{A}$, on note $\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}_G(x)$, et $x^\star$ est la forme $\mathbf{k}$-linéaire $z \mapsto \mathrm{Tr}(zx)$.
Le lemme 7.10 prouve les points *1* (mis à part la question du rang), *3* et *4*. Il prouve aussi le point *2*, car (11) résulte clairement de (10).
Notons que $\mathbf{k}$ est en facteur direct dans $\mathbf{A}$ d'après le lemme 4.3 *3*[7]
Voyons que $\mathbf{A}$ est bien de rang constant n. Le point *4* montre que, après extension des scalaires de $\mathbf{k}$ à $\mathbf{A}$, le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ devient libre de rang $\#G$. Ainsi $\mathbf{A}$ est bien de rang constant n sur $\mathbf{k}$: le polynôme rang du $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ « ne change pas » par l'extension des scalaires[8] $\mathbf{k} \to \mathbf{A}$ (injective), il est donc lui-même égal à T^n.
5a. (et donc *5b*) Puisque ψ_G est un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres (point *4*), $\mathbf{A}$ se diagonalise elle-même. On déduit alors du fait 7.9 point *3*, l'égalité
$$\mathrm{C}_G(x)(T) = \mathrm{C}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(x)(T).$$
Elle est vraie pour les polynômes vus dans $\mathbf{A}[T]$, donc aussi dans $\mathbf{k}[T]$.
6. Tout d'abord, l'anneau $\mathbf{k}$ est zéro-dimensionnel d'après le lemme IV-8.15, c'est donc un corps discret, car il est connexe et réduit. L'extension est

7. Ou plus directement, d'après la surjectivité de la trace (qui résulte du théorème 5.5 *1*). Soit en effet $x_0 \in \mathbf{A}$ tel que $\mathrm{Tr}(x_0) = 1$, on a $\mathbf{A} = \mathbf{k}\cdot 1 \oplus \mathrm{Ker}\, x_0^\star$, car tout $y \in \mathbf{A}$ s'écrit $y = x_0^\star(y) \cdot 1 + (y - x_0^\star(y) \cdot 1)$ avec $y - x_0^\star(y) \cdot 1 \in \mathrm{Ker}\, x_0^\star$.

8. En fait, ses coefficients sont transformés en « eux-mêmes », vus dans $\mathbf{A}$.

étale. Elle est normale, car tout $x \in \mathbf{A}$ annule $\mathrm{C}_G(x)(T)$, et ce polynôme se décompose en produit de facteurs linéaires dans $\mathbf{A}[T]$. □

Remarque. Le calcul qui suit peut éclairer les choses, bien qu'il n'ait pas été nécessaire.
On note que d'après le point *3* du lemme 7.10, le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$ est image de la matrice de projection

$$P = (p_{ij})_{i,j\in[\![1..r]\!]} = \big(y_i^\star(x_j)\big)_{i,j\in[\![1..r]\!]} = \big(\,\mathrm{Tr}(y_i x_j)\big)_{i,j\in[\![1..r]\!]}\,.$$

Rappelons aussi l'équation (11) : $\sum_{i=1}^r \tau(x_i)\sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Posons alors :

$$X = \begin{bmatrix} \sigma_1(x_1) & \sigma_1(x_2) & \cdots & \sigma_1(x_r) \\ \sigma_2(x_1) & \sigma_2(x_2) & \cdots & \sigma_2(x_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(x_1) & \sigma_n(x_2) & \cdots & \sigma_n(x_r) \end{bmatrix} \quad \text{et}$$

$$Y = \begin{bmatrix} \sigma_1(y_1) & \sigma_1(y_2) & \cdots & \sigma_1(y_r) \\ \sigma_2(y_1) & \sigma_2(y_2) & \cdots & \sigma_2(y_r) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sigma_n(y_1) & \sigma_n(y_2) & \cdots & \sigma_n(y_r) \end{bmatrix}.$$

D'après l'équation (11), on a $X\,{}^{\mathrm{t}}Y = \mathrm{I}_n$ et $P = {}^{\mathrm{t}}YX$.
D'après la proposition V-2.11, ceci signifie que le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$, devient libre de rang n, avec pour base les n lignes de Y, après extension des scalaires de $\mathbf{k}$ à $\mathbf{A}$. Autrement dit, le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, vu comme image de la matrice P « à coefficients dans $\mathbf{A}$ » est un sous-$\mathbf{A}$-module libre de rang n de $\mathbf{A}^r$, en facteur direct. ∎

7.12. Corollaire. (Algèbre galoisienne libre)
Soit $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ *une algèbre galoisienne libre, et* $n = \#G$. *Si* $\underline{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ *dans* $\mathbf{A}$, *on définit* $M_{\underline{b}} \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ *par*

$$M_{\underline{b}} = \big(\sigma_i(b_j)\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]}.$$

Alors, pour deux systèmes $\underline{b}$, $\underline{b}'$ *de* n *éléments de* $\mathbf{A}$ *on obtient :*

$${}^{\mathrm{t}}M_{\underline{b}}\, M_{\underline{b}'} = \mathrm{Tr}_G(b_i b'_j)_{i,j\in[\![1..n]\!]}.$$

En conséquence, on obtient les résultats suivants.

- $\det(M_{\underline{b}})^2 = \mathrm{disc}(b_1, \ldots, b_n)$.
- *Le système* $(b_1, \ldots, b_n)$ *est une* $\mathbf{k}$*-base de* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, la matrice* $M_{\underline{b}}$ *est inversible.*
- *Dans ce cas, si* $\underline{b}'$ *est la base duale de* $\underline{b}$ *relativement à la forme bilinéaire tracique, alors les matrices* $M_{\underline{b}}$ *et* $M_{\underline{b}'}$ *sont inverses l'une de l'autre.*

Remarque. Dans la situation où $\mathbf{A}$ est un corps discret, le lemme de Dedekind

dans sa forme originale affirme que la « matrice de Dedekind » $M_{\underline{b}}$ est inversible lorsque $(\underline{b})$ est une base de $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{k}$-espace vectoriel. ∎

7.13. Théorème. (Extension des scalaires pour les algèbres galoisiennes)
Soit $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ une algèbre galoisienne, $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{k}'$ une algèbre et $\mathbf{A}' = \rho_\star(\mathbf{A})$.

1. *Le groupe G opère de façon naturelle sur $\mathbf{A}'$ et $(\mathbf{k}', \mathbf{A}', G)$ est une algèbre galoisienne.*
2. *La « théorie de Galois» de $(\mathbf{k}', \mathbf{A}', G)$ se déduit par extension des scalaires de celle de $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$, au sens suivant : pour chaque sous-groupe fini H de G, l'homomorphisme naturel $\rho_\star(\mathbf{A}^H) \to \mathbf{A}'^H$ est un isomorphisme.*

D *1.* On voit facilement que G agit sur $\mathbf{A}'$ de façon séparante. Il reste à montrer que $\mathbf{k}'$ est le sous-anneau des éléments G-invariants de $\mathbf{A}'$.
Notons $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_G$. Nous voyons Tr comme un $\mathbf{k}$-endomorphisme de $\mathbf{A}$, qui par extension des scalaires donne le $\mathbf{k}'$-endomorphisme $\mathrm{Id}_{\mathbf{k}'} \otimes \mathrm{Tr}$ de $\mathbf{A}'$.
puisque y est G-invariant, on a l'égalité

$$(\mathrm{Id}_{\mathbf{k}'} \otimes \mathrm{Tr})(yz) = y\,(\mathrm{Id}_{\mathbf{k}'} \otimes \mathrm{Tr})(z).$$

En prenant $z_0 = 1_{\mathbf{k}'} \otimes x_0$, où $x_0 \in \mathbf{A}$ vérifie $\mathrm{Tr}(x_0) = 1$, on obtient l'appartenance souhaitée :

$$y = (\mathrm{Id}_{\mathbf{k}'} \otimes \mathrm{Tr})(yz_0) \in \mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k} = \mathbf{k}'.$$

2. Résulte du point *1.* En effet, considérons l'algèbre galoisienne $(\mathbf{A}^H, \mathbf{A}, H)$ et l'extension des scalaires $\varphi : \mathbf{A}^H \to \mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^H = \rho_\star(\mathbf{A}^H)$. On obtient l'égalité $\varphi_\star(\mathbf{A}) = \mathbf{A}'$, d'où l'algèbre galoisienne $\big(\rho_\star(\mathbf{A}^H), \mathbf{A}', H\big)$.
Ainsi $\mathbf{A}'^H = \rho_\star(\mathbf{A}^H)$. □

Dans le théorème qui suit, on aurait pu exprimer l'hypothèse en disant que le groupe fini G opère sur l'anneau $\mathbf{A}$, et que $\mathbf{k}$ est un sous-anneau de $\mathbf{A}^H$.

7.14. Théorème. (Caractérisation des algèbres galoisiennes)
Soit G un groupe fini opérant sur une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ est une algèbre galoisienne (en particulier, $\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$).*
2. *$\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$, et il existe $x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_r$ dans $\mathbf{A}$ tels que l' on ait pour tout $\sigma \in G$*
$$\textstyle\sum_{i=1}^{r} x_i \sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. *$\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$, $\mathbf{A}$ est finie sur $\mathbf{k}$, et pour tout système générateur fini $(a_j)_{j\in J}$ de $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{k}$-module, il existe une famille $(b_j)_{j\in J}$ dans $\mathbf{A}$ tel que l'on ait pour tous σ, $\tau \in G$*
$$\textstyle\sum_{j\in J} \tau(a_j)\sigma(b_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
4. *$\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$, et $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A}$ est un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres.*

5. $\mathbf{A}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{k}$*, et* G *est une base de* $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$.

▷ On a déjà vu *1* $\Leftrightarrow$ *2* et *1* $\Rightarrow$ *4* (lemme 7.10).
L'implication *3* $\Rightarrow$ *2* est claire.
2 $\Rightarrow$ *3.* On exprime x_i en fonction des a_j : $x_i = \sum_j u_{ij}a_j$ avec $u_{ij} \in \mathbf{k}$. Alors,

$$\textstyle\sum_j \sigma\big(\sum_i u_{ij}y_i\big)a_j = \sum_{j,i} u_{ij}\sigma(y_i)a_j = \sum_i \sigma(y_i)x_i = \delta_{\mathrm{Id},\sigma},$$

d'où le résultat en prenant $b_j = \sum_i u_{ij}y_i$.
2 $\Rightarrow$ *5.* Notons d'abord que si $\varphi \in \mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$ s'écrit $\varphi = \sum_\sigma a_\sigma\sigma$, alors en évaluant en y_i, en multipliant par $\tau(x_i)$ et en sommant sur les i, il vient :

$$\textstyle\sum_i \varphi(y_i)\tau(x_i) = \sum_{i,\sigma} a_\sigma\sigma(y_i)\tau(x_i) = a_\tau.$$

Ceci montre d'une part que G est $\mathbf{A}$-libre. D'autre part, cela conduit à penser que tout $\varphi \in \mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$ s'écrit $\varphi = \sum_\sigma a_\sigma\sigma$ avec $a_\sigma = \sum_i \varphi(y_i)\sigma(x_i)$. Vérifions-le en évaluant $\varphi' := \sum_\sigma a_\sigma\sigma$ en $x \in \mathbf{A}$:
$\varphi'(x) = \sum_{i,\sigma} \varphi(y_i)\sigma(x_i)\sigma(x) = \sum_i \mathrm{Tr}_G(x_ix)\varphi(y_i) = \varphi(\sum_i \mathrm{Tr}_G(x_ix)y_i) = \varphi(x)$.
5 $\Rightarrow$ *2.* Puisque $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$, on a une inclusion $\mathbf{A}^\star \hookrightarrow \mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$. Montrons d'abord que $\mathbf{A}^G \subseteq \mathbf{k}$ (on aura alors l'égalité). Chaque $\sigma \in G$ est $\mathbf{A}^G$-linéaire donc, puisque G engendre $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$ comme $\mathbf{A}$-module, chaque élément φ de $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$ est $\mathbf{A}^G$-linéaire. En particulier, chaque $\alpha \in \mathbf{A}^\star$ est $\mathbf{A}^G$-linéaire. Soit $\big((x_i),(\alpha_i)\big)$ un système de coordonnées du $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A}$. Comme $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module fidèle, d'après la proposition V-8.11, il existe une famille (z_i) dans $\mathbf{A}$ telle que $1 = \sum_i \alpha_i(z_i)$. Alors, si $x \in \mathbf{A}^G$, on obtient les égalités $x = \sum_i \alpha_i(z_i)x = \sum_i \alpha_i(z_ix)$: x appartient à $\mathbf{k}$.
Montrons ensuite que pour chaque $\alpha \in \mathbf{A}^\star$, il existe un unique $a \in \mathbf{A}$ tel que $\alpha = \sum_{\sigma\in G} \sigma(a)\sigma$, i.e. tel que α soit la forme $\mathbf{k}$-linéaire $x \mapsto \mathrm{Tr}_G(ax)$. Puisque G est une $\mathbf{A}$-base de $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{A})$, on a $\alpha = \sum_\sigma a_\sigma\sigma$ avec des $a_\sigma \in \mathbf{A}$. Posons $a = a_{\mathrm{Id}}$. En écrivant, pour $\tau \in G$, $\tau \circ \alpha = \alpha$, on obtient $\tau(a_\sigma) = a_{\sigma\tau}$, en particulier $a_\tau = \tau(a)$, d'où l'égalité souhaitée $\alpha = \sum_{\sigma\in G} \sigma(a)\sigma$. En passant, on vient de prouver que l'application $\mathbf{k}$-linéaire

$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}^\star,\ a \mapsto \mathrm{Tr}_G(a\bullet)$$

est un isomorphisme de $\mathbf{k}$-modules. On peut donc définir un système (y_i) par les égalités $\alpha_i = \mathrm{Tr}_G(y_i\bullet)$. Alors, pour $x \in \mathbf{A}$ on obtient

$$\textstyle x = \sum_i \alpha_i(x)x_i = \sum_{i,\sigma} \sigma(y_ix)x_i = \sum_\sigma \big(\sum_i x_i\sigma(y_i)\big)\sigma(x),$$

c'est-à-dire $\mathrm{Id} = \sum_\sigma \big(\sum_i x_i\sigma(y_i)\big)\sigma$. Mais comme G est $\mathbf{A}$-libre, l'écriture de $\mathrm{Id} \in G$ est réduite à Id, donc $\sum_i x_i\sigma(y_i) = 1$ si $\sigma = \mathrm{Id}$, 0 sinon.
NB. Puisque $\sum_i x_iy_i = 1$, on a les égalités
$\mathrm{Tr}(x) = \sum_i \alpha_i(x_ix) = \sum_{i,\sigma} \sigma(x_iy_i)\sigma(x) = \sum_\sigma \sum_i \sigma(x_iy_i)\sigma(x) = \mathrm{Tr}_G(x)$.

4 $\Rightarrow$ *2.* Soit $z = \sum_i x_i \otimes y_i$ l'élément de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ défini par : $\psi_G(z)$ est l'élément de $\prod_{\sigma\in G} \mathbf{A}$ dont toutes les composantes sont nulles, sauf celle d'indice Id qui vaut 1. Cela signifie exactement que $\sum_i x_i\sigma(y_i) = 1$ si $\sigma = \mathrm{Id}$, 0 sinon.□

Le cas des algèbres galoisiennes libres est décrit dans le corollaire suivant, qui est une conséquence immédiate des résultats plus généraux précédents.

7.15. Corollaire. (Caractérisation des algèbres galoisiennes libres)
Soit G un groupe fini opérant sur une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ avec $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$.
On suppose que $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{k}$, de rang $n = |G|$, avec $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ pour base. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *$(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ est une algèbre galoisienne (en particulier, $\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$).*
2. *La matrice $M_{\underline{x}} = \big(\sigma_i(x_j)\big)_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ est inversible (on a indexé le groupe G par $[\![1..n]\!]$).*
3. *La forme Tr_G est dualisante.*
4. *$\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$, et il existe y_1, …, y_n dans $\mathbf{A}$ tels que l' on ait pour tout $\sigma \in G$*
$$\textstyle\sum_{i=1}^n x_i\sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
5. *Le groupe G est une $\mathbf{A}$-base de $\mathrm{Lin}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{A})$.*
6. *$\mathbf{k} = \mathbf{A}^G$, et $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A}$ est un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres.*

Dans ce cas on a les résultats suivants.

7. *Dans les points 4 et 3,*
   — *on obtient les y_i comme la solution de $M_{\underline{x}} \cdot {}^{\mathrm{t}}[\, y_1 \ \cdots \ y_n \,] = {}^{\mathrm{t}}[\, 1\, 0 \cdots 0 \,]$, où $M_{\underline{x}}$ est définie comme dans le point 2, avec $\sigma_1 = Id$,*
   — *$(y_1^\star, \ldots, y_n^\star)$ est la base duale de $(x_1, \ldots, x_n)$.*
8. *Le point 6 peut être précisé comme suit.*
   Pour $\sigma \in G$, on pose $\varepsilon_\sigma = \sum_i \sigma(x_i) \otimes y_i \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$. Alors, $(\varepsilon_\sigma)_{\sigma\in G}$ est une $\mathbf{A}$-base « à gauche» de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$. De plus, pour a, $b \in \mathbf{A}$, on a
$$b \otimes a = \textstyle\sum_\sigma b\sigma(a)\varepsilon_\sigma,$$
   et l'image de cette base $(\varepsilon_\sigma)_\sigma$ par $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\tau\in G} \mathbf{A}$ est la $\mathbf{A}$-base canonique $(e_\sigma)_{\sigma\in G}$ de $\prod_{\tau\in G} \mathbf{A}$.

Enfin, on souligne les points suivants, dans lesquels on ne suppose pas que $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{A}^G$.

— *Lorsque $\mathbf{A}$ est un corps discret (cadre historique du théorème d'Artin), si un groupe G opère fidèlement sur $\mathbf{A}$, l'algèbre $(\mathbf{A}^G, \mathbf{A}, G)$ est toujours galoisienne, $\mathbf{A}^G$ est un corps discret et $\mathbf{A}$ est libre de rang n sur $\mathbf{A}^G$.*
— *Lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret, l'algèbre $(\mathbf{A}^G, \mathbf{A}, G)$ est galoisienne si, et seulement si, G opère fidèlement sur le corps résiduel $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$. Dans ce cas, $\mathbf{A}^G$ est un anneau local résiduellement discret et $\mathbf{A}$ est libre de rang n sur $\mathbf{A}^G$.*

Naturellement, nous encourageons vivement la lectrice à donner une démonstration plus directe et plus courte du corollaire précédent. Il est également envisageable de déduire les résultats généraux des résultats particuliers énoncés dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret, qui pourraient eux-mêmes se déduire du cas des corps discrets.

7.16. Théorème. (La correspondance galoisienne pour une algèbre galoisienne) *Soit* $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ *une algèbre galoisienne non triviale, et* H *un sous-groupe fini de* G*.*

1. *Le triplet* $(\mathbf{A}^H, \mathbf{A}, H)$ *est une algèbre galoisienne,* $\mathbf{A}^H$ *est strictement étale sur* $\mathbf{k}$*, de rang constant* $[\mathbf{A}^H : \mathbf{k}] = |\, G : H \,|$*.*
2. *Si* $H' \supseteq H$ *est un sous-groupe fini de* G*,* $\mathbf{A}^H$ *est strictement finie sur* $\mathbf{A}^{H'}$*, de rang constant* $[\mathbf{A}^H : \mathbf{A}^{H'}] = |\, H' : H \,|$*.*
3. *On a* $H = \mathrm{Stp}(\mathbf{A}^H)$*.*
4. *L'application* $\mathrm{Fix}_{\mathbf{A}}$ *restreinte aux sous-groupes finis de* G *est injective.*
5. *Si* H *est normal dans* G*,* $(\mathbf{k}, \mathbf{A}^H, G/H)$ *est une algèbre galoisienne.*

▷ *1.* Puisque H est un groupe séparant d'automorphismes de $\mathbf{A}$, $(\mathbf{A}^H, \mathbf{A}, H)$ est une algèbre galoisienne. Donc $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{A}^H$-algèbre strictement finie de rang constant $\#H$. Donc $\mathbf{A}^H$ est strictement finie sur $\mathbf{k}$, de rang constant égal à $|\, G : H \,|$ (théorème 4.5). En outre, elle est strictement étale d'après le fait 5.7.
2. On applique le théorème 4.5.
3. L'inclusion $H \subseteq \mathrm{Stp}(\mathbf{A}^H)$ est évidente. Soient $\sigma \in \mathrm{Stp}(\mathbf{A}^H)$ et H' le sous-groupe engendré par H et σ. On a $|\, H' : H \,| = [\mathbf{A}^H : \mathbf{A}^{H'}]$, or $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^{H'}$, donc $H' = H$ et $\sigma \in H$.
4. Résulte de *3.*
5. Tout d'abord, pour $\sigma \in G$, on a $\sigma(\mathbf{A}^H) = \mathbf{A}^H$. Si l'on note $\overline{\sigma}$ la restriction de σ à $\mathbf{A}^H$, on obtient un morphisme de groupes $G \to \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}^H)$, $\sigma \mapsto \overline{\sigma}$, dont le noyau est H d'après le point *3.* Le groupe quotient G/H se réalise donc comme sous-groupe de $\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}^H)$.
Soient un $x \in \mathbf{A}$ vérifiant $\mathrm{Tr}_H(x) = 1$, un système générateur $(a_1, \ldots, a_r)$ de $\mathbf{A}$ comme $\mathbf{k}$-module, et des éléments $b_1, \ldots, b_r$ tels que pour tous $\sigma, \tau \in G$ on ait $\sum_{i=1}^r \tau(a_i)\sigma(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \tau \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$. On définit alors, pour $i \in [\![1..r]\!]$, les éléments de $\mathbf{A}^H$, $a'_i = \mathrm{Tr}_H(xa_i)$, et $b'_i = \mathrm{Tr}_H(b_i)$.
On vérifie facilement que pour $\sigma \in G$ on a

$$\sum_{i=1}^r a'_i \sigma(b'_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma \in H \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, en application du point *2* du théorème 7.14, $(\mathbf{k}, \mathbf{A}^H, \mathrm{G}/H)$ est une algèbre galoisienne. □

Le théorème 7.16 qui précède établit la correspondance galoisienne entre sous-groupes finis de G d'une part et « certaines » sous-$\mathbf{k}$-algèbres strictement étales de $\mathbf{A}$ d'autre part. Une correspondance bijective exacte va être établie dans le paragraphe suivant lorsque $\mathbf{A}$ est connexe.
Mais auparavant nous donnons quelques précisions supplémentaires.

7.17. Proposition. *Soit* $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ *une algèbre galoisienne et* H *un sous-groupe fini de* G.

1. $\mathbf{A}$ *diagonalise* $\mathbf{A}^H$.
2. *Pour* $b \in \mathbf{A}^H$, *le polynôme caractéristique de* b *(sur* $\mathbf{k}$, *dans* $\mathbf{A}^H$*) est donné par*
$$\mathrm{C}_{\mathbf{A}^H/\mathbf{k}}(b)(T) = \textstyle\prod_{\sigma\in G/H} \big(T - \sigma(b)\big).$$
(Ici G/H *désigne un système de représentants des classes à gauche, et l'on note que* $\sigma(b)$ *ne dépend pas du représentant* σ *choisi.)*

𝔇 Rappelons que $\mathbf{A}$ se diagonalise elle-même, comme le montre l'isomorphisme $\psi_G : \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} \to \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A}$. Nous regardons ce produit comme l'algèbre de fonctions $\mathcal{F}(G, \mathbf{A})$. Il est muni d'une action naturelle de G à gauche, de la façon suivante :

$$\sigma \in G,\ w \in \mathcal{F}(G, \mathbf{A}) : \sigma \cdot w \in \mathcal{F}(G, \mathbf{A}) \text{ définie par } \tau \mapsto w(\tau\sigma).$$

De même G agit à gauche sur l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ via $\mathrm{Id} \otimes G$. On vérifie alors que ψ_G est un G-morphisme, i.e. que pour $\tau \in G$, le diagramme suivant commute :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} & \xrightarrow{\psi_G} & \mathcal{F}(G, \mathbf{A}) = \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A} \\ \big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Id}\otimes\tau} & & \big\downarrow{\scriptstyle w\mapsto\tau\cdot w} \\ \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} & \xrightarrow{\psi_G} & \mathcal{F}(G, \mathbf{A}) = \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A} \end{array}$$

1. Considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^H & \xrightarrow{\varphi_H} & \mathcal{F}(G/H, \mathbf{A}) = \prod_{\sigma\in G/H} \mathbf{A} \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} & \xrightarrow[\sim]{\psi_G} & \mathcal{F}(G, \mathbf{A}) = \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A} \end{array}$$

À droite, la flèche verticale est injective, et elle identifie $\mathcal{F}(G/H, \mathbf{A})$ à la partie $\mathcal{F}(G, \mathbf{A})^H$ de $\mathcal{F}(G, \mathbf{A})$ (fonctions constantes sur les classes à gauche de G modulo H).

À gauche, la flèche verticale (correspondant à l'injection $\mathbf{A}^H \hookrightarrow \mathbf{A}$) est aussi une injection car $\mathbf{A}^H$ est facteur direct dans $\mathbf{A}$ en tant que $\mathbf{A}^H$-module.

Enfin, φ_H est défini par $a \otimes b \mapsto \big(a\sigma(b)\big)_{\sigma\in G/H}$.

Alors, φ_H est un isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres. En effet, φ_H est injective, et pour la surjectivité, il suffit de voir que $(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A})^{\mathrm{Id}\otimes H} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^H$: ceci est donné par le théorème 7.13 pour l'algèbre galoisienne $(\mathbf{A}^H, \mathbf{A}, H)$ et l'extension des scalaires $\mathbf{A}^H \hookrightarrow \mathbf{A}$.

2. Ceci résulte du point *1* et du lemme suivant. □

7.18. Lemme. *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux* $\mathbf{k}$*-algèbres,* $\mathbf{B}$ *strictement finie de rang constant* n*. On suppose que* $\mathbf{A}$ *diagonalise* $\mathbf{B}$ *au moyen d'un isomorphisme*

$$\psi : \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \longrightarrow \mathbf{A}^n$$

donné par des « coordonnées» notées $\psi_i : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$*.*
Alors, pour $b \in \mathbf{B}$*, on a une égalité*

$$\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(b)(T) = \textstyle\prod_{i=1}^{n} \big(T - \psi_i(b)\big),$$

si l'on transforme le membre de gauche (qui est un élément de $\mathbf{k}[T]$*) en un élément de* $\mathbf{A}[T]$ *via* $\mathbf{k} \to \mathbf{A}$*.*

▷ Immédiat d'après le calcul du polynôme caractéristique d'un élément dans une algèbre diagonale. □

La correspondance galoisienne dans le cas où A est connexe

Le lecteur est invité à revoir le lemme 6.17.

7.19. Théorème. *Si* $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ *est une algèbre galoisienne non triviale et si* $\mathbf{A}$ *est* connexe*, la correspondance galoisienne établit une bijection décroissante entre*

- *d'une part, l'ensemble des sous-groupes détachables de* G*,*
- *et d'autre part, l'ensemble des sous-*$\mathbf{k}$*-algèbres de* $\mathbf{A}$ *qui sont séparables.*

Ce dernier ensemble est également celui des sous-algèbres de $\mathbf{A}$ *qui sont strictement étales sur* $\mathbf{k}$*.*

▷ Soit $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}$ avec $\mathbf{A}'$ séparable. En posant $H = \mathrm{Stp}(\mathbf{A}')$, nous devons montrer que $\mathbf{A}' = \mathbf{A}^H$. On a bien sûr $\mathbf{A}' \subseteq \mathbf{A}^H$.
Considérons l'$\mathbf{A}$-algèbre produit $\mathbf{C} = \prod_{\sigma\in G} \mathbf{A} \simeq \mathbf{A}^n$ avec $n = \#G$.
Soit $p_\sigma : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ la projection définie par $p_\sigma\big((a_\tau)_\tau\big) = a_\sigma$. Rappelons l'isomorphisme d'$\mathbf{A}$-algèbres $\psi_G : \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \to \mathbf{C}$, $a \otimes b \mapsto \big(a\sigma(b)\big)_{\sigma\in G}$.
Puisque $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini, le morphisme canonique $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}' \to \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ est injectif. En le composant avec ψ_G, nous obtenons un morphisme injectif d'$\mathbf{A}$-algèbres $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}' \to \mathbf{C}$. Dans les notations, nous identifierons $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}'$ à son image $\mathbf{B}$ dans $\mathbf{C} \simeq \mathbf{A}^n$.
Puisque $\mathbf{A}'$ est une $\mathbf{k}$-algèbre séparable, $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre séparable. Nous pouvons donc appliquer le lemme 6.17. Si l'on note π_σ la restriction de p_σ à $\mathbf{B}$, il faut identifier la relation d'équivalence sur G définie par $\pi_\sigma = \pi_{\sigma'}$. Pour $a' \in \mathbf{A}'$, $1 \otimes a'$ correspond par ψ_G à $\big(\tau(a')\big)_\tau$, donc $\pi_\sigma(1 \otimes a') = \sigma(a')$. En conséquence, $\pi_\sigma = \pi_{\sigma'}$ si, et seulement si, σ et σ' coïncident sur $\mathbf{A}'$ ou encore, par définition de H, si, et seulement si, $\sigma^{-1}\sigma' \in H$, i.e. $\sigma H = \sigma' H$. On en déduit que les classes d'équivalence sont les classes à gauche modulo H. Avec les notations du lemme 6.17, on a donc $\mathbf{B} = \bigoplus_J \mathbf{A}e_J$, où J décrit G/H. En utilisant la $\mathbf{A}$-base $(e_J)_J$ de $\mathbf{B}$, on voit alors que $\mathbf{B} = \mathbf{C}^H$.

Reste à «redescendre» à $\mathbf{A}$. Par image réciproque par ψ_G, on a

$$(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A})^{\mathrm{Id}\otimes H} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}' .$$

En particulier, $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^H \subseteq \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}'$. En appliquant $\mathrm{Tr}_G \otimes \mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$ à cette inclusion et en utilisant le fait que $\mathrm{Tr}_G : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$ est surjective, on obtient l'inclusion

$$\mathbf{k} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}^H \subseteq \mathbf{k} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}', \text{ i.e. } \mathbf{A}^H \subseteq \mathbf{A}' .$$

Ainsi $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}'$, ce qu'il fallait démontrer.
Enfin, puisque les $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{A}^H$ sont strictement étales et que les algèbres strictement étales sont séparables, il est clair que les sous-$\mathbf{k}$-algèbres séparables de $\mathbf{A}$ coïncident avec les sous-$\mathbf{k}$-algèbres strictement étales. □

Remarque. La théorie des algèbres galoisiennes ne réclame pas vraiment le recours aux algèbres séparables, même pour le théorème précédent que l'on peut énoncer avec les seules sous-algèbres strictement étales de $\mathbf{A}$. Pour une démonstration de ce théorème sans recours aux algèbres séparables, voir les exercices 18 et 19. Néanmoins la théorie des algèbres séparables, remarquable pour elle-même, apporte un bel éclairage à la situation galoisienne. ∎

Quotients d'algèbres galoisiennes

7.20. Proposition. (Quotient d'une algèbre galoisienne par un idéal invariant) *Soit* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *une algèbre galoisienne,* $\mathfrak{c}$ *un idéal* G*-invariant de* $\mathbf{C}$ *et* $\mathfrak{a} = \mathfrak{c} \cap \mathbf{k}$.

1. *Le triplet* $(\mathbf{k}/\mathfrak{a}\,, \mathbf{C}/\mathfrak{c}\,, G)$ *est une algèbre galoisienne.*
2. *Cette algèbre galoisienne est naturellement isomorphe à celle obtenue à partir de* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *au moyen de l'extension des scalaires* $\mathbf{k} \to \mathbf{k}/\mathfrak{a}$.

▷ *1.* Le groupe G opère sur $\mathbf{C}/\mathfrak{c}$ parce que $\mathfrak{c}$ est (globalement) invariant. Montrons que l'homomorphisme injectif naturel $\mathbf{k}/\mathfrak{a} \to (\mathbf{C}/\mathfrak{c})^G$ est surjectif. Si $x \in \mathbf{C}$ est G-invariant modulo $\mathfrak{c}$, on doit trouver un élément de $\mathbf{k}$ égal à x modulo $\mathfrak{c}$. On considère $x_0 \in \mathbf{C}$ vérifiant $\mathrm{Tr}_G(x_0) = 1$; alors $\mathrm{Tr}_G(xx_0)$ convient :

$$x = \textstyle\sum_{\sigma\in G} x\sigma(x_0) \equiv \sum_{\sigma\in G} \sigma(x)\sigma(x_0) = \mathrm{Tr}_G(xx_0) \bmod \mathfrak{c} .$$

Ainsi $(\mathbf{C}/\mathfrak{c})^G = \mathbf{k}/\mathfrak{a}$. Enfin il est clair que G opère de façon séparante sur $\mathbf{C}/\mathfrak{c}$.
2. L'extension des scalaires $\mathbf{k} \to \mathbf{k}/\mathfrak{a}$ donne $(\mathbf{k}/\mathfrak{a}, \mathbf{C}/\mathfrak{a}\mathbf{C}, G)$ (algèbre galoisienne), avec $\mathfrak{a}\mathbf{C} \subseteq \mathfrak{c}$. On doit vérifier que $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathbf{C}$.
La projection $\pi : \mathbf{C}/\mathfrak{a}\mathbf{C} \to \mathbf{C}/\mathfrak{c}$ est une application $\mathbf{k}/\mathfrak{a}$-linéaire surjective entre modules projectifs, donc $\mathbf{C}/\mathfrak{a}\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}/\mathfrak{c} \oplus \mathrm{Ker}\,\pi$. Comme les deux modules ont même rang constant $\#G$, le polynôme rang de $\mathrm{Ker}\,\pi$ est égal à 1, donc $\mathrm{Ker}\,\pi = 0$ (théorème V-8.4). □

Dans la définition qui suit, on n'a pas besoin de supposer que $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ est une algèbre galoisienne.

7.21. Définition. Soit G un groupe fini qui opère sur une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{C}$.

1. Un idempotent de $\mathbf{C}$ est dit *galoisien* si son orbite sous G est un système fondamental d'idempotents orthogonaux (cela requiert que cette orbite soit un ensemble fini, ou, de manière équivalente, que le sous-groupe $\mathrm{St}_G(e)$ soit détachable).
2. Un idéal de $\mathbf{C}$ est dit *galoisien* lorsqu'il est engendré par l'idempotent complémentaire d'un idempotent galoisien e.
3. Dans ce cas, le groupe $\mathrm{St}_G(e)$ opère sur l'algèbre $\mathbf{C}[1/e] \simeq \mathbf{C}/\langle 1-e\rangle$, et $\big(\mathbf{k}, \mathbf{C}[1/e], \mathrm{St}_G(e)\big)$ est appelé un *quotient de Galois* de $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$.

7.22. Fait. *Avec les hypothèses de la définition 7.21, si* $\{e_1, \dots, e_r\}$ *est l'orbite de* e*, l'application* $\mathbf{k}$*-linéaire naturelle* $\mathbf{C} \to \prod_{i=1}^{r} \mathbf{C}[1/e_i]$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{k}$*-algèbres. En outre, les* $\mathrm{St}_G(e_i)$ *sont deux à deux conjugués par des éléments de* G *qui permutent les* $\mathbf{k}$*-algèbres* $\mathbf{C}[1/e_i]$ *(elles sont donc deux à deux isomorphes). En particulier* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}[1/e]^r$*.*

▷ La démonstration est laissée à la lectrice. □

Le théorème qui suit est le point *7* du théorème VII-4.3 consacré aux quotients de Galois des algèbres prégaloisiennes.

7.23. Théorème. (Quotients de Galois)
Tout quotient de Galois d'une algèbre galoisienne est une algèbre galoisienne.

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées au lecteur, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

— Montrer le théorème 3.9.
— Montrer le fait 3.11 page 331.
— Montrer le principe local-global 7.4 pour les algèbres galoisiennes.
— Vérifier le fait 7.9 page 364.

Exercice 2. Donner une démonstration détaillée du point *2* du théorème 1.9.

Exercice 3. On considère l'$\mathbf{A}$-algèbre produit $\mathbf{B} = \mathbf{A}^n$.
1. À quelle condition un $x \in \mathbf{B}$ vérifie-t-il $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$?
Dans ce cas, montrer que $(1, x, \dots, x^{n-1})$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$.
2. Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, à quelle condition $\mathbf{B}$ admet-elle un élément primitif ?

Exercice 4. Soient $\mathbf{K}$ un corps discret non trivial, $\mathbf{B}$ une $\mathbf{K}$-algèbre strictement finie réduite et v une indéterminée.
On considère la $\mathbf{L}$-algèbre $\mathbf{B}(v) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{K}(v) \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{B}$. Montrer les résultats suivants.
1. $\mathbf{B}(v)$ est strictement finie sur $\mathbf{K}(v)$.
2. Si $\mathbf{B}$ est étale sur $\mathbf{K}$, $\mathbf{B}(v)$ est étale sur $\mathbf{K}(v)$.
3. Tout idempotent de $\mathbf{B}(v)$ est en fait dans $\mathbf{B}$.

Exercice 5. Si $\mathbf{K}$ est un corps discret séparablement factoriel, il en va de même pour $\mathbf{K}(v)$, où v est une indéterminée.
NB : on ne suppose pas que $\mathbf{K}$ est infini, ni non plus qu'il est fini.

Exercice 6. *(Les anneaux d'entiers de l'extension $\mathbb{Q}(\sqrt{a}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{a},\sqrt{2})$)*
Soient $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ deux corps de nombres et $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ leurs anneaux d'entiers ; on donne ici un exemple élémentaire où $\mathbf{B}$ n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre.
1. Soit $d \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré ; déterminer l'anneau des entiers de $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$.
Soit $a \in \mathbb{Z}$ sans facteur carré avec $a \equiv 3 \bmod 4$. On pose $\mathbf{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{a})$, $\mathbf{L} = \mathbf{K}(\sqrt{2})$, et $\beta = \sqrt{2}\frac{1+\sqrt{a}}{2}$. On définit $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$ et $\tau \in \mathrm{Aut}\left(\mathbf{L}/\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)$, par :

$$\sigma(\sqrt{2}) = -\sqrt{2} \text{ et } \tau(\sqrt{a}) = -\sqrt{a}.$$

2. Vérifier que $\beta \in \mathbf{B}$ et calculer $(\sigma\tau)(\beta)$.
3. On veut montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{a}, \beta)$ (qui est une $\mathbb{Q}$-base de $\mathbf{L}$) est une $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{B}$. Soit $z = r + s\sqrt{2} + t\sqrt{a} + u\beta \in \mathbf{B}$ avec r, s, t, $u \in \mathbb{Q}$.
En considérant $(\sigma\tau)(z)$, montrer que $u \in \mathbb{Z}$ puis que r, s, $t \in \mathbb{Z}$.
4. Expliciter $\mathbf{B}$ comme $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Vérifier qu'il est isomorphe à son dual.

Exercice 7. *(Discriminant du produit tensoriel)*
Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$ deux $\mathbf{k}$-algèbres libres de rangs n, n', $(\underline{x}) = (x_i)$ une famille de n éléments de $\mathbf{A}$, $(\underline{x}') = (x'_j)$ une famille de n' éléments de $\mathbf{A}'$. On note $\mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}'$ et $(\underline{x} \otimes \underline{x}')$ la famille $(x_i \otimes x'_j)$ de nn' éléments de $\mathbf{B}$. Montrer l'égalité

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(\underline{x} \otimes \underline{x}') = \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\underline{x})^{n'} \ \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}}(\underline{x}')^{n}.$$

Exercice 8. *(Base normale d'une extension cyclique)*
Soit $\mathbf{L}$ un corps discret, $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{L})$ d'ordre n et $\mathbf{K} = \mathbf{L}^{\sigma}$ le corps des invariants sous σ. Montrer qu'il existe $x \in \mathbf{L}$ tel que $\left(x, \sigma(x), \cdots, \sigma^{n-1}(x)\right)$ soit une $\mathbf{K}$-base de $\mathbf{L}$; on parle alors de *base normale* de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ (définie par x).

Exercice 9. *(Homographie d'ordre 3 et équation universelle de groupe de Galois A_3)* On note A_n le sous-groupe des permutations paires de S_n. Soit $\mathbf{L} = \mathbf{k}(t)$ où $\mathbf{k}$ est un corps discret et t une indéterminée.

1. Vérifier que $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est d'ordre 3 dans $\mathbb{PGL}_2(\mathbf{k})$ et expliquer la provenance de cette matrice.

On note $\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}\left(\mathbf{k}(t)\right)$ l'automorphisme d'ordre 3 associé à A (voir le problème 1, on a $\sigma(f) = f(\frac{-1}{t+1})$), et $G = \langle\sigma\rangle$.

2. Calculer $g = \mathrm{Tr}_G(t)$ et montrer que $\mathbf{k}(t)^G = \mathbf{k}(g)$.
3. Soit a une indéterminée sur $\mathbf{k}$ et $f_a(T) = T^3 - aT^2 - (a+3)T - 1 \in \mathbf{k}(a)[T]$. Montrer que f_a est irréductible, de groupe de Galois A_3.
4. Montrer que le polynôme $f_a(X)$ est un « polynôme générique de groupe de Galois A_3 » au sens suivant : si $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ est une extension galoisienne de groupe de Galois A_3 ($\mathbf{L}$ un corps discret), il existe un élément primitif de $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ dont le polynôme minimal est $f_\alpha(X)$ pour une certaine valeur de $\alpha \in \mathbf{K}$.

Exercice 10. *(Algèbre d'un groupe commutatif fini)*
Soit $\mathbf{k}$ un anneau commutatif, G un groupe commutatif d'ordre n et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[G]$ l'*algèbre du groupe* G, i.e. $\mathbf{A}$ admet G comme $\mathbf{k}$-base et le produit dans $\mathbf{A}$ de deux éléments de G est leur produit dans G. [9]

1. Déterminer $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$, son image par $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ et la forme bilinéaire tracique sur $\mathbf{A}$.
2. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.
   — n est inversible dans $\mathbf{k}$.
   — $\mathbf{A}$ est strictement étale.
   — $\mathbf{A}$ est séparable.
3. Montrer que $\mathbf{k}[G]$ est une algèbre de Frobenius.

Exercice 11. *(Une algèbre monogène finie est une algèbre de Frobenius)*
Soit $f = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathbf{k}[X]$ et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X]/\langle f\rangle = \mathbf{k}[x]$. On considère la forme linéaire $\lambda : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$ définie par $x^{n-1} \mapsto 1$ et $x^i \mapsto 0$ pour $i < n-1$. On va montrer que λ est dualisante et que $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = f'(x) \cdot \lambda$.
À cet effet, on adjoint une indéterminée Y. Le système $(1, x, \ldots, x^{n-1})$ est une base de $\mathbf{A}[Y]/\mathbf{k}[Y]$, on note $\widetilde{\lambda} : \mathbf{A}[Y] \to \mathbf{k}[Y]$ l'extension de λ et l'on définit l'application $\mathbf{k}[Y]$-linéaire $\varphi : \mathbf{A}[Y] \to \mathbf{k}[Y]$, par $\varphi(x^i) = Y^i$ pour $i \in [\![0..n-1]\!]$.

1. Montrer que : $\quad \forall g \in \mathbf{A}[Y], \quad f(Y)\widetilde{\lambda}(g) = \varphi\big((Y-x)g\big) \qquad (*)$
2. On définit la base (triangulaire de Horner) $(b_0, \ldots, b_{n-1})$ de $\mathbf{A}/\mathbf{k}$ par
$$\begin{aligned} b_0 &= x^{n-1} + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_2 x + a_1, \\ b_1 &= x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-3} + \cdots + a_3 x + a_2\,, \end{aligned}$$
et ainsi de suite : $b_i = x^{n-i-1} + \cdots + a_{i+1}$ et $b_{n-1} = 1$. On a :
$$f'(Y) = \frac{f(Y) - f(x)}{Y - x} = \frac{f(Y)}{Y - x} = b_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + b_1 Y + b_0.$$
Montrer en appliquant l'égalité $(*)$ à $g_i = x^i f'(Y)$, que $(b_0 \cdot \lambda, \ldots, b_{n-1} \cdot \lambda)$ est la base duale de $(1, x, \ldots, x^{n-1})$. Conclure.
3. Montrer que $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = f'(x) \cdot \lambda$.

Exercice 12. *(Algèbres de Frobenius : exemples et contre-exemples élémentaires)*
Dans tout l'exercice, $\mathbf{k}$ est un anneau commutatif.
1. Soit $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{k}[T]$ des polynômes unitaires. Montrer que la $\mathbf{k}$-algèbre quotient $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)\rangle$ est libre de rang fini, de Frobenius.
2. Soit $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X,Y]\big/\langle X, Y\rangle^2 = \mathbf{k}[x,y]$. Décrire $\mathbf{A}^\star$ comme $\mathbf{A}$-module de présentation finie ; en déduire que $\mathbf{A}$ n'est pas une algèbre de Frobenius.
3. Question analogue à la précédente avec $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X,Y]/\langle X, Y\rangle^n$ pour $n \geqslant 2$ et $\mathbf{B} = \mathbf{k}[X,Y]\big/\big\langle X^2, XY^{n+1}, Y^{n+2}\big\rangle$ pour $n \geqslant 0$.

9. La définition fonctionne aussi pour *l'algèbre* $\mathbf{k}[M]$ *d'un monoïde* M.

Exercice 13. *(L'idéal $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ pour une $\mathbf{k}$-algèbre monogène $\mathbf{A}$)*
Soit $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x]$ une $\mathbf{k}$-algèbre monogène et $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ son algèbre enveloppante. On pose $y = x \otimes 1$, $z = 1 \otimes x$, de sorte que $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}[y, z]$. On sait que $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \langle y - z \rangle$. On suppose $f(x) = 0$ pour un $f \in \mathbf{k}[X]$ non nécessairement unitaire et l'on considère le polynôme symétrique $f^{\Delta}(Y, Z) = \big(f(Y) - f(Z)\big)/(Y - Z)$. Il vérifie l'égalité $f^{\Delta}(X, X) = f'(X)$.
1. Soit $\delta = f^{\Delta}(y, z)$. Montrer que $\delta \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ et que $\delta^2 = f'(y)\delta = f'(z)\delta$.
2. On suppose que $1 \in \langle f, f' \rangle$.
2a. Montrer que $\mathbf{A}$ est séparable : expliciter l'idempotent de séparabilité.
2b. Montrer que $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \big\langle f^{\Delta}(y, z) \big\rangle$ et que $f^{\Delta}(y, z) = f'(y)\varepsilon_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = f'(z)\varepsilon_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$.
Remarque : $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement strictement finie.

Exercice 14. *(Intersection complète, jacobien, bezoutien et séparabilité)*
Dans cet exercice, le nombre d'indéterminées est égal au nombre de polynômes. On définit le *bezoutien* de $(f_1, \ldots, f_n)$ où les $f_i \in \mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ par :

$$\beta_{\underline{Y},\underline{Z}}(\underline{f}) = \det \mathrm{BZ}_{\underline{Y},\underline{Z}}(\underline{f})$$

de sorte que $\beta_{\underline{X},\underline{X}}(\underline{f}) = \mathrm{Jac}_{\underline{X}}(\underline{f})$.
On désigne par $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini, $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{k}[\underline{y}, \underline{z}]$ son algèbre enveloppante ; on suppose que $f_i(\underline{x}) = 0$ pour tout i.
1. Dans le cas où $\mathrm{Jac}_{\underline{x}}(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbf{A}^{\times}$, fournir une preuve directe du fait que $\mathbf{A}$ est une algèbre séparable.
2. On définit dans $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$:

$$\varepsilon = \mathrm{Jac}_{\underline{y}}(\underline{f})^{-1} \beta_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f}) = \beta_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f}) \, \mathrm{Jac}_{\underline{z}}(\underline{f})^{-1}.$$

Vérifier que $\beta_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f})$ et ε sont des générateurs de $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ et que ε est l'idempotent de séparabilité de $\mathbf{A}$.
3. Donner des exemples.

Exercice 15. *(Séparation des morphismes sur une algèbre séparable)*
Soient $\mathbf{k}$ un anneau commutatif et $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ deux $\mathbf{k}$-algèbres avec $\mathbf{A}$ séparable. Pour une fonction quelconque $f : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, on définit $\mathrm{Ann}_{\mathbf{B}}(f) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{B}} \langle f(\mathbf{A}) \rangle$.
1. Montrer qu'à tout morphisme $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est attaché un couple de familles finies $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$, avec $a_i \in \mathbf{A}$, $b_i \in \mathbf{B}$, vérifiant les propriétés suivantes :
— $\sum_i b_i \varphi(a_i) = 1$
— $\sum_i \varphi(a) b_i \otimes a_i = \sum_i b_i \otimes a a_i$ pour tout $a \in \mathbf{A}$.
2. Si au morphisme $\varphi' \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ est attaché le couple de familles $(a'_j)_j$, $(b'_j)_j$, montrer que

$$\textstyle\sum_i b_i \varphi'(a_i) = \sum_j b'_j \varphi(a'_j),$$

et que ce dernier élément, noté e, est un idempotent de $\mathbf{B}$ ayant la propriété suivante de « séparation des morphismes » :

$$\mathrm{Ann}_{\mathbf{B}}(\varphi - \varphi') = \langle e \rangle_{\mathbf{B}}, \qquad \langle \mathrm{Im}(\varphi - \varphi') \rangle_{\mathbf{B}} = \langle 1 - e \rangle_{\mathbf{B}}.$$

3. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ et, pour $i, j \in [\![1..n]\!]$, $e_{ij} = e_{ji}$ l'idempotent défini par $\mathrm{Ann}_{\mathbf{B}}(\varphi_i - \varphi_j) = \langle e_{ij} \rangle_{\mathbf{B}}$; en particulier, $e_{ii} = 1$. On dit qu'une matrice $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{B})$ est une *matrice d'évaluation de Dedekind* pour les n morphismes $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ si chaque colonne de A est de la forme ${}^{\mathrm{t}}[\, \varphi_1(a) \ \cdots \ \varphi_n(a) \,]$ pour un $a \in \mathbf{A}$ (dépendant de la colonne). Montrer l'existence d'une matrice

d'évaluation de Dedekind dont l'image contient les vecteurs ${}^{\mathrm{t}}[\,e_{1i}\ \cdots\ e_{ni}\,]$. En particulier, si $\mathrm{Ann}_{\mathbf{B}}(\varphi_i - \varphi_j) = 0$ pour $i \neq j$, une telle matrice est surjective.

Exercice 16. *(Une autre démonstration du point 2 du théorème d'Artin)*
Le contexte est celui du théorème 7.11 : on suppose que $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ est une algèbre galoisienne et l'on veut montrer l'existence de $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r \in \mathbf{A}$ tels que pour tout $\sigma \in G$ on ait :

$$\sum_{i=1}^{r} a_i \sigma(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $\tau \in \mathrm{G}$, $\tau \neq \mathrm{Id}$, montrer qu'il existe m_τ et $x_{1,\tau}, \ldots, x_{m_\tau,\tau}, y_{1,\tau}, \ldots, y_{m_\tau,\tau}$ dans $\mathbf{A}$ tels que :

$$\sum_{j=1}^{m_\tau} x_{j,\tau}\tau(y_{j,\tau}) = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m_\tau} x_{j,\tau} y_{j,\tau} = 1.$$

Conclure.

Exercice 17. *(Algèbres galoisiennes : quelques exemples élémentaires)*
On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{k}^n$. On fait agir S_n sur $\mathbf{k}^n$ par permutation des coordonnées : $\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$ pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$.
1. Soit $G \subset \mathrm{S}_n$ un sous-groupe transitif de cardinal n.

a. Montrer que $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^n, G)$ est une algèbre galoisienne.

b. Donner des exemples.

2. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{k}(e_1 + e_2) \oplus \mathbf{k}(e_3 + e_4) \subset \mathbf{k}^4$ et $G = \langle (1,2,3,4) \rangle$. Déterminer $\mathrm{Stp}_{\mathrm{S}_4}(\mathbf{B})$ et $H = \mathrm{Stp}_G(\mathbf{B})$. Est-ce que l'on a $\mathbf{B} = (\mathbf{k}^4)^H$?
3. Soit $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ une algèbre galoisienne ; le groupe G opère naturellement sur $\mathbf{A}[X]$.

a. Montrer que $(\mathbf{k}[X], \mathbf{A}[X], G)$ est une algèbre galoisienne.

b. Soit $\mathbf{B} = X\mathbf{A}[X] + \mathbf{k}$ ($\mathbf{B}$ est donc constitué des polynômes de $\mathbf{A}[X]$ dont le coefficient constant est dans $\mathbf{k}$). Alors, $\mathbf{B}$ est une sous-$\mathbf{k}$-algèbre de $\mathbf{A}[X]$ qui n'est pas de la forme $\mathbf{A}[X]^H$ sauf dans un cas particulier.

Exercice 18. Soient $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ avec $\mathbf{B}$ strictement étale sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{C}$ strictement finie sur $\mathbf{k}$. On suppose que $\mathrm{rg}_{\mathbf{k}}(\mathbf{B}) = \mathrm{rg}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C})$ (i.e. $\mathbf{C}$ et $\mathbf{B}$ ont même polynôme rang sur $\mathbf{k}$). Alors $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Exercice 19. En vous basant sur l'exercice 18 démontrer la correspondance galoisienne (théorème 7.19) entre les sous-groupes finis de G et les sous-$\mathbf{k}$-algèbres strictement étales de $\mathbf{A}$ lorsque $\mathbf{A}$ est connexe.

Exercice 20. *(Algèbres galoisiennes : idéaux globalement invariants)*
Soit $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, G)$ une algèbre galoisienne ; on dit qu'un idéal $\mathfrak{c}$ de $\mathbf{B}$ est *globalement invariant* si $\sigma(\mathfrak{c}) = \mathfrak{c}$ pour tout $\sigma \in G$.
1. Montrer que $\mathfrak{c}$ est engendré par des éléments invariants, i.e. par des éléments de $\mathbf{A}$.
2. De manière plus précise, on considère les deux transformations entre idéaux de $\mathbf{A}$ et idéaux de $\mathbf{B}$: $\mathfrak{a} \mapsto \mathfrak{a}\mathbf{B}$ et $\mathfrak{c} \mapsto \mathfrak{c} \cap \mathbf{A}$. Montrer qu'elles établissent une correspondance bijective croissante entre idéaux de $\mathbf{A}$ et idéaux de $\mathbf{B}$ globalement invariants.

Problème 1. *(Théorème de Lüroth)*
Soit $\mathbf{L} = \mathbf{k}(t)$ où $\mathbf{k}$ est un corps discret et t une indéterminée. Si $g = u/v \in \mathbf{L}$ est une fraction non constante irréductible ($u, v \in \mathbf{k}[t]$, étrangers), on définit la *hauteur* de g (par rapport à t) par : $\text{hauteur}_t(g) \stackrel{\text{def}}{=} \max\big(\deg_t(u), \deg_t(v)\big)$.

1. *(Partie directe du théorème de Lüroth)* On pose $\mathbf{K} = \mathbf{k}(g) \subseteq \mathbf{L}$. Montrer que $\mathbf{L}/\mathbf{K}$ est une extension algébrique de degré $d = \text{hauteur}(g)$. Plus précisément, t est algébrique sur $\mathbf{K}$ et son polynôme minimal est, à un facteur multiplicatif près dans $\mathbf{K}^\times$, égal à $u(T) - gv(T)$. Ainsi, tout coefficient non constant de $\text{Min}_{\mathbf{K},t}(T)$, $a \in \mathbf{K} = \mathbf{k}(g)$ s'écrit $a = \frac{\alpha g+\beta}{\gamma g+\delta}$ avec $\alpha\delta - \beta\gamma \in \mathbf{k}^\times$, et $\mathbf{k}(a) = \mathbf{k}(g)$.

2. Soit un élément arbitraire $f \in \mathbf{L}$. Donner une formule explicite utilisant les résultants pour exprimer f comme $\mathbf{K}$-combinaison linéaire de $(1, t, \ldots, t^{d-1})$.

3. Si h est un autre élément de $\mathbf{L} \setminus \mathbf{k}$ montrer que
$$\text{hauteur}\big(g(h)\big) = \text{hauteur}(g)\text{hauteur}(h).$$
Montrer que tout $\mathbf{k}$-homomorphisme d'algèbre $\mathbf{L} \to \mathbf{L}$ s'écrit $f \mapsto f(h)$ pour un $h \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{k}$. En déduire une description précise de $\text{Aut}_{\mathbf{k}}(\mathbf{L})$ au moyen des fractions de hauteur 1.

4. On note $\mathbb{PGL}_n(\mathbf{A})$ le groupe quotient $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})/\mathbf{A}^\times$ (où $\mathbf{A}^\times$ est identifié au sous-groupe des homothéties inversibles via $a \mapsto a\mathrm{I}_n$). À une matrice
$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{A}),$$
on associe le $\mathbf{A}$-automorphisme [10]
$$\varphi_A : \mathbf{A}(t) \to \mathbf{A}(t), \quad t \mapsto \tfrac{at+b}{ct+d}.$$
On a $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{BA}$ et $\varphi_A = \text{Id} \Leftrightarrow A = \lambda\mathrm{I}_2$ ($\lambda \in \mathbf{A}^\times$). Ainsi $A \mapsto \varphi_A$ définit un homomorphisme injectif $\mathbb{PGL}_2(\mathbf{A})^{\text{op}} \to \text{Aut}_{\mathbf{A}}\big(\mathbf{A}(t)\big)$.
Montrer que dans le cas d'un corps discret on obtient un isomorphisme.

5. *(Partie réciproque du théorème de Lüroth)* Soient $g_1, \ldots, g_r \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{k}$. Montrer que $\mathbf{k}(g_1, \ldots, g_r) = \mathbf{k}(g)$ pour un g convenable. Il suffit de traiter le cas $n = 2$. On montre que $\mathbf{L}$ est strictement fini sur $\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}(g_1, g_2)$, on doit alors avoir $\mathbf{K}_1 = \mathbf{k}(g)$ pour n'importe quel coefficient non constant g de $\text{Min}_{\mathbf{K}_1,t}(T)$.
NB. Puisque $\mathbf{L}$ est un $\mathbf{k}(g_1)$-espace vectoriel de dimension finie, tout sous-corps de $\mathbf{L}$ contenant strictement $\mathbf{k}$ est, en mathématiques classiques, de type fini, donc de la forme $\mathbf{k}(g)$. Notre formulation de la partie réciproque du théorème de Lüroth donne la signification constructive de cette affirmation.

---

10. Pour un anneau arbitraire $\mathbf{A}$, l'anneau $\mathbf{A}(t)$ est le « localisé de Nagata » de $\mathbf{A}[t]$ obtenu en inversant les polynômes primitifs.

Problème 2. *(Opérateurs différentiels et algèbres de Frobenius)*
Dans les premières questions, $\mathbf{k}$ est un anneau commutatif. La *dérivée de Hasse* d'ordre m d'un polynôme de $\mathbf{k}[X]$ se définit formellement par $f^{[m]} = \frac{1}{m!} f^{(m)}$. De même, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on définit $\partial^{[\alpha]}$ sur $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ par :

$$\partial^{[\alpha]} f = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha f}{\partial X^\alpha} \quad \text{avec} \quad \alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_n!, \quad f \in \mathbf{k}[\underline{X}].$$

On a alors $\partial^{[\alpha]}(fg) = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \partial^{[\beta]}(f)\, \partial^{[\gamma]}(g)$. On note $\delta^{[\alpha]} : \mathbf{k}[\underline{X}] \to \mathbf{k}$ la forme linéaire $f \mapsto \partial^{[\alpha]}(f)(0)$. Ainsi, $f = \sum_\alpha \delta^{[\alpha]}(f) X^\alpha$. On en déduit, en notant $\alpha \leqslant \beta$ pour $X^\alpha \mid X^\beta$:

$$X^\alpha \centerdot \delta^{[\beta]} = \begin{cases} \delta^{[\beta-\alpha]} \text{ si } \alpha \leqslant \beta \\ 0 \text{ sinon,} \end{cases} \qquad \partial^{[\alpha]}(X^\beta) = \begin{cases} X^{\beta-\alpha} \text{ si } \alpha \leqslant \beta \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Soit $g = \sum_\beta b_\beta X^\beta \in \mathbf{k}[\underline{X}]$. On évalue en $(\underline{0})$ le *polynôme différentiel* $\sum_\beta b_\beta \partial^{[\beta]}$, on obtient une forme linéaire $\delta_g : \mathbf{k}[\underline{X}] \to \mathbf{k}$, $\delta_g = \sum_\beta b_\beta \delta^{[\beta]}$, puis un idéal $\mathfrak{a}_g$ de $\mathbf{k}[\underline{X}]$:

$$\mathfrak{a}_g = \{\, f \in \mathbf{k}[\underline{X}] \mid f \centerdot \delta_g = 0 \,\} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, f \in \mathbf{k}[\underline{X}] \mid \delta_g(fu) = 0 \ \forall u \in \mathbf{k}[\underline{X}] \,\}.$$

On obtient ainsi une $\mathbf{k}$-algèbre de Frobenius $\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}_g$ (avec δ_g dualisante).
1. Soit $f = \sum_\alpha a_\alpha X^\alpha$, $g = \sum_\beta b_\beta X^\beta$. On note $\partial_f : \mathbf{k}[\underline{X}] \to \mathbf{k}[\underline{X}]$ l'opérateur différentiel associé à f, i.e. $\partial_f = \sum_\alpha a_\alpha \partial^{[\alpha]}$. Vérifier la relation suivante entre l'opérateur ∂_f et la forme linéaire δ_g :

$$\textstyle\sum_\gamma (f \centerdot \delta_g)(X^\gamma) X^\gamma = \partial_f(g) = \sum_{\alpha \leqslant \beta} a_\alpha b_\beta X^{\beta-\alpha}.$$

En déduire que $f \centerdot \delta_g = 0 \iff \partial_f(g) = 0$.
Il faut maintenant noter que la loi $f * g = \partial_f(g)$ munit le groupe additif $\mathbf{k}[\underline{X}]$ d'une structure de $\mathbf{k}[\underline{X}]$-module (car en particulier $\partial_{f_1 f_2} = \partial_{f_1} \circ \partial_{f_2}$). Mais comme $X^\alpha * X^\beta = X^{\beta-\alpha}$ ou 0, certains auteurs utilisent $X^{-\alpha}$ au lieu de X^α : ils munissent $\mathbf{k}[\underline{X}]$ d'une structure de $\mathbf{k}[\underline{X}^{-1}]$-module. D'autres auteurs permutent $\underline{X}$ et $\underline{X}^{-1}$: ils munissent $\mathbf{k}[\underline{X}^{-1}]$ d'une structure de $\mathbf{k}[\underline{X}]$-module de façon à ce que l'idéal $\mathfrak{a}_g$ (annulateur de $g \in \mathbf{k}[\underline{X}^{-1}]$) soit un idéal d'un anneau de polynômes avec des indéterminées à exposants $\geqslant 0$. Dans ce dernier formalisme, un polynôme f avec des indéterminées à exposants $\geqslant 0$ agit donc sur un polynôme g ayant des indéterminées à exposants $\leqslant 0$ pour fournir un polynôme $f * g$ ayant des indéterminées à exposants $\leqslant 0$ (en supprimant les monômes contenant un exposant > 0). Ainsi, si $g = X^{-2} + Y^{-2} + Z^{-2}$, l'idéal $\mathfrak{a}_g$ de $\mathbf{k}[X, Y, Z]$, contient par exemple XY, $X^2 - Y^2$ et tout polynôme homogène de degré $\geqslant 3$.
2. Soit $d \geqslant 1$. Étudier le cas particulier de la somme de Newton $g = \sum_i X_i^{-d}$, c'est-à-dire $\delta_g : f \mapsto \sum_i \frac{1}{d!} \frac{\partial^d f}{\partial X_i^d}(0)$, somme des composantes sur $X_1^d, \dots, X_n^d$.

Dans la suite, on fixe $g = \sum_\beta b_\beta X^\beta$, ou selon les goûts, $g = \sum_\beta b_\beta X^{-\beta}$.
3. Montrer que l'on a une inclusion $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}_g$ pour un idéal $\mathfrak{b} = \langle X_1^{e_1}, \cdots, X_n^{e_n} \rangle$ avec des entiers $e_i \geqslant 1$. En particulier, $\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{b}$ est un $\mathbf{k}$-module libre de rang fini et $\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}_g$ est un $\mathbf{k}$-module de type fini.
4. Définir une application $\mathbf{k}$-linéaire $\varphi : \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{b} \to \mathbf{k}[\underline{X}]$ telle que $\operatorname{Ker} \varphi = \mathfrak{a}_g/\mathfrak{b}$.
On peut donc calculer $\mathfrak{a}_g$ si l'on sait résoudre les systèmes linéaires sur $\mathbf{k}$.

5. On suppose que $\mathbf{k}$ est un corps discret et donc $\mathbf{A} := \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}_g$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que $(\mathbf{A}, \delta_g)$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de Frobenius.

Problème 3. *(Le théorème 90 d'Hilbert, version additive)*
Soit $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, G)$ une algèbre galoisienne où $G = \langle\sigma\rangle$ est cyclique d'ordre n.
1. En considérant un élément $z \in \mathbf{A}$ de trace 1, on montrera que :

$$\mathbf{A} = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma) \oplus \mathbf{k}z, \qquad \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma) = \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}_G\,.$$

En conséquence $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma)$ est un $\mathbf{k}$-module stablement libre de rang $n-1$. On pourra utiliser la famille d'endomorphismes $(c_i)_{i\in[\![0..n]\!]}$:

$$c_0 = 0,\ c_1(x) = x,\ c_2(x) = x + \sigma(x),\ \ldots,\ c_i(x) = \textstyle\sum_{j=0}^{i-1} \sigma^j(x),\ \ldots$$

2. Pour qu'un $x \in \mathbf{A}$ soit de la forme $y - \sigma(y)$, il faut et il suffit que $\mathrm{Tr}_G(x) = 0$.
3. Plus généralement, soit $(c_\tau)_{\tau\in G}$ une famille dans $\mathbf{A}$. Montrer qu'il existe un élément y tel que $c_\tau = y - \tau(y)$ si, et seulement si, la famille vérifie la condition de cocycle additif suivante, pour tous $\tau_1,\ \tau_2 \in G$: $c_{\tau_1\tau_2} = \tau_1(c_{\tau_2}) + c_{\tau_1}$.
4. On suppose que n est un nombre premier p et que $p = 0$ dans $\mathbf{k}$. Montrer l'existence d'un $y \in \mathbf{A}$ tel que $\sigma(y) = y + 1$.
En déduire que $(1, y, \ldots, y^{p-1})$ est une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}$ et que le polynôme caractéristique de y est de la forme $Y^p - Y - \lambda$ avec $\lambda \in \mathbf{k}$.
On a donc $\mathbf{A} = \mathbf{k}[y] \simeq \mathbf{k}[Y]/\langle Y^p - Y - \lambda\rangle$ (extension d'Artin-Schreier).
5. Donner une réciproque au point précédent.

Problème 4. *(Algèbres galoisiennes : étude d'un exemple)* On considère un anneau $\mathbf{B}$ dans lequel 2 est inversible, avec $x,\ y \in \mathbf{B}$ et $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ d'ordre 2 vérifiant $x^2 + y^2 = 1$, $\sigma(x) = -x$ et $\sigma(y) = -y$. On peut prendre comme exemple l'anneau $\mathbf{B}$ des fonctions continues sur le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ et pour σ l'involution $f \mapsto \{(x, y) \mapsto f(-x, -y)\}$. On note $\mathbf{A} = \mathbf{B}^{\langle\sigma\rangle}$ (sous-anneau des « fonctions paires »).
1. Montrer que $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \langle\sigma\rangle)$ est une algèbre galoisienne.
En conséquence, $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 2.
2. Soit $E = \mathbf{A}x + \mathbf{A}y$ (sous-module des « fonctions impaires »).
Vérifier que $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus E$ et que E est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1.
3. On pose $x_1 = 1$, $x_2 = x$, $x_3 = y$ de sorte que (x_1, x_2, x_3) est un système générateur du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$. Expliciter y_1, y_2, $y_3 \in \mathbf{B}$ comme dans le lemme 7.10, i.e. $\big((x_i)_{i\in[\![1..3]\!]}, (y_i)_{i\in[\![1..3]\!]}\big)$ est un système tracique de coordonnées.
En déduire une matrice de projection $P \in \mathbb{M}_3(\mathbf{A})$ de rang 2 avec $\mathbf{B} \simeq_{\mathbf{A}} \mathrm{Im}\,P$.
4. Soit $R = \begin{bmatrix} x & -y \\ y & x \end{bmatrix} \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{B})$. Montrer que cette « rotation » R induit un isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules entre E^2 et $\mathbf{A}^2$:

$$\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \mapsto R \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xf - yg \\ yf + xg \end{bmatrix}.$$

En conséquence (question suivante), $E \otimes_{\mathbf{A}} E \simeq \mathbf{A}$; vérifier que $f \otimes g \mapsto fg$ réalise un isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules de $E \otimes_{\mathbf{A}} E$ sur $\mathbf{A}$.
5. Pour un $\mathbf{A}$-module M, on note $M^{2\otimes} = M \otimes_{\mathbf{A}} M$, $M^{3\otimes} = M \otimes_{\mathbf{A}} M \otimes_{\mathbf{A}} M$, etc...
Soit E un $\mathbf{A}$-module ($\mathbf{A}$ quelconque) vérifiant $E^n \simeq \mathbf{A}^n$ pour un certain $n \geqslant 1$.
Montrer que E est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1 et que $E^{n\otimes} \simeq \mathbf{A}$.

6. Soit $\mathfrak{a}$ l'idéal de $\mathbf{A}$ défini par $\mathfrak{a} = \langle xy, x^2 \rangle$. Vérifier que $\mathfrak{a}^2 = x^2\mathbf{A}$ (donc si x est régulier, $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible de $\mathbf{A}$), que $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ est principal et enfin, que $\mathfrak{a}$, vu comme sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{B}$, est égal à xE.
7. Soit $\mathbf{k}$ un anneau non trivial avec $2 \in \mathbf{k}^\times$ et $\mathbf{B} = \mathbf{k}[X,Y]/\langle X^2 + Y^2 - 1 \rangle$. On écrit $\mathbf{B} = \mathbf{k}[x,y]$.
On peut appliquer ce qui précède en prenant σ défini par $\sigma(x) = -x$, $\sigma(y) = -y$. On suppose que $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$ dans $\mathbf{k}$ (par exemple si $\mathbf{k}$ est un corps discret et -1 n'est pas un carré dans $\mathbf{k}$).

a. Montrer que $\mathbf{B}^\times = \mathbf{k}^\times$; illustrer l'importance de l'hypothèse « de réalité » faite sur $\mathbf{k}$.

b. Montrer que $\mathfrak{a}$ n'est pas principal et donc E n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre. En déduire que $\mathbf{B}$ n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre.

8. Soit $\mathbf{B}$ l'anneau des fonctions continues (réelles) sur le cercle unité $x^2 + y^2 = 1$ et σ l'involution $f \mapsto \{(x,y) \mapsto f(-x,-y)\}$. Montrer que $\mathfrak{a}$ n'est pas principal et que $\mathbf{B}$ n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. On a $\mathbf{B} = \mathbf{K}[x_1, \ldots, x_n]$, avec $[\,\mathbf{B} : \mathbf{K}\,] = m$. On va faire un calcul qui montre que la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{B}$ est monogène ou contient un idempotent $e \neq 0, 1$. Dans le deuxième cas, $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}_1 \times \mathbf{B}_2$, avec $[\,\mathbf{B}_i : \mathbf{K}\,] = m_i < m$, $m_1 + m_2 = m$, ce qui permet de conclure par récurrence sur m.
Si l'on est capable de traiter le cas $n = 2$, on a gagné, car $\mathbf{K}[x_1, x_2]$ est étale sur $\mathbf{K}$, donc ou bien on remplace $\mathbf{K}[x_1, x_2]$ par $\mathbf{K}[y]$ pour un certain y, ou bien on trouve un idempotent $e \neq 0, 1$ dedans. La démonstration du point *1* du théorème montre qu'une $\mathbf{K}$-algèbre étale $\mathbf{K}[x,z]$ est monogène si $\mathbf{K}$ contient une suite infinie d'éléments distincts. Elle utilise un polynôme $d(a,b)$ qui, évalué dans $\mathbf{K}$ doit donner un élément inversible. Si l'on n'a pas d'information sur l'existence d'une suite infinie d'éléments distincts de $\mathbf{K}$, on énumère les entiers de $\mathbf{K}$ jusqu'à obtenir α, β dans $\mathbf{K}$ avec $d(\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^\times$, ou à conclure que la caractéristique est égale à un nombre premier p. On énumère ensuite les puissances des coefficients de f et de g (les polynômes minimaux de x et z sur $\mathbf{K}$) jusqu'à obtenir α, β dans $\mathbf{K}$ avec $d(\alpha,\beta) \in \mathbf{K}^\times$, ou à conclure que le corps $\mathbf{K}_0$ engendré par les coefficients de f et g est un corps fini. Dans ce cas, $\mathbf{K}_0[x,z]$ est une $\mathbf{K}_0$-algèbre finie réduite. C'est un anneau réduit fini, donc ou bien c'est un corps fini, de la forme $\mathbf{K}_0[\gamma]$, et $\mathbf{K}[x,z] = \mathbf{K}[\gamma]$, ou bien il contient un idempotent $e \neq 0, 1$.

Remarque. La lectrice pourra vérifier que la transformation de preuve que l'on a fait subir au cas « $\mathbf{B}$ est un corps discret » est exactement la mise en œuvre de la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux zéro-dimensionnels réduits. En fait la même machinerie s'applique aussi pour le corps discret $\mathbf{K}$ et fournit le résultat suivant : une algèbre strictement étale sur un anneau zéro-dimensionnel réduit $\mathbf{K}$ (définition 5.1) est un produit fini de $\mathbf{K}$-algèbres strictement étales. ∎

Exercice 3. *1.* On écrit $x = (x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et l'on identifie $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{B}$ par $1 \mapsto (1, \dots, 1)$. En écrivant $e_i \in \mathbf{A}[x]$, on obtient que les éléments $x_i - x_j$ sont inversibles pour $j \neq i$. Réciproquement, si $x_i - x_j$ est inversible pour tout $i \neq j$, on a $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x] = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}x \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}x^{n-1}$ (interpolation de Lagrange, déterminant de Vandermonde).
2. Si et seulement si $\#\mathbf{A} \geqslant n$.

Exercice 4. *1* et *2.* Si $(a_1, \dots, a_\ell)$ est une base de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{K}$, c'est aussi une base de $\mathbf{B}(v)$ sur $\mathbf{K}(v)$.
3. Soit b/p un idempotent de $\mathbf{B}(v)$: on a $b^2 = bp$. Si $p(0) = 0$, alors $b(0)^2 = 0$, et puisque $\mathbf{B}$ est réduite, $b(0) = 0$. On peut alors diviser b et p par v. Ainsi, on peut supposer que $p(0) \in \mathbf{K}^\times$. En divisant b et p par $p(0)$ on est ramené au cas où $p(0) = 1$. On voit alors que $b(0)$ est idempotent. On le note b_0 et l'on pose $e_0 = 1 - b_0$. Écrivons $e_0 b = vc$. On multiplie l'égalité $b^2 = bp$ par $e_0 = e_0^2$ et l'on obtient $v^2c^2 = vcp$. Donc $vc(p - vc) = 0$, et puisque le polynôme $p - vc$ est de terme constant 1, donc régulier, cela donne $c = 0$. Donc $b = b_0 b$. Raisonnons un moment modulo e_0 : on a $b_0 \equiv 1$ donc b est primitif et l'égalité $b^2 = bp$ se simplifie en $b \equiv p \bmod e_0$. Ceci donne l'égalité $b = b_0 b = b_0 p$ dans $\mathbf{B}(v)$ et donc $b/p = b_0$.

Exercice 6.
1. Classique : c'est $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ si $d \equiv 2$ ou $3 \bmod 4$ et $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ si $d \equiv 1 \bmod 4$.
2. On a $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{a}]$. On a $\beta^2 = \frac{a+1}{2} + \sqrt{a} \in \mathbf{A}$, donc β est entier sur $\mathbf{A}$, puis sur $\mathbb{Z}$. En fait $(\beta^2 - \frac{a+1}{2})^2 = a$ et β est racine de $X^4 - (a+1)X^2 + (\frac{a-1}{2})^2$. On trouve ainsi $(\sigma\tau)(\beta) = \beta - \sqrt{2}$.
3. On trouve $(\sigma\tau)(z) = r - (s+u)\sqrt{2} + u\beta$ puis $z + (\sigma\tau)(z) = 2r + u\sqrt{2a}$. Ce dernier élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2a})$ est entier sur $\mathbb{Z}$, donc dans $\mathbb{Z}[\sqrt{2a}]$ car $2a \equiv 2 \bmod 4$. D'où $u \in \mathbb{Z}$ (et $2r \in \mathbb{Z}$). On remplace z par $z - u\beta$ qui est entier sur $\mathbb{Z}$, i.e. $z = r + s\sqrt{2} + t\sqrt{a}$. On a $\sigma(z) = r - s\sqrt{2} + t\sqrt{a}$, $\tau(z) = r + s\sqrt{2} - t\sqrt{a}$; en utilisant $z + \sigma(z)$ et $z + \tau(z)$, on voit que $2r$, $2s$, $2t \in \mathbb{Z}$. Utilisons :
$z\sigma(z) = x + 2rt\sqrt{a}$, $z\tau(z) = y + 2rs\sqrt{2}$, avec $x = r^2 - 2s^2 + at^2$, $y = r^2 + 2s^2 - at^2$.
On a donc x, $y \in \mathbb{Z}$ puis $x + y = 2r^2 \in \mathbb{Z}$, $x - y = 2at^2 - (2s)^2 \in \mathbb{Z}$, donc $2at^2 \in \mathbb{Z}$. De $2r$, $2r^2 \in \mathbb{Z}$, on déduit $r \in \mathbb{Z}$. De même, de $2t$, $2at^2 \in \mathbb{Z}$ (et du fait que a est impair), on tire $t \in \mathbb{Z}$. Et puis enfin $s \in \mathbb{Z}$. Ouf !
Grâce à la $\mathbb{Z}$-base de $\mathbf{B}$, on obtient $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbb{Z}} = 2^8 a^2$.
4. On a : $\mathbf{B} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{a} \oplus \mathbb{Z}\sqrt{2} \oplus \mathbb{Z}\beta = \mathbf{A} \oplus E$ avec $E = \mathbb{Z}\sqrt{2} \oplus \mathbb{Z}\beta$.
On a aussi $2E = \sqrt{2}\,\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a} = 2\,\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}(\sqrt{a} - 1) = \big\langle 2, \sqrt{a} - 1 \big\rangle_{\mathbf{A}}$. Ceci prouve d'une part que E est un $\mathbf{A}$-module, et d'autre part qu'il est isomorphe à l'idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$. En conséquence, E est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini de rang 1. L'écriture $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus E$ certifie que $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, écrit comme somme directe d'un $\mathbf{A}$-module libre de rang 1 et d'un projectif de type fini de rang 1. En général, l'idéal $\mathfrak{a}$ n'est pas principal, donc E n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre. Voici un petit échantillon de valeurs de $a \equiv 3 \bmod 4$; on a souligné quand l'idéal $\mathfrak{a}$ est principal :
$$-33,\ -29,\ -21,\ -17,\ -13,\ -5,\ \underline{-1},\ \underline{3},\ \underline{7},\ \underline{11},\ 15,\ \underline{19},\ \underline{23},\ \underline{31},\ 35.$$
Dans le cas où $\mathfrak{a}$ n'est pas principal, $\mathbf{B}$ n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre : sinon, E serait stablement libre de rang 1, donc libre (voir l'exercice V-13). Enfin, on a toujours $\mathfrak{a}^2 = 2\mathbf{A}$ (voir la suite), ou encore $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{a}^{-1} \simeq \mathfrak{a}^\star$.

En conséquence $\mathbf{B} \simeq_{\mathbf{A}} \mathbf{B}^\star$. Justification de $\mathfrak{a}^2 = 2\mathbf{A}$; toujours dans le même contexte ($a \equiv 3 \bmod 4$ donc $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[\sqrt{a}\,]$), on a pour $m \in \mathbb{Z}$:

$$\left\langle m, 1+\sqrt{a}\right\rangle \left\langle m, 1-\sqrt{a}\right\rangle = \mathrm{pgcd}(a-1, m)\,\mathbf{A}.$$

En effet, l'idéal de gauche est engendré par $\left(m^2, m(1\pm\sqrt{a}), 1-a\right)$, tous multiples du pgcd. Cet idéal contient $2m = m(1+\sqrt{a}) + m(1-\sqrt{a})$, donc il contient l'élément $\mathrm{pgcd}(m^2, 2m, 1-a) = \mathrm{pgcd}(m, 1-a)$, (l'égalité est due à $a \equiv 3 \bmod 4$). Pour $m = 2$, on a $\left\langle 2, 1+\sqrt{a}\right\rangle = \left\langle 2, 1-\sqrt{a}\right\rangle = \mathfrak{a}$ et $\mathrm{pgcd}(a-1, 2) = 2$.

Exercice 7. On voit $\mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}'$ comme $\mathbf{A}$-algèbre, extension des scalaires à $\mathbf{A}$ de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}'$; elle est libre de rang n'. On dispose donc d'une tour d'algèbres libres $\mathbf{k} \to \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et la formule de transitivité du discriminant fournit :

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(\underline{x} \otimes \underline{x}') = \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\underline{x})^{n'} \cdot \mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\left(\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(1 \otimes \underline{x}')\right).$$

Mais $\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(1 \otimes \underline{x}') = \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}}(\underline{x}')$. Comme c'est un élément de $\mathbf{k}$, sa norme $\mathrm{N}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ vaut $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}}(\underline{x}')^n$. En fin de compte on obtient l'égalité

$$\mathrm{Disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(\underline{x} \otimes \underline{x}') = \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\underline{x})^{n'}\ \mathrm{Disc}_{\mathbf{A}'/\mathbf{k}}(\underline{x}')^n.$$

Exercice 8. On va utiliser le résultat classique d'algèbre linéaire suivant. Soit E un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathrm{End}_{\mathbf{K}}(E)$. Si d le degré du polynôme minimal de u, il existe $x \in E$ tel que les éléments x, $u(x)$, …, $u^{d-1}(x)$ soient $\mathbf{K}$-linéairement indépendants.
Ici $[\,\mathbf{L} : \mathbf{K}\,] = n$, et $\mathrm{Id}_{\mathbf{L}}$, σ, …, σ^{n-1}, sont $\mathbf{K}$-linéairement indépendants, donc le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$, de degré n. On applique le résultat ci-dessus.

Exercice 9. *1.* A est la matrice compagne du polynôme $X^2 - X + 1 = \Phi_6(X)$, donc $A^3 = -\mathrm{I}_2$ dans $\mathbb{GL}_2(\mathbf{k})$ et $A^3 = 1$ dans $\mathbb{PGL}_2(\mathbf{k})$.
2. On sait par le théorème d'Artin que $\mathbf{k}(t)/\mathbf{k}(t)^G$ est une extension galoisienne de groupe de Galois A_3. Le calcul donne

$$g = t + \sigma(t) + \sigma^2(t) = \tfrac{t^3-3t-1}{t(t+1)}.$$

On a évidemment $g \in \mathbf{k}(t)^G$ et $t^3 - gt^2 - (g+3)t - 1 = 0$. Donc, (partie directe du théorème de Lüroth, problème 1) $[\,\mathbf{k}(t) : \mathbf{k}(g)\,] = 3$, et $\mathbf{k}(t)^G = \mathbf{k}(g)$.
3. Puisque $\mathbf{k}(a) \simeq \mathbf{k}(g)$ et $f_g(t) = 0$, l'extension $\mathbf{k}(a) \to \mathbf{k}[T]/\langle f_a\rangle$ est une photocopie de l'extension $\mathbf{k}(g) \to \mathbf{k}(t)$.
4. Soit σ un générateur de $\mathrm{Aut}(\mathbf{L}/\mathbf{K})$. Cette question revient à dire que l'on peut trouver un $t \in \mathbf{L} \setminus \mathbf{K}$ tel que $\sigma(t) = \frac{-1}{t+1}$ $(*)$. Puisque t doit être de norme 1, on le cherche de la forme $t = \frac{\sigma(u)}{u}$. Le calcul montre alors que $(*)$ est satisfaite à condition que $u \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_G)$. Il reste à montrer qu'il existe un $u \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_G)$ tel que $\frac{\sigma(u)}{u} \notin \mathbf{K}$. Cela revient à dire que la restriction de σ à $E = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr}_G)$ n'est pas une homothétie. Or $E \subseteq \mathbf{L}$ est un sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2, stable par σ. D'après l'exercice 8, le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{L}$ admet un générateur pour l'endomorphisme σ. Cette propriété d'algèbre linéaire reste vraie pour tout sous-espace stable par σ.

Exercice 10. Les éléments $g \otimes h$ forment une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$.
Soit $z = \sum_{g,h} a_{g,h}\, g \otimes h$ avec $a_{g,h} \in \mathbf{k}$. Alors, $z \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ si, et seulement si, on a $g' \cdot z = z \cdot g'$ pour tout $g' \in G$. On obtient $a_{g,h} = a_{1,gh}$, donc z est combinaison $\mathbf{k}$-linéaire des $z_k \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{gh=k} g \otimes h$.
Réciproquement, on voit que $z_k \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ et l'on a $z_k = k \cdot z_1 = z_1 \cdot k$.

Donc $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ est le $\mathbf{k}$-module engendré par les z_k, et c'est le $\mathbf{A}$-module (ou l'idéal de $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$) engendré par $z_1 = \sum_g g \otimes g^{-1}$.
L'image par $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ de $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ est l'idéal $n\mathbf{A}$.
Concernant la trace, on a $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(g) = 0$ si $g \neq 1$. Donc $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\big(\sum_g a_g g\big) = na_1$.
Si $a = \sum_g a_g g$ et $b = \sum_g b_g g$, alors $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(ab) = n\sum_g a_g b_{g^{-1}}$.
Les équivalences du point *2* sont donc claires, et dans le cas où $n \in \mathbf{k}^\times$, l'idempotent de séparabilité est $n^{-1}\sum_g g \otimes g^{-1}$.
3. Soit $\lambda : \mathbf{k}[G] \to \mathbf{k}$ la forme linéaire « coordonnée sur 1 ». Pour g, $h \in G$, on a $\lambda(gh) = 0$ si $h \neq g^{-1}$, et 1 sinon. Donc, λ est dualisante et $(g^{-1})_{g\in G}$ est la base duale de $(g)_{g\in G}$ relativement à λ. On a $\mathrm{Tr}_{\mathbf{k}[G]/\mathbf{k}} = n \cdot \lambda$.

Exercice 11. *1.* Il suffit de le faire pour $g \in \{1, x, \dots, x^{n-1}\}$, qui est une base de $\mathbf{A}[Y]$ sur $\mathbf{k}[Y]$. Le membre droit de $(*)$ avec $g = x^i$ est

$$h_i = \varphi\big((Y-x)x^i\big) = \varphi(Yx^i - x^{i+1}) = Y^{i+1} - \varphi(x^{i+1}).$$

Si $i < n-1$, on a $\varphi(x^{i+1}) = Y^{i+1}$, donc $h_i = 0$. Pour $i = n-1$, on a

$$\varphi(x^n) = -\varphi(a_0 + a_1x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1}) = -(a_0 + a_1Y + \cdots + a_{n-1}Y^{n-1}),$$

et $h_n(Y) = f(Y)$, ce qui permet de conclure.
2. Pour $i < n$, on a

$$f(Y)\widetilde{\lambda}\big(x^i f'(Y)\big) = \varphi\big((Y-x)x^i f'(Y)\big) = \varphi\big(x^i f(Y)\big) = Y^i f(Y), \text{ i.e.}$$
$$\widetilde{\lambda}\big(x^i f'(Y)\big) = \textstyle\sum_{j<n} \lambda(x^i b_j)Y^j = Y^i.$$

Donc $(b_j \,.\, \lambda)(x^i) = \lambda(x^i b_j) = \delta_{ij}$. Ainsi, λ est dualisante.
3. Pour deux bases duales (e_i), (α_i), on a $\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \sum e_i \,.\, \alpha_i$. Avec les deux bases duales $(1, x, \dots, x^{n-1})$ et $(b_0 \,.\, \lambda, b_1 \,.\, \lambda, \dots, b_{n-1} \,.\, \lambda)$ on obtient :

$$\mathrm{Tr}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = b_0 \,.\, \lambda + xb_1 \,.\, \lambda + \cdots + x^{n-1}b_{n-1} \,.\, \lambda = f'(x) \,.\, \lambda.$$

Exercice 12. *1.* La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A} := \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/\langle f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)\rangle$ est le produit tensoriel des $\mathbf{k}[X_i]/\langle f_i(X_i)\rangle$ qui sont des algèbres de Frobenius, donc $\mathbf{A}$ est une algèbre de Frobenius. Précision avec $d_i = \deg(f_i)$. La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ est libre de rang $d_1 \cdots d_n$, les monômes $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ avec $\alpha_i < d_i$ pour tout i forment une $\mathbf{k}$-base, et la forme $\mathbf{A}$-linéaire « coordonnée sur $x_1^{d_1-1} \cdots x_n^{d_n-1}$ » est dualisante.
2. Soient δ_0, δ_x, δ_y les trois formes linéaires sur $\mathbf{k}[X, Y]$ définies par

$$\delta_0(f) = f(0), \quad \delta_x(f) = f'_X(0), \quad \delta_y(f) = f'_Y(0).$$

Elles passent au quotient sur $\mathbf{A}$ et définissent une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}^\star$, base duale de la $\mathbf{k}$-base $(1, x, y)$ de $\mathbf{A}$. On a :

$$x \,.\, \delta_x = y \,.\, \delta_y = \delta_0,$$

et donc $\mathbf{A}^\star = \mathbf{A} \,.\, \delta_x + \mathbf{A} \,.\, \delta_y$. Montrons que $G = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$ est une matrice de présentation de $\mathbf{A}^\star$ pour (δ_x, δ_y). Il faut voir que pour u, v dans $\mathbf{A}$ on a l'implication

$$u \,.\, \delta_x + v \,.\, \delta_y = 0 \implies \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}.$$

En multipliant $u \,.\, \delta_x + v \,.\, \delta_y = 0$ par x, on obtient $u \,.\, \delta_0 + (xv) \,.\, \delta_y = 0$; on évalue en 1 et l'on fait $x := 0$ pour obtenir $u(0, y) = 0$, i.e. $u \in \mathbf{A}x$. De même, $v \in \mathbf{A}y$. Si l'on écrit $u = xr$, $v = ys$, on obtient $r \,.\, \delta_0 + s \,.\, \delta_0 = 0$, i.e. $r + s = 0$, ce que l'on voulait.

L'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_1(G) = \langle x, y\rangle$ est non nul, de carré nul, donc il ne peut pas être engendré par un idempotent. En conséquence, le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}^\star$ n'est pas projectif. A fortiori, il n'est pas libre.

Exercice 13. *1.* On a $(y-z)f^\Delta(y,z) = 0$ donc $\delta := f^\Delta(y,z) \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J})$. On sait alors que pour $\alpha \in \mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, on a $\alpha\delta = \mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\alpha)\cdot\delta = \delta\cdot\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\alpha)$. On applique ce résultat à $\alpha = \delta$ en remarquant que $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\delta) = f'(x)$.
2. On écrit $f(Y) - f(Z) = (Y-Z)f'(Y) - (Y-Z)^2 g(Y,Z)$, ce qui donne dans l'algèbre $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$ l'égalité $(y-z)f'(y) = (y-z)^2 g(y,z)$. On écrit l'égalité $1 = uf + vf'$ dans $\mathbf{A}[X]$. Alors $f'(y)v(y) = 1$, donc $y - z = (y-z)^2 v(y)g(y,z)$.
Lorsque $a = a^2 b$, l'élément ab est idempotent et $\langle a\rangle = \langle ab\rangle$. Donc $\mathrm{J} = \langle e\rangle$ avec l'idempotent $e = (y-z)v(y)g(y,z)$.
On a $f^\Delta(Y,Z) = f'(Y) - (Y-Z)g(Y,Z)$, donc
$f^\Delta(y,z) = f'(y) - (y-z)g(y,z) = f'(y)\big(1 - (y-z)v(y)g(y,z)\big) = f'(y)(1-e)$.

Exercice 14. *1.* On note $f'_{ij} = \partial f_i/\partial X_j$ et l'on écrit dans $\mathbf{k}[\underline{Y},\underline{Z}]$:
$f_i(\underline{Y}) - f_i(\underline{Z}) - \sum_j (Y_j - Z_j) f'_{ij}(\underline{Y}) =: -g_i(\underline{Y},\underline{Z}) \in \langle Y_1 - Z_1, \dots, Y_n - Z_n\rangle^2$.
Dans $\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}}$, on obtient, en posant $A = \mathrm{JAC}_{\underline{y}}(f_1,\dots,f_n)$:

$$A\begin{bmatrix} y_1 - z_1 \\ \vdots \\ y_n - z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(\underline{y},\underline{z}) \\ \vdots \\ g_n(\underline{y},\underline{z}) \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad g_i(\underline{y},\underline{z}) \in \langle y_1 - z_1, \dots, y_n - z_n\rangle^2 = \mathrm{J}^2_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}.$$

En inversant A, on obtient $y_i - z_i \in \mathrm{J}^2_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$, i.e. $\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{J}^2_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$.
2. Comme $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}\big(\beta_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f})\big) = \mathrm{Jac}_{\underline{x}}(\underline{f})$, on a $\mu_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}(\varepsilon) = 1$.
Comme $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$, ε est le générateur idempotent de $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$.
Enfin, $\beta_{\underline{y},\underline{z}}(\underline{f})$, qui est associé à ε, est aussi un générateur de $\mathrm{Ann}(\mathrm{J}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$.
3. Soient $f_1, \dots, f_n$ dans $\mathbf{k}[\underline{X}]$ et $\delta = \mathrm{Jac}_{\underline{X}}(\underline{f})$. Inversons δ avec une indéterminée T. Alors, dans $\mathbf{k}[\underline{X}, T]$ on obtient

$$\mathrm{JAC}_{\underline{X},T}(\underline{f}, \delta T - 1) = \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ \delta T - 1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \partial_{X_1} & & \cdots & & \partial_{X_n} \end{array} \partial_T \\ \begin{bmatrix} & & & & 0 \\ & & & & \vdots \\ & & \mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f}) & & 0 \\ \star & & \cdots & \star & \delta \end{bmatrix} \end{array}$$

et donc $\mathrm{Jac}_{\underline{X},T}(\underline{f}, \delta T - 1) = \delta^2$. Notons

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]\big/\big\langle \underline{f}\big\rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}[\delta^{-1}] = \mathbf{k}[\underline{X}, T]\big/\big\langle \underline{f}, 1 - \delta T\big\rangle.$$

Alors le jacobien du système $(\underline{f}, \delta T - 1)$ qui définit $\mathbf{B}$ est inversible dans $\mathbf{B}$ et donc $\mathbf{B}$ est une algèbre séparable.

Exercice 15. La $\mathbf{B}$-algèbre $\mathbf{B}\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{A}$ est séparable. On a une transformation (propriété universelle de l'extension des scalaires)

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{A}, \mathbf{B}),\ \psi \mapsto \overline{\psi},$$

définie par $\overline{\psi}(b\otimes a) = b\psi(a)$.
1. On considère alors l'idempotent $\varepsilon_{\overline{\varphi}} \in \mathbf{B}\otimes_{\mathbf{k}}\mathbf{A}$ du lemme 6.16, et on l'écrit sous la forme $\varepsilon_{\overline{\varphi}} = \sum_{i\in I} b_i \otimes a_i$.
2. Découle directement du lemme 6.16 : l'idempotent e n'est autre que $e_{\{\overline{\varphi},\overline{\varphi'}\}}$.

3. Puisque la juxtaposition horizontale de matrices d'évaluation de Dedekind est une matrice d'évaluation de Dedekind, il suffit de montrer qu'il en existe une, disons A_1, dont l'image contient le vecteur $v := {}^{\mathrm{t}}[\, e_{11} \ \cdots \ e_{n1} \,]$.
Soit $\big((a_j)_{j\in[\![1..m]\!]}, (b_j)_{j\in[\![1..m]\!]}\big)$ le couple attaché à φ_1. On met en colonne j de A_1 le vecteur ${}^{\mathrm{t}}[\, \varphi_1(a_j) \ \cdots \ \varphi_n(a_j) \,]$. On a alors $A_1 \, {}^{\mathrm{t}}[\, b_1 \ \cdots \ b_m \,] = v$.

Exercice 16. Par hypotèse, pour chaque $\tau \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ il existe $n_\tau \in \mathbb{N}$ et des éléments $x_{1,\tau}, \ldots, x_{n_\tau,\tau}, y_{1,\tau}, \ldots, y_{n_\tau,\tau} \in \mathbf{A}$ tels que $1 = \sum_{j=1}^{n_\tau} x_{j,\tau}\big(y_{j,\tau} - \tau(y_{j,\tau})\big)$.
On pose $s_\tau = \sum_{j=1}^{n_\tau} x_{j,\tau}\tau(y_{j,\tau})$ de sorte que $\sum_{j=1}^{n_\tau} x_{j,\tau}y_{j,\tau} = 1 + s_\tau$, puis on définit $x_{n_\tau+1,\tau} = -s_\tau$ et $y_{n_\tau+1,\sigma} = 1$. Alors, en posant $m_\tau = n_\tau + 1$:
$$\textstyle\sum_{j=1}^{m_\tau} x_{j,\tau}\tau(y_{j,\tau}) = s_\tau - s_\tau = 0, \qquad \sum_{j=1}^{m_\tau} x_{j,\tau}y_{j,\tau} = 1 + s_\tau - s_\tau = 1.$$
On fixe un $\sigma \in G$ et on fait le produit, on obtient
$$\textstyle\prod_{\tau\in G\setminus\{\mathrm{Id}\}} \sum_{j=1}^{m_\tau} x_{j,\tau}\sigma(y_{j,\tau}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Le développement du produit fournit deux familles (a_i) et (b_i) indexées par le même ensemble (chaque a_i est un produit de certains $x_{j,\tau}$ et b_i est le produit des $y_{j,\tau}$ correspondants) vérifiant :
$$\textstyle\sum_{i=1}^{r} a_i\sigma(b_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = \mathrm{Id} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 17. *1.* Comme G agit transitivement sur $[\![1..n]\!]$, on a $(\mathbf{k}^n)^G = \mathbf{k}$. De plus, G étant de cardinal n, une permutation $\sigma \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$ n'a aucun point fixe. On en déduit que $\sum_{\sigma\in G} e_i\sigma(e_i) = 0$ si $\sigma \in G \setminus \{\mathrm{Id}\}$, et 1 sinon.
En prenant $x_i = y_i = e_i$, les conditions du lemme 7.10 sont satisfaites et $(\mathbf{k}, \mathbf{k}^n, G)$ est une algèbre galoisienne.
L'application $G \to [\![1..n]\!]$, $\sigma \mapsto \sigma(1)$, est une bijection. L'action de G sur $[\![1..n]\!]$ est nécessairement isomorphe à l'action de G sur lui-même par translations. Si n est fixé, on peut prendre pour G le groupe engendré par un n-cycle.
2. On a $\mathrm{Stp}_{\mathrm{S}_4}(\mathbf{B}) = \langle (1,2),(3,4)\rangle$ et $H = \mathrm{Stp}_G(\mathbf{B}) = \{\mathrm{Id}\}$; donc $(\mathbf{k}^4)^H = \mathbf{k}^4$.
3. Le premier point est immédiat. Supposons $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]^H$ et soit $a \in \mathbf{A}$.
Alors $aX \in \mathbf{B}$, donc aX est invariant par H, i.e. a est invariant par H.
Bilan : $\mathbf{A} = \mathbf{A}^H$ donc $H = \{\mathrm{Id}\}$ puis $\mathbf{A}[X] = X\mathbf{A}[X] + \mathbf{k}$ i.e. $\mathbf{A} = \mathbf{k}$ et $G = \{\mathrm{Id}\}$.
Hormis ce cas très particulier, $\mathbf{B}$ n'est pas de la forme $\mathbf{A}[X]^H$.

Exercice 18. On suppose sans perte de généralité que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont libres de rang $n \in \mathbb{N}$: il suffit en effet de vérifier la conclusion après localisation en des éléments comaximaux et l'on dispose du théorème de structure locale des modules projectifs de type fini. Si $n = 0$ alors $\mathbf{k}$ est trivial, on peut donc supposer $1 \leqslant n$. On considère une base $\mathcal{C} = (c_1, \ldots, c_n)$ de $\mathbf{C}$ et une base $\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathbf{B}$ (sur $\mathbf{k}$), et l'on écrit la matrice $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{C}$. Le fait que les b_i forment une base implique que B est injective, i.e. $\delta = \det B$ est régulier (théorème II-5.22). En outre, $\delta\mathbf{C} \subseteq \mathbf{B}$.
Comparons $\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(x)$ et $\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(x)$ pour un $x \in \mathbf{B}$. Considérons $\mathbf{k}' = \mathbf{k}[1/\delta] \supseteq \mathbf{k}$. Les deux $\mathbf{k}'$-algèbres obtenues par extension des scalaires, $\mathbf{B}[1/\delta]$ et $\mathbf{C}[1/\delta]$, sont les mêmes, et la trace se comporte bien par extension des scalaires, donc $\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(x)$ et $\mathrm{Tr}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(x)$ sont égales parce qu'elles sont égales dans $\mathbf{k}'$. Mais alors
$$\mathrm{disc}\,\mathbf{B}/\mathbf{k} = \mathrm{disc}_{\mathbf{B}/\mathbf{k}}(\mathcal{B}) = \mathrm{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(\mathcal{B}) = \delta^2\,\mathrm{disc}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(c_1, \ldots, c_n).$$

Enfin puisque $\operatorname{disc}\mathbf{B}/\mathbf{k}$ est inversible, δ également et $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

Exercice 19. Tout d'abord, notons que puisque $\mathbf{k}$ est connexe, tous les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{k}$ sont de rang constant. Rappelons aussi que la correspondance galoisienne est déjà établie lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret.
Nous devons montrer que si $\mathbf{k}\subseteq\mathbf{B}\subseteq\mathbf{A}$ avec $\mathbf{B}$ strictement étale, alors

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}\stackrel{\text{def}}{=}\operatorname{Fix}\big(\operatorname{Stp}(\mathbf{B})\big).$$

D'après le lemme 18, il suffit de montrer que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ ont même rang. En mathématiques classiques on conclut en notant qu'après extension des scalaires à n'importe quel corps, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ ont même rang puisque la correspondance galoisienne est établie pour les corps.
Cet argument de mathématiques classiques fournit par relecture dynamique une preuve constructive. Ceci est lié au Nullstellensatz formel (théorème III-9.9).

Exercice 20. Soient (x_i), (y_i) deux systèmes d'éléments de $\mathbf{B}$ comme dans le lemme 7.10.
1. On sait que pour $x\in\mathbf{B}$, $x=\sum_i \operatorname{Tr}_G(xy_i)x_i$. Si $x\in\mathfrak{b}$, alors $xy_i\in\mathfrak{b}$, et comme $\mathfrak{b}$ est globalement invariant, $\operatorname{Tr}_G(xy_i)\in\mathfrak{b}$.
Bilan : $\mathfrak{b}$ est engendré par les éléments invariants $\operatorname{Tr}_G(xy_i)$ pour $x\in\mathfrak{b}$.
2. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$; il est clair que $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ est globalement invariant.
Il faut voir que $\mathfrak{a}\mathbf{B}\cap\mathbf{A}=\mathfrak{a}$. Cela vient du fait que $\mathbf{A}$ est facteur direct dans $\mathbf{B}$ (comme $\mathbf{A}$-module). En effet, soit $\mathbf{B}=\mathbf{A}\oplus E$, donc $\mathfrak{a}\mathbf{B}=\mathfrak{a}\oplus\mathfrak{a}E$. Si $x\in\mathfrak{a}\mathbf{B}\cap\mathbf{A}$, on écrit $x=y+z$ avec $y\in\mathfrak{a}$ et $z\in\mathfrak{a}E\subseteq E$; on a alors $x,\,y\in\mathbf{A}$, donc $z\in\mathbf{A}$, et comme $z\in E$, $z=0$. En conséquence, $x=y\in\mathfrak{a}$.
Réciproquement, si $\mathfrak{b}\subseteq\mathbf{B}$ est globalement invariant, il faut voir que $(\mathfrak{b}\cap\mathbf{A})\mathbf{B}=\mathfrak{b}$; mais c'est ce qui a été montré dans la question précédente.

Problème 2. De manière générale, la forme linéaire δ_g passe au quotient modulo l'idéal $\mathfrak{a}_g$ qu'elle définit. De plus, si $\delta_g(\overline{u}\,\overline{v})=0$ sur $\mathbf{A}=\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}_g$ pour tout $\overline{v}$, alors $\delta_g(uv)=0$ pour tout v, donc $u\in\mathfrak{a}_g$, i.e. $\overline{u}=0$. Donc $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(\delta_g)=0$.
Pour $i\in[\![1..n]\!]$, on note $\delta_i^m=\delta_{X_i^m}$ (coordonnée sur X_i^m).
En particulier, $\delta_i(f)=\frac{\partial f}{\partial X_i}(0)$. Et l'on définit $\delta_0:\mathbf{k}[\underline{X}]\to\mathbf{k}$ par $\delta_0(f)=f(0)$.
1. Calcul facile.
2. On vérifie que $f*g=0$ si, et seulement si, $f_m*g=0$ pour toute composante homogène f_m de f, autrement dit l'idéal $\mathfrak{a}_g$ est homogène (c'est toujours le cas si g est homogène).
Il est clair aussi que pour $i\neq j$, $X_iX_j*g=0$, et pour $|\alpha|>d$, $X^\alpha*g=0$.
Si $f=\sum_i a_iX_i^m+\cdots$ est homogène de degré $m\leqslant d$, on a $f*g=\sum_i a_iX_i^{-(d-m)}$.
Si $m<d$, on a donc $f*g=0$ si, et seulement si, $a_i=0$, $\forall i$, c'est-à-dire encore si $f\in\langle X_iX_j,\,i\neq j\rangle$.
Si $m=d$, on a $f*g=0$ si, et seulement si, $\sum_i a_i=0$, c'est-à-dire encore si $f\in\langle X_iX_j,\,i\neq j\rangle+\big\langle X_i^d-X_1^d,\,i\in[\![2..n]\!]\big\rangle$, car $\sum_i a_iX_i^d=\sum_i a_i(X_i^d-X_1^d)$.
Bilan : on a obtenu un système générateur de $\mathfrak{a}_g$ constitué de $\frac{n(n-1)}{2}$ polynômes homogènes de degré 2 et de $n-1$ polynômes homogènes de degré d :

$$\mathfrak{a}_g=\langle X_iX_j,\,i<j\rangle+\big\langle X_i^d-X_1^d,\,i\in[\![2..n]\!]\big\rangle\,.$$

On pose $\mathbf{A}=\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}_g=\mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$. Alors :

$$1,\quad x_1,\ \dots,\ x_n,\quad x_1^2,\ \dots,\ x_n^2,\quad\dots\quad x_1^{d-1},\ \dots,\ x_n^{d-1},\quad x_1^d$$

est une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}$ de cardinal $(d-1)n+2$. La $\mathbf{k}$-base duale de $\mathbf{A}^\star$ est :

$$\delta_0,\quad \delta_1,\ \ldots,\ \delta_n,\quad \delta_1^2,\ \ldots,\ \delta_n^2,\quad \ldots\quad \delta_1^{d-1},\ \ldots,\ \delta_n^{d-1},\quad \delta_g$$

et l'on a :

$$x_i^m \centerdot \delta_g = \delta_i^{d-m} \text{ pour } m \in [\![1..d-1]\!],\quad x_i^d \centerdot \delta_g = \delta_0.$$

Donc $\mathbf{A}^\star = \mathbf{A} \centerdot \delta_g$ et δ_g est dualisante.

3. Si l'on prend e_i strictement plus grand que l'exposant de X_i dans l'ensemble des monômes de g, on a $X_i^{e_i} * g = 0$.

4. Soit $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$. On a vu que $f \centerdot \delta_g = 0$ si, et seulement si, $\partial_f(g) = 0$. L'application $\mathbf{k}$-linéaire $\mathbf{k}[\underline{X}] \to \mathbf{k}[\underline{X}]$, $f \mapsto \partial_f(g)$, passe au quotient modulo $\mathfrak{b}$ pour définir une application $\mathbf{k}$-linéaire φ.

5. L'application $\mathbf{k}$-linéaire $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^\star$, $f \mapsto f \centerdot \delta_g$, est injective et comme $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^\star$ sont des $\mathbf{k}$-espaces vectoriels de même dimension finie, c'est un isomorphisme.

Problème 3. *1.* On pose comme par magie $\theta(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \sigma^i(z)c_i(x)$ (merci Hilbert). On va vérifier que :

$$\sigma\big(\theta(x)\big) = \theta(x) + \mathrm{Tr}_G(x)z - x \quad \text{ou encore} \quad x = (\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma)\big(\theta(x)\big) + \mathrm{Tr}_G(x)z.$$

Donc, $(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma)\circ\theta$ et $x \mapsto \mathrm{Tr}_G(x)z$ sont deux projecteurs orthogonaux de somme 1, d'où $\mathbf{A} = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma) \oplus \mathbf{k}z$. Pour la vérification, notons c_i pour $c_i(x)$ et $y = \theta(x)$. On a $\sigma(c_i) = c_{i+1} - x$, $c_n = \mathrm{tr}_G(x)$ et

$$\begin{aligned}\sigma(y) &= \textstyle\sum_{i=0}^{n-1}(c_{i+1} - x)\sigma^{i+1}(z) = \sum_{i=0}^{n-1} c_{i+1}\sigma^{i+1}(z) - \sum_{i=0}^{n-1} x\sigma^{i+1}(z)\\ &= (y + \mathrm{Tr}_G(x)z) - x\,\mathrm{Tr}_G(z) = y + \mathrm{Tr}_G(x)z - x.\end{aligned}$$

Puisque $\mathrm{Tr}_G(z) = 1$, z est une base de $\mathbf{k}z$ (si $az = 0$, alors $0 = \mathrm{Tr}_G(az) = a$), donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma)$ est bien stablement libre de rang $n-1$.

2. Il est clair que $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_{\mathbf{A}} - \sigma) \subseteq \mathrm{Ker}\,\mathrm{Tr}_G$. L'autre inclusion résulte du point précédent.

3. Le lecteur fera les vérifications en posant $y = \sum_\tau c_\tau \tau(z)$. Il y a un lien avec la question *1* : pour x fixé avec $\mathrm{Tr}_G(x) = 0$, la famille $\big(c_i(x)\big)$ est un 1-cocycle additif à condition d'identifier $[\![0..n-1]\!]$ et G via $i \leftrightarrow \sigma^i$.

4. L'élément -1 est de trace nulle, d'où l'existence de $y \in \mathbf{A}$ tel que $-1 = y - \sigma(y)$. On a alors, pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $\sigma^i(y) = y + i$, et $\sigma^j(y) - \sigma^i(y) = j - i$ est inversible pour $i \not\equiv j \bmod p$.

Notons $y_i = \sigma^i(y)$, $(i \in [\![0..p-1]\!])$. La matrice de Vandermonde de $(y_0, y_1, \ldots, y_{p-1})$ est inversible et par suite $(1, y, \ldots, y^{p-1})$ est une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{A}$. On note $\lambda = y^p - y$. Alors $\lambda \in \mathbf{k}$ puisque :

$$\sigma(\lambda) = \sigma(y)^p - \sigma(y) = (y+1)^p - (y+1) = y^p - y = \lambda.$$

Le polynôme caractéristique de y est $(Y - y_0)(Y - y_1)\cdots(Y - y_{p-1})$ et ce polynôme est égal à $f(Y) = Y^p - Y - \lambda$ (car les y_i sont racines de f et $y_i - y_j$ est inversible pour $i \neq j$).

5. Soit $\mathbf{k}$ un anneau avec $p =_{\mathbf{k}} 0$. Fixons $\lambda \in \mathbf{k}$ et posons $\mathbf{A} = \mathbf{k}[Y]/\langle f\rangle = \mathbf{k}[y]$, où $f(Y) = Y^p - Y - \lambda$. Alors, $y+1$ est racine de f, et l'on peur définir $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbf{A}/\mathbf{k})$ par $\sigma(y) = y + 1$. L'élément σ est d'ordre p et la lectrice vérifiera que $(\mathbf{k}, \mathbf{A}, \langle\sigma\rangle)$ est une algèbre galoisienne.

Problème 4. *1.* Considérons l'idéal $\langle x - \sigma(x), y - \sigma(y)\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle 2x, 2y\rangle$. Puisque 2 est inversible, c'est l'idéal $\langle x, y\rangle$, et il contient 1 car $x^2 + y^2 = 1$. Ainsi, $\langle\sigma\rangle$ est séparant.

2. Pour tout $f \in \mathbf{B}$, on a $f = (xf)x + (yf)y$. Si f est impaire i.e. si $\sigma(f) = -f$, on a $xf,\ yf \in \mathbf{A}$, donc $f \in \mathbf{A}x + \mathbf{A}y$ et $E = \{\, f \in \mathbf{B} \,|\, \sigma(f) = -f \,\}$. L'égalité $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus E$ découle de l'égalité $f = \big(f + \sigma(f)\big)/2 + \big(f - \sigma(f)\big)/2$ pour $f \in \mathbf{B}$.
Autre démonstration. On sait qu'il existe $b_0 \in \mathbf{B}$ de trace 1 et que le noyau de la forme linéaire $\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ définie par $b \mapsto \mathrm{Tr}(b_0 b)$ est un supplémentaire de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$. Ici on peut prendre $b_0 = 1/2$, on retrouve E comme supplémentaire.
3. Il s'agit de trouver $y_1,\ y_2,\ y_3 \in \mathbf{B}$ tels que $\sum_{i=1}^{3} x_i \tau(y_i) = 1$ pour $\tau = \mathrm{Id}$, 0 sinon. On remarque que :

$$1 \cdot 1 + x \cdot x + y \cdot y = 2, \quad \text{et} \quad 1 \cdot \sigma(1) + x \cdot \sigma(x) + y \cdot \sigma(y) = 0,$$

d'où une solution en prenant $y_i = x_i/2$. En posant $X = \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ \frac{1}{2} & -\frac{x}{2} & -\frac{y}{2} \end{bmatrix}$, on a $X\,{}^{\mathrm{t}}X = \mathrm{I}_2$ et ${}^{\mathrm{t}}X X = P$ avec $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & xy \\ 0 & xy & y^2 \end{bmatrix}$. La matrice P est un projecteur de rang 2 dont l'image est isomorphe au $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$.
Note : on en déduit que E est isomorphe à l'image du projecteur $\begin{bmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{bmatrix}$ et que $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} E$ est isomorphe à $\mathbf{B}$ comme $\mathbf{B}$-module.
4. Facile
5. L'isomorphie $E^n \simeq \mathbf{A}^n$ prouve que E est un module projectif de rang constant 1. En appliquant $\bigwedge^n$, on obtient $E^{n\otimes} \simeq \mathbf{A}$.
NB : pour plus de détails voir la section X-1, la démonstration de la proposition X-1.2, l'égalité (1) page 549 et l'égalité (5) page 582.
6. L'égalité $1 = x^2 + y^2$ implique $\mathfrak{a}^2 = \big\langle x^2y^2, x^3y, x^4 \big\rangle = x^2 \big\langle y^2, xy, x^2 \big\rangle = x^2\mathbf{A}$. Et $\mathfrak{a}\mathbf{B} = xy\mathbf{B} + x^2\mathbf{B} = x(y\mathbf{B} + x\mathbf{B}) = x\mathbf{B}$. Dans $\mathbf{B}$, $\mathfrak{a} = x(y\mathbf{A} + x\mathbf{A}) = xE$. Donc si x est régulier, $\mathfrak{a} \simeq_{\mathbf{A}} E$ via la multiplication par x.
7a. On a $\mathbf{k}[x] \simeq \mathbf{k}[X]$ et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x^2, xy, y^2]$. On regarde $\mathbf{B}$ comme un $\mathbf{k}[x]$-module libre de rang 2, de base $(1, y)$, et l'on note $\mathrm{N} : \mathbf{B} \to \mathbf{k}[x]$ la norme. Pour $a,\ b \in \mathbf{k}[x]$ on obtient :

$$\mathrm{N}(a + by) = (a + by)(a - by) = a^2 + (x^2 - 1)b^2.$$

Comme $\mathrm{N}(x) = x^2$, x est régulier (lemme 4.3 point *2*). Par ailleurs, $a + by \in \mathbf{B}^\times$ si, et seulement si, $a^2 + (x^2 - 1)b^2 \in \mathbf{k}^\times$. Supposons b de degré formel $m \geqslant 0$ et a de degré formel $n \geqslant 0$. Alors, $(x^2 - 1)b^2 = \beta^2 x^{2m+2} + \dots$ et $a^2 = \alpha^2 x^{2n} + \dots$ Puisque $a^2 + (x^2 - 1)b^2 \in \mathbf{k}^\times$, on obtient :

- si $n > m + 1$, $\alpha^2 = 0$ donc $\alpha = 0$ et a peut être réécrit en degré formel $< n$,
- si $n < m + 1$, $\beta^2 = 0$ donc $\beta = 0$ et
  - si $m = 0$, $b = 0$ et $a = \alpha \in \mathbf{k}^\times$ ou,
  - si $m > 0$, b peut être réécrit en degré formel $< m$,
- si $n = m + 1$ (ce qui implique $n > 0$), $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ donc $\alpha = \beta = 0$ et a peut être réécrit en degré formel $< n$.

On conclut par récurrence sur $m + n$ que si $a + by \in \mathbf{B}^\times$, alors $b = 0$ et $a \in \mathbf{k}^\times$.
On notera que si $-1 = i^2$ dans $\mathbf{k}$, alors $(x + iy)(x - iy) = 1$ et l'on obtient un inversible $x + iy$ qui n'est pas une constante.
7b. Montrons que $\mathfrak{a}$ n'est pas principal. Comme $\mathfrak{a} \simeq_{\mathbf{A}} E$, il s'en suivra que E n'est pas un $\mathbf{A}$-module libre. Et $\mathbf{B}$ n'est pas libre non plus, car sinon E serait

stablement libre de rang 1, donc libre.
Supposons $\mathfrak{a} = a\mathbf{A}$ avec $a \in \mathbf{A}$. En étendant à $\mathbf{B}$, on obtient $\mathfrak{a}\mathbf{B} = a\mathbf{B}$. Mais on a vu que $\mathfrak{a}\mathbf{B} = x\mathbf{B}$, et x étant régulier, $x = ua$ avec $u \in \mathbf{B}^\times = \mathbf{k}^\times$. Ceci entraînerait que $x \in \mathbf{A}$, ce qui n'est pas le cas car $\mathbf{k}$ est non trivial.
8. On reprend la preuve de la question précédente pour montrer que $\mathfrak{a}$ n'est pas principal, mais ici $\mathbf{B}^\times$ n'est plus constitué uniquement des constantes, par exemple la fonction (continue) $(x, y) \mapsto x^2 + 1$ est inversible. À l'endroit où $x = ua$ et $u \in \mathbf{B}^\times$, on raisonne comme suit. Puisque u est un élément inversible de $\mathbf{B}$, sa valeur absolue est minorée par un élément > 0, et u est de signe strict constant. Comme x est impaire et a paire, a et x sont identiquement nulles : contradiction.

Commentaires bibliographiques

Une étude constructive des algèbres associatives (non nécessairement commutatives) strictement finies sur un corps discret se trouve dans [159, Richman] et dans [MRR, Chapitre IX].
La proposition 1.13 se trouve dans [MRR] qui introduit la terminologie de *corps séparablement factoriel*. Voir aussi [158, Richman].
Le lemme 1.16 de factorisation sans carrés sur un corps discret parfait admet une généralisation subtile sous forme d'un « algorithme de factorisation séparable » sur un corps discret arbitraire : voir [MRR, th IV.6.3, p. 162] et [123, Lecerf].
Les notions d'algèbre galoisienne et d'algèbre séparable ont été introduites par Auslander & Goldman dans [3, 1960]. L'essentiel de la théorie des algèbres galoisiennes se trouve dans l'article [30, 1968] de Chase, Harrison & Rosenberg. Un livre qui expose cette théorie est [Demeyer & Ingraham]. Presque tous les arguments dans [30] sont déjà de nature élémentaire et constructive.
Le résultat donné dans l'exercice 18 est dû à Ferrero et Paques dans [83].
Le problème 2 s'inspire du chapitre 21 (Duality, Canonical Modules, and Gorenstein Rings) de [Eisenbud] et en particulier des exercices 21.6 et 21.7.

Chapitre VII

La méthode dynamique

Nullstellensatz
Corps de racines
Théorie de Galois

Sommaire

Introduction

La première section de ce chapitre donne des versions constructives générales du Nullstellensatz pour un système polynomial sur un corps discret (on pourra comparer les théorèmes 1.5 page 399, 1.8 page 401 et 1.9 page 401, aux théorèmes III-9.5 page 145 et III-9.7 page 147). Nous avons également indiqué un théorème de mise en position de Noether simultanée (théorème 1.7).

Il s'agit là d'un exemple significatif d'une reformulation d'un résultat de mathématiques classiques *dans un cadre plus général* : les mathématiques classiques admettent que tout corps possède une clôture algébrique. Cela leur permet de ne pas se poser le problème de la signification exacte du Nullstellensatz de Hilbert lorsque l'on n'a pas à sa disposition une telle clôture algébrique. Mais la question se pose vraiment et nous apportons une réponse tout à fait raisonnable : la clôture algébrique n'est pas vraiment nécessaire, plutôt que chercher les zéros d'un système polynomial dans une clôture algébrique, on peut les chercher dans des algèbres finies sur le corps donné au départ.

Nous nous attaquons ensuite à un autre problème : celui d'interpréter constructivement le discours classique sur la clôture algébrique d'un corps. Le problème pourrait sembler être surtout celui de l'utilisation du lemme de Zorn nécessaire à la construction de l'objet global. En fait, un problème plus délicat se pose bien avant, au moment de la construction du corps de racines d'un polynôme individuel.

Le théorème de mathématiques classiques disant que tout polynôme séparable de $\mathbf{K}[T]$ possède un corps de racines strictement fini sur $\mathbf{K}$ (auquel cas la théorie de Galois s'applique), n'est valable d'un point de vue constructif

que sous des hypothèses concernant la possibilité de factoriser les polynômes séparables (cf. [MRR] et dans cet ouvrage le théorème III-6.15 d'une part et le corollaire VI-1.13 d'autre part). Notre but ici est de donner une théorie de Galois constructive pour un polynôme séparable arbitraire en l'absence de telles hypothèses.
La contrepartie est que l'on ne doit pas considérer le corps de racines d'un polynôme comme un objet usuel «statique», mais comme un objet «dynamique». Ce phénomène est inévitable, car il faut gérer l'ambiguïté qui résulte de l'impossibilité de connaître le groupe de Galois d'un polynôme par une méthode infaillible. Par ailleurs, le dépaysement produit par cette mise en perspective dynamique n'est qu'un exemple de la méthode générale dite d'évaluation paresseuse : *rien ne sert de trop se fatiguer pour connaître toute la vérité quand une vérité partielle est suffisante pour les enjeux du calcul en cours.*

Dans la section 2, nous donnons une approche heuristique de la méthode dynamique, qui constitue une pierre angulaire des nouvelles méthodes en algèbre constructive.
La section 3 consacrée aux algèbres de Boole est une courte introduction aux problèmes qui vont devoir être gérés dans le cadre d'une algèbre de décomposition universelle sur un corps discret lorsqu'elle n'est pas connexe.
La section 4 continue la théorie de l'algèbre de décomposition universelle déjà commencée en section III-4. Sans supposer le polynôme séparable l'algèbre de décomposition universelle a de nombreuses propriétés intéressantes qui sont conservées quand on passe à un «quotient de Galois». En faisant le résumé de ces propriétés nous avons été amenés à introduire la notion d'*algèbre prégaloisienne.*
La section 5 donne une approche constructive et dynamique du corps de racines d'un polynôme sur un corps discret, sans hypothèse de séparabilité pour le polynôme.
La théorie de Galois dynamique d'un polynôme séparable sur un corps discret est développée dans la section 6.

Le chapitre présent peut être lu immédiatement après les sections III-6 et VI-2 sans passer par les chapitres IV et V si l'on se limite pour l'algèbre de décomposition universelle au cas des corps discrets (ce qui simplifierait d'ailleurs certaines démonstrations). Il nous a paru cependant naturel de développer les questions relatives à l'algèbre de décomposition universelle dans un cadre plus général, ce qui nécessite la notion de module projectif de rang constant sur un anneau commutatif arbitraire.

1. Le Nullstellensatz sans clôture algébrique

Il nous a semblé logique, dans ce chapitre consacré à la question « comment récupérer constructivement les résultats de mathématiques classiques qui se basent sur l'existence d'une clôture algébrique, même lorsque celle-ci fait défaut ? », de reprendre le Nullstellensatz et la mise en position de Noether (théorème III-9.5) dans ce nouveau cadre.

Le cas d'un corps de base infini

Nous affirmons que le théorème III-9.5 peut être recopié quasiment mot à mot, simplement en supprimant la référence à un corps algébriquement clos qui contienne $\mathbf{K}$.
On ne voit plus nécessairement les zéros du système polynomial considéré dans des extensions finies du corps discret $\mathbf{K}$, mais on construit des $\mathbf{K}$-algèbres non nulles strictement finies (i.e., qui sont des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie) et qui rendent compte de ces zéros : en mathématiques classiques les zéros se trouvent dans les corps quotients de ces $\mathbf{K}$-algèbres, de tels corps quotients existent facilement en application du principe du tiers exclu puisqu'il suffit de considérer un idéal strict qui soit de dimension maximale en tant que $\mathbf{K}$-espace vectoriel.

1.1. Théorème. (Nullstellensatz faible et mise en position de Noether, 2)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret infini et* $(f_1, \dots, f_s)$ *un système polynomial dans l'algèbre* $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ *($n \geqslant 1$).*
Notons $\mathfrak{f} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle_{\mathbf{K}[\underline{X}]}$ *et* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\mathfrak{f}$.

- (Nullstellensatz faible)
  - *Ou bien* $\mathbf{A} = \{0\}$*, c'est-à-dire* $1 \in \langle f_1, \dots, f_s \rangle$.
  - *Ou bien il existe un quotient non nul de* $\mathbf{A}$ *qui est une* $\mathbf{K}$*-algèbre strictement finie.*
- (Position de Noether) *Plus précisément, on a un entier* $r \in [\![-1..n]\!]$ *bien défini avec les propriétés suivantes.*

1. *Ou bien* $r = -1$ *et* $\mathbf{A} = \{0\}$*. Dans ce cas, le système* $(f_1, \dots, f_s)$ *n'admet de zéro dans aucune* $\mathbf{K}$*-algèbre non triviale.*
2. *Ou bien* $r = 0$*, et* $\mathbf{A}$ *est une* $\mathbf{K}$*-algèbre strictement finie non nulle (en particulier, l'homomorphisme naturel* $\mathbf{K} \to \mathbf{A}$ *est injectif).*
3. *Ou bien* $r \geqslant 1$*, et il existe un changement de variables* $\mathbf{K}$*-linéaire (les nouvelles variables sont notées* $Y_1, \dots, Y_n$*) qui satisfait les propriétés suivantes.*
   - *On a* $\mathfrak{f} \cap \mathbf{K}[Y_1, \dots, Y_r] = \{0\}$*. Autrement dit, l'anneau* $\mathbf{K}[Y_1, \dots, Y_r]$ *s'identifie à un sous-anneau du quotient* $\mathbf{K}[\underline{X}]/\mathfrak{f}$.
   - *Chaque* Y_j *pour* $j \in [\![r+1..n]\!]$ *est entier sur* $\mathbf{K}[Y_1, \dots, Y_r]$ *modulo* $\mathfrak{f}$ *et l'anneau* $\mathbf{A}$ *est un* $\mathbf{K}[Y_1, \dots, Y_r]$*-module de présentation finie.*

- *Il existe un entier N tel que pour chaque $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbf{K}^r$, l'algèbre quotient $\mathbf{A}/\langle Y_1 - \alpha_1, \ldots, Y_r - \alpha_r\rangle$ est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel non nul de dimension finie $\leqslant N$.*
- *On a des idéaux de type fini $\mathfrak{f}_j \subseteq \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_j]$ $(j \in [\![r..n]\!])$ avec les inclusions et égalités suivantes.*

$$\begin{aligned}
&\langle 0\rangle = \mathfrak{f}_r \subseteq \mathfrak{f}_{r+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{f}_{n-1} \subseteq \mathfrak{f}_n = \mathfrak{f}\\
&\mathfrak{f}_j \subseteq \mathfrak{f}_\ell \cap \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_j] && (j < \ell,\ j, \ell \in [\![r..n]\!])\\
&\mathrm{D}(\mathfrak{f}_j) = \mathrm{D}\left(\mathfrak{f}_\ell \cap \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_j]\right) && (j < \ell,\ j, \ell \in [\![r..n]\!])
\end{aligned}$$

▷ On raisonne essentiellement comme dans la démonstration du théorème III-9.5. Pour simplifier nous gardons les mêmes noms de variables à chaque étape de la construction. On pose $\mathfrak{f}_n = \mathfrak{f}$.

— Ou bien $\mathfrak{f} = 0$, et $r = n$ dans le point *3*.
— Ou bien il y a un polynôme non nul parmi les f_i, on fait un changement de variables linéaire qui le rend unitaire en la dernière variable, et l'on calcule l'idéal résultant $\mathfrak{Res}_{X_n}(\mathfrak{f}_n) = \mathfrak{f}_{n-1} \subseteq \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}] \cap \mathfrak{f}_n$. Puisque $\mathfrak{f}_n \cap \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$ et $\mathfrak{f}_{n-1}$ ont même nilradical, ils sont simultanément nuls.
— Si $\mathfrak{f}_{n-1} = 0$, le point *3* ou *2* est vérifié avec $r = n - 1$.
— Sinon, on itère le processus.
— Si le processus s'arrête avec $\mathfrak{f}_r = 0$, $r \geqslant 0$, le point *3* ou *2* est vérifié avec cette valeur de r.
— Sinon, $\mathfrak{f}_0 = \langle 1\rangle$ et le calcul a permis de construire 1 comme élément de $\mathfrak{f}$.

Il nous reste à vérifier deux choses.
Tout d'abord, que $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$-module de présentation finie. Il est clair que c'est un module de type fini, le fait qu'il est de présentation finie est donc donné par le théorème VI-3.17.
Ensuite, que lorsque l'on spécialise les Y_i $(i \in [\![1..r]\!])$ en des $\alpha_i \in \mathbf{K}$, le $\mathbf{K}$-espace vectoriel obtenu est de présentation finie (donc de dimension finie) et non nul. Le théorème VI-3.9 sur les changements d'anneau de base nous donne le fait que, après spécialisation, l'algèbre reste un module de présentation finie, donc que le $\mathbf{K}$-espace vectoriel obtenu est bien de dimension finie. Il faut voir qu'il est non nul. Or on constate que, en supposant les changements de variables déjà faits au départ, tous les calculs faits dans $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_n]$ se spécialisent, c'est-à-dire restent inchangés si l'on remplace les indéterminées Y_1, …, Y_r par les scalaires α_1, …, α_r. Et la conclusion $\mathfrak{f} \cap \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r] = \{0\}$ est remplacée par le même résultat spécialisé en les α_i, c'est-à-dire précisément ce que nous voulons.
On peut obtenir la même conclusion sous la forme plus savante que voici. Cette spécialisation est un changement d'anneau de base $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r] \to \mathbf{K}$.

On applique le point *1c* du lemme d'élimination général IV-10.1 avec

$$\mathbf{k} = \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r],\ \mathbf{C} = \mathbf{A} \text{ et } \mathbf{k}' = \mathbf{K}.$$

L'idéal d'élimination et l'idéal résultant dans $\mathbf{k}$ sont nuls, donc après extension des scalaires l'idéal résultant reste nul dans $\mathbf{K}$.
Donc, la même chose vaut pour l'idéal d'élimination, et l'homomorphisme naturel $\mathbf{K} \to \mathbf{A}/\langle Y_1 - \alpha_1, \ldots, Y_r - \alpha_r\rangle$ est injectif.
Expliquons pour terminer pourquoi l'entier r est bien défini. Tout d'abord le cas $r = -1$ est le seul cas où $\mathbf{A} = \{0\}$, ensuite pour $r \geqslant 0$, un calcul montre que r est le nombre maximum d'éléments algébriquement indépendants sur $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{A}$. □

Remarques. 1) On a utilisé des idéaux résultants $\mathfrak{Res}(\mathfrak{b})$ (théorème IV-10.2) à la place des idéaux $\mathfrak{R}(g_1, \ldots, g_s)$ (avec g_1 unitaire et $\langle g_1, \ldots, g_s\rangle = \mathfrak{b}$), introduits au lemme III-9.2. Mais le lemme III-9.2 montre que ces derniers feraient aussi bien l'affaire.
2) Pour n'importe quel homomorphisme $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r] \to \mathbf{B}$, lorsque $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre réduite, le dernier argument dans la démonstration du théorème fonctionne, de sorte que l'on sait que $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{K}[Y_1,\ldots,Y_r]} \mathbf{A}$.
3) Le dernier item du point *3* rappelle le fonctionnement de la preuve par récurrence, laquelle construit les idéaux de type fini $\mathfrak{f}_j$ pour aboutir à la mise en position de Noether. Cela donne aussi une certaine description des « zéros » du système polynomial (plus délicate que dans le cas où l'on a un corps algébriquement clos $\mathbf{L}$ qui contient $\mathbf{K}$, et où l'on décrit les zéros à coordonnées dans $\mathbf{L}$, comme dans le théorème III-9.5). ■

Il nous reste à lever la restriction introduite par la considération d'un corps discret $\mathbf{K}$ infini. Pour ceci nous avons besoin d'un lemme de changement de variables un peu plus général, qui utilise une astuce de Nagata.

Changements de variables

1.2. Définition. On appelle *changement de variables* dans l'anneau de polynômes $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ un automorphisme θ de cette $\mathbf{k}$-algèbre. Si les $\theta(X_i)$ sont notés Y_i, les Y_i sont appelés *les nouvelles variables*. Chaque Y_i est un polynôme en les X_j, et chaque X_i est un polynôme en les Y_j.

Le plus fréquemment utilisés sont les « changements de variables linéaires », dans lesquels on inclut, malgré leur nom, les translations et toutes les transformations affines.

Commentaire. Un changement de variables non linéaire, comme par exemple

$$(X, Y) \mapsto (X + Y^2, Y),$$

ne respecte pas la géométrie au sens intuitif de la chose. Par exemple une droite est transformée en une parabole : la géométrie algébrique du plan

affine n'est pas une extension de la géométrie affine, elle est directement en contradiction avec elle ! C'est seulement dans le cadre des espaces projectifs que l'on retrouve ses petits : les automorphismes du plan projectif, du point de vue de la géométrie algébrique, sont nécessairement linéaires, et la notion de « droite » reprend ses droits. ∎

Polynômes pseudo unitaires

Soit $\mathbf{k}$ un anneau connexe. Un polynôme dans $\mathbf{k}[T]$ est dit *pseudo unitaire* (en la variable T) s'il s'écrit $\sum_{i=0}^{p} a_k T^k$ avec a_p inversible.
En général, sans supposer $\mathbf{k}$ connexe, un polynôme dans $\mathbf{k}[T]$ est dit *pseudo unitaire* (en la variable T) s'il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_0, \ldots, e_r)$ tel que, pour chaque j, en passant à $\mathbf{k}[1/e_j] = \mathbf{k}_j$, le polynôme s'écrit $\sum_{k=0}^{j} a_{k,j} T^k$ avec $a_{j,j}$ inversible dans $\mathbf{k}_j$.
Un polynôme dans $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]$ est dit *pseudo unitaire en la variable* X_n s'il est pseudo unitaire comme élément de $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_{n-1}][X_n]$.
NB : voir aussi la notion de polynôme localement unitaire dans l'exercice X-14.
Rappelons qu'un polynôme de $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ est dit *primitif* lorsque ses coefficients engendrent l'idéal $\langle 1 \rangle$. Rappelons aussi que si $\mathbf{k}$ est réduit, on a l'égalité $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]^\times = \mathbf{k}^\times$ (lemme II-2.6).

1.3. Fait. *Soient* $\mathbf{K}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit et* $P \in \mathbf{K}[T]$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *Le polynôme* P *est régulier.*
- *Le polynôme* P *est primitif.*
- *Le polynôme* P *est pseudo unitaire.*
- *L'algèbre quotient* $\mathbf{K}[T]/\langle P \rangle$ *est finie sur* $\mathbf{K}$.

D Les équivalences sont claires dans le cas des corps discrets. Pour obtenir le résultat général on peut appliquer la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux zéro-dimensionnels réduits page 226. □

Un lemme simple et efficace

1.4. Lemme. (Lemme de changements de variables à la Nagata)
Soit $\mathbf{K}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit et* $g \in \mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *un élément régulier.*

1. *Il existe un changement de variables tel que, en appelant* $Y_1, \ldots, Y_n$ *les nouvelles variables, le polynôme* g *devient pseudo unitaire en* Y_n. *En conséquence la* $\mathbf{K}$*-algèbre* $\mathbf{K}[\underline{X}]/\langle g \rangle$ *est finie sur* $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_{n-1}]$.
2. *Lorsque* $\mathbf{K}$ *est un corps discret infini, on peut prendre un changement linéaire de variables.*

3. *Le résultat s'applique aussi pour une famille finie de polynômes réguliers de* $\mathbf{K}[\underline{X}]$ *(ils peuvent être rendus simultanément pseudo unitaires par un même changement de variables).*

D Pour le cas d'un corps discret infini voir le lemme III-9.4.
Dans le cas général on peut supposer que $\mathbf{K}$ est un corps discret et l'on fait un changement de variables « à la Nagata ». Par exemple avec trois variables, si le polynôme g est de degré $< d$ en chacune des variables X, Y, Z, on fait le changement de variables $X \mapsto X$, $Y \mapsto Y + X^d$, $Z \mapsto Z + X^{d^2}$. Alors, vu comme élément de $\mathbf{K}[Y, Z][X]$, g est devenu pseudo unitaire en X.
Le point *3* est laissé au lecteur. □

Le cas général

En raisonnant comme pour le théorème 1.1 et en utilisant les changements de variables du lemme précédent on obtient la forme générale du Nullstellensatz faible et de la mise en position de Noether en mathématiques constructives.

1.5. Théorème. (Nullstellensatz faible et mise en position de Noether, 3) *Avec les mêmes hypothèses que dans le théorème 1.1 mais en supposant seulement que le corps discret* $\mathbf{K}$ *est non trivial, on a les mêmes conclusions, à ceci près que le changement de variables n'est pas nécessairement linéaire.*

1.6. Définition. On considère le cas $1 \notin \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ du théorème précédent.

1. On dit que le changement de variables (qui éventuellement ne change rien du tout) a mis l'idéal $\mathfrak{f}$ en *position de Noether*.
2. L'entier r qui intervient dans la mise en position de Noether est appelé la *dimension du système polynomial*, ou de la variété définie par le système polynomial, ou de l'algèbre quotient $\mathbf{A}$. Par convention l'algèbre nulle est dite de dimension -1.

Remarques. 1) Il est clair d'après le théorème que $r = 0$ si, et seulement si, l'algèbre quotient est finie non nulle, ce qui implique (lemme VI-3.14) que c'est un anneau zéro-dimensionnel non trivial.
Inversement, si $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel et $\mathbf{K}$ non trivial, le lemme IV-8.15 montre que l'anneau $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$ est zéro-dimensionnel, ce qui implique que $r \leqslant 0$ (si $r > 0$, alors une égalité $Y_r^m\big(1 + Y_r Q(Y_1, \ldots, Y_r)\big) = 0$ implique que $\mathbf{K}$ est trivial). Il n'y a donc pas de conflit avec la notion d'anneau zéro-dimensionnel. Notons cependant que l'algèbre nulle est encore un anneau zéro-dimensionnel.
2) Le lien avec la dimension de Krull sera fait dans le théorème XIII-5.4.
3) Une version « non noethérienne » du théorème précédent pour un anneau zéro-dimensionnel réduit $\mathbf{K}$ est donnée en exercice 3. ∎

1.7. Théorème. (Mise en position de Noether simultanée)
Soient $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_k$ *des idéaux de type fini de* $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$.

1. *Il existe des entiers* $r_1, \ldots, r_k \in [\![-1..n]\!]$ *et un changement de variables tels que, en appelant* $Y_1, \ldots, Y_n$ *les nouvelles variables, on ait pour chaque* $j \in [\![1..k]\!]$ *la situation suivante.*
   Si $r_j = -1$, *alors* $\mathfrak{f}_j = \langle 1 \rangle$, *sinon*
   a. $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_{r_j}] \cap \mathfrak{f}_j = \{0\}$,
   b. *pour* $\ell > r_j$, Y_ℓ *est entier modulo* $\mathfrak{f}_j$ *sur* $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_{r_j}]$.

   Lorsque $\mathbf{K}$ *est infini, on peut prendre un changement linéaire de variables.*
2. *Si* $\langle 1 \rangle \neq \mathrm{D}(\mathfrak{f}_1) \supset \mathrm{D}(\mathfrak{f}_2) \supset \cdots \supset \mathrm{D}(\mathfrak{f}_k)$ *avec les dimensions* r_j *strictement croissantes, on peut intercaler des radicaux d'idéaux de type fini de sorte que la suite des dimensions obtenue soit* 0, 1, …, n.

NB : dans le point *1*, on dit que le changement de variables (qui éventuellement ne change rien du tout) a mis simultanément les idéaux $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_k$ en position de Noether.

D *1.* La même démonstration que pour le théorème précédent fonctionne compte tenu du fait qu'un changement de variables peut rendre simultanément unitaires en la dernière variable un nombre fini de polynômes non nuls.
2. Posons $\mathbf{A}_i = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_i]$. Supposons par exemple que $\mathfrak{f}_1$ soit de dimension 2 et $\mathfrak{f}_2$ de dimension 5. Nous devons intercaler des idéaux de dimensions 3 et 4. Nous supposons sans perte de généralité que les $\mathfrak{f}_i$ sont en position de Noether par rapport à $X_1, \ldots, X_n$.
On a par hypothèse $\mathbf{A}_2 \cap \mathfrak{f}_1 = 0$, avec des polynômes unitaires
$$h_3 \in \mathbf{A}_2[X_3] \cap \mathfrak{f}_1,\ h_4 \in \mathbf{A}_2[X_4] \cap \mathfrak{f}_1,\ \ldots,\ h_n \in \mathbf{A}_2[X_n] \cap \mathfrak{f}_1.$$
On a alors les inclusions suivantes,
$$\mathfrak{h}_1 = \mathfrak{f}_2 + \langle h_5, h_4 \rangle \supseteq \mathfrak{h}_2 = \mathfrak{f}_2 + \langle h_5 \rangle \supseteq \mathfrak{f}_2 \quad \text{et} \quad \mathrm{D}(\mathfrak{f}_1) \supseteq \mathrm{D}(\mathfrak{h}_1) \supseteq \mathrm{D}(\mathfrak{h}_2) \supseteq \mathrm{D}(\mathfrak{f}_2),$$
avec $\mathfrak{h}_1$ de dimension 3 et $\mathfrak{h}_2$ de dimension 4, tous deux en position de Noether par rapport à $(X_1, \ldots, X_n)$. □

Le Nullstellensatz proprement dit

Dans les théorèmes 1.1 (corps discret infini) et 1.5 (corps discret arbitraire) le Nullstellensatz est sous forme faible, c'est-à-dire qu'est démontrée l'équivalence entre d'une part,
• le système polynomial n'a de zéro dans aucune $\mathbf{K}$-algèbre finie non nulle,
et d'autre part,
• l'algèbre quotient correspondante est nulle.
Le Nullstellensatz général dit à quelle condition un polynôme s'annule aux zéros d'un système polynomial. Ici, puisque nous n'avons pas de corps algébriquement clos à notre disposition, nous considérerons les zéros dans

les **K**-algèbres finies et nous obtenons deux Nullstellensätze selon que nous considérons seulement les **K**-algèbres réduites ou pas.
Ces deux théorèmes généralisent d'un point de vue constructif (avec des « ou bien » explicites) le Nullstellensatz classique énoncé sous la forme du théorème III-9.7.

1.8. Théorème. (Nullstellensatz classique, version constructive générale)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret et* $f_1, \ldots, f_s, g$ *dans* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. *Considérons l'algèbre quotient* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$.

1. *Ou bien il existe un quotient non nul* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{A}$ *qui est une* $\mathbf{K}$*-algèbre finie réduite avec* $g \in \mathbf{B}^\times$ *(a fortiori* $g \neq 0$ *dans* $\mathbf{B}$*).*
2. *Ou bien* g *est nilpotent dans* $\mathbf{A}$ *(autrement dit, il existe un entier* N *tel que* $g^N \in \langle f_1, \ldots, f_s\rangle_{\mathbf{K}[\underline{X}]}$*).*

▷ On utilise l'astuce de Rabinovitch. On introduit une indéterminée supplémentaire T et l'on remarque que g est nilpotent dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, l'algèbre quotient $\mathbf{A}'$ pour le système polynomial $(f_1, \ldots, f_s, 1 - gT)$ est nulle. On termine avec le Nullstellensatz faible : si $\mathbf{A}' \neq 0$, on trouve un quotient non nul $\mathbf{B}'$ de $\mathbf{A}'$ qui est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Comme g est inversible dans $\mathbf{A}'$, il l'est aussi dans $\mathbf{B}'$ et dans $\mathbf{B} = \mathbf{B}'_{\mathrm{red}}$, et comme $\mathbf{B} \neq 0$, $g \neq 0$ dans $\mathbf{B}$. □

1.9. Théorème. (Nullstellensatz avec multiplicités)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret et* $f_1, \ldots, f_s, g$ *dans* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. *Considérons l'algèbre quotient* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$.

1. *Ou bien il existe un quotient* $\mathbf{B}$ *de* $\mathbf{A}$ *qui est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie avec* $g \neq 0$ *dans* $\mathbf{B}$.
2. *Ou bien* $g = 0$ *dans* $\mathbf{A}$ *(autrement dit,* $g \in \langle f_1, \ldots, f_s\rangle_{\mathbf{K}[\underline{X}]}$*).*

Démonstration utilisant les bases de Gröbner. Si dans la mise en position de Noether on a $r = 0$, le résultat est clair. Le point délicat est lorsque $r \geqslant 1$. On suppose l'idéal en position de Noether. On considère un ordre d'élimination pour les variables $(Y_1, \ldots, Y_r)$, puis la forme normale de g par rapport à la base de Gröbner de $\mathfrak{f}$. Pour que « tout reste en l'état » après une spécialisation $Y_i \mapsto \alpha_i = \overline{Y_i}$ dans un anneau quotient $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$, il suffit que les coefficients de tête dans la base de Gröbner de $\mathfrak{f}$ et dans la forme normale de g (ces coefficients sont des éléments de $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$) se spécialisent en des éléments inversibles de $\mathbf{L}$. Si l'on dispose de suffisamment d'éléments distincts dans $\mathbf{K}$ pour trouver des α_i convenables dans $\mathbf{K}$ on peut prendre $\mathbf{L} = \mathbf{K}$, sinon on considère le produit h de tous les coefficients de tête considérés précédemment, et l'on remplace $\mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r]$ par un quotient $\mathbf{L}$ non nul, strictement fini sur $\mathbf{K}$, dans lequel h est inversible (ceci est possible par le théorème 1.8, appliqué pour h sans aucune équation f_i). La solution à notre problème est alors donnée par l'algèbre

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \otimes_{\mathbf{K}[Y_1,\dots,Y_r]} \mathbf{A},$$

qui est un quotient de $\mathbf{A}$ strictement fini sur $\mathbf{K}$. □

Module des syzygies

Une autre conséquence importante du lemme de changement de variables 1.4 est le théorème suivant.

1.10. Théorème. *Soit* $\mathbf{K}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit discret.*

1. *Toute* $\mathbf{K}$*-algèbre de présentation finie est un anneau cohérent et fortement discret.*
2. *En conséquence tout module de présentation finie sur une telle algèbre est cohérent et fortement discret.*

D Nous montrons le premier point pour $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$ dans le cas où $\mathbf{K}$ est un corps discret. Le cas des anneaux zéro-dimensionnels s'en déduit par la technique habituelle (machinerie locale-globale élémentaire n°2). Ensuite le point *2* est une conséquence du théorème IV-4.3.

Nous faisons une preuve par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant clair. Nous supposons $n \geqslant 1$ et nous notons $\mathbf{B} = \mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]$. Nous devons montrer qu'un idéal de type fini arbitraire $\mathfrak{f} = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ est de présentation finie et détachable.

Si $\mathfrak{f} = 0$ c'est clair, dans le cas contraire on peut supposer en appliquant le lemme 1.4 que f_s est unitaire en X_n de degré d. Si $s = 1$, l'annulateur de f_1 est nul, et donc aussi le module des syzygies pour (f_1). Et l'idéal $\mathfrak{f}$ est détachable grâce à la division euclidienne par rapport à X_n.

Si $s \geqslant 2$, notons $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X_1, \dots, X_{n-1}]$. L'anneau $\mathbf{A}$ est cohérent fortement discret par hypothèse de récurrence. Notons R_i la syzygie qui correspond à l'égalité $f_i f_s - f_s f_i = 0$ ($i \in [\![1..s-1]\!]$). Modulo les syzygies R_i on peut réécrire les $X_n^k f_i = g_{k,i}$, pour $k \in [\![0..d-1]\!]$ et $i \in [\![1..s-1]\!]$ comme des vecteurs dans le $\mathbf{A}$-module libre $L \subseteq \mathbf{B}$ engendré par $(1, X_n, \dots, X_n^{d-1})$. Modulo les syzygies R_i toute syzygie pour $(f_1, \dots, f_s)$ à coefficients dans $\mathbf{B}$ se réécrit comme une syzygie pour

$$V = (g_{0,1}, \dots, g_{d-1,1}, \dots, g_{0,s-1}, \dots, g_{d-1,s-1}) \in L^{d(s-1)}$$

à coefficients dans $\mathbf{A}$. Comme L est un $\mathbf{A}$-module libre, il est cohérent fortement discret. On a en particulier un nombre fini de $\mathbf{A}$-syzygies pour V qui les engendrent toutes. Appelons les S_1, …, S_ℓ. Chaque $\mathbf{A}$-syzygie S_j pour V peut être lue comme une $\mathbf{B}$-syzygie S'_j pour $(f_1, \dots, f_s)$. Finalement, les syzygies R_i et S'_j engendrent le $\mathbf{B}$-module des syzygies pour $(f_1, \dots, f_s)$.

Concernant le caractère fortement discret, on raisonne de la même manière. Pour tester si un élément de $\mathbf{B}$ est dans $\mathfrak{f}$ on commence par le diviser par f_s par rapport à X_n. On obtient alors un vecteur dans le $\mathbf{A}$-module L dont il faut tester s'il appartient au sous-module engendré par les $g_{i,j}$. □

2. La méthode dynamique

Je ne crois pas aux miracles.
Un mathématicien constructif.

En mathématiques classiques les preuves d'existence sont rarement explicites. Deux obstacles essentiels apparaissent chaque fois que l'on essaie de rendre une telle preuve explicite.

Le premier obstacle est l'application du principe du tiers exclu. Par exemple, si vous considérez la preuve que tout polynôme univarié sur un corps $\mathbf{K}$ admet une décomposition en facteurs premiers, vous avez une sorte d'algorithme dont l'ingrédient essentiel est : si P est irréductible c'est bon, si P se décompose en un produit de deux facteurs de degré $\geqslant 1$, c'est bon aussi, par hypothèse de récurrence. Malheureusement la disjonction qui sert à faire fonctionner la preuve « P est irréductible ou P se décompose en un produit de deux facteurs de degré $\geqslant 1$ » n'est pas en général explicite. Autrement dit, même si un corps est défini de manière constructive, on ne peut être certain que cette disjonction puisse être explicitée par un algorithme. Nous nous trouvons ici en présence d'un cas typique où le principe du tiers exclu « pose problème », car l'existence d'un facteur irréductible ne peut pas faire l'objet d'un algorithme général.

Le deuxième obstacle est l'application du lemme de Zorn, qui permet de généraliser au cas non dénombrable les raisonnements par récurrence usuels dans le cas dénombrable.

Par exemple dans le Modern Algebra de van der Waerden le second écueil est évité en se limitant aux structures algébriques dénombrables.

Nous avons cependant deux faits d'expérience désormais bien établis :

- Les résultats concrets *universels* démontrés par les méthodes abstraites douteuses ci-dessus n'ont jamais été contredits. On a même très souvent réussi à en fournir des preuves constructives incontestables. Cela signifierait que même si les méthodes abstraites sont quelque part fautives ou contradictoires, elles n'ont jusqu'à présent été utilisées qu'avec suffisamment de discernement.
- Les résultats concrets existentiels démontrés par les méthodes abstraites douteuses n'ont pas non plus été infirmés. Bien au contraire, ils ont souvent été confirmés par des algorithmes démontrés constructivement [1].

Face à cette situation un peu paradoxale : les méthodes abstraites sont a priori douteuses, mais elles ne nous trompent pas fondamentalement quand elles donnent un résultat de nature concrète, il y a deux réactions possibles.

1. Sur ce deuxième point, notre affirmation est moins nette. Si nous revenons à l'exemple de la décomposition d'un polynôme en facteurs premiers, il est impossible de réaliser le résultat de manière algorithmique sur certains corps.

Ou bien l'on croit que les méthodes abstraites sont fondamentalement justes parce qu'elles reflètent une « réalité », une sorte d'« univers cantorien idéal » dans lequel se trouve la vraie sémantique des mathématiques. C'est la position du réalisme platonicien, défendue par exemple par Gödel.
Ou bien l'on pense que les méthodes abstraites sont vraiment sujettes à caution. Mais alors, à moins de croire que les mathématiques relèvent de la magie ou du miracle, il faut expliquer pourquoi les mathématiques classiques se trompent si peu. Si l'on ne croit ni à Cantor, ni aux miracles, on est conduit à penser que les preuves abstraites de résultats concrets contiennent nécessairement des « ingrédients cachés » suffisants pour construire les preuves concrètes correspondantes.
Cette possibilité de certifier constructivement des résultats concrets obtenus par des méthodes douteuses, si l'on arrive à la réaliser de manière assez systématique, est dans le droit fil du programme de Hilbert.
La méthode dynamique en algèbre constructive est une méthode générale de décryptage des preuves abstraites des mathématiques classiques lorsqu'elles utilisent des objets « idéaux » dont l'existence repose sur des principes non constructifs : le tiers exclu et l'axiome du choix. L'ambition de cette nouvelle méthode est de « donner une sémantique constructive pour les mathématiques classiques usuellement pratiquées ».
Nous remplaçons les objets abstraits des mathématiques classiques par des spécifications incomplètes mais concrètes de ces objets. C'est la contrepartie constructive des objets abstraits. Par exemple un *idéal premier potentiel fini* (notion qui sera introduite en section XV-1) est donné par un nombre fini d'éléments dans l'idéal et un nombre fini d'éléments dans son complémentaire. Cela constitue une spécification incomplète mais concrète d'un idéal premier.
Plus précisément, la méthode dynamique vise à donner une interprétation systématique de preuves classiques qui utilisent des objets abstraits en les relisant comme des preuves constructives au sujet de contreparties constructives de ces objets abstraits.
Cela se situe dans le même esprit que certaines techniques développées en calcul formel. Nous pensons ici à l'« évaluation paresseuse », ou l'« évaluation dynamique », c'est-à-dire l'évaluation paresseuse gérée de manière arborescente, comme dans le système D5 [56] qui réalise de manière très innocente ce tour de force : calculer de manière sûre dans la clôture algébrique d'un corps arbitraire, alors même que l'on sait que cet objet (la clôture algébrique) ne peut pas être construit en toute généralité.
Dans le chapitre présent une spécification incomplète du corps de racines d'un polynôme séparable sur un corps $\mathbf{K}$ sera donnée par une $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{A}$ et un groupe fini d'automorphismes G de cette algèbre. Dans $\mathbf{A}$ le polynôme se décompose en facteurs linéaires de sorte qu'un corps de racines est un quotient de $\mathbf{A}$, et G est une approximation du groupe de Galois en un sens

convenable (en particulier, il contient une copie du groupe de Galois). Nous expliquerons comment calculer avec une telle approximation sans jamais se tromper : quand une bizarrerie se manifeste, on sait comment faire pour améliorer l'approximation en cours et faire disparaître la bizarrerie.

Corps de racines et théorie de Galois en mathématiques classiques

Dans ce paragraphe nous indiquons un exposé possible du corps de racines d'un polynôme arbitraire et de la théorie de Galois d'un polynôme séparable en mathématiques classiques. Ceci permet de comprendre les « détours » que nous serons obligés de faire pour avoir une théorie pleinement constructive.

Si f est un polynôme unitaire, on travaille avec l'algèbre de décomposition universelle de f, $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ dans laquelle $f(T) = \prod_i (T - x_i)$, avec S_n comme groupe d'automorphismes (voir la section III-4).
Cette algèbre étant un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, tous les idéaux sont eux-mêmes des $\mathbf{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et l'on a le droit de considérer un idéal strict $\mathfrak{m}$ de dimension maximum comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel (tout ceci en application du principe du tiers exclu). Cet idéal est automatiquement un idéal maximal. L'algèbre quotient $\mathbf{L} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$ est alors un corps de racines pour f. Le groupe $G = \mathrm{St}(\mathfrak{m})$ opère sur $\mathbf{L}$ et le corps fixe de G, $\mathbf{L}^G = \mathbf{K}_1$, possède les deux propriétés suivantes :

- $\mathbf{L}/\mathbf{K}_1$ est une extension galoisienne avec $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{K}_1) \simeq G$.
- $\mathbf{K}_1/\mathbf{K}$ est une extension obtenue par adjonctions successives de racines p-ièmes, où $p = \mathrm{car}(\mathbf{K})$.

En outre, si $\mathbf{L}'$ est un autre corps de racines pour f avec $f = \prod_i (T - \xi_i)$ dans $\mathbf{L}'[T]$, on a un unique homomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{L}'$ vérifiant les égalités $\varphi(x_i) = \xi_i$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. On peut alors montrer que $\mathrm{Ker}\,\varphi$, qui est un idéal maximal de $\mathbf{A}$, est nécessairement conjugué de $\mathfrak{m}$ sous l'action de S_n. Ainsi le corps de racines est unique, à isomorphisme près (cet isomorphisme est non unique si $G \neq \{\mathrm{Id}\}$).
Enfin, lorsque f est séparable, la situation est simplifiée parce que l'algèbre de décomposition universelle est étale, et $\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}$.

La démarche précédente est possible d'un point de vue constructif si le corps $\mathbf{K}$ est séparablement factoriel et si le polynôme f est séparable, car alors, puisque l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$ est étale, elle se décompose en un produit fini de corps étales sur $\mathbf{K}$ (corollaire VI-1.13).
Mais lorsque le corps n'est pas séparablement factoriel, on est face à un obstacle a priori rédhibitoire, et l'on ne peut pas espérer obtenir de manière systématique et algorithmique un corps de racines qui soit strictement fini sur $\mathbf{K}$.

Si la caractéristique est finie et si le polynôme n'est pas séparable, on a besoin de propriétés de factorisation plus fortes pour construire un corps de racines (la question est délicate, et très bien exposée dans [MRR]).

Contourner l'obstacle de façon paresseuse

Ce qui est généralement proposé en calcul formel c'est, par exemple dans le cas d'un polynôme séparable, à tout le moins d'éviter de calculer une résolvante universelle R (comme dans le théorème III-6.15) dont le degré, $n!$, rend rapidement les calculs impraticables.
Ici, nous nous situons dans le cadre le plus général possible, et nous évitons tout recours à la factorisation des polynômes qui peut s'avérer impossible, ou qui, lorsqu'elle est possible, risque de coûter trop cher.
L'idée est d'utiliser l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$, ou bien un quotient de Galois $\mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$, avec un idempotent galoisien e (voir page 375) comme substitut pour $\mathbf{L}$. Ce «corps de racines dynamique» peut être géré sans trop de problèmes parce que chaque fois qu'il se passe quelque chose d'étrange, qui manifeste que le substitut à $\mathbf{L}$ n'est pas entièrement satisfaisant, on est capable de «réparer immédiatement la bizarrerie» en calculant un idempotent galoisien qui raffine le précédent, et dans la nouvelle approximation du corps de racines, la chose étrange a disparu.
Pour développer ce point de vue nous aurons besoin de mieux connaître l'algèbre de décomposition universelle, et la section 4 est consacrée à cet objectif.
Par ailleurs, nous étudierons dans la section 5 une version dynamique et constructive du corps de racines d'un polynôme non nécessairement séparable.

3. Introduction aux algèbres de Boole

Un *treillis* est un ensemble $\mathbf{T}$ muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ pour laquelle il existe un élément minimum, noté $0_{\mathbf{T}}$, un élément maximum, noté $1_{\mathbf{T}}$, et toute paire d'éléments (a,b) admet une borne supérieure, notée $a\vee b$, et une borne inférieure, notée $a\wedge b$. Une application d'un treillis vers un autre est appelé un *homomorphisme de treillis* si elle respecte les lois $\vee$ et $\wedge$ ainsi que les constantes 0 et 1. Le treillis est appelé un *treillis distributif* lorsque chacune des deux lois $\vee$ et $\wedge$ est distributive par rapport à l'autre.
Nous ferons une étude succincte de la structure de treillis distributif et de structures qui s'y rattachent au chapitre XI.

3.1. Proposition et définition. (Algèbres de Boole)

1. *Par définition un anneau* $\mathbf{B}$ *est une* algèbre de Boole *si, et seulement si, tout élément est idempotent. En conséquence* $2=_{\mathbf{B}}0$ *(car* $2=_{\mathbf{B}}4$*).*

2. *On peut définir sur* $\mathbf{B}$ *une relation d'ordre* $x \preccurlyeq y$ *par : x est multiple de y, c'est-à-dire* $\langle x\rangle \subseteq \langle y\rangle$*. Alors, deux éléments arbitraires admettent une borne inférieure, leur ppcm* $x \wedge y = xy$*, et une borne supérieure, leur pgcd* $x \vee y = x + y + xy$*. On obtient ainsi un treillis distributif avec* 0 *pour élément minimum et* 1 *pour élément maximum.*
3. *Pour tout* $x \in \mathbf{B}$*, l'élément* $x' = 1 + x$ *est l'unique élément qui vérifie les égalités* $x \wedge x' = 0$ *et* $x \vee x' = 1$*, on l'appelle* le complément *de x.*

Conflit de notation. On se retrouve ici avec un conflit de notation. En effet, la divisibilité dans un anneau conduit à une notion de pgcd, qu'il est usuel de noter $a \wedge b$, car il est pris pour une borne inférieure (a divise b étant compris comme « a plus petit que b » au sens de la divisibilité), en conflit avec le pgcd des éléments dans une algèbre de Boole, qui est une borne supérieure. Cela tient à ce que la relation d'ordre a été renversée pour que les éléments 0 et 1 de l'algèbre de Boole soient bien le minimum et le maximum dans le treillis. Ce conflit, inévitable, apparaîtra plus fort encore lorsque l'on considérera l'algèbre de Boole des idempotents d'un anneau $\mathbf{A}$. ∎

Bien que tous les éléments d'une algèbre de Boole soient idempotents nous garderons la terminologie de « système fondamental d'idempotents orthogonaux [2] » pour une famille finie (x_i) d'éléments deux à deux orthogonaux (c'est-à-dire $x_i x_j = 0$ pour $i \neq j$) dont la somme fait 1. Cette convention est d'autant plus justifiée que nous nous préoccuperons surtout de l'algèbre de Boole qui apparaît naturellement en algèbre commutative : celle des idempotents d'un anneau $\mathbf{A}$.

Algèbres de Boole discrètes

3.2. Proposition. (Toute algèbre de Boole discrète se comporte dans les calculs comme l'algèbre des parties détachables d'un ensemble fini)
Soit $(r_1, \ldots, r_m)$ *une famille finie dans une algèbre de Boole* $\mathbf{B}$*.*
Nous posons $s_i = 1 - r_i$ *et, pour une partie finie* I *de* $\{1, \ldots, m\}$*, nous notons* $r_I = \prod_{i\in I} r_i \prod_{j\notin I} s_j$*.*

1. *Les* r_I *forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux et ils engendrent la même algèbre de Boole que les* r_i*.*
2. *Supposons que* $\mathbf{B}$ *soit discrète. Alors, s'il y a exactement N éléments* r_I *non nuls, la sous-algèbre de Boole engendrée par les* r_i *est isomorphe à l'algèbre des parties finies d'un ensemble à N éléments.*

Comme corollaire on obtient le fait suivant et le théorème de structure fondamental qui le résume. Rappelons que l'on note $\mathrm{P_f}(S)$ l'ensemble des parties finies d'un ensemble S.

2. Il serait plus naturel de dire : système fondamental d'éléments orthogonaux.

Dans une algèbre de Boole discrète un élément e est appelé un *atome* s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes.

— e est minimal parmi les éléments non nuls.
— $e \neq 0$ et pour tout f, f est orthogonal ou supérieur à e.
— $e \neq 0$ et pour tout f, $ef = 0$ ou e, ou encore $ef = 0$ ou $e(1-f) = 0$.
— $e \neq 0$ et une égalité $e = e_1 + e_2$ avec $e_1 e_2 = 0$ implique $e_1 = 0$ ou $e_2 = 0$.

On dit aussi que e est *indécomposable*. Il est clair qu'un automorphisme d'une algèbre de Boole discrète conserve l'ensemble des atomes et que pour deux atomes e et f, on a $e = f$ ou $ef = 0$.

3.3. Théorème. (Théorème de structure)

1. *Toute algèbre de Boole finie est isomorphe à l'algèbre des parties détachables d'un ensemble fini.*
2. *Plus précisément, pour une algèbre de Boole C les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *C est finie.*
   b. *C est discrète et de type fini.*
   c. *L'ensemble S des atomes est fini, et 1_C est la somme de cet ensemble.*

   Dans un tel cas C est isomorphe à l'algèbre de Boole $\mathrm{P_f}(S)$.

Algèbre de Boole des idempotents d'un anneau commutatif

3.4. Fait. *Les idempotents d'un anneau $\mathbf{A}$ forment une algèbre de Boole, notée $\mathbb{B}(\mathbf{A})$, avec les lois $\wedge$, $\vee$, $\neg$ et $\oplus$ données par*

$$r \wedge s = rs, \quad r \vee s = r + s - rs \quad , \quad \neg\, r = 1 - r \quad \text{et} \quad r \oplus s = (r-s)^2.$$

Si $\mathbf{A}$ est une algèbre de Boole, $\mathbb{B}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}$. Si $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un morphisme d'anneaux, sa restriction à $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ donne un morphisme $\mathbb{B}(\varphi) : \mathbb{B}(\mathbf{A}) \to \mathbb{B}(\mathbf{B})$.

▷ Il suffit de montrer que si l'on munit l'ensemble $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ des lois $\oplus$ et $\times$ on obtient une algèbre de Boole avec $0_{\mathbf{A}}$ et $1_{\mathbf{A}}$ comme éléments neutres. Les calculs sont laissés à la lectrice. □

Le théorème 3.3 a la conséquence immédiate suivante.

3.5. Fait. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'algèbre de Boole des idempotents $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ est finie.*
2. *L'anneau $\mathbf{A}$ est un produit fini d'anneaux connexes non triviaux.*

D Il suffit de montrer que *1* implique *2*. Si e est un atome de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$, l'anneau $\mathbf{A}[1/e]$ est non trivial et connexe. Si $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ est finie, l'ensemble fini A de ses atomes forme un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{A}$, et l'on a un isomorphisme canonique $\mathbf{A} \to \prod_{e\in A} \mathbf{A}[1/e]$. □

Remarque. Si $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ a un seul élément, $\mathbf{A}$ est trivial et le produit fini est un produit vide. Ceci s'applique aussi pour le corollaire suivant. ∎

3.6. Corollaire. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ *est finie et* $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel.*
2. $\mathbf{A}$ *est un produit fini d'anneaux locaux zéro-dimensionnels non triviaux.*

Éléments galoisiens dans une algèbre de Boole

3.7. Définition.

1. Si G est un groupe qui opère sur une algèbre de Boole C, on dit que le couple (C, G) est une G-algèbre de Boole.
2. Un élément e d'une G-algèbre de Boole C est dit *galoisien* si son orbite sous G est un système fondamental d'idempotents orthogonaux.
3. Une G-algèbre de Boole est dite *transitive* si 0 et 1 sont les seuls éléments fixés par G.

Nous étudions maintenant le cas où le groupe est fini et l'algèbre discrète.

3.8. Fait. *Soit G un groupe fini et C une G-algèbre de Boole transitive, discrète et non triviale. Soit $e \neq 0$ dans C, et $\{e_1, \dots, e_k\}$ l'orbite de e sous G. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'élément e est galoisien.*
2. *Pour tout $i > 1$, $e_1 e_i = 0$.*
3. *Pour tout $\sigma \in G$, $e\sigma(e) = e$ ou 0.*
4. *Pour tous $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$, $e_i e_j = 0$.*

D Le point *1* implique clairement les autres. Les points *2* et *4* sont facilement équivalents et impliquent le point *3*. Le point *3* signifie que pour tout σ, $\sigma(e) \geqslant e$ ou $\sigma(e)e = 0$. Si l'on a $\sigma(e) \geqslant e$ pour un certain σ, alors on obtient

$$e \leqslant \sigma(e) \leqslant \sigma^2(e) \leqslant \sigma^3(e) \leqslant \dots ,$$

ce qui donne $e = \sigma(e)$ en considérant un ℓ tel que $\sigma^\ell = 1_G$. Donc, le point *3* implique le point *2*. Enfin si le point *4* est vérifié, la somme de l'orbite est un élément > 0 fixé par G donc égal à 1. □

3.9. Lemme. (Rencontre de deux éléments galoisiens)
Soit G un groupe fini et une G-algèbre de Boole C, discrète et non triviale. Étant donnés deux éléments galoisiens e, f dans (C,G), nous noterons
$$G.e = \{e_1,\dots,e_m\},\ E = \mathrm{St}_G(e),\ \text{et } F = \mathrm{St}_G(f).$$

1. *Il existe $\tau \in G$ tel que $f\tau(e) \neq 0$.*
2. *Si $e \leqslant f$, alors $E \subseteq F$ et $f = \sum_{i:e_i\leqslant f} e_i = \sum_{\sigma\in F/E} \sigma(e)$.*

On suppose C transitive et $ef \neq 0$. On obtient les résultats suivants.

3. *L'élément ef est galoisien, de stabilisateur $E \cap F$, et l'orbite $G.ef$ est constituée des éléments non nuls de $(G.e)(G.f)$. En particulier, $G.ef$ engendre la même sous-algèbre de Boole de C que $G.e \cup G.f$.*
4. *Si $E \subseteq F$, alors $e \leqslant f$.*

▷ *1.* En effet, $f = \sum_i fe_i$.
2. De manière générale, pour $x' = \sigma(x)$ où $x \neq 0$ vérifie $x \leqslant f$, montrons :

$$(\star) \qquad x' \leqslant f \overset{[a]}{\Longrightarrow} fx' \neq 0 \overset{[b]}{\Longrightarrow} \sigma(f) = f \overset{[c]}{\Longrightarrow} x' \leqslant f.$$

On obtient $[a]$ en multipliant $x' \leqslant f$ par x', $[b]$ en multipliant $x' \leqslant \sigma(f)$ (déduite de $x \leqslant f$) par f et en utilisant f galoisien, et enfin $[c]$ en appliquant σ à $x \leqslant f$. Les assertions de $(\star)$ sont donc des équivalences. On en déduit $\mathrm{St}_G(x) \subseteq \mathrm{St}_G(f)$. Si de plus, $1 = \sum_{x'\in G.x} x'$, alors :
$$f = \sum_{x'\in G.x} fx' = \sum_{x'\in G.x | x'\leqslant f} x' = \sum_{\sigma\in F/\mathrm{St}_G(x)} \sigma(x).$$
Ceci s'applique à $x = e$.
3. Notons $G.f = \{f_1,\dots,f_p\}$. Pour $\sigma \in G$ il existe i, j tels que
$$e\, f\, \sigma(ef) = e\, f\, e_i\, f_j,$$
qui est égal à ef si $\sigma \in E \cap F$ et à 0 sinon. D'après le fait 3.8, ef est donc un élément galoisien de stabilisateur $E \cap F$. Supposons maintenant $e_i f_j \neq 0$. Alors, d'après le point *1*, il existe $\tau \in G$ tel que $\tau(ef)e_i f_j \neq 0$. Puisque e et f sont galoisiens, ceci implique $\tau(e) = e_i$ et $\tau(f) = f_j$, donc $e_i f_j \in G.ef$.
4. Résulte immédiatement de *3.* □

L'exemple paradigmatique d'application du prochain théorème est le suivant. On considère un anneau connexe non trivial $\mathbf{k}$, $(\mathbf{k},\mathbf{C},G)$ est une algèbre galoisienne ou prégaloisienne (cf. définition 4.2) et $C = \mathbb{B}(\mathbf{C})$.

3.10. Théorème. (Théorème de structure galoisien, 1) *Soit G un groupe fini et C une G-algèbre de Boole transitive, discrète et non triviale.*

1. (Structure des G-algèbres de Boole finies transitives)
   L'algèbre C est finie si, et seulement si, il existe un atome e. Dans ce cas la structure de (C,G) est entièrement caractérisée par $E = \mathrm{St}_G(e)$.
   Plus précisément, l'idempotent e est galoisien, $G.e$ est l'ensemble des

atomes, $C \simeq \mathrm{P_f}(G.e)$*,* G *opère sur* $G.e$ *comme sur* G/E*, et sur* C *comme sur* $\mathrm{P_f}(G/E)$*. En particulier,* $|C| = 2^{|\,G : E\,|}$.
On dira que e *est un* générateur galoisien *de* C.

2. *Toute famille finie d'éléments de* C *engendre une sous-*G*-algèbre finie.*
3. *L'algèbre de Boole* C *ne peut avoir plus que* $2^{|G|}$ *éléments.*
4. *Soient* e *et* f *des éléments galoisiens,* $E = \mathrm{St}_G(e)$ *et* $F = \mathrm{St}_G(f)$.
   a. *Il existe* $\sigma \in G$ *tel que* $f\sigma(e) \neq 0$.
   b. *Si* $ef \neq 0$*,* ef *est un générateur galoisien de la sous-*G*-algèbre de Boole de* G *engendrée par* e *et* f*, et* $\mathrm{St}_G(ef) = E \cap F$.
   c. *Si* $e \leqslant f$ *(i.e.* $fe = e$*), alors* $E \subseteq F$ *et* $f = \sum_{\sigma \in F/E} \sigma(e)$.
5. (Caractérisation des éléments galoisiens dans une sous G-algèbre finie)
   Soit e *un élément galoisien et* f *une somme de* r *éléments de* $G.e$*, dont* e*. Soit* $E = \mathrm{St}_G(e)$ *et* $F = \mathrm{St}_G(f)$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. f *est galoisien.*
   b. $E \subseteq F$ *et* $f = \sum_{\sigma \in F/E} \sigma(e)$.
   c. $|F| = r \times |E|$.
   d. $|F| \geqslant r \times |E|$.

D *1.* Si C est finie il existe un atome. Si e est un atome, pour tout $\sigma \in G$, on a $e\,\sigma(e) = 0$ ou e, donc e est galoisien (fait 3.8). Le reste en découle en tenant compte du théorème 3.3.
2. On considère la sous-algèbre de Boole $C' \subseteq C$ engendrée par les orbites des éléments de la famille finie donnée. C' est de type fini et discrète donc finie. En conséquence ses atomes forment un ensemble fini $S = \{e_1, \ldots, e_k\}$ et C' est isomorphe à l'algèbre de Boole des parties finies de S :

$$C' = \left\{ \textstyle\sum_{i \in F} e_i \,|\, F \in \mathcal{P}_k \right\}.$$

Clairement, G opère sur C'. Pour $\sigma \in G$, $\sigma(e_1)$ est un atome, donc e_1 est galoisien (fait 3.8 *3*) et $(e_1, \ldots, e_k)$ est son orbite.
3. Résulte de *1* et *2*.
4. Déjà vu dans le lemme 3.9.
5. On écrit $\sigma_1 = 1_G$, $G.e = \{\sigma_1.e, \ldots, \sigma_k.e\}$ avec $k = |\,G : E\,|$, ainsi que $f = \sigma_1.e + \cdots + \sigma_r.e$.
$a \Rightarrow b$. On applique le point *4*.
$b \Rightarrow a$. Pour $\tau \in F$, $\tau.f = f$.
Pour $\tau \notin F$, $F.e \cap (\tau F).e = \emptyset$, et donc $f\,\tau(f) = 0$.
$b \Rightarrow c$. On a $F.e = \{1_G.e, \sigma_2.e, \ldots, \sigma_r.e\}$, et puisque E est le stabilisateur de e, on obtient $|F| = r \times |E|$.

$d \Rightarrow b$. On a $F = \{\, \tau \,|\, \tau\{\sigma_1.e, \ldots, \sigma_r.e\} = \{\sigma_1.e, \ldots, \sigma_r.e\} \,\}$. D'où l'inclusion $F.e \subseteq \{\sigma_1.e, \ldots, \sigma_r.e\}$, et $F.e = \{\sigma_1.e, \ldots, \sigma_s.e\}$ avec $s \leqslant r \leqslant k$. Le stabilisateur de e pour l'action de F sur $F.e$ est égal à $E \cap F$. Donc

$$|F| = |F.e|\ |E \cap F| = s\ |E \cap F| \leqslant r\ |E \cap F| \leqslant r\ |E|\,.$$

Donc si $|F| \geqslant r\ |E|$, on a $|F.e| = r$ et $|E| = |E \cap F|$, c'est-à-dire $E \subseteq F$ et $F.e = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_r\}$. □

3.11. Algorithme. Calcul d'un élément galoisien et de son stabilisateur.

Entrée : e : élément non nul d'une algèbre de Boole C ; G : groupe fini d'automorphismes de C ; $S_e = \mathrm{St}_G(e)$.
\# *On suppose que* 0 *et* 1 *sont les seuls points fixes pour l'action de* G *sur* C.
Sortie : e_1 : un élément galoisien de C tel que $G.e_1$ engendre la même algèbre de Boole que $G.e$; H : le sous-groupe stabilisateur de e_1.
Variables locales : h : dans C ; σ : dans G ; L : liste d'éléments de $\overline{G/S_e}$; E : ensemble correspondant d'éléments de G/S_e ;
\# G/S_e est l'ensemble des classes à gauche modulo S_e.
\# $\overline{G/S_e}$ est un système de représentants des classes à gauche modulo S_e
Début
  $E \leftarrow \emptyset$; $L \leftarrow [\,]$; $e_1 \leftarrow e$;
  pour σ **dans** $\overline{G/S_e}$ **faire**
    $h \leftarrow e_1\sigma(e)$;
    si $h \neq 0$ **alors** $e_1 \leftarrow h$; $L \leftarrow L \bullet [\sigma]$; $E \leftarrow E \cup \{\sigma S_e\}$
    fin si ;
  fin pour ;
  $H \leftarrow \mathrm{St}_G(E)$ \# $H = \big\{\, \alpha \in G \,|\, \forall \sigma \in L, \alpha\sigma \in \bigcup_{\tau \in L} \tau S_e \,\big\}$.
Fin.

Sous les hypothèses du théorème 3.10 on peut calculer un élément galoisien e_1 tel que $G.e_1$ et $G.e$ engendrent la même algèbre de Boole, au moyen de l'algorithme 3.11.

Correction de l'algorithme. Nous avons noté G/S un système de représentants des classes à gauche modulo S. Écrivons $e_1 = e\sigma_2(e)\cdots\sigma_r(e)$ où les σ_i sont tous les σ qui ont passé avec succès le test $h \neq 0$ dans l'algorithme (et $\sigma_1 = \mathrm{Id}$). Nous voulons montrer que e_1 est un atome de C' (l'algèbre de Boole engendrée par $G.e$), ce qui revient à dire que pour tout $\sigma \in G/S$ on a $e_1\sigma(e) = e_1$ ou 0 (puisque C' est engendrée par les $\tau(e)$). Or σ a été testé par l'algorithme, donc ou bien σ est l'un des σ_i, auquel cas $e_1\sigma(e) = e_1$, ou bien $g\sigma(e) = 0$ pour un idempotent g qui divise e_1, et a fortiori $e_1\sigma(e) = 0$.

Montrons que le stabilisateur H de e_1 vérifie bien la condition requise. On a $e_1 = \prod_{\tau\in L} \tau(e)$, et pour $\sigma \in G$ on a les équivalences :

$$\sigma \in \bigcup_{\tau\in L} \tau S \iff e_1\sigma(e) = e_1 \iff e_1 \leqslant \sigma(e), \qquad \text{et}$$
$$\sigma \notin \bigcup_{\tau\in L} \tau S \iff e_1\sigma(e) = 0.$$

Pour $\alpha \in G$ on a $\alpha(e_1) = \prod_{\tau\in L} \alpha\big(\tau(e)\big)$. C'est un élément de l'orbite de e_1, il est égal à e_1 si, et seulement si, $e_1 \leqslant \alpha(e_1)$, si, et seulement si, $e_1 \leqslant \alpha\big(\sigma(e)\big)$ pour chaque σ in L. Enfin, pour un σ arbitraire dans G, $e_1 \leqslant \alpha\big(\sigma(e)\big)$ si, et seulement si, $\alpha\sigma$ est dans $\bigcup_{\tau\in L} \tau S$. □

On notera que l'élément e_1 obtenu comme résultat du calcul dépend de l'ordre dans lequel est énuméré l'ensemble fini G/S et qu'il n'y a pas d'ordre naturel (intrinsèque) sur cet ensemble.

Exemple. On peut se demander s'il existe un rapport entre le stabilisateur S de e et le stabilisateur H d'un élément galoisien e_1 associé à e. Voici un exemple qui montre qu'il n'y a pas de rapport étroit, avec $G = \mathrm{S}_6$ opérant sur $\mathrm{Adu}_{\mathbb{Q},f}$ avec le polynôme $f(T) = T^6 - 4T^3 + 7$. On considère l'idempotent $e = 1/6(x_5^3x_6^3 - 2x_5^3 - 2x_6^3 + 7)$ que l'on calcule partir d'une factorisation du polynôme minimal de l'élément $x_5 + x_6$ (cf. proposition 6.6).
On trouve $\mathrm{St}(e) = S = \langle (1432), (12), (56)\rangle \simeq \mathrm{S}_4 \times \mathrm{S}_2$ avec $|S| = 48$, et
$\mathrm{St}(e_1) = H = \langle (24), (123456)\rangle = (\langle (13), (135)\rangle \times \langle (24), (246)\rangle) \rtimes \langle (14)(25)(36)\rangle$
avec $H \simeq (\mathrm{S}_3 \times \mathrm{S}_3) \rtimes \mathrm{S}_2$, $|H| = 72$, et $S \cap H = \langle (24), (1234)(56)\rangle$ diédral d'ordre 8.
En bref, H (ni même la classe de conjugaison de H dans G) ne peut être calculé à partir de S seulement. En effet, la liste L de classes à gauche sélectionnée par l'algorithme ne dépend pas seulement du sous-groupe S de G mais aussi de la façon dont G opère sur C. ∎

4. L'algèbre de décomposition universelle (2)

Voici un petit guide de lecture pour la fin de ce chapitre.
Dans la section III-6, nous avons vu que si $\mathbf{k}$ est un corps discret infini, si f est séparable et si l'on est capable de décomposer une résolvante de Galois en produit de facteurs irréductibles, alors l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$ est isomorphe à $\mathbf{L}^r$, avec $\mathbf{L}$ un corps de racines pour f et $r = |\,\mathrm{S}_n : G\,|$, où G est un sous-groupe de S_n qui s'identifie à $\mathrm{Gal}(\mathbf{L}/\mathbf{k})$. En outre, $[\,\mathbf{L} : \mathbf{k}\,] = |G|$.
Nous allons voir que cette situation idéale peut servir de ligne directrice pour une approche paresseuse de la construction d'un corps de racines. Ce qui remplace la factorisation complète d'une résolvante de Galois, c'est la découverte ou la construction d'un idempotent galoisien. Alors, on a une situation analogue à la situation idéale décrite auparavant : $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}^r$, où $\mathbf{B}$

est un quotient de Galois de $\mathbf{A}$, muni d'un groupe d'automorphismes qui s'identifie à un sous-groupe G de S_n, avec $[\,\mathbf{B} : \mathbf{k}\,] = |G|$ et $r = |\,\mathrm{S}_n : G\,|$.

Dans toute la section 4, $\mathbf{k}$ est un anneau commutatif,
$f = T^n + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k s_k T^{n-k} \in \mathbf{k}[T]$ est unitaire de degré n,
et $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ est l'algèbre de décomposition universelle de f sur $\mathbf{k}$.

Rappelons que l'algèbre de décomposition universelle

$$\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle S_1 - s_1, \ldots, S_n - s_n\rangle = \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathcal{J}(f)$$

(où les S_i sont les polynômes symétriques élémentaires en les X_i) est l'algèbre qui résout le problème universel lié à la décomposition du polynôme f en un produit de facteurs $T - \xi_j$ (cf. fait III-4.2). Le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ est libre, et une base est formée par les «monômes» $x_1^{d_1}\cdots x_{n-1}^{d_{n-1}}$ tels que pour $k \in [\![0..n-1]\!]$, on ait $d_k \leqslant n-k$ (voir fait III-4.4). Nous noterons cette base $\mathcal{B}(f)$.
Par changement d'anneau de base, on obtient le fait important suivant (à distinguer du fait III-4.3).

4.1. Fait. (Changement d'anneau de base pour une algèbre de décomposition universelle) *Soit $\rho : \mathbf{k} \to \mathbf{k}_1$ une $\mathbf{k}$-algèbre. Notons f^ρ l'image de f dans $\mathbf{k}_1[T]$. Alors, l'algèbre $\rho_\star(\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}) = \mathbf{k}_1 \otimes_{\mathbf{k}} \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$, est naturellement isomorphe à $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k}_1,f^\rho}$.*

Quotients de Galois des algèbres prégaloisiennes

Si $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre, on note $\mathrm{Aut}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C})$ son groupe d'automorphismes.
Nous donnons maintenant une définition qui permet d'insérer l'algèbre de décomposition universelle dans un cadre un peu plus général et utile.

4.2. Définition. *(Algèbres prégaloisiennes)*
Une *algèbre prégaloisienne* est donnée par un triplet $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ où

1. $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre avec $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{C}$, $\mathbf{k}$ facteur direct dans $\mathbf{C}$,
2. G est un groupe fini de $\mathbf{k}$-automorphismes de $\mathbf{C}$,
3. $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de rang constant $|G|$,
4. pour tout $z \in \mathbf{C}$, on a $\mathrm{C}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(z)(T) = \mathrm{C}_G(z)(T)$.

Remarque. Rappelons que d'après le lemme VI-4.3, si $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre strictement finie et fidèle, alors $\mathbf{k}$ (identifiée à son image dans $\mathbf{B}$) est facteur direct dans $\mathbf{B}$. En conséquence le point *1* ci-dessus résulte du point *3*. ∎

Exemples. 1) D'après ce que l'on sait déjà sur l'algèbre de décomposition universelle (section III-4) et d'après le lemme III-5.12, pour tout polynôme unitaire f, le triplet $(\mathbf{k}, \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}, \mathrm{S}_n)$ est une algèbre prégaloisienne.

2) Le théorème d'Artin VI-7.11 montre que toute algèbre galoisienne est une algèbre prégaloisienne. ∎

Le lecteur se reportera page 375 pour les définitions d'idempotent galoisien, d'idéal galoisien et de quotient de Galois.

4.3. Théorème. (Théorème de structure galoisien, 2)
Considérons une algèbre prégaloisienne $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$. *Soit* e *un idempotent galoisien de* $\mathbf{C}$, *et* $\{e_1, \dots, e_m\}$ *son orbite sous* G. *Soit* H *le stabilisateur de* $e = e_1$ *et* $r = |H|$, *de sorte que* $rm = |G|$. *Posons* $\mathbf{C}_i = \mathbf{C}[1/e_i]$ *pour* $(i \in [\![1..m]\!])$. *Soit enfin* $\pi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}_1$ *la projection canonique.*

1. $(\mathbf{k}, \mathbf{C}_1, H)$ *est une algèbre prégaloisienne (autrement dit un quotient de Galois d'une algèbre prégaloisienne est une algèbre prégaloisienne).*
2. *Les* $\mathbf{C}_i$ *sont des* $\mathbf{k}$*-algèbres deux à deux isomorphes, et* $\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}_1^m$.
3. *L'algèbre* $\mathbf{C}_1$ *est un* $\mathbf{k}$*-module projectif de rang constant* $r = |H|$. *La restriction de* π *à* $\mathbf{k}$, *et même à* $\mathbf{C}^G$, *est injective. Et* $\mathbf{k}$ *(identifié à son image dans* $\mathbf{C}_1$*) est facteur direct dans* $\mathbf{C}_1$.
4. *Le groupe* H *opère sur* $\mathbf{C}_1$ *et* $\mathbf{C}_1^H$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathbf{C}^G$ *: plus précisément,* $\mathbf{C}_1^H = \pi(\mathbf{C}^H) = \pi(\mathbf{C}^G)$.
5. *Pour tout* $z \in \mathbf{C}_1$, $\mathrm{C}_{\mathbf{C}_1/\mathbf{k}}(z)(T) = \mathrm{C}_H(z)(T)$.
6. *Soit* g_1 *un idempotent galoisien de* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}_1, H)$, K *son stabilisateur dans* H, $g' \in e_1\mathbf{C}$ *tel que* $\pi(g') = g_1$. *Alors,* g' *est un idempotent galoisien de* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$, *son stabilisateur est* K, *et l'on a un isomorphisme canonique* $\mathbf{C}_1/\langle 1 - g_1\rangle \simeq \mathbf{C}/\langle 1 - g'\rangle$.
7. *Si* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *est une algèbre galoisienne, alors* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}_1, H)$ *également.*

▷ Le point *1* est une synthèse partielle des points *2*, *3*, *4*, *5*.
Le point *2* est évident. La première affirmation du point *3* en est une conséquence immédiate. Soit $\tau_1 = \mathrm{Id}, \tau_2, \dots, \tau_m$ un système de représentants pour G/H, avec $\tau_i(e_1) = e_i$. Montrons que la restriction de π à $\mathbf{C}^G$ est injective : si $a \in \mathbf{C}^G$ et $e_1 a = 0$, alors, en transformant par les τ_j, tous les $e_j a$ sont nuls, et donc aussi leur somme, égale à a. Enfin $\pi(\mathbf{k})$ est facteur direct dans $\mathbf{C}_1$ par le lemme VI-4.3.
4. Montrons d'abord $\mathbf{C}_1^H = \pi(\mathbf{C}^H)$. Soit $z \in \mathbf{C}_1^H$ et $u \in \mathbf{C}$ tel que $\pi(u) = z$. Puisque $z \in \mathbf{C}_1^H$, pour $\sigma \in H$, $\sigma(u) \equiv u \bmod \langle 1 - e_1\rangle$, i.e. $e_1\sigma(u) = e_1 u$ ou encore, puisque $\sigma(e_1) = e_1$, $\sigma(e_1 u) = e_1 u$. En posant $y = e_1 u$, on voit que y est H-invariant et $\pi(y) = z$.
Montrons maintenant que $z \in \pi(\mathbf{C}^G)$. On pose

$$v = \textstyle\sum_i \tau_i(y) = \sum_i \tau_i(e_1 y) = \sum_i e_i \tau_i(y).$$

Comme $\pi(e_i) = \delta_{1i}$, on a $\pi(v) = \pi(y)$. L'élément v ainsi construit est indépendant du système de représentants pour G/H. En effet, si (τ_i') est un autre système de représentants, quitte à réordonner les indices, on peut

supposer que $\tau_i' H = \tau_i H$, et donc, y étant H-invariant, $\tau_i'(y) = \tau_i(y)$.
Pour $\sigma \in G$, les $(\sigma \circ \tau_i)$ forment un système de représentants pour G/H, donc $\sigma(v) = v$: l'élément v est G-invariant.
5. On a une décomposition $\mathbf{C} = \mathbf{C}_1' \oplus \cdots \oplus \mathbf{C}_m'$, où $\mathbf{C}_j' = e_j\mathbf{C}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini de rang r et la restriction $\pi : \mathbf{C}_1' \to \mathbf{C}_1$ est un isomorphisme de $\mathbf{k}$-modules. Pour tout $y \in \mathbf{C}$, on a :

$$\mathrm{C}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(y)(T) = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{C}_{\mathbf{C}_j'/\mathbf{k}}(e_j y)(T) \quad \text{et} \quad \mathrm{C}_G(y)(T) = \prod_{j=1}^{m} \prod_{\tau \in H} \big(T - (\tau_j \circ \tau)(y)\big).$$

Soit y l'unique élément de $\mathbf{C}_1'$ tel que $\pi(y) = z$. L'égalité de gauche donne

$$\mathrm{C}_{\mathbf{C}/\mathbf{k}}(y)(T) = T^{(m-1)r}\, \mathrm{C}_{\mathbf{C}_1/\mathbf{k}}(z)(T).$$

Ensuite, appliquons π à l'égalité de droite en notant que $(\tau_j \circ \tau)(y) \in \mathbf{C}_j'$ (utiliser $y = e_1 y$ et appliquer $\tau_j \circ \tau$). On obtient alors :

$$\mathrm{C}_G(y)(T) = T^{(m-1)r}\, \mathrm{C}_H(z)(T).$$

D'où $\mathrm{C}_{\mathbf{C}_1/\mathbf{k}}(z)(T) = \mathrm{C}_H(z)(T)$.
6. En tenant compte du fait que la restriction de π à $e_1\mathbf{C}$ est un isomorphisme on a $g'^2 = g' = g'e_1$. De même pour $\sigma \in H$ on a : $\sigma(g') = g'$ si $\sigma \in K$, ou $g'\sigma(g') = 0$ si $\sigma \notin K$. Enfin pour $\sigma \in G \setminus H$, $e_1\sigma(e_1) = 0$, et donc $g'\sigma(g') = 0$. Ceci montre que g' est un idempotent galoisien de $\mathbf{C}$ avec pour stabilisateur K. L'isomorphisme canonique est immédiat.
7. D'après le point *4*, $\mathbf{k}$ est l'ensemble des points fixes. Il reste à voir que H est séparant. Si $\sigma \in H = \mathrm{St}(e)$ est distinct de l'identité, on a des a_i et des $x_i \in \mathbf{C}$ tels que $\sum_i a_i(\sigma(x_i) - x_i) = 1$. Cette égalité reste vraie si on localise en e. □

Cas où l'algèbre de Boole d'une algèbre de décomposition universelle est discrète

Il est souhaitable que l'on puisse tester l'égalité de deux idempotents e_1, e_2 dans l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$, ce qui revient à savoir tester $e = 0$ pour un idempotent arbitraire de $\mathbf{A}$ (comme dans tout groupe additif). Or $e\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini et $e = 0$ si, et seulement si, $\mathrm{R}_{e\mathbf{A}}(X) = 1$ (théorème V-8.4 point *6*). Comme le polynôme rang $\mathrm{R}_{e\mathbf{A}}$ peut être calculé explicitement, on peut tester l'égalité de deux idempotents dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, on peut tester l'égalité de deux idempotents dans $\mathbf{k}$. L'argument ci-dessus fonctionne dans un cadre un peu plus général et l'on obtient le résultat suivant.

4.4. Fait. *Si* $\mathbb{B}(\mathbf{k})$ *est une algèbre de Boole discrète, il en va de même pour* $\mathbb{B}(\mathbf{A})$. *Plus généralement, si* $\mathbf{C}$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre strictement finie, et si* $\mathbb{B}(\mathbf{k})$ *est discrète, alors* $\mathbb{B}(\mathbf{C})$ *est discrète.*

4.5. Fait. *Si* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *est une algèbre prégaloisienne, tout idempotent* e *de* $\mathbf{C}$ *fixé par* G *est un élément de* $\mathbf{k}$.

▷ Le polynôme caractéristique $\mathrm{C}_G(e) = (T-e)^{|G|}$ est dans $\mathbf{k}[T]$ donc son coefficient constant, qui est égal à $\pm e$ est dans $\mathbf{k}$. □

4.6. Fait. *Soit* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *une algèbre prégaloisienne avec* $\mathbf{k}$ *connexe et non trivial, alors :*

1. 0 *et* 1 *sont les seuls idempotents de* $\mathbf{C}$ *fixés par* G,
2. $\mathbb{B}(\mathbf{C})$ *est discrète,*
3. *tout atome de* $\mathbb{B}(\mathbf{C})$ *est un idempotent galoisien,*
4. *deux atomes sont conjugués sous* G,
5. *un idempotent* $e \neq 0$ *est galoisien si, et seulement si, son orbite sous* G *est formée d'éléments 2 à 2 orthogonaux,*
6. *si* f *est un idempotent* $\neq 0$, *l'idéal* $\langle 1-f\rangle$ *est galoisien si, et seulement si, son orbite sous* G *est formée d'idéaux 2 à 2 comaximaux.*

▷ Les points *1* et *2* résultent clairement des faits *4.5* et *4.4*.
3. Si e est un atome, $\sigma(e)$ aussi, donc $\sigma(e) = e$ ou $e\sigma(e) = 0$. Ainsi deux éléments de l'orbite de e sont orthogonaux, donc la somme de l'orbite de e est un idempotent non nul fixé par G : il est égal à 1.
4. Si e' est un autre atome, il est égal la somme des $e_i e'$, où e_i parcourt l'orbite de e. Et comme les e_i sont des atomes, chacun des $e_i e'$ est nul ou égal à e_i.
5. Voir le fait 3.8.
6. Découle de *5* puisque $\langle 1-f, 1-f'\rangle = \langle 1-ff'\rangle$ pour des idempotents f et f'. □

Le théorème 3.3 implique que l'algèbre de Boole $\mathbb{B}(\mathbf{C})$ est finie si, et seulement si, les idempotents indécomposables forment un ensemble fini (ils sont nécessairement 2 à 2 orthogonaux) et s'ils engendrent $\mathbb{B}(\mathbf{C})$.

Commentaire. Un ensemble X est dit *borné* si l'on connaît un entier k qui majore le nombre de ses éléments. C'est-à-dire plus précisément si pour toute famille finie $(b_i)_{i\in[\![0..k]\!]}$ dans X, on a $b_i = b_j$ pour deux indices distincts. En mathématiques classiques ceci implique que l'ensemble est fini, mais du point de vue constructif bien des situations distinctes peuvent se présenter. Une situation fréquente est celle d'une algèbre de Boole C bornée et discrète pour laquelle on ne connaît pas d'atome de manière sûre. Les idéaux de type fini de C, tous principaux, s'identifient aux éléments de C, donc C s'identifie à son propre treillis de Zariski[3] $\mathsf{Zar}\, C$. Par ailleurs, en mathématiques classi-

3. Pour un anneau commutatif $\mathbf{k}$, $\mathsf{Zar}\,\mathbf{k}$ est l'ensemble des radicaux d'idéaux de type fini de $\mathbf{k}$ (section XI-4). C'est un treillis distributif. En mathématiques classiques, $\mathsf{Zar}\,\mathbf{k}$ s'identifie au treillis des ouverts quasi-compacts de l'espace spectral $\mathsf{Spec}\,\mathbf{k}$ (section XIII-1).

ques les atomes sont en bijection avec les idéaux premiers (tous maximaux) de C via $e \mapsto \langle 1-e\rangle$. Ainsi l'ensemble des atomes de C (supposé borné) s'identifie à $\mathsf{Spec}\, C$. On retrouve donc dans ce cas particulier le fait général suivant : le treillis de Zariski est la version constructive, maniable et «sans point» du spectre de Zariski, espace topologique dont les points peuvent s'avérer inaccessibles d'un point de vue constructif. Mais cette situation, bien que familière, est peut être plus troublante dans le cas d'un espace topologique discret et borné. Il s'agit typiquement d'un espace compact dont on n'a pas une bonne description via un sous-ensemble énumérable dense, donc qui n'entre pas dans le cadre des espaces métriques compacts à la Bishop (cf. [Bishop, Bishop & Bridges]). ∎

Voici un corollaire du théorème de structure galoisien 3.10 dans le contexte des algèbres prégaloisiennes.

4.7. Proposition. *Soit* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *une algèbre prégaloisienne avec* $\mathbf{k}$ *connexe. Pour un idempotent* h *de* $\mathbf{C}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. h *est un idempotent galoisien.*
2. $\mathbf{C}[1/h]$ *est un* $\mathbf{k}$*-module projectif de rang égal à* $\mathrm{St}_G(h)$.
3. $\mathbf{C}[1/h]$ *est un* $\mathbf{k}$*-module projectif de rang inférieur ou égal à* $\mathrm{St}_G(h)$.

D On utilise le théorème 3.10. D'après le point *2* de ce théorème on peut supposer qu'il existe un idempotent galoisien e tel que h soit égal à une somme $e_1 + \cdots + e_r$ d'éléments de l'orbite $G.e$. On a des isomorphismes de $\mathbf{k}$-modules $e\mathbf{C} \simeq \mathbf{C}[1/e]$ et $\mathbf{C} \simeq (e\mathbf{C})^{|G.e|}$, donc $e\mathbf{C}$ est projectif de rang constant $|\, G : G.e\,| = |\mathrm{St}_G(e)|$. On en déduit que le $\mathbf{k}$-module

$$\mathbf{C}[1/h] \simeq h\mathbf{C} = e_1\mathbf{C} \oplus \cdots \oplus e_r\mathbf{C} \simeq (e\mathbf{C})^r$$

est projectif de rang $r \times |\mathrm{St}_G(e)|$. On applique alors le point *5* du théorème 3.10 avec $f = h$.
Donc, le point *2* (resp. le point *3*) ici signifie la même chose que le point *5c* (resp. le point *5d*) dans le théorème 3.10. □

Discriminant

Rappelons que dans $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ on a $\mathrm{disc}(f) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)^2$ et $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = \mathrm{disc}(f)^{n!/2}$.
Dans le théorème suivant, on parle du $\mathbf{A}$-module des différentielles $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$. Il suffit en fait de savoir que le module des différentielles d'une algèbre de présentation finie est isomorphe au conoyau de la transposée de la matrice jacobienne du système polynomial qui définit l'algèbre. Pour plus de précisions sur ce sujet voir les théorèmes VI-6.6 et VI-6.7.

4.8. Théorème. *Soit J le jacobien du système de n équations à n inconnues définissant l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$.*

1. *a. On a $J = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i - x_j)$ dans $\mathbf{A}$.*
   b. On a $J^2 = \mathrm{disc}(f) \in \mathbf{k}$.
2. *En particulier, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est inversible (resp. régulier) dans $\mathbf{k}$.
   b. $\mathrm{disc}(f)$ est inversible (resp. régulier) dans $\mathbf{k}$.
   c. J est inversible (resp. régulier) dans $\mathbf{A}$.
   d. Les $x_i - x_j$ sont inversibles (resp. réguliers) dans $\mathbf{A}$.
   e. $x_1 - x_2$ est inversible (resp. régulier) dans $\mathbf{A}$.
   f. $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}} = 0$ (resp. $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est un $\mathbf{A}$-module « de torsion», i.e. annulé par un élément régulier).
   g. S_n est un groupe séparant pour $\mathbf{A}$ (resp. pour $\mathrm{Adu}_{\mathrm{Frac}(\mathbf{k}),f}$).
3. *Les équivalences analogues sont valables pour tout quotient de Galois de l'algèbre de décomposition universelle.*

▷ Le point *1a.* est facile par récurrence sur n, avec le signe exact si l'on considére le système qui nous a servi pour la définition de l'algèbre de décomposition universelle. Voici par exemple le calcul pour $n = 4$

$$
\begin{aligned}
J &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sum_{i\neq 1} x_i & \sum_{i\neq 2} x_i & \sum_{i\neq 3} x_i & \sum_{i\neq 4} x_i \\ \sum_{i,j\neq 1} x_ix_j & \sum_{i,j\neq 2} x_ix_j & \sum_{i,j\neq 3} x_ix_j & \sum_{i,j\neq 4} x_ix_j \\ x_2x_3x_4 & x_1x_3x_4 & x_1x_2x_4 & x_1x_2x_3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{i\neq 1} x_i & x_1 - x_2 & x_1 - x_3 & x_1 - x_4 \\ \sum_{i,j\neq 1} x_ix_j & (x_1 - x_2)\sum_{i\neq 1,2} x_i & (x_1 - x_3)\sum_{i\neq 1,3} x_i & (x_1 - x_4)\sum_{i\neq 1,4} x_i \\ x_2x_3x_4 & (x_1 - x_2)x_3x_4 & (x_1 - x_3)x_2x_4 & (x_1 - x_4)x_2x_3 \end{vmatrix} \\
&= (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_3 + x_4 & x_2 + x_4 & x_2 + x_3 \\ x_3x_4 & x_2x_4 & x_2x_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

etc...

On en déduit le point *1b*, puis l'équivalence des points *2a* à *2e*.

2f. Puisque $\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}}$ est un $\mathbf{A}$-module isomorphe au conoyau de la transposée de la matrice jacobienne, on obtient que $\mathrm{Ann}(\Omega_{\mathbf{A}/\mathbf{k}})$ et $J\mathbf{A}$ ont même nilradical (lemme IV-9.6). Enfin l'élément J est régulier (resp. inversible) si, et seulement si, l'idéal $\sqrt{J\mathbf{A}}$ contient un élément régulier (resp. contient 1).

2g. Supposons f séparable (resp. régulier), si $\sigma \in \mathrm{S}_n$ est distinct de $\mathrm{Id}_{\mathbf{A}}$, il y a un $i \in [\![1..n]\!]$ tel que $x_{\sigma i} \neq x_i$. Puisque $x_{\sigma i} - x_i$ est inversible (resp. régulier), σ est séparant (resp. séparant une fois que l'on inverse le discriminant).

Pour la réciproque, considérons par exemple la transposition σ qui échange 1 et 2. On a clairement $\langle g - \sigma(g) | g \in \mathbf{A}\rangle = \langle x_1 - x_2\rangle$. Ceci permet de conclure.
3. Clair puisque l'algèbre de décomposition universelle est toujours isomorphe à une puissance de n'importe lequel de ses quotients de Galois. □

Points fixes

Nous notons $\mathrm{di}(f) = \prod_{i<j\in[\![1..n]\!]}(x_i + x_j) \in \mathbf{k}$.
Il est clair que $\mathrm{di}(f)$ est congru modulo 2 à $\prod_{i<j\in[\![1..n]\!]}(x_i - x_j)$, ce qui donne $\langle 2, \mathrm{di}(f)^2\rangle = \langle 2, \mathrm{disc}(f)\rangle$.

4.9. Théorème. (Algèbre de décomposition universelle et points fixes)
Posons $\mathfrak{a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Ann}_{\mathbf{k}}(\langle 2, \mathrm{di}(f)\rangle)$. *Alors :*

$$\mathrm{Fix}(\mathrm{S}_n) \subseteq \mathbf{k} + \mathfrak{a}\mathbf{A}.$$

En particulier, si $\mathfrak{a} = 0$ *et a fortiori si* $\mathrm{Ann}_{\mathbf{k}}(\langle 2, \mathrm{disc}(f)\rangle) = 0$, *on obtient*

$$\mathrm{Fix}(\mathrm{S}_n) = \mathbf{k}.$$

D Il suffit de démontrer la première affirmation.
Voyons le cas où $n = 2$ avec $f(T) = T^2 - s_1T + s_2$.
Un élément $z = c + dx_1 \in \mathbf{A}$ (avec c, $d \in \mathbf{k}$) est invariant par S_2 si, et seulement si, $d(x_1 - x_2) = d(s_1 - 2x_1) = 0$, ou encore si $ds_1 = 2d = 0$, or on a $\mathrm{di}(f) = s_1$.
On procède ensuite par récurrence sur n. On reprend pour les modules de Cauchy les notations de la section III-4. Pour $n > 2$ on considère l'anneau $\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}[x_1] \simeq \mathbf{k}[X_1]/\langle f(X_1)\rangle$ et le polynôme $g_2(T) = f_2(x_1, T)$ qui est dans $\mathbf{k}_1[T]$. On identifie $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k}_1,g_2}$ avec $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ (fait III-4.3). Pour passer de l'écriture d'un élément $y \in \mathbf{A}$ sur la base $\mathcal{B}(g_2)$ ($\mathbf{A}$ vu comme $\mathbf{k}_1$-module) à son écriture sur la base $\mathcal{B}(f)$ ($\mathbf{A}$ vu comme $\mathbf{k}$-module), il suffit d'écrire chaque coordonnée, qui est un élément de $\mathbf{k}_1$, sur la $\mathbf{k}$-base $(1, x_1, \ldots, x_1^{n-1})$ de $\mathbf{k}_1$. Notons aussi que $\mathrm{di}(f) = (-1)^{n-1}g_2(-x_1)\,\mathrm{di}(g_2)$ par un calcul direct. Donc, si nous posons $\mathfrak{a}_1 = \mathrm{Ann}_{\mathbf{k}_1}(\langle 2, \mathrm{di}(g_2)\rangle)$, nous obtenons $\mathfrak{a}_1\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{a}\mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}_1 \subseteq \mathfrak{a}\mathbf{k}_1$.
Passons à la récurrence proprement dite.
Soit $y \in \mathbf{A}$ un point fixe de S_n, et regardons le comme un élément de l'algèbre de décomposition universelle $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k}_1,g_2}$. Puisque y est invariant par S_{n-1}, on a $y \in \mathbf{k}_1 + \mathfrak{a}_1\mathbf{A}$, et donc $y \equiv h(x_1) \bmod \mathfrak{a}_1\mathbf{A}$ pour un $h \in \mathbf{k}[X]$. A fortiori $y \equiv h(x_1) \bmod \mathfrak{a}\mathbf{A}$. Il reste à voir que $h(x_1) \in \mathbf{k} + \mathfrak{a}\mathbf{A}$. Puisque y est invariant par S_n, on obtient en permutant x_1 et x_2 la congruence

$$h(x_1) \equiv y \equiv h(x_2) \mod \mathfrak{a}\mathbf{A} \qquad (*)$$

Écrivons $h = \sum_{i=0}^{n-1} + c_iX^i \in \mathbf{k}[X]$. On note que $h(x_1)$ est une écriture réduite sur la base canonique $\mathcal{B}(f)$. Concernant $h(x_2)$, pour obtenir l'écriture réduite, nous devons remplacer dans le terme $c_{n-1}x_2^{n-1}$, x_2^{n-1} par son écriture sur la base canonique, qui résulte de $f_2(x_1, x_2) = 0$.

Cette réécriture fait apparaître le terme $-c_{n-1}x_1^{n-2}x_2$, et ceci implique d'après $(*)$ que $c_{n-1} \in \mathfrak{a}$. Mais alors, $h(x_2) - c_{n-1}x_2^{n-1}$ et $h(x_1) - c_{n-1}x_1^{n-1}$ sont des écritures réduites de deux éléments égaux modulo $\mathfrak{a}\mathbf{A}$. Donc, les c_i pour $i \in [\![1..n-2]\!]$ sont dans $\mathfrak{a}$, et l'on a vu que $c_{n-1} \in \mathfrak{a}$. □

Remarque. Dans le cas $n = 2$, l'étude faite ci-dessus montre que dès que $\mathfrak{a} \neq 0$, l'anneau $\mathrm{Fix}(\mathrm{S}_2) = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{a}\, x_1 = \mathbf{k} + \mathfrak{a}\mathbf{A}$ contient strictement $\mathbf{k}$.
Un calcul dans le cas $n = 3$ donne la même réciproque : si $\mathfrak{a} \neq 0$, l'anneau $\mathrm{Fix}(\mathrm{S}_3)$ contient strictement $\mathbf{k}$. On trouve en effet un élément

$$v = x_1^2x_2 + s_1x_1^2 + (s_1^2 + s_2)x_1 + s_2x_2 \neq 0$$

(une de ses coordonnées sur $\mathcal{B}(f)$ est égale à 1) tel que $\mathrm{Fix}(\mathrm{S}_3) = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{a}\, v$.
Par contre pour $n \geqslant 4$, la situation se complique. ■

On obtient comme corollaire le théorème suivant.

4.10. Théorème. *Si f est un polynôme séparable de $\mathbf{k}[T]$, l'algèbre de décomposition universelle $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$, ainsi que tout quotient de Galois, est une algèbre galoisienne.*

D D'après le théorème de structure 4.3 (point 7) il suffit de montrer que $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$ est galoisienne. Or on vient de démontrer la condition sur les points fixes, et la condition sur les automorphismes séparants a été donnée dans le théorème 4.8. □

D'après le théorème d'Artin VI-7.11, et vu le théorème précédent, nous savons que toute algèbre de décomposition universelle pour un polynôme séparable, ou tout quotient de Galois d'une telle $\mathbf{k}$-algèbre, se diagonalise elle-même. Nous examinons cette question plus en détail dans le paragraphe qui suit. Même pour ce qui concerne le résultat précis que nous venons de citer, il est intéressant de voir fonctionner la chose de façon « concrète » pour une algèbre de décomposition universelle.

Séparabilité

Lorsque le polynôme $f \in \mathbf{k}[T]$ est séparable, son algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ est strictement étale, d'après le fait III-5.11. Le théorème suivant est alors un simple rappel du théorème VI-5.8 concernant les algèbres strictement étales dans le cadre présent.

4.11. Théorème. *On suppose f séparable.*

1. *Le nilradical $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ est l'idéal engendré par $\mathrm{D}_{\mathbf{k}}(0)$. En particulier, si $\mathbf{k}$ est réduite, $\mathbf{A}$ est réduite.*
2. *Pour toute algèbre réduite $\mathbf{k} \xrightarrow{\rho} \mathbf{k}'$, l'algèbre $\rho_\star(\mathbf{A}) \simeq \mathrm{Adu}_{\mathbf{k}',\rho(f)}$ est réduite.*

Diagonalisation d'une algèbre de décomposition universelle

4.12. Théorème. (Diagonalisation d'une algèbre de décomposition universelle) *Soit $\varphi : \mathbf{k} \to \mathbf{C}$ une algèbre dans laquelle f* se factorise complètement, *c'est-à-dire $\varphi(f) = \prod_{i=1}^{n}(T - u_i)$. Supposons aussi que f est séparable sur $\mathbf{C}$, i.e. que les $u_i - u_j$ sont inversibles pour $i \neq j$.*
Notons $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \simeq \mathrm{Adu}_{\mathbf{C},\varphi(f)}$, et, pour $\sigma \in \mathrm{S}_n$, $\phi_\sigma : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ l'unique homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres qui envoie chaque $1_{\mathbf{C}} \otimes x_i$ sur $u_{\sigma i}$.
Soit $\Phi : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \to \mathbf{C}^{n!}$ le $\mathbf{C}$-homomorphisme défini par $y \mapsto \big(\phi_\sigma(y)\big)_{\sigma \in \mathrm{S}_n}$.

1. *Φ est un isomorphisme : $\mathbf{C}$ diagonalise $\mathbf{A}$.*
2. *Plus précisément, dans $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$, notons x_i à la place de $1_{\mathbf{C}} \otimes x_i$, u_i à la place de $u_i \otimes 1_{\mathbf{A}}$ (conformément à la structure de $\mathbf{C}$-algèbre de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$) et posons $g_\sigma = \prod_{j \neq \sigma i}(x_i - u_j)$. Alors,*
$$\phi_\sigma(g_\sigma) = \pm\varphi\big(\operatorname{disc}(f)\big) = \pm \operatorname{disc}\big(\varphi(f)\big),$$
et $\phi_\sigma(g_\tau) = 0$ pour $\tau \neq \sigma$, de sorte que si l'on pose $e_\sigma = g_\sigma/\phi_\sigma(g_\sigma)$, les e_σ forment le système fondamental d'idempotents orthogonaux correspondant à l'isomorphisme Φ.
3. *En outre, $x_i e_\sigma = u_{\sigma i} e_\sigma$, de sorte que la base (e_σ) du $\mathbf{C}$-module $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ est une base diagonale commune pour les multiplications par les x_i.*

En particulier, lorsque f est séparable, l'algèbre enveloppante
$$\mathbf{A}^{\mathrm{e}}_{\mathbf{k}} = \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \simeq \mathrm{Adu}_{\mathbf{A},f}$$
est isomorphe canoniquement à $\mathbf{A}^{n!}$: $\mathbf{A}$ se diagonalise elle-même.

NB : on prendra garde cependant à noter $\mathrm{Adu}_{\mathbf{A},f} = \mathbf{A}[u_1, \ldots, u_n]$ puisque les x_i sont déjà pris comme éléments de $\mathbf{A}$.

▷ *1.* Les deux algèbres sont en tant que $\mathbf{C}$-modules isomorphes à $\mathbf{C}^{n!}$ et Φ est une application $\mathbf{C}$-linéaire dont il suffit de démontrer la surjectivité. La surjectivité résulte par le théorème chinois de ce que les $\operatorname{Ker}\phi_\sigma$ sont deux à deux comaximaux : $\operatorname{Ker}\phi_\sigma$ contient $x_i - u_{\sigma i}$, $\operatorname{Ker}\phi_\tau$ contient $x_i - u_{\tau i}$, donc $\operatorname{Ker}\phi_\sigma + \operatorname{Ker}\phi_\tau$ contient les $u_{\sigma i} - u_{\tau i}$, et il y a au moins un indice i pour lequel $\sigma i \neq \tau i$, ce qui donne $u_{\sigma i} - u_{\tau i}$ inversible.
2. Le système fondamental d'idempotents orthogonaux correspondant à l'isomorphisme Φ est l'unique solution du système linéaire $\phi_\sigma(e_\tau) = \delta_{\sigma,\tau}$ (où δ est le symbole de Kronecker).
Or les égalités $\phi_\sigma(g_\sigma) = \pm\varphi\big(\operatorname{disc}(f)\big)$ et $\phi_\sigma(g_\tau) = 0$ sont faciles.
3. Fixons i. L'égalité $x_i g_\sigma = u_{\sigma i} g_\sigma$ résulte de ce que dans g_σ il y a déjà le produit des $x_i - u_j$ pour $j \neq \sigma i$, donc $(x_i - u_{\sigma i})g_\sigma$ est multiple de $\varphi(f)(x_i)$, qui est nul. □

Remarque. En fait, de manière générale, Φ est une application linéaire dont on peut calculer le déterminant par rapport aux bases naturelles : le carré de ce déterminant est une puissance de $\varphi\big(\operatorname{disc}(f)\big)$ et l'on trouve ainsi que Φ est un isomorphisme si, et seulement si, $\varphi\big(\operatorname{disc}(f)\big)$ est inversible dans $\mathbf{C}$. Pour ceci, et pour une «réciproque complète», voir l'exercice 6. ■

Le théorème précédent implique le résultat suivant : si $\mathbf{A}$ est une algèbre de décomposition universelle pour un polynôme séparable toute $\mathbf{A}$-algèbre diagonalise $\mathbf{A}$. Nous en donnons maintenant une généralisation pour un quotient de Galois de $\mathbf{A}$.

4.13. Théorème. (Diagonalisation d'un quotient de Galois d'une algèbre de décomposition universelle) *Soient e un idempotent galoisien de $\mathbf{A}$,*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle = \mathbf{k}[y_1,\dots,y_n] \;\; \textit{et} \;\; G = \mathrm{St}_{\mathrm{S}_n}(e),$$

(on a noté $y_i = \pi(x_i)$ la classe de x_i dans $\mathbf{B}$). Soit $\phi : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ un homomorphisme d'anneaux. On note $u_i = \phi(y_i)$. On considère la $\mathbf{C}$-algèbre

$$\phi_\star(\mathbf{B}) \simeq \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \simeq \mathrm{Adu}_{\mathbf{C},f}/\langle 1-\phi(e)\rangle$$

obtenue à partir de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{B}$ par extension des scalaires. Pour $\sigma \in G$ notons $\phi_\sigma : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ l'unique homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres qui envoie chaque $1_{\mathbf{C}} \otimes y_i$ sur $u_{\sigma i}$. Soit $\Phi : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B} \to \mathbf{C}^{|G|}$ l'homomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres défini par $z \mapsto \big(\phi_\sigma(z)\big)_{\sigma\in G}$.

1. *Si $\phi\big(\mathrm{disc}(f)\big) \in \mathbf{C}^\times$, Φ est un isomorphisme, donc $\mathbf{C}$ diagonalise $\mathbf{B}$.*
2. *En particulier, si f est séparable, $\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ est isomorphe canoniquement à $\mathbf{B}^{|G|}$, i.e. $\mathbf{B}$ se diagonalise elle-même.*

▷ Les deux $\mathbf{C}$-algèbres sont des $\mathbf{C}$-modules projectifs de rang constant $|G|$ et Φ est une application $\mathbf{C}$-linéaire dont il suffit de démontrer la surjectivité. Dans $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{B}$ nous notons y_i à la place de $1_{\mathbf{C}} \otimes y_i$ et u_i à la place de $u_i \otimes 1_{\mathbf{B}}$. La surjectivité résulte par le théorème chinois de ce que les $\mathrm{Ker}\,\phi_\sigma$ sont deux à deux comaximaux : $\mathrm{Ker}\,\phi_\sigma$ contient $y_i - u_{\sigma i}$, $\mathrm{Ker}\,\phi_\tau$ contient $y_i - u_{\tau i}$, donc $\mathrm{Ker}\,\phi_\sigma + \mathrm{Ker}\,\phi_\tau$ contient les $u_{\sigma i} - u_{\tau i}$. Or il y a au moins un indice i pour lequel $\sigma i \neq \tau i$ et $u_{\sigma i} - u_{\tau i}$ est inversible parce que $\phi\big(\mathrm{disc}(f)\big)$ est le produit des $(u_j - u_k)^2$ pour $1 \leqslant j < k \leqslant n$. □

Structure triangulaire des idéaux galoisiens

Nous démontrons dans ce paragraphe le théorème 4.15 qui implique que la structure de l'idéal $\mathcal{J}(f)$, qui est une structure « triangulaire » (au sens de Lazard) lorsque l'on considère les modules de Cauchy comme générateurs, reste une structure triangulaire pour tous les idéaux galoisiens de l'algèbre de décomposition universelle dans le cas d'un polynôme séparable sur un corps discret.

4.14. Lemme. *Soit $\mathbf{k}'$ une $\mathbf{k}$-algèbre qui est un module projectif de type fini de rang constant m, $x \in \mathbf{k}'$ et $r(T) \in \mathbf{k}[T]$ le polynôme caractéristique de x sur $\mathbf{k}$. Si $\mathrm{disc}(r) \in \mathbf{k}^\times$, alors $\mathbf{k}' = \mathbf{k}[x]$ et $(1, x, \dots, x^{m-1})$ est une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{k}'$.*

▷ Le cas où $\mathbf{k}'$ est libre de rang m a été prouvé en III-5.10. Dans le cas général, on considère un système d'éléments comaximaux de $\mathbf{k}$ tel que chaque localisation fasse de $\mathbf{k}'$ un $\mathbf{k}$-module libre de rang m. □

4.15. Théorème. *Soit* $(\mathbf{k}, \mathbf{C}, G)$ *une algèbre galoisienne avec :*
— $\mathbf{C} = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] \simeq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/\mathfrak{a}$,
— G *opère sur* $\{x_1, \dots, x_n\}$ *et*
— *les* $x_i - x_j$ *sont inversibles pour* $i \neq j$.
Un exemple typique de cette situation : $\mathbf{C}$ *est un quotient de Galois de l'algèbre de décomposition universelle d'un polynôme séparable.*
On pose
$G_i = \{\, \sigma \in G \mid \sigma(x_k) = x_k,\ k \in [\![1..i]\!] \,\}$ *pour* $i \in [\![0..n]\!]$ *(donc* $G_0 = G$*),*
$r_i(T) = \prod_{\sigma \in G_{i-1}/G_i} \big(T - \sigma(x_i)\big)$ *pour* $i \in [\![1..n]\!]$,
où G_{i-1}/G_i *désigne un système de représentants des classes à gauche. On note* $d_i = |\, G_{i-1} : G_i \,|$.
On a alors les résultats suivants.

1. $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_i] = \mathrm{Fix}(G_i)$ *et* $G_i = \mathrm{Stp}(\mathbf{k}[x_1, \dots, x_i])$.
2. *Le polynôme* $r_i(T)$ *est unitaire à coefficients dans* $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_{i-1}]$, *de degré* d_i. *On note* $R_i(X_1, \dots, X_i) \in \mathbf{k}[X_1, \dots, X_i]$ *un polynôme unitaire en* X_i *de degré* d_i *tel que* $R_i(x_1, \dots, x_{i-1}, X_i) = r_i(X_i)$.
3. $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{a} \cap \mathbf{k}[X_1, \dots, X_i]$ *est engendré par* $R_1(X_1)$, …, $R_i(X_1, \dots, X_i)$.

En conséquence chaque algèbre $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_i]$ *est à la fois un* $\mathbf{k}[x_1, \dots, x_{i-1}]$*-module libre de rang* d_i *et un* $\mathbf{k}$*-module libre de rang* $|\, G : G_i \,|$, *et chacun des idéaux* $\mathfrak{a}_i$ *est un idéal triangulaire (au sens de Lazard) de* $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_i]$.

▷ Le groupe G_1 est un groupe séparant d'automorphismes de l'anneau $\mathbf{C}$. On note $\mathbf{k}_1 = \mathbf{C}^{G_1}$. On sait que $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{k}_1$-module projectif de rang constant $|G_1|$ et que $\mathbf{k}[x_1] \subseteq \mathbf{k}_1$. En outre, $\mathbf{k}_1$ est facteur direct dans $\mathbf{C}$, donc est un $\mathbf{k}$-module projectif de rang constant $d_1 = \deg_T(r_1)$.
L'idéal $\mathfrak{a}_1$ est formé par tous les $R \in \mathbf{k}[X_1]$ tels que $R(x_1) = 0$.
Donc, $R\big(\sigma(x_1)\big) = 0$ pour tout $\sigma \in G/G_1$, autrement dit R est multiple de chaque $T - \sigma(x_1)$. Et puisque les $x_i - x_j$ sont inversibles, R est multiple de r_1. Ainsi $\mathfrak{a}_1 = \langle r_1(X_1) \rangle$ et $\mathbf{k}[x_1] \simeq \mathbf{k}[X_1]/\langle r_1(X_1) \rangle$.
La proposition VI-7.17 donne l'égalité
$$\mathrm{C}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(x_1)(T) = \textstyle\prod_{\sigma \in G/G_1} \big(T - \sigma(x_1)\big) = r_1(T).$$
Ceci implique que le polynôme caractéristique $\mathrm{C}_{\mathbf{k}_1/\mathbf{k}}(x_1)(T)$ est séparable, et le lemme 4.14 dit que $(1, x_1, \dots, x_1^{d_1-1})$ est une base de $\mathbf{k}_1$.
Ainsi $\mathbf{k}[x_1] = \mathbf{k}_1 = \mathrm{Fix}(G_1)$ et $(\mathbf{k}[x_1], \mathbf{C}, G_1)$ est une algèbre galoisienne.
Alors, $\mathbf{C} = \mathbf{k}_1[x_2, \dots, x_n]$ avec G_1 qui opère sur $\{x_2, \dots, x_n\}$ et les $x_i - x_j$ inversibles. Tout le raisonnement précédent fonctionne à l'identique en remplaçant $\mathbf{k}$ par $\mathbf{k}_1$, G par G_1, x_1 par x_2 et G_1 par G_2. On termine donc par récurrence. □

5. Corps de racines d'un polynôme sur un corps discret

Nous donnons dans cette section une approche constructive et dynamique du corps de racines d'un polynôme unitaire sur un corps discret, en l'absence d'algorithme de factorisation des polynômes.

Dans la section 5, $\mathbf{K}$ est un corps discret non trivial,
f est un polynôme unitaire de degré n et
$\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f} = \mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]/\mathcal{J}(f) = \mathbf{K}[x_1,\dots,x_n]$.

Les quotients de l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$ sont des $\mathbf{K}$-algèbres finies, donc ce sont des anneaux zéro-dimensionnels.

Quotients de Galois «réduits» de l'algèbre de décomposition universelle

Nous avons mis des guillemets à «réduits» parce que, a priori, on ne parle pas d'un quotient de Galois *qui est* réduit, mais d'un quotient de Galois *que l'on* réduit (en tuant les nilpotents).
Vu le fait III-5.11 si le polynôme f est séparable l'algèbre de décomposition universelle est étale, donc réduite, et tout idéal engendré par un idempotent est égal à son nilradical (puisque l'anneau quotient est réduit). On peut alors remplacer dans les énoncés qui suivent chaque idéal $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e) = \sqrt{\langle 1-e\rangle}$ par l'idéal $\langle 1-e\rangle$.

Dans le lemme qui suit on sait par hypothèse que $\mathbf{B}$ est strictement finie sur $\mathbf{K}$, mais on ne connaît pas nécessairement une base de $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ comme $\mathbf{K}$-espace vectoriel. Le but est alors de donner une description «assez satisfaisante» de $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ comme quotient de l'algèbre de décomposition universelle.

5.1. Lemme. *Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{K}$-algèbre strictement finie. On suppose que f se décompose totalement dans $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ et que $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ est engendrée par les zéros correspondants de f. Alors, il existe un idempotent e de $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ tel que $\mathbf{B}_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e)$.*

▷ Soient y_1, …, $y_n \in \mathbf{B}$ tels que $f(T) = \prod_i (T - \overline{y_i})$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$. Il existe un unique homomorphisme $\lambda : \mathbf{K}[X_1,\dots,X_n] \to \mathbf{B}$ qui envoie les X_i sur les y_i. Notons $\mathfrak{b}$ l'idéal (de type fini) de $\mathbf{B}$ engendré par $\lambda\big(\mathcal{J}(f)\big)$. On a alors $\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(0)$, et $\mathbf{B}' := \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre strictement finie vérifiant $\mathbf{B}_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{B}'_{\mathrm{red}}$. On obtient ainsi un diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{K}[\underline{X}] & \twoheadrightarrow & \mathbf{A} & & \\
\lambda\downarrow & & \downarrow\varphi & \searrow^{\psi} & \\
\mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{B}' & \longrightarrow & \mathbf{B}'_{\mathrm{red}} = \mathbf{B}_{\mathrm{red}}
\end{array}$$

dans lequel φ est l'unique homomorphisme qui envoie x_i sur la classe de y_i. Puisque $\mathbf{B}'$ est strictement finie, $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal de type fini de $\mathbf{A}$, et il existe $d \geqslant 0$ tel que $(\operatorname{Ker}\varphi)^d = (\operatorname{Ker}\varphi)^{d+1}$ donc $(\operatorname{Ker}\varphi)^d$ est engendré par un idempotent $1-e$. Et l'on peut conclure car d'une part, ψ est surjectif, et d'autre part, $\operatorname{Ker}\psi = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\operatorname{Ker}\varphi) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big((\operatorname{Ker}\varphi)^d\big) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e)$. □

Remarque. Notez que ψ est surjectif, mais a priori $\operatorname{Ker}\psi$ n'est pas un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. Symétriquement, a priori φ n'est pas surjectif, mais $\operatorname{Ker}\varphi$ est un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. ∎

En mathématiques classiques un corps de racines (définition III-6.6) pour un polynôme unitaire f sur un corps discret $\mathbf{K}$ est obtenu comme quotient de l'algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$ par un idéal maximal. Un tel idéal existe : prendre un idéal strict qui soit un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension maximale, d'après le principe du tiers exclu.
En mathématiques constructives on obtient le théorème plus précis qui suit.

5.2. Théorème.

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *Il existe dans* $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ *un idempotent indécomposable* e.
   b. *Il existe une extension* $\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{K}$ *qui est un corps de racines de* f *et qui s'écrit* $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ *où* $\mathbf{B}$ *est une* $\mathbf{K}$*-algèbre strictement finie.*
   c. *L'algèbre de Boole* $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ *est finie.*
2. *Dans ce cas tout corps de racines de* f *est isomorphe à* $\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e)$, *et il est discret.*

𝔇 L'équivalence de *1a* et *1c* vaut dans le cadre général des algèbres de Boole (théorème 3.10). Il est clair que *1a* implique *1b* Inversement si l'on a un corps de racines $\mathbf{L} = \mathbf{B}/\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(0)$, où $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre strictement finie, le lemme 5.1 fournit un idempotent e, et celui-ci est indécomposable parce que $\mathbf{L}$ est connexe.
Voyons le point *2*. Soit $\mathbf{M}$ un corps de racines pour f. Écrivons

$$f(T) = \textstyle\prod_{i=1}^{n}(T-\xi_i) \text{ dans } \mathbf{M}.$$

Par la propriété universelle de $\mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$, il existe un unique homomorphisme de $\mathbf{K}$-algèbres $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{M}$ tel que $\varphi(x_i) = \xi_i$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. Soit $(e_\ell)_{\ell=1,\dots,k}$ l'orbite de e. C'est un système fondamental d'idempotents orthogonaux, donc $\big(\varphi(e_\ell)\big)_{\ell=1,\dots,k}$ également, et, puisque $\mathbf{M}$ est un corps discret, cela implique qu'il y a un j pour lequel $\varphi(e_\ell) = \delta_{j,\ell}$ (symbole de Kronecker).
Alors, $\langle 1-e_j\rangle \subseteq \operatorname{Ker}\varphi$, donc $\mathbf{M}$ est un quotient de $\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e_j)$, qui est un corps discret. Comme $\mathbf{M}$ est non trivial, cela implique $\mathbf{M} \simeq \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e_j)$.
Enfin les $\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e_\ell)$ sont deux à deux isomorphes. □

Commentaire. Dans [MRR], il est montré que tout corps discret énumérable possède une clôture algébrique. Cependant, un corps de racines pour f, qui

existe donc, ne possède pas nécessairement une base finie comme **K**-espace vectoriel, au sens des mathématiques constructives. Et l'on ne connaît pas de théorème d'unicité constructif pour un tel corps de racines. On peut décrire comme suit une procédure analogue à celle de [MRR] pour obtenir un corps de racines pour f. Tout d'abord on construit une énumération $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}$ de l'algèbre de décomposition universelle. Ensuite on construit une suite d'idéaux de type fini $(\mathfrak{a}_m)$ de **A** en posant $\mathfrak{a}_0 = 0$, et $\mathfrak{a}_{m+1} = \mathfrak{a}_m + \langle z_m\rangle$ si $\mathfrak{a}_m + \langle z_m\rangle \neq \langle 1\rangle$, et $\mathfrak{a}_{m+1} = \mathfrak{a}_m$ sinon (le test fonctionne car on peut calculer une base du **K**-espace vectoriel $\mathfrak{a}_m + \langle z_m\rangle$). Alors, l'idéal $\bigcup_m \mathfrak{a}_m$ est un idéal maximal de **A**, et le quotient est un corps de racines, qui est discret. Notre point de vue est légèrement différent. Nous ne partons pas a priori d'un corps énumérable, et même dans le cas d'un corps énumérable, nous ne privilégions pas une énumération par rapport à une autre. Nous nous contentons plutôt de répondre aux questions concernant le corps de racines au fur et à mesure qu'elles se posent, comme on va le voir dans le théorème qui suit. ∎

Le théorème suivant explique comment contourner la difficulté que pose la non existence du corps de racines en mathématiques constructives. Le corps de racines de f est remplacé par une «approximation» donnée sous forme d'un quotient réduit $(\mathbf{A}/\langle 1-e\rangle)_{\rm red}$ de l'algèbre de décomposition universelle, avec e un idempotent galoisien.
On s'appuie sur le fait suivant qui est déjà établi dans le cadre général des anneaux zéro-dimensionnels (lemme IV-8.2). Nous en rappelons une preuve directe.
Pour tout $y \in \mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$, il existe un idempotent $e_y \in \mathbf{K}[y] \subseteq \mathbf{A}$ tel que y est inversible modulo $1-e_y$ et nilpotent modulo e_y.

▷ Soit $P(T)$ le polynôme minimal de y. Il existe un élément inversible v de **K** tel que $vP(T) = T^k\big(1-TR(T)\big)$ avec $k \geqslant 0$. L'idempotent e_y est $\big(yR(y)\big)^k$.□

5.3. Théorème. (Gestion dynamique d'un corps de racines)
*Soit $(z_i)_{i\in I}$ une famille finie d'éléments de $\mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f} = \mathbf{A}$. Il existe un idempotent galoisien e de **A** tel qu'en posant $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ chaque $\pi(z_i)$ est nul ou inversible dans l'algèbre quotient $\mathbf{B}_{\rm red}$ (ici, $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}_{\rm red}$ est la projection canonique).*

▷ Pour chaque $i \in I$ il y a un idempotent $g_i \in \mathbf{A}$ tel que z_i est inversible modulo $1-g_i$ et nilpotent modulo g_i. Appliqué à la famille des g_i le théorème 3.10 donne un idempotent galoisien e, tel que pour chaque i, $1-e$ divise g_i ou $1-g_i$. Donc, dans l'algèbre quotient $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ chaque $\pi(z_i)$ est nilpotent ou inversible. □

Remarques. 1) La lectrice peut s'inquiéter du fait que l'on ne dispose pas a priori d'un système générateur fini de l'idéal $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e)$. En conséquence l'algèbre finie $\mathbf{B}_{\rm red}$ n'est pas nécessairement un **K**-espace vectoriel de dimension

finie au sens constructif. En fait les nilpotents peuvent être gérés eux aussi de façon dynamique. On a dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ un test de nilpotence et si un élément x nilpotent est mis en évidence, on peut quotienter $\mathbf{B}$ par l'idéal $\mathfrak{a}$ engendré par l'orbite de x sous l'action de $G = \mathrm{St}_{\mathrm{S}_n}(e)$. Alors, $\mathbf{B}/\mathfrak{a}$ est de dimension finie et G opère sur $\mathbf{B}/\mathfrak{a}$.
2) Dans le théorème 5.3 on peut avoir intérêt à saturer la famille $(z_i)_{i\in I}$ par l'action de S_n de façon à rendre manifestes dans $\mathbf{B}$ tous les «cas de figure» possibles. ∎

Unicité du corps de racines

Le théorème d'unicité du corps de racines admet une version constructive «opératoire» (qui fonctionne à tout coup, même si l'on ne dispose pas d'un idempotent indécomposable dans l'algèbre de décomposition universelle) sous la forme suivante.

5.4. Théorème. (Unicité du corps de racines, version dynamique)
Soient deux $\mathbf{K}$*-algèbres strictement finies* $\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2$ *non nulles pour lesquelles le polynôme* f *se décompose en produit de facteurs linéaires dans* $(\mathbf{B}_1)_{\mathrm{red}}$ *et* $(\mathbf{B}_2)_{\mathrm{red}}$. *On suppose en outre que* $(\mathbf{B}_i)_{\mathrm{red}}$ *est engendrée par les zéros correspondants de* f. *Alors, il existe un idempotent galoisien* e *de* $\mathbf{A}$ *tel que, avec l'algèbre* $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$, *on a deux entiers* r_i *tels que* $(\mathbf{B}_i)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{B}_{\mathrm{red}}^{r_i}$.

▷ Le lemme 5.1 donne des idempotents e_1, $e_2 \in \mathbf{A}$ tels que

$$(\mathbf{B}_i)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e_i) \quad (i = 1, 2)$$

Le théorème 3.10 point *2* donne un idempotent galoisien e et r_1, $r_2 \in \mathbb{N}$ tels que $\mathbf{A}/\langle 1-e_i\rangle \simeq \mathbf{B}^{r_i}$. Donc $(\mathbf{B}_i)_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{B}_{\mathrm{red}}^{r_i}$. □

6. Théorie de Galois d'un polynôme séparable sur un corps discret

Dans la section 6, $\mathbf{K}$ est un corps discret non trivial,
f est un polynôme séparable unitaire de degré n et $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$.
Nous soulignons le fait que f *n'est pas supposé irréductible.*

Rappelons que pour un corps séparablement factoriel, tout polynôme séparable possède un corps de racines (corollaire VI-1.13), unique à automorphisme près (théorème III-6.7). Nous sommes intéressés maintenant par le cas où le corps *n'est pas* séparablement factoriel (ou même par le cas où la factorisation des polynômes séparables est trop coûteuse).
Nous donnons ici comme promis la version constructive et dynamique de la théorie de Galois d'un polynôme séparable sur un corps discret.

Existence et unicité du corps de racines, statique, dynamique

Le fait III-5.11 (ou le corollaire VI-1.8) nous assure que $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{K}$-algèbre étale. Il en va de même pour ses quotients de Galois. Le théorème 5.2 se relit comme suit.

Théorème 5.2 bis (Polynôme séparable : quand un corps de racines existe et est une extension strictement finie)

1. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *Il existe dans* $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ *un idempotent indécomposable* e.
   b. *Il existe une extension strictement finie* $\mathbf{L}$ *de* $\mathbf{K}$ *qui est un corps de racines de* f.
   c. *L'algèbre de Boole* $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ *est finie.*
2. *Dans ce cas tout corps de racines de* f *est une extension galoisienne de* $\mathbf{K}$, *isomorphe à* $\mathbf{A}[1/e]$.

Le point *2* résulte aussi du fait que si un corps de racines existe et est strictement fini sur $\mathbf{K}$, deux corps de racines sont isomorphes (théorème III-6.7). Le théorème d'unicité 5.4 se relit comme suit.

Théorème 5.4 bis (Unicité du corps de racines d'un polynôme séparable, version dynamique) *Étant données deux* $\mathbf{K}$*-algèbres strictement finies* $\mathbf{B}_1$ *et* $\mathbf{B}_2$ *non nulles dans lesquelles* f *se décompose en produit de facteurs linéaires et qui sont engendrées par les zéros correspondants de* f, *il existe un quotient de Galois* $\mathbf{B} = \mathbf{A}[1/e]$ *de l'algèbre de décomposition universelle et deux entiers* r_i *tels que* $\mathbf{B}_1 \simeq \mathbf{B}^{r_1}$ *et* $\mathbf{B}_2 \simeq \mathbf{B}^{r_2}$.

Structure des quotients de Galois de l'algèbre de décomposition universelle

Pour la suite de la section 6 nous fixons les notations suivantes.

6.1. Notations. *(Contexte d'un quotient de Galois)*
Soit e un idempotent galoisien de $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$, $\mathfrak{b} = \langle 1-e\rangle_{\mathbf{A}}$. On note

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathfrak{b} = \mathbf{A}[1/e],\ \pi = \pi_{\mathbf{A},\mathfrak{b}} : \mathbf{A} \to \mathbf{B},\ \text{ et }\ G = \mathrm{St}_{\mathrm{S}_n}(e).$$

On note $(e_1, \ldots, e_m)$ l'orbite de e sous S_n. Chaque $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{A}[1/e_i]$ est isomorphe à $\mathbf{B}$. Le groupe G opère sur $\mathbf{B}$.

Notons que pour $y \in \mathbf{B}$, le polynôme $\mathrm{Min}_y(T)$ est séparable (parce que $\mathbf{B}$ est étale sur $\mathbf{K}$). En outre y est inversible si, et seulement si, $\mathrm{Min}_y(0) \neq 0$. Notons aussi qu'un idéal de type fini de $\mathbf{B}$ (différent de $\langle 1\rangle$) est un idéal galoisien si, et seulement si, son orbite sous G est formée d'idéaux deux à deux comaximaux (tout idéal de type fini est engendré par un idempotent, et fait 4.6).
Le théorème de structure 4.3 se décline comme suit, compte tenu des théorèmes 5.3 et 4.10.

6.2. Théorème. (Théorème de structure galoisien, 3) *Dans le contexte 6.1 on obtient les résultats suivants.*

1. $(\mathbf{K}, \mathbf{B}, G)$ *est un quotient de Galois de* $(\mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathrm{S}_n)$.
   En particulier, $\mathbf{B}$ *est un* $\mathbf{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* $|G|$ *et pour tout* $y \in \mathbf{B}$, $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(y)(T) = \mathrm{C}_G(y)(T)$. *En outre,* $\mathrm{Fix}(G) = \mathbf{K}$.
2. *On a un isomorphisme de* $\mathbf{K}$*-algèbres* $\mathbf{A} \simeq \mathbf{B}^m$.
3. *Si* $\mathbf{B}$ *est connexe, c'est un corps de racines pour* f *et une extension galoisienne de* $\mathbf{K}$ *avec* G *comme groupe de Galois.*
4. *Soit* (y_i) *une famille finie d'éléments de* $\mathbf{B}$. *Il existe un idempotent galoisien* $e_{\mathbf{B}}$ *de* $(\mathbf{K}, \mathbf{B}, G)$, *tel que dans* $\mathbf{B}[1/e_{\mathbf{B}}]$, *chacun des* y_i *est nul ou inversible.*
5. *La restriction* $\pi : e\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est un isomorphisme* $\mathbf{K}$*-linéaire et établit une correspondance biunivoque entre les idempotents galoisiens de* $(\mathbf{K}, \mathbf{A}, \mathrm{S}_n)$ *contenus dans* $e\mathbf{A}$ *et ceux de* $(\mathbf{K}, \mathbf{B}, G)$. *Les stabilisateurs et quotients résiduels sont préservés ; c'est-à-dire que si* $e_{\mathbf{A}} \in e\mathbf{A}$ *et* $e_{\mathbf{B}} \in \mathbf{B}$ *sont deux idempotents galoisiens qui se correspondent, alors* $\mathrm{St}_{\mathrm{S}_n}(e_{\mathbf{A}}) = \mathrm{St}_G(e_{\mathbf{B}})$ *et* $\mathbf{A}[1/e_{\mathbf{A}}] \simeq \mathbf{B}[1/e_{\mathbf{B}}]$.

NB : dans la suite on donne les énoncés uniquement pour la situation relative, la situation absolue est en effet le cas particulier où $e = 1$.

6.3. Lemme. (Résolvante et polynôme minimal) *Contexte 6.1,* $y \in \mathbf{B}$.

1. $\mathrm{Rv}_{G,y}(T)$ *est à coefficients dans* $\mathbf{K}$.
2. Min_y *divise* $\mathrm{Rv}_{G,y}$ *qui divise une puissance de* Min_y.
3. $\mathrm{C}_{\mathbf{B}/\mathbf{K}}(y)(T) = \mathrm{C}_G(y)(T) = \mathrm{Rv}_{G,y}(T)^{|\mathrm{St}_G(y)|}$.

▷ *1.* Conséquence du point *1* dans le théorème de structure.
2. On en déduit que Min_y divise $\mathrm{Rv}_{G,y}$, car $\mathrm{Rv}_{G,y}(y) = 0$. Et comme chaque y_i annule Min_y, le produit des $T - y_i$ divise une puissance de Min_y.
3. La deuxième égalité est évidente, et la première est dans le point *1* du théorème de structure. □

Où se passent les calculs

Rappelons que f est un polynôme unitaire séparable de $\mathbf{K}[T]$ avec $\mathbf{K}$ un corps discret non trivial.

On note $\mathbf{Z}_0$ le sous-anneau de $\mathbf{K}$ engendré par les coefficients de f et par $1/\mathrm{disc}(f)$. On note $\mathbf{Z}$ la clôture intégrale de $\mathbf{Z}_0$ dans $\mathbf{K}$.

Nous mettons ici en évidence que « tous les calculs se passent, et tous les résultats s'écrivent, dans l'anneau $\mathbf{Z}$ », comme cela résulte des théo-

rèmes VI-5.12 et 4.15 [4].
Ces théorèmes nous donnent dans le cadre présent les points *1*, *2* et *4* du théorème qui suit. Quant au point *3*, c'est une conséquence immédiate du point *2*.

6.4. Théorème. (Le sous-anneau $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{K}$ est bien suffisant)

1. *Soit* $\mathbf{Z}_1$ *un anneau intermédiaire entre* $\mathbf{Z}$ *et* $\mathbf{K}$ *(par exemple* $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}$*). Alors, les algèbres de décomposition universelle*
$$\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z}_0,f} \subseteq \mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f} \subseteq \mathrm{Adu}_{\mathbf{Z}_1,f} \subseteq \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$$
sont des algèbres galoisiennes (relativement à leurs anneaux de base, et avec le groupe S_n*).*
2. *Tout idempotent de* $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ *est dans* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f}$ *: ses coordonnées sur la base* $\mathcal{B}(f)$ *sont dans* $\mathbf{Z}$*.*
3. *Les* théories de Galois de f *sur* $\mathbf{Z}$*, sur* $\mathbf{Z}_1$*, sur* $\mathrm{Frac}(\mathbf{Z})$ *et sur* $\mathbf{K}$ *sont* identiques*, au sens suivant.*
   a. *Tout quotient de Galois de* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z}_1,f}$ *est obtenu par extension des scalaires à* $\mathbf{Z}_1$ *à partir d'un quotient de Galois de* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f}$*.*
   b. *Tout quotient de Galois de* $\mathrm{Adu}_{\mathrm{Frac}(\mathbf{Z}),f}$ *est obtenu par extension des scalaires à* $\mathrm{Frac}(\mathbf{Z})$ *à partir d'un quotient de Galois de* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f}$*. Cette extension des scalaires revient d'ailleurs à passer à l'anneau total des fractions du quotient de Galois.*
   c. *Tout quotient de Galois de* $\mathrm{Adu}_{\mathbf{K},f}$ *est obtenu par extension des scalaires à* $\mathbf{K}$ *à partir d'un quotient de Galois de* $\mathrm{Adu}_{\mathrm{Frac}(\mathbf{Z}),f}$*.*
4. *Soit* e *un idempotent galoisien de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{Z}_1$ *le sous-anneau de* $\mathbf{Z}$ *engendré par* $\mathbf{Z}_0$ *et les coordonnées de* e *sur* $\mathcal{B}(f)$*. Alors, la structure triangulaire de l'idéal de* $\mathbf{Z}_1[X_1, \ldots, X_n]$ *engendré par* $1 - e$ *et les modules de Cauchy est explicitée au moyen de polynômes à coefficients dans* $\mathbf{Z}_1$*.*
   Pour celles qui connaissent les bases de Gröbner : la base de Gröbner (pour un ordre monomial lexicographique) de l'idéal qui définit l'approximation correspondante du corps de racines de f *est formée de polynômes unitaires à coefficients dans* $\mathbf{Z}_1$*.*

---

4. Il s'ensuit que si $\mathbf{K}$ est un corps général (voir section IX-1), les questions de calculabilité se discutent en fait entièrement dans $\mathrm{Frac}(\mathbf{Z}) = \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}_0) \otimes_{\mathbf{Z}_0} \mathbf{Z} = (\mathbf{Z}_0^\star)^{-1}\mathbf{Z}$. Et $\mathrm{Frac}(\mathbf{Z})$ est discret si $\mathbf{Z}_0$ est lui-même un anneau discret. Comme $\mathbf{Z}_0$ est un anneau de type fini, il est certainement, en mathématiques classiques, un anneau effectif (on dit encore calculable) avec test d'égalité explicite, au sens de la théorie de la récursivité via les machines de Turing.
Mais ce dernier résultat n'est pas une approche vraiment satisfaisante de la réalité du calcul. Il s'apparente en effet aux résultats de mathématiques classiques du style « tout nombre réel récursif admet un développement en fraction continue récursif ». Théorème manifestement faux d'un point de vue pratique, puisque pour le mettre en œuvre, il faut d'abord savoir si le nombre est rationnel ou pas.

Notez les simplifications dans les cas particuliers suivants. Si $\mathbf{K} = \mathbb{Q}$ et $f \in \mathbb{Z}[T]$ unitaire, alors $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 = \mathbb{Z}[1/\mathrm{disc}(f)]$. De même, pour q puissance d'un premier et $\mathbf{K}$ le corps des fractions rationnelles $\mathbf{K} = \mathbb{F}_q(u)$ on a, si $f \in \mathbb{F}_q[u][T]$ est unitaire, $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 = \mathbb{F}_q[u][1/\mathrm{disc}(f)]$.

Remarques. 1) L'étude expérimentale suggère que non seulement «$\mathbf{Z}$ est suffisant», mais qu'en fait tous les résultats de calculs (coefficients d'un idempotent sur $\mathcal{B}(f)$, base de Gröbner d'un idéal galoisien) n'utilisent comme dénominateurs que des éléments dont le carré divise le discriminant de f.
2) *Théorie de Galois absolue d'un polynôme.* Étant donné un polynôme séparable $f \in \mathbf{K}[T]$, plutôt que de considérer $\mathbf{K}$ et la clôture intégrale $\mathbf{Z}$ de $\mathbf{Z}_0$ dans $\mathbf{K}$, on peut considérer $\mathbf{K}' = \mathrm{Frac}(\mathbf{Z}_0)$ et la clôture intégrale $\mathbf{Z}'$ de $\mathbf{Z}_0$ dans $\mathbf{K}'$. ∎

Changement d'anneau de base, méthode modulaire

Puisque tout se passe dans $\mathbf{Z}$, on peut regarder ce qui se passe après une extension des scalaires $\varphi : \mathbf{Z} \to \mathbf{k}$ arbitraire.
Il se peut par exemple que $\mathbf{k}$ soit un corps discret «simple» et que l'on sache calculer $\mathrm{Gal}_{\mathbf{k}}\big(\varphi(f)\big)$, c'est-à-dire identifier un idempotent indécomposable e' dans $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k},\varphi(f)}$. Ce groupe sera nécessairement (isomorphe à) un sous-groupe du groupe de Galois inconnu $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Z}}(f) = \mathrm{Gal}_{\mathbf{K}}(f)$.
Supposons que l'on ait calculé un quotient de Galois $\mathbf{B}$ de $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f}$ avec un groupe $G \subseteq \mathrm{S}_n$.
Si e est l'idempotent galoisien de $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f}$ correspondant à $\mathbf{B}$, on peut se ramener au cas où $\varphi(e)$ est une somme de conjugués de e' et où

$$\mathrm{Gal}_{\mathbf{k}}\big(\varphi(f)\big) = H = \mathrm{St}_G(e') \subseteq G$$

Comme ceci est vrai de tout quotient de Galois de $\mathrm{Adu}_{\mathbf{Z},f}$, on obtient une double inclusion

$$H \subseteq \mathrm{Gal}_{\mathbf{Z},f} \subseteq G \tag{1}$$

à ceci près que le groupe $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Z},f}$ est seulement défini à conjugaison prés, et qu'il peut a priori demeurer à tout jamais inconnu.
Ce type de renseignements, «le groupe de Galois de f sur $\mathbf{K}$, à conjugaison près, contient H» ne relève pas de la méthode dynamique que nous avons exposée, car celle-ci fait une démarche en sens contraire : donner des informations du type «le groupe de Galois de f sur $\mathbf{K}$, à conjugaison près, est contenu dans G».
Il est donc intéressant a priori d'utiliser en parallèle les deux méthodes, dans l'espoir de déterminer complètement $\mathrm{Gal}_{\mathbf{K}}(f)$.
Le fait d'avoir remplacé le corps $\mathbf{K}$ par un sous-anneau est important de ce point de vue car on dispose de beaucoup plus de morphismes d'extension des scalaires de source $\mathbf{Z}$ que de source $\mathbf{K}$.

En particulier, il est souvent utile de travailler modulo $\mathfrak{p}$, un idéal maximal de $\mathbf{Z}$. Cette méthode est alors appelée une *méthode modulaire*.
Elle semble avoir été inventée par Dedekind pour la détermination du groupe de Galois de f sur $\mathbb{Q}$ lorsque $f \in \mathbb{Z}[T]$. Notons que dans ce cas un idéal maximal de $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_0 = \mathbb{Z}[1/\operatorname{disc}(f)]$ est donné par un nombre premier p qui ne divise pas $\operatorname{disc}(f)$.

Théorie de Galois paresseuse

Le théorème de structure 6.2 et le lemme 6.3 (qui donne quelques précisions) sont les résultats constructifs théoriques qui permettent une évaluation paresseuse du corps de racines et du groupe de Galois d'un polynôme séparable.
Notez bien que le terme « paresseux » n'est absolument pas péjoratif. Il indique simplement que l'on peut travailler en toute confiance dans le corps des racines d'un polynôme séparable sur $\mathbf{K}$, même en l'absence de tout algorithme de factorisation des polynômes sur $\mathbf{K}$. En effet, toute anomalie avec l'algèbre $\mathbf{B}$, l'approximation « en cours » du corps de racines de f, par exemple la présence d'un diviseur de zéro non nul, peut être exploitée pour améliorer significativement notre connaissance du groupe de Galois et du corps de racines. Un idempotent galoisien strictement multiple de l'idempotent e « en cours » peut en effet être calculé. Dans la nouvelle algèbre galoisienne, qui est un quotient de la précédente, tous les calculs faits auparavant restent valables, par passage au quotient. Par ailleurs, le nombre d'améliorations significatives qui peuvent se produire ainsi n'excède pas la longueur maximum d'une chaîne de sous-groupes de S_n.
Nous développons donc une variante « galoisienne » du système D5 qui fut le premier système de calcul formel à calculer de manière systématique et sans risque d'erreur dans la clôture algébrique d'un corps en l'absence d'algorithme de factorisation des polynômes (voir [56, Duval&al.]).
Ici, contrairement à ce qui se passe avec le système D5, l'aspect dynamique des choses ne consiste pas à « ouvrir des branches de calcul séparées » chaque fois qu'une anomalie se présente, mais à améliorer à chaque fois l'approximation du corps de racines (et de son groupe de Galois) que constitue le quotient de Galois en cours de l'algèbre de décomposition universelle.

L'algorithme de base

On peut réécrire comme suit l'algorithme 3.11 dans la situation présente, lorsque l'on dispose d'un élément y ni nul ni inversible dans le quotient de Galois $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathfrak{b}$.

6.5. Algorithme. Calcul d'un idéal galoisien et de son stabilisateur

Entrée : $\mathfrak{b}$: idéal galoisien d'une algèbre de décomposition universelle $\mathbf{A}$ pour un polynôme séparable, $\mathfrak{b}$ est donné par un système générateur fini ; y : élément diviseur de zéro dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathfrak{b}$; $G = \mathrm{St}_{\mathrm{S}_n}(\mathfrak{b})$; $S_y = \mathrm{St}_G(y)$.
Sortie : $\mathfrak{b}'$: un idéal galoisien de $\mathbf{B}$ contenant y ; $H : \mathrm{St}_G(\mathfrak{b}')$.
Variables locales : $\mathfrak{a}$: idéal de type fini de $\mathbf{B}$; σ : élément de G ;
L : liste d'éléments de $\overline{G/S_y}$;
  # $\overline{G/S_y}$ est un système de représentants des classes à gauche modulo S_y
E : ensemble correspondant d'éléments de G/S_y ;
  # G/S_y est l'ensemble des classes à gauche modulo S_y.
Début
  $E \leftarrow \emptyset$; $L \leftarrow [\,]$; $\mathfrak{b}' \leftarrow \langle y \rangle$;
  pour σ **dans** $\overline{G/S_y}$ **faire**
    $\mathfrak{a} \leftarrow \mathfrak{b}' + \langle \sigma(y) \rangle$;
    si $1 \notin \mathfrak{a}$ **alors** $\mathfrak{b}' \leftarrow \mathfrak{a}$; $L \leftarrow L \bullet [\sigma]$; $E \leftarrow E \cup \{\sigma S_y\}$
    fin si ;
  fin pour ;
  $H \leftarrow \mathrm{St}_G(E)$ # $H = \left\{ \alpha \in G \,|\, \forall \sigma \in L, \alpha\sigma \in \bigcup_{\tau \in L} \tau S_y \right\}$.
Fin.

L'idéal $\mathfrak{b}$ est donné par un système générateur fini, et $G = \mathrm{St}_{\mathrm{S}_n}(\mathfrak{b})$. Soient e l'idempotent de $\mathbf{B}$ tel que $\langle 1-e \rangle_{\mathbf{B}} = \langle y \rangle_{\mathbf{B}}$, et e' un idempotent galoisien tel que $G.e$ et $G.e'$ engendrent la même algèbre de Boole.
On cherche à calculer l'idéal galoisien $\mathfrak{c}$ de $\mathbf{A}$ qui donne le nouveau quotient de Galois $\mathbf{A}/\mathfrak{c} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}'$, où $\mathfrak{b}' = \langle 1-e' \rangle_{\mathbf{B}}$, i.e. $\mathfrak{c} = \pi^{-1}_{\mathbf{A},\mathfrak{b}}(\mathfrak{b}')$.
Dans l'algorithme 3.11 on fait le produit de e par un nombre maximum de conjugués, en évitant d'obtenir un produit nul.
Ici, on ne calcule pas e, ni $\sigma(e)$, ni e', car l'expérimentation montre que souvent, le calcul de e est très long (cet idempotent occupe souvent beaucoup d'espace mémoire, nettement plus que e'). On raisonne alors avec les idéaux correspondants $\langle 1-e \rangle = \langle y \rangle$ et $\langle 1-\sigma(e) \rangle = \langle \sigma(y) \rangle$. Il s'ensuit que dans l'algorithme le produit des idempotents est remplacé par la somme des idéaux.
Par ailleurs, comme on ne calcule pas e, on remplace $\mathrm{St}_G(e)$ par $\mathrm{St}_G(y)$, qui est contenu dans $\mathrm{St}_G(e)$, en général de façon stricte. Néanmoins, l'expérience montre que, bien que $\overline{G/S_y}$ soit plus grand, l'ensemble du calcul est plus rapide. Nous laissons le soin au lecteur de montrer que la dernière affectation dans l'algorithme fournit bien le groupe $\mathrm{St}_G(\mathfrak{b}')$ voulu, i.e. que le sous-groupe H de G, stabilisateur de E dans G/S_y, est bien égal à $\mathrm{St}_G(\mathfrak{b}')$.

Quand une résolvante relative se factorise

Souvent une anomalie dans un quotient de Galois de l'algèbre de décomposition universelle correspond à la constatation qu'une résolvante relative se factorise. Nous traitons donc ce cas en toute généralité, pour le ramener au cas de la présence d'un diviseur de zéro non nul.

6.6. Proposition. (Quand une résolvante relative se factorise)
Dans le contexte 6.1 soit $y \in \mathbf{B}$ *et* $G.y = \{y_1, \dots, y_r\}$.

1. *Si* $\mathrm{Min}_y = R_1 R_2$ *avec* R_1 *et* R_2 *de degrés* $\geqslant 1$, $R_1(y)$ *et* $R_2(y)$ *sont des diviseurs de zéro non nuls, et il existe un idempotent* e *tel que* $\langle e\rangle = \langle R_1(y)\rangle$ *et* $\langle 1-e\rangle = \langle R_2(y)\rangle$.
2. *Si* $\deg(\mathrm{Min}_y) < \deg(\mathrm{Rv}_{G,y})$, *alors l'un des* $y_1 - y_i$ *divise zéro (on peut donc construire un idempotent* $\neq 0, 1$ *de* $\mathbf{B}$*).*
3. *Si* P *est un diviseur strict de* $\mathrm{Rv}_{G,y}$ *dans* $\mathbf{K}[T]$, *alors au moins un des deux cas suivants se présente :*
   — $P(y)$ *est un diviseur de zéro non nul, on est ramené au point 1.*
   — *un élément* $y_1 - y_i$ *est un diviseur de zéro non nul, on est ramené au point 2.*

▷ *1.* Puisque Min_y est séparable, R_1 et R_2 sont comaximaux. Avec une relation de Bézout $U_1R_1 + U_2R_2 = 1$, posons $e = (U_1R_1)(y)$ et $e' = 1 - e$. On a $ee' = 0$, donc e et e' sont des idempotents. On a aussi immédiatement

$$eR_2(y) = e'R_1(y) = 0,\ eR_1(y) = R_1(y) \text{ et } e'R_2(y) = R_2(y).$$

Donc $\langle e\rangle = \langle R_1(y)\rangle$ et $\langle 1-e\rangle = \langle R_2(y)\rangle$.
2. La preuve qui montre que sur un anneau intègre un polynôme unitaire de degré d ne peut avoir plus que d racines distinctes se relit comme suit. Sur un anneau arbitraire, si un polynôme P unitaire de degré d admet des zéros $(a_1, \dots, a_d)$ avec tous les $a_i - a_j$ réguliers pour $i \neq j$, alors on a $P(T) = \prod(T - a_i)$. Donc si $P(t) = 0$ et t distinct des a_i, deux au moins des $t - a_i$ sont diviseurs de zéro non nuls. On applique ceci au polynôme minimal Min_y qui a plus de zéros dans $\mathbf{B}$ que son degré (ce sont les y_i). Ceci donne un $y_j - y_k$ diviseur de zéro, et par un $\sigma \in G$ on transforme $y_j - y_k$ en un $y_1 - y_i$.
3. Si P est multiple de Min_y, on est ramené au point *2.*
Sinon, $\mathrm{pgcd}(\mathrm{Min}_y, P) = R_1$ est un diviseur strict de Min_y, et $R_1 \neq 1$ car on a $\mathrm{pgcd}\left((\mathrm{Min}_y)^k, P\right) = P$ pour k assez grand. Donc $\mathrm{Min}_y = R_1R_2$, avec $\deg(R_1)$ et $\deg(R_2) \geqslant 1$. On est ramené au point *1.* □

On en déduit le corollaire suivant qui généralise le point *4* dans le théorème de structure 6.2.

6.7. Théorème. *Dans le contexte 6.1 soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille finie dans* $\mathbf{B}$. *Il existe un idéal galoisien* $\mathfrak{c}$ *de* $\mathbf{B}$ *tel que, en notant* $H = \mathrm{St}_G(\mathfrak{c})$, $\mathbf{C} = \mathbf{B}/\mathfrak{c}$, *et* $\beta : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ *la projection canonique, on a :*

1. *Chaque* $\beta(u_j)$ *est nul ou inversible.*
2. *Dans* $\mathbf{C}$, $\mathrm{Min}_{\beta(u_j)}(T) = \mathrm{Rv}_{H,\beta(u_j)}(T)$.
3. *Les* $\mathrm{Min}_{\beta(u_j)}$ *sont deux à deux égaux ou étrangers.*

Remarque. Dans le théorème précédent on a parfois intérêt à saturer la famille $(u_j)_{j\in J}$ par l'action de G (voire de S_n en remontant les u_j dans $\mathbf{A}$) de façon à rendre manifestes dans $\mathbf{C}$ tous les «cas de figure» possibles. ∎

Exemple. Nous reprenons l'exemple de la page 120. On demande à `Magma` ce qu'il pense de l'élément `x5 + x6`. Trouvant que la résolvante est de degré 15 (sans avoir besoin de la calculer) alors que le polynôme minimal est de degré 13, il se met en peine de réduire la bizarrerie et obtient un quotient de Galois de l'algèbre de décomposition universelle de degré 48 (le corps de racines de degré 24 n'est pas encore atteint) avec le groupe correspondant. Le calcul est presque instantané. Voici le résultat.

```
y:=x5+x6;
MinimalPolynomial(y);
  T^13 - 13*T^12 + 87*T^11 - 385*T^10 +
     1245*T^9 - 3087*T^8 + 6017*T^7 - 9311*T^6 + 11342*T^5 - 10560*T^4 +
     7156*T^3 - 3284*T^2 + 1052*T - 260
//nouvelle algebre galoisienne, calculee a partir de deg(Min)<deg(Rv) :
Affine Algebra of rank 6 over Rational Field
Variables: x1, x2, x3, x4, x5, x6
Quotient relations:
  x1 + x2 - 1,
  x2^2 - x2 + x4^2 - x4 + x6^2 - x6 + 3,
  x3 + x4 - 1,
  x4^4 - 2*x4^3 + x4^2*x6^2 - x4^2*x6 + 4*x4^2 - x4*x6^2 + x4*x6 -
        3*x4 + x6^4 - 2*x6^3 + 4*x6^2 - 3*x6 - 1,
  x5 + x6 - 1,
  x6^6 - 3*x6^5 + 6*x6^4 - 7*x6^3 + 2*x6^2 + x6 - 1
Permutation group acting on a set of cardinality 6
Order = 48 = 2^4 * 3
    (1, 2)
    (3, 5)(4, 6)
    (1, 3, 5)(2, 4, 6)
```

Nous renvoyons en exercices quelques cas particuliers de la situation examinée dans la proposition 6.6. Chaque fois le but est d'obtenir des informations plus précises sur ce qui se passe lorsque l'on réduit la bizarrerie constatée. Voir les exercices 11, 12 et 13.

Quand la structure triangulaire manque

Considérons des éléments $\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell$ de $\mathbf{B}$ et les $\mathbf{K}$-algèbres emboîtées

$$\mathbf{K} \subseteq \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}[\alpha_1] \subseteq \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}[\alpha_1, \alpha_2] \subseteq \cdots \subseteq \mathbf{K}_\ell = \mathbf{K}[\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell] \subseteq \mathbf{B}.$$

Pour $i = 2, \ldots, \ell$ la structure de $\mathbf{K}_i$ comme $\mathbf{K}_{i-1}$-module peut être explicitée par différentes techniques. Si $\mathbf{B}$ est un corps de racines pour f, tous les $\mathbf{K}_i$ sont des corps et chacun des modules est libre.
Si l'un de ces modules n'est pas libre, alors on peut construire un idempotent $\neq 0, 1$ dans $\mathbf{B}$ en utilisant la même technique que pour la démonstration du théorème de structure VI-1.4, point *2b*.

Il peut s'avérer efficace d'utiliser la technique des bases de Gröbner, avec l'idéal qui définit $\mathbf{B}$ comme quotient de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$. On introduit des noms de variables a_i pour les α_i et l'on choisit un ordre lexicographique avec $a_1 < \cdots < a_\ell < X_1 < \cdots < X_n$.
Si $\mathbf{B}$ est un corps la base de Gröbner doit avoir une structure triangulaire. À chaque α_i doit correspondre un et un seul polynôme dans la base de Gröbner, $P_i(a_1, \ldots, a_i)$ unitaire en a_i.
Si cette structure triangulaire n'est pas respectée pour la variable a_i, nous sommes certains que $\mathbf{K}_{i-1}$ n'est pas un corps, et nous pouvons expliciter un diviseur de zéro dans cette $\mathbf{K}$-algèbre.
En fait soit $P(a_1, \ldots, a_i)$ un polynôme qui apparaît dans la base de Gröbner et qui n'est pas unitaire en a_i. Son coefficient dominant en tant que polynôme en a_i est un polynôme $Q(a_1, \ldots, a_{i-1})$ qui donne nécessairement un élément diviseur de zéro $Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1})$ dans l'algèbre zéro-dimensionnelle $\mathbf{K}_{i-1} \simeq \mathbf{K}[a_1, \ldots, a_{i-1}]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal engendré par les premiers polynômes, en les variables $a_1, \ldots, a_{i-1}$, qui apparaissent dans la base de Gröbner. Sinon, on pourrait multiplier P par l'inverse de Q modulo $\mathfrak{a}$, et réduire le résultat modulo $\mathfrak{a}$, et l'on obtiendrait un polynôme unitaire en a_i qui précède P pour l'ordre lexicographique, et qui rendrait la présence de P inutile.

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées à la lectrice, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

— Démontrer les propositions 3.1, 3.2 et le théorème 3.3.

— Expliquer le fait 4.1.

Exercice 2. *(Structure des algèbres finies sur un corps, version classique, version constructive dynamique)*

1. Montrer en mathématiques classiques le résultat suivant.

Toute algèbre finie sur un corps est un produit fini d'algèbres locales finies.

2. Expliquez pourquoi on ne peut espérer en obtenir une preuve constructive, même en supposant que le corps est discret.

3. Proposer une version constructive du résultat précédent.

Exercice 3. Montrer que la machinerie locale-globale élémentaire n°2 page 226 appliquée à la démonstration du théorème 1.5 donne le résultat suivant, équivalent au théorème 1.5 dans le cas d'un corps discret non trivial.

Théorème 1.5 bis (Nullstellensatz faible et mise en position de Noether, cas des anneaux zéro-dimensionnels réduits) *Soit* $\mathbf{K}$ *un anneau zéro-dimensionnel réduit,* $\mathfrak{f}$ *un idéal de type fini de* $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *et* $\mathbf{A} = \mathbf{K}[\underline{X}]/\mathfrak{f}$ *l'algèbre quotient. Alors, il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux* $(e_{-1}, e_0, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbf{K}$ *et un changement de variables tels que, en appelant* $Y_1, \ldots, Y_n$ *les nouvelles variables, et en notant*

$$\mathbf{K}_r = \mathbf{K}[1/e_r] \quad et \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{A}[1/e_r] = \mathbf{K}_r \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{A} \simeq \mathbf{K}_r[\underline{X}]/\mathfrak{f}\,\mathbf{K}_r[\underline{X}],$$

on ait les résultats suivants.

1. $\mathbf{A}_{-1} = 0$ *et* $\mathbf{K} \cap \mathfrak{f} = e_{-1}\mathbf{K}$.
2. $\mathbf{K}_0 \cap \mathfrak{f} = 0$ *et* $\mathbf{A}_0$ *est un* $\mathbf{K}_0$*-module quasi libre fidèle.*
3. *Pour* $r = 1, \ldots, n$ *on a :*
   - $\mathbf{K}_r[Y_1, \ldots, Y_r] \cap \mathfrak{f} = 0$. *Autrement dit l'algèbre* $\mathbf{K}_r[Y_1, \ldots, Y_r]$ *peut être considérée comme une sous-*$\mathbf{K}_r$*-algèbre de* $\mathbf{A}_r$.
   - $\mathbf{A}_r$ *est un module de présentation finie sur* $\mathbf{K}_r[Y_1, \ldots, Y_r]$.
   - *Il existe un entier* N *tel que pour chaque* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_r) \in \mathbf{K}_r^r$*, la* $\mathbf{K}_r$*-algèbre*
     $$\mathbf{B}_r = \mathbf{A}_r/\langle Y_1 - \alpha_1, \ldots, Y_r - \alpha_r\rangle$$
     est un $\mathbf{K}_r$*-module quasi libre de rang fini* $\leqslant N$*, et l'homomorphisme naturel* $\mathbf{K}_r \to \mathbf{B}_r$ *est injectif.*

En particulier, la $\mathbf{K}$*-algèbre* $\mathbf{A}$ *est un module de présentation finie sur la sous-algèbre «* polynomiale*»* $\bigoplus_{r=0}^{n} \mathbf{K}_r[Y_1, \ldots, Y_r]$. *On dit que le changement de variables (qui éventuellement ne change rien du tout) a mis l'idéal en* position de Noether. *Enfin, le système fondamental d'idempotents orthogonaux qui intervient ici ne dépend pas du changement de variables qui met l'idéal en position de Noether.*

Exercice 4. *(Matrices magiques et algèbre commutative)*
On fournit dans cet exercice une application de l'algèbre commutative à un problème combinatoire ; le caractère libre qui intervient dans la mise en position de Noether de la question *2* est un exemple de la propriété Cohen-Macaulay en terrain gradué. Une *matrice magique* de taille n est une matrice de $\mathbb{M}_n(\mathbb{N})$ dont la somme de chaque ligne et de chaque colonne est la même. L'ensemble de ces matrices magiques est un sous-monoïde additif de $\mathbb{M}_n(\mathbb{N})$; on admettra ici que c'est le monoïde engendré par les $n!$ matrices de permutation. On s'intéresse au dénombrement des matrices magiques de taille 3 de somme d fixée. Voici les 6 matrices de permutation de $\mathbb{M}_3(\mathbb{N})$:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ P_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ P_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Elles sont liées par la relation $P_1 + P_2 + P_3 = P_4 + P_5 + P_6$. Soit l'anneau de polynômes à neuf indéterminées $\mathbf{k}[(x_{ij})_{i,j\in[\![1..3]\!]}]$ où $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque. On identifie une matrice $M = (m_{ij}) \in \mathbb{M}_3(\mathbb{N})$ au monôme $\prod_{i,j} x_{ij}^{m_{ij}}$, noté $\underline{x}^M$; par exemple $\underline{x}^{P_1} = x_{11}x_{22}x_{33}$.

1. Soient $U_1, \ldots, U_6$ six indéterminées sur $\mathbf{k}$ et $\varphi : \mathbf{k}[\underline{U}] \twoheadrightarrow \mathbf{k}[\underline{x}^{P_1}, \ldots, \underline{x}^{P_6}]$ défini par $U_i \mapsto \underline{x}^{P_i}$. On veut montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est l'idéal $\mathfrak{a} = \langle U_1U_2U_3 - U_4U_5U_6 \rangle$.

a. Montrer, pour a, b, c, d, e, $f \in \mathbb{N}$ et $m = \min(a, b, c)$, que :
$$U_1^a U_2^b U_3^c U_4^d U_5^e U_6^f \equiv U_1^{a-m} U_2^{b-m} U_3^{c-m} U_4^{d+m} U_5^{e+m} U_6^{f+m} \bmod \mathfrak{a}$$

b. On note $\mathfrak{a}^\bullet$ le sous $\mathbf{k}$-module de $\mathbf{k}[\underline{U}]$ ayant pour base les monômes non divisibles par $U_1U_2U_3$. Montrer que $\mathbf{k}[\underline{U}] = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}^\bullet$ et que $\operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{a}$.

c. En déduire que le nombre M_d de matrices magiques de taille 3 et de somme d est égal à $\binom{d+5}{5} - \binom{d+2}{5}$ en convenant de $\binom{i}{j} = 0$ pour $i < j$.

2. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{k}[\underline{U}]/\mathfrak{a} = \mathbf{k}[\underline{u}]$.

a. Définir une mise en position de Noether $\mathbf{A} = \mathbf{k}[v_2, v_3, u_4, u_5, u_6]$ de $\mathbf{B}$ où v_2, v_3 sont des formes linéaires en $\underline{u}$, de façon à ce que $(1, u_1, u_1^2)$ soit une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus \mathbf{A}u_1 \oplus \mathbf{A}u_1^2$.

b. En déduire que le nombre M_d est aussi égal à $\binom{d+4}{4} + \binom{d+3}{4} + \binom{d+2}{4}$ (formule de MacMahon, qui donne en passant, une identité entre coefficients binomiaux).

3. On suppose que $\mathbf{k}$ est un corps discret. On veut montrer que l'anneau $\mathbf{B}$, vu comme l'anneau $\mathbf{k}[\underline{x}^{P_1}, \ldots, \underline{x}^{P_6}]$ est intégralement clos (voir aussi le problème XII-2). Soit $E \subset \mathbb{M}_3(\mathbb{Z})$ le sous-$\mathbb{Z}$-module des matrices magiques (définition analogue) et le sous-anneau $\mathbf{B}_{11} \subset \mathbf{k}[x_{ij}^{\pm 1}, i, j \in [\![1..3]\!]]$

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{k}[\underline{x}^{P_1}, \underline{x}^{P_6}][\underline{x}^{\pm P_2}, \underline{x}^{\pm P_3}, \underline{x}^{\pm P_4}, \underline{x}^{\pm P_5}]$$

de sorte que $\mathbf{B}_{11} \subset \mathbf{k}[\,\underline{x}^M \mid M \in E,\ m_{11} \geqslant 0\,]$.

a. Vérifier que $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_{11}$ ont même corps des fractions, qui est le corps des fractions $\mathbf{k}(E)$, corps de fractions rationnelles sur $\mathbf{k}$ à 5 indéterminées.

b. Montrer que $\mathbf{B}_{11}$ est intégralement clos.

c. Pour $i, j \in [\![1..3]\!]$, définir un anneau $\mathbf{B}_{ij}$ analogue à $\mathbf{B}_{11}$ et en déduire que $\mathbf{B}$ est intégralement clos.

Exercice 5. Donner une preuve directe (pas par l'absurde) que si un corps discret possède deux automorphismes qui engendrent un groupe fini non cyclique, le corps contient un $x \neq 0$ dont toutes les puissances sont distinctes, c'est-à-dire qui n'est pas une racine de l'unité.

Exercice 6. *(Une identité « discriminantale »)*
Soit $n \geqslant 1$. On note E l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tels que $0 \leqslant \alpha_i < i$ pour $i \in [\![1..n]\!]$; c'est un ensemble de cardinal $n!$ que l'on ordonne par la « numération factorielle », i.e. $\alpha \preccurlyeq \beta$ si $\sum_i \alpha_i i! \leqslant \sum_i \beta_i i!$. On ordonne le groupe symétrique S_n par l'ordre lexicographique, I_n étant la plus petite permutation. On considère n indéterminées sur $\mathbb{Z}$ et on définit une matrice $M \in \mathbb{M}_{n!}(\mathbb{Z}[\underline{x}])$, indexée par $\mathrm{S}_n \times E$:

$$M_{\sigma,\alpha} = \sigma(\underline{x}^\alpha), \qquad \sigma \in \mathrm{S}_n, \quad \alpha \in E$$

Ainsi pour $n = 3$:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & x_2 & x_3 & x_2x_3 & x_3^2 & x_2x_3^2 \\ 1 & x_3 & x_2 & x_2x_3 & x_2^2 & x_2^2x_3 \\ 1 & x_1 & x_3 & x_1x_3 & x_3^2 & x_1x_3^2 \\ 1 & x_3 & x_1 & x_1x_3 & x_1^2 & x_1^2x_3 \\ 1 & x_1 & x_2 & x_1x_2 & x_2^2 & x_1x_2^2 \\ 1 & x_2 & x_1 & x_1x_2 & x_1^2 & x_1^2x_2 \end{bmatrix}$$

1. Montrer que $\det(M) = \delta^{n!/2}$ avec $\delta = \prod_{i<j}(x_i - x_j)$.
2. On note $s_1, \ldots, s_n \in \mathbb{Z}[\underline{x}]$ les n fonctions symétriques élémentaires, $F(T)$ le polynôme universel $F(T) = T^n - s_1T^{n-1} + \cdots + (-1)^n s_n$, et $U \in \mathbb{M}_{n!}(\mathbb{Z}[\underline{x}])$ la matrice tracique, indexée par $E \times E$, de terme $\mathrm{Tr}_{\mathrm{S}_n}(\underline{x}^{\alpha+\beta})$, $\alpha, \beta \in E$.
Soit $f \in \mathbf{k}[T]$ un polynôme unitaire de degré n, $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f}$.
Retrouver l'égalité $\mathrm{Disc}_{\mathbf{k}}\,\mathbf{A} = \mathrm{disc}(f)^{n!/2}$ (fait III-5.11). Et réciproquement ?
3. Revisiter le théorème 4.12.

Exercice 7. *(L'algèbre de décomposition universelle du polynôme $f(T) = T^n$)*
Soient $f(T) = T^n$ et $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$. Décrire la structure de $\mathbf{A}$.

Exercice 8. *(Polynômes inversibles et indices de nilpotence)*
On propose ici une version quantitative du résultat figurant dans le point *4* du lemme II-2.6. Soient $\mathbf{k}$ un anneau commutatif, f, $g \in \mathbf{k}[X]$ vérifiant $fg = 1$ et $f(0) = g(0) = 1$. On écrit $f = \sum_{i=0}^n a_i X^i$, $g = \sum_{j=0}^m b_j X^j$. Montrer que

$$a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n} b_1^{\beta_1} b_2^{\beta_2} \cdots b_m^{\beta_m} = 0 \quad \text{si} \quad \textstyle\sum_i i\alpha_i + \sum_j j\beta_j > nm$$

En particulier, pour $i \geqslant 1$, on a $a_i^{\lceil (nm+1)/i \rceil} = 0$ et par suite $a_1^{nm+1} = 0$.

Exercice 9. *(L'algèbre de décomposition universelle du polynôme $f(T) = T^p - a$ en caractéristique p)*
Soit p un nombre premier, $\mathbf{k}$ un anneau dans lequel $p \cdot 1_{\mathbf{k}} = 0$ et $a \in \mathbf{k}$.
On note $f(T) = T^p - a \in \mathbf{k}[T]$, $\mathbf{A} = \mathrm{Adu}_{\mathbf{k},f} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_p]$, $\mathbf{k}[\alpha] = \mathbf{k}[T]/\langle f \rangle$, de sorte que $T - a = (T - \alpha)^p$. Soit $\varphi : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{k}[\alpha]$ le $\mathbf{k}$-morphisme $x_i \mapsto \alpha$. Expliciter l'idéal $\mathrm{Ker}\,\varphi$ et décrire la structure de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$.
NB : si $\mathbf{k}$ est un corps discret et a n'est pas une puissance p-ième dans $\mathbf{k}$, d'après

l'exercice III-10, le polynôme $f(T)$ est irréductible et $\mathbf{k}[\alpha]$ est un corps de décomposition de f sur $\mathbf{k}$.

Exercice 10. *(Le trinôme $T^5+5bT\pm 4b$ où $b=5a^2-1$, de groupe de Galois A_5)*
On considère un trinôme T^5+bT+c. On va particulariser b, c de façon à ce que son discriminant soit un carré et obtenir un polynôme irréductible de groupe de Galois A_5 comme illustration de la méthode modulaire.
On utilise l'égalité $\mathrm{disc}_T(T^5+bT+c)=4^4b^5+5^5c^4$ (voir le problème III-1).
1. Pour forcer le discriminant à être un carré dans $\mathbb{Z}$, expliquer pourquoi ce qui suit est raisonnable : $b\leftarrow 5b$, $c\leftarrow 4c$, puis $f_a(T)=T^5+5(5a^2-1)T\pm 4(5a^2-1)$. Le discriminant est alors le carré $2^8 5^6 a^2(5a^2-1)^4$.
2. On prend $a=1$ et on obtient $f_1(T)=T^5+20T\pm 16$ dans $\mathbb{Z}[T]$. En examinant les factorisations de f_1 modulo 3 et 7, montrer que f_1 est irréductible de groupe de Galois A_5. En déduire que pour $a\equiv 1 \bmod 21$, f_a est irréductible de groupe de Galois A_5. Montrer qu'il en est de même de f_a vu comme polynôme à coefficients dans le corps des fractions rationnelles $\mathbb{Q}(a)$.

Exercice 11. *(Quand une résolvante admet un zéro dans le corps de base)*
Dans le contexte 6.1 soit $y\in\mathbf{B}$, $G.y=\{y_1,\dots,y_r\}$ et $g(T)=\mathrm{Rv}_{G,y}(T)$.

1. On suppose que $a\in\mathbf{K}$ est un zéro simple de g.
   a. $\mathfrak{c}=\langle y-a\rangle_{\mathbf{B}}$ est un idéal galoisien de $(\mathbf{K},\mathbf{B},G)$.
   b. Si $\beta:\mathbf{B}\to\mathbf{C}=\mathbf{B}/\mathfrak{c}$ est la projection canonique, et si $H=\mathrm{St}_G(\mathfrak{c})$ est la nouvelle approximation du groupe de Galois, alors $\beta(y_1)=a$ et pour $j\neq 1$, Rv_{H,y_j} divise $g(T)/(T-a)$ (comme d'habitude on identifie $\mathbf{K}$ à un sous-corps de $\mathbf{B}$ et $\beta(\mathbf{K})$ à un sous-corps de $\mathbf{C}$).
2. On suppose que $a\in\mathbf{K}$ est un zéro de g avec la multiplicité k.
   a. Il existe $j_2,\dots,j_k\in[\![2..r]\!]$ tels que $\mathfrak{c}=\langle y_1-a,y_{j_2}-a,\dots,y_{j_k}-a\rangle$ est un idéal galoisien minimal parmi ceux qui contiennent $y-a$.
   On pose $j_1=1$. Pour $j\neq j_1,\dots,j_k$, y_j-a est inversible modulo $\mathfrak{c}$.
   b. Soient $\beta:\mathbf{B}\to\mathbf{C}=\mathbf{B}/\mathfrak{c}$ la projection canonique, et $H=\mathrm{St}_G(\mathfrak{c})$.
   Alors $\beta(y_{j_1})=\cdots=\beta(y_{j_k})=a$, et pour $j\neq j_1,\dots,j_k$, la résolvante Rv_{H,y_j} divise $g(T)/(T-a)^k$.
3. On suppose que $\mathfrak{c}$ est un idéal galoisien de $\mathbf{B}$ et que $\mathrm{St}_G(y)$ contient $\mathrm{St}_G(\mathfrak{c})$, alors $g(T)$ admet un zéro dans $\mathbf{K}$.

Remarque. Le point *1* justifie la « méthode de Jordan » pour le calcul du groupe de Galois. Voir page 449. ∎

Exercice 12. *(Quand on connaît la décomposition en facteurs premiers d'une résolvante séparable)* Dans le contexte 6.1 soit $y\in\mathbf{B}$ et $G.y=\{y_1,\dots,y_r\}$.
On suppose que $\mathrm{Rv}_{G,y}=\mathrm{Min}_y=R_1\cdots R_\ell$, avec les R_i irréductibles et $\ell>1$. Calculer un idempotent galoisien e de $\mathbf{B}$, avec les propriétés suivantes, dans lesquelles on note $(\mathbf{K},\mathbf{C},H)$ le quotient de Galois correspondant et $\beta:\mathbf{B}\to\mathbf{C}$ la projection canonique.

1. Pour chaque $i\in[\![1..r]\!]$, le polynôme $\mathrm{Min}_{\beta(y_i)}$ est égal à l'un des R_j.
2. Le groupe H opère sur $\{\beta(y_1),\dots,\beta(y_r)\}$.

3. Les orbites sont de longueurs $d_1 = \deg(R_1), \ldots, d_\ell = \deg(R_\ell)$.
4. Cette situation se reproduit dans tout quotient de Galois de $(\mathbf{K}, \mathbf{C}, H)$.

Remarque. L'exercice 12 est la base de la « méthode de McKay-Soicher » pour le calcul du groupe de Galois. Voir page 449. ∎

Exercice 13. *(Quand un polynôme minimal divise strictement une résolvante)*
Dans le contexte 6.1 soit $y \in \mathbf{B}$ et $G.y = \{y_1, \ldots, y_r\}$.
On suppose que $g(T) = \mathrm{Rv}_{G,y}(T) \neq \mathrm{Min}_y(T)$. Soit $(\mathbf{K}, \mathbf{C}, H)$ un quotient de Galois (avec la projection canonique $\beta : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$) dans lequel chaque $\beta(y_i)$ admet un polynôme minimal égal à sa résolvante.
Montrer que pour les différents zéros $\beta(y_j)$ de $g_1(T) = \mathrm{Min}_{\beta(y_1)}(T)$ dans $\mathbf{C}$, les fibres $\beta^{-1}\big(\beta(y_j)\big)$ ont toutes le même nombre d'éléments, disons n_1.
En outre, $g_1^{n_1}$ divise g et $g/g_1^{n_1}$ est comaximal avec g_1.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. *1.* Cela résulte du fait qu'un anneau zéro-dimensionnel connexe est local et du fait que, par le principe du tiers exclu, on connaît les idempotents indécomposables de l'algèbre, lesquels forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux.
2. Dans le cas d'une algèbre $\mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$ avec f séparable, trouver les idempotents revient à factoriser le polynôme. Mais il n'existe pas d'algorithme général de factorisation d'un polynôme séparable.
3. Une version constructive consiste à affirmer que, pour ce qui concerne un calcul, on peut toujours « faire comme si » le résultat (démontré au moyen du tiers exclu) était vrai. Cette *version dynamique* s'exprime comme suit.
Soit $\mathbf{K}$ *un anneau zéro-dimensionnel (cas particulier : un corps discret).*
Soit $(x_i)_{i\in I}$ *une famille finie d'éléments dans une* $\mathbf{K}$*-algèbre entière* $\mathbf{B}$ *(cas particulier : une* $\mathbf{K}$*-algèbre finie).*
Il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_1, \ldots, e_n)$ *tel que dans chaque composante* $\mathbf{B}/\langle 1 - e_j\rangle$*, chaque* x_i *est nilpotent ou inversible.*
On démontre ce résultat comme suit : le lemme VI-3.14 nous dit que $\mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel ; on conclut par le lemme de scindage zéro-dimensionnel IV-8.10.

Exercice 4. On vérifie facilement que le $\mathbb{Z}$-module des relations linéaires entre les matrices P_1, …, P_6 est engendré par $(1, 1, 1, -1, -1, -1)$. On utilisera aussi que le nombre de monômes de degré d en n variables est $\binom{d+n-1}{n-1}$.
1a. Soit $S(Y, Z) = \sum_{i+j=m-1} Y^i Z^j$, donc $Y^m - Z^m = (Y - Z)S(Y, Z)$. Dans cette égalité, on fait $Y = U_1U_2U_3$, $Z = U_4U_5U_6$. On obtient le résultat demandé en multipliant par $U_1^{a-m}U_2^{b-m}U_3^{c-m}U_4^dU_5^eU_6^f$.
1b. On a clairement $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$. L'égalité $\mathbf{k}[\underline{U}] = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\bullet$ résulte du point *1a*. Il suffit donc de voir que $\mathrm{Ker}\,\varphi \cap \mathfrak{a}^\bullet = \{0\}$, i.e. que la restriction de φ à $\mathfrak{a}^\bullet$ est injective. Comme φ transforme un monôme en un monôme, il suffit de voir que si deux monômes $U_1^a \cdots U_6^f$ et $U_1^{a'} \cdots U_6^{f'} \in \mathfrak{a}^\bullet$ ont même image par φ, ils sont égaux.
On a $(a, b, c, \ldots, f) = (a', b', c', \ldots, f') + k(1, 1, 1, -1, -1, -1)$ avec $k \in \mathbb{Z}$, et

comme $\min(a,b,c) = \min(a',b',c') = 0$, on a $k = 0$, ce qui donne l'égalité des deux monômes.

1c. Le nombre M_d cherché est la dimension sur $\mathbf{k}$ de la composante homogène de degré d de $\mathbf{k}[\underline{x}^{P_1}, \dots, \underline{x}^{P_6}]$ ou encore (via φ) celle de $\mathfrak{a}_d^\bullet$.

Mais on a aussi $\mathbf{k}[\underline{U}] = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{a}^\bullet$ où $\mathfrak{b}$ est l'idéal (monomial) engendré par les monômes divisibles par $U_1U_2U_3$ (en quelque sorte, $\mathfrak{b}$ est un idéal initial de $\mathfrak{a}$).

On a donc $\mathbf{k}[\underline{U}]_d = \mathfrak{b}_d \oplus \mathfrak{a}_d^\bullet$ et

$$\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\underline{U}]_d = \tbinom{d+5}{5}, \quad \dim_{\mathbf{k}} \mathfrak{b}_d = \tbinom{d+5-3}{5}, \quad M_d = \dim_{\mathbf{k}} \mathfrak{a}_d^\bullet = \tbinom{d+5}{5} - \tbinom{d+2}{5}$$

2a. On définit V_2, V_3 par $U_2 = U_1 + V_2$, $U_3 = U_1 + V_3$.

Le polynôme $U_1U_2U_3 - U_4U_5U_6$, vu dans $\mathbf{k}[U_1, V_2, V_3, U_4, U_5, U_6]$ devient unitaire en U_1 de degré 3. On laisse au lecteur le soin de vérifier les autres détails.

2b. Le nombre cherché est aussi $M_d = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{B}_d$. Mais on a

$$\mathbf{B}_d = \mathbf{A}_d \oplus \mathbf{A}_{d-1}u_1 \oplus \mathbf{A}_{d-2}u_1^2 \simeq \mathbf{A}_d \oplus \mathbf{A}_{d-1} \oplus \mathbf{A}_{d-2}.$$

Il suffit d'utiliser le fait que $\mathbf{A}$ est un anneau de polynômes sur $\mathbf{k}$ à 5 indéterminées.

À titre indicatif, pour $d = 0$, 1, 2, 3, 4, 5, M_d vaut 1, 6, 21, 55, 120, 231.

3a. Le $\mathbb{Z}$-module E est libre de rang 5 : 5 matrices quelconques parmi $\{P_1, \dots, P_6\}$ en constituent une $\mathbb{Z}$-base.

3b. Puisque $P_1 + P_2 + P_3 = P_4 + P_5 + P_6$, on a :

$$\mathbf{B}_{11} = \mathbf{k}[\underline{x}^{P_1}][\underline{x}^{\pm P_2}, \underline{x}^{\pm P_3}, \underline{x}^{\pm P_4}, \underline{x}^{\pm P_5}] = \mathbf{k}[\underline{x}^{P_6}][\underline{x}^{\pm P_2}, \underline{x}^{\pm P_3}, \underline{x}^{\pm P_4}, \underline{x}^{\pm P_5}].$$

On voit alors que $\mathbf{B}_{11}$ est un localisé de $\mathbf{k}[\underline{x}^{P_1}, \underline{x}^{P_2}, \underline{x}^{P_3}, \underline{x}^{P_4}, \underline{x}^{P_5}]$, qui est un anneau de polynômes à 5 indéterminées sur $\mathbf{k}$, donc intégralement clos.

3c. On définit $\mathbf{B}_{ij}$ de façon à ce qu'il soit contenu dans $\mathbf{k}[\,\underline{x}^M \mid M \in E,\ m_{ij} \geqslant 0\,]$.

Par exemple, pour $(i,j) = (3,1)$, les matrices P_k ayant un coefficient nul en position $(3,1)$ sont celles autres que P_3, P_5, ce qui conduit à la définition de $\mathbf{B}_{31}$:

$$\mathbf{B}_{31} = \mathbf{k}[\underline{x}^{P_3}, \underline{x}^{P_5}][\underline{x}^{\pm P_1}, \underline{x}^{\pm P_2}, \underline{x}^{\pm P_4}, \underline{x}^{\pm P_6}].$$

On a alors l'égalité $\mathbf{B} = \bigcap_{i,j} \mathbf{B}_{ij}$, et comme les $\mathbf{B}_{ij}$ sont tous intégralement clos de même corps des fractions $\operatorname{Frac}\mathbf{B}$, l'anneau $\mathbf{B}$ est intégralement clos.

Exercice 6. *2.* On écrit $U = {}^tMM$ et on prend le déterminant.

Cela donne $\operatorname{Disc}_{\mathbf{k}} \mathbf{A} = \operatorname{disc}(f)^{n!/2}$ à partir de $\det(M) = \delta^{n!/2}$. Réciproquement, puisqu'il s'agit d'identités algébriques dans $\mathbb{Z}[\underline{x}]$, l'égalité $(\det M)^2 = (\delta^{n!/2})^2$ implique $\det M = \pm\delta^{n!/2}$.

3. Dans le théorème 4.12, ne supposons pas f séparable sur $\mathbf{C}$. Par hypothèse, on a $\varphi(f)(T) = \prod_{i=1}^n (T - u_i)$. Avec $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] = \operatorname{Adu}_{\mathbf{k}}(f)$, on a alors un morphisme de $\mathbf{C}$-algèbres $\Phi : \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A} \to \mathbf{C}^{n!}$ qui réalise $1 \otimes x_i \mapsto (u_{\sigma(i)})_{\sigma \in \mathrm{S}_n}$.

La $\mathbf{k}$-base canonique $\mathcal{B}(f)$ de $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{C}$-base de $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$ et la matrice de Φ pour cette base (au départ) et pour la base canonique de $\mathbf{C}^{n!}$ (à l'arrivée) est la matrice M ci-dessus où x_i est remplacé par u_i. On en déduit que Φ est un isomorphisme si, et seulement si, $\varphi\big(\operatorname{disc}(f)\big) \in \mathbf{C}^\times$, i.e. si f est séparable sur $\mathbf{C}$.

Finalement faisons seulement l'hypothèse qu'une algèbre $\varphi : \mathbf{k} \to \mathbf{C}$ diagonalise $\mathbf{A}$. Cela signifie que l'on donne $n!$ caractères $\operatorname{Adu}_{\mathbf{C},\varphi(f)} \to \mathbf{C}$ qui mis ensemble donnent un isomorphisme de $\mathbf{C}$-algèbres de $\operatorname{Adu}_{\mathbf{C},\varphi(f)}$ sur $\mathbf{C}^{n!}$.

Puisqu'il existe un caractère $\operatorname{Adu}_{\mathbf{C},\varphi(f)} \to \mathbf{C}$, le polynôme $\varphi(f)(T)$ se factorise complètement dans $\mathbf{C}$.

Enfin le discriminant de la base canonique de $\operatorname{Adu}_{\mathbf{C},\varphi(f)}$ est $\varphi\big(\operatorname{disc}(f)\big)^{n!/2}$ et le discriminant de la base canonique de $\mathbf{C}^{n!}$ est 1. Donc, f est séparable sur $\mathbf{C}$.

Exercice 7. On a $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]/\langle S_1, \dots, S_n\rangle$ où S_1, …, S_n sont les n fonctions symétriques élémentaires de $(X_1, \dots, X_n)$; l'idéal $\langle S_1, \dots, S_n\rangle$ étant homogène, la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ est graduée (par le degré). On note $\mathbf{A}_d$ sa composante homogène de degré d et $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$; on a donc $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \oplus \mathbf{A}_1 \oplus \mathbf{A}_2 \oplus \dots$ avec $\mathbf{A}_0 = \mathbf{k}$ et :

$$\mathfrak{m}^d = \mathbf{A}_d \oplus \mathbf{A}_{d+1} \oplus \dots, \quad \mathfrak{m}^d = \mathbf{A}_d \oplus \mathfrak{m}^{d+1}.$$

Puisque $x_i^n = 0$, on a $\mathfrak{m}^{n(n-1)+1} = 0$, donc $\mathbf{A}_d = 0$ pour $d \geqslant n(n-1)+1$. On rappelle la base $\mathcal{B}(f)$ de $\mathbf{A}$, formée des $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ avec $0 \leqslant \alpha_i < n - i$. Pour tout d, la composante homogène $\mathbf{A}_d$ de degré d est un $\mathbf{k}$-module libre dont une base est l'ensemble des $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$ avec $0 \leqslant \alpha_i < n - i$ et $|\alpha| = d$. Le cardinal de cette base est le coefficient de degré d dans le polynôme $S(t) \in \mathbb{Z}[t]$:

$$S(t) = 1(1+t)(1+t+t^2)\cdots(1+t+\cdots+t^{n-1}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{t^i - 1}{t-1}.$$

En effet, un multi-indice $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tel que $0 \leqslant \alpha_i < n-i$ et $|\alpha| = d$ s'obtient en choisissant un monôme t^{α_n} du polynôme $1 + t + \cdots + t^{n-1}$, un monôme $t^{\alpha_{n-1}}$ du polynôme $1 + t + \cdots + t^{n-2}$ et ainsi de suite, le produit de ces monômes étant t^d. On obtient ainsi la série d'Hilbert-Poincaré $S_{\mathbf{A}}(t)$ de $\mathbf{A}$:

$$S_{\mathbf{A}}(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_d \; t^d \overset{\text{ici}}{=} \sum_{0 \leqslant \alpha_i < n-i} t^{|\alpha|} = S(t).$$

Le polynôme S est un polynôme unitaire de degré $e = 1 + \cdots + n - 1 = n(n-1)/2$. On a $S(1) = n!$, conforme à $S(1) = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{A}$.

Variante. On pose $\mathbf{B} = \mathbf{k}[S_1, \dots, S_n] \subset \mathbf{C} = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$.
Alors $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{B}$-module libre de base les $\underline{X}^{\alpha} = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n}$ avec $0 \leqslant \alpha_i < n - i$. Cette base est au dessus de la base $\mathcal{B}(f)$ de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}$ si l'on considère que l'on a un diagramme commutatif où chaque flèche verticale est une réduction modulo $\langle S_1, \dots, S_n\rangle$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{B} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow\downarrow \\ \mathbf{k} & \longrightarrow & \mathbf{A} \end{array}$$

On écrit $\mathbf{C} = \bigoplus_{\alpha} \mathbf{B}\underline{X}^{\alpha}$, avec le décalage $S_{\mathbf{B}\underline{X}^{\alpha}}(t) = t^{|\alpha|} S_{\mathbf{B}}(t)$, on a l'égalité suivante entre les séries d'Hilbert-Poincaré :

$$S_{\mathbf{C}} = S_{\mathbf{A}} \; S_{\mathbf{B}} \qquad \text{avec} \qquad S_{\mathbf{A}} = \sum_{0 \leqslant \alpha_i < n-i} t^{|\alpha|}.$$

Or il est facile de voir que

$$S_{\mathbf{C}}(t) = \tfrac{1}{(1-t)^n}, \; S_{\mathbf{B}}(t) = \prod_{d=1}^{n} \tfrac{1}{1-t^d}, \text{ et donc } S_{\mathbf{A}}(t) = \frac{S_{\mathbf{C}}}{S_{\mathbf{B}}} = \prod_{d=1}^{n} \tfrac{1-t^d}{1-t},$$

ce qui donne de nouveau le résultat pour $S_{\mathbf{A}}$.
Passons maintenant aux puissances de l'idéal $\mathfrak{m}$.
Soit $\varphi : \mathbf{A} \twoheadrightarrow \mathbf{k}$ le caractère $x_i \mapsto 0$ de noyau $\mathfrak{m} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$.
On a $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{m}$, $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ et pour $z \in \mathbf{A}$,

$$z \in \mathbf{A}^{\times} \iff \varphi(z) \in \mathbf{k}^{\times} \iff z \in \mathbf{k}^{\times} \oplus \mathfrak{m}.$$

On a $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) = \mathrm{D}_{\mathbf{k}}(0) \oplus \mathfrak{m}$, $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rad}(\mathbf{k}) \oplus \mathfrak{m}$.
Puisque $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ est de type fini, on a

$$\mathfrak{m}^d = \mathfrak{m}^{d+1} \iff \mathfrak{m}^d = 0$$

(lemme IX-3.2), ce qui équivaut, puisque $\mathfrak{m}^d = \mathbf{A}_d \oplus \mathfrak{m}^{d+1}$, à $\mathbf{A}_d = 0$. On en déduit que $\mathfrak{m}^{e+1} = 0$.
Une remarque : si $\mathbf{k}$ est local, alors $\mathbf{A}$ également, et $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} = \varphi^{-1}(\mathrm{Rad}\,\mathbf{k})$.

Exercice 8. On considère l'anneau de polynômes $\mathbf{C} = \mathbf{k}[a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m]$, on pose $f(X) = 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i X^i$, $g(X) = 1 + \sum_{j=1}^{m} b_j X^j$, et $\mathfrak{c} = \mathrm{c}_{\mathbf{C}}(fg - 1)$. On affecte à a_i le poids i et à b_j le poids j. Le coefficient de degré k de $fg - 1$ est homogène de degré k, donc l'idéal $\mathfrak{c}$ est homogène.

On note $\mathbf{C}' = \mathbf{C}/\mathfrak{c}$. Cette $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{C}'$ est graduée via le poids ci-dessus et on doit montrer que $\mathbf{C}'_d = 0$ pour $d > nm$. Il est clair que $\mathbf{C}'_d = 0$ pour d assez grand. On va déterminer la série d'Hilbert-Poincaré $S_{\mathbf{C}'}$ de $\mathbf{C}'$ (qui est ici un polynôme) :

$$S_{\mathbf{C}'}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{d\geqslant 0} \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{C}'_d\, t^d = \frac{\prod_{d=1}^{n+m}(1-t^d)}{\prod_{i=1}^{n}(1-t^i)\prod_{j=1}^{m}(1-t^j)}\ .$$

Pour démontrer cette égalité, on réalise $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}'$ d'une autre manière.
On considère $n+m$ indéterminées $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$, et on note $(a_1,\dots,a_n)$ les fonctions symétriques élémentaires de $(X_1,\dots,X_n)$, et $(b_1,\dots,b_m)$ les fonctions symétriques élémentaires de $(Y_1,\dots,Y_m)$. Puisque
$\prod_{i=1}^{n}(T+X_i)\prod_{j=1}^{m}(T+Y_j) = (T^n + a_1T^{n-1} + \cdots + a_n)(T^m + b_1T^{m-1} + \cdots + b_m)$,
on voit, en posant $a_0 = b_0 = 1$, que $\sum_{i+j=d} a_ib_j$ est la d-ième fonction symétrique élémentaire de $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$. Comme $(a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}$, on peut considérer que $\mathbf{C}$ est la sous-algèbre graduée suivante :

$$\mathbf{C} = \mathbf{k}[a_1,\dots,a_n,b_1,\dots,b_m] \subset \mathbf{D} = \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m],$$

et que l'idéal $\mathfrak{c}$ de $\mathbf{C}$ est engendré par les $n+m$ sommes $\sum_{i+j=d} a_ib_j$, qui sont les fonctions symétriques élémentaires de $(X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_m)$.
L'algèbre $\mathbf{D}$ est libre sur $\mathbf{C}$ de rang $n!m!$, comme pour une double algèbre de décomposition universelle. Plus précisément, voici des bases.
Les $\underline{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1}\cdots X_n^{\alpha_n}$ pour $0 \leqslant \alpha_i < n-i$ forment une base de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ sur $\mathbf{k}[\underline{a}]$.
Les $\underline{Y}^\beta = Y_1^{\beta_1}\cdots Y_m^{\beta_m}$ avec $0 \leqslant \beta_j < m-j$ forment une base de $\mathbf{k}[\underline{Y}]$ sur $\mathbf{k}[\underline{b}]$.
Ainsi, les $\underline{X}^\alpha\underline{Y}^\beta$ forment une base de $\mathbf{D} = \mathbf{k}[\underline{X},\underline{Y}]$ sur $\mathbf{C} = \mathbf{k}[\underline{a},\underline{b}]$.
Enfin, par l'extension des scalaires $\mathbf{C} \to \mathbf{C}' = \mathbf{C}/\mathfrak{c}$, les $\underline{x}^\alpha\underline{y}^\beta$ forment une base de $\mathbf{D}' = \mathbf{D}/\mathfrak{c}\mathbf{D} = \mathbf{k}[\underline{x},\underline{y}]$ sur $\mathbf{C}'$.

On dispose d'un diagramme commutatif où chaque flèche verticale est une réduction modulo $\mathfrak{c}$. Il s'agit de déterminer la série d'Hilbert-Poincaré $S_{\mathbf{C}'}$ de $\mathbf{C}'$ sachant que l'on connait celles de $\mathbf{D}'$, $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ (car $\mathbf{C}$ et $\mathbf{D}$ sont des anneaux de polynômes, et $\mathbf{D}'$ est l'algèbre de décomposition universelle de T^{n+m} sur $\mathbf{k}$).

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{D} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{C}' & \longrightarrow & \mathbf{D}' \end{array}$$

On peut conduire les calculs de la manière simple suivante.
On écrit $\mathbf{D} = \bigoplus_{\alpha,\beta} \mathbf{C}\,\underline{X}^\alpha\underline{Y}^\beta$, donc

$$S_{\mathbf{D}}(t) = F(t)S_{\mathbf{C}}(t) \quad \text{avec} \quad F(t) = \sum_{\alpha,\beta} t^{|\alpha|+|\beta|} = \sum_\alpha t^{|\alpha|}\sum_\beta t^{|\beta|},$$

et l'on a également $S_{\mathbf{D}'}(t) = F(t)S_{\mathbf{C}'}(t)$. On a vu dans l'exercice 7 que :

$$F(t) = \prod_{i=1}^{n}\tfrac{1-t^i}{1-t}\ \prod_{j=1}^{m}\tfrac{1-t^j}{1-t}, \qquad S_{\mathbf{D}'}(t) = \prod_{d=1}^{n+m}\tfrac{1-t^d}{1-t}.$$

On note alors $S_d(t) = (1-t^d)/(1-t)$. C'est un polynôme de degré $d-1$ et $S_d(1) = d$.
On a donc obtenu

$$S_{\mathbf{C}'}(t) = \frac{S_1S_2\cdots S_{n+m}}{S_1S_2\cdots S_n\, S_1S_2\cdots S_m},$$

avec

$$\deg S_{\mathbf{C}'} = \tfrac{(n+m-1)(n+m)-(n-1)n-m(m-1)}{2} = nm.$$

Ainsi, comme souhaité, $\mathbf{C}'_k = 0$ pour $k > nm$.
À noter que $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{C}' = S_{\mathbf{C}'}(1) = \binom{n+m}{n}$.

Exercice 9. Pour chaque $i \in [\![1..p]\!]$ la restriction $\varphi : \mathbf{k}[x_i] \to \mathbf{k}[\alpha]$ est un isomorphisme. Considérons l'idéal

$$\mathfrak{m} = \langle x_i - x_j, i, j \in [\![1..p]\!] \rangle = \langle x_1 - x_i, i \in [\![2..p]\!] \rangle .$$

Alors $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1] \oplus \mathfrak{m}$, d'où $\mathfrak{m} = \operatorname{Ker} \varphi$.
En fait on peut voir $\mathbf{A}$ comme l'algèbre de décomposition universelle $\mathrm{Adu}_{\mathbf{k}[x_1],g}$ pour le polynôme $g(T) = f(T)/(T - x_1) = (T - x_1)^{p-1}$ sur l'anneau $\mathbf{k}[x_1]$ ce qui nous ramène à l'exercice 7. En particulier :

$\mathfrak{m}^{1+(p-1)(p-2)/2} = 0$, $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) = \mathrm{D}_{\mathbf{k}[x_1]}(0) \oplus \mathfrak{m}$ et $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rad}(\mathbf{k}[x_1]) \oplus \mathfrak{m}$.

Exercice 10. *1.* L'opération $b \leftarrow 5b$, $c \leftarrow 4c$ a pour but de remplacer $4^4b^5 + 5^5c^4$ par $4^4 5^5 (b^5 + c^4)$; en imposant $c = \pm b$, on obtient $4^4 5^5 b^4 (b + 1)$ qu'il est facile de rendre carré en imposant $5(b + 1) = a^2$. Pour éviter le dénominateur 5, on impose plutôt $5(b + 1) = (5a)^2$, i.e. $b = 5a^2 - 1$.
2. Pour $a \in \mathbb{Q}^\star$, le polynôme $f_a(T) \in \mathbb{Q}[T]$ est séparable. Modulo les petits nombres premiers on trouve les décompositions de $f_1(T) = T^5 + 20T + 16\varepsilon$, avec $\varepsilon \in \{\pm 1\}$, en facteurs irréductibles suivantes :

$$\begin{array}{lcl} \mod 2 & : & T^5 \\ \mod 3 & : & f_1(T) \\ \mod 5 & : & (T + \varepsilon)^5 \\ \mod 7 & : & (T + 2\varepsilon)(T + 3\varepsilon)(T^3 + 2\varepsilon T^2 + 5T + 5\varepsilon) \end{array}$$

Le résultat modulo 3 prouve que $f_1(T)$ est irréductible sur $\mathbb{Z}$. Son groupe de Galois G est un sous-groupe transitif de A_5 qui contient un 3-cycle (vu la réduction modulo 7). Ceci implique $G = \mathrm{A}_5$. En effet, un sous-groupe transitif de S_5 contenant un 3-cycle est égal à S_5 ou A_5. En ce qui concerne $\mathbb{Q}(a)$ comme corps de base, le polynôme $f_a(T)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[a][T]$ puisque sa réduction modulo $a = 1$ l'est dans $\mathbb{Q}[T]$. Donc il est irréductible dans $\mathbb{Q}(a)[T]$. En utilisant le fait que son discriminant est un carré et la réduction modulo $a = 1$, on obtient que son groupe de Galois est A_5.
Le lecteur pourra se poser la question suivante : est-ce que pour tout $a \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, le polynôme $f_a(T)$ est irréductible de groupe de Galois A_5 ?
Expérimentation posssible.
Voici la répartition des types de permutation des sous-groupes transitifs de S_5. Pour les 7 types qui apparaissent dans S_5, on utilise les notations suivantes :

$t_1 = (1^5)$, $t_2 = (2, 1^3)$, $t_{22} = (2^2, 1)$, $t_3 = (3, 1^2)$, $t_{3,2} = (3, 2)$, $t_4 = (4, 1)$, $t_5 = (5)$.

Ainsi t_{22} est le type des double-transpositions, t_3 celui des 3-cycles, etc... La table annoncée :

G	C_5	$\mathbb{ASL}_1(\mathbb{F}_5)$	$\mathbb{AGL}_1(\mathbb{F}_5)$	A_5	S_5
$\#G$	5	10	20	60	120
	$t_1^1\ t_5^4$	$t_1^1\ t_{22}^5\ t_5^4$	$t_1^1\ t_{22}^5\ t_4^{10}\ t_5^4$	$t_1^1\ t_{22}^{15}\ t_3^{20}\ t_5^{24}$	$t_1^1\ t_2^{10}\ t_{22}^{15}\ t_3^{20}\ t_{32}^{20}\ t_4^{30}\ t_5^{24}$

Par exemple sur la dernière ligne, sous A_5, $t_1^1\ t_{22}^{15}\ t_3^{20}\ t_5^{24}$ signifie que A_5 contient l'identité, 15 double-transpositions, 20 3-cycles et 24 5-cycles ($1+15+20+24 = 60$).
La lectrice pourra tester expérimentalement le théorème de densité de Cebotarev à l'aide d'un système de calcul formel. Il faut examiner la factorisation de $f_1(T)$

modulo « beaucoup » de premiers p et comparer la répartition obtenue des types de factorisation à celle des types de permutation de A_5.
L'auteur de l'exercice a considéré les 120 premiers nombres premiers — autres que 2 et 5 qui divisent $\mathrm{disc}(f_1)$ — et son logiciel a trouvé la répartition suivante :

$$t_{22}^{33}\ t_3^{38}\ t_5^{49}$$

Ceci signifie que l'on a trouvé 33 fois une factorisation de type t_{22} (2 facteurs irréductibles de degré 2, 1 facteur irréductible de degré 1), 38 fois une factorisation de type t_3 et 49 fois une factorisation de type t_5 (pas de factorisation de type t_1). Répartition à comparer avec celle de A_5. Quant au type t_1, le plus petit premier p pour lequel $f_1(T) \bmod p$ est totalement décomposé est $p = 887$. Enfin, en traitant 1200 premiers au lieu de 120, on trouve la répartition :

$$t_1^{16}\ t_{22}^{304}\ t_3^{428}\ t_5^{452}$$

Exercice 11. *1a.* Il faut montrer que $\langle y_1 - a\rangle + \langle y_j - a\rangle = \langle 1\rangle$ pour $j \in [\![2..r]\!]$. Par exemple dans le quotient $\mathbf{B}/\langle y_1 - a, y_2 - a\rangle$ le polynôme $g(T) = \prod(T - y_j)$ a deux facteurs égaux à $T - a$ ce qui implique $g'(a) = 0$. Comme $g'(a)$ est inversible par hypothèse (ce qui reste vrai dans un quotient), on a bien $0 = 1$ dans le quotient.
1b. On voit facilement que $H = \mathrm{St}(y_1)$. Donc H opère sur $\{\beta(y_2), \dots, \beta(y_r)\}$. Or $g(T)/(T - y_1) = \prod_{j=2}^{r}(T - y_j)$ dans $\mathbf{B}$, donc $g(T)/(T - a) = \prod_{j=2}^{r}\big(T - \beta(y_j)\big)$ dans $\mathbf{C}$.
2a. Il est clair que $y_1 - a$ est un diviseur de zéro dans $\mathbf{B}$. Un idéal galoisien minimal $\mathfrak{c}$ contenant $\langle y_1 - a\rangle$ est obtenu en rajoutant le plus possible de conjugués de $\langle y_1 - a\rangle$ sous la condition de ne pas atteindre l'idéal $\langle 1\rangle$. L'idéal $\mathfrak{c}$ est donc de la forme $\langle y_j - a \,|\, j \in J\rangle$ pour une partie J de $[\![1..r]\!]$. Il reste à voir que les j tels que $y_j - a \in \mathfrak{c}$ sont au nombre de k. Or pour tout indice j, l'élément $y_j - a$ est nul ou inversible modulo $\mathfrak{c}$. Puisque $g(T) = \prod_j \big(T - \beta(y_j)\big)$, et puisque a est un zéro de multiplicité k de g, le nombre de j tels que $\beta(y_j) = a$ est égal à k (écrire $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(k-1)}(a) = 0$ et $g^{(k)}(a)$ inversible).
2b. On raisonne comme pour *1b.*
3. Le quotient de Galois $\mathbf{C} = \mathbf{B}/\mathfrak{c}$ est obtenu avec son groupe $H = \mathrm{St}_G(\mathfrak{c})$. Par hypothèse $\overline{y_1} \in \mathrm{Fix}(H)$ donc $\overline{y_1} \in \mathbf{K}$. Notons a l'élément de $\mathbf{K}$ en question. Dans $\mathbf{C}$ on a $g(T) = \prod_j (T - \overline{y_j})$, donc $g(a) = 0$. Enfin $\mathbf{K}$ s'identifie à son image dans $\mathbf{C}$.

Exemple. Voici un exemple avec $\deg f = 6$. On demande à `Magma` de calculer le polynôme minimal de $y = x_4 + x_5x_6$, puis de le factoriser. Si g est le premier facteur, $z = g(y)$ est un diviseur de zéro. On lance l'algorithme 6.5 avec z. On obtient donc les nouvelles approximations du corps de racines et du groupe de Galois en traitant la bizarrerie « z est diviseur de zéro », mais on peut constater a posteriori que z est de multiplicité 6 dans sa résolvante et que $\langle z\rangle$ est galoisien.

```
f:= T^6 - 3*T^5 + 4*T^4 - 2*T^3 + T^2 - T + 1;
y:=x4+x5*x6; pm:=MinimalPolynomial(y);
  T^60 - 46*T^59 + 1035*T^58 - 15178*T^57 + 163080*T^56 + ... + 264613
Factorization(pm);
    <T^6 - 4*T^5 + 8*T^4 - 6*T^3 + T + 1, 1>,
    ...
z:=Evaluate(T^6 - 4*T^5 + 8*T^4 - 6*T^3 + T + 1,y);
20*x4^3*x5^3*x6^3 - 15*x4^3*x5^3*x6^2 - 15*x4^3*x5^2*x6^3 +
```

```
  11*x4^3*x5^2*x6^2 + 2*x4^3*x5^2*x6 + 2*x4^3*x5*x6^2 + x4^3*x5*x6 - ...
// z divise 0, on calcule le nouveau quotient de Galois
Affine Algebra of rank 6 over Rational Field
Variables: x1, x2, x3, x4, x5, x6
Quotient relations:
  x1 + x2 + x3 - x6^5 + 2*x6^4 - x6^3 - x6^2 - 1,
  x2^2 + x2*x3 - x2*x6^5 + 2*x2*x6^4 - x2*x6^3 - x2*x6^2 - x2 + x3^2 -
      x3*x6^5 + 2*x3*x6^4 - x3*x6^3 - x3*x6^2 - x3 + x6^5 - 2*x6^4 +
      x6^3 + x6^2,
  x3^3 - x3^2*x6^5 + 2*x3^2*x6^4 - x3^2*x6^3 - x3^2*x6^2 - x3^2 +
      x3*x6^5 -  2*x3*x6^4 + x3*x6^3 + x3*x6^2 - x6^5 + 2*x6^4 - x6^3 -
      x6^2 + 1,
  x4 + x5 + x6^5 - 2*x6^4 + x6^3 + x6^2 + x6 - 2,
  x5^2 + x5*x6^5 - 2*x5*x6^4 + x5*x6^3 + x5*x6^2 + x5*x6 - 2*x5 -
      x6^4 + 2*x6^3 - x6^2 - x6,
  x6^6 - 3*x6^5 + 4*x6^4 - 2*x6^3 + x6^2 - x6 + 1
Permutation group G2 acting on a set of cardinality 6
Order = 72 = 2^3 * 3^2
    (1, 4)(2, 5)(3, 6)
    (1, 2)
    (2, 3)
Degree(MinimalPolynomial(z)); 55
#Orbite(z,G); 60
```

Exercice 12. On note que les $y_i - y_j$ pour $i \neq j$ sont inversibles, et que ceci reste vrai dans tout quotient de Galois.

Commentaires bibliographiques

Le théorème 1.10 sur le fait qu'un anneau de polynômes sur un anneau zéro-dimensionnel réduit est cohérent fortement discret admet une extension remarquable pour les anneaux de Prüfer cohérents fortement discrets : voir [Yengui] et [70].

Les versions que nous avons données du Nullstellensatz « sans côture algébrique » se trouvent sous une forme voisine dans [MRR, VIII.2.4,VIII.3.3].

La difficulté intrinsèque du problème de l'isomorphisme de deux clôtures algébriques d'un corps est illustrée dans [167, Sander, Theorem 26], qui montre que, en présence du tiers exclu mais en l'absence d'axiome du choix dépendant, il est impossible de démontrer dans ZF que deux clôtures algébriques de $\mathbb{Q}$ sont isomorphes.

Le traitement de la théorie de Galois basé sur les quotients de Galois de l'algèbre de décomposition universelle remonte au moins à Jules Drach [63, 1898] et à Ernest Vessiot [192, 1904]. Voici un extrait de l'introduction de ce dernier article, qui parle dans le langage de l'époque des quotients de Galois de l'algèbre de décomposition universelle :

« Étant donnée une équation algébrique, que l'on considère comme remplacée par le système (S) des relations entre les racines $x_1, \ldots, x_n$ et les coefficients, on étudie d'abord le problème fondamental suivant : *Quel parti*

peut-on tirer de la connaissance de certaines relations (A) *entre* $x_1, \ldots, x_n$*, en n'employant que des opérations rationnelles ?* Nous montrons que l'on peut déduire du système (S, A) un système analogue, dont le système (S, A) admet toutes les solutions, et qui est, comme nous le disons, *automorphe* : ce qui veut dire que ses diverses solutions se déduisent de l'une quelconque d'entre elles par les substitutions d'un groupe G, qui est dit *le groupe associé au système*, ou simplement le *groupe du système*. On remarquera que S est déjà un système automorphe, ayant le groupe général pour groupe associé. Dès lors, si l'on se place du point de vue de Galois, ... on voit que l'on peut se limiter à ne considérer que des systèmes (S, A) rationnels et automorphes. »

L'algèbre de décomposition universelle est traitée de manière assez détaillée dans le chapitre 2 du livre [Pohst & Zassenhaus, 1989].
Parmi les bons exposés modernes qui exposent toute la théorie classique de Galois, on peut citer [Tignol] et [Cox].
La « théorie de Galois dynamique » exposée en détail dans ce chapitre est présentée dans [57, Díaz-Toca] et [61, 62, Díaz-Toca&al.].
Concernant le théorème 4.9 sur les points fixes de S_n dans l'algèbre de décomposition universelle, le cas « f séparable » fait partie du folklore. On le trouve avec une preuve voisine de celle donnée ici dans la thèse de Lionel Ducos [64]. Nous en avons donné une autre preuve dans le théorème III-6.15 pour le cas des corps discrets. Le raffinement que nous donnons se trouve dans [61], il est inspiré de [Pohst & Zassenhaus] (voir le théorème 2.18 page 46, le corollaire 3.6 page 49 et la remarque qui le suit, page 50).
Le théorème 4.15, publié dans [61] sous une hypothèse restrictive, généralise un résultat donné séparément dans le cas de l'algèbre de décomposition universelle sur un corps par L. Ducos [65] et par P. Aubry et A. Valibouze [2]. Notre méthode de preuve se rapproche plus de celle de L. Ducos, mais elle est différente car le cadre est plus général : nous avons à la base un anneau commutatif arbitraire.
Une version voisine du théorème 4.12 se trouve dans [64, lemme II.4.1].

Concernant les méthodes explicites de calcul de groupes de Galois sur $\mathbb{Q}$ récemment développées en calcul formel on pourra consulter [89, Geissler&Klüners].
La méthode modulaire, popularisée par van der Waerden, est due à Dedekind (lettre adressée à Frobenius le 18 juin 1882, voir [20, Brandl]).
Les méthodes de Stauduhar [175] et Soicher-McKay [174] sont basées sur des calculs de résolvantes et sur la connaissance des sous-groupes transitifs des groupes S_n. Ceux-ci ont été tabulés jusqu'à $n = 31$ [107, Hulpke]. Dans la plupart des algorithmes existants le calcul détermine le groupe de Galois d'un polynôme irréductible, sans calculer le corps des racines.
Voir cependant [118, Klüners&Malle] et [2, 145, 188, Valibouze&al.].

Citons par ailleurs le résultat remarquable [122, Landau&Miller] de calculabilité en temps polynomial concernant la résolubilité par radicaux.

Alan Steel [176, 177] s'est inspiré de D5 pour implémenter une très performante clôture algébrique « dynamique » de $\mathbb{Q}$ en `Magma`. L'efficacité tient à ce qu'il n'utilise pas d'algorithme de factorisation des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$, ni de représentation des extensions finies au moyen d'éléments primitifs. Il utilise néanmoins des algorithmes de factorisation modulo p pour contrôler le processus. Le processus est dynamique dans la mesure où la clôture construite progressivement dépend des questions de l'utilisateur. L'auteur ne donne cependant pas (et il ne pourrait pas le faire dans le cadre qu'il se fixe) une implémentation du corps de racines d'un polynôme (disons séparable pour simplifier) sur un corps « général ».

Pour le système de calcul formel `Magma`, voir [19, 28, Bosma&al.].

Chapitre VIII

Modules plats

Sommaire

Introduction

Chers éléments,
si vous n'êtes pas libres,
ce n'est pas de ma faute.
Un module plat.

La platitude est une notion fondamentale de l'algèbre commutative, introduite par Serre dans [170].
Dans ce chapitre nous introduisons les notions de module plat, d'algèbre plate et d'algèbre fidèlement plate et démontrons quelques unes des propriétés essentielles de ces objets.
Un anneau intègre dont les idéaux de type fini sont plats est appelé un domaine de Prüfer. C'est une autre notion fondamentale de l'algèbre commutative. Elle sera seulement introduite ici et sera développée dans le chapitre XII.

1. Premières propriétés

Définition, et propriétés de base

Nous donnons une définition de nature élémentaire et développerons plus loin le rapport avec l'exactitude du foncteur $M \otimes \bullet$.

1.1. Définition. On considère un $\mathbf{A}$-module M.

1. Une *syzygie dans* M est donnée par $L \in \mathbf{A}^{1\times n}$ et $X \in M^{n\times 1}$ qui vérifient $LX = 0$.
2. On dit que *la syzygie* $LX = 0$ *s'explique dans* M si l'on trouve un vecteur $Y \in M^{m\times 1}$ et une matrice $G \in \mathbf{A}^{n\times m}$ qui vérifient :
$$LG = 0 \quad \text{et} \quad GY = X\,. \tag{1}$$
3. Le $\mathbf{A}$-module M est appelé un *module plat* si toute syzygie dans M s'explique dans M. (En langage intuitif : s'il y a une syzygie entre éléments de M ce n'est pas la faute au module.)

Remarques. 1) Dans les points *1* et *2* le symbole 0 est précisé implicitement par le contexte. En *1* il s'agit de 0_M, tandis qu'en *2* il s'agit de $0_{\mathbf{A}^{m\times 1}}$.
2) Dans le point *2*, lorsque l'on dit que la syzygie $LX = 0$ s'explique dans M, on signifie que l'explication «ne touche pas à L». Par contre, les égalités données par l'équation matricielle $LG = 0$ ont lieu dans $\mathbf{A}$ et non dans M.
■

Exemples. 1) Si M est libre fini [1], il est plat : si $LX = 0$, on écrit $X = GY$ avec un vecteur colonne Y qui forme une base, et $LX = 0$ implique $LG = 0$.
2) Si $M = \bigcup_{i\in I} M_i$ avec $\forall i, j \in I,\ \exists k \in I,\ M_k \supseteq M_i \cup M_j$ (on dit alors que M est *réunion filtrante* des M_i), et si chaque M_i est plat, alors M est plat.
3) Soit a un élément régulier dans $\mathbf{A}$, M un $\mathbf{A}$-module et $u \in M$ tels que $au = 0$. Si cette syzygie s'explique dans M, on écrit $u = \sum_i a_i u_i$ ($a_i \in \mathbf{A}$, $u_i \in M$) avec les $aa_i = 0$, donc $u = 0$. Ainsi dans un module plat, tout élément annulé par un élément régulier est nul.
4) (Suite) Le *sous-module de torsion* d'un module M est le module

$$N = \{\, x \in M \mid \exists a \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A}),\ ax = 0 \,\},$$

où $\mathrm{Reg}(\mathbf{A})$ désigne le filtre des éléments réguliers de $\mathbf{A}$. Ce sous-module de torsion est le noyau du morphisme d'extension des scalaires à $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ pour le module M. Le sous-module de torsion d'un module plat est réduit à 0.
Lorsque l'anneau $\mathbf{A}$ *est intègre*, on dit qu'un module est *sans torsion* si son sous-module de torsion est réduit à 0. Sur un anneau de Bézout intègre, ou plus généralement sur un domaine de Prüfer, un module est plat si, et seulement si, il est sans torsion (exercice 1 et théorème XII-3.2 point *2b*). Nous donnons plus loin une généralisation de la notion de module sans torsion pour un anneau commutatif arbitraire (définition 3.3).
5) Nous verrons (proposition 4.2) qu'un idéal de type fini plat $\mathfrak{a}$ est localement principal, ce qui implique $\bigwedge^2 \mathfrak{a} = 0$ (théorème V-7.3). Ainsi, lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau intègre non trivial et $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x, y]$, l'idéal $\mathfrak{a} = \langle x, y\rangle$ est un exemple de $\mathbf{B}$-module sans torsion, mais pas plat (puisque $\bigwedge^2_{\mathbf{B}} \mathfrak{a} = \mathbf{A}$ d'après l'exemple page 208). En fait, la relation $\begin{bmatrix} y & -x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$ ne s'explique pas dans $\mathfrak{a}$, mais dans $\mathbf{B}$. ∎

La proposition qui suit dit que l'«explication» qui est donnée pour la syzygie $LX = 0$ dans la définition d'un module plat s'étend à un nombre fini de syzygies.

1.2. Proposition. *Soit M un $\mathbf{A}$-module plat. On considère une famille de k syzygies, écrites sous la forme $LX = 0$, où $L \in \mathbf{A}^{k\times n}$ et $X \in M^{n\times 1}$. Alors, on peut trouver un entier m, un vecteur $Y \in M^{m\times 1}$ et une matrice G dans $\mathbf{A}^{n\times m}$ satisfaisant les égalités*

$$GY = X \quad \text{et} \quad LG = 0.$$

▷ Notons $L_1, \ldots, L_k$ les lignes de L. La syzygie $L_1X = 0$ est expliquée par deux matrices G_1 et Y_1 et par deux égalités $X = G_1Y_1$ et $L_1G_1 = 0$. La syzygie $L_2X = 0$ se réécrit $L_2G_1Y_1 = 0$ c'est-à-dire $L'_2Y_1 = 0$. Cette syzygie s'explique sous la forme $Y_1 = G_2Y_2$ et $L'_2G_2 = 0$.

1. Ou plus généralement si M est librement engendré par un ensemble discret, c'est-à-dire $M \simeq \mathbf{A}^{(I)} = \bigoplus_{i\in I} \mathbf{A}$ avec I discret. Pour une autre généralisation, voir l'exercice 16.

Donc $X = G_1Y_1 = G_1G_2Y_2$. Avec $L_1G_1G_2 = 0$ et $L_2G_1G_2 = L_2'G_2 = 0$. Le vecteur colonne Y_2 et la matrice $H_2 = G_1G_2$ expliquent donc les deux syzygies $L_1X = 0$ et $L_2X = 0$.
Il ne reste qu'à itérer le processus. □

Une reformulation de la proposition 1.2 dans le langage catégorique est le théorème suivant. La démonstration est un exercice de traduction laissé au lecteur.

1.3. Théorème. (Caractérisation des modules plats, 1)
Pour un $\mathbf{A}$*-module* M *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le module* M *est plat.*
2. *Toute application linéaire d'un module de présentation finie* P *vers* M *se factorise par un module libre de rang fini.*

1.4. Théorème. *Un* $\mathbf{A}$*-module* M *est de présentation finie et plat si, et seulement si, il est projectif de type fini.*

▷ La condition est nécessaire d'après la remarque qui suit. Elle est suffisante, car l'identité de M se factorise par un $\mathbf{A}$-module libre L de rang fini. Alors, la composée $L \to M \to L$ est une projection d'image isomorphe à M. □

Il est immédiat que le $\mathbf{A}$-module $M \oplus N$ est plat si, et seulement si, les modules M et N sont plats.
La proposition qui suit donne un peu mieux (voir aussi le théorème 1.16 et l'exercice 16).

1.5. Proposition. *Soit* $N \subseteq M$ *deux* $\mathbf{A}$*-modules. Si* N *et* M/N *sont plats, alors* M *est plat.*

▷ On écrit $\overline{x}$ pour l'objet x (défini sur M) vu modulo N. Considérons une syzygie $LX = 0$ dans M. Puisque M/N est plat, on obtient G sur $\mathbf{A}$ et Y sur M tels que $LG = 0$ et $G\overline{Y} = \overline{X}$. Considérons le vecteur $X' = X - GY$ sur N. On a $LX' = 0$, et puisque N est plat, on obtient H sur $\mathbf{A}$ et Z sur N tels que $LH = 0$ et $HZ = X - GY$.
Ainsi la matrice $\boxed{\begin{array}{c|c} G & H \end{array}}$ et le vecteur $\boxed{\begin{array}{c} Y \\ \hline Z \end{array}}$ expliquent la relation $LX = 0$. □

1.6. Fait. *Soit* S *un monoïde de l'anneau* $\mathbf{A}$*.*

1. *Le localisé* $\mathbf{A}_S$ *est plat comme* $\mathbf{A}$*-module.*
2. *Si* M *est un* $\mathbf{A}$*-module plat, alors* M_S *est plat comme* $\mathbf{A}$*-module et comme* $\mathbf{A}_S$*-module.*

▷ Il suffit de montrer le point *2*. Si l'on a une syzygie $LX = 0$ dans le $\mathbf{A}$-module M_S, on écrit $X = X'/s$ et l'on a une syzygie $uLX' = 0$ dans M (avec $u, s \in S$). On trouve donc Y' sur M et G sur $\mathbf{A}$ tels que $GY' = X'$

dans M et $uLG = 0$ dans $\mathbf{A}$. Ceci implique pour $Y = Y'/(su)$ l'égalité $uGY = X$ dans M_S, de sorte que uG et Y expliquent la relation $LX = 0$ dans M_S. Démonstration analogue si l'on part d'une syzygie dans M_S vu comme $\mathbf{A}_S$-module. □

Principe local-global

La platitude est une notion locale au sens suivant.

1.7. Principe local-global concret. (Pour les modules plats)
Soient $S_1, \ldots, S_r$ des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$, et soit M un $\mathbf{A}$-module.

1. *Une syzygie $LX = 0$ dans M s'explique dans M si, et seulement si, elle s'explique dans chacun des M_{S_i}.*
2. *Le module M est plat sur $\mathbf{A}$ si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est plat sur $\mathbf{A}_{S_i}$.*

▷ Il suffit de démontrer le premier point. Le «seulement si» est donné par le fait 1.6. Voyons l'autre implication. Soit $LX = 0$ une syzygie entre éléments de M (où $L \in \mathbf{A}^{1\times n}$ et $X \in M^{n\times 1}$). On cherche un entier $m \in \mathbb{N}$, un vecteur $Y \in M^{m\times 1}$ et une matrice $G \in \mathbf{A}^{n\times m}$ qui vérifient l'équation (1). On a une solution (m_i, Y_i, G_i) pour (1) dans chaque localisé $\mathbf{A}_{S_i}$.
On peut écrire $Y_i = Z_i/s_i$, $G_i = H_i/s_i$ avec $Z_i \in M^{m_i\times 1}$, $H_i \in \mathbf{A}^{n\times m_i}$ et des $s_i \in S_i$ convenables. On a alors $u_iH_iZ_i = v_iX$ dans M et $u_iLH_i = 0$ dans $\mathbf{A}$ pour certains u_i et $v_i \in S_i$. On écrit $\sum_{i=1}^r b_iv_i = 1$ dans $\mathbf{A}$. On prend pour G la matrice obtenue en juxtaposant en ligne les matrices $b_iu_iH_i$, et pour Y le vecteur obtenu en superposant en colonne les vecteurs Z_i. On obtient $GY = \sum_{i=1}^r b_iv_iX = X$ dans M, et $LG = 0$ dans $\mathbf{A}$. □

Le principe correspondant en mathématiques classiques est le suivant.

1.8. Principe local-global abstrait*. (Pour les modules plats)

1. *Une syzygie $LX = 0$ dans M s'explique dans M si, et seulement si, elle s'explique dans $M_{\mathfrak{m}}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$.*
2. *Un $\mathbf{A}$-module M est plat si, et seulement si, pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, le module $M_{\mathfrak{m}}$ est plat sur $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$.*

▷ Il suffit de montrer le premier point. Or le fait qu'une syzygie $LX = 0$ puisse être expliquée est une propriété de caractère fini (définition II-2.9). On applique donc le fait II-2.12 qui nous permet de passer du principe local-global concret au principe local-global abstrait correspondant. □

Autres caractérisations de la platitude

Nous allons maintenant considérer des *syzygies sur M à coefficients dans un autre module N* et nous allons montrer que lorsque M est plat, toute syzygie à coefficients dans n'importe quel module N s'explique dans M.

1.9. Définition. Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules.
Pour $L = [\, a_1 \cdots a_n \,] \in N^{1\times n}$ et $X = {}^{t}[\, x_1 \cdots x_n \,] \in M^{n\times 1}$, on note

$$L \odot X \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} a_i \otimes x_i \ \in N \otimes M.$$

1. Si $L \odot X = 0$ on dit que l'on a une syzygie entre les x_i à coefficients dans N.
2. On dit que *la syzygie* $L\odot X = 0$ *s'explique dans* M si l'on a $Y \in M^{m\times 1}$ et une matrice $G \in \mathbf{A}^{n\times m}$ qui vérifient :

$$LG =_{N^{1\times m}} 0 \quad \text{et} \quad X =_{M^{n\times 1}} GY\,. \tag{2}$$

Remarque. 1) Lorsque l'on dit que la syzygie $LX = 0$ s'explique dans M, on signifie que l'explication « ne touche pas à L ».
2) On notera que de manière générale l'égalité $L\odot GY = LG\odot Y$ est assurée pour toute matrice G à coefficients dans $\mathbf{A}$ parce que $a \otimes \alpha y = a\alpha \otimes y$ lorsque $a \in N$, $y \in M$ et $\alpha \in \mathbf{A}$. ∎

1.10. Proposition. *Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules.*
Si M est un $\mathbf{A}$-module plat toute syzygie à coefficients dans N s'explique dans M.

▷ On suppose donnée une syzygie $L \odot X = 0$ avec $L = [\, a_1 \cdots a_n \,] \in N^{1\times n}$ et $X = {}^{t}[\, x_1 \cdots x_n \,] \in M^{n\times 1}$.
Cas où N est libre de rang fini. La proposition 1.2 donne le résultat.
Cas où N est de présentation finie.
On écrit $N = P/R = \mathbf{A}^k/(\mathbf{A}c_1 + \cdots \mathbf{A}c_r)$. Les a_i sont donnés par des b_i de P. La relation $L \odot X = 0$ signifie que $\sum_i b_i \otimes x_i \in R \otimes M \subseteq P \otimes M$, i.e. que l'on a une égalité

$$\textstyle\sum_i b_i \otimes x_i + \sum_\ell c_\ell \otimes z_\ell = 0$$

dans $P \otimes M$. On constate alors que lorsque l'on explique dans M cette syzygie (portant sur les x_i et les z_ℓ) à coefficients dans le module libre P, on explique par la même occasion la syzygie $L \odot X = 0$ à coefficients dans N.
Cas d'un $\mathbf{A}$-module N arbitraire.
Une relation $L \odot X = \sum_i a_i \otimes x_i = 0$ provient d'un calcul fini, dans lequel n'interviennent qu'un nombre fini d'éléments de N et de relations entre ces éléments. Il existe donc un module de présentation finie N', une application linéaire $\varphi : N' \to N$ et des $b_i \in N'$ tels que d'une part $\varphi(b_i) = a_i$ ($i \in [\![1..n]\!]$), et d'autre part $\sum_i b_i \otimes x_i = 0$ dans $N' \otimes M$. On constate alors que lorsque l'on explique dans M cette syzygie à coefficients dans N' (lequel est un module de présentation finie), on explique par la même occasion la syzygie $L \odot X = 0$ à coefficients dans N. □

1.11. Théorème. (Caractérisation des modules plats, 2)
Pour un $\mathbf{A}$*-module* M *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le module* M *est plat.*
2. *Pour tout* $\mathbf{A}$*-module* N*, toute syzygie entre éléments de* M *à coefficients dans* N *s'explique dans* M*.*
3. *Pour tout idéal de type fini* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathbf{A}$ *l'application canonique* $\mathfrak{b} \otimes_{\mathbf{A}} M \to M$ *est injective (ceci établit donc un isomorphisme de* $\mathfrak{b} \otimes_{\mathbf{A}} M$ *sur* $\mathfrak{b}M$*).*
4. *Pour tous* $\mathbf{A}$*-modules* $N \subseteq N'$*, l'application linéaire canonique*
$$N \otimes_{\mathbf{A}} M \to N' \otimes_{\mathbf{A}} M$$
est injective.
5. *Le foncteur* $\bullet \otimes M$ *préserve les suites exactes.*

▷ L'implication *5* $\Rightarrow$ *3* est triviale.
4 $\Rightarrow$ *5.* Les suites exactes courtes sont préservées par le foncteur $\bullet \otimes M$. Or toute suite exacte se décompose en suites exactes courtes (voir page 57).
1 $\Leftrightarrow$ *3.* D'après le lemme du tenseur nul IV-4.14.
1 $\Rightarrow$ *2.* C'est la proposition 1.10.
2 $\Leftrightarrow$ *4.* D'après le lemme du tenseur nul IV-4.14. □

Le théorème précédent admet quelques corollaires importants.

1.12. Corollaire. (Produit tensoriel)
Le produit tensoriel de deux modules plats est un module plat.
▷ Utiliser le point *4* du théorème 1.11. □

1.13. Corollaire. (Autres constructions de base)
Les puissances tensorielles, extérieures et symétriques d'un module plat sont des modules plats.
▷ La démonstration est laissée à la lectrice. □

1.14. Corollaire. (Intersection)
Soient $N_1, \ldots, N_r$ *des sous-modules d'un module* N *et soit* M *un module plat. Puisque* M *est plat, pour tout sous-module* N' *de* N*, identifions* $N' \otimes M$ *avec son image dans* $N \otimes M$*. Alors on a l'égalité*
$$(\textstyle\bigcap_{i=1}^{r} N_i) \otimes M = \bigcap_{i=1}^{r} (N_i \otimes M).$$
▷ La suite exacte $0 \to \bigcap_{i=1}^{r} N_i \to N \to \bigoplus_{i=1}^{r} (N/N_i)$ est préservée par le produit tensoriel avec M et le module $(N/N_i) \otimes M$ s'identifie à $(N \otimes M)/(N_i \otimes M)$. □

1.15. Corollaire. (Extension des scalaires) *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une algèbre. Si M est un $\mathbf{A}$-module plat, alors $\rho_\star(M)$ est un $\mathbf{B}$-module plat.*

ᗡ On note que pour un $\mathbf{B}$-module N, on a

$$N \otimes_{\mathbf{B}} \rho_\star(M) \simeq N \otimes_{\mathbf{B}} \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M \simeq N \otimes_{\mathbf{A}} M.$$

On applique alors le point *4* du théorème 1.11. Notez que le dernier produit tensoriel est muni d'une structure de $\mathbf{B}$-module via N. □

Remarque. Nous venons d'utiliser sans le dire une forme généralisée d'associativité du produit tensoriel dont nous laissons la démonstration au lecteur. C'est la suivante.
Tout d'abord on dit qu'un groupe abélien P est un $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-bimodule s'il est muni de deux lois externes qui en font respectivement un $\mathbf{A}$-module et un $\mathbf{B}$-module, et si ces deux structures sont compatibles au sens suivant : pour tous $a \in \mathbf{A}$, $b \in \mathbf{B}$ et $x \in P$, on a $a(bx) = b(ax)$.
Dans un tel cas, si M est un $\mathbf{B}$-module, alors le produit tensoriel $M \otimes_{\mathbf{B}} P$ peut lui même être muni d'une structure de $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-bimodule en posant, pour $a \in \mathbf{A}$, $a(x \otimes y) =_{M \otimes_{\mathbf{B}} P} x \otimes ay$.
De même, lorsque N est un $\mathbf{A}$-module, le produit tensoriel $P \otimes_{\mathbf{A}} N$ peut lui même être muni d'une structure de $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-bimodule en posant, pour $b \in \mathbf{B}$, $b(y \otimes z) =_{P \otimes_{\mathbf{A}} N} by \otimes z$.
Lemme d'associativité. Sous ces hypothèses, il existe une unique application $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$-linéaire $\varphi : (M \otimes_{\mathbf{B}} P) \otimes_{\mathbf{A}} N \to M \otimes_{\mathbf{B}} (P \otimes_{\mathbf{A}} N)$ qui vérifie

$$\varphi\big((x \otimes y) \otimes z\big) = x \otimes (y \otimes z)$$

pour tous $x \in M$, $y \in P$, $z \in N$. Enfin φ est un isomorphisme. ∎

Quotients plats

1.16. Théorème. (Quotients plats)
Soit M un $\mathbf{A}$-module, K un sous-module et $N = M/K$, avec la suite exacte

$$0 \to K \xrightarrow{\imath} M \xrightarrow{\pi} N \to 0$$

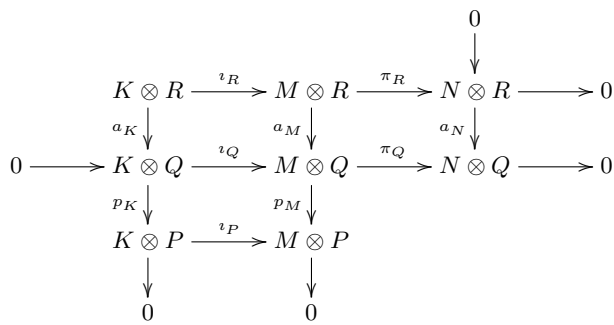
1. *Si N est plat, pour tout module P, la suite*
$$0 \to K \otimes P \xrightarrow{\imath_P} M \otimes P \xrightarrow{\pi_P} N \otimes P \to 0$$
est exacte ($\imath_P = \imath \otimes \mathrm{Id}_P$, $\pi_P = \pi \otimes \mathrm{Id}_P$).
2. *Si N et M sont plats, K est plat.*
3. *Si N et K sont plats, M est plat.*
4. *Si M est plat, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *N est plat.*
   b. *Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{a}M \cap K = \mathfrak{a}K$.*
   c. *Tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ donne une suite exacte*
   $$0 \to K/\mathfrak{a}K \xrightarrow{\imath_\mathfrak{a}} M/\mathfrak{a}M \xrightarrow{\pi_\mathfrak{a}} N/\mathfrak{a}N \to 0.$$

NB : le point *3* a déjà fait l'objet de la proposition 1.5, nous en donnons ici une autre démonstration, laissant à la lectrice le soin de les comparer.

$\mathbb{D}$ *1. Cas où P est de type fini.* On écrit P comme quotient d'un module libre fini Q avec une suite exacte courte

$$0 \to R \xrightarrow{a} Q \xrightarrow{p} P \to 0.$$

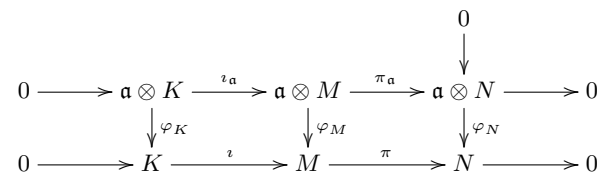
On considère alors le diagramme commutatif suivant dans lequel toutes les suites horizontales et verticales sont exactes parce que N et Q sont plats



On doit montrer que $\imath_P$ est injective. Il s'agit d'un cas particulier du lemme du serpent, on peut le démontrer par une « chasse dans le diagramme ».
On suppose $\imath_P(x) = 0$. On écrit $x = p_K(y)$ et $v = \imath_Q(y)$. On a $p_M(v) = 0$, donc on écrit $v = a_M(z)$.
Comme $\pi_Q(v) = 0$, on a $a_N(\pi_R(z)) = 0$, donc $\pi_R(z) = 0$.
Donc on écrit $z = \imath_R(u)$ et l'on a

$$\imath_Q(a_K(u)) = a_M(\imath_R(u)) = a_M(z) = v = \imath_Q(y),$$

et comme $\imath_Q$ est injective, $y = a_K(u)$, d'où $x = p_K(y) = p_K(a_K(u)) = 0$.
Cas général. Une possibilité est d'écrire P comme quotient d'un module plat Q (voir à ce sujet l'exercice 16) auquel cas la démonstration précédente est inchangée. On peut aussi se passer de cette construction un peu lourde comme suit. Montrons que $\imath_P$ est injective. Soit $x = \sum_i x_i \otimes y_i \in K \otimes P$ tel que $\imath_P(x) =_{M\otimes P} 0$, i.e. $\sum_i x_i \otimes y_i =_{M\otimes P} 0$.
D'après la définition du produit tensoriel, il existe un sous-module de type fini $P_1 \subseteq P$ tel que l'on a aussi $\sum_i x_i \otimes y_i =_{M\otimes P_1} 0$. D'après le cas déjà examiné, on a $\sum_i x_i \otimes y_i =_{K\otimes P_1} 0$, et ceci implique $\sum_i x_i \otimes y_i =_{K\otimes P} 0$.
2 et *3.* Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini arbitraire. Puisque N est plat, on a d'après le point *1* un diagramme commutatif avec suites exactes



Si M est plat, φ_M est injective, donc aussi $\varphi_M \circ \imath_{\mathfrak{a}}$, puis φ_K. On conclut par le point *3* du théorème 1.11 que K est plat.
Si K est plat, φ_K est injective et une petite chasse dans le diagramme montre que φ_M est injective. Soit $x \in \mathfrak{a} \otimes M$ avec $\varphi_M(x) = 0$.
Comme $\varphi_N(\pi_{\mathfrak{a}}(x)) = 0$, on a $\pi_{\mathfrak{a}}(x) = 0$ et l'on peut écrire $x = \imath_{\mathfrak{a}}(y)$.
Alors $\imath(\varphi_K(y)) = \varphi_M(x) = 0$, donc $y = 0$, donc $x = 0$.
4a $\Rightarrow$ *4b*. Puisque M et N sont plats, K l'est également et la ligne du haut du diagramme précédent donne la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{a}K \xrightarrow{\imath|_{\mathfrak{a}K}} \mathfrak{a}M \xrightarrow{\pi|_{\mathfrak{a}M}} \mathfrak{a}N \to 0. \qquad (+)$$

Or le noyau de $\pi|_{\mathfrak{a}M}$ est par définition $\mathfrak{a}M \cap K$.
4b $\Leftrightarrow$ *4c*. La suite

$$0 \to K/\mathfrak{a}K \xrightarrow{\imath_{\mathfrak{a}}} M/\mathfrak{a}M \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{a}}} N/\mathfrak{a}N \to 0$$

est obtenue à partir de la suite exacte $0 \to K \to M \to N$ par extension des scalaires à $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$. Dire qu'elle est exacte revient à dire que $\imath_{\mathfrak{a}}$ est injective. Or un élément $\overline{x} \in K/\mathfrak{a}K$ est envoyé sur 0 si, et seulement si, on a $x \in \mathfrak{a}M \cap K$.
4b $\Rightarrow$ *4a*. Puisque $\mathfrak{a}K = \mathfrak{a}M \cap K$ la suite $(+)$ est exacte. On considère le diagramme commutatif suivant avec suites exactes, pour lequel il nous faut montrer que φ_N est injective.

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathfrak{a}\otimes K & \xrightarrow{\imath_{\mathfrak{a}}} & \mathfrak{a}\otimes M & \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{a}}} & \mathfrak{a}\otimes N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_K} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_M} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_N} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathfrak{a}K & \xrightarrow{\imath|_{\mathfrak{a}K}} & \mathfrak{a}M & \xrightarrow{\pi|_{\mathfrak{a}M}} & \mathfrak{a}N & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Ceci résulte d'une petite chasse dans le diagramme.
Si $\varphi_N(x) = 0$, on écrit $x = \pi_{\mathfrak{a}}(y)$. Comme $\pi\,|_{\mathfrak{a}M}(\varphi_M(y)) = 0$, on a $z \in \mathfrak{a}K$ tel que $\varphi_M(y) = \imath\,|_{\mathfrak{a}K}(z)$, on écrit $z = \varphi_K(u)$, avec $\varphi_M(\imath_{\mathfrak{a}}(u)) = \varphi_M(y)$.
Et comme φ_M est injective, $y = \imath_{\mathfrak{a}}(u)$ et $x = \pi_{\mathfrak{a}}(y) = 0$. □

1.17. Corollaire. (Une algèbre plate) *Soit* $f \in \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ *et* $\mathbf{A}[\underline{x}] = \mathbf{A}[\underline{X}]/\langle f\rangle$. *Alors, le* $\mathbf{A}$*-module* $\mathbf{A}[\underline{x}]$ *est plat si, et seulement si,* $\mathrm{c}(f)^2 = \mathrm{c}(f)$, *c'est-à-dire si, et seulement si, l'idéal* $\mathrm{c}(f)$ *est engendré par un idempotent.*

D Le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}[\underline{x}]$ est plat si, et seulement si, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ on a $\boxed{\langle f\rangle \cap \mathfrak{a}[\underline{X}] = f\mathfrak{a}[\underline{X}]}$.
Si $\mathbf{A}[\underline{x}]$ est plat, on obtient en particulier pour $\mathfrak{a} = \mathrm{c}(f)$, que $\mathrm{c}(f)^2 = \mathrm{c}(f)$ (car $f \in \langle f\rangle \cap \mathfrak{a}[\underline{X}]$).
Réciproquement, supposons $\mathrm{c}(f)^2 = \mathrm{c}(f)$ et montrons que $\mathbf{A}[\underline{x}]$ est plat. L'idempotent e tel que $\langle e\rangle = \langle \mathrm{c}(f)\rangle$ scinde l'anneau en deux composantes.

Dans la première on a $f = 0$, et le résultat est clair. Dans la seconde, f est primitif. On suppose maintenant f primitif.
D'après le lemme de Dedekind-Mertens [2], pour tout $\mathbf{A}$-module M l'application $\mathbf{A}$-linéaire $M[\underline{X}] \xrightarrow{\times f} M[\underline{X}]$ est injective. Appliqué à $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$, cela donne l'encadré. En effet, écrivons $M[\underline{X}] = \mathbf{A}[\underline{X}]/\mathfrak{a}[\underline{X}]$ et supposons que $g \in \langle f \rangle \cap \mathfrak{a}[\underline{X}]$. Alors $g = fh$ pour un $h \in \mathbf{A}[\underline{X}]$, et $\overline{h}$ est dans le noyau de $\mathbf{A}[\underline{X}]/\mathfrak{a}[\underline{X}] \xrightarrow{\times f} \mathbf{A}[\underline{X}]/\mathfrak{a}[\underline{X}]$, donc $\overline{h} = 0$, i.e. $h \in \mathfrak{a}[\underline{X}]$, et $g \in f\mathfrak{a}[\underline{X}]$. □

2. Modules plats de type fini

Dans le cas des modules de type fini, la platitude est une propriété de nature plus élémentaire.

2.1. Lemme. *On considère un $\mathbf{A}$-module M de type fini, et $X \in M^{n\times 1}$ un vecteur colonne dont les coordonnées x_i engendrent M. Le module M est plat si, et seulement si, pour toute syzygie $LX = 0$ (où $L \in \mathbf{A}^{1\times n}$), on peut trouver deux matrices G, $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ qui satisfont les égalités*

$$H + G = \mathrm{I}_n, \quad LG = 0 \ \text{ et } \ HX = 0.$$

En particulier, un module monogène $M = \mathbf{A}y$ est plat si, et seulement si,

$$\forall a \in \mathbf{A}, \, (\, ay = 0 \implies \exists s \in \mathbf{A}, \ \ as = 0 \quad et \quad sy = y \,).$$

Remarque. La symétrie entre L et X dans l'énoncé n'est qu'apparente : le module M est engendré par les coordonnées de X, alors que l'anneau $\mathbf{A}$ n'est pas engendré (comme sous-module) par les coordonnées de L. ∎

▷ On ramène une syzygie arbitraire $L'X' = 0$ à une syzygie $LX = 0$ en exprimant X' en fonction de X. A priori on devrait écrire X sous forme G_1Y avec $LG_1 = 0$.
Comme $Y = G_2X$, on prend $G = G_1G_2$ et $H = \mathrm{I}_n - G$. □

Remarque. Pour les modules monogènes, en posant $t = 1 - s$, on obtient des conditions sur t plutôt que sur s :

$$a = at \qquad \text{et} \qquad ty = 0,$$

ce qui implique que l'annulateur $\mathfrak{a}$ de y vérifie $\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}$. En fait, d'après le théorème 1.16, $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est plat sur $\mathbf{A}$ si, et seulement si, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{b}$ on a l'égalité $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. ∎

Nous pouvons donner une généralisation du lemme 2.1 exactement dans le style de la proposition 1.2.

2. En fait, il s'agit d'une variante, avec essentiellement la même démonstration, que nous laissons au lecteur.

2.2. Proposition. *Soit M un $\mathbf{A}$-module plat de type fini, et $X \in M^{n\times 1}$ un vecteur colonne qui engendre M. Soit une famille de k syzygies écrites sous la forme $LX = 0$ où $L \in \mathbf{A}^{k\times n}$ et $X \in M^{n\times 1}$. Alors, on peut trouver une matrice $G \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ qui vérifie les égalités*

$$LG = 0 \quad et \quad GX = X.$$

D Identique à la preuve de la proposition 1.2. □

Un substitut constructif pour la propriété selon laquelle tout espace vectoriel sur un corps admet une base (vraie seulement en mathématiques classiques) est le fait que tout espace vectoriel sur un corps discret est plat. Précisément on a le résultat suivant.

2.3. Théorème. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Tout $\mathbf{A}$-module $\mathbf{A}/\langle a\rangle$ est plat.*
2. *Tout $\mathbf{A}$-module est plat.*
3. *L'anneau $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit.*

D *1 ⇒ 3.* Si $\mathbf{A}/\langle a\rangle$ est plat, alors $\langle a\rangle = \langle a\rangle^2$ et si c'est vrai pour tout a, c'est que $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit.
3 ⇒ 2. Traitons d'abord le cas d'un corps discret.
On considère une syzygie $LX = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ pour des éléments x_1, …, x_n d'un $\mathbf{A}$-module M. Si tous les a_i sont nuls la relation est expliquée avec $Y = X$ et $G = \mathrm{I}_n$: $LG = 0$ et $GY = X$. Si un des a_i est inversible, par exemple a_1, posons $b_j = -a_1^{-1}a_j$ pour $j \neq 1$. On a $x_1 = b_2x_2 + \cdots + b_nx_n$ et $a_1b_j + a_j = 0$ pour $j > 1$. La syzygie est expliquée par $Y = {}^{\mathrm{t}}[\, x_2 \ \cdots \ x_n\,]$ et par la matrice G suivante, car $LG = 0$ et $GY = X$:

$$G = \begin{bmatrix} b_2 & b_3 & \cdots & b_n \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour un anneau zéro-dimensionnel réduit, on applique la machinerie locale-globale élémentaire n°2 qui nous ramène au cas d'un corps discret. □

NB : ceci justifie la terminologie « absolument plat » pour zéro-dimensionnel réduit.

2.4. Lemme. *Même contexte que dans le lemme 2.1. Si $\mathbf{A}$ est un anneau local et M est plat, on obtient sous l'hypothèse $LX = 0$ l'alternative suivante : le vecteur L est nul, ou l'un des x_i dépend linéairement des autres (il peut donc être supprimé dans la liste des générateurs de M).*

D C'est un « truc du déterminant ». On note que $\det(G) = \det(\mathrm{I}_n - H)$ s'écrit $1 + \sum_{i,j} b_{i,j}h_{i,j}$. Donc $\det(G)$ ou l'un des $h_{i,j}$ est inversible. Dans

le premier cas $L = 0$; dans le deuxième cas, puisque $HX = 0$, l'un des vecteurs x_i s'exprime en fonction des autres. □

La même démonstration dans le cas d'un anneau arbitraire donne le résultat suivant.

2.5. Lemme. *Même contexte que dans le lemme 2.1.*
Si M est plat et $LX = 0$, il existe des éléments comaximaux $s_1, \ldots, s_\ell$ tels que sur chacun des anneaux $\mathbf{A}[1/s_j]$ on a $L = 0$, ou l'un des x_i est une combinaison linéaire des autres.

En mathématiques classiques, le lemme 2.4 implique le fait suivant.

2.6. Fait*. *Un module plat de type fini sur un anneau local est libre et une base peut être extraite de n'importe quel système générateur.*

Et à partir du lemme 2.5, on obtient ce qui suit.

2.7. Fait*. *Un module plat de type fini sur un anneau intègre est projectif de type fini.*

Voici une version constructive du fait* 2.6.

2.8. Proposition. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau local et M un $\mathbf{A}$-module de type fini plat engendré par $(x_1, \ldots, x_n)$. Supposons que M soit fortement discret ou que l'existence de syzygies non triviales soit explicite dans M. Alors, M est librement engendré par une suite finie $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ (avec $k \geqslant 0$).*

D Supposons d'abord que M soit fortement discret, on peut alors trouver une suite finie d'entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ (où $k \geqslant 0$) telle qu'aucun des x_{i_ℓ} ne soit une combinaison linéaire des autres, et $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$ engendre M. Pour simplifier les notations, on suppose donc désormais que $k = n$, i.e., aucun des x_i n'est combinaison linéaire des autres. Le lemme 2.4 nous dit alors que toute syzygie entre les x_i est triviale.
Supposons maintenant que l'existence de syzygies non triviales soit explicite dans M, c'est-à-dire que pour toute famille d'éléments de M, on sache dire s'il y a une syzygie non triviale entre ces éléments et en fournir une le cas échéant. Alors, en utilisant le lemme 2.4 on peut supprimer un à un les éléments superflus dans la famille (x_i) sans changer le module M, jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une sous-famille sans syzygie non triviale (un cas limite est fourni par la partie vide lorsque le module est nul). □

Commentaire. Notez que la preuve utilise l'hypothèse « M est fortement discret », ou « l'existence de syzygies non triviales est explicite dans M » uniquement avec des familles extraites du système générateur (x_i). Par ailleurs, chacune de ces hypothèses est trivialement vraie en mathématiques classiques. ■

Voici maintenant une version constructive du fait* 2.7.

2.9. Proposition. *Soit* **A** *un anneau intègre et* M *un* **A***-module de type fini plat engendré par* $(x_1, \dots, x_n)$*. Supposons que pour toute partie finie* J *de* $[\![1..n]\!]$ *l'existence de syzygies non triviales entre* $(x_j)_{j\in J}$ *soit explicite dans* M *(autrement dit, en passant au corps des fractions on obtient un espace vectoriel de dimension finie). Alors,* M *est projectif de type fini.*

D On suppose sans perte de généralité **A** non trivial, en utilisant le lemme 2.5 on obtient l'alternative suivante. Ou bien $(x_1, \dots, x_n)$ est une base, ou bien après localisation en des éléments comaximaux le module est engendré par $n-1$ des x_j. On conclut par récurrence sur n : en effet, les syzygies après localisation en s avec $s \neq 0$ sont les mêmes que celles sur **A**.
Notez que pour $n = 1$, ou bien (x_1) est une base, ou bien $x_1 = 0$. □

3. Idéaux principaux plats

Un anneau **A** est dit *sans diviseur de zéro* si l'on a :

$$\forall a, b \in \mathbf{A} \quad \big(ab = 0 \ \Rightarrow\ (a = 0 \text{ ou } b = 0)\big) \tag{3}$$

Un anneau intègre (en particulier un corps discret) est sans diviseur de zéro. Un anneau discret sans diviseur de zéro est intègre. Un anneau non trivial est intègre si, et seulement si, il est discret et sans diviseur de zéro.

3.1. Lemme. (Quand un idéal principal est plat)

1. *Un idéal principal, ou plus généralement un* **A***-module monogène* $\mathbf{A}a$*, est un module plat si, et seulement si,*
$$\forall x \in \mathbf{A} \quad \big(xa = 0 \ \Rightarrow\ \exists z \in \mathbf{A}\ (za = 0 \ \textit{ et } \ xz = x)\big).$$
2. *Si* **A** *est local, un* **A***-module* $\mathbf{A}a$ *est plat si, et seulement si,*
$$\forall x \in \mathbf{A} \quad \big(xa = 0 \ \Rightarrow\ (x = 0 \ \textit{ ou } \ a = 0)\big).$$
3. *Soit* **A** *un anneau local, si* **A** *est discret, ou si l'on a un test pour répondre à la question «*x *est-il régulier ?», alors, un idéal* $\langle a\rangle$ *est plat si, et seulement si,* a *est nul ou régulier.*
4. *Pour un anneau local,* **A** *les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *Tout idéal principal est plat.*
   b. *L'anneau est sans diviseur de zéro.*

D Le lemme 2.1 donne le point *1.* Le calcul pour le point *2* en résulte, car z ou $1 - z$ est inversible. La suite est claire. □

On a de même les équivalences suivantes.

3.2. Lemme. *Pour un anneau* $\mathbf{A}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Tout idéal principal de* $\mathbf{A}$ *est plat.*
2. *Si* $xy = 0$*, on a* $\operatorname{Ann} x + \operatorname{Ann} y = \mathbf{A}$.
3. *Si* $xy = 0$*, il existe des monoïdes comaximaux* S_i *tels que dans chacun des localisés* $\mathbf{A}_{S_i}$*,* x *ou* y *devient nul.*
4. *Si* $xy = 0$*, il existe* $z \in \mathbf{A}$ *avec* $zy = 0$ *et* $xz = x$.
5. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{A}$, $\quad \operatorname{Ann} xy = \operatorname{Ann} x + \operatorname{Ann} y$.

La propriété pour un anneau d'être sans diviseur de zéro se comporte mal par recollement et celle pour un module d'être plat se comporte bien par localisation et recollement. Cela justifie la définition suivante.

3.3. Définition.

1. Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *localement sans diviseur de zéro* lorsqu'il vérifie les propriétés équivalentes du lemme 3.2.
2. Un $\mathbf{A}$-module M est dit *sans torsion* lorsque tous ses sous-modules monogènes sont plats (voir le lemme 3.1).

Remarques.
1) Le sous-module de torsion d'un module sans torsion est réduit à 0. Notre définition est donc un peu plus contraignante que celle, plus usuelle, qui dit qu'un module est sans torsion lorsque son module de torsion est réduit à 0. On notera que les deux définitions coïncident lorsque l'anneau $\mathbf{A}$ est quasi intègre.
2) Tout sous-module d'un module sans torsion est sans torsion, ce qui n'est pas le cas en général lorsque l'on remplace « sans torsion » par « plat ».
3) Un anneau localement sans diviseur de zéro est réduit.
4) Dans la littérature de langue anglaise, on trouve parfois l'appellation « pf-ring » (principal ideals are flat) pour un anneau localement sans diviseur de zéro.
5) Un anneau local est localement sans diviseur de zéro si, et seulement si, il est sans diviseur de zéro.
6) Le corps des réels *n'est pas* sans diviseur de zéro (*ni* localement sans diviseur de zéro) : c'est un anneau local pour lequel on ne sait pas réaliser explicitement l'implication (3) page 464.
7) En mathématiques classiques un anneau est localement sans diviseur de zéro si, et seulement si, il devient intègre après localisation en tout idéal premier (exercice 4). ∎

3.4. Lemme. *Soit* **A** *un anneau localement sans diviseur de zéro et* M *un module plat sur* **A**.

1. *Le module* M *est sans torsion.*
2. *L'annulateur* $(0 : y)$ *de n'importe quel* $y \in M$ *est idempotent.*

1. Supposons $ay = 0$, $a \in \mathbf{A}$, $y \in M$. Puisque M est plat on a des éléments x_i de M, des éléments b_i de **A**, et une égalité $y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ dans M, avec $ab_i = 0$ ($i \in [\![1..n]\!]$) dans **A**.
Pour chaque i, puisque $ab_i = 0$, il existe c_i tel que $ac_i = a$ et $c_i b_i = 0$. On pose $c = c_1 \cdots c_n$. Alors, $a = ca$ et $cy = 0$.
2. En effet, lorsque $ay = 0$, alors $a = ca$ avec $c \in (0 : y)$. □

En utilisant le point *2* du lemme 3.4 et le fait qu'un idéal de type fini idempotent est engendré par un idempotent (lemme II-4.6) on obtient le résultat qui suit.

3.5. Fait. *Soit* **A** *un anneau dans lequel l'annulateur de tout élément est de type fini.*

1. **A** *est localement sans diviseur de zéro si, et seulement si, il est quasi intègre.*
2. **A** *est sans diviseur de zéro si, et seulement si, il est intègre.*

En particulier, un anneau cohérent localement sans diviseur de zéro est quasi intègre.

On notera que le point *2* est évident en mathématiques classiques, où l'hypothèse « l'annulateur de tout élément est de type fini » est superflue.

4. Idéaux plats de type fini

On étudie maintenant la platitude pour les idéaux de type fini. En mathématiques classiques, la proposition suivante est un corollaire immédiat de la proposition 2.8. En mathématiques constructives, il est nécessaire de fournir une nouvelle preuve, qui donne des informations algorithmiques de nature différente de celles données dans la preuve de la proposition 2.8. En effet, on ne fait plus les mêmes hypothèses concernant le caractère discret des choses.

4.1. Proposition. (Idéaux de type fini plats sur un anneau local)
Soit **A** *un anneau local,* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.

1. *Si* $\mathfrak{a}$ *est principal, il est engendré par l'un des* x_j. (Bézout toujours trivial sur un anneau local).
2. *Si* $\mathfrak{a}$ *est plat, il est principal, engendré par l'un des* x_j.

3. Supposons que **A** *soit discret, ou que l'on ait un test pour répondre à la question «* x *est-il régulier ?». Alors, un idéal de type fini est plat si, et seulement si, il est libre de rang* 0 *ou* 1.

▷ *1.* On a $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle = \langle z\rangle$, $z = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$, $zb_j = x_j$, donc $z(1 - \sum_j a_jb_j) = 0$. Si $1 - \sum_j a_jb_j$ est inversible, $\mathfrak{a} = 0 = \langle x_1\rangle$. Si a_jb_j est inversible $\mathfrak{a} = \langle x_j\rangle$.
2. On considère la syzygie $x_2x_1 + (-x_1)x_2 = 0$. Soit $G = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$ une matrice telle que $G \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ et $[\, x_2 \ -x_1 \,]\, G = [\, 0 \ 0 \,]$.
Si a_1 est inversible, l'égalité $a_1x_2 = b_1x_1$ montre que $\mathfrak{a} = \langle x_1, x_3, \dots, x_n\rangle$.
Si $1 - a_1$ est inversible, l'égalité $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = x_1$ montre que l'on a $\mathfrak{a} = \langle x_2, x_3, \dots, x_n\rangle$.
On termine par récurrence sur n.
3. Résulte de *2* et du lemme 3.1, point *3*. □

Rappelons qu'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ d'un anneau **A** est dit *localement principal* s'il existe des monoïdes comaximaux S_1, …, S_n de **A** tels que chaque $\mathfrak{a}_{S_j}$ est principal dans $\mathbf{A}_{S_j}$. La proposition qui suit montre que *tout idéal de type fini plat est localement principal.* Sa démonstration est directement issue de celle donnée dans le cas local.

4.2. Proposition. (Idéaux de type fini plats sur un anneau quelconque) *Tout idéal de type fini plat est localement principal. Plus précisément, si* $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle \subseteq \mathbf{A}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est un module plat.*
2. *Après localisation en des monoïdes comaximaux convenables, l'idéal* $\mathfrak{a}$ *est plat et principal.*
3. *Après localisation en des éléments comaximaux convenables, l'idéal* $\mathfrak{a}$ *est plat et principal, engendré par l'un des* x_i*.*

▷ On a évidemment *3* ⇒ *2*. On a *2* ⇒ *1* par le principe local-global 1.7. Pour montrer *1* ⇒ *3* on reprend la preuve du point *2* de la proposition 4.1. On considère la syzygie $x_2x_1 + (-x_1)x_2 = 0$. Soit $G = \begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$ une matrice telle que $G \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ et $[\, x_2 \ -x_1 \,]\, G = [\, 0 \ 0 \,]$. Avec le localisé $\mathbf{A}[1/a_1]$ l'égalité $a_1x_2 = b_1x_1$ montre que $\mathfrak{a} =_{\mathbf{A}[1/a_1]} \langle x_1, x_3, \dots, x_n\rangle$. Avec le localisé $\mathbf{A}[1/(1-a_1)]$ l'égalité $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = x_1$ montre que $\mathfrak{a} =_{\mathbf{A}[1/(1-a_1)]} \langle x_2, x_3, \dots, x_n\rangle$. On termine par récurrence sur n. □

Anneaux arithmétiques et anneaux de Prüfer

La définition suivante des anneaux de Prüfer, basée sur la platitude, est due à Hermida et Sánchez-Giralda [101].

4.3. Définition. *(Anneaux arithmétiques)* Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *arithmétique* si tout idéal de type fini est localement principal.

4.4. Proposition et définition. (Anneaux de Prüfer)
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- *1a. Tout idéal de type fini de* $\mathbf{A}$ *est plat.*
- *1b. Tout idéal de* $\mathbf{A}$ *est plat.*
- *1c. Pour tous idéaux de type fini* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathbf{A}$*, l'application linéaire canonique* $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{b} \to \mathfrak{ab}$ *est un isomorphisme.*
- *2a. L'anneau* $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro et arithmétique.*
- *2b. L'anneau* $\mathbf{A}$ *est réduit et arithmétique.*

Un anneau vérifiant ces propriétés est appelé anneau de Prüfer.

▷ L'équivalence entre *1a* et *1c* est donnée par le théorème 1.11 (point *3*). L'équivalence de *1a* et *1b* est immédiate. On sait déjà que *1a* $\Rightarrow$ *2a*, et l'implication *2a* $\Rightarrow$ *2b* est claire.
2b $\Rightarrow$ *2a.* Soient x, y tels que $xy = 0$. Il existe s, t avec $s + t = 1$, $sx \in \langle y \rangle$ et $ty \in \langle x \rangle$. Donc $sx^2 = 0$ et $ty^2 = 0$ puis ($\mathbf{A}$ réduit) $sx = ty = 0$.
2a $\Rightarrow$ *1a.* Après des localisations convenables, l'idéal devient principal, et donc plat, puisque l'anneau est localement sans diviseur de zéro. On termine par le principe local-global 1.7 pour les modules plats. □

Principe local-global

Différentes notions introduites précédemment sont locales au sens du principe local-global concret suivant. Les preuves sont basées sur le principe local-global de base et laissées à la lectrice.

4.5. Principe local-global concret. (Anneaux arithmétiques)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ *des monoïdes comaximaux d'un anneau* $\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$*. On a les équivalences suivantes.*

1. *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est localement principal si, et seulement si, chacun des* $\mathfrak{a}_{S_i}$ *est localement principal.*
2. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro si, et seulement si, chacun des* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est localement sans diviseur de zéro.*
3. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est arithmétique si, et seulement si, chacun des* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est arithmétique.*
4. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est un anneau de Prüfer si, et seulement si, chacun des* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est un anneau de Prüfer.*

Machinerie locale-globale

Un ensemble ordonné $(E, \leqslant)$ est dit *totalement ordonné* si pour tous x, y on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. A priori on ne le suppose pas discret et l'on n'a donc pas de test pour l'inégalité stricte.
Pour les anneaux locaux, la proposition 4.1 donne le résultat suivant.

4.6. Lemme. (Anneaux arithmétiques locaux)

1. *Un anneau* $\mathbf{A}$ *est local et arithmétique si, et seulement si, pour tous* a, $b \in \mathbf{A}$, *on a :* $a \in b\mathbf{A}$ *ou* $b \in a\mathbf{A}$. *De manière équivalente, tout idéal de type fini est principal et l'ensemble des idéaux de type fini est totalement ordonné pour l'inclusion.*
2. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau arithmétique local. Pour deux idéaux arbitraires* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$, *si* $\mathfrak{a}$ *n'est pas contenu dans* $\mathfrak{b}$, *alors* $\mathfrak{b}$ *est contenu dans* $\mathfrak{a}$. *Donc en mathématiques classiques, «l'ensemble» de tous les idéaux est totalement ordonné pour l'inclusion.*

Ainsi, les anneaux locaux arithmétiques sont la même chose que les anneaux de Bézout locaux. Ils ont déjà été étudiés dans la section IV-7 page 220.
La facilité à démontrer des propriétés pour les anneaux arithmétiques tient en grande partie à la machinerie locale-globale suivante.

Machinerie locale-globale des anneaux arithmétiques
Lorsque l'on doit prouver une propriété concernant un anneau arithmétique et qu'une famille finie d'éléments (a_i) *de l'anneau intervient dans le calcul, on commence par démontrer le résultat dans le cas local. On peut donc supposer que les idéaux* $\langle a_i \rangle$ *sont totalement ordonnés par inclusion. Dans ce cas la preuve est en général très simple. Par ailleurs, puisque l'anneau est arithmétique, on sait que l'on peut se ramener à la situation précédente après localisation en un nombre fini d'éléments comaximaux. On peut donc conclure si la propriété à démontrer obéit à un principe local-global concret.*

Voici une application de cette machinerie.

4.7. Proposition. (Idéaux déterminantiels sur un anneau arithmétique)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau arithmétique cohérent,* M *une matrice* $\in \mathbf{A}^{n\times m}$.
Notons $\mathfrak{d}_k = \mathcal{D}_{\mathbf{A},k}(M)$ *les idéaux déterminantiels de* M [3]. *Il existe des idéaux de type fini* $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p$ *vérifiant*

$$\mathfrak{d}_1 = \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{d}_2 = \mathfrak{d}_1\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2,\ \mathfrak{d}_3 = \mathfrak{d}_2\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{a}_3,\ \ldots$$

▷ Soit $\mathfrak{b}_k = (\mathfrak{d}_k : \mathfrak{d}_{k-1})$ pour tout k, puis $\mathfrak{c}_k = \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_k$ et $\mathfrak{a}_k = (\mathfrak{c}_k : \mathfrak{c}_{k-1})$ pour $k \geqslant 1$. Ce sont tous les idéaux de type fini. On a $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{d}_1$, puis $\mathfrak{b}_k\mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$ et $\mathfrak{a}_k\mathfrak{c}_{k-1} = \mathfrak{c}_k$ pour $k \geqslant 1$ parce que l'anneau est arithmétique cohérent. La suite des idéaux $(\mathfrak{c}_k)_{k\geqslant 1}$ est décroissante par définition.

3. On peut se limiter à $k \in [\![0..p+1]\!]$ avec $p = \inf(m, n)$.

La proposition résulte de l'égalité $\boxed{\mathfrak{c}_k\mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k}$ (claire pour $k = 1$).
Si $\mathbf{A}$ est un anneau arithmétique local la matrice admet une forme réduite de Smith (proposition IV-7.2). Notons $p = \inf(m, n)$.
L'algorithme qui produit la forme réduite de Smith dans le cas local et la machinerie locale-globale des anneaux arithmétiques précédente nous fournissent un système d'éléments comaximaux $(s_1, \dots, s_r)$ tel que, sur chaque anneau $\mathbf{A}[1/s_i]$, la matrice M admet une forme réduite de Smith avec la sous-matrice diagonale $\mathrm{Diag}(c_1, c_2, \dots, c_p)$ et $c_1 \mid c_2 \mid \dots \mid c_p$. En outre, pour $k \geqslant 1$, $\mathfrak{d}_k = \langle c_1 \cdots c_k \rangle$.
Il suffit de prouver l'égalité encadrée après localisation en ces éléments comaximaux. Le fait que $\mathfrak{b}_k\mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$ implique $\mathfrak{c}_k\mathfrak{d}_{k-1} \subseteq \mathfrak{d}_k$.
Il faut montrer l'inclusion réciproque. Plus précisément, montrons pour tout $k \geqslant 1$ que $c_k \in \mathfrak{c}_k$, ce qui implique $\mathfrak{c}_k\mathfrak{d}_{k-1} \supseteq \mathfrak{d}_k$. On a $c_k\mathfrak{d}_{k-1} = \mathfrak{d}_k$, donc $c_k \in \mathfrak{b}_k$. Par ailleurs c_k est multiple des $c_i \in \mathfrak{b}_i$ pour $i \leqslant k-1$, donc $c_k \in \mathfrak{b}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{b}_{k-1}$. On a donc bien $c_k \in \mathfrak{c}_k$. □

Remarque. Si $\mathbf{A}$ est un domaine de Prüfer (un anneau arithmétique intègre), on peut voir que la suite des idéaux $\mathfrak{b}_k$ est décroissante jusqu'à ce que $\mathfrak{d}_r$ s'annule. Si l'on prend pour $\mathbf{A}$ un produit de domaines de Prüfer, on peut constater qu'il est en général faux que la suite des idéaux $\mathfrak{b}_k$ soit décroissante.
■

Nous reviendrons plus longuement sur les anneaux arithmétiques et les anneaux de Prüfer dans le chapitre XII.

5. Algèbres plates

En langage intuitif, une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ est plate lorsque les systèmes linéaires sur $\mathbf{A}$ sans second membre n'ont « pas plus » de solutions dans $\mathbf{B}$ que dans $\mathbf{A}$, et elle est fidèlement plate si cette affirmation est vraie également des systèmes linéaires avec second membre. Précisément on adopte les définitions suivantes.

5.1. Définition. Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre.

1. $\mathbf{B}$ est dite *plate (sur $\mathbf{A}$)* lorsque toute relation de dépendance $\mathbf{B}$-linéaire entre éléments de $\mathbf{A}$ est une combinaison $\mathbf{B}$-linéaire de relations de dépendance $\mathbf{A}$-linéaires entre ces mêmes éléments. Autrement dit, pour toute forme linéaire $\psi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$, on réclame que
$$\mathrm{Ker}\, \rho_\star(\psi) = \langle \rho(\mathrm{Ker}\, \psi) \rangle_{\mathbf{B}}\,.$$
On dira aussi que *l'homomorphisme d'anneaux ρ est plat.*
2. Une $\mathbf{A}$-algèbre *plate* $\mathbf{B}$ est dite *fidèlement plate* si pour toute forme linéaire $\psi : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ et tout $a \in \mathbf{A}$, lorsque l'équation $\psi(X) = a$ admet une solution dans $\mathbf{B}$ (i.e. $\exists X \in \mathbf{B}^n$, $\big(\rho_\star(\psi)\big)(X) = \rho(a)$), alors

elle admet une solution dans $\mathbf{A}$.
On dira aussi que *l'homomorphisme d'anneaux ρ est fidèlement plat.*

Pour une $\mathbf{A}$-algèbre fidèlement plate, en considérant le cas où $n = 1$ et $\psi = 0$, on voit que $\rho(a) = 0$ implique $a = 0$. Ainsi, ρ est un homomorphisme injectif. On dit donc que $\mathbf{B}$ est une *extension fidèlement plate* de $\mathbf{A}$. On peut alors identifier $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{B}$ et la condition sur l'équation linéaire avec second membre est plus simple à formuler : c'est exactement la même équation que l'on cherche à résoudre dans $\mathbf{A}$ ou $\mathbf{B}$.

5.2. Fait.
Une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ est plate si, et seulement si, $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module plat.
D Exercice de traduction laissé au lecteur. □

Exemples fondamentaux. En voici dans le lemme suivant.

5.3. Lemme.

1. *Un morphisme de localisation $\mathbf{A} \to S^{-1}\mathbf{A}$ donne une $\mathbf{A}$-algèbre plate.*
2. *Si $S_1, \ldots, S_n$ sont des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et si $\mathbf{B} = \prod_i \mathbf{A}_{S_i}$ l'homomorphisme « diagonal» canonique $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ donne une algèbre fidèlement plate.*
3. *Si $\mathbf{k}$ est zéro-dimensionnel réduit, toute $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{L}$ est plate.*

D *1.* Voir le fait II-6.6 ou les faits 5.2 et 1.6.
2. Cela résulte du principe local-global de base (on pourrait même dire que c'est le principe local-global de base).
3. Résulte de 5.2 et de ce que tout $\mathbf{K}$-module est plat (théorème 2.3). □

Remarques. Concernant le point *3* du lemme précédent.
1) Il semble difficile de remplacer dans l'hypothèse $\mathbf{k}$ par un corps (de Heyting) que l'on ne suppose pas zéro-dimensionnel.
2) Voir le théorème 6.2 pour la question fidèlement plate. ■

Dans la proposition qui suit, analogue des propositions II-3.1 (pour les anneaux cohérents) et 1.2 (pour les modules plats), on passe d'une équation à un système d'équations. Pour alléger le texte, on fait comme si l'on avait une inclusion $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ (même si $\mathbf{B}$ est seulement supposée plate), autrement dit on ne précise pas que quand on passe dans $\mathbf{B}$, tout doit être transformé au moyen de l'homomorphisme $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

5.4. Proposition. *Soit $M \in \mathbf{A}^{n\times m}$, $C \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ et $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate.*

1. *Toute solution dans $\mathbf{B}$ du système linéaire homogène $MX = 0$ est combinaison $\mathbf{B}$-linéaire de solutions dans $\mathbf{A}$.*
2. *Si en outre $\mathbf{B}$ est fidèlement plate, et si le système $MX = C$ admet une solution dans $\mathbf{B}$, il admet une solution dans $\mathbf{A}$.*

▷ Les définitions des $\mathbf{A}$-algèbres plates et fidèlement plates concernent les systèmes linéaires avec une seule équation. Pour résoudre un système linéaire général on applique la technique usuelle : on commence par résoudre la première équation, puis on porte la solution générale de la première équation dans la seconde, et ainsi de suite. □

5.5. Proposition.
Soit $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate et $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$.

1. *L'application $\mathbf{B}$-linéaire naturelle $\rho_\star(\mathfrak{a}) \to \rho(\mathfrak{a})\mathbf{B}$ est un isomorphisme.*

Dans la suite on identifie $\rho_\star(\mathfrak{c})$ avec l'idéal $\rho(\mathfrak{c})\mathbf{B}$ pour tout idéal $\mathfrak{c}$ de $\mathbf{A}$.

2. *On a $\rho_\star(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \rho_\star(\mathfrak{a}) \cap \rho_\star(\mathfrak{b})$.*
3. *Si en outre $\mathfrak{a}$ est de type fini, on a $\rho_\star(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) = \big(\rho_\star(\mathfrak{b}) : \rho_\star(\mathfrak{a})\big)$.*

▷ Les deux premiers points résultent des faits analogues concernant les modules plats (théorème 1.11 point *4* et corollaire 1.14).
3. Si $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, alors $\mathfrak{b} : \mathfrak{a} = \bigcap_i (\mathfrak{b} : a_i)$, donc vu le point *2* on est ramené au cas d'un idéal principal $\langle a \rangle$. On considère alors la suite exacte

$$0 \to \mathfrak{b} : a \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{a} \mathbf{A}/\mathfrak{b} ,$$

on fait le produit tensoriel par $\mathbf{B}$, et l'on obtient la suite exacte (utiliser la platitude et le fait IV-4.8)

$$0 \to \rho_\star(\mathfrak{b} : a) \longrightarrow \mathbf{B} \xrightarrow{\rho(a)} \mathbf{B}/\rho_\star(\mathfrak{b}) ,$$

qui donne le résultat voulu. □

5.6. Théorème. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une algèbre. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *$\mathbf{B}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre plate.*
2. *$\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module plat.*
3. *Pour tout $\mathbf{A}$-module plat M, le $\mathbf{A}$-module $\rho_\star(M)$ est plat.*
4. *Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, l'application $\mathbf{A}$-linéaire canonique*
$$\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathfrak{a} \simeq \rho_\star(\mathfrak{a}) \to \mathfrak{a}\mathbf{B}$$
est un isomorphisme.
5. *Pour tous $\mathbf{A}$-modules $N \subseteq M$ l'application $\mathbf{B}$-linéaire $\rho_\star(N) \to \rho_\star(M)$ est injective.*
6. *Pour toute application $\mathbf{A}$-linéaire $\psi : M \to P$, l'application $\mathbf{B}$-linéaire naturelle $\rho_\star\big(\operatorname{Ker}(\psi)\big) \longrightarrow \operatorname{Ker}\big(\rho_\star(\psi)\big)$ est un isomorphisme.*
7. *Pour toute suite exacte de $\mathbf{A}$-modules $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ la suite*
$$\rho_\star(M) \xrightarrow{\rho_\star(f)} \rho_\star(N) \xrightarrow{\rho_\star(g)} \rho_\star(P)$$
est une suite exacte de $\mathbf{B}$-modules.

Le point *5* permet d'identifier $\rho_\star(P)$ à un sous-$\mathbf{B}$-module de $\rho_\star(Q)$ chaque fois que l'on a deux $\mathbf{A}$-modules $P \subseteq Q$ et que $\mathbf{B}$ est plate sur $\mathbf{A}$.

D La lectrice vérifiera que les équivalences sont claires d'après ce que l'on sait déjà (fait 5.2, théorème 1.11, corollaire 1.12). On notera que la proposition 5.4 donne le point *6* dans le cas d'une application linéaire entre modules libres de rang fini. □

La proposition suivante généralise les propositions V-9.2 et V-9.3.

5.7. Proposition. *Soient $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre plate et M, N des $\mathbf{A}$-modules. Si M est de type fini (resp. de présentation finie), l'application $\mathbf{B}$-linéaire naturelle*

$$\rho_\star\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)\big) \to \mathrm{L}_{\mathbf{B}}\big(\rho_\star(M),\rho_\star(N)\big)$$

est injective (resp. est un isomorphisme).

D On considère une suite exacte

$$K \longrightarrow \mathbf{A}^k \longrightarrow M \to 0, \qquad (*)$$

correspondant au fait que M est de type fini (si M est de présentation finie le module K est lui aussi libre de rang fini).
Notons $M_1 = \rho_\star(M)$, $N_1 = \rho_\star(N)$ et $K_1 = \rho_\star(K)$. Nous avons tout d'abord la suite exacte

$$K_1 \longrightarrow \mathbf{B}^k \longrightarrow M_1 \to 0. \qquad (**)$$

Ensuite on obtient les suites exactes ci-dessous. La première vient de $(*)$, la dernière vient de $(**)$ et la seconde résulte de la première par extension des scalaires puisque $\mathbf{B}$ est plate sur $\mathbf{A}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) & \to & \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^k,N) \simeq N^k & \to & \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(K,N) \\
0 \to & \rho_\star\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)\big) & \to & \rho_\star(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}^k,N) \simeq N_1^k & \to & \rho_\star\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(K,N)\big) \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \mathrm{L}_{\mathbf{B}}(M_1,N_1) & \to & \mathrm{L}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}^k,N_1) \simeq N_1^k & \to & \mathrm{L}_{\mathbf{B}}(K_1,N_1)
\end{array}$$

En outre, on a des applications $\mathbf{B}$-linéaires « verticales » naturelles de la deuxième vers la troisième suite exacte, et les diagrammes commutent. La deuxième flèche verticale est un isomorphisme (l'identité de N_1^k après les identifications canoniques). Ceci implique que la première flèche verticale (l'application $\mathbf{B}$-linéaire qui nous intéresse) est injective.
Si M est de présentation finie et si $K \simeq \mathbf{A}^\ell$, les deux $\mathbf{B}$-modules à droite sont isomorphes à N_1^ℓ et la flèche verticale correspondante est un isomorphisme. Ceci implique que la première flèche verticale est un isomorphisme. □

Rétrospectivement la démonstration donnée pour la proposition V-9.3 semble bien compliquée. La nouvelle démonstration donnée ici dans un cadre plus général est conceptuellement plus simple.

6. Algèbres fidèlement plates

On a déjà dit que si $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ est une algèbre fidèlement plate, ρ est injectif. Il est clair également que ρ *réfléchit les unités*, c'est-à-dire que

$$\rho(a) \in \mathbf{B}^\times \implies a \in \mathbf{A}^\times.$$

Voici maintenant quelques propriétés caractéristiques. Dans la suite on retiendra l'équivalence des points *1*, *2a*, *3a* et *4*.

6.1. Théorème. (Caractérisation des algèbres fidèlement plates)
Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une algèbre plate. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'algèbre $\mathbf{B}$ est fidèlement plate.*
2a. *L'homomorphisme ρ est injectif, et en identifiant $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{B}$, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ on a*
$$\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{a}.$$
2b. *Même chose avec un idéal arbitraire de $\mathbf{A}$.*
3a. *Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ on a l'implication*
$$1_{\mathbf{B}} \in \rho_\star(\mathfrak{a}) \implies 1_{\mathbf{A}} \in \mathfrak{a}.$$
3b. *Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, si $\rho_\star(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = 0$, alors $\mathbf{A}/\mathfrak{a} = 0$.*
3c. *Pour tous $\mathbf{A}$-modules $N \subseteq M$, si $\rho_\star(N) = \rho_\star(M)$, alors $N = M$.*
3d. *Pour tout $\mathbf{A}$-module M, si $\rho_\star(M) = 0$, alors $M = 0$.*
3e. *Pour tout $\mathbf{A}$-module M l'application $\mathbf{A}$-linéaire naturelle $M \to \rho_\star(M)$ est injective.*
4. *L'extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$* réfléchit les suites exactes. *Autrement dit, une suite arbitraire de $\mathbf{A}$-modules*
$$N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P$$
est exacte si la suite de $\mathbf{B}$-modules
$$\rho_\star(N) \xrightarrow{\rho_\star(f)} \rho_\star(M) \xrightarrow{\rho_\star(g)} \rho_\star(P)$$
est exacte.

▷ Le point *1* implique que ρ est injectif. Une fois ceci acquis, *2a* est une simple reformulation de *1*, et *2a* est facilement équivalent à *2b*.
3a $\Rightarrow$ *1*. On commence par remarquer que l'implication est encore valable si l'on remplace l'idéal de type fini $\mathfrak{a}$ par un idéal arbitraire $\mathfrak{c}$. En effet, si $1 \in \rho_\star(\mathfrak{c})$ on aura également $1 \in \rho_\star(\mathfrak{c}')$ pour un idéal de type fini $\mathfrak{c}'$ contenu dans $\mathfrak{c}$.
Soit maintenant $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ et $c \in \mathbf{A}$. L'équation $\sum_i a_i x_i = c$ admet une solution si, et seulement si, $c \in \mathfrak{a}$, i.e. $1 \in (\mathfrak{a} : c)_{\mathbf{A}}$. Puisque $\mathbf{B}$ est plate, on a $\big(\rho_\star(\mathfrak{a}) : \rho(c)\big)_{\mathbf{B}} = \rho_\star(\mathfrak{a} : c)$ (proposition 5.5). Si $\sum_i \rho(a_i) y_i = \rho(c)$ admet une solution dans $\mathbf{B}$, alors $1 \in \big(\rho_\star(\mathfrak{a}) : \rho(c)\big)_{\mathbf{B}}$, donc l'hypothèse *3a* implique que $1 \in (\mathfrak{a} : c)$, i.e. que $\sum_i a_i x_i = c$ admet une solution dans $\mathbf{A}$.

Les implications *3e* ⇒ *3d* ⇒ *3b* sont triviales.
3d ⇒ *3c*. On considère le module M/N. Le module $\rho_\star(N)$ s'identifie à un sous-module de $\rho_\star(M)$ et $\rho_\star(M/N)$ s'identifie à $\rho_\star(M)/\rho_\star(N)$. On conclut.
3c ⇒ *3d*. On prend $N = 0$.
3a ⇔ *3b*. Mêmes raisonnements.
1 ⇒ *3e*. On identifie $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{B}$.
Soit $x \in M$ tel que $1 \otimes x = 0$ dans $\rho_\star(M)$. Puisque $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module plat, cette syzygie s'explique dans le $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}$: il existe $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{B}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ tels que $\sum_i a_i u_i = 1$ et $a_i x = 0$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. L'équation en les y_i, $\sum_i a_i y_i = 1$, admet une solution dans $\mathbf{B}$, donc elle en admet une dans $\mathbf{A}$. D'où $x = 0$.
4 ⇒ *3d*. On fait $N = P = 0$ dans la suite $N \to M \to P$. Elle est exacte après extension des scalaires à $\mathbf{B}$, donc elle est exacte.
1 ⇒ *4*. On suppose que la suite de $\mathbf{B}$-modules est exacte. On doit montrer que la suite de $\mathbf{A}$-modules est exacte. Tout d'abord $g \circ f = 0$, car l'application $\mathbf{B}$-linéaire $P \to \rho_\star(P)$ est injective, et les diagrammes commutent. Ensuite puisque $\mathbf{B}$ est plate, on peut identifier $\rho_\star(\operatorname{Ker} g)$ avec $\operatorname{Ker} \rho_\star(g)$ et $\rho_\star(\operatorname{Im} f)$ avec $\operatorname{Im} \rho_\star(f)$. On est ramené au point *3c*. □

Vu le théorème 2.3, on obtient comme conséquence de la caractérisation *2a* le théorème suivant.

6.2. Théorème. *Toute extension d'un corps discret ou d'un anneau zéro-dimensionnel réduit est fidèlement plate.*

D Par hypothèse, on a $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$ avec $\mathbf{k}$ zéro-dimensionnel réduit. On sait que l'extension est plate par le théorème 2.3. On doit montrer que si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de $\mathbf{k}$, alors $\mathfrak{a}\mathbf{A} \cap \mathbf{k} = \mathfrak{a}$. Or $\mathfrak{a} = \langle e \rangle$ pour un idempotent e ; l'appartenance d'un élément x à un idéal $\langle e \rangle$ (e idempotent) étant caractérisée par l'égalité $x = xe$, elle est indépendante de l'anneau. Dit autrement, pour e idempotent d'un anneau $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}'$, on a toujours $e\mathbf{B}' \cap \mathbf{B} = e\mathbf{B}$. □

Comme cas particulier de la caractérisation *3a* on obtient le corollaire suivant.

6.3. Corollaire. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorphisme plat entre anneaux locaux. Il est fidèlement plat si, et seulement si, il* réfléchit les unités*, i.e. si $\rho^{-1}(\mathbf{B}^\times) = \mathbf{A}^\times$.*

Un homomorphisme entre anneaux locaux qui réfléchit les unités est appelé un *homomorphisme local*.
Les démonstrations des deux faits qui suivent résultent de considérations simples sur la préservation et sur la « réflection » des suites exactes. Les détails sont laissés au lecteur.

6.4. Fait. (Transitivité) *Soit* $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre et* $\mathbf{C}$ *une* $\mathbf{B}$*-algèbre.*

1. *Si* $\mathbf{B}$ *est plate sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{C}$ *plate sur* $\mathbf{B}$*, alors* $\mathbf{C}$ *est plate sur* $\mathbf{A}$*.*
2. *Si* $\mathbf{B}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{C}$ *fidèlement plate sur* $\mathbf{B}$*, alors* $\mathbf{C}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{A}$*.*
3. *Si* $\mathbf{C}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{B}$ *et plate sur* $\mathbf{A}$*, alors* $\mathbf{B}$ *est plate sur* $\mathbf{A}$*.*
4. *Si* $\mathbf{C}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{B}$ *et sur* $\mathbf{A}$*, alors* $\mathbf{B}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{A}$*.*

6.5. Fait. (Changement d'anneau de base)
Soit $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *deux* $\mathbf{A}$*-algèbres, et* $\mathbf{D} = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{C}$*.*

1. *Si* $\mathbf{C}$ *est plate sur* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{D}$ *est plate sur* $\mathbf{B}$*.*
2. *Si* $\mathbf{C}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{A}$*,* $\mathbf{D}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{B}$*.*

6.6. Principe local-global concret. (Localisation en bas, algèbres plates)
Soient $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *une algèbre et* $S_1, \ldots, S_r$ *des monoïdes comaximaux de* $\mathbf{A}$*.*

1. *L'algèbre* $\mathbf{B}$ *est plate sur* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, pour chaque* i*,* $\mathbf{B}_{S_i}$ *est plate sur* $\mathbf{A}_{S_i}$*.*
2. *L'algèbre* $\mathbf{B}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, pour chaque* i*, l'algèbre* $\mathbf{B}_{S_i}$ *est fidèlement plate sur* $\mathbf{A}_{S_i}$*.*

▷ On introduit l'$\mathbf{A}$-algèbre fidèlement plate $\mathbf{C} = \prod_i \mathbf{A}_{S_i}$ qui donne par extension des scalaires la $\mathbf{B}$-algèbre fidèlement plate $\mathbf{D} = \prod_i \mathbf{B}_{S_i}$. Il reste à appliquer les faits 6.4 et 6.5. □

Le théorème suivant généralise les principes local-globals concrets qui affirment le caractère local (au sens constructif) de certaines propriétés de finitude pour les modules.

6.7. Théorème. *Soit* $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre fidèlement plate.*
Soit M *un* $\mathbf{A}$*-module et* $M_1 = \rho_\star(M) \simeq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M$*.*

1. *Le* $\mathbf{A}$*-module* M *est plat si, et seulement si, le* $\mathbf{B}$*-module* M_1 *est plat.*
2. *Le* $\mathbf{A}$*-module* M *est de type fini si, et seulement si, le* $\mathbf{B}$*-module* M_1 *est de type fini.*
3. *Si le* $\mathbf{B}$*-module* M_1 *est cohérent, le* $\mathbf{A}$*-module* M *est cohérent.*
4. *Le* $\mathbf{A}$*-module* M *est de présentation finie si, et seulement si, le* $\mathbf{B}$*-module* M_1 *est de présentation finie.*
5. *Le* $\mathbf{A}$*-module* M *est projectif de type fini si, et seulement si, le* $\mathbf{B}$*-module* M_1 *est projectif de type fini.*

6. Si le $\mathbf{B}$*-module* M_1 *est noethérien, le* $\mathbf{A}$*-module* M *est noethérien.*

$\mathbb{D}$ Dans les points *1*, *2*, *4*, *5*, on sait déjà que n'importe quelle extension des scalaires préserve la propriété concernée. Il nous reste donc à prouver les réciproques.

1. On considère une suite exacte $N \xrightarrow{f} Q \xrightarrow{g} P$ de $\mathbf{A}$-modules. On veut montrer qu'elle est exacte après tensorisation par M. On sait qu'elle est exacte après tensorisation par $\mathbf{B} \otimes M$. Or $\mathbf{B} \otimes \bullet$ réfléchit les suites exactes.

2. On considère des éléments $y_i \in \rho_\star(M)$ $(i \in [\![1..n]\!])$ qui engendrent ce module. Ces éléments sont fabriqués comme combinaisons $\mathbf{B}$-linéaires d'une famille finie d'éléments $1 \otimes x_j$ $(x_j \in M,\ j \in [\![1..m]\!])$. Cela implique que l'application $\mathbf{A}$-linéaire $\varphi : \mathbf{A}^m \to M$ qui envoie la base canonique sur $(x_j)_{j\in[\![1..m]\!]}$ est surjective après tensorisation par $\mathbf{B}$. Or $\mathbf{B}$ est fidèlement plate, donc φ est surjective.

3. Soit $N = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$ un sous-module de type fini de M. On considère l'application $\mathbf{A}$-linéaire surjective $\mathbf{A}^n \to N$ correspondante, on note K son noyau. La suite exacte $0 \to K \to \mathbf{A}^n \to N \to 0$ donne par extension des scalaires une suite exacte (ceci parce que $\mathbf{B}$ est plate). Puisque $\rho_\star(M)$ est cohérent, $\rho_\star(K)$ est de type fini. Il reste à appliquer le point *2*.

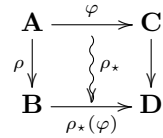
4. Même raisonnement qu'au point *3*.

5. Un module est projectif de type fini si, et seulement si, il est plat et de présentation finie.

6. On considère une suite croissante $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-modules de type fini de M et l'on étend les scalaires à $\mathbf{B}$. Deux termes consécutifs $\rho_\star(N_\ell)$ et $\rho_\star(N_{\ell+1})$ sont égaux. Puisque $\mathbf{B}$ est fidèlement plate, on a aussi les égalités $N_\ell = N_{\ell+1}$. □

Le théorème suivant généralise les principes local-globals concrets qui affirment le caractère local (au sens constructif) de certaines propriétés de finitude pour les algèbres.

6.8. Théorème.
Soit une $\mathbf{A}$*-algèbre fidèlement plate* $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *et une* $\mathbf{A}$*-algèbre* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$.
On note $\mathbf{D} = \rho_\star(\mathbf{C})$ *la* $\mathbf{B}$*-algèbre fidèlement plate obtenue par extension des scalaires.*



Pour que $\mathbf{C}$ *possède une des propriétés ci-dessous en tant qu'*$\mathbf{A}$*-algèbre il faut et suffit que* $\mathbf{D}$ *possède la même propriété comme* $\mathbf{B}$*-algèbre :*

- *finie (comme module),*
- *de présentation finie comme module,*
- *strictement finie,*
- *plate,*
- *fidèlement plate,*
- *strictement étale,*

— *séparable,*
— *de type fini (comme algèbre),*
— *de présentation finie (comme algèbre).*

D Les trois premières propriétés sont des propriétés de modules et relèvent donc du théorème 6.7.
Algèbres plates, fidèlement plates. On applique les faits 6.4 et 6.5.
Algèbres strictement étales. On a déjà l'équivalence pour le caractère strictement fini. Si $\mathbf{B}$ est libre sur $\mathbf{A}$ on utilise le fait que le discriminant se comporte bien par extension des scalaires, et l'on conclut en utilisant le fait qu'une extension fidèlement plate réfléchit les unités.
Dans le cas général on se ramène au cas libre par localisation en des éléments comaximaux, ou bien l'on invoque le théorème VI-6.13 : une algèbre strictement finie est séparable si, et seulement si, elle est strictement étale.
Algèbres séparables. On regarde le diagramme commutatif dans le fait VI-6.11 (attention, les noms changent). La flèche verticale de droite est obtenue par extension des scalaires fidèlement plate à partir de celle de gauche. Elles sont donc simultanément surjectives.
Algèbres de type fini. Le fait d'être de type fini ou de présentation finie est préservé par n'importe quelle extension des scalaires. Voyons la réciproque.
On identifie $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ à un sous-anneau de $\mathbf{D}$.
Posons $\mathbf{A}_1 = \varphi(\mathbf{A})$ et $\mathbf{B}_1 = \rho_\star(\varphi)(\mathbf{B})$. Puisque $\mathbf{D} = \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{C}$ est de type fini sur $\mathbf{B}$, et puisque tout élément de $\mathbf{D}$ s'écrit comme combinaison $\mathbf{B}$-linéaire d'éléments de $\mathbf{C}$, on peut écrire $\mathbf{D} = \mathbf{B}_1[x_1, \ldots, x_m]$ avec des $x_i \in \mathbf{C} \subseteq \mathbf{D}$. Ceci donne une suite exacte

$$\mathbf{B}[X_1, \ldots, X_m] \xrightarrow{\rho_\star(\varphi),\, X_i \mapsto x_i} \mathbf{D} \longrightarrow 0.$$

On va montrer que $\mathbf{C} = \mathbf{A}_1[x_1, \ldots, x_m]$. En effet, la suite exacte ci-dessus est obtenue par extension des scalaires fidèlement plate à partir de la suite

$$\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_m] \xrightarrow{\varphi,\, X_i \mapsto x_i} \mathbf{C} \longrightarrow 0.$$

Algèbres de présentation finie.
Commençons par une remarque générale élémentaire mais utile sur les algèbres quotients $\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}$. On peut voir $\mathbf{k}[\underline{X}]$ comme le $\mathbf{k}$-module libre ayant pour base la famille des monômes $(X^{\underline{\alpha}})_{\underline{\alpha} \in \mathbb{N}^m}$. Si $f \in \mathfrak{a}$, on obtient alors l'égalité

$$f \cdot \mathbf{k}[\underline{X}] = \sum\nolimits_{\underline{\alpha}} (X^{\underline{\alpha}} f) \cdot \mathbf{k}.$$

Donc l'idéal $\mathfrak{a}$ est le sous-$\mathbf{k}$-module de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ engendré par tous les $X^{\underline{\alpha}} f$, où $\underline{\alpha}$ parcourt $\mathbb{N}^m$ et f parcourt un système générateur de $\mathfrak{a}$.
Reprenons alors la démonstration en continuant avec les mêmes notations que dans le point précédent.
Supposons que $\mathbf{D} = \mathbf{B}_1[x_1, \ldots, x_m] \simeq \mathbf{B}[\underline{X}]/\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$. Dans la suite on

regarde une équation $f_j = 0$ comme une syzygie entre les monômes présents dans f_j.
Puisque le $\mathbf{B}$-module $\mathbf{D}$ est obtenu par extension des scalaires plate à partir du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{C}$, la relation de dépendance $\mathbf{B}$-linéaire f_j est une combinaison $\mathbf{B}$-linéaire de relations de dépendance $\mathbf{A}$-linéaires $f_{j,k}$ (entre les mêmes monômes vus dans $\mathbf{C}$).
Chaque égalité $f_{j,k}(\underline{x}) = 0$ peut aussi être lue comme une relation de dépendance $\mathbf{A}$-algébrique (un relateur) entre les $x_i \in \mathbf{C}$.
Considérons alors le sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ engendré par tous les $X^{\underline{\alpha}} f_{j,k}$.
Par extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ la suite de $\mathbf{A}$-modules

$$0 \to \sum\nolimits_{j,k,\underline{\alpha}} (X^{\underline{\alpha}} f_{j,k}) \cdot \mathbf{A} \to \mathbf{A}[\underline{X}] \to \mathbf{C} \to 0 \qquad (*)$$

donne la suite exacte de $\mathbf{B}$-modules

$$0 \to \sum\nolimits_{j,k,\underline{\alpha}} (X^{\underline{\alpha}} f_{j,k}) \cdot \mathbf{B} \to \mathbf{B}[\underline{X}] \to \mathbf{D} \to 0.$$

En effet, $\sum_{j,k,\underline{\alpha}} (X^{\underline{\alpha}} f_{j,k}) \cdot \mathbf{B} = \sum_{j,k} f_{j,k} \cdot \mathbf{B}[\underline{X}] = \sum_j f_j \cdot \mathbf{B}[\underline{X}] = \mathfrak{a}$. Donc, puisque l'extension est fidèlement plate, la suite $(*)$ est elle-même exacte. Enfin, puisque $\sum_{j,k,\underline{\alpha}} (X^{\underline{\alpha}} f_{j,k}) \cdot \mathbf{A} = \sum_{j,k} f_{j,k} \cdot \mathbf{A}[\underline{X}]$, $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre de présentation finie. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées à la lectrice, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

- Sur un anneau de Bézout intègre, un module est plat si, et seulement si, il est sans torsion.
- Montrer le théorème 1.3.
- Montrer le lemme 3.2.
- Montrer le fait 5.2 et le théorème 5.6.
- Montrer les faits 6.4 et 6.5.

Exercice 2. Soit $\pi : N \to M$ une application linéaire surjective.
1. *(Cas particulier du théorème 1.16)* Si M est plat, pour tout module de présentation finie P, l'application linéaire naturelle

$$\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P, \pi) : \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P, N) \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P, M)$$

est surjective.
2. Supposons que $N = \mathbf{A}^{(I)}$, module libre sur un ensemble discret I. Si la propriété précédente est vérifiée, M est plat.
Commentaire. En mathématiques constructives, un module arbitraire M n'est pas nécessairement un quotient d'un module $N = \mathbf{A}^{(I)}$ comme ci-dessus, mais cela est vrai dans le cas où M est discret, en prenant $I = M$. Si l'on n'exige pas I discret, on peut voir l'exercice 16. ■

Exercice 3. Soit M un $\mathbf{A}$-module de type fini. Si M est plat ses idéaux de Fitting sont idempotents.

Exercice 4. Montrer en mathématiques classiques qu'un anneau est localement sans diviseur de zéro si, et seulement si, il devient intègre après localisation en n'importe quel idéal premier.

Exercice 5. Montrer en mathématiques classiques qu'un anneau est arithmétique si, et seulement si, il devient un anneau de Bézout après localisation en n'importe quel idéal premier.

Exercice 6. L'image d'un idéal localement principal par un homomorphisme d'anneaux est un idéal localement principal. Le résultat analogue pour les idéaux inversibles n'est pas toujours vrai.

Exercice 7. Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_k\rangle$ est localement principal, alors $\mathfrak{a}^n = \langle x_1^n, \dots, x_k^n\rangle$. Calculer une matrice de localisation principale pour $(x_1^n, \dots, x_k^n)$ à partir d'une matrice de localisation principale pour $(x_1, \dots, x_k)$.
Expliciter l'appartenance de $x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k} \in \langle x_1^n, \dots, x_k^n\rangle$ lorsque $n = n_1 + \cdots + n_k$.

Exercice 8. Étant donnés n éléments dans un anneau arithmétique donner un algorithme qui construit une matrice de localisation principale pour ces éléments à partir de matrices de localisation principale pour uniquement des couples d'éléments.

Exercice 9. On considère deux idéaux de type fini $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un anneau $\mathbf{A}$, engendrés respectivement par m et n éléments. Soient f, $g \in \mathbf{A}[X]$ de degrés $m-1$ et $n-1$ avec $\mathrm{c}(f) = \mathfrak{a}$ et $\mathrm{c}(g) = \mathfrak{b}$.
1. Montrer que si $\mathfrak{a}$ est localement principal, on a $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathrm{c}(fg)$ de sorte que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est engendré par $n+m-1$ éléments (localiser et utiliser le corollaire III-2.3 *4*).
2. Montrer que si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont localement principaux, $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est localement principal. Expliquez comment construire une matrice de localisation principale pour les coefficients de fg à partir de deux matrices de localisation principale, respectivement pour les générateurs de $\mathfrak{a}$ et de ceux de $\mathfrak{b}$.

Exercice 10. On s'intéresse à l'égalité éventuelle

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \tag{4}$$

pour deux idéaux de type fini $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ d'un anneau $\mathbf{A}$.
1. Montrer que l'égalité est vérifiée si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est localement principal. Si en outre $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont localement principaux, alors $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est localement principal.
2. Supposons $\mathbf{A}$ intègre. Montrer que si l'égalité est vérifiée lorsque $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont des idéaux principaux alors l'anneau est arithmétique.
3. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer.
- $\mathbf{A}$ est localement sans diviseur de zéro et l'équation (4) est vérifiée pour les idéaux principaux.
- $\mathbf{A}$ est localement sans diviseur de zéro et l'équation (4) est vérifiée pour les idéaux de type fini.

Exercice 11. (Voir aussi l'exercice V-16) Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ des idéaux de type fini.
1. Si $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ est localement principal, alors $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})+(\mathfrak{b}:\mathfrak{a})=\langle 1\rangle$.
2. Si $(\mathfrak{a}:\mathfrak{b})+(\mathfrak{b}:\mathfrak{a})=\langle 1\rangle$, alors
a. $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}):\mathfrak{c}=(\mathfrak{a}:\mathfrak{c})+(\mathfrak{b}:\mathfrak{c})$;
b. $\mathfrak{c}:(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=(\mathfrak{c}:\mathfrak{a})+(\mathfrak{c}:\mathfrak{b})$;
c. $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$;
d. $\mathfrak{c}\,(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=\mathfrak{c}\,\mathfrak{a}\cap\mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$;
e. $\mathfrak{c}+(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})=(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})\cap(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})$;
f. $\mathfrak{c}\cap(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})=(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{a})+(\mathfrak{c}\cap\mathfrak{b})$;
g. La suite exacte ci-après (où $\delta(x)=(x,-x)$ et $\sigma(y,z)=y+z$) est scindée :

$$0\longrightarrow \mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}\xrightarrow{\delta}\mathfrak{a}\times\mathfrak{b}\xrightarrow{\sigma}\mathfrak{a}+\mathfrak{b}\longrightarrow 0.$$

Exercice 12. *(Anneaux gaussiens)* Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *gaussien* lorsque pour tous polynômes f, $g\in\mathbf{A}[X]$, on a l'égalité $\mathrm{c}(fg)=\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)$.
1. Tout anneau arithmétique est gaussien (voir l'exercice 9).
2. Un anneau intègre gaussien est un anneau de Prüfer.
3. Un anneau réduit gaussien est un anneau de Prüfer. Un anneau quasi intègre gaussien est un anneau de Prüfer cohérent (voir le théorème XII-4.1).

Exercice 13. *(Un anneau utile pour les contre-exemples)*
Soit $\mathbf{K}$ un corps discret non trivial et V un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension 2. On considère la $\mathbf{K}$-algèbre $\mathbf{A}=\mathbf{K}\oplus V$ définie par $x,\,y\in V\Rightarrow xy=0$. Montrer que tout élément de $\mathbf{A}$ est inversible ou nilpotent (i.e. $\mathbf{A}$ est local zéro-dimensionnel), et que l'anneau est cohérent mais pas arithmétique. Cependant tout idéal de type fini qui contient un élément régulier est égal à $\langle 1\rangle$, a fortiori il est inversible.

Exercice 14. Soit $\mathbf{A}$ un anneau local cohérent résiduellement discret.
On note $\mathfrak{m}=\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ et on suppose que $\mathfrak{m}$ est plat sur $\mathbf{A}$.
1. Montrer que $\mathbf{A}$ est intègre.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ est un anneau de valuation.
NB : on ne suppose pas $\mathbf{A}$ non trivial.

Exercice 15. *(Quotient plat d'un module plat : une preuve directe)*
Fournir une preuve directe de l'implication suivante de le théorème 1.16 : soit M un $\mathbf{A}$-module plat et K un sous-module de M vérifiant $\mathfrak{a}M\cap K=\mathfrak{a}K$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de type fini ; alors M/K est plat.

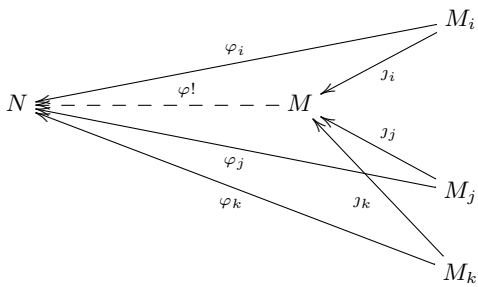
Exercice 16. *(Tout module est quotient d'un module plat)*
Cet exercice commence par un long texte introductif. On précise dans la définition qui suit la construction d'une somme directe de modules et celle d'un module libre dans le cas d'un ensemble d'indices non nécessairement discret. Ceci nous permet de montrer que tout module est quotient d'un module plat (en fait un module libre, pas nécessairement projectif d'un point de vue constructif !).
Définition. Soit I un ensemble arbitraire et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de $\mathbf{A}$-modules. On suppose que si $i=_I j$, alors M_i et M_j sont le même ensemble [4]. On définit la *somme directe* $\bigoplus_{i\in I}M_i$ comme un ensemble quotient de l'ensemble des sommes

4. Pour la notion générale de famille d'ensembles indexée par un ensemble arbitraire,

formelles finies $\oplus_{k\in[\![1..n]\!]} x_{i_k}$, où $i_k \in I$ et $x_{i_k} \in M_{i_k}$ pour chaque $k \in [\![1..n]\!]$: plus précisément, une telle somme formelle est définie comme étant une famille $(k, i_k, x_k)_{k\in[\![1..n]\!]}$, où $x_k \in M_{i_k}$ pour chaque k.
La relation d'équivalence qui définit l'égalité sur $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est la relation d'équivalence engendrée par les « égalités » suivantes :

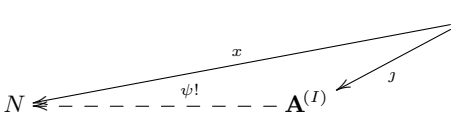
— associativité et commutativité des sommes formelles : on peut réordonner la famille comme l'on veut ;
— si $i_k =_I i_\ell$ alors les deux termes (k, i_k, x_k) et (ℓ, i_ℓ, x_ℓ) peuvent être remplacés par le seul terme $(k, x_k + x_\ell)$ en « contractant la liste » ; on réécrira ceci abusivement comme suit : si $i =_I j$ alors $(i, x_i) \oplus (j, x_j) = (i, x_i + x_j)$;
— tout terme $(k, 0_{M_{i_k}})$ peut être supprimé.

L'addition sur $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est définie par concaténation, et la loi externe est définie par $a \cdot \oplus_{k\in[\![1..n]\!]} x_{i_k} = \oplus_{k\in[\![1..n]\!]} a x_{i_k}$.
Enfin, le **A**-*module librement engendré par* I est le module $\bigoplus_{i\in I} \mathbf{A}$ et il est noté $\mathbf{A}^{(I)}$.
La somme directe résout le problème universel correspondant, ce que l'on peut schématiser par le dessin suivant pour une famille $(\varphi_i)_{i\in I}$ d'applications linéaires des M_i dans un module arbitraire N.



$M = \bigoplus_{i\in I} M_i$

Le **A**-module $\mathbf{A}^{(I)}$ résout le problème universel correspondant, ce que l'on peut schématiser par le dessin suivant pour une famille $x = (x_i)_{i\in I}$ dans un module arbitraire N.



$x(i) = x_i$

Notons qu'en conséquence, *si* $(x_i)_{i\in I}$ *est un système générateur arbitraire du module* N*, ce dernier est isomorphe à un quotient de* $\mathbf{A}^{(I)}$.
Soit I un ensemble arbitraire et $(M_i)_{i\in I}$ une famille de **A**-modules. Montrer que le module $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est plat si, et seulement si, chacun des modules M_i est plat. En particulier le module libre $\mathbf{A}^{(I)}$ est plat.

---

le lecteur peut consulter [MRR, page 18] ; la construction de la somme directe d'une famille arbitraire de **A**-modules se trouve pages 54 et 55.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 1. *Sur un anneau de Bézout intègre* $\mathbf{Z}$*, un module* M *est plat si, et seulement si, il est sans torsion.*

On sait que la condition est nécessaire. Voyons qu'elle est suffisante.

On considère une syzygie LX dans M avec $L = [\,a_1 \ \cdots \ a_n\,]$ et $X = {}^t[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,]$. Si les a_i sont tous nuls, on a $L\,\mathrm{I}_n = 0$ et $\mathrm{I}_n X = X$, ce qui explique $LX = 0$ dans M.

Sinon, on écrit $\sum_i a_i u_i = g$ et $g b_i = a_i$, où g est le pgcd des a_i.

On a $g(\sum_i b_i x_i) = 0$, et puisque M est sans torsion $\sum_i b_i x_i = 0$.

La matrice $C = \big((u_i b_j)_{i,j\in[\![1..n]\!]}\big) = UB$ avec $B = \frac{1}{g}L$, est une matrice de localisation principale pour $(a_1, \ldots, a_n)$. On pose $G = \mathrm{I}_n - C$, on a $CX = 0$ et $LC = L$, donc $LG = 0$ et $GX = X$, ce qui explique $LX = 0$ dans M.

Exercice 2.

1. Soit $\mu : P \to M$ une application linéaire. On sait (théorème 1.3) que μ se factorise via un module L libre de type fini : $\mu = \lambda \circ \psi$.

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\ \psi\ } & L & & \\ {\scriptstyle ?}\downarrow & \searrow^{\mu} & \downarrow{\scriptstyle \lambda} & & \\ N & \xrightarrow{\ \pi\ } & M & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Comme L est libre, on peut écrire $\lambda = \pi \circ \nu$ pour une application linéaire $\nu : L \to N$. Et donc $\mu = \pi \circ \varphi$ pour $\varphi = \nu \circ \psi$.

2. Si la propriété est satisfaite avec $N = \mathbf{A}^{(I)}$, où I est un ensemble discret, on considère une application linéaire arbitraire $\mu : P \to M$ avec P de présentation finie. On écrit $\mu = \pi \circ \varphi$ pour une application linéaire $\varphi : P \to N$. Il existe alors une partie finie I_0 de I telle que pour chaque générateur g_j de P, $\varphi(g_j)$ ait ses coordonnées nulles en dehors de I_0. Ceci montre que l'on peut factoriser μ via le module libre de rang fini $\mathbf{A}^{(I_0)}$. Donc par le théorème 1.3, M est plat.

Exercice 3.

On considère un module de type fini M avec un système générateur $(x_1, \ldots, x_n)$. On pose $X = {}^t[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,]$. Pour $k \in [\![0..n]\!]$ et $k + r = n$, un générateur typique de $\mathcal{F}_k(M)$ s'écrit $\delta = \det(L)$ où $L \in \mathbb{M}_r(\mathbf{A})$ et $LY = 0$, pour un vecteur colonne extrait de X : $Y = {}^t[\,x_{i_1} \ \cdots \ x_{i_r}\,]$.

On doit montrer que $\delta \in \mathcal{F}_k(M)^2$. En fait on va montrer que $\delta \in \delta\,\mathcal{F}_k(M)$.

On suppose sans perte de généralité que $(i_1, \ldots, i_r) = (1, \ldots, r)$. On applique la proposition 2.2. On a donc une matrice $H \in \mathbb{M}_{r,n}$ avec $HX = Y$ et $LH = 0$.

Soit $H' = \mathrm{I}_{r,r,n} = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \end{array}\right]$, et $K = H' - H$. On a

$$KX = Y - Y = 0 \ \text{ et } \ LK = LH' = \left[\begin{array}{c|c} L & 0 \end{array}\right].$$

Soit K' la matrice formée par les r premières colonnes de K. Alors $L = LK'$ et $\det(L) = \det(L)\det(K')$. Et puisque $KX = 0$, on a $\det(K') \in \mathcal{F}_k(M)$.

Exercice 4. Supposons l'anneau $\mathbf{A}$ localement sans diviseur de zéro.
Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier et $xy = 0$ dans $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Il existe $u \notin \mathfrak{p}$ tel que $uxy = 0$ dans $\mathbf{A}$. Soient s et $t \in \mathbf{A}$ tels que $s + t = 1$, $sux = 0$ et $ty = 0$ dans $\mathbf{A}$. Les éléments s et t ne peuvent être tous deux dans $\mathfrak{p}$ (sinon $1 \in \mathfrak{p}$). Si $s \notin \mathfrak{p}$, alors puisque $sux = 0$, on obtient $x =_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}} 0$. Si $t \notin \mathfrak{p}$, alors puisque $ty = 0$, on obtient $y =_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}} 0$.
Ainsi $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ est un anneau intègre.
Supposons maintenant que tout localisé $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ en tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ soit intègre et supposons que $xy =_\mathbf{A} 0$. Pour un idéal maximal $\mathfrak{p}$ arbitraire on a $x =_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}} 0$ ou $y =_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}} 0$. Dans le premier cas soit $s_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ tel que $s_\mathfrak{p} x =_\mathbf{A} 0$. Sinon soit $t_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ tel que $t_\mathfrak{p} y =_\mathbf{A} 0$. la famille des $s_\mathfrak{p}$ ou $t_\mathfrak{p}$ engendre l'idéal $\langle 1\rangle$ (car sinon tous les $s_\mathfrak{p}$ ou $t_\mathfrak{p}$ seraient dans un idéal maximal).
Il y a donc des s_i en nombre fini vérifiant $s_i x = 0$ (dans $\mathbf{A}$) et des t_j en nombre fini vérifiant $t_j y = 0$, avec une équation $\sum_i c_i s_i + \sum_j d_j t_j = 1$.
On prend $s = \sum_i c_i s_i$, $t = \sum_j d_j t_j$ et l'on obtient $sx = ty = 0$ et $s + t = 1$.

Exercice 5. On commence par un rappel : d'après le point *3* du théorème V-7.3, un idéal $\langle a, b\rangle$ d'un anneau $\mathbf{A}$ est localement principal si, et seulement si, on peut trouver s, t, u, $v \in \mathbf{A}$ tels que $s + t = 1$, $sa = ub$ et $tb = va$.
Supposons l'anneau $\mathbf{A}$ arithmétique.
Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier. Pour a, $b \in \mathbf{A}_\mathfrak{p}$ on veut montrer que a divise b ou b divise a (voir le lemme IV-7.1). On peut sans perte de généralité prendre a et b dans $\mathbf{A}$. Soit alors s, t, u, v comme ci-dessus. Les éléments s et t ne peuvent être tous deux dans $\mathfrak{p}$ (sinon $1 \in \mathfrak{p}$). Si $s \notin \mathfrak{p}$, alors $a =_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}} s^{-1}ub$ donc b divise a dans $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Si $t \notin \mathfrak{p}$, alors a divise b dans $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$.
Supposons maintenant que tout localisé $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$ en tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ soit un anneau de Bézout local et soient a, $b \in \mathbf{A}$.
Pour un idéal maximal $\mathfrak{p}$ arbitraire, on a : b divise a ou a divise b dans $\mathbf{A}_\mathfrak{p}$. Dans le premier cas soit $s_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ et $u_\mathfrak{p} \in \mathbf{A}$ tels que $s_\mathfrak{p} a =_\mathbf{A} u_\mathfrak{p} b$. Sinon soit $t_\mathfrak{p} \notin \mathfrak{p}$ et $v_\mathfrak{p}$ tels que $t_\mathfrak{p} b =_\mathbf{A} v_\mathfrak{p} a$. la famille des $s_\mathfrak{p}$ ou $t_\mathfrak{p}$ engendre l'idéal $\langle 1\rangle$ (car sinon tous les $s_\mathfrak{p}$ ou $t_\mathfrak{p}$ seraient dans un idéal maximal).
Il y a donc des s_i, u_i en nombre fini vérifiant $s_i a = u_i b$ (dans $\mathbf{A}$) et des t_j, v_j en nombre fini vérifiant $t_j b = v_j a$, avec une équation $\sum_i c_i s_i + \sum_j d_j t_j = 1$.
On prend $s = \sum_i c_i s_i$, $u = \sum_i c_i u_i$, $t = \sum_j d_j t_j$, $v = \sum_j d_j v_j$ et l'on obtient les égalités $s + t = 1$, $sa = ub$ et $tb = va$.
Pour un idéal avec un nombre fini de générateurs, on peut faire un raisonnement analogue, ou se reporter au résultat de l'exercice 8.

Exercice 6.
L'image de l'idéal principal $\langle 60\rangle$ de $\mathbb{Z}$ par l'homomorphisme $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$ est l'idéal $\langle 3\rangle$ qui ne contient pas d'élément régulier, et qui n'est donc pas inversible. En fait, comme $\mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$-module, l'idéal $\langle 3\rangle$ n'est même pas projectif (son annulateur $\langle 9\rangle$ n'est pas idempotent).
Lorsque $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est une algèbre plate, l'image d'un idéal $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}$ est isomorphe à $\rho_\star(\mathfrak{a}) \simeq \mathbf{B} \otimes_\mathbf{A} \mathfrak{a}$. Donc si $\mathfrak{a}$ est inversible, comme il est projectif de rang 1, son image est aussi un module projectif de rang 1.

Exercice 7.
On note d'abord qu'un produit d'idéaux localement principaux est toujours localement principal, car après des localisations comaximales convenables, chaque idéal devient principal, et leur produit également.
On se contente ensuite du cas $\mathfrak{a} = \langle a, b\rangle$ et de l'exemple $\left\langle a^4, b^4\right\rangle$. Il sera clair que la technique de calcul se généralise facilement.
On part avec $sa = ub$, $tb = va$ et $s + t = 1$. Donc $s^4a^4 = u^4b^4$ et $t^4b^4 = v^4a^4$. Puisque $\left\langle s^4, t^4\right\rangle = \langle 1\rangle$ (ce qui s'obtient en écrivant $1 = (s + t)^7$), on obtient bien que l'idéal $\left\langle a^4, b^4\right\rangle$ est localement principal.
Montrons ensuite par exemple que $a^2b^2 \in \left\langle a^4, b^4\right\rangle$.
On écrit $s^2a^2 = u^2b^2$ et $t^2b^2 = v^2a^2$. Donc $s^2a^2b^2 = u^2b^4$ et $t^2a^2b^2 = v^2a^4$.
Enfin $1 = (s + t)^3 = s^2(s + 3t) + t^2(t + 3s)$. Donc finalement

$$a^2b^2 = (t + 3s)v^2a^4 + (s + 3t)u^2b^4.$$

Exercice 8. On n'a pas besoin de supposer que l'anneau est arithmétique.
On va montrer que si dans un anneau $\mathbf{A}$ chaque couple (a_i, a_j) admet une matrice de localisation principale, il en va de même pour le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$.
Notons que ceci est à rapprocher de la démonstration par Dedekind du théorème III-8.21, dans laquelle il n'est question que d'idéaux inversibles, car sur un anneau intègre les idéaux inversibles sont exactement les idéaux localement principaux non nuls.
Notons aussi que le résultat est a priori clair : par localisations comaximales successives, on obtiendra un idéal principal au bout de chaque branche d'un arbre de calcul a priori très grand. Ceci montrera que l'idéal $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ est toujours engendré par l'un des a_i après des localisations en des éléments comaximaux. Mais ce que nous avons en vue ici, c'est plutôt un calcul pratique de la matrice de localisation principale.
On procède par récurrence sur n.
Montrons l'étape de récurrence pour le passage de $n = 3$ à $n + 1 = 4$.
On considère a_1, a_2, a_3, $a_4 \in \mathbf{Z}$.
Par hypothèse de récurrence on a une matrice $C = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{bmatrix}$ qui convient pour (a_1, a_2, a_3), et des matrices $\begin{bmatrix} c_{11} & c_{14} \\ d_{11} & d_{14} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c_{22} & c_{24} \\ d_{22} & d_{24} \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} c_{33} & c_{34} \\ d_{33} & d_{34} \end{bmatrix}$ qui conviennent respectivement pour (a_1, a_4), (a_2, a_4) et (a_3, a_4). Alors on va vérifier que la transposée de la matrice suivante convient pour (a_1, a_2, a_3, a_4) :

$$\begin{bmatrix} c_{11}x_1 & c_{22}y_1 & c_{33}z_1 & d_{11}x_1 + d_{22}y_1 + d_{33}z_1 \\ c_{11}x_2 & c_{22}y_2 & c_{33}z_2 & d_{11}x_2 + d_{22}y_2 + d_{33}z_2 \\ c_{11}x_3 & c_{22}y_3 & c_{33}z_3 & d_{11}x_3 + d_{22}y_3 + d_{33}z_3 \\ c_{14}x_1 & c_{24}y_2 & c_{34}z_3 & d_{14}x_1 + d_{24}y_2 + d_{34}z_3 \end{bmatrix}$$

Tout d'abord, on doit vérifier que la trace de la matrice est égale à 1, i.e.

$$t = c_{11}x_1 + c_{22}y_2 + c_{33}z_3 + d_{14}x_1 + d_{24}y_2 + d_{34}z_3 = 1,$$

or $c_{11} + d_{14} = 1 = c_{22} + d_{24} = c_{33} + d_{34}$ donc $t = x_1 + y_2 + z_3 = 1$.
Et l'on doit vérifier que chacune des lignes de la matrice transposée est propotionnelle à $[\, a_1\ a_2\ a_3\ a_4\,]$. Deux cas se présentent. Tout d'abord, l'une des trois

premières, par exemple la ligne $[\,c_{11}x_1\ c_{11}x_2\ c_{11}x_3\ c_{14}x_1\,]$. Il faut vérifier les deux types d'égalités suivantes

$$a_1c_{11}x_2 = a_2c_{11}x_1, \quad \text{et} \quad a_1c_{14}x_1 = a_4c_{11}x_1.$$

Pour la première égalité on utilise $a_2x_1 = a_1x_2$ et pour la seconde $a_1c_{14} = a_4c_{11}$. Enfin on doit vérifier que $[\,a_1\ a_2\ a_3\ a_4\,]$ est proportionnelle à la transposée de

$$\begin{bmatrix} d_{11}x_1 + d_{22}y_1 + d_{33}z_1 \\ d_{11}x_2 + d_{22}y_2 + d_{33}z_2 \\ d_{11}x_3 + d_{22}y_3 + d_{33}z_3 \\ d_{14}x_1 + d_{24}y_2 + d_{34}z_3 \end{bmatrix}.$$

Ceci résulte d'une part de la proportionnalité de $[\,a_1\ a_2\ a_3\,]$ à chacune des lignes $[\,x_i\ y_i\ z_i\,]$, et d'autre part de la proportionnalité des lignes $[\,a_i\ a_4\,]$ aux lignes $[\,d_{i1}\ d_{i4}\,]$.

Notons pour terminer que le passage de $n-1$ à n (pour n'importe quel $n > 2$) est tout à fait analogue.

Exercice 9. On écrit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_m\rangle$, $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_n\rangle$. On peut supposer que $f = \sum_{k=1}^{m} a_k X^{k-1}$ et $g = \sum_{h=1}^{n} b_h X^{h-1}$.

1. Soit F une matrice de localisation principale pour $(a_1, \dots, a_m)$. Si $\mathrm{c}(f) = \mathfrak{a}$, on a des éléments comaximaux s_i (la diagonale de F) et des polynômes $f_i \in \mathbf{A}[X]$ (donnés par les lignes de F) qui satisfont les égalités $s_i f = a_i f_i$ dans $\mathbf{A}[X]$. En outre, le coefficient de X^{i-1} dans f_i est égal à s_i, donc $\mathrm{c}(f_i) \supseteq \langle s_i\rangle$.

En posant $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}\big[\frac{1}{s_i}\big]$, on a $\mathrm{c}(f_i) =_{\mathbf{A}_i} \langle 1\rangle$ et les égalités

$$s_i\mathrm{c}(fg) = \mathrm{c}(a_if_ig) = a_i\mathrm{c}(f_ig) =_{\mathbf{A}_i} a_i\mathrm{c}(g) =_{\mathbf{A}_i} \mathrm{c}(a_if_i)\mathrm{c}(g) = s_i\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)$$

(la troisième égalité vient du corollaire III-2.3 *4* car $\mathrm{c}(f_i) =_{\mathbf{A}_i} \langle 1\rangle$).

D'où l'égalité $\mathrm{c}(fg) = \mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g) = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ car elle est vraie dans chaque $\mathbf{A}_i$.

2. Si g est aussi localement principal on obtient de la même manière $t_jb = b_jg_j$ dans $\mathbf{A}[X]$, avec $\mathrm{c}(g_j) \supseteq \langle t_j\rangle$ et les t_j comaximaux dans $\mathbf{A}$. On a donc

$$s_it_j\mathrm{c}(fg) =_{\mathbf{A}_{ij}} a_ib_j\mathrm{c}(f_ig_j) =_{\mathbf{A}_{ij}} \langle a_ib_j\rangle.$$

Ceci nous dit que l'idéal $\mathrm{c}(fg) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ devient principal après mn localisations comaximales. Comme cet idéal admet $m+n-1$ générateurs (les coefficients de fg) il y a une matrice de localisation principale pour ces générateurs.

Pour la calculer, on peut utiliser la démonstration de l'implication *1* $\Rightarrow$ *3* dans le théorème V-7.3. Cette démonstration est assez simple, de même que le calcul qu'elle sous-tend. Mais si l'on examine en détail ce qui va se passer, on s'aperçoit que dans la démonstration ci-dessus on a utilisé le lemme de Gauss-Joyal : sur l'anneau $\mathbf{A}_{ij}$, on a $1 \in \mathrm{c}(f_i)\mathrm{c}(g_j)$ car $1 \in \mathrm{c}(f_i)$ et $1 \in \mathrm{c}(g_j)$. Ce lemme admet plusieurs démonstrations élémentaires (voir II-2.6 et III-2.3), mais aucune ne donne une formule simple qui permette de fournir la combinaison linéaire des coefficients de fg égale à 1, à partir des deux combinaisons linéaires des coefficients de f et de ceux de g.

Merci à la lectrice qui nous indiquera un calcul direct court, par exemple dans le cas où l'anneau est intègre à divisibilité explicite [5].

5. Notons que dans le cas d'un anneau intègre à divisibilité explicite, une matrice de localisation principale est connue à partir de ses seuls éléments diagonaux, ce qui peut simplifier les calculs.

Exercice 10. On écrit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$.
On utilisera le résultat de l'exercice 8 qui montre que si tout idéal à deux générateurs est localement principal, alors tout idéal de type fini est localement principal.
1. Dans l'exercice V-16 point *4* on a montré que $1 \in (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{a})$, $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est de type fini et $\mathfrak{ab} = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})$.
Si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ est localement principal, il y a un système d'éléments comaximaux tel qu'en inversant l'un quelconque d'entre eux, l'idéal est engendré par un a_k ou un b_ℓ. Mais si $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle a_k \rangle \subseteq \mathfrak{a}$, on a $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, donc $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{b}$, localement principal par hypothèse. Ainsi $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ est localement principal car il est localement principal après localisation en des éléments comaximaux.
2. Si l'anneau est intègre et si $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{ab}$ pour $\mathfrak{a} = \langle a \rangle$ et $\mathfrak{b} = \langle b \rangle$ (où $a, b \neq 0$), on obtient que $\langle a, b \rangle\, (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \langle ab \rangle$, donc $\langle a, b \rangle$ est inversible (et aussi $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$ par la même occasion). Lorsque c'est vérifié pour tous $a, b \neq 0$, l'anneau est arithmétique.
3. La seule implication délicate consiste à montrer que si $\mathbf{A}$ est localement sans diviseur de zéro et si $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{ab}$ lorsque $\mathfrak{a} = \langle a \rangle$ et $\mathfrak{b} = \langle b \rangle$ alors l'anneau est arithmétique, autrement dit tout idéal $\langle a, b \rangle$ est localement principal.
Si $\langle a, b \rangle\, (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \langle ab \rangle$, on écrit $ab = au + bv$ avec u et $v \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$:

$$u = ax = by,\ v = az = bt,\ \text{ d'où } au + bv = ab(y + z) = ab.$$

Puisque l'anneau est localement sans diviseur de zéro, de l'égalité $ab(y + z - 1) = 0$, on déduit trois localisations comaximales dans lesquelles on obtient respectivement $a = 0$, $b = 0$ et $1 = y + z$. Dans les deux premiers cas $\langle a, b \rangle$ est principal. Dans le dernier cas $\langle a, b \rangle$ est localement principal (localiser en y ou en z).

Exercice 11. On écrit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle b_1, \dots, b_m \rangle$.
1. Démontré dans le point *4* de l'exercice V-16.
2. On suppose maintenant $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$, i.e., on a s, $t \in \mathbf{A}$ avec

$$s + t = 1,\ s\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b},\ t\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}.$$

2a. $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) : \mathfrak{c} = (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{c})$. Dans cette égalité comme dans les suivantes (jusqu'à *2f*), une inclusion n'est pas évidente (ici c'est $\subseteq$). Prouver l'inclusion non évidente revient à résoudre un système linéaire (ici, étant donné un x tel que $x\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, on cherche y et z tels que $x = y + z$, $y\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}$ et $z\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{b}$).
On peut donc utiliser le principe local-global de base avec les éléments comaximaux s et t.
Lorsqu'on inverse s, on obtient $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, et lorsqu'on inverse t, on obtient $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$. Dans les deux cas l'inclusion souhaitée devient triviale.
Pour mémoire : *2b.* $\mathfrak{c} : (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c} : \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} : \mathfrak{b})$. *2c.* $(\mathfrak{a} + \mathfrak{b})(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$.
2d. $\mathfrak{c}\,(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = \mathfrak{c}\,\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c}\,\mathfrak{b}$. *2e.* $\mathfrak{c} + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c} + \mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{c} + \mathfrak{b})$.
2f. $\mathfrak{c} \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) = (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} \cap \mathfrak{b})$.
2g. La suite exacte courte ci-après (où $\delta(x) = (x, -x)$ et $\sigma(y, z) = y + z$) est scindée :

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{a} \times \mathfrak{b} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \longrightarrow 0.$$

On veut définir $\tau : \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ telle que $\sigma \circ \tau = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.
Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$, on peut prendre $\tau(b) = (0, b)$ pour tout $b \in \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Si $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, on peut prendre $\tau(a) = (a, 0)$ pour tout $a \in \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$.
Dans le premier cas cela implique $s\tau(a_i) = \left(0, \sum_j x_{ij} b_j\right)$ et $s\tau(b_j) = (0, sb_j)$.

Dans le second cas cela implique $t\tau(b_j) = \big(\sum_i y_{ji}a_i, 0\big)$ et $t\tau(a_i) = (ta_i, 0)$.
On essaie donc de définir τ par la formule suivante qui coïncide avec les deux précédentes dans les deux cas particuliers.

$$\tau(a_i) = \big(ta_i, \textstyle\sum_j x_{ij}b_j\big),\ \ \tau(b_j) = \big(\sum_i y_{ji}a_i, sb_j\big).$$

Pour que cette tentative réussisse, il faut et suffit que lorsque $\sum_i \alpha_i a_i = \sum_j \beta_j b_j$, on ait l'égalité

$$\textstyle\sum_i \alpha_i\big(ta_i, \sum_j x_{ij}b_j\big) = \sum_j \beta_j\big(\sum_i y_{ji}a_i, sb_j\big).$$

Ceci résulte pour la première coordonnée du calcul suivant (même chose pour la deuxième coordonnée).

$$\textstyle\sum_i \alpha_i t a_i = t\sum_i \alpha_i a_i = t\sum_j \beta_j b_j = \sum_j \beta_j t b_j = \sum_j \beta_j \sum_i y_{ji}a_i.$$

Enfin l'égalité $\sigma\circ\tau = \mathrm{Id}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$ est satisfaite parce qu'elle l'est en restriction à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ (calcul immédiat).

Exercice 12. *1.* Démontré dans l'exercice 9.
2. Soient a, b, c, $d \in \mathbf{A}$. On pose $\mathfrak{a} = \langle a, b\rangle$
On considère $f = aX + b$ et $g = aX - b$, on obtient $\langle a, b\rangle^2 = \big\langle a^2, b^2\big\rangle$, i.e.,

$$ab = ua^2 + vb^2.$$

En considérant $f = cX + d$ et $g = dX + c$, on obtient $\langle c, d\rangle^2 = \big\langle c^2 + d^2, cd\big\rangle$.
Autrement dit c^2 et $d^2 \in \big\langle c^2 + d^2, cd\big\rangle$.
On pose $\mathfrak{b} = \langle ua, vb\rangle$. On a $ab \in \mathfrak{ab}$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = \big\langle a^2b^2\big\rangle$ car cela implique $\mathfrak{a}$ inversible (on traite le cas a, $b \in \mathbf{A}^*$). Or on a

$$a^2b^2 \in \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = \big\langle a^2, b^2\big\rangle\big\langle u^2a^2, v^2b^2\big\rangle.$$

Il nous faut donc montrer que u^2a^4 et $v^2b^4 \in \big\langle a^2b^2\big\rangle$. Posons $u_1 = ua^2$ et $v_1 = vb^2$.
On a $u_1 + v_1 = ab$ et $u_1v_1 \in \big\langle a^2b^2\big\rangle$. Donc aussi $u_1^2 + v_1^2 \in \big\langle a^2b^2\big\rangle$.
Et puisque $u_1^2 \in \big\langle u_1^2 + v_1^2, u_1v_1\big\rangle$, on obtient bien $u_1^2 \in \big\langle a^2b^2\big\rangle$ (même chose pour v_1^2).
3. Les égalités du point *2* sont toutes satisfaites.
Montrons d'abord que l'anneau est localement sans diviseur de zéro.
On suppose $cd = 0$, puisque $c^2 \in \big\langle c^2 + d^2, cd\big\rangle$, on a $c^2 = x(c^2 + d^2)$, i.e.

$$xd^2 = (1 - x)c^2.$$

On en déduit que $xd^3 = 0$, et comme $\mathbf{A}$ est réduit, $xd = 0$. De même $(1 - x)c = 0$.
Voyons maintenant que l'anneau est arithmétique. On part de a, b arbitraires et on veut montrer que $\langle a, b\rangle$ est localement principal. D'après le point *2* on a un idéal $\mathfrak{c}$ tel que $\langle a, b\rangle\,\mathfrak{c} = \big\langle a^2b^2\big\rangle$. On a donc x et y avec

$$\langle a, b\rangle\,\langle x, y\rangle = \big\langle a^2b^2\big\rangle \ \text{ et } ax + by = a^2b^2.$$

On écrit $ax = a^2b^2v$ et $by = a^2b^2u$. De l'égalité $a(ab^2v - x) = 0$, on déduit deux localisations comaximales, dans la première $a = 0$, dans la seconde $x = ab^2v$. On suppose donc sans perte de généralité que $x = ab^2v$ et, symétriquement $y = ba^2u$.
Ceci donne

$$\langle a, b\rangle\,\langle x, y\rangle = ab\,\langle a, b\rangle\,\langle au, bv\rangle = \big\langle a^2b^2\big\rangle.$$

On peut encore supposer sans perte de généralité que $\langle a, b\rangle\,\langle au, bv\rangle = \langle ab\rangle$.
On a aussi $ax + by = a^2b^2(u + v)$ et puisque $ax + by = a^2b^2$, on suppose sans perte de généralité que $u + v = 1$.

Puisque $a^2u = abu'$, on suppose sans perte de généralité que $au = bu'$.
Symétriquement $bv = av'$, et puisque $u + v = 1$, $\langle a, b\rangle$ est localement principal.

Exercice 14. *1.* Soit $a \in \mathbf{A}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ qui engendrent $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(a)$. Si l'un des a_i est dans $\mathbf{A}^\times$, on obtient $a = 0$ et $\mathfrak{a} = \langle 1\rangle$. Il reste à traiter le cas où tous les a_i sont dans $\mathfrak{m}$. Soit b l'un des a_i. Puisque $\mathfrak{m}$ est plat et $b \in \mathfrak{m}$, la relation $ab = 0$ nous donne des éléments $c_1, \ldots, c_m \in \mathfrak{a}$ et $b_1, \ldots, b_m \in \mathfrak{m}$ avec $b = \sum_{i\in[\![1..m]\!]} c_i b_i$. Donc $b \in \mathfrak{am}$, ce qui donne $b = \sum_{i\in[\![1..n]\!]} a_i z_i$ pour des $z_i \in \mathfrak{m}$. D'où une égalité matricielle

$$[\,a_1\ \cdots\ a_n\,] = M\,[\,a_1\ \cdots\ a_n\,] \quad \text{avec } M \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{m}).$$

Ainsi $[\,a_1\ \cdots\ a_n\,](\mathrm{I}_n - M) = [\,0\ \cdots\ 0\,]$ avec $\mathrm{I}_n - M$ inversible, donc $\mathfrak{a} = 0$.
2. On considère a, $b \in \mathbf{A}$, on doit démontrer que l'un divise l'autre. Si l'un des deux est inversible, l'affaire est entendue. Il reste à examiner le cas où a et $b \in \mathfrak{m}$. On considère une matrice

$$P = \begin{bmatrix} a_1 & \cdots & a_n \\ b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix}$$

dont les colonnes engendrent le module K noyau de $(x, y) \mapsto bx - ay$. En particulier on a $a_i b = b_i a$ pour chaque i. Si l'un des a_i ou b_i est inversible, l'affaire est entendue. Il reste à examiner le cas où les a_i et b_i sont dans $\mathfrak{m}$.
Soit (c, d) l'un des (a_i, b_i). Puisque $\mathfrak{m}$ est plat et a, $b \in \mathfrak{m}$, la relation $cb - da = 0$ donne

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & \cdots & c_m \\ d_1 & \cdots & d_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \text{avec les } y_i \in \mathfrak{m} \text{ et les } \begin{bmatrix} c_j \\ d_j \end{bmatrix} \in K.$$

En exprimant les $\begin{bmatrix} c_j \\ d_j \end{bmatrix}$ comme combinaisons linéaires des colonnes de P on obtient

$$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \quad \text{avec les } z_i \in \mathfrak{m}.$$

D'où ensuite $P = PN$ avec une matrice $N \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{m})$, puis $P = 0$. Ceci implique que $(a, b) = (0, 0)$, et a divise b (en fait, dans ce cas, $\mathbf{A}$ est trivial).

Exercice 15. Soient $a_i \in \mathbf{A}$, $x_i \in M$ vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i x_i \equiv 0 \bmod K$, relation que l'on doit expliquer. On pose $\mathfrak{a} = \langle \underline{a}\rangle$ de sorte que $\mathfrak{a}K = \sum_i a_i K$; on peut écrire, puisque $\sum_i a_i x_i \in \mathfrak{a}M \cap K = \mathfrak{a}K$, une égalité $\sum_i a_i x_i = \sum a_i y_i$ avec les $y_i \in K$. On a donc, avec $z_i = x_i - y_i$, la relation $\sum_i a_i z_i = 0$ dans M. Puisque M est plat, cette relation produit un certain nombre de vecteurs de M, disons 3 pour simplifier, notés u, v, w et 3 suites de scalaires $\underline{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\underline{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ et $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, le tout vérifiant :

$$(z_1, \ldots, z_n) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,u + (\beta_1, \ldots, \beta_n)\,v + (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\,w$$

et $\langle \underline{a} \,|\, \underline{\alpha}\rangle = \langle \underline{a} \,|\, \underline{\beta}\rangle = \langle \underline{a} \,|\, \underline{\gamma}\rangle = 0$.
Puisque $z_i \equiv x_i \bmod K$, on obtient notre explication convoitée dans M/K :

$$(x_1, \ldots, x_n) \equiv (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\,u + (\beta_1, \ldots, \beta_n)\,v + (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)\,w \bmod K.$$

Exercice 16. *(Tout module est quotient d'un module plat)*
On suppose sans perte de généralité que I est finiment énuméré. Autrement dit $I = \{i_1, \dots, i_n\}$. On note $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.
Supposons d'abord que les modules M_i sont plats, et considérons une syzygie dans M

$$0 = \sum_{\ell\in[\![1..m]\!]} a_\ell x_\ell = \sum_{\ell\in[\![1..m]\!]} a_\ell(\oplus_{k\in[\![1..n]\!]} x_{k,\ell}) = \oplus_{k\in[\![1..n]\!]} y_k$$

avec $y_k = \sum_{\ell\in[\![1..m]\!]} a_\ell x_{k,\ell}$ et les $x_{k,\ell} \in M_{i_k}$.
Par définition de l'égalité dans M, puisque $\oplus_{k\in[\![1..n]\!]} y_k = 0$, on est dans (au moins) l'un des deux cas suivants :

— tous les y_k sont nuls,

— deux indices sont égaux dans I : $i_k =_I i_h$ pour h et k distincts dans $[\![1..n]\!]$.

Le premier cas se traite comme celui d'une somme directe sur un I fini. Le deuxième cas se ramène au premier par récurrence sur n.
Supposons maintenant que M est plat et considérons par exemple l'indice $i_1 \in I$ et une syzygie $\sum_{\ell\in[\![1..m]\!]} a_\ell x_\ell = 0$ dans M_{i_1}. On explique cette syzygie dans M en écrivant

$$x_\ell =_M \sum_{j\in[\![1..p]\!]} g_{\ell,j} z_j \text{ avec } \sum_{\ell\in[\![1..m]\!]} a_\ell g_{\ell,j} =_{\mathbf{A}} 0 \text{ pour chaque } j.$$

On réécrit $z_j = \oplus_{k\in[\![1..n]\!]} y_{j,k}$ avec $y_{j,k} \in M_{i_k}$, ce qui donne

$$x_\ell =_M \oplus_{k\in[\![1..p]\!]} \sum_{j\in[\![1..p]\!]} g_{\ell,j} y_{j,k} =_M \oplus_{k\in[\![1..n]\!]} y_{\ell,k}.$$

Par définition de l'égalité dans M, on est dans (au moins) l'un des deux cas suivants :

— pour chaque ℓ, on a $x_\ell = \sum_{j\in[\![1..n]\!]} g_{\ell,j} y_{\ell,1}$ dans M_{i_1},

— on a dans I : $i_1 =_I i_h$ pour un $h \neq 1$ dans $[\![1..n]\!]$.

Dans le premier cas on a dans M_{i_1} les égalités qui nous conviennent.
Le deuxième cas se ramène au premier par récurrence sur n.

Commentaires bibliographiques

Les anneaux de Prüfer intègres ont été introduits par H. Prüfer en 1932 dans [149]. Leur place centrale en théorie multiplicative des idéaux est mise en valeur dans le livre de référence sur le sujet [Gilmer]. Bien qu'ils aient été introduits de manière très concrète comme les anneaux intègres dans lequel tout idéal de type fini non nul est inversible, cette définition a fait souvent place dans la littérature moderne à la suivante, purement abstraite, qui ne fonctionne qu'en présence de principes non constructifs (tiers exclu et axiome du choix) : la localisation en n'importe quel idéal premier donne un anneau de valuation.
Les anneaux arithmétiques sont introduits par L. Fuchs en 1949 dans [87]. Dans le cas d'un anneau non intègre, la définition que nous avons adoptée pour les anneaux de Prüfer est due à Hermida et Sánchez-Giralda [101]. C'est celle qui nous a paru la plus naturelle, vue l'importance centrale du concept de platitude en algèbre commutative. Un autre nom pour ces anneaux, dans la littérature est *anneau de dimension globale faible inférieure*

ou égale à un, ce qui est plutôt inélégant. Par ailleurs, on trouve souvent dans la littérature un anneau de Prüfer défini comme un anneau dans lequel tout idéal contenant un élément régulier est inversible. Ce sont donc presque des anneaux arithmétiques, mais le comportement des idéaux ne contenant pas d'élément régulier semble tout à fait aléatoire (cf. exercice 13).
Un exposé assez complet sur les anneaux arithmétiques et les anneaux de Prüfer écrit dans le style des mathématiques constructives se trouve dans [69, Ducos&al.] et [126, Lombardi].
Un survey très complet sur les variations de la notion d'anneau de Prüfer intègre quand on supprime l'hypothèse d'intégrité est donné dans [11, Bazzoni&Glaz], y compris les anneaux gaussiens (exercice 12).

Chapitre IX

Anneaux locaux, ou presque

Sommaire

1. Quelques définitions constructives

En mathématiques classiques un anneau local est souvent défini comme un anneau possédant un seul idéal maximal. Autrement dit les éléments non inversibles forment un idéal. Cette deuxième définition a l'avantage d'être plus simple (pas de quantification sur l'ensemble des idéaux). Elle se prête cependant relativement mal à un traitement algorithmique à cause de la négation contenue dans « éléments non inversibles ». C'est la raison pour laquelle on adopte en mathématiques constructives la définition donnée page 219 : si la somme de deux éléments est inversible, l'un des deux est inversible.

Nous nous trouvons maintenant dans l'obligation d'infliger au lecteur classique quelques définitions peu usuelles pour lui, dans la même lignée que la définition d'anneau local. Qu'il se rassure, sur d'autres planètes, dans d'autres systèmes solaires, c'est sans doute la situation symétrique qui se produit. Les mathématiques y ont toujours été constructives et l'on vient à peine d'y découvrir l'intérêt du point de vue cantorien abstrait. Une auteure dans le nouveau style est en train d'expliquer que pour elle il est beaucoup plus simple de voir un anneau local comme un anneau possédant un seul idéal maximal. Le lecteur fera-t-il l'effort de la suivre ?

Radical de Jacobson, anneaux locaux, corps

Rappelons que pour un anneau $\mathbf{A}$ nous notons $\mathbf{A}^\times$ le groupe multiplicatif des éléments inversibles, encore appelé groupe des unités.

Un élément x d'un anneau $\mathbf{A}$ est dit *noninversible* (en un seul mot) s'il vérifie [1] l'implication suivante

$$x \in \mathbf{A}^\times \;\Rightarrow\; 1 =_{\mathbf{A}} 0.$$

Dans l'anneau trivial l'élément 0 est à la fois inversible et noninversible.

Pour un anneau commutatif arbitraire, l'ensemble des éléments a de $\mathbf{A}$ qui vérifient

$$\forall x \in \mathbf{A} \quad 1 + ax \in \mathbf{A}^\times \tag{1}$$

1. Nous utilisons ici une version légèrement affaiblie de la négation. Pour une propriété P portant sur des éléments de l'anneau $\mathbf{A}$ ou d'un $\mathbf{A}$-module M, nous considérons la propriété $\mathsf{P}' := (\mathsf{P} \Rightarrow 1 =_{\mathbf{A}} 0)$. C'est la négation de P lorsque l'anneau n'est pas trivial. Il arrive pourtant souvent qu'un anneau construit dans une preuve puisse être trivial sans qu'on le sache. Pour faire un traitement entièrement constructif de la preuve classique usuelle dans une telle situation (la preuve classique exclut le cas de l'anneau trivial par un argument ad hoc) notre version affaiblie de la négation s'avère alors en général utile. Un corps discret (en un seul mot), ne vérifie pas nécessairement l'axiome des ensembles discrets $\forall x, y\ \big(x = y \text{ ou } \neg(x = y)\big)$ mais il vérifie sa version affaiblie :

$$\forall\, x,\, y,\ \big(x = y \ \text{ ou } \ (x = y)'\big),$$

puisque si 0 est inversible, alors $1 = 0$.

est appelé le *radical de Jacobson* de $\mathbf{A}$. Il sera noté $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$. C'est un idéal parce que si a, $b \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, on peut écrire, pour $x \in \mathbf{A}$:

$$1 + (a+b)x = (1+ax)(1+(1+ax)^{-1}bx),$$

qui est produit de deux éléments inversibles.
Dans un anneau local le radical de Jacobson est égal à l'ensemble des éléments noninversibles (le lecteur est invité à en écrire la preuve constructive). En mathématiques classiques le radical de Jacobson est caractérisé comme suit.

1.1. Lemme***.** *Le radical de Jacobson est égal à l'intersection des idéaux maximaux.*

▷ Si $a \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ et $a \notin \mathfrak{m}$ avec $\mathfrak{m}$ un idéal maximal, on a $1 \in \langle a\rangle + \mathfrak{m}$ ce qui signifie que pour un x, $1 + xa \in \mathfrak{m}$, donc $1 \in \mathfrak{m}$: contradiction.
Si $a \notin \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, il existe x tel que $1 + xa$ est non inversible. Donc il existe un idéal strict contenant $1 + xa$. Par le lemme de Zorn il existe un idéal maximal $\mathfrak{m}$ contenant $1 + xa$, et a ne peut pas être dans $\mathfrak{m}$ car sinon on aurait $1 = (1 + xa) - xa \in \mathfrak{m}$.
La lectrice pourra remarquer que la preuve dit en fait ceci : un élément x est dans l'intersection des idéaux maximaux si, et seulement si, est vérifiée l'implication : $\langle x, y\rangle = \langle 1\rangle \Rightarrow \langle y\rangle = \langle 1\rangle$. □

Remarque. Nous avons raisonné avec un anneau non trivial. Si l'anneau est trivial l'intersection de l'ensemble (vide) des idéaux maximaux est bien égale à $\langle 0\rangle$. ■

Un *corps de Heyting*, ou simplement un *corps*, est par définition un anneau local dans lequel tout élément noninversible est nul, autrement dit un anneau local dont le radical de Jacobson est réduit à 0.
En particulier, un corps discret, donc aussi l'anneau trivial, est un corps. Les nombres réels forment un corps qui *n'est pas* un corps discret [2]. Même remarque pour le corps $\mathbb{Q}_p$ des nombres p-adiques ou celui des séries formelles de Laurent $\mathbf{k}(\!(T)\!)$ lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret.
Le lecteur vérifiera qu'un corps est un corps discret si, et seulement si, il est zéro-dimensionnel.

Le quotient d'un anneau local par son radical de Jacobson est un corps, appelé *corps résiduel de l'anneau local*.

1.2. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel,* $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$.

▷ L'inclusion $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} \supseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ est toujours vraie. Si maintenant $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel et $x \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, puisque l'on a une égalité $x^\ell(1 - ax) = 0$, il est clair que $x^\ell = 0$. □

2. Nous utilisons la négation en italique pour indiquer que l'affirmation correspondante, ici ce serait « $\mathbb{R}$ est un corps discret », n'est pas prouvable en mathématiques constructives.

1.3. Lemme. *Pour tout* $\mathbf{A}$, $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}[X]) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)[X]$.

▷ Si $f \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}[X])$, alors $1 + Xf(X) \in \mathbf{A}[X]^\times$. On conclut avec le lemme II-2.6 *4*. □

1.4. Fait. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau et* $\mathfrak{a}$ *un idéal contenu dans* $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$.

1. $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} = \pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}}^{-1}(\mathrm{Rad}\,(\mathbf{A}/\mathfrak{a})) \supseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
2. $\mathbf{A}$ *est local si, et seulement si,* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *est local.*
3. $\mathbf{A}$ *est local et* $\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ *si, et seulement si,* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *est un corps.*

Le fait qui suit décrit une construction qui force un monoïde à s'inverser et un idéal à se radicaliser (pour plus de détails voir le paragraphe « Dualité dans les anneaux commutatifs » page 658 et suivantes, et la section XV-1).

1.5. Fait. *Soient* U *un monoïde et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$. *Nous considérons le monoïde* $S = U + \mathfrak{a}$. *Notons* $\mathbf{B} = S^{-1}\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}\mathbf{B}$.

1. *L'idéal* $\mathfrak{b}$ *est contenu dans* $\mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$.
2. *L'anneau* $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ *est isomorphe à* $\mathbf{A}_U/\mathfrak{a}\mathbf{A}_U$.

Par définition un *anneau local résiduellement discret* est un anneau local dont le corps résiduel est un corps discret. Un tel anneau $\mathbf{A}$ peut être caractérisé par l'axiome suivant

$$\forall x \in \mathbf{A} \qquad x \in \mathbf{A}^\times \ \text{ ou } \ 1 + x\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}^\times \tag{2}$$

(la lectrice est invitée à en écrire la preuve constructive).
Par exemple l'anneau des entiers p-adiques, quoique *non* discret, est résiduellement discret.
On obtient un anneau local *non* résiduellement discret en prenant $\mathbf{K}[u]_{1+\langle u\rangle}$, où $\mathbf{K}$ est un corps *non* discret (par exemple le corps des séries formelles $\mathbf{k}(\!(t)\!)$, où $\mathbf{k}$ est un corps discret).

Commentaire. La différence un peu subtile qui sépare les anneaux locaux des anneaux locaux résiduellement discrets se retrouve, en permutant l'addition et la multiplication, dans la différence qui sépare les anneaux sans diviseur de zéro des anneaux intègres.
En mathématiques classiques un anneau sans diviseur de zéro est intègre ; les deux notions n'ont cependant pas le même contenu algorithmique, c'est la raison pour laquelle on les distingue en mathématiques constructives. ■

1.6. Définition. Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *résiduellement zéro-dimensionnel* lorsque $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel. Même chose pour *résiduellement connexe*.

Puisqu'un corps est zéro-dimensionnel si, et seulement si, c'est un corps discret, un anneau local est résiduellement discret si, et seulement si, il est résiduellement zéro-dimensionnel.

Commentaire. En mathématiques classiques un anneau $\mathbf{A}$ est dit semi-local si $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ est isomorphe à un produit fini de corps discrets. Ceci implique que c'est un anneau résiduellement zéro-dimensionnel. En fait l'hypothèse de finitude présente dans la notion d'anneau semi-local est rarement décisive. La plupart des théorèmes de la littérature concernant les anneaux semi-locaux s'appliquent aux anneaux résiduellement zéro-dimensionnels, voire aux anneaux local-globals (section 6). Sur une définition possible d'anneau semi-local en mathématiques constructives voir les exercices 18 et 19. ∎

Idéaux premiers, maximaux

En mathématiques constructives, un idéal d'un anneau $\mathbf{A}$ est appelé un *idéal maximal* lorsque l'anneau quotient est un corps [3]. Un idéal est appelé un *idéal premier* lorsque l'anneau quotient est sans diviseur de zéro.
Ces définitions coïncident avec les définitions usuelles si l'on se situe en mathématiques classiques, à ceci près que nous tolérons l'anneau trivial comme corps et donc l'idéal $\langle 1\rangle$ comme idéal maximal et comme idéal premier.
Dans un anneau non trivial, un idéal est strict, maximal et détachable si, et seulement si, l'anneau quotient est un corps discret non trivial, il est strict, premier et détachable si, et seulement si, l'anneau quotient est un anneau intègre non trivial.

Commentaire. Ce n'est pas sans une certaine appréhension que nous décrétons l'idéal $\langle 1\rangle$ à la fois premier et maximal. Cela nous obligera à dire « idéal premier strict » ou « idéal maximal strict » pour parler des idéaux premiers et idéaux maximaux « usuels ». Fort heureusement ce sera très rare.
Nous pensons en fait qu'il y a eu *une erreur de casting au départ.* Imposer à un corps ou à un anneau intègre d'être non trivial, chose qui semblait éminemment raisonnable a priori, a conduit inconsciemment les mathématiciens à transformer de nombreux raisonnements constructifs en raisonnements par l'absurde. Pour démontrer qu'un idéal construit au cours d'un calcul est égal à $\langle 1\rangle$, on a pris l'habitude de faire le raisonnement suivant : si ce n'était pas le cas, il serait contenu dans un idéal maximal et le quotient serait un corps, dans lequel on aboutit à la contradiction $0 = 1$. Ce raisonnement s'avère être un raisonnement par l'absurde pour l'unique raison que l'on a commis l'erreur de casting : on a interdit à l'anneau trivial d'être un corps. Sans cette interdiction, on présenterait le raisonnement comme un raisonnement

3. Nous avons jusqu'à maintenant utilisé la notion d'idéal maximal uniquement dans le cadre des preuves en mathématiques classiques. Une définition constructive s'imposait à un moment ou un autre. En fait nous n'utiliserons que rarement cette notion en mathématiques constructives. En règle générale elle est avantageusement remplacée par la considération du radical de Jacobson, par exemple dans le cas des anneaux locaux.

direct sous la forme suivante : montrons que tout idéal maximal de l'anneau quotient contient 1. Nous reviendrons sur ce point dans la section XV-6. Par ailleurs, comme nous utiliserons les idéaux premiers et les idéaux maximaux essentiellement à titre heuristique, notre transgression de l'interdit usuel concernant l'anneau trivial n'aura pratiquement aucune conséquence pour la lecture. En outre, la lectrice pourra remarquer que cette convention inhabituelle n'oblige pas à modifier la plupart des résultats établis spécifiquement en mathématiques classiques, comme le principe local-global abstrait* II-2.13, le fait* II-2.12 ou le lemme* 1.1 : il suffit par exemple [4] pour la localisation en un idéal premier $\mathfrak{p}$ de la définir comme la localisation en le filtre

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in \mathbf{A} \mid x \in \mathfrak{p} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{p} \,\}.$$

Sur le fond nous pensons que les mathématiques sont plus pures et plus élégantes lorsque l'on évite d'utiliser la négation (cela interdit radicalement les raisonnements par l'absurde par exemple). C'est pour cette raison que l'on ne trouvera dans cet ouvrage aucune définition qui utilise la négation [5]. ■

Radical de Jacobson et unités dans une extension entière

1.7. Théorème. *Soit* $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$ *avec* $\mathbf{A}$ *entier sur* $\mathbf{k}$.

1. *Si* $y \in \mathbf{A}^\times$, *alors* $y^{-1} \in \mathbf{k}[y]$.
2. $\mathbf{k}^\times = \mathbf{k} \cap \mathbf{A}^\times$.
3. $\operatorname{Rad}\mathbf{k} = \mathbf{k} \cap \operatorname{Rad}\mathbf{A}$ *et l'homomorphisme* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\operatorname{Rad}(\mathbf{k})\mathbf{A}$ *réfléchit les unités* [6].

▷ *1.* Soit $y, z \in \mathbf{A}$ tels que $yz = 1$. On a une relation de dépendance intégrale pour z : $z^n = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$ ($a_i \in \mathbf{k}$). En multipliant par y^n on obtient $1 = yQ(y)$ donc $z = Q(y) \in \mathbf{k}[y]$.
2. En particulier, si $y \in \mathbf{k}$ est inversible dans $\mathbf{A}$, son inverse z est dans $\mathbf{k}$.
3. Soit $x \in \mathbf{k} \cap \operatorname{Rad}\mathbf{A}$, pour tout $y \in \mathbf{k}$, $1 + xy$ est inversible dans $\mathbf{A}$ donc aussi dans $\mathbf{k}$. Ceci donne l'inclusion $\operatorname{Rad}\mathbf{k} \supseteq \mathbf{k} \cap \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.
Soit $x \in \operatorname{Rad}\mathbf{k}$ et $b \in \mathbf{A}$. Nous voulons montrer que $y = -1 + xb$ est inversible. On écrit une relation de dépendance intégrale pour b :

$$b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_0 = 0,$$

on multiplie par x^n et l'on remplace bx par $1 + y$. Il vient un polynôme en y à coefficients dans $\mathbf{k}$: $y^n + \cdots + (1 + a_{n-1}x + \cdots + a_0x^n) = 0$.

4. Le fait* II-2.2 pourrait également être traité selon le même schéma, en supprimant d'ailleurs la restriction au cas non trivial.

5. Si c'était le cas, ce serait dans un cadre où la négation équivaut à une affirmation positive, parce que la propriété considérée est décidable.

6. Rappelons que l'on dit qu'un homomorphisme $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ réfléchit les unités lorsque $\rho^{-1}(\mathbf{B}^\times) = \mathbf{A}^\times$.

Donc, $yR(y) = 1 + xS(x)$ est inversible dans $\mathbf{k}$, et y est inversible dans $\mathbf{A}$. Soit maintenant $y \in \mathbf{A}$ qui est inversible modulo $\mathrm{Rad}(\mathbf{k})\mathbf{A}$. A fortiori il est inversible modulo $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, donc il est inversible. □

1.8. Théorème. *Soit* $\mathbf{k} \subseteq \mathbf{A}$ *avec* $\mathbf{A}$ *entier sur* $\mathbf{k}$.

1. $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel si, et seulement si,* $\mathbf{k}$ *est zéro-dimensionnel.*
2. $\mathbf{A}$ *est résiduellement zéro-dimensionnel si, et seulement si,* $\mathbf{k}$ *est résiduellement zéro-dimensionnel. Dans ce cas* $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{Rad}(\mathbf{k})\mathbf{A}\big)$.
3. *Si* $\mathbf{A}$ *est local,* $\mathbf{k}$ *également.*

𝔇 *1.* Déjà connu (lemmes VI-3.14 et IV-8.15).
2. Par passage au quotient, le morphisme entier $\mathbf{k} \to \mathbf{A}$ donne un morphisme entier $\mathbf{k}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{k} \to \mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, qui est injectif parce que $\mathrm{Rad}\,\mathbf{k} = \mathbf{k} \cap \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ (théorème 1.7). Donc, les deux anneaux sont simultanément zéro-dimensionnels. Dans ce cas, notons $\mathfrak{a} = \mathrm{Rad}(\mathbf{k})\,\mathbf{A} \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$. On a un morphisme entier

$$\mathbf{k}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{k} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}\,,$$

donc $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est zéro-dimensionnel, de sorte que son radical de Jacobson est égal a son radical nilpotent (lemme 1.2), i.e. $\mathrm{Rad}(\mathbf{A})/\mathfrak{a} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})/\mathfrak{a}$, et donc $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
3. Résulte du théorème 1.7, point *2.* □

2. Quatre lemmes importants

Tout d'abord nous donnons quelques variantes du « truc du déterminant » souvent appelé « lemme de Nakayama ». Dans ce lemme la chose importante à souligner est que le module M est de type fini.

2.1. Lemme de Nakayama. (Le truc du déterminant)
Soient M un $\mathbf{A}$-module de type fini et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$.

1. *Si $\mathfrak{a}\,M = M$, il existe $x \in \mathfrak{a}$ tel que $(1-x)\,M = 0$.*
2. *Si en outre $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$, alors $M = 0$.*
3. *Si $N \subseteq M$, $\mathfrak{a}\,M + N = M$ et $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$, alors $M = N$.*
4. *Si $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ et $X \subseteq M$ engendre $M/\mathfrak{a}M$ comme $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module, alors X engendre M comme $\mathbf{A}$-module.*

▷ Nous montrons le point *1* et laissons les autres en exercice, comme conséquences faciles. Soit $V \in M^{n\times 1}$ un vecteur colonne formé avec des générateurs de M. L'hypothèse signifie qu'il existe une matrice $G \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{a})$ vérifiant $GV = V$. Donc $(\mathrm{I}_n - G)V = 0$, et en prémultipliant par la matrice cotransposée de $\mathrm{I}_n - G$, on obtient $\det(\mathrm{I}_n - G)V = 0$. Or $\det(\mathrm{I}_n - G) = 1 - x$ avec $x \in \mathfrak{a}$. □

Les modules projectifs de type fini sont localement libres au sens (faible) suivant : ils deviennent libres lorsque l'on localise en un idéal premier. Prouver ceci revient à montrer le *lemme de la liberté locale* (ci-après) qui affirme qu'un module projectif de type fini sur un anneau local est libre.

2.2. Lemme de la liberté locale. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau local. Tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}$ est libre de rang fini. De manière équivalente : toute matrice $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ est semblable à une matrice de projection standard*

$$\mathrm{I}_{r,n} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{bmatrix}.$$

Remarque. La formulation matricielle implique évidemment la première formulation, plus abstraite. Inversement si $M \oplus N = \mathbf{A}^n$, dire que M et N sont libres (de rangs r et $n-r$) revient à dire qu'il y a une base de $\mathbf{A}^n$ dont les r premiers éléments forment une base de M et les $n-r$ derniers une base de N, en conséquence la projection sur M parallèlement à N s'exprime sur cette base par la matrice $\mathrm{I}_{r,n}$. ■

Première démonstration, (preuve classique usuelle). Nous notons $x \mapsto \overline{x}$ le passage au corps résiduel. Si $M \subseteq \mathbf{A}^n$ est l'image d'une matrice de projection F et si $\mathbf{k}$ est le corps résiduel on considère une base de $\mathbf{k}^n$ qui commence par des colonnes de $\overline{F}$ ($\mathrm{Im}\,\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de dimension r) et se termine par des colonnes de $\mathrm{I}_n - \overline{F}$ ($\mathrm{Im}(\mathrm{I}_n - \overline{F}) = \mathrm{Ker}\,\overline{F}$). En considérant les colonnes correspondantes de $\mathrm{Im}\,F$ et $\mathrm{Im}(\mathrm{I}_n - F) = \mathrm{Ker}\,F$ on obtient

un relèvement de la base résiduelle en n vecteurs dont le déterminant est résiduellement inversible, donc inversible. Ces vecteurs forment une base de $\mathbf{A}^n$ et sur cette base il est clair que la projection admet pour matrice $\mathrm{I}_{r,n}$. Notez que dans cette preuve on extrait un système libre maximal parmi les colonnes d'une matrice à coefficients dans un corps. Cela se fait usuellement par la méthode du pivot de Gauss. Cela réclame donc que le corps résiduel soit discret. □

Deuxième démonstration, (preuve par Azumaya). Contrairement à la précédente cette preuve ne suppose pas que l'anneau local soit résiduellement discret. Nous allons diagonaliser la matrice F. La preuve fonctionne avec un anneau local non nécessairement commutatif.
Appelons f_1 le vecteur colonne $F_{1..n,1}$ de la matrice F, $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$ et φ l'application linéaire représentée par F.
– Premier cas, $f_{1,1}$ est inversible. Alors, $(f_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{A}^n$. Sur cette base, l'application linéaire φ admet une matrice

$$G = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0_{n-1,1} & F_1 \end{bmatrix}.$$

En écrivant $G^2 = G$, on obtient $F_1^2 = F_1$ et $LF_1 = 0$. On définit alors la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{bmatrix}$ et l'on obtient les égalités :

$$\begin{aligned} PGP^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & L \\ 0_{n-1,1} & F_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -L \\ 0_{n-1,1} & \mathrm{I}_{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & F_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

– Deuxième cas, $1 - f_{1,1}$ est inversible. On applique le calcul précédent à la matrice $\mathrm{I}_n - F$, qui est donc semblable à une matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & F_1 \end{bmatrix},$$

avec $F_1^2 = F_1$, ce qui signifie que F est semblable à une matrice

$$\mathrm{I}_n - A = \begin{bmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & H_1 \end{bmatrix},$$

avec $H_1^2 = H_1$.
On termine la preuve par récurrence sur n. □

Commentaire. Du point de vue classique, tous les ensembles sont discrets, et l'hypothèse correspondante est superflue dans la première preuve. La deuxième preuve doit être considérée comme supérieure à la première car son contenu algorithmique est plus universel que celui de la première (qui ne peut être rendue complètement explicite que lorsque l'anneau local est résiduellement discret). ■

Le lemme suivant peut être considéré comme une variante du lemme de la liberté locale.

2.3. Lemme de l'application localement simple. *Soit* **A** *un anneau local et* ψ *une application linéaire entre* **A***-modules libres de rang fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'application linéaire* ψ *est simple.*
2. *L'application linéaire* ψ *est localement simple.*
3. *L'application linéaire* ψ *a un rang fini* k*.*

▷ *2* $\Rightarrow$ *3.* L'égalité $\psi\varphi\psi = \psi$ implique que les idéaux déterminantiels de ψ sont idempotents. D'après le lemme II-4.6 ces idéaux sont engendrés par des idempotents. Comme un idempotent d'un anneau local est nécessairement égal à 0 ou 1, que $\mathcal{D}_0(\psi) = \langle 1\rangle$ et $\mathcal{D}_r(\psi) = \langle 0\rangle$ pour r assez grand, il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $\mathcal{D}_k(\psi) = \langle 1\rangle$ et $\mathcal{D}_{k+1}(\psi) = \langle 0\rangle$.
3 $\Rightarrow$ *1.* Par hypothèse $\mathcal{D}_k(\psi) = \langle 1\rangle$, donc les mineurs d'ordre k sont comaximaux et comme l'anneau est local un des mineurs d'ordre k est inversible. Comme $\mathcal{D}_{k+1}(\psi) = \langle 0\rangle$, le résultat est alors une conséquence du lemme de la liberté II-5.10. □

Notez que la terminologie d'application localement simple est en partie justifiée par le lemme précédent. Notez aussi que le théorème II-5.26 peut être considéré comme plus général que le lemme précédent.

2.4. Lemme du nombre de générateurs local.
Soit M *un* **A***-module de type fini.*

1. *Supposons* **A** *local.*
   a. *Le module* M *est engendré par* k *éléments si, et seulement si, son idéal de Fitting* $\mathcal{F}_k(M)$ *est égal à* **A***.*
   b. *Si en outre* **A** *est résiduellement discret et* M *de présentation finie, le module admet une matrice de présentation dont tous les coefficients sont dans l'idéal maximal* $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$*.*
2. *En général, pour* $k \in \mathbb{N}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. $\mathcal{F}_k(M)$ *est égal à* **A***.*
   b. *Il existe des éléments comaximaux* s_j *tels que après extension des scalaires à chacun des* $\mathbf{A}[1/s_j]$*,* M *est engendré par* k *éléments.*
   c. *Il existe des monoïdes comaximaux* S_j *tels que chacun des* M_{S_j} *est engendré par* k *éléments.*
   d*. *Après localisation en n'importe quel idéal premier,* M *est engendré par* k *éléments.*
   e*. *Après localisation en n'importe quel idéal maximal,* M *est engendré par* k *éléments.*

▷ Il suffit de prouver les équivalences pour un module de présentation finie en raison du fait IV-9.8.
Supposons M engendré par q éléments et notons $k' = q - k$.
1. La condition est toujours nécessaire, même si l'anneau n'est pas local. Soit une matrice de présentation $A \in \mathbf{A}^{q\times m}$ pour M. Si l'anneau est local et si $\mathcal{F}_k(M) = \mathbf{A}$, puisque les mineurs d'ordre k' sont comaximaux, l'un d'entre eux est inversible. Par le lemme du mineur inversible II-5.9, la matrice A est équivalente à une matrice

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_{k'} & 0_{k',m-k'} \\ 0_{k,k'} & A_1 \end{bmatrix},$$

et donc, la matrice $A_1 \in \mathbf{A}^{k\times(m-k')}$ est aussi une matrice de présentation de M. Enfin, si l'anneau est résiduellement discret, on peut diminuer le nombre de générateurs jusqu'à ce que la matrice de présentation correspondante ait tous ses coefficients dans le radical.
2. $a \Rightarrow b$. La même preuve montre que l'on peut prendre pour s_j les mineurs d'ordre k' de A.
$b \Rightarrow c$. Immédiat. $c \Rightarrow a$. Dire que $\mathcal{F}_k(M) = \mathbf{A}$ revient à résoudre le système linéaire $\sum_\ell x_\ell s_\ell = 1$, où les inconnues sont les x_ℓ et où les s_ℓ sont les mineurs d'ordre k' de la matrice A. On peut donc appliquer le principe local-global de base.
$a \Rightarrow d$. Résulte du point *1*. $d \Rightarrow e$. Trivial.
$e \Rightarrow a$. Ceci ne peut être prouvé qu'en mathématiques classiques (d'où l'étoile que nous avons mise à d et e). On raisonne par l'absurde en prouvant la contraposée. Si $\mathcal{F}_k(M) \neq \mathbf{A}$ soit $\mathfrak{p}$ un idéal maximal strict contenant $\mathcal{F}_k(M)$. Après localisation en $\mathfrak{p}$, on obtient $\mathcal{F}_k(M_\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p}\mathbf{A}_\mathfrak{p} \neq \mathbf{A}_\mathfrak{p}$, et donc $M_\mathfrak{p}$ n'est pas engendré par k éléments. □

Commentaire. Ce lemme donne la *vraie signification* de l'égalité $\mathcal{F}_k(M) = \mathbf{A}$: on peut dire que $\mathcal{F}_k(M)$ «mesure» la possibilité pour le module d'être localement engendré par k éléments. D'où la définition qui suit.
Voir aussi les exercices IV-19, 11 et 12. ■

2.5. Définition. Un module de type fini sera dit *localement engendré par k éléments* lorsqu'il vérifie les propriétés équivalentes du point *2* du lemme du nombre de générateurs local.

3. Localisation en $1+\mathfrak{a}$

Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$, $S := 1+\mathfrak{a}$, $\jmath : \mathbf{A} \to \mathbf{B} := \mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}}$ l'homomorphisme canonique, et $\mathfrak{b} := \jmath(\mathfrak{a})\mathbf{B}$.

On note que $\mathfrak{b}$ s'identifie à $S^{-1}\mathfrak{a}$ (fait II-6.4) et que $1+\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{B}^\times$ (fait 1.5).

3.1. Lemme. *(Quotient de puissances de $\mathfrak{a}$ dans le localisé $\mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}}$)*
Sous les hypothèses précédentes on a les résultats suivants.

1. $\operatorname{Ker} \jmath \subseteq \mathfrak{a}$, $\mathbf{B} = \jmath(\mathbf{A}) + \mathfrak{b}$ *et l'homomorphisme canonique* $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ *est un isomorphisme.*
2. *La localisation en* $1+\mathfrak{a}$ *est la même que la localisation en* $1+\mathfrak{a}^n$ *($n \geqslant 1$), donc* $\operatorname{Ker} \jmath \subseteq \mathfrak{a}^n$, $\mathbf{B} = \jmath(\mathbf{A}) + \mathfrak{b}^n$ *et* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}^n \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}^n$.
3. *Pour tous p, $q \in \mathbb{N}$, $\jmath$ induit un isomorphisme* $\mathfrak{a}^p/\mathfrak{a}^{p+q} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{b}^p/\mathfrak{b}^{p+q}$ *de* $\mathbf{A}$*-modules.*

▷ *1.* L'inclusion $\operatorname{Ker} \jmath \subseteq \mathfrak{a}$ est immédiate.
Le fait que l'homomorphisme $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est un isomorphisme tient à ce que l'on résout deux problèmes universels équivalents : dans le premier on doit annuler les éléments de $\mathfrak{a}$, dans le second, on doit en plus inverser les éléments de $1+\mathfrak{a}$, mais inverser 1 ne coûte rien. Enfin la surjectivité de ce morphisme signifie exactement que $\mathbf{B} = \jmath(\mathbf{A}) + \mathfrak{b}$.
2. Les monoïdes $1+\mathfrak{a}$ et $1+\mathfrak{a}^n$ sont équivalents car $1-a$ divise $1-a^n$.
3. Notons que $\mathfrak{b}^q = S^{-1}\mathfrak{a}^q = \mathfrak{a}^q\mathbf{B}$. En multipliant $\mathbf{B} = \jmath(\mathbf{A}) + \mathfrak{b}^q$ par $\mathfrak{a}^p$, on obtient $\mathfrak{b}^p = \jmath(\mathfrak{a}^p) + \mathfrak{b}^{p+q}$. Donc, l'application $\jmath$ induit une surjection de $\mathbf{A}$-modules $\mathfrak{a}^p \twoheadrightarrow \mathfrak{b}^p/\mathfrak{b}^{p+q}$. Il reste à voir que son noyau est $\mathfrak{a}^{p+q}$. Si $x \in \mathfrak{a}^p$ vérifie $\jmath(x) \in \mathfrak{b}^{p+q}$, il existe $s \in 1+\mathfrak{a}$ tel que $sx \in \mathfrak{a}^{p+q}$, et comme s est inversible modulo $\mathfrak{a}$, il l'est modulo $\mathfrak{a}^{p+q}$, et donc $x \in \mathfrak{a}^{p+q}$. □

3.2. Lemme du localisé fini. *Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini et $n \in \mathbb{N}^*$, on a les équivalences*

$$\mathfrak{b}^n = \mathfrak{b}^{n+1} \iff \mathfrak{b}^n = 0 \iff \mathfrak{a}^n = \mathfrak{a}^{n+1}.$$

Dans ce cas,

1. *on a* $\mathfrak{a}^n = \operatorname{Ker} \jmath = \langle 1-e \rangle$ *avec e idempotent, de sorte que*
$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}} = \mathbf{A}[1/e] = \mathbf{A}/\langle 1-e \rangle,$$
2. *si en outre $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre, alors $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est finie sur $\mathbf{k}$ si, et seulement si, $\mathbf{B}$ est finie sur $\mathbf{k}$.*

▷ Si $\mathfrak{b}^n = \mathfrak{b}^{n+1}$, alors $\mathfrak{b}^n$ est idempotent de type fini, donc $\mathfrak{b}^n = \langle \varepsilon \rangle$ avec ε idempotent. Mais puisque $\varepsilon \in \mathfrak{b}$, l'idempotent $1-\varepsilon$ est inversible, donc égal à 1, i.e. $\varepsilon = 0$, donc $\mathfrak{b}^n = 0$. La troisième équivalence provient de l'isomorphisme $\mathfrak{b}^n/\mathfrak{b}^{n+1} \simeq \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$ (lemme 3.1).
1. Puisque $\mathfrak{a}^n$ est idempotent de type fini, $\mathfrak{a}^n = \langle 1-e \rangle$ avec e idempotent. Le reste découle ensuite du fait II-4.2.
2. Si $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{k}$-module de type fini, il en est de même de $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}$. Réciproquement, supposons que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ soit un $\mathbf{k}$-module de type fini et considérons la filtration de $\mathbf{B}$ par les puissances de $\mathfrak{b}$:

$$0 = \mathfrak{b}^n \subseteq \mathfrak{b}^{n-1} \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{b}^2 \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathbf{B}.$$

Alors, chaque quotient $\mathfrak{b}^i/\mathfrak{b}^{i+1}$ est un $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$-module de type fini, ou encore un $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module de type fini, et par suite un $\mathbf{k}$-module de type fini. On en déduit que $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{k}$-module de type fini. □

3.3. Lemme du localisé zéro-dimensionnel.
Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ tel que le localisé $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}}$ soit zéro-dimensionnel. Alors, il existe un entier n et un idempotent e tels que

$$\mathfrak{a}^n = \langle 1-e\rangle \qquad \text{et} \qquad \mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}} = \mathbf{A}\big[\tfrac{1}{e}\big] = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle\,.$$

Si, en outre, $\mathbf{A}$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini avec $\mathbf{k}$ zéro-dimensionnel (par exemple un corps discret), alors $\mathbf{B}$ est finie sur $\mathbf{k}$.

◗ On applique le lemme du localisé fini : puisque $\mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel et $\mathfrak{b}$ de type fini, il existe un entier n tel que $\mathfrak{b}^n = \mathfrak{b}^{n+1}$.
On termine avec le Nullstellensatz faible VI-3.15 car $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ est une $\mathbf{k}$-algèbre de type fini. □

Remarque. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini d'un anneau $\mathbf{A}$ tel que le localisé $\mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}}$ soit zéro-dimensionnel. L'application naturelle $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}}$ est donc surjective de noyau $\bigcap_{k\geqslant 0}\mathfrak{a}^k = \mathfrak{a}^m$ avec m tel que $\mathfrak{a}^m = \mathfrak{a}^{m+1}$. En outre, $\mathfrak{a}^m$ est engendré par un idempotent $1-e$ et $\mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}} = \mathbf{A}[1/e]$. On a alors :

$$\textstyle\bigcap_{k\geqslant 0}\mathfrak{a}^k = \big(0 : (0 : \mathfrak{a}^\infty)\big).$$

Cette remarque peut-être utile pour le calcul. Supposons que $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{f}$ où $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n]$ est un anneau de polynômes à n indéterminées sur un corps discret $\mathbf{k}$ et $\mathfrak{f} = \langle f_1,\dots,f_s\rangle$ un idéal de type fini. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ et $\overline{\mathfrak{a}}$ son image dans $\mathbf{A}$. Alors, si $\mathbf{A}_{1+\overline{\mathfrak{a}}}$ est zéro-dimensionnel, la composée $\mathbf{k}[\underline{X}] \to \mathbf{A}_{1+\overline{\mathfrak{a}}}$ est surjective et son noyau s'exprime de deux manières :

$$\textstyle\bigcap_{k\geqslant 0}(\mathfrak{f}+\mathfrak{a}^k) = \big(\mathfrak{f} : (\mathfrak{f} : \mathfrak{a}^\infty)\big).$$

La formule de droite peut se révéler plus efficace en calculant $(\mathfrak{f} : \mathfrak{a}^\infty)$ de la façon suivante :

$$(\mathfrak{f} : \mathfrak{a}^\infty) = \textstyle\bigcap_{j=1}^{r}(\mathfrak{f} : g_j^\infty) \text{ pour } \mathfrak{a} = \langle g_1,\dots,g_r\rangle\,. \qquad ■$$

Commentaire. En mathématiques classiques un idéal premier $\mathfrak{a}$ de l'anneau $\mathbf{A}$ est dit *isolé* s'il est à la fois minimal et maximal dans l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{A}$. Autrement dit s'il ne se compare à aucun autre idéal premier pour la relation d'inclusion. Dire que $\mathfrak{a}$ est maximal revient à dire que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est zéro-dimensionnel. Dire que $\mathfrak{a}$ est minimal revient à dire que $\mathbf{A}_S$ est zéro-dimensionnel, où $S = \mathbf{A}\setminus\mathfrak{a}$. Mais si $\mathfrak{a}$ est supposé maximal, le monoïde S est le saturé de $1+\mathfrak{a}$.
Inversement supposons que $\mathbf{B} = \mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}}$ soit zéro-dimensionnel. Alors $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est également zéro-dimensionnel puisque $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{a}\mathbf{B}$. Ainsi, lorsque $\mathfrak{a}$ est en outre de type fini, on se retrouve avec un cas particulier du lemme du localisé zéro-dimensionnel 3.3. Il est à noter que les idéaux premiers isolés dans la

littérature interviennent en général dans le contexte d'anneaux noethériens et que donc en mathématiques classiques il sont automatiquement de type fini. ∎

4. Exemples d'anneaux locaux en géométrie algébrique

On se propose ici d'étudier dans quelques cas «l'algèbre locale en un zéro d'un système polynomial». Nous fixons le contexte suivant pour toute la section 4.

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathbf{k} \text{ est un anneau, } \underline{f} = f_1, \dots, f_s \in \mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n],\\ \mathbf{A} = \mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{f} \rangle = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n],\\ (\underline{\xi}) = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbf{k}^n \text{ est un zéro du système},\\ \mathfrak{m}_{\underline{\xi}} = \langle x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n \rangle_{\mathbf{A}} \text{ est l'idéal du point } \underline{\xi},\\ J(\underline{X}) = \mathrm{JAC}_{\underline{X}}(\underline{f}) \text{ est la matrice jacobienne du système.}\end{array}}$$

Rappelons que $\mathbf{A} = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ (proposition IV-2.7). Plus précisément, on a avec l'évaluation en $\underline{\xi}$ une suite exacte scindée de $\mathbf{k}$-modules

$$0 \to \mathfrak{m}_{\underline{\xi}} \to \mathbf{A} \xrightarrow{\overline{g} \mapsto g(\underline{\xi})} \mathbf{k} \to 0,$$

et deux homomorphismes de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\mathbf{k} \to \mathbf{A} \to \mathbf{k}$$

qui se composent en donnant $\mathrm{Id}_{\mathbf{k}}$.
Rappelons aussi (théorème IV-2.8) que $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ est un $\mathbf{A}$-module de présentation finie (la matrice de présentation est donnée explicitement).

Algèbre locale en un zéro

Dans la suite nous parlons du point $\underline{\xi}$ de $\mathbf{k}^n$, mais il serait plus correct de dire «le point $(\underline{\xi})$». Dans la définition suivante la terminologie *algèbre locale en* $\underline{\xi}$ ne doit pas prêter à confusion : on ne prétend pas qu'il s'agisse d'un anneau local ; on mime simplement la construction de l'algèbre locale donnée dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps.

4.1. Définition. *(Algèbre locale en un zéro d'un système polynomial)*
L'anneau $\mathbf{A}_{1+\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}$ est appelé *l'algèbre locale en* $\underline{\xi}$ *du système polynomial* $(\underline{f})$.
On utilise aussi la notation abrégée $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ à la place de $\mathbf{A}_{1+\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}$.

Nous notons $\xi : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$ le caractère d'évaluation en $\underline{\xi}$. Il se factorise par le localisé en $1 + \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ et l'on obtient un caractère $\mathbf{A}_{\underline{\xi}} \to \mathbf{k}$.

On a donc $\mathbf{A}_{\underline{\xi}} = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ et des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}) \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}} \simeq \mathbf{k}.$$

4.2. Fait. (Si $\mathbf{k}$ est un corps discret, l'algèbre $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est un anneau local)

1. *Soit* $\mathbf{k}$ *un anneau local et soit* $\mathfrak{p} = \operatorname{Rad}\mathbf{k}$. *On pose* $\mathfrak{M} = \mathfrak{p}\mathbf{A} + \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *et* $\mathbf{C} = \mathbf{A}_{1+\mathfrak{M}}$. *Alors,* $\mathbf{C}$ *est un anneau local avec* $\operatorname{Rad}(\mathbf{C}) = \mathfrak{M}\mathbf{C}$ *et* $\mathbf{C}/\operatorname{Rad}\mathbf{C} \simeq \mathbf{k}/\mathfrak{p}$.
2. *Si* $\mathbf{k}$ *est un corps discret, on a les résultats suivants.*
   a. *L'anneau* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est un anneau local avec* $\operatorname{Rad}\mathbf{A}_{\underline{\xi}} = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *et son corps résiduel est (canoniquement isomorphe à)* $\mathbf{k}$.
   b. *Les anneaux* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *sont noethériens cohérents, et* $\mathbf{A}$ *est fortement discret.*
   c. $\bigcap_{r\in\mathbb{N}}\big(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}\big)^r = 0$.

▷ *1.* On a $\mathbf{C}/\mathfrak{M}\mathbf{C} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}} = \mathbf{k}/\mathfrak{p}$ d'après le point *2* du fait 1.5. On termine en utilisant le point *3* du fait 1.4.
2a. Résulte de *1.*
2b. L'anneau $\mathbf{A}$ est cohérent fortement discret d'après le théorème VII-1.10. On en déduit que $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est cohérent.
Pour la noethérianité on renvoie à [MRR, VIII.1.5].
2c. Vu les points *2a* et *2b*, il s'agit d'un cas particulier du théorème d'intersection de Krull ([MRR, VIII.2.8]). □

Espace tangent en un zéro

Dans la suite nous notons $\partial_j f$ pour $\frac{\partial f}{\partial X_j}$. Ainsi la matrice jacobienne du système, que nous avons notée $J = J(\underline{X})$, se visualise comme suit :

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_s \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} X_1 & X_2 & \cdots & X_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \partial_1 f_1 & \partial_2 f_1 & \cdots & \partial_n f_1 \\ \partial_1 f_2 & \partial_2 f_2 & \cdots & \partial_n f_2 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_s & \partial_2 f_s & \cdots & \partial_n f_s \end{bmatrix} \end{array} = J.$$

La congruence ci-dessous est immédiate, pour $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$:

$$f(\underline{X}) \equiv f(\underline{\xi}) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} (X_j - \xi_j)\,\partial_j f(\underline{\xi}) \mod \langle X_1 - \xi_1, \ldots, X_n - \xi_n\rangle^2 \quad (3)$$

En spécialisant $\underline{X}$ en $\underline{x}$ on obtient dans $\mathbf{A}$ la congruence fondamentale :

$$f(\underline{x}) \equiv f(\underline{\xi}) + \sum\nolimits_{j=1}^{n} (x_j - \xi_j)\,\partial_j f(\underline{\xi}) \mod \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^2 \quad (4)$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que le noyau de $J(\underline{\xi})$ ne dépend que de l'idéal $\langle f_1, \ldots, f_s\rangle$ et du point $\underline{\xi}$. C'est un sous-$\mathbf{k}$-module de $\mathbf{k}^n$ qui peut être appelé *l'espace tangent en* $\underline{\xi}$ *au schéma affine sur* $\mathbf{k}$ *défini par* $\mathbf{A}$. Nous le noterons $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}(\mathbf{A}/\mathbf{k})$ ou $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}$.
Cette terminologie est raisonnable en géométrie algébrique (i.e., lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret), au moins dans le cas où $\mathbf{A}$ est intègre : on a une variété définie comme intersection d'hypersurfaces $f_i = 0$, et l'espace tangent en $\underline{\xi}$ à la variété est l'intersection des espaces tangents aux hypersurfaces qui la définissent.
Dans cette même situation (corps discret à la base), le zéro $\underline{\xi}$ du système polynomial est appelé un *point lisse* ou *régulier*, ou *non singulier* (du schéma affine ou encore de la variété correspondante) lorsque la dimension de l'espace tangent en $\underline{\xi}$ est égale à la dimension [7] de la variété au point $\underline{\xi}$. Un point qui n'est pas régulier est appelé *singulier*.

Nous donnons maintenant une interprétation plus abstraite de l'espace tangent, en termes d'espace de dérivations. Ceci fonctionne avec à la base un anneau commutatif $\mathbf{k}$ arbitraire.
Pour une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{B}$ et un caractère $\xi : \mathbf{B} \to \mathbf{k}$ on définit une $\mathbf{k}$-*dérivation au point* ξ *de* $\mathbf{B}$ comme une forme $\mathbf{k}$-linéaire $d : \mathbf{B} \to \mathbf{k}$ qui vérifie la règle de Leibniz, i.e. en notant $f(\xi)$ pour $\xi(f)$:

$$d(fg) = f(\xi)d(g) + g(\xi)d(f).$$

Ceci implique en particulier $d(1) = 0$ (écrire $1 = 1 \times 1$), et donc $d(\alpha) = 0$ pour $\alpha \in \mathbf{k}$. Nous noterons $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{B}, \xi)$ le $\mathbf{k}$-module des $\mathbf{k}$-dérivations de $\mathbf{B}$ au point ξ.
Cette notation est légèrement abusive. En fait si l'on note $\mathbf{k}'$ l'anneau $\mathbf{k}$ muni de la structure de $\mathbf{B}$-module donnée par ξ, la notation de la définition VI-6.5 serait $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{B}, \mathbf{k}')$, d'ailleurs muni de sa structure de $\mathbf{B}$-module.

Nous allons voir que l'espace tangent en $\underline{\xi}$ à $\mathbf{A}$ et le $\mathbf{k}$-module des $\mathbf{k}$-dérivations de $\mathbf{A}$ en ξ sont naturellement isomorphes.

4.3. Proposition. ($\mathrm{T}_{\underline{\xi}}(\mathbf{A}/\mathbf{k})$, $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \xi)$, et $(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^2)^\star$)
On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *et l'on rappelle la notation* $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}(\mathbf{A}/\mathbf{k}) = \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$.

1. *Pour* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbf{k}^n$, *notons* $D_u : \mathbf{k}[\underline{X}] \to \mathbf{k}$ *la forme* $\mathbf{k}$-*linéaire définie par*
$$D_u(f) = \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j f(\underline{\xi})\ u_j.$$
C'est une dérivation au point $\underline{\xi}$, *on a* $u_j = D_u(X_j) = D_u(X_j - \xi_j)$,

7. Si $\mathbf{A}$ est intègre, cette dimension ne dépend pas de $\underline{\xi}$ et peut être définie via une mise en position de Noether. Dans le cas général, il faut considérer la dimension de Krull de l'anneau $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$.

et l'application

$$u \mapsto D_u,\ \mathbf{k}^n \to \mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}[\underline{X}], \xi)$$

est un isomorphisme $\mathbf{k}$*-linéaire.*

2. *Si* $u \in \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi}) \subseteq \mathbf{k}^n$*, alors* D_u *passe au quotient modulo* $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ *et fournit une* $\mathbf{k}$*-dérivation au point* $\underline{\xi}$*,* $\Delta_u : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$*.*
On a $u_j = \Delta_u(x_j) = \Delta_u(x_j - \xi_j)$*, et l'application*

$$u \mapsto \Delta_u,\ \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi}) \to \mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \xi)$$

est un isomorphisme $\mathbf{k}$*-linéaire.*

3. *En outre,* $\Delta_u(\mathfrak{m}^2) = 0$ *et l'on obtient, par restriction à* $\mathfrak{m}$ *et passage au quotient modulo* $\mathfrak{m}^2$*, une forme* $\mathbf{k}$*-linéaire* $\delta_u : \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \to \mathbf{k}$*. On construit ainsi une application* $\mathbf{k}$*-linéaire* $u \mapsto \delta_u$ *de* $\mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$ *dans* $(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\star$*.*

4. *Réciproquement, à* $\delta \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\star$*, on associe* $u \in \mathbf{k}^n$ *défini par*

$$u_j = \delta\big((x_j - \xi_j) \bmod \mathfrak{m}^2\big).$$

Alors, u *appartient à* $\mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$*.*

5. *Les deux applications définies en 3. et 4.,*

$$\mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi}) \to (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\star \quad \text{et} \quad (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\star \to \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi}),$$

sont des isomorphismes $\mathbf{k}$*-linéaires réciproques l'un de l'autre.*

D *1.* Simple vérification laissée à la lectrice.
2. Pour n'importe quel $u \in \mathbf{k}^n$, on vérifie facilement que l'ensemble

$$\big\{\, f \in \mathbf{k}[\underline{X}] \mid D_u(f) = 0 \text{ et } f(\underline{\xi}) = 0 \,\big\}$$

est un idéal de $\mathbf{k}[\underline{X}]$. Si $u \in \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$, on a $D_u(f_i) = 0$ par définition (et $f_i(\underline{\xi}) = 0$) ; on en déduit que D_u est nulle sur $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$.
3. Pour voir que $\Delta_u(\mathfrak{m}^2) = 0$, on utilise $\Delta_u(fg) = f(\underline{\xi})\Delta_u(g) + g(\underline{\xi})\Delta_u(f)$ et $f(\underline{\xi}) = g(\underline{\xi}) = 0$ pour $f,\ g \in \mathfrak{m}$.
4. La congruence (4) pour $f = f_i$ est $\sum_{j=1}^n (x_j - \xi_j)\partial_j f_i(\underline{\xi}) \in \mathfrak{m}^2$. Ceci donne en appliquant δ, l'égalité $\sum_{j=1}^n u_j \partial_j f_i(\underline{\xi}) = 0$, i.e. $u \in \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$.
5. Soit $\delta \in (\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2)^\star$ et $u \in \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$ l'élément correspondant ; il faut montrer que $\delta_u = \delta$, ce qui revient à vérifier, pour $f \in \mathfrak{m}$:

$$\delta(f \bmod \mathfrak{m}^2) = \textstyle\sum_{j=1}^n \partial_j f(\underline{\xi})\delta\big((x_j - \xi_j) \bmod \mathfrak{m}^2\big),$$

mais ceci découle de (4).
Réciproquement, soit $u \in \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$ et $v \in \mathrm{Ker}\, J(\underline{\xi})$ l'élément correspondant à δ_u ; il faut voir que $v = u$; cela revient à vérifier $\delta_u\big((x_j - \xi_j) \bmod \mathfrak{m}^2\big) = u_j$, égalité qui a déjà été constatée. □

Remarque. Notons que la définition que nous avons donnée de l'espace tangent $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}(\mathbf{A}/\mathbf{k})$, naturelle et intuitive, fait voir celui-ci comme un sous-module de $\mathbf{k}^n$, où n est le nombre de générateurs de la $\mathbf{k}$-algèbre de présentation finie $\mathbf{A}$. Il faut donc lui préférer la définition plus abstraite $\mathrm{Der}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \xi)$,

ou $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2$, qui est plus intrinsèque, puisqu'elle ne dépend que de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ et du caractère $\xi : \mathbf{A} \to \mathbf{k}$, sans tenir compte de la présentation choisie pour $\mathbf{A}$ (en fait seule la structure de la localisée $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ intervient). ∎

Espace cotangent en un zéro

De manière générale, on a aussi la notion duale d'*espace cotangent en* $\underline{\xi}$. Nous le définirons ici comme le conoyau de la transposée ${}^{\mathrm{t}}J(\underline{\xi})$. En fait, il s'agit d'un $\mathbf{k}$-module qui est intrinsèquement attaché à l'algèbre $\mathbf{A}$ et au caractère ξ, car il peut aussi être défini de manière formelle comme « l'espace des différentielles au point $\underline{\xi}$ ». Nous ne développerons pas ce point ici.

Le théorème fondamental qui suit implique que l'espace tangent est canoniquement isomorphe au dual de l'espace cotangent (le fait II-6.3 *2* appliqué à ${}^{\mathrm{t}}J$ donne $(\mathrm{Coker}\ {}^{\mathrm{t}}J)^\star \simeq \mathrm{Ker}\, J$ puisque ${}^{\mathrm{t}}({}^{\mathrm{t}}J) = J$). Par contre, lorsque l'on travaille avec un anneau arbitraire $\mathbf{k}$, l'espace cotangent n'est pas nécessairement isomorphe au dual de l'espace tangent.

Lorsqu'un $\mathbf{B}$-module M admet une matrice de présentation W sur un système générateur $(y_1, \ldots, y_n)$, si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathbf{B}$, par le changement d'anneau de base $\pi_{\mathbf{B},\mathfrak{b}} : \mathbf{B} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}$, on obtient le $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$-module $M/\mathfrak{b}M$ avec la matrice de présentation W mod $\mathfrak{b}$ sur le système générateur $(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n})$. Avec le $\mathbf{A}$-module $M = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ et l'idéal $\mathfrak{b} = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$, on obtient pour matrice de présentation du $\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2$ sur $(\overline{x_1 - \xi_1}, \ldots, \overline{x_n - \xi_n})$, la matrice $\overline{W} = W$ mod $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$, avec la matrice W donnée dans le théorème IV-2.8. Celle-ci, à des colonnes nulles près, est la matrice ${}^{\mathrm{t}}J(\underline{\xi})$. Le théorème qui suit dit la même chose sous une forme précise.

4.4. Théorème. (Espace cotangent en $\underline{\xi}$ et $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2$) *Soit* $(e_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ *la base canonique de* $\mathbf{k}^n$. *Considérons l'application* $\mathbf{k}$*-linéaire*

$$\varphi : \mathbf{k}^n \twoheadrightarrow \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2, \quad e_j \mapsto (x_j - \xi_j) \bmod {\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2.$$

Alors, φ *induit un isomorphisme de* $\mathbf{k}$*-modules* $\mathrm{Coker}\ {}^{\mathrm{t}}J(\underline{\xi}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2$.
Ainsi, on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Coker}\ {}^{\mathrm{t}}J(\underline{\xi}) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}})^2$.

D On suppose sans perte de généralité que $\underline{\xi} = \underline{0}$ et on utilise les notations du théorème IV-2.8. La matrice de présentation de $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$ pour le système générateur $(x_1, \ldots, x_n)$ est la matrice $W = [\, R_{\underline{x}} \,|\, U \,]$ avec $U(\underline{0}) = {}^{\mathrm{t}}J(\underline{0})$. Comme la matrice $R_{\underline{x}}$ mod $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$ est nulle, on obtient le résultat annoncé.
La dernière assertion est donnée par le lemme 3.1 *3*. □

4.5. Définition. On définit *l'espace cotangent en* $\underline{\xi}$ comme étant le $\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}})^2$, pour lequel seule intervient la structure de l'algèbre locale en $\underline{\xi}$.

Dans la suite de la section 4, nous étudions quelques exemples d'algèbres locales en des zéros de systèmes polynomiaux, sans supposer que l'on a

nécessairement à la base un corps discret : $\mathbf{k}$ est seulement un anneau commutatif. Nous cherchons ici seulement à illustrer la situation géométrique en nous libérant si cela se peut de l'hypothèse «corps discret», mais sans viser à donner le cadre le plus général possible.

Anneau local en un point isolé

L'idée qui guide ce paragraphe provient de la géométrie algébrique où l'anneau local en $\underline{\xi}$ est zéro-dimensionnel si, et seulement si, le point $\underline{\xi}$ est un zéro isolé, et où le zéro isolé est simple si, et seulement si, l'espace tangent est réduit à 0.

4.6. Théorème. (Un zéro isolé simple)
Dans le contexte décrit au début de la section 4, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *Le morphisme naturel* $\mathbf{k} \to \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est un isomorphisme (autrement dit, l'idéal* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *est nul dans* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$*). En bref, on écrit* $\mathbf{k} = \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$.
2. *La matrice* ${}^{\mathrm{t}}J(\underline{\xi})$ *est surjective, i.e.* $1 \in \mathcal{D}_n\big(J(\underline{\xi})\big)$.
3. *L'espace cotangent en* $\underline{\xi}$ *est nul, i.e.* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}} = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^2$.
4. *L'idéal* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *est engendré par un idempotent* $1-e$ *de* $\mathbf{A}$*. Dans ce cas les morphismes naturels* $\mathbf{k} \to \mathbf{A}[1/e] \to \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *sont des isomorphismes.*
5. *Il existe* $g \in \mathbf{A}$ *tel que* $g(\underline{\xi}) = 1$ *et* $\mathbf{A}[1/g] = \mathbf{k}$.

Si en outre $\mathbf{k}$ *est un corps discret (ou un anneau zéro-dimensionnel réduit), on a aussi l'équivalence avec la propriété suivante.*

6. *L'espace tangent* $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}$ *est nul.*

Voici comment on peut décrire la situation précédente en langage plus intuitif : l'algèbre locale en $\underline{\xi}$ est une «composante connexe de $\mathbf{A}$» (i.e., la localisation en $\underline{\xi}$ est la même que la localisation en un idempotent e) «réduite à un point simple» (i.e., cette $\mathbf{k}$-algèbre est isomorphe à $\mathbf{k}$). En termes de variété algébrique, le point *5* signifie qu'il y a un ouvert de Zariski contenant le point $\underline{\xi}$ dans lequel la variété est réduite à ce point.

$\mathbb{D}$ *1* $\Leftrightarrow$ *3.* Par le lemme du localisé fini 3.2 avec $n = 1$.
2 $\Leftrightarrow$ *3.* Par le théorème 4.4.
3 $\Leftrightarrow$ *4.* Par le lemme de l'idéal de type fini idempotent II-4.6.
On obtient alors les isomorphismes voulus par le fait II-4.2, et donc le point *5* avec $g = e$.
5 $\Rightarrow$ *1.* L'égalité $g(\underline{\xi}) = 1$ signifie que $g \in 1 + \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$. Ainsi l'anneau $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est un localisé de $\mathbf{A}[1/g] = \mathbf{k}$, et il est égal à $\mathbf{k}$ puisque $\mathbf{A}_{\underline{\xi}} = \mathbf{k} \oplus \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$.
3 $\Leftrightarrow$ *6.* (Cas d'un corps discret.) Puisque l'espace tangent est le dual du cotangent, *3* implique toujours *6* Sur un corps discret une matrice est

surjective si, et seulement si, sa transposée est injective, ceci donne l'équivalence de *3* et *6* (en considérant la matrice $J(\underline{\xi})$). □

Remarque. La différence entre le cas s (nombre d'équations) $= n$ (nombre d'indéterminées) et le cas $s > n$ n'est guère visible dans le théorème précédent, mais elle est importante : si l'on perturbe un système avec $s = n$ et si le corps de base est algébriquement clos, un zéro simple continue d'exister, légèrement perturbé. Dans le cas $s > n$ une perturbation fait en général disparaître le zéro. Mais ceci est une autre histoire, car il faut définir en algèbre la notion de perturbation. ■

Voici pour le cas d'un corps discret un résultat dans le même style que le théorème 4.6, mais plus général et plus précis. Cela peut être vu également comme une version locale du théorème de Stickelberger (théorèmes IV-8.16 et IV-8.17). On notera cependant que, contrairement à ce qui se passe pour le théorème de Stickelberger, la démonstration du théorème 4.7 ne fait pas intervenir le Nullstellensatz ou la mise en position de Noether. Cependant, un changement de variables à la Nagata intervient dans l'appel au théorème VI-3.15 pour l'implication *7* ⇒ *8*.

4.7. Théorème. (Zéro isolé) *On suppose que* $\mathbf{k}$ *est un corps discret. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'algèbre* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est finie sur* $\mathbf{k}$.
2. *L'algèbre* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est entière sur* $\mathbf{k}$.
3. *L'algèbre* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est zéro-dimensionnelle.*
4. *L'idéal* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *est nilpotent dans* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$.
5. *Il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^r = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^{r+1}$
6. *Il existe* $r \in \mathbb{N}$ *tel que l'idéal* $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^r$ *est engendré par un idempotent* $1-e$, *le morphisme* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est surjectif, et* $\mathbf{A}/\langle 1-e\rangle \simeq \mathbf{A}_{\underline{\xi}} \simeq \mathbf{A}[1/e]$.
7. *Il existe* $g \in \mathbf{A}$ *tel que* $g(\underline{\xi}) = 1$ *et* $\mathbf{A}[1/g] = \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$.
8. *Il existe* $g \in \mathbf{A}$ *tel que* $g(\underline{\xi}) = 1$ *et* $\mathbf{A}[1/g]$ *est local zéro-dimensionnel.*
9. *Il existe* $h \in \mathbf{A}$ *tel que* $h(\underline{\xi}) = 1$ *et* $\mathbf{A}[1/h]$ *est finie sur* $\mathbf{k}$.

Dans ce cas, $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{k}$, $(\mathbf{A}_{\underline{\xi}})_{\mathrm{red}} = \mathbf{k}$, *et si* $m = [\mathbf{A}_{\underline{\xi}} : \mathbf{k}]$, *pour tout* $\ell \in \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$, *on a* $\mathrm{C}_{\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/\mathbf{k}}(\ell)(T) = \big(T - \ell(\underline{\xi})\big)^m$.

D Le lemme du localisé fini 3.2, appliqué avec $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$, montre que *4* équivaut à *5* et implique *1*.
3 ⇒ *4*. Par le lemme du localisé zéro-dimensionnel 3.3.
On a *1* ⇒ *2*, et puisque $\mathbf{k}$ est un corps discret, *2* ⇒ *3*.
Ainsi les points *1* à *5* sont équivalents.
Le point *5* implique que $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}^r$ est idempotent. Donc *5* ⇒ *6* par le lemme de l'idéal de type fini idempotent II-4.6 et le fait II-4.2.

On note que $e \in 1 + \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}^r \subseteq 1 + \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$, donc $e(\underline{\xi}) = 1$. Donc *6* implique *7* avec $g = e$.
7 $\Rightarrow$ *8*. L'algèbre $\mathbf{A}[1/g] = \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est locale et de type fini, on conclut par le théorème VI-3.15.
8 $\Rightarrow$ *9*. Prendre $h = g$.
9 $\Rightarrow$ *1*. Parce que $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est un localisé de $\mathbf{A}[1/h]$.
Dans ce cas $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est strictement finie sur $\mathbf{k}$ car c'est une algèbre finie et de présentation finie (théorème VI-3.17).
Enfin l'égalité $\mathrm{C}_{\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/\mathbf{k}}(\ell)(T) = \big(T - \ell(\underline{\xi})\big)^m$ vient de ce que $\ell - \ell(\underline{\xi})$ est dans $\mathfrak{m}$, donc est nilpotent dans $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$, donc admet T^m comme polynôme caractéristique. □

4.8. Définition. *(Zéro isolé d'un système polynomial sur un anneau)*

1. Le zéro $\underline{\xi}$ du système est un *zéro isolé simple* (ou *zéro simple*) si $\mathbf{A}_{\underline{\xi}} = \mathbf{k}$.
2. Le zéro $\underline{\xi}$ du système est un *zéro isolé* si $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est finie sur $\mathbf{k}$.
3. Si en outre $\mathbf{k}$ est un corps discret, la dimension de $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ comme $\mathbf{k}$-espace vectoriel est appelée la *multiplicité* du zéro isolé $\underline{\xi}$.

Remarque. Le point *1* est une abréviation par laquelle on entend précisément que les homomorphismes canoniques $\mathbf{k} \to \mathbf{A}_{\underline{\xi}} \to \mathbf{k}$ sont des isomorphismes. Dans le point *3* on voit que sur un corps discret, un zéro isolé est simple si, et seulement si, il est de multiplicité 1. ■

Anneau local en un point non singulier d'une courbe localement intersection complète

On considère toujours le contexte défini au début de la section 4, et l'on suppose $s = n - 1$. Autrement dit on a maintenant

un système de $n-1$ équations polynomiales à n inconnues

et l'on s'attend à ce que la variété correspondante soit « une courbe ».
Nous allons voir que si le zéro $\underline{\xi}$ de la courbe est non singulier au sens intuitif que l'espace cotangent au point $\underline{\xi}$ est un $\mathbf{k}$-module projectif de rang 1, alors la situation « locale » est conforme à ce à quoi on s'attend, c'est-à-dire ce à quoi nous ont habitué les points non singuliers des courbes en géométrie différentielle.

4.9. Théorème. (L'idéal d'un point non singulier d'une courbe localement intersection complète) *Lorsque $s = n - 1$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le point $\underline{\xi}$ est non singulier au sens que $J(\underline{\xi})$ est une matrice de rang $n - 1$ sur $\mathbf{k}$.*

2. L'espace cotangent en $\underline{\xi}$, $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^2$, *est un* $\mathbf{k}$*-module projectif de rang* 1.

3. L'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ *est un* $\mathbf{A}$*-module projectif de rang* 1.

4. L'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est un* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$*-module projectif de rang* 1.

5. L'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ *est un* $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$*-module libre de rang* 1.

6. L'espace cotangent en $\underline{\xi}$, $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^2$, *est un* $\mathbf{k}$*-module libre de rang* 1.

▷ On rappelle que pour un anneau $\mathbf{B}$, un $\mathbf{B}$-module M et un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{B}$ on obtient par extension des scalaires $\mathbf{B}/\mathfrak{b} \otimes_{\mathbf{B}} M \simeq M/\mathfrak{b}M$. En particulier, si $\mathfrak{c}$ est un idéal de $\mathbf{B}$ on obtient $(\mathbf{B}/\mathfrak{b}) \otimes_{\mathbf{B}} \mathfrak{c} \simeq \mathfrak{c}/\mathfrak{b}\mathfrak{c}$.
Mais l'application $\mathbf{B}$-linéaire surjective naturelle $\mathfrak{b} \otimes \mathfrak{c} \to \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ n'est pas toujours un isomorphisme (c'est le cas si l'un des deux idéaux est plat).
1 $\Leftrightarrow$ *2.* En effet, ${}^{\mathrm{t}}J(\underline{\xi})$ est une matrice de présentation de l'espace cotangent.
3 $\Rightarrow$ *4.* En effet, le $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est obtenu à partir du $\mathbf{A}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ par extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$.
4 $\Rightarrow$ *2* et *5* $\Rightarrow$ *6.* En effet, le $\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}{}^2 \simeq \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}})^2$ est obtenu à partir du $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ par extension des scalaires de $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ à $\mathbf{k} \simeq \mathbf{A}_{\underline{\xi}}/\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ (voir le rappel du début).
2 $\Leftrightarrow$ *3.* Cela résulte de la considération de la matrice de présentation de $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ comme $\mathbf{A}$-module donnée au théorème IV-2.8 et du lemme IV-2.1.
Pour simplifier l'exposé nous traitons le cas $n = 4$ avec $\underline{\xi} = \underline{0}$.
On a quatre variables X_i et trois polynômes

$$\begin{aligned} f_1(\underline{X}) &= X_1a_1(\underline{X}) + X_2a_2(\underline{X}) + X_3a_3(\underline{X}) + X_4a_4(\underline{X}),\\ f_2(\underline{X}) &= X_1b_1(\underline{X}) + X_2b_2(\underline{X}) + X_3b_3(\underline{X}) + X_4b_4(\underline{X}),\\ f_3(\underline{X}) &= X_1c_1(\underline{X}) + X_2c_2(\underline{X}) + X_3c_3(\underline{X}) + X_4c_4(\underline{X}). \end{aligned}$$

Une matrice de présentation de $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$ sur (x_1, x_2, x_3, x_4) est

$$W(\underline{x}) = \begin{bmatrix} x_2 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & 0 & a_1(\underline{x}) & b_1(\underline{x}) & c_1(\underline{x}) \\ -x_1 & 0 & x_3 & 0 & x_4 & 0 & a_2(\underline{x}) & b_2(\underline{x}) & c_2(\underline{x}) \\ 0 & -x_1 & -x_2 & 0 & 0 & x_4 & a_3(\underline{x}) & b_3(\underline{x}) & c_3(\underline{x}) \\ 0 & 0 & 0 & -x_1 & -x_2 & x_3 & a_4(\underline{x}) & b_4(\underline{x}) & c_4(\underline{x}) \end{bmatrix},$$

ou encore $W(\underline{x}) = [\, R_{\underline{x}} \mid U(\underline{x}) \,]$ avec

$$U(\underline{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\underline{x}) & b_1(\underline{x}) & c_1(\underline{x}) \\ a_2(\underline{x}) & b_2(\underline{x}) & c_2(\underline{x}) \\ a_3(\underline{x}) & b_3(\underline{x}) & c_3(\underline{x}) \\ a_4(\underline{x}) & b_4(\underline{x}) & c_4(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad {}^{\mathrm{t}}J(\underline{0}) = U(\underline{0}).$$

On veut montrer que $W(\underline{x})$ (matrice de présentation du $\mathbf{A}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$) et $W(\underline{0})$ (matrice de présentation du $\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}_{\underline{0}}/\mathfrak{m}_{\underline{0}}{}^2$) sont simultanément de rang $n - 1 = 3$.
Reportons nous au lemme IV-2.1. Le point *3* donne l'égalité $\mathcal{D}_4\big(W(\underline{x})\big) = 0$ (car $\mathcal{D}_4\big(U(\underline{x})\big) = 0$). Et puisque $U(\underline{0}) = U(\underline{x})$ mod $\mathfrak{m}_{\underline{0}}$, le point *2* donne l'équivalence

$$1 \in \mathcal{D}_{\mathbf{A},3}\big(W(\underline{x})\big) \iff 1 \in \mathcal{D}_{\mathbf{k},3}\big(U(\underline{0})\big) \iff 1 \in \mathcal{D}_{\mathbf{k},3}\big(W(\underline{0})\big).$$

1 ⇒ 5. On reprend les notations précédentes avec $n = 4$ et $\underline{\xi} = \underline{0}$. Puisque la matrice ${}^tJ(\underline{0}) = U(\underline{0})$ est de rang $n-1$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_4 \in \mathbf{k}$ tels que

$$\det\big(V(\underline{0})\big) = 1, \quad \text{où} \quad V(\underline{x}) = \begin{bmatrix} a_1(\underline{x}) & b_1(\underline{x}) & c_1(\underline{x}) & \lambda_1 \\ a_2(\underline{x}) & b_2(\underline{x}) & c_2(\underline{x}) & \lambda_2 \\ a_3(\underline{x}) & b_3(\underline{x}) & c_3(\underline{x}) & \lambda_3 \\ a_4(\underline{x}) & b_4(\underline{x}) & c_4(\underline{x}) & \lambda_4 \end{bmatrix}.$$

On en déduit que $\det\big(V(\underline{x})\big) \in 1 + \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$, et donc $V(\underline{x}) \in \mathbb{GL}_4(\mathbf{A}_{\underline{\xi}})$. Or

$$[\,x_1\ x_2\ x_3\ x_4\,]\,V = [\,0\ \ 0\ \ 0\ \ y\,] \ \text{ avec } \ y = \textstyle\sum_i \lambda_i x_i.$$

Ceci montre que $\langle x_1, x_2, x_3, x_4\rangle = \langle y\rangle$ dans $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$. Enfin y est régulier puisque le module $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ est de rang 1. □

On notera $M^{\otimes_{\mathbf{B}} r}$ la puissance tensorielle r-ième du $\mathbf{B}$-module M.

4.10. Théorème. *On suppose satisfaites les propriétés équivalentes du théorème 4.9, on note Ω l'espace cotangent $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2$ et l'on considère un élément p de $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$ qui est une $\mathbf{k}$-base de Ω.*

1. *Pour chaque $r > 0$, l'application $\mathbf{k}$-linéaire naturelle $\Omega^{\otimes_{\mathbf{k}} r} \to {\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^r/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^{r+1}$ est un isomorphisme. En d'autres termes, la $\mathbf{k}$-algèbre graduée*

$$\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}(\mathbf{A}) := \mathbf{k} \oplus \bigoplus\nolimits_{r \geqslant 1} {\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^r/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^{r+1}$$

   associée au couple $(\mathbf{A}, \mathfrak{m}_{\underline{\xi}})$ est (naturellement) isomorphe à l'algèbre symétrique $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\Omega)$ du $\mathbf{k}$-module Ω, elle-même isomorphe à $\mathbf{k}[X]$ parce que Ω est libre de rang 1.

2. *Si $\mathbf{k}$ est un corps discret non trivial, $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est un anneau de valuation discrète au sens suivant : tout élément non nul de $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ s'écrit de manière unique sous forme up^ℓ avec $u \in \mathbf{A}^\times$ et $\ell \geqslant 0$.*

▷ On note $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_{\underline{\xi}}$. On remarque aussi que pour un $\mathbf{k}$-module projectif de rang 1, l'algèbre symétrique est égale à l'algèbre tensorielle.

1. On a un isomorphisme naturel $\mathfrak{m}^{\otimes_{\mathbf{A}} r} \xrightarrow{\sim} \mathfrak{m}^r$ parce que $\mathfrak{m}$ est plat. Par l'extension des scalaires $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{m} = \mathbf{k}$, les $\mathbf{A}$-modules $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}^r$ donnent les $\mathbf{k}$-modules $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ et $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}\mathfrak{m}^r = \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$.

Puisque l'extension des scalaires commute avec le produit tensoriel, on en déduit que l'homomorphisme naturel $\big(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\big)^{\otimes_{\mathbf{k}} r} \to \mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ est un isomorphisme de $\mathbf{k}$-modules.

Puisque le $\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ admet la $\mathbf{k}$-base $p \bmod \mathfrak{m}^2$, le $\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}^r/\mathfrak{m}^{r+1}$ admet la base $p^r \bmod \mathfrak{m}^{r+1}$. D'où un isomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres

$$\mathbf{k}[X] \xrightarrow{\sim} \textstyle\bigoplus_{r\in\mathbb{N}} {\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^r/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^{r+1} = \mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\Omega),$$

donné par $X \mapsto p$. En pratique, vue la filtration

$$\mathfrak{m}^r \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m} \subset \mathbf{A},$$

dont tous les quotients sont des $\mathbf{k}$-modules libres de rang 1, le quotient $\mathbf{A}/\mathfrak{m}^r$ admet pour $\mathbf{k}$-base $(1, p \dots, p^{r-1})$, avec pour $\ell < r$ le sous-$\mathbf{k}$-module $\mathfrak{m}^\ell/\mathfrak{m}^r$ qui admet la base $(p^\ell, \dots, p^{r-1})$.
2. D'après le fait 4.2 *2* nous obtenons le résultat grâce au calcul suivant : si $x \in \mathbf{A}_{\underline{\xi}}$ est non nul, il est non nul dans un $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/\mathfrak{m}^r$. Vue la filtration précédente il existe un ℓ minimum tel que $x \in \mathfrak{m}^\ell$. Si $x \equiv ap^\ell \bmod \mathfrak{m}^{\ell+1}$ avec $a \in \mathbf{k}^\times$, on écrit $x = p^\ell(a + vp)$ avec $v \in \mathbf{A}$ et $u = a + vp$ est inversible dans $\mathbf{A}_{\underline{\xi}}$. □

Exemple : La courbe monomiale $t \mapsto (x_1 = t^4, x_2 = t^5, x_3 = t^6)$.
Pour n_1, n_2, $n_3 \in \mathbb{N}^*$ premiers dans leur ensemble, on définit la courbe monomiale $(x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, x_3 = t^{n_3})$, plongée dans l'espace affine de dimension 3.
Par définition, l'idéal de cette courbe paramétrée est, pour un anneau $\mathbf{k}$, le noyau du morphisme $\mathbf{k}[X_1, X_2, X_3] \to \mathbf{k}[T]$ défini par $X_i \mapsto T^{n_i}$.
On peut montrer que cet idéal est toujours défini sur $\mathbb{Z}$ et engendré par trois générateurs. Ici on a choisi (voir le commentaire à la fin) le cas particulier où $(n_1, n_2, n_3) = (4, 5, 6)$, cas pour lequel deux relateurs suffisent :

$$x_1^3 = x_3^2 \quad \text{et} \quad x_2^2 = x_1 x_3.$$

(Laissé en exercice au lecteur.) On note

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, x_2, x_3] = \mathbf{k}[X_1, X_2, X_3]/\langle X_1^3 - X_3^2, X_2^2 - X_1 X_3\rangle$$

l'anneau de la courbe. Pour $t_0 \in \mathbf{k}$, on considère le point

$$(\underline{\xi}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (t_0^4, t_0^5, t_0^6),$$

avec son idéal $\mathfrak{m} = \langle x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3\rangle_{\mathbf{A}}$. La condition pour que le point $\underline{\xi}$ soit non singulier, au sens que la matrice jacobienne J évaluée en $\underline{\xi}$ est de rang 2, est donnée par $t_0 \in \mathbf{k}^\times$, car $\mathcal{D}_2(J) = \langle 4t_0^{11}, 5t_0^{12}, 6t_0^{13}\rangle$.
On suppose désormais $t_0 \in \mathbf{k}^\times$. Une matrice de présentation de $\mathfrak{m}$ pour le système générateur $(x_1 - \xi_1, x_2 - \xi_2, x_3 - \xi_3)$ est donnée par :

$$W = \begin{bmatrix} x_2 - \xi_2 & x_3 - \xi_3 & 0 & x_1^2 + \xi_1 x_1 + \xi_1^2 & -x_3 \\ -x_1 + \xi_1 & 0 & x_3 - \xi_3 & 0 & x_2 + \xi_2 \\ 0 & -x_1 + \xi_1 & -x_2 + \xi_2 & -x_3 - \xi_3 & -\xi_1 \end{bmatrix}.$$

Nous savons qu'elle est de rang 2. On constate que $W_2, W_3 \in \langle W_1, W_5\rangle$. On obtient donc une nouvelle matrice de présentation plus simple V avec les seules colonnes W_1, W_4, W_5. On rappelle d'une part que pour $B \in \mathbf{A}^{n\times m}$, on a $(\mathbf{A}^n/\operatorname{Im} B)^\star \simeq \operatorname{Ker} {}^tB$ (fait II-6.3) ; d'autre part (exercice X-11), que pour une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ de rang $n-1$, on a $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} \widetilde{A}$ facteur direct dans $\mathbf{A}^n$. En appliquant ceci à $B = V$ et $A = {}^tV$, on obtient :
$\mathfrak{m}^\star \simeq (\mathbf{A}^3/\operatorname{Im} V)^\star \simeq \operatorname{Ker} {}^tV = \operatorname{Im} {}^t\widetilde{V}$ avec $\operatorname{Im} {}^t\widetilde{V}$ facteur direct dans $\mathbf{A}^3$.
On réalise ainsi explicitement le $\mathbf{A}$-module $\mathfrak{m}^\star$, de rang constant 1, comme facteur direct dans $\mathbf{A}^3$. ∎

Commentaire. De manière générale un sous-monoïde M de $(\mathbb{N}, +, 0)$ a un complément G fini si, et seulement si, il est engendré par une liste d'entiers

premiers entre eux dans leur ensemble (par exemple avec la courbe monomiale ci-dessus on définit $M = n_1\mathbb{N} + n_2\mathbb{N} + n_3\mathbb{N}$ engendré par $\{n_1, n_2, n_3\}$).
On dit que les entiers de G, sont les *trous* du monoïde M.
Leur nombre $g := \#G$ est appelé le *genre* de M.
On a toujours $[\,2g, \infty\,[\subseteq M$. Les monoïdes M pour lesquels $2g-1 \in G$ sont dits *symétriques*. Cette terminologie rend compte du fait que, dans ce cas, l'intervalle $[\![0..2g-1]\!]$ contient autant de trous que de non-trous, et qu'ils sont échangés par la symétrie $x \mapsto (2g-1) - x$.
Par exemple, pour a, b premiers entre eux, le monoïde $a\mathbb{N} + b\mathbb{N}$ est symétrique de genre $g = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$. On sait caractériser de manière combinatoire les monoïdes $n_1\mathbb{N} + n_2\mathbb{N} + n_3\mathbb{N}$ qui sont symétriques. On démontre que c'est le cas si, et seulement si, l'idéal de la courbe $(x_1 = t^{n_1}, x_2 = t^{n_2}, x_3 = t^{n_3})$ est engendré par 2 éléments. Par exemple $4\mathbb{N} + 5\mathbb{N} + 6\mathbb{N}$ est symétrique, de genre 4, et ses trous sont $\{1, 2, 3, 7\}$. ∎

5. Anneaux décomposables

Les anneaux qui sont isomorphes à des produits finis d'anneaux locaux jouent un rôle important dans la théorie classique des anneaux locaux henséliens (par exemple dans [Raynaud] ou [Lafon & Marot]). De tels anneaux sont appelés des *anneaux décomposés* et un anneau local est dit hensélien (en mathématiques classiques) si toute extension finie est un anneau décomposé.
Nous donnons dans cette section un début de l'approche constructive pour la notion d'anneau décomposé. En fait, comme nous voulons éviter les problèmes de factorisation, nous allons introduire la notion, constructivement plus pertinente, d'anneau décomposable.
Tout commence avec cette remarque simple mais importante : dans un anneau commutatif les idempotents sont toujours « isolés ».

5.1. Lemme. *Dans un anneau commutatif* $\mathbf{A}$ *deux idempotents égaux modulo* $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ *sont égaux.*

𝔇 On montre que l'homomorphisme $\mathbb{B}(\mathbf{A}) \to \mathbb{B}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A})$ est injectif : si un idempotent e est dans $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$, $1-e$ est idempotent et inversible, donc égal à 1. □

Remarque. Ceci n'est plus du tout vrai en non commutatif : les idempotents d'un anneau de matrices carrées $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ sont les matrices de projection ; sur un corps on obtient, par exemple en fixant le rang à 1, une variété connexe de dimension > 0 sans aucun point isolé (si $n \geqslant 2$). ∎

Éléments décomposables

5.2. Définition. Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $a \in \mathbf{A}$. L'élément a est dit *décomposable*[8] s'il existe un idempotent e tel que :

$$\begin{cases} a \bmod \langle 1-e\rangle \text{ est inversible dans } \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle & \text{et} \\ a \bmod \langle e\rangle \in \operatorname{Rad}(\mathbf{A}/\langle e\rangle). \end{cases}$$

Rappelons en soulignant les analogies qu'un élément a possède un quasi inverse si, et seulement si, il existe un idempotent e tel que :

$$\begin{cases} a \bmod \langle 1-e\rangle \text{ est inversible dans } \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle & \text{et} \\ a \bmod \langle e\rangle = 0 \text{ dans } \mathbf{A}/\langle e\rangle\,, \end{cases}$$

et qu'un élément a a pour annulateur un idempotent si, et seulement si, il existe un idempotent e tel que :

$$\begin{cases} a \bmod \langle 1-e\rangle \text{ est régulier dans } \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle & \text{et} \\ a \bmod \langle e\rangle = 0 \text{ dans } \mathbf{A}/\langle e\rangle\,. \end{cases}$$

5.3. Proposition. *Un élément a de $\mathbf{A}$ est décomposable si, et seulement si, il existe b tel que*

1. $b(1-ab)=0$,
2. $a(1-ab) \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.

En outre, l'élément b vérifiant ces conditions est unique, et $ab=e$ est l'unique idempotent de $\mathbf{A}$ vérifiant $\langle a\rangle = \langle e\rangle \bmod \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.

▷ Supposons a décomposable. Alors, dans le produit $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$, avec $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ et $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}/\langle e\rangle$, on a $e=(1,0)$, $a=(a_1,a_2)$, avec $a_1 \in \mathbf{A}_1^\times$ et $a_2 \in \operatorname{Rad}(\mathbf{A}_2)$. On pose $b=(a_1^{-1},0)$, et l'on a bien

$b(1-ab) = (b,0) - (b,0)(1,0) = 0_{\mathbf{A}}$ et $a(1-ab) = (0,a_2) \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.

Supposons qu'un élément b vérifie

$$\begin{cases} b(1-ab)=0 & \text{et} \\ a(1-ab) \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}. \end{cases}$$

Alors, l'élément $ab=e$ est un idempotent et a est inversible modulo $1-e$. Par ailleurs, modulo e on a $a = a(1-e)$ qui est dans $\operatorname{Rad}\mathbf{A}$, donc $a \bmod e$ est dans $\operatorname{Rad}(\mathbf{A}/\langle e\rangle)$.

Voyons l'unicité. Si $b(1-ab)=0$ et $a(1-ab) \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$, alors $e=ab$ est un idempotent tel que $\langle a\rangle = \langle e\rangle \bmod \operatorname{Rad}\mathbf{A}$. Cela le caractérise comme idempotent de $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$, donc comme idempotent de $\mathbf{A}$. Les égalités $be=b$ et $ba=e$ impliquent que $\big(b+(1-e)\big)\big(ae+(1-e)\big)=1$. L'élément $b+(1-e)$ est donc déterminé de manière unique : c'est l'inverse de $ae+(1-e)$. Par suite, l'élément b est lui-même déterminé de manière unique. □

8. Il faut faire attention que cette terminologie entre en conflit avec la notion d'idempotent indécomposable dans la mesure où tout idempotent est un élément décomposable de l'anneau.

5.4. Définition. On dit que l'anneau $\mathbf{A}$ est *décomposable* si tout élément est décomposable.

5.5. Fait.

1. *Un produit d'anneaux est décomposable si, et seulement si, chacun des facteurs est décomposable.*
2. *Un anneau zéro-dimensionnel est décomposable. Un anneau local résiduellement discret est décomposable. Un anneau décomposable connexe est local résiduellement discret.*
3. *La structure d'anneau décomposable est purement équationnelle (elle peut être définie au moyen de lois de compositions soumises à des axiomes universels).*

D *3.* On rajoute aux lois des anneaux commutatifs deux lois

$$a \mapsto b \text{ et } (a, x) \mapsto y,$$

avec les axiomes $b = b^2a$ et $\big(1 + x(a^2b - a)\big)y = 1$. D'où $a^2b - a \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.
1. Résulte du point *3.* □

Remarque. Si l'on note $b = a^\sharp$, alors $(a^\sharp)^\sharp = b^\sharp = a^2b$ et $\big((a^\sharp)^\sharp\big)^\sharp = a^\sharp$. En outre, $(a^\sharp)^\sharp$ et $a^\sharp$ sont quasi inverses l'un de l'autre. ∎

Relèvement des idempotents

5.6. Définition. Soit $\mathbf{A}$ un anneau.

1. On dit que *l'anneau* $\mathbf{A}$ *relève les idempotents* si l'homomorphisme naturel
$$\mathbb{B}(\mathbf{A}) \to \mathbb{B}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A})$$
est bijectif, autrement dit si tout idempotent du quotient $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ se relève en un idempotent de $\mathbf{A}$.
2. On dit que l'anneau $\mathbf{A}$ est *décomposé* s'il est décomposable et si $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ est bornée.

5.7. Proposition. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est résiduellement zéro-dimensionnel et relève les idempotents.*
2. $\mathbf{A}$ *est décomposable.*

D *1* ⇒ *2.* Puisque $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit, il existe un idempotent e de $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ tel que $\langle a\rangle = \langle e\rangle \mod \operatorname{Rad}\mathbf{A}$. Cet idempotent se relève en un idempotent de $\mathbf{A}$, que nous continuons d'appeler e.
L'élément $a + (1 - e)$ est inversible dans $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$, donc dans $\mathbf{A}$. Donc, a est inversible dans $\mathbf{A}/\langle 1 - e\rangle$. Enfin, puisque $\langle a\rangle = \langle e\rangle \mod \operatorname{Rad}\mathbf{A}$, on obtient $a \in \operatorname{Rad}(\mathbf{A}/\langle e\rangle)$.
2 ⇒ *1.* Notons $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ la projection canonique. Tout élément a de $\mathbf{A}$ vérifie $\langle \pi(a)\rangle = \langle \pi(e)\rangle$ pour un idempotent e de $\mathbf{A}$. Le quotient est

donc zéro-dimensionnel. Montrons que $\mathbf{A}$ relève les idempotents.
Si $\pi(a)$ est idempotent et si e est l'idempotent tel que $\langle \pi(a) \rangle = \langle \pi(e) \rangle$, alors $\pi(a) = \pi(e)$. □

Commentaire. Il est maintenant facile de voir qu'en mathématiques classiques un anneau est décomposé si, et seulement si, il est isomorphe à un produit fini d'anneaux locaux. ∎

6. Anneau local-global

Nous introduisons dans cette section une notion qui généralise à la fois celle d'anneau local et celle d'anneau zéro-dimensionnel. Ceci éclaire un certain nombre de faits communs à ces deux classes d'anneaux, comme par exemple celui que les modules projectifs de type fini sont quasi libres.

Définitions et principe local-global concret

6.1. Définition.

1. On dit qu'un polynôme $f \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ *représente (dans* $\mathbf{A}$*) l'élément* $a \in \mathbf{A}$ s'il existe $\underline{x} \in \mathbf{A}^n$ tel que $f(\underline{x}) = a$.
2. On dit qu'un polynôme $f \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ est *primitif par valeurs* si les valeurs de f engendrent l'idéal $\langle 1 \rangle$ (les variables étant évaluées dans $\mathbf{A}$).
3. Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *local-global* si tout polynôme primitif par valeurs représente un inversible.

Remarque. Tout polynôme primitif par valeurs est primitif, donc si un anneau possède la propriété que tout polynôme primitif représente un inversible, c'est un anneau local-global. Ceci correspond à une définition dans la littérature (anneau fortement U-irréductible) qui a précédé celle d'anneau local-global. ∎

6.2. Fait.

1. *Un anneau* $\mathbf{A}$ *est local-global si, et seulement si,* $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ *est local-global.*
2. *Un produit fini d'anneaux est local-global si, et seulement si, chacun des anneaux est local-global.*
3. *Un anneau local est local-global.*
4. *Un anneau résiduellement zéro-dimensionnel est local-global.*
5. *Un quotient d'un anneau local-global (resp. résiduellement zéro-dimensionnel) est local-global (resp. résiduellement zéro-dimensionnel).*

6. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau réunion filtrante croissante de sous-anneaux* $\mathbf{A}_i$, *i.e. pour tous* i, j, *il existe* k *tel que* $\mathbf{A}_i \cup \mathbf{A}_j \subseteq \mathbf{A}_k$. *Alors, si chaque* $\mathbf{A}_i$ *est local-global, il en est de même de* $\mathbf{A}$.

𝔇 Nous laissons les trois premiers points en exercice.
4. Vu le point *1*, il suffit de traiter le cas d'un anneau zéro-dimensionnel réduit. Ce cas se ramène au cas (évident) d'un corps discret par la machinerie locale-globale élémentaire.
5. Voyons le cas local-global (l'autre cas est évident). Soit $\mathbf{A}$ un anneau local-global, $\mathfrak{a}$ un idéal et $f \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ un polynôme primitif par valeurs dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$. Il y a donc des valeurs $p_1, \ldots, p_m$ de f et un $a \in \mathfrak{a}$ tels que $\langle p_1, \ldots, p_m, a\rangle = \langle 1\rangle$. Le polynôme $g(\underline{X}, T) = Tf(\underline{X}) + (1-T)a$ est donc primitif par valeurs. Puisque $\mathbf{A}$ est local-global, il y a une valeur $tf(\underline{x}) + (1-t)a$ de g qui est inversible. La valeur $f(\underline{x})$ est donc inversible modulo $\mathfrak{a}$.
6. Soit $P \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ primitif par valeurs : $1 = uP(\underline{x}) + vP(\underline{y}) + \ldots$. En considérant u, $\underline{x}$, v, $\underline{y}$, $\ldots$ et les coefficients de P, on voit qu'il y a un sous-anneau $\mathbf{A}_i$ tel que $P \in \mathbf{A}_i[\underline{X}]$ et tel que P soit primitif par valeurs sur $\mathbf{A}_i$. Ainsi, P représente un inversible sur $\mathbf{A}_i$, a fortiori sur $\mathbf{A}$. □

Pour un polynôme les propriétés de représenter un inversible ou d'être primitif par valeurs sont de caractère fini, comme indiqué dans le lemme qui suit.

6.3. Lemme. *Soit* S *un monoïde de* $\mathbf{A}$ *et un polynôme* $f \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_m]$.

1. *Le polynôme* f *représente un inversible dans* $\mathbf{A}_S$ *si, et seulement si, il existe* $s \in S$ *tel que* f *représente un inversible dans* $\mathbf{A}_s$.
2. *Le polynôme* f *est primitif par valeurs dans* $\mathbf{A}_S$ *si, et seulement si, il existe* $s \in S$ *tel que* f *est primitif par valeurs dans* $\mathbf{A}_s$.

𝔇 Nous montrons seulement le point *1.* Soit $F(\underline{X}, T) \in \mathbf{A}[\underline{X}, T]$ l'homogénéisé de $f(\underline{X})$ en degré assez grand. L'hypothèse équivaut à l'existence de $\underline{x} \in \mathbf{A}^m$ et t, $u \in S$ tels que $F(\underline{x}, t)$ divise u dans $\mathbf{A}$. En posant $s = tu$, les éléments t et $F(\underline{x}, t)$ sont inversibles dans $\mathbf{A}_s$ donc f représente un inversible dans $\mathbf{A}_s$. □

6.4. Lemme. *Soit* $s \in \mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{b}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$ *avec* $1 \in \langle s\rangle + \mathfrak{b}$.

1. *Supposons que* f *représente un inversible dans* $\mathbf{A}_s$. *Il existe* $\underline{z} \in \mathbf{A}^m$ *tel que* $1 \in \langle f(\underline{z})\rangle + \mathfrak{b}$.
2. *Si* f *est primitif par valeurs dans* $\mathbf{A}_s$ *il existe un nombre fini d'éléments* $\underline{z}_j$, $(j \in [\![1..k]\!])$, *dans* $\mathbf{A}^m$ *tels que* $1 \in \langle f(\underline{z}_j) \mid j \in [\![1..k]\!]\rangle + \mathfrak{b}$.

𝔇 *1.* Soit $F(\underline{X}, T) \in \mathbf{A}[\underline{X}, T]$ l'homogénéisé de $f(\underline{X})$ en degré d assez grand. L'hypothèse est que $F(\underline{x}, t)$ divise u dans $\mathbf{A}$ pour un $\underline{x} \in \mathbf{A}^m$ et $t, u \in s^{\mathbb{N}}$. Il

existe a tel que $ta \equiv 1 \bmod \mathfrak{b}$ donc :

$$a^d F(\underline{x}, t) = F(a\underline{x}, at) \equiv F(a\underline{x}, 1) = f(a\underline{x}) \bmod \mathfrak{b},$$

d'où $a^d u \in \langle f(\underline{z})\rangle + \mathfrak{b}$ avec $\underline{z} = a\underline{x}$. Mais $1 \in \langle a^d u\rangle + \mathfrak{b}$ donc $1 \in \langle f(\underline{z})\rangle + \mathfrak{b}$.
On peut présenter le même argument «sans calcul» comme suit.
On a $\mathbf{A}_s/(\mathfrak{b}\mathbf{A}_s) \simeq (\mathbf{A}/\mathfrak{b})_s$. Puisque $1 \in \langle s\rangle + \mathfrak{b}$, s est inversible dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$, et donc $\mathbf{A}_s/(\mathfrak{b}\mathbf{A}_s) \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{b}$. Puisque f représente un inversible dans $\mathbf{A}_s$, a fortiori il représente un inversible dans $\mathbf{A}_s/(\mathfrak{b}\mathbf{A}_s) \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{b}$, i.e. f représente un inversible modulo $\mathfrak{b}$.
2. Calculs similaires. □

Nous allons utiliser dans la suite un principe local-global concret un peu subtil que nous énonçons sous forme d'un lemme. Voir aussi l'exercice 15.

6.5. Lemme. *Soient S_1, ..., S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et un polynôme $f \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_m]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le polynôme f est primitif par valeurs.*
2. *Dans chacun des anneaux $\mathbf{A}_{S_i}$, le polynôme f est primitif par valeurs.*
3. ** Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$, f représente un inversible dans $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$.*

En particulier, si f représente un inversible dans chaque localisé $\mathbf{A}_{S_i}$, f est primitif par valeurs.

▷ Les implications *1* ⇒ *2* ⇒ *3** sont immédiates. L'implication *3** ⇒ *1* est facile en mathématiques classiques.
Voici maintenant une démonstration directe et constructive de *2* ⇒ *1.* Il s'agit du décryptage de la démonstration classique de *3.** ⇒ *1*, en utilisant la méthode qui sera expliquée dans la section XV-6. Pour simplifier les notations mais sans perte de généralité, nous allons montrer le cas particulier où f représente un inversible dans chaque localisé $\mathbf{A}_{S_i}$.
On dispose donc d'éléments comaximaux $(s_1, \ldots, s_n)$ tels que dans chaque localisé $\mathbf{A}_{s_i}$, le polynôme f représente un inversible (lemme 6.3).
En appliquant le lemme 6.4 on obtient successivement, pour $k = 0, \ldots, n$,

$$1 \in \left\langle f(\underline{z_1}), \ldots, f(\underline{z_k}),\ s_{k+1}, \ldots, s_n \right\rangle.$$

Au bout de n étapes : $1 \in \left\langle f(\underline{z_1}), \ldots, f(\underline{z_n})\right\rangle$. □

6.6. Proposition. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'anneau $\mathbf{A}$ est local-global.*
2. *Pour tout polynôme $f \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$, s'il existe un système d'éléments comaximaux $(s_1, \ldots, s_k)$ tel que f représente un inversible dans chaque $\mathbf{A}_{s_i}$, alors f représente un inversible.*
3. *Pour tout polynôme $f \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$, s'il existe des monoïdes comaximaux S_i tel que f est primitif par valeurs dans chaque $\mathbf{A}_{S_i}$, alors f représente un inversible.*

▷ Vus les lemmes 6.3 et 6.5, il suffit de montrer que si f est primitif par valeurs il existe des éléments comaximaux tels que f représente un inversible dans chaque localisé. On écrit la chose en une variable pour simplifier les notations. On obtient $x_1, \ldots, x_r \in \mathbf{A}$ tels que $1 \in \langle f(x_1), \ldots, f(x_r)\rangle$. Soit $s_i = f(x_i)$: le polynôme f représente un inversible dans $\mathbf{A}_{s_i}$. □

D'après le lemme de Gauss-Joyal (II-2.6) les polynômes primitifs forment un filtre $U \subseteq \mathbf{A}[X]$. On appelle *localisé de Nagata* l'anneau $\mathbf{A}(X) = U^{-1}\mathbf{A}[X]$.

6.7. Fait. *On utilise la notation ci-dessus.*

1. $\mathbf{A}(X)$ *est fidèlement plat sur* $\mathbf{A}$.
2. $\mathbf{A}(X)$ *est un anneau local-global.*

▷ *1.* Il est clair que $\mathbf{A}(X)$ est plat sur $\mathbf{A}$ (localisation de $\mathbf{A}[X]$). On utilise alors la caractérisation *3a* dans le théorème VIII-6.1. Soit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ tel que $1 \in \mathfrak{a}\mathbf{A}(X)$. Nous devons montrer que $1 \in \mathfrak{a}$. L'hypothèse donne $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{A}[X]$ tels que le polynôme $f = \sum_i a_i f_i$ est primitif, i.e., $1 \in \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(f)$. Or l'idéal $\mathrm{c}_{\mathbf{A}}(f)$ est contenu dans $\mathfrak{a}$.
2. Nous procédons en trois étapes.
a) Montrons d'abord que tout polynôme primitif $P(T) \in \mathbf{B}[T]$ où $\mathbf{B} := \mathbf{A}(X)$ représente un élément inversible. En effet, soit $P(T) = \sum_i Q_i T^i$ un tel polynôme, on peut supposer sans perte de généralité que les Q_i sont dans $\mathbf{A}[X]$. On a des polynômes B_i tels que $\sum_i B_i(X)Q_i(X)$ est primitif. A fortiori les coefficients des Q_j sont comaximaux. Alors, pour $k > \sup_i \big(\deg_X(Q_i)\big)$, puisque $P(X^k)$ a pour coefficients tous les coefficients des Q_j (astuce de Kronecker), c'est un polynôme primitif de $\mathbf{A}[X]$, c'est-à-dire un élément inversible de $\mathbf{B}$.
b) Montrons la même propriété pour un nombre quelconque de variables. On considère un polynôme primitif $Q(Y_1, \ldots, Y_m) \in \mathbf{B}[\underline{Y}]$. Par l'astuce de Kronecker en posant $Y_j = T^{n^j}$ avec n assez grand, on obtient un polynôme $P(T)$ dont les coefficients sont ceux de Q, ce qui nous ramène au cas précédent.
c) Enfin considérons un polynôme Q à m variables sur $\mathbf{B}$ primitif par valeurs. Alors, Q est primitif et on peut appliquer le point b). □

Propriétés locales-globales remarquables

6.8. Principe local-global concret. *Soient $S_1, \ldots, S_r$ des monoïdes comaximaux d'un anneau local-global* $\mathbf{A}$.

1. *Si deux matrices de $\mathbf{A}^{m\times n}$ sont équivalentes sur chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$, alors elles sont équivalentes.*
2. *Si deux matrices de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ sont semblables sur chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$, alors elles sont semblables.*

D *1.* Soient F et G les matrices, par hypothèse il existe un système d'éléments comaximaux $(s_1, \dots, s_r)$ et des matrices U_1, …, U_r, V_1, …, V_r telles que pour chaque i on a $U_i F = G V_i$ et $\det(U_i)\det(V_i) = s_i$. Introduisons des indéterminées $(x_1, \dots, x_r) = (\underline{x})$, et considérons les matrices

$$U = U(\underline{x}) = x_1 U_1 + \cdots + x_r U_r \text{ et } V = V(\underline{x}) = x_1 V_1 + \cdots + x_r V_r.$$

On a $UF = GV$, et $\det(U)\det(V)$ est un polynôme en les x_i qui vérifie les hypothèses de la définition 6.1 : il suffit d'évaluer $(x_1, \dots, x_r)$ successivement en $(1, 0, \dots, 0)$, …, $(0, \dots, 0, 1)$. Donc il existe un $\underline{\alpha} \in \mathbf{A}^r$ tel que l'élément $\det\big(U(\underline{\alpha})\big)\det\big(V(\underline{\alpha})\big)$ est inversible.
2. La même démonstration, avec $U_i = V_i$ et $U = V$, fonctionne. □

On a le corollaire suivant.

6.9. Principe local-global concret. *Soient S_1, …, S_r des monoïdes comaximaux d'un anneau local-global $\mathbf{A}$.*

1. *Si deux modules de présentation finie sont isomorphes sur chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$, alors ils sont isomorphes.*
2. *Tout module projectif de type fini est quasi libre.*

D *1.* On considère des matrices de présentation et l'on caractérise le fait que les modules sont isomorphes par l'équivalence de matrices associées (lemme IV-1.1). On applique alors le point *1* du principe local-global 6.8.
2. On applique le point *1* On considère un module quasi libre qui a les mêmes idéaux de Fitting, on sait que les deux modules deviennent libres après localisation en des éléments comaximaux (et le rang est chaque fois le même parce qu'ils ont les mêmes idéaux de Fitting). □

Signalons aussi les principes suivants.

6.10. Principe local-global concret. *Soit un anneau local-global $\mathbf{A}$.*

1. *Soient S_1, …, S_r des monoïdes comaximaux, M un module de présentation finie et N un module de type fini. Si N est un quotient de M sur chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$, alors N est un quotient de M.*
2. *Un module localement engendré par m éléments est engendré par m éléments.*

D Il suffit de montrer le point *1* car un module est engendré par m éléments si, et seulement si, c'est un quotient d'un module libre de rang m.
Nous continuerons la démonstration après les deux lemmes suivants. □

6.11. Lemme. *Soit M un $\mathbf{A}$-module de présentation finie, N un $\mathbf{A}$-module de type fini, S un monoïde de $\mathbf{A}$ et $\varphi : M_S \to N_S$ une application $\mathbf{A}$-linéaire surjective.*

1. *Il existe $s \in S$ et $\psi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M, N)$ tels que $s\varphi =_{\mathbf{A}_S} \psi_S$.*
2. *Il existe $v \in S$ tel que $vN \subseteq \psi(M)$.*

3. Il existe une matrice Q de syzygies satisfaites par les générateurs de N telle que, en considérant le module N' admettant Q pour matrice de présentation, l'application ψ se décompose comme suit

$$M \xrightarrow{\theta} N' \xrightarrow{\pi} N,$$

(π est la projection canonique), avec en outre $vN' \subseteq \theta(M)$ (a fortiori θ_S est surjective).

▷ Le point *1* est une reformulation de la proposition V-9.3 (qui affirme un tout petit peu plus, dans un cas plus général). Le point *2* en découle facilement.

3. On a $N = \mathbf{A}y_1 + \cdots + \mathbf{A}y_n$, et $M = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_m$, avec une matrice de présentation P.

Pour que la factorisation par θ existe, il suffit que parmi les colonnes de la matrice Q on trouve les syzygies « images des colonnes de P par ψ » (ce sont des syzygies entre les y_k une fois que l'on a exprimé les $\psi(x_j)$ en fonction des y_k).

Pour que $vN' \subseteq \theta(M)$, il suffit que parmi les colonnes de la matrice Q on trouve les syzygies exprimant que les vy_k sont dans $\mathbf{A}\psi(x_1) + \cdots + \mathbf{A}\psi(x_m)$ (une fois que l'on a exprimé les $\psi(x_j)$ en fonction des y_k). □

6.12. Lemme. *Le principe local-global concret 6.10 est correct si N est lui-même un module de présentation finie.*

▷ L'hypothèse donne une application linéaire surjective $\varphi_i : M_{S_i} \to N_{S_i}$. Par les points *1* et *2* du lemme 6.11 on a $s_i, v_i \in S_i$ et une application linéaire $\psi_i : M \to N$ tels que $s_i\varphi_i = (\psi_i)_{S_i}$ et $v_iN \subseteq \psi_i(M)$. Chaque application linéaire ψ_i est représentée par deux matrices K_i et G_i qui font commuter les diagrammes convenables (voir la section IV-3).

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{A}^p & \xrightarrow{P} & \mathbf{A}^m & \xrightarrow{\pi_M} & M \\
{\scriptstyle K_i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G_i} & & \downarrow{\scriptstyle \psi_i} \\
\mathbf{A}^q & \xrightarrow[Q]{} & \mathbf{A}^n & \xrightarrow[\pi_N]{} & N
\end{array}$$

On considère r inconnues a_i dans $\mathbf{A}$ et l'application $\psi = \sum a_i\psi_i$ correspondant aux matrices $K = \sum a_iK_i$ et $G = \sum a_iG_i$.

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{A}^p & \xrightarrow{P} & \mathbf{A}^m & \xrightarrow{\pi_M} & M \\
{\scriptstyle K}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G} & & \downarrow{\scriptstyle \psi} \\
\mathbf{A}^q & \xrightarrow[Q]{} & \mathbf{A}^n & \xrightarrow[\pi_N]{} & N
\end{array}$$

Le fait que ψ soit surjective signifie que la matrice $H = \begin{array}{|c|c|}\hline G & Q \\ \hline \end{array}$ est surjective, c'est-à-dire que $\mathcal{D}_n(H) = \langle 1 \rangle$. On introduit donc les indéterminées c_ℓ pour fabriquer une combinaison linéaire arbitraire des mineurs

maximaux δ_ℓ de la matrice H. Cette combinaison linéaire $\sum_\ell c_\ell \delta_\ell$ est un polynôme en les a_i et c_ℓ. Par hypothèse, ce polynôme représente 1 sur chacun des $\mathbf{A}\big[\frac{1}{s_i v_i}\big]$, donc, puisque l'anneau est local-global, il représente un inversible (proposition 6.6). □

Fin de la démonstration du principe local-global concret 6.10.
On a $N = \mathbf{A}y_1 + \cdots + \mathbf{A}y_n$, et $M = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_m$, avec une matrice de présentation P. Pour chaque $i \in [\![1..r]\!]$ on applique le lemme 6.11 avec le monoïde S_i et l'application linéaire surjective $\varphi_i : M_{S_i} \to N_{S_i}$ donnée dans l'hypothèse. On obtient une application linéaire $\psi_i : M \to N$, une matrice Q_i de syzygies satisfaites par les y_k, une application linéaire $\theta_i : M \to N_i'$ (où N_i' est le module de présentation finie correspondant à Q_i), des éléments s_i, $v_i \in S_i$ avec $s_i\varphi_i = (\psi_i)_{S_i}$, enfin ψ_i se factorise via $\theta_i : M \to N_i'$ avec $v_i N_i' \subseteq \theta_i(M)$.
On considère alors le module N' de présentation finie correspondant à la matrice de relations Q obtenue en juxtaposant les matrices Q_i, de sorte que N' est un quotient de chaque N_i'.
Comme N est un quotient de N', on a ramené le problème au cas où N est lui-même de présentation finie, cas qui a été traité dans le lemme 6.12. □

Systèmes congruentiels

Une propriété de stabilité importante des anneaux local-globals est la stabilité par extension entière.

6.13. Théorème. *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *avec* $\mathbf{B}$ *entier sur* $\mathbf{A}$. *Si* $\mathbf{A}$ *est local-global, alors* $\mathbf{B}$ *également.*

La démonstration est renvoyée page 527, après un détour par les anneaux congruentiels.

6.14. Définition. Une partie C d'un anneau $\mathbf{A}$ est appelée un *système congruentiel* si elle vérifie la propriété suivante : si $s_1 + s_2 = 1$ dans $\mathbf{A}$ et si c_1, $c_2 \in C$, alors il existe $c \in C$ tel que $c \equiv c_1 \bmod s_1$ et $c \equiv c_2 \bmod s_2$.

Remarques. 1) Il revient au même de dire : si $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ sont deux idéaux comaximaux de $\mathbf{A}$ et si c_1, $c_2 \in C$, alors il existe $c \in C$ tel que $c \equiv c_1 \bmod \mathfrak{a}_1$ et $c \equiv c_2 \bmod \mathfrak{a}_2$.
2) L'élément $c' = c_2 s_1 + c_1 s_2$ est le candidat naturel pour $c \in \mathbf{A}$ vérifiant les congruences $c \equiv c_1 \bmod s_1$ et $c \equiv c_2 \bmod s_2$. On doit donc avoir un élément c de C tel que $c \equiv c' \bmod s_1 s_2$. ∎

Exemple. Soit $(\underline{b}) = (b_1, \ldots, b_n)$ une suite dans un anneau $\mathbf{B}$. L'*ensemble de Suslin de* $(b_1, \ldots, b_n)$ est la partie suivante de $\mathbf{B}$:

$$\mathrm{Suslin}(\underline{b}) = \{\, u_1 b_1 + \cdots + u_n b_n \mid (u_1, \ldots, u_n) \text{ est } \mathbb{E}_n(\mathbf{B})\text{-complétable} \,\},$$

($(u_1, \ldots, u_n)$ est la première ligne d'une matrice de $\mathbb{E}_n(\mathbf{B})$).

Si l'un des u_i est inversible, alors $u_1b_1 + u_2b_2 + \cdots + u_nb_n \in \mathrm{Suslin}(\underline{b})$ et l'on a donc $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq \mathrm{Suslin}(b_1, \ldots, b_n) \subseteq \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$.
Montrons que l'ensemble $\mathrm{Suslin}(\underline{b})$ est toujours congruentiel.
En effet, pour E, $F \in \mathbb{E}_n(\mathbf{B})$ et deux éléments comaximaux s, t de $\mathbf{B}$, il existe $G \in \mathbb{E}_n(\mathbf{B})$ vérifiant $G \equiv E \bmod s$ et $G \equiv F \bmod t$.
Soient f, g_1, …, $g_n \in \mathbf{A}[X]$ avec f unitaire, et $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$. Alors l'ensemble de Suslin de $(\overline{g_1}, \ldots, \overline{g_n})$ joue un rôle important dans l'étude des vecteurs unimodulaires polynomiaux (cf. lemme XV-6.1). ∎

6.15. Fait. *Pour tout polynôme $P \in \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ l'ensemble V_P des valeurs de P est un système congruentiel ($V_P = \{\, P(\underline{x}) \mid \underline{x} \in \mathbf{A}^n \,\}$).*

▷ Soient s, t deux éléments comaximaux et $\underline{x}$, $\underline{y}$ dans $\mathbf{A}^n$. Un chinois nous donne un $\underline{z} \in \mathbf{A}^n$ tel que $\underline{z} \equiv \underline{x} \bmod s$ et $\underline{z} \equiv \underline{y} \bmod t$. Alors, on a $P(\underline{z}) \equiv P(\underline{x}) \bmod s$ et $P(\underline{z}) \equiv P(\underline{y}) \bmod t$. □

6.16. Fait. *Soit C un système congruentiel. Si $\mathfrak{a}_1$, …, $\mathfrak{a}_\ell$ sont des idéaux deux à deux comaximaux et si c_1, …, $c_\ell \in C$, alors il existe $c \in C$ tel que $c \equiv c_j \bmod \mathfrak{a}_j$ pour $j \in [\![1..\ell]\!]$.*

▷ Il s'agit de la preuve usuelle du théorème chinois, adaptée à la situation présente. On raisonne par récurrence sur $\ell \geqslant 2$. L'initialisation est par définition. Si $\ell > 2$ on considère les idéaux deux à deux comaximaux $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_{\ell-2}$ et $\mathfrak{a}_{\ell-1}\mathfrak{a}_\ell$. Soit $e \in C$ tel que $e \equiv c_{\ell-1} \bmod \mathfrak{a}_{\ell-1}$ et $e \equiv c_\ell \bmod \mathfrak{a}_\ell$.
Par hypothèse de récurrence, on trouve c dans C tel que $c \equiv c_k \bmod \mathfrak{a}_k$ pour $k \in [\![1..\ell-2]\!]$ et $c \equiv e \bmod \mathfrak{a}_{\ell-1}\mathfrak{a}_\ell$. A fortiori, $c \equiv c_{\ell-1} \bmod \mathfrak{a}_{\ell-1}$ et $c \equiv c_\ell \bmod \mathfrak{a}_\ell$. □

6.17. Fait. *Soient C un système congruentiel, w_1, …, w_n des éléments de C et $(e_1, \ldots, e_n)$ un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Alors, l'élément $w = e_1w_1 + \cdots + e_nw_n$ est dans C.*

▷ On a $w \equiv w_i \bmod 1 - e_i$, et les $\langle 1 - e_i\rangle$ sont 2 à 2 comaximaux, mais w est l'unique élément vérifiant ces congruences puisque $\bigcap_i \langle 1 - e_i\rangle = \langle 0\rangle$. Il reste à appliquer le fait précédent. □

6.18. Définition. Un anneau $\mathbf{A}$ est dit *congruentiel* si tout système congruentiel qui engendre l'idéal $\langle 1\rangle$ contient un élément inversible.

6.19. Lemme.

1. *Soit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$. Alors, l'anneau $\mathbf{A}$ est congruentiel si, et seulement si, l'anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est congruentiel.*
2. *Tout anneau résiduellement zéro-dimensionnel est congruentiel.*
3. *Tout anneau congruentiel est local-global.*

D *1.* On utilise le fait que des éléments sont comaximaux (resp. inversibles) dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, ils sont comaximaux (resp. inversibles) dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$.
2. Supposons $\mathbf{A}$ résiduellement zéro-dimensionnel. Il suffit de montrer que $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ est congruentiel. Soit W un système congruentiel de $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ tel que $\langle W\rangle = \langle 1\rangle$. Soient $w_1, \ldots, w_n \in W$ avec $\langle w_1, \ldots, w_n\rangle = \langle 1\rangle$. Il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_1, \ldots, e_n)$ tel que l'on ait $\langle e_1w_1 + \cdots + e_nw_n\rangle = \langle 1\rangle$ (lemme IV-8.5 point *5*). On conclut avec le fait 6.17 que W contient l'élément inversible $e_1w_1 + \cdots + e_nw_n$.
3. Supposons $\mathbf{A}$ congruentiel et soit P un polynôme primitif par valeurs. Puisque les valeurs de P forment un système congruentiel, une valeur de P est inversible. □

Stabilité par extension entière

Comme corollaire immédiat du lemme 6.19 on a le résultat qui suit.

6.20. Corollaire. *Soit* $\mathbf{B}$ *une algèbre strictement finie sur un corps discret* $\mathbf{A}$ *et* W *un système congruentiel dans* $\mathbf{B}$ *tel que* $\langle W\rangle = \langle 1\rangle_{\mathbf{B}}$.
Alors, l'ensemble $\mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(W)$ *contient un élément inversible.*

D On sait que $\mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel, donc il est congruentiel (lemme 6.19). Puisque W est congruentiel et engendre l'idéal $\langle 1\rangle$, il contient un élément inversible. Enfin, la norme d'un élément inversible est inversible. □

6.21. Proposition. *Soit* $\mathbf{B}$ *une algèbre strictement finie sur un anneau* $\mathbf{A}$ *et* W *un système congruentiel dans* $\mathbf{B}$. *Si* $1 \in \langle W\rangle$, *alors,* $1 \in \big\langle \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(W)\big\rangle$.

D *1.* Un système congruentiel reste congruentiel par passage à un anneau quotient. Si on lit la conclusion du corollaire 6.20 sous la forme $1 \in \big\langle \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(W)\big\rangle$ (plus faible), on constate qu'il est sous une forme adéquate pour subir la machinerie constructive à idéaux maximaux qui sera expliquée page 892 dans la section XV-6, et qui sert à démontrer qu'un idéal contient 1. On obtient donc le résultat souhaité. □

Remarques.
1) En mathématiques classiques on dirait ceci : si $1 \notin \big\langle \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(W)\big\rangle_{\mathbf{A}}$, cet idéal serait contenu dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$. Mais le corollaire 6.20, appliqué avec le corps discret $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ et l'algèbre strictement finie $\mathbf{B}/\mathfrak{m}\mathbf{B}$, montre que c'est impossible.
La machinerie constructive à idéaux maximaux a justement pour but de décrypter ce type de preuve abstraite et de la transformer en un algorithme qui construit 1 comme élément de $\big\langle \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(W)\big\rangle_{\mathbf{A}}$ à partir des hypothèses.
2) Comme exemple, si $(\underline{b}) = (b_1, \ldots, b_q)$ est un système d'éléments comaximaux dans $\mathbf{B}$, on a $1 \in \big\langle \mathrm{N}_{\mathbf{B/A}}(w) \mid w \in \mathrm{Suslin}(\underline{b})\big\rangle_{\mathbf{A}}$, puisque l'ensemble $\mathrm{Suslin}(\underline{b})$ est congruentiel.

Mais on se gardera de croire que $1 \in \langle \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_1), \dots, \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_q) \rangle_{\mathbf{A}}$.
Une instance célèbre de cette propriété est un résultat dû à Suslin portant sur les vecteurs polynomiaux, donné dans le lemme XV-6.1. Dans ce lemme, $\mathbf{B}$ est de la forme $\mathbf{A}[X]/\langle v \rangle$ avec $v \in \mathbf{A}[X]$ polynôme unitaire. Un décryptage complet sera fourni dans la démonstration du lemme en question. ∎

Démonstration du théorème 6.13. Traitons en premier le cas où $\mathbf{B}$ est libre de rang fini, disons ℓ, sur $\mathbf{A}$. Soit $P \in \mathbf{B}[X_1, \dots, X_n]$ un polynôme primitif par valeurs. Nous voulons un $\underline{b} \in \mathbf{B}^n$ avec $P(\underline{b})$ inversible. Nous considérons le système congruentiel W des valeurs de P. Par hypothèse on a $1 \in \langle W \rangle$. La proposition 6.21 nous dit alors que $\langle \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(W) \rangle_{\mathbf{A}} = \langle 1 \rangle_{\mathbf{A}}$.
Mais $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(P(b_1, \dots, b_n)\big)$ est un polynôme à $n\ell$ variables dans $\mathbf{A}$ si l'on exprime chaque $b_i \in \mathbf{B}$ sur une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$, et $\mathbf{A}$ est local-global, donc il existe $\underline{b} \in \mathbf{B}^n$ tel que $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(P(\underline{b})\big)$ est inversible, et cela implique que $P(\underline{b})$ est inversible.
Dans le cas général où $\mathbf{B}$ est seulement supposé entier sur $\mathbf{A}$, considérons dans $\mathbf{B}$ les sous-$\mathbf{A}$-algèbres $\mathbf{B}_i$ de type fini ; $\mathbf{B}$ en est la réunion filtrante croissante. Puisque $\mathbf{B}$ est entier sur $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_i$ également, donc est un quotient d'une $\mathbf{A}$-algèbre qui est un $\mathbf{A}$-module libre de rang fini. D'après le premier cas, et en vertu du point *5* du fait 6.2, chaque $\mathbf{B}_i$ est local-global. Enfin d'après le dernier point du fait 6.2, $\mathbf{B}$ est local-global. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Démontrer en mathématiques classiques que le nilradical d'un anneau est égal à l'intersection de ses idéaux premiers.

Exercice 2. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{A}$ on note $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ son *radical de Jacobson*, c'est-à-dire l'image réciproque de $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ par la projection canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$. Montrer que $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ est le plus grand idéal $\mathfrak{b}$ tel que le monoïde $1 + \mathfrak{b}$ soit contenu dans le saturé de $1 + \mathfrak{a}$.

Exercice 3. Démontrer en mathématiques constructives que le radical de Jacobson d'un anneau local coïncide avec l'ensemble des éléments noninversibles. Et que c'est l'unique idéal $\mathfrak{a}$ vérifiant :
— $\mathfrak{a}$ est maximal
— $1 \in \mathfrak{a}$ implique $1 = 0$.

Exercice 4. Soit $\mathbf{A}$ un anneau non commutatif, $a, b \in \mathbf{A}$.
1. Si a admet un inverse à gauche c, alors c est inverse à droite de a si, et seulement si, c est l'unique inverse à gauche.
2. Si $1 - ab$ admet un inverse à gauche u, alors $1 - ba$ admet aussi un inverse à gauche v. Idée : si ab et ba sont « petits », u doit être égal à $1 + ab + abab + \dots$, et v égal à $1 + ba + baba + \cdots = 1 + b(1 + ab + abab + \cdots)a$.
3. Si pour tout x, $1 - xa$ est inversible à gauche, alors pour tout x, $1 - xa$ est inversible à droite.

4. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
- Pour tout x, $1-xa$ est inversible à gauche.
- Pour tout x, $1-xa$ est inversible à droite.
- Pour tout x, $1-xa$ est inversible.
- Pour tout x, $1-ax$ est inversible à gauche.
- Pour tout x, $1-ax$ est inversible à droite.
- Pour tout x, $1-ax$ est inversible.
- Pour tous x, y, $1-xay$ est inversible.

Les éléments a qui vérifient ces propriétés forment un idéal bilatère appelé radical de Jacobson de $\mathbf{A}$.

Exercice 5. *(Un lemme de liberté)* Soit $(\mathbf{A}, \mathfrak{m})$ un anneau local intègre de corps résiduel $\mathbf{k}$, de corps des fractions $\mathbf{K}$. Soit E un $\mathbf{A}$-module de type fini ; on suppose que le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $E/\mathfrak{m}E = \mathbf{k} \otimes_{\mathbf{A}} E$ et le $\mathbf{K}$-espace vectoriel $\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} E$ ont même dimension n. Montrer que E est un $\mathbf{A}$-module libre de rang n.
Mieux : si $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ est une base résiduelle, c'est une $\mathbf{A}$-base de E.

Exercice 6. *(Une application du lemme de Nakayama)*
Soit E un $\mathbf{A}$-module de présentation finie et $a \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ un élément E-régulier. On suppose que le $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$-module E/aE est libre de rang n. Montrer que E est libre de rang n. Plus précisément, soient e_1, …, $e_n \in E$, si $(\overline{e_1}, \ldots, \overline{e_n})$ est une $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$-base de E/aE, alors $(e_1, \ldots, e_n)$ est une $\mathbf{A}$-base de E.

Exercice 7. Soit $\mathbf{A}$ un anneau local. Si $\langle b \rangle = \langle a \rangle$, il existe un élément inversible u tel que $ua = b$. Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle a \rangle$, il existe un indice i tel que $\mathfrak{a} = \langle x_i \rangle$.

Exercice 8. Démonstration directe détaillée du théorème 4.6 lorsque $n = s$.

Exercice 9. On reprend certains points du théorème V-3.1, en supposant maintenant que l'anneau $\mathbf{A}$ est résiduellement zéro-dimensionnel. La lectrice est invitée à fournir des démonstrations indépendantes des résultats obtenus pour les anneaux local-globals.
1. Tout $\mathbf{A}$-module projectif de type fini est quasi libre.
2. Toute matrice $G \in \mathbf{A}^{q \times m}$ de rang $\geqslant k$ est équivalente à une matrice

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0_{k,m-k} \\ 0_{q-k,k} & G_1 \end{bmatrix},$$

avec $\mathcal{D}_r(G_1) = \mathcal{D}_{k+r}(G)$ pour tout $r \geqslant 0$. Les matrices sont élémentairement équivalentes si $k < \sup(q, m)$.
3. Tout module de présentation finie localement engendré par k éléments est engendré par k éléments.

Exercice 10. *(Si $\mathbf{A}$ est local, $\mathbb{SL}_n(\mathbf{A}) = \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau local. Montrer que toute matrice $B \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$ est produit de matrices élémentaires (autrement dit, B est élémentairement équivalente à la matrice I_n). On pourra s'inspirer de la preuve du lemme de la liberté locale. Voir aussi l'exercice 17.

Exercice 11. *1.* Démontrer qu'un $\mathbf{A}$-module de type fini M est localement engendré par k éléments (définition 2.5) si, et seulement si, $\bigwedge_{\mathbf{A}}^{k+1} M = 0$. On pourra s'inspirer du cas $k = 1$ traité dans le théorème V-7.3.
2. En déduire que l'annulateur $\mathrm{Ann}\big(\bigwedge_{\mathbf{A}}^{k+1} M\big)$ et l'idéal de Fitting $\mathcal{F}_k(M)$ ont même radical.

Exercice 12. *(Variation sur le thème localement engendré)*
Soit M un $\mathbf{A}$-module de type fini, avec deux systèmes générateurs $(x_1, \ldots, x_n)$ et $(y_1, \ldots, y_r)$ avec $r \leqslant n$. On veut expliciter une famille (s_I) de $\binom{n}{r}$ éléments comaximaux, indexée par les $I \in \mathcal{P}_{r,n}$, telle que $s_I M \subseteq \langle (x_i)_{i\in I} \rangle$. Notez que sur chaque localisé $\mathbf{A}[s_I^{-1}]$, le module M est engendré par les $(x_i)_{i\in I}$.
1. Soient A et $B \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$.

a. Expliciter l'appartenance :
$$\det(A + B) \in \mathcal{D}_{n-r}(B) + \mathcal{D}_{r+1}(A).$$
b. En déduire que $1 \in \mathcal{D}_{n-r}(\mathrm{I}_n - A) + \mathcal{D}_{r+1}(A)$.
c. En particulier, si $\mathrm{rg}(A) \leqslant r$, alors $\mathrm{rg}(\mathrm{I}_n - A) \geqslant n - r$.
d. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$, $\pi_I = \prod_I a_i$, $\pi'_J = \prod_J (1 - a_j)$.
Montrer que les $(\pi_I)_{\#I=r+1}$ et $(\pi'_J)_{\#J=n-r}$ forment un système de $\binom{n+1}{r+1}$ éléments comaximaux.

2. Prouver le résultat annoncé en début d'exercice en explicitant la famille (s_I).
3. Soit E un $\mathbf{A}$-module de type fini localement engendré par r éléments. Pour n'importe quel système générateur $(x_1, \ldots, x_n)$, il existe des éléments comaximaux t_j tels que chacun des localisés E_{t_j} est engendré par r éléments parmi les x_i.
4. Soit $E = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ un $\mathbf{A}$-module de type fini et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ vérifiant $\underline{x}\, A = \underline{x}$ avec $\mathrm{rg}(A) \leqslant r$. Montrer que E est localement engendré par r éléments. Étudier une réciproque.

Exercice 13. Si $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont deux anneaux décomposables on dit qu'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un *morphisme d'anneaux décomposables* si, pour tous a, $b \in \mathbf{A}$ vérifiant $b(1 - ab) = 0$ et $a(1 - ab) \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, on a dans $\mathbf{B}$, avec $a' = \varphi(a)$ et $b' = \varphi(b)$, $b'(1 - a'b') = 0$ et $a'(1 - a'b') \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$ (cf. proposition 5.3).

1. Montrer que φ est un morphisme d'anneaux décomposables si, et seulement si, $\varphi(\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$.
2. Étudier les morphismes injectifs et surjectifs des anneaux décomposables. En d'autres termes, préciser les notions de sous-anneau décomposable (en un seul mot) et d'anneau décomposable quotient.

Exercice 14. *(Machinerie locale-globale élémentaire des anneaux décomposables)*
Le fait de pouvoir scinder systématiquement en deux composantes un anneau décomposable conduit à la méthode générale suivante.
La plupart des algorithmes qui fonctionnent avec les anneaux locaux résiduellement discrets peuvent être modifiés de manière à fonctionner avec les anneaux décomposables, en scindant l'anneau en deux composantes chaque fois que l'algorithme écrit pour les anneaux locaux résiduellement discrets utilise le test « cet élément

est-il inversible ou dans le radical ?». *Dans la première composante l'élément en question est inversible, dans la seconde il est dans le radical.*
En fait on a rarement l'occasion d'utiliser cette machinerie élémentaire, la principale raison étant qu'une machinerie locale-globale plus générale (mais moins élémentaire) s'applique avec un anneau arbitraire, comme cela sera expliqué dans la section XV-5.

Exercice 15. *(Polynôme représentant localement un inversible, lemme 6.5)*
Le point *3* de cet exercice donne une version renforcée du lemme 6.5. L'approche utilisée ici est due à Lionel Ducos.
Soient $\mathbf{A}$ un anneau, $d \in \mathbb{N}$ et $e = d(d+1)/2$.
1. Ici, s est une indéterminée sur $\mathbb{Z}$. Construire $d+1$ polynômes $a_i(s) \in \mathbb{Z}[s]$ pour $i \in [\![0..d]\!]$, vérifiant pour tout $P \in \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ de degré $\leqslant d$:

$$(\star_d) \qquad s^e P(s^{-1}\underline{X}) = a_0(s)P(s^0\underline{X}) + a_1(s)P(s^1\underline{X}) + \cdots + a_d(s)P(s^d\underline{X}).$$

2. Pour $s \in \mathbf{A}$, $\underline{x} \in \mathbf{A}^n$ et $P \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ de degré total $\leqslant d$, montrer que :
$$s^e P(\underline{x}/s) \in \big\langle P(\underline{x}), P(s\underline{x}), \ldots, P(s^d\underline{x}) \big\rangle \subseteq \mathbf{A}.$$
3. Soit S un monoïde et $P \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. On suppose que P représente un inversible dans $\mathbf{A}_S$. Montrer que S rencontre l'idéal engendré par les valeurs de P.

Exercice 16. (Voir aussi l'exercice IV-10) Soit $\mathbf{A}$ un anneau local-global et M un $\mathbf{A}$-module.
1. Pour tout idéal $\mathfrak{a}$, l'homomorphisme canonique $\mathbf{A}^\times \to (\mathbf{A}/\mathfrak{a})^\times$ est surjectif.
2. Si x, $y \in M$ et $\mathbf{A}x = \mathbf{A}y$, il existe un inversible u tel que $x = uy$.

Exercice 17. *(Si $\mathbf{A}$ est local-global, $\mathbb{SL}_n(\mathbf{A}) = \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau local-global, et $(a_1, \ldots, a_n)$ un vecteur unimodulaire ($n \geqslant 2$).
1. Montrer qu'il existe x_2, …, x_n tels que $a_1 + \sum_{i \geqslant 2} x_i a_i \in \mathbf{A}^\times$.
2. En déduire (pour $n \geqslant 2$) que tout vecteur unimodulaire se transforme en le vecteur $(1, 0, \ldots, 0)$ par manipulations élémentaires.
3. En déduire que $\mathbb{SL}_n\mathbf{A} = \mathbb{E}_n\mathbf{A}$.

Exercice 18. *(Anneaux semi-locaux, 1)*
1. Pour un anneau $\mathbf{B}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.
- *a.* Si $(x_1, \ldots, x_k)$ est unimodulaire, il existe un système d'idempotents orthogonaux $(e_1, \ldots, e_k)$ tel que $e_1x_1 + \cdots + e_kx_k$ soit inversible.
- *b.* Sous la même hypothèse, il existe un scindage $\mathbf{B} \simeq \mathbf{B}_1 \times \cdots \times \mathbf{B}_k$ tel que la composante de x_i dans $\mathbf{B}_i$ soit inversible pour $i \in [\![1..k]\!]$.
- *c.* Même chose que dans *a*, mais avec $k = 2$.
- *d.* Pour tout $x \in \mathbf{B}$, il existe un idempotent $e \in \mathbf{B}$ tel que $x+e$ soit inversible.

Notez qu'au point *a*, $(e_1, \ldots, e_k)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux puisque $1 \in \langle e_1, \ldots, e_k \rangle$.
Les anneaux vérifiant ces propriétés équivalentes ont été appelé «clean rings» dans [143, Nicholson]. Nous les appellerons les anneaux *cleans*.
2. Les anneaux cleans sont stables par quotient et par produit fini. Tout anneau local est clean.
3. Si $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ est clean, il en va de même pour $\mathbf{B}$. En déduire qu'un anneau zéro-dimensionnel est clean.

4. Si $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ est clean, $\mathbf{B}$ relève les idempotents de $\mathbf{B}/\operatorname{Rad}\mathbf{B}$.
On dit qu'un anneau $\mathbf{A}$ est *semi-local* si l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ est clean. On dit qu'il est *semi-local strict* s'il est semi-local et si $\mathbb{B}(\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A})$ est une algèbre de Boole bornée.

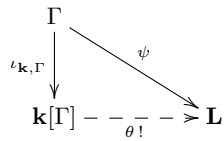
Exercice 19. *(Anneaux semi-locaux, 2)* Suite de l'exercice 18.
1. Un anneau local est semi-local strict.
2. Un anneau semi-local et résiduellement connexe est local.
3. Un anneau résiduellement zéro-dimensionnel est semi-local.
4. Un anneau semi-local est local-global.
5. Les anneaux semi-locaux sont stables par quotient et par produit fini.
6. En mathématiques classiques, un anneau est semi-local strict si, et seulement si, il possède un nombre fini d'idéaux maximaux.

Exercice 20. *(Propriétés du localisé de Nagata)* Voir aussi l'exercice XII-3.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $U \subseteq \mathbf{A}[X]$ le monoïde des polynômes primitifs.
Notons $\mathbf{B} = U^{-1}\mathbf{A}[X] = \mathbf{A}(X)$ le localisé de Nagata de $\mathbf{A}[X]$.
0. Donner une démonstration directe du fait que $\mathbf{B}$ est fidèlement plat sur $\mathbf{A}$.
1. $\mathbf{A} \cap \mathbf{B}^\times = \mathbf{A}^\times$.
2. $\operatorname{Rad}\mathbf{A} = \mathbf{A} \cap \operatorname{Rad}\mathbf{B}$ et $\operatorname{Rad}\mathbf{B} = U^{-1}(\operatorname{Rad}\mathbf{A})[X]$.
3. $\mathbf{B}/\operatorname{Rad}\mathbf{B} \simeq (\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A})(X)$.
4. Si $\mathbf{A}$ est local (resp. local résiduellement discret), alors $\mathbf{B}$ est local (resp. local résiduellement discret).
5. Si $\mathbf{A}$ est un corps (resp. un corps discret), alors $\mathbf{B}$ est un corps (resp. un corps discret).

Exercice 21. *(Localisé de Nagata en plusieurs indéterminées)*
Soit U l'ensemble des polynômes primitifs de $\mathbf{A}[X, Y]$.
1. Montrer que U est un filtre.
On note $\mathbf{A}(X, Y) = U^{-1}\mathbf{A}[X, Y]$, on l'appelle le *localisé de Nagata de* $\mathbf{A}[X, Y]$.
2. Montrer que l'application canonique $\mathbf{A}[X, Y] \to \mathbf{A}(X, Y)$ est injective et que l'on a un isomorphisme naturel $\mathbf{A}(X, Y) \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}(X)(Y)$.
3. Généraliser les résultats de l'exercice 20.

Exercice 22. *(Algèbre d'un monoïde et idéaux binomiaux)*
Soit $(\Gamma, \cdot, 1_\Gamma)$ un monoïde commutatif noté multiplicativement, et $\mathbf{k}$ un anneau commutatif.
L'*algèbre de* $(\Gamma, \cdot, 1_\Gamma)$ *sur* $\mathbf{k}$, notée $\mathbf{k}[(\Gamma, \cdot, 1_\Gamma)]$ ou plus simplement $\mathbf{k}[\Gamma]$, est formée à partir du $\mathbf{k}$-module libre sur Γ (si Γ n'est pas supposé discret, voir l'exercice VIII-16). Si $\mathbf{k}$ est non trivial, on identifie tout élément γ de Γ à son image dans le module libre. En cas de doute concernant $\mathbf{k}$, on devrait noter $1_{\mathbf{k}}\gamma$ au lieu de γ cet élément de $\mathbf{k}[\Gamma]$.
La loi produit $\times$ de $\mathbf{k}[\Gamma]$ est obtenue en posant $\gamma \cdot \gamma' = \gamma \times \gamma'$ et en prolongeant par $\mathbf{k}$-bilinéarité. Notons que $1_{\mathbf{A}}1_\Gamma = 1_{\mathbf{k}[\Gamma]}$. En pratique, on identifie $\mathbf{k}$ à un sous-anneau de $\mathbf{k}[\Gamma]$, et l'on identifie les trois 1 ci-devant.

1. Vérifier que la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\Gamma]$, considérée avec l'application
$$\iota_{\mathbf{k},\Gamma} : \Gamma \to \mathbf{k}[\Gamma],\ \gamma \mapsto 1_{\mathbf{k}}\gamma,$$
donne la solution du problème universel résumé dans le dessin ci-dessous



monoïdes commutatifs

morphismes de monoïdes

k-algèbres

On dit pour résumer que $\mathbf{k}[\Gamma]$ *est la* $\mathbf{k}$*-algèbre librement engendrée par le monoïde multiplicatif* Γ.

Lorsque la loi de Γ est notée additivement, on note X^γ l'élément de $\mathbf{k}[\Gamma]$ image de $\gamma \in \Gamma$ de sorte que l'on a maintenant l'écriture naturelle $X^{\gamma_1} X^{\gamma_2} = X^{\gamma_1+\gamma_2}$.
Par exemple, lorsque $\Gamma = \mathbb{N}^r$ est le monoïde additif librement engendré par un ensemble à r éléments, on peut voir les éléments de $\mathbb{N}^r$ comme des multiexposants et $\mathbf{k}[\Gamma] = \mathbf{k}[(\mathbb{N}^r, +, 0)] \simeq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_r]$. Ici $X^{(m_1,\dots,m_r)} = X_1^{m_1} \cdots X_r^{m_r}$.
Lorsque $\Gamma = (\mathbb{Z}^r, +, 0)$, on peut encore voir les éléments de $\mathbb{Z}^r$ comme des multiexposants et $\mathbf{k}[\mathbb{Z}^r] \simeq \mathbf{k}[X_1, \dots, X_r, \frac{1}{X_1}, \dots, \frac{1}{X_r}]$, l'anneau des polynômes de Laurent.
Supposons maintenant que $(\Gamma, \cdot, 1)$ soit un monoïde donné par générateurs et relations. Notons G l'ensemble des générateurs.
Les relations sont de la forme $\prod_{i\in I} g_i^{k_i} = \prod_{j\in J} h_j^{\ell_j}$ pour des familles finies

$$(g_i)_{i\in I} \text{ et } (h_j)_{j\in J} \text{ dans } G, \text{ et } (k_i)_{i\in I} \text{ et } (\ell_j)_{j\in J} \text{ dans } \mathbb{N}.$$

Une telle relation peut être codée par le couple $\big((k_i, g_i)_{i\in I}, (\ell_j, h_j)_{j\in J}\big)$.
Si l'on espère contrôler les choses, il vaut mieux que G et l'ensemble des relations soient énumérables et discrets. Du point de vue du calcul la place centrale est occupée par les présentations finies.
Notation. Pour visualiser une présentation finie, par exemple avec $G = \{x, y, z\}$ et des relations $xy^2 = yz^3$, $xyz = y^4$ on écrira en notation multiplicative

$$\boxed{\Gamma =_{\mathrm{MC}} \left\langle x, y, z \,|\, xy^2 = yz^3, xyz = y^4 \right\rangle}, \qquad (*)$$

et en notation additive

$$\boxed{\Gamma =_{\mathrm{MC}} \langle x, y, z \,|\, x + 2y = y + 3z, x + y + z = 4y \rangle}.$$

L'indice MC est mis pour « monoïde commutatif ».

2. Montrer que $\mathbf{k}[\Gamma] \simeq \mathbf{k}[(g)_{g\in G}]/\mathfrak{a}$, où $\mathfrak{a}$ est l'idéal engendré par les différences de monômes $\prod_{i\in I} {g_i}^{k_i} - \prod_{j\in J} {h_j}^{\ell_j}$ (pour les relations $\prod_{i\in I} g_i^{k_i} = \prod_{j\in J} h_j^{\ell_j}$ données dans la présentation de Γ). Un tel idéal est appelé un *idéal binomial*. Avec l'exemple $(*)$ ci-dessus, on peut donc écrire

$$\boxed{\mathbf{k}[\Gamma] =_{\mathbf{k}-\text{algèbres}} \left\langle x, y, z \,|\, xy^2 = yz^3, xyz = y^4 \right\rangle}. \qquad (**)$$

Autrement dit, $\Gamma =_{\mathrm{MC}} \langle truc \,|\, muche \rangle$ implique $\mathbf{k}[\Gamma] =_{\mathbf{k}-\text{algèbres}} \langle truc \,|\, muche \rangle$.

Exercice 23. *(Monoïde fini monogène)*
1. On suppose que $(\Gamma, \cdot, 1) =_{\mathrm{MC}} \left\langle x \,|\, x^5 = x^7 \right\rangle$. Combien Γ contient-il d'éléments ?
Montrer d'abord, que $e = x^6$ est idempotent, puis que $\mathbf{k}[\Gamma] \simeq \mathbf{k}[\epsilon] \times \mathbf{k}[\alpha]$ où ϵ et α sont soumis aux contraintes respectives $\epsilon^5 = 0$ et $\alpha^2 = 1$.

2. Généraliser ces résultats en remplaçant 5 et 2 par deux entiers m et r strictement positifs arbitraires. En particulier Γ contient exactement deux idempotents, 1 et e, ce dernier égal à x^{Nr} pour N assez grand.
3. Tout monoïde fini engendré par un seul élément est un groupe cyclique ou un monoïde du type précédent.

Exercice 24. *(Idempotent dans un monoïde commutatif)*
Soit e un idempotent dans un monoïde commutatif $(\Gamma, \cdot, 1_\Gamma)$ et $\mathbf{k}$ un anneau.
1. On note $\Gamma_{e=1}$, ou si le contexte s'y prête Γ_1, le monoïde $\Gamma/(e=1)$.
On note $e\Gamma = \{\, ex \mid x \in \Gamma \,\}$. La partie $e\Gamma$ est stable pour la multiplication par n'importe quel élément de Γ. On dit que $e\Gamma$ est *l'idéal principal de* Γ *engendré par* e.

a. Montrer que l'application composée $e\Gamma \to \Gamma \to \Gamma_1$ est une bijection et un morphisme pour la multiplication. On peut identifier les deux monoïdes $e\Gamma$ et Γ_1 au moyen de cet isomorphisme.
b. Montrer que le morphisme de $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\Gamma] \to \mathbf{k}[\Gamma_1]$ est un morphisme de passage au quotient par l'idéal $\langle e-1\rangle$. Ceci permet d'identifier $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e-1\rangle$ et $\mathbf{k}[\Gamma_1]$.
c. Montrer l'équivalence $x \in e\Gamma \iff ex = x$. Ainsi lorsque Γ est discret, $e\Gamma$ est une partie détachable de Γ.

Remarque. On peut identifier Γ_1 et l'idéal $e\Gamma$ de Γ. Cependant $e\Gamma$ n'est pas un sous-monoïde de Γ car l'élément neutre est e et non pas 1_Γ. Nous sommes ici dans la même situation que pour un idempotent dans un anneau commutatif. ∎

2. On note Γ'_e le monoïde $\Gamma/(e = ex,\ \forall x \in \Gamma)$.
On dit que Γ'_e est *le monoïde quotient obtenu en forçant* e *à être absorbant.*

a. Montrer que l'égalité de Γ'_e est obtenue comme la plus fine relation d'équivalence $\sim$ sur Γ qui vérifie $ex \sim ey$ pour tous x, $y \in \Gamma$.
b. Montrer que le morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres obtenu en composant
$$\mathbf{k}[\Gamma] \to \mathbf{k}[\Gamma'_e] \to \mathbf{k}[\Gamma'_e]/\langle e\rangle$$
est un morphisme de passage au quotient par l'idéal $\langle e\rangle$.
Autrement dit on peut identifier $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle$ et $\mathbf{k}[\Gamma'_e]/\langle e\rangle$.
c. Montrer que $\mathbf{k}[\Gamma'_e]/\langle e-1\rangle \simeq \mathbf{k}$. Ainsi $\mathbf{k}[\Gamma'_e] \simeq \mathbf{k} \times \mathbf{k}[\Gamma'_e]/\langle e\rangle \simeq \mathbf{k} \times \mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle$.
d. On suppose maintenant que $e\Gamma$ est une partie détachable de Γ.
— Montrer qu'une $\mathbf{k}$-base de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\Gamma'_e]/\langle e\rangle$ est l'ensemble $\Gamma \setminus e\Gamma$.
— Donner la table de multiplication pour cette base.
— On note $\Gamma_0 = (\Gamma \setminus e\Gamma) \cup \{e\}$ (réunion disjointe). Donner sur Γ_0 une structure de monoïde pour laquelle on a un isomorphisme naturel $\Gamma'_e \xrightarrow{\sim} \Gamma_0$.

Remarques. 1) Les monoïdes de présentation finie sont discrets. Mais ce n'est pas un résultat facile.
2) Lorsque $e\Gamma$ n'est pas détachable, l'ensemble $\Gamma \setminus e\Gamma$ n'est pas toujours explicitement une base de $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle$ comme $\mathbf{k}$-module.
Par exemple si $\Gamma =_{\mathrm{MC}} \left\langle x \mid x^2 = x^3, \mathsf{P} \Rightarrow x = x^2 \right\rangle$, où P est une conjecture non résolue, considérons $e = x^2$, de sorte que $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle$, en tant que $\mathbf{k}$-module, hésite entre $\mathbf{k}$ et $\mathbf{k}^2$.
Si l'application $\mathbf{k}$-linéaire naturelle $\iota : \mathbf{k}^{\Gamma\setminus e\Gamma} \to \mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle$ était un isomorphisme, il

faudrait donner $\iota^{-1}(\overline{x})$, qui est égal à x si P est fausse et à 0 si P est vraie.
3) En notation additive, un idempotent e est un élément vérfiant l'équation $2e = e$. Dans ce cas, il est légitime de noter $\Gamma_{e=0}$ ce qui était noté $\Gamma_{e=1}$ en notation multiplicative. Alors qu'en notation multiplicative, on pense un élément absorbant comme le 0 d'un anneau commutatif, en notation additive il faut penser un élément absorbant comme étant égal à $+\infty$. ∎

Exercice 25. *(Exemple d'étude d'un monoïde commutatif fini)*
Soient a, b, c, $d \in \mathbb{N}$ vérifiant $ad - bc \neq 0$.
On considère le monoïde commutatif $(\Gamma, \cdot, 1)$ engendré par deux éléments x, y soumis aux relations $x^a = y^b$, $x^c = y^d$. Avec la notation donnée dans l'exercice 22, on a donc $\Gamma =_{\mathrm{MC}} \langle x, y \,|\, x^a = y^b, x^c = y^d \rangle$. Vue la symétrie de la situation on peut supposer $ad > bc$. On pose $\Delta = ad - bc$ et $m = bc$.
1. Montrer que $x^m = x^{ad}$ et $y^m = y^{ad}$. En déduire que Γ est borné.
Si b ou $c = 0$, Γ est un groupe fini. Sinon calculer un idempotent $e \neq 1$.
2. Notons Γ_1 le monoïde $\Gamma_{e=1}$ obtenu en rajoutant la relation $e = 1$. Montrer que Γ_1 est un groupe fini d'ordre Δ. Il est cyclique si, et seulement si, $\gcd(a, b, c, d) = 1$. Sinon, en notant g ce pgcd, et $\delta = \Delta/g$, on obtient $\Gamma_1 \simeq (\mathbb{Z}/g\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\delta\mathbb{Z}, +, 0)$, c'est-à-dire encore $\Gamma_1 =_{\mathrm{MC}} \langle u, v \,|\, u^g = 1, v^\delta = 1 \rangle$.
3. Quelle est la structure du sous-monoïde de Γ engendré par x ?
4. On va montrer que $\#\Gamma = ad$. Pour ceci on met en place un processus de réécriture des monômes $x^k y^\ell$.
Une relation d'ordre total $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}^r$ est appelée un *ordre monomial* si elle raffine l'ordre partiel naturel (i.e. $m \preccurlyeq m + p$ pour $m, p \in \mathbb{N}^r$) et si elle est compatible avec l'addition : $m \preccurlyeq n$ implique $m + p \preccurlyeq n + p$ pour m, n, $p \in \mathbb{N}^r$.
On définit sur $\mathbb{N}^2$ un ordre monomial $\preccurlyeq$ satisfaisant $(0, b) \prec (a, 0)$ et $(c, 0) \prec (0, d)$ (où si l'on préfère $y^b \prec x^a$ et $x^c \prec y^d$) comme suit.
On pose $\ell_1(u, v) = du + cv$, $\ell_2(u, v) = bu + av$ et

$$\alpha \preccurlyeq \alpha' \iff \big(\ell_1(\alpha) < \ell_1(\alpha') \text{ ou } \big(\ell_1(\alpha) = \ell_1(\alpha') \text{ et } \ell_2(\alpha) \leqslant \ell_2(\alpha')\big)\big).$$

Le procédé de réécriture consiste à réécrire $x^k y^\ell$ sous forme $x^{k-a} y^{\ell+d}$ si $k \geqslant a$, et sinon sous forme $x^{k+c} y^{\ell-d}$ si $\ell \geqslant d$. On remplace de cette manière un monôme « formel » par un autre qui lui est égal dans Γ. Le processus s'arrête lorsque $k < a$ et $\ell < d$. Il y a donc ad monômes possibles à la fin du processus.
Ici on demande de démontrer trois choses.

a. On a bien défini un ordre monomial pour lequel $y^b \prec x^a$ et $x^c \prec y^d$.
b. Quel que soit le monôme de départ, le processus de réécriture termine après un nombre fini d'étapes.
c. Les monômes $x^k y^\ell$ pour $k \in [\![0..a-1]\!]$ et $\ell \in [\![0..d-1]\!]$ sont des éléments deux à deux distincts de Γ.

Ce qui montre que $\#\Gamma = ad$.
5. En déduire que $\#\Gamma'_e = m + 1$ (Γ'_e est obtenu en forçant e à devenir absorbant, voir l'exercice 24).
6. Montrer que les seuls idempotents de Γ sont 1 et e (distincts si $m > 0$).

Exercice 26. *(Étude d'un système zéro-dimensionnel, intersection de deux courbes planes affines)*
On étudie dans cet exercice l'intersection de deux courbes monomiales sur un anneau de base arbitraire $\mathbf{k}$. Ces deux courbes ont un « cusp » à l'origine et, en langage savant, l'intersection est prise « au sens des schémas ».
On va décrire la composante à l'origine de cette intersection et son complémentaire. Les deux $\mathbf{k}$-algèbres correspondantes sont des $\mathbf{k}$-modules libres de rang fini [9]. Lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret, ce sont deux anneaux zéro-dimensionnels, le premier est local et le second est semi-local strict.
Soient a, b, c, $d \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $ad - bc \neq 0$. On veut montrer que le système

$$x^a = y^b, \quad x^c = y^d,$$

est zéro-dimensionnel et calculer sa multiplicité en l'origine.
Soient f, $g \in \mathbf{k}[X, Y]$ définis par $f = X^a - Y^b$, $g = X^c - Y^d$ et :

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}[x, y] = \mathbf{k}[X, Y]/\langle f, g\rangle\,, \qquad \mathbf{A}_0 = \mathbf{k}[x, y]_{1+\langle x,y\rangle}$$

De manière précise, on montrera ici que $\mathbf{A}$ est libre sur $\mathbf{k}$ de rang $\max(ad, bc)$ et l'on donnera une base monomiale explicite. En ce qui concerne la composante en l'origine, la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}_0$ est libre de rang $m = \min(ad, bc)$ avec aussi une base monomiale explicite. Rappelons que ce rang m est appelé la multiplicité du zéro $(0, 0)$ lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret.
En fait vue la symétrie de la situation on supposera sans perte de généralité que $\boxed{ad > bc}$. On posera $m = bc$ et $\Delta = ad - bc$.
En fait la solution de l'exercice présent est presque entièrement donnée par l'étude du monoïde Γ de l'exercice 25 et par les considérations développées dans les exercices 22, 23 et 24.
1. Donner une preuve directe simple que $\mathbf{A}$ est un $\mathbf{k}$-module de type fini. Donner les zéros de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{k}$ lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret contenant les racines Δ-èmes de l'unité.
2. D'après l'exercice 22, l'algèbre $\mathbf{A}$ est isomorphe à $\mathbf{k}[\Gamma]$, où Γ est le monoïde étudié dans l'exercice 25 : c'est donc un $\mathbf{k}$-module libre de base Γ de rang $ad = \#\Gamma$. Plus précisément $\mathbf{k}[\Gamma]$ est un $\mathbf{k}$-module libre qui admet comme base les monômes $x^k y^\ell$ pour pour $k \in [\![0..a-1]\!]$ et $\ell \in [\![0..d-1]\!]$.
Soit e l'idempotent de Γ dans l'exercice 25, on a $\mathbf{A} \simeq \mathbf{A}/\langle e\rangle \times \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$.
D'après les exercices 24 et 25, $\mathbf{A}/\langle 1-e\rangle \simeq \mathbf{k}[\Gamma_{e=1}]$ où $\Gamma_{e=1} \simeq e\Gamma$ est un groupe d'ordre Δ. Et $\mathbf{A}/\langle e\rangle$ admet pour base les m monômes de $\Gamma \setminus e\Gamma$. En outre x et y sont nilpotents dans $\mathbf{A}/\langle e\rangle$.
3. La composante à l'origine est par définition $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_{1+\langle x,y\rangle}$.
Montrer qu'il s'agit de l'algèbre $\mathbf{A}[\frac{1}{1-e}] \simeq \mathbf{A}/\langle e\rangle$. D'après l'exercice 24, c'est donc un $\mathbf{k}$-module libre de base $\Gamma \setminus e\Gamma$, et son rang est m d'après l'exercice 25.
4. Donner une base de $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}[\frac{1}{e}] \simeq \mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$ sur $\mathbf{k}$ et calculer le discriminant $\mathrm{Disc}_{\mathbf{A}_1/\mathbf{k}}$.
5. On note F, $G \in \mathbf{k}[X, Y, Z]$ les polynômes homogénéisés de f et g. Étudier l'intersection des deux courbes $\{F = 0\}$ et $\{G = 0\}$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ (ici $\mathbf{k}$ est un corps discret contenant les racines Δ-èmes de l'unité).

9. Chacune des deux algèbres $\mathbf{A}_0$ et $\mathbf{A}_1$ est donc « zéro-dimensionnelle sur $\mathbf{k}$ » au sens de la définition XIII-7.1.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 4. *1.* Si c est inverse à droite et à gauche c'est l'unique inverse à gauche car $c'a = 1$ implique $c' = c'ac = c$.
Inversement, puisque $ca = 1$, on a $(c+1-ac)a = ca+a-aca = 1$. Donc $c+1-ac$ est un inverse à gauche, et s'il y a unicité, $1 - ac = 0$.
2. On vérifie que $v = 1 + bua$ convient.
3. Si $u(1 - xa) = 1$, alors $u = 1 + uxa$, donc il est inversible à gauche. Ainsi u est inversible à droite et à gauche, et $1 - xa$ également.

Exercice 5. Soient $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que $(\overline{x_1}, \dots, \overline{x_n})$ soit une $\mathbf{k}$-base de $E/\mathfrak{m}E$. D'après Nakayama, les x_i engendrent E. Soit $u : \mathbf{A}^n \twoheadrightarrow E$ la surjection $e_i \mapsto x_i$. En étendant les scalaires à $\mathbf{K}$, on obtient une surjection $U : \mathbf{K}^n \twoheadrightarrow \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} E$ entre deux espaces vectoriels de même dimension n, donc un isomorphisme.

Puisque $\mathbf{A}^n \hookrightarrow \mathbf{K}^n$, on en déduit que u est injective. En effet, si $y \in \mathbf{A}^n$ vérifie $u(y) = 0$, alors $1 \otimes u(y) = U(y) = 0$ dans $\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} E$, donc $y = 0$, cf. le diagramme ci-contre :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A}^n & \xrightarrow[u]{} & E \\ \Uparrow & & \Downarrow \\ \mathbf{K}^n & \xrightarrow[U]{} & \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} E \end{array}$$

Bilan : u est un isomorphisme et $(x_1, \dots, x_n)$ est une $\mathbf{A}$-base de E.

Exercice 6. D'après Nakayama, $(e_1, \dots, e_n)$ engendre le $\mathbf{A}$-module E.
Soit $L = \mathbf{A}^n$ et $\varphi : L \twoheadrightarrow E$, l'application linéaire (surjective) qui transforme la base canonique de L en $(e_1, \dots, e_n)$. Par hypothèse, $\overline{\varphi} : L/aL \to E/aE$ est un isomorphisme. Montrons que $\operatorname{Ker}\varphi = a \operatorname{Ker}\varphi$. Soit $x \in L$ avec $\varphi(x) = 0$; on a $\overline{\varphi}(\overline{x}) = 0$, donc $\overline{x} = 0$, i.e. $x \in aL$, disons $x = ay$ avec $y \in L$. Mais $0 = \varphi(x) = a\varphi(y)$ et a étant E-régulier, $\varphi(y) = 0$. On a bien $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq a \operatorname{Ker}\varphi$. Puisque E est de présentation finie, $\operatorname{Ker}\varphi$ est de type fini, et l'on peut appliquer Nakayama à l'égalité $\operatorname{Ker}\varphi = a \operatorname{Ker}\varphi$. On obtient $\operatorname{Ker}\varphi = 0$: φ est un isomorphisme.

Exercice 12. *1a, 1b, 1c.* L'idée est de développer $\det(A + B)$ comme fonction multilinéaire des colonnes de $A+B$. Le résultat est une somme de 2^n déterminants de matrices obtenues en mélangeant des colonnes A_j, B_k de A et B. On écrit :

$$\det(A_1 + B_1, \dots, A_n + B_n) = \textstyle\sum_{2^n} \det(C_1, \dots, C_n) \quad \text{avec } C_j = A_j \text{ ou } B_j.$$

Pour $J \in \mathcal{P}_n$, notons Δ_J^{col} le déterminant lorsque $C_j = B_j$ pour $j \in J$ et $C_j = A_j$ sinon. Avec cette notation, on a donc :

$$\det(A + B) = \textstyle\sum_J \Delta_J^{\mathrm{col}}.$$

Si $\#J \geqslant n - r$, alors $\Delta_J^{\mathrm{col}} \in \mathcal{D}_{n-r}(B)$; sinon $\#\overline{J} \geqslant r + 1$ et donc $\Delta_J^{\mathrm{col}} \in \mathcal{D}_{r+1}(A)$.
1d. Considérer $A = \operatorname{Diag}(a_1, \dots, a_n)$.
2. On écrit $\underline{x} = \underline{y}\,U$ avec $U \in \mathbf{A}^{r \times n}$, $\underline{y} = \underline{x}\,V$ avec $V \in \mathbf{A}^{n \times r}$.
On pose $A = VU$, $B = \mathrm{I}_n - A$. On a $\boxed{\underline{x}\,B = 0}$ et $\operatorname{rg}(B) \geqslant n - r$ puisque $\operatorname{rg}(A) \leqslant r$.
L'égalité encadrée montre, pour $I \in \mathcal{P}_{r,n}$ et ν mineur de B sur les lignes de $\overline{I}$, l'inclusion $\nu M \subseteq \langle (x_i)_{i \in I} \rangle$. Et c'est gagné car $1 \in \mathcal{D}_{n-r}(B)$.
Précisément, notons Δ_J^{row} le déterminant de la matrice « mixte » dont les *lignes* d'indice $i \in J$ sont les *lignes* correspondantes de B et les *lignes* d'indice $i \in \overline{J}$ sont celles de A. Pour $J \supseteq \overline{I}$, Δ_J^{row} est une combinaison linéaire de mineurs de B sur les lignes de $\overline{I}$. On pose donc

$$s_I = \textstyle\sum_{J \mid J \supseteq \overline{I}} \Delta_J^{\mathrm{row}}.$$

Alors d'une part, $s_I M \subseteq \langle (x_i)_{i \in I} \rangle$, et d'autre part, puisque $\operatorname{rg}(B) \geqslant n - r$:

$$1 = \textstyle\sum_{I \in \mathcal{P}_{r,n}} s_I.$$

3. Clair en utilisant le lemme des localisations successives (fait V-7.2).
4. Si une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ existe comme indiquée, la preuve du point *2* s'applique avec $B = \mathrm{I}_n - A$.
La réciproque est problématique car la contrainte $\mathrm{rg}(A) \leqslant r$ n'est pas linéaire en les coefficients de A. On y arrive pourtant pour $r = 1$ par un autre moyen, (voir le théorème V-7.3).

Exercice 13. *1.* La condition $b'(1 - a'b') = 0$ s'obtient par $\varphi\big(b(1 - ab)\big) = 0$.
Supposons que φ est un morphisme d'anneaux décomposables et montrons que $\varphi(\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$: soit $a \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, alors $b = 0$ (par unicité de b), donc $b' = 0$ et $a' = a'(1 - a'b') \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$.
Réciproquement, supposons $\varphi(\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}) \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$. Si a, $b \in \mathbf{A}$ vérifient $b(1-ab) = 0$ et $a(1 - ab) \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, alors $\varphi\big(a(1 - ab)\big) = a'(1 - a'b') \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{B}$.

Exercice 15. *1.* Il faut et il suffit que les a_i vérifient l'égalité $(\star_d)$ pour les monômes de degré total $\leqslant d$. Soit $M = M(\underline{X}) = \underline{X}^\alpha$ un tel monôme avec $|\alpha| = j \leqslant d$.
Puisque $M(s^r \underline{X}) = s^{rj} M$, on veut réaliser

$$s^e s^{-j}\, M = a_0(s)\, M + a_1(s) s^j\, \underline{X} + \cdots + a_d(s) s^{dj}\, M,$$

c'est-à-dire après simplification par M et multiplication par s^j :

$$s^e = a_0(s) s^j + a_1(s) s^{2j} + \cdots + a_d(s) s^{(d+1)j} = \textstyle\sum_{i=0}^d a_i(s) (s^j)^{i+1}.$$

Introduisons le polynôme $F(T) \in \mathbb{Z}[s][T]$ défini par $F(T) = T \sum_{i=0}^d a_i(s) T^i$.
Alors $\deg_T F \leqslant d + 1$ et F réalise l'interpolation $F(0) = 0$ et $F(s^j) = s^e$ pour les $j \in [\![1..d]\!]$. Or un polynôme $F \in \mathbb{Z}[s][T]$ qui satisfait cette interpolation est le suivant :

$$(\#_d) \qquad F(T) = s^e - (s^0 - T)(s^1 - T)(s^2 - T) \cdots (s^d - T).$$

Marche arrière toutes. Considérons le polynôme défini par l'égalité $(\#_d)$. Il est de degré $d + 1$ en T, nul en $T = 0$, donc il s'écrit

$$F(T) = T \textstyle\sum_{i=0}^d a_i(s) T^i, \quad \text{avec } a_0(s), \ldots, a_d(s) \in \mathbb{Z}[s].$$

Ces polynômes $a_i(s)$ ont la propriété voulue.
2. L'appartenance demandée se déduit de l'égalité $(\star_d)$ en évaluant $\underline{X}$ en $\underline{x}$.
3. Supposons que P soit de degré total $\leqslant d$. Le fait que $P(\underline{x}/s) \in (\mathbf{A}_S)^\times$ signifie, dans $\mathbf{A}$, que $y = s^e P(\underline{x}/s)$ divise un élément t de S. D'après le point *2*, y est dans l'idéal engendré par les valeurs de P ; il en est de même de t.

Exercice 16. *1.* Soit $b \in \mathbf{A}$ inversible modulo $\mathfrak{a}$. Il existe $a \in \mathfrak{a}$ tel que $1 \in \langle b, a\rangle$.
Le polynôme $aT + b$ prend les valeurs comaximales a, $a + b$, donc il représente un inversible $b' = at + b$. Alors, $b' \equiv b \bmod \mathfrak{a}$ avec b' inversible.
2. On écrit $x = ay$, $y = bx$, donc $(1 - ab)x = 0$.
Puisque b est inversible modulo $1 - ab$, il existe $u \in \mathbf{A}^\times$ tel que $u \equiv b \bmod 1 - ab$.
Alors $ux = bx = y$.

Exercice 18.
Pour deux idempotents orthogonaux e, e', on a $\langle ex, e'x'\rangle = \langle ex + e'x'\rangle$.
Donc pour $(e_1, \ldots, e_k)$, on a $\langle e_1x_1 + \cdots + e_kx_k\rangle = \langle e_1x_1, \ldots, e_kx_k\rangle$.
Ainsi, $e_1x_1 + \cdots + e_kx_k$ est inversible si, et seulement si, e_1x_1, …, e_kx_k sont comaximaux. En conséquence, dans le contexte *1.a*, soient $y_i \in \langle x_i\rangle$ avec $(y_1, \ldots, y_k)$ comaximaux (a fortiori $(x_1, \ldots, x_k)$ comaximaux) ; si des idempotents $(e_1, \ldots, e_k)$

fonctionnent pour $(y_1,\dots,y_k)$, ils fonctionnent aussi pour $(x_1,\dots,x_k)$. Quitte à remplacer x_i par u_ix_i. On pourra donc supposer $\sum x_i = 1$.
Pour deux idempotents e, e', on a $e \perp e'$ si, et seulement si, $1-e$, $1-e'$ sont comaximaux.
1. $c \Rightarrow d$. En prenant $x_1 = x$, $x_2 = 1+x$, $e = e_2 = 1-e_1$, on a $e_1x_1+e_2x_2 = x+e$.
$d \Rightarrow c$. On peut supposer $1 = -x_1 + x_2$; on pose $x = x_1$.
Alors, $e + x = (1-e)x + e(1+x) = (1-e)x_1 + ex_2$.
$a \Leftrightarrow b$. Obtenu facilement en posant $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}/\langle 1-e_i\rangle$.
c (ou d) $\Rightarrow a$. Par récurrence sur k. On peut supposer $1 = \sum_i x_i$: il existe un idempotent e_1 tel que $e_1x_1 + (1-e_1)(1-x_1)$ soit inversible. On a $1 \in \langle x_2,\dots,x_k\rangle$ dans le quotient $\mathbf{B}/\langle e_1\rangle$ qui possède aussi la propriété d ; donc, par récurrence, il existe $(e_2,\dots,e_k)$ dans $\mathbf{B}$ formant un système fondamental d'idempotents orthogonaux dans le quotient $\mathbf{B}/\langle e_1\rangle$ avec $e_2x_2 + \cdots + e_kx_k$ inversible dans $\mathbf{B}/\langle e_1\rangle$.
Alors, $(e_1, (1-e_1)e_2, \dots, (1-e_1)e_k)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{B}$ et $e_1x_1 + (1-e_1)e_2x_2 + \cdots + (1-e_1)e_kx_k$ est inversible dans $\mathbf{B}$.
2. Pas de difficulté.
3. Soit $x \in \mathbf{B}$; il existe un idempotent $e \in \mathbf{B}_{\mathrm{red}}$, tel que $e + \overline{x}$ soit inversible dans $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$. On relève e en un idempotent $e' \in \mathbf{B}$. Alors, $e' + x$ relève $e + \overline{x}$ donc est inversible. Soit $\mathbf{B}$ un anneau zéro-dimensionnel ; quitte à remplacer $\mathbf{B}$ par $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$, on peut supposer $\mathbf{B}$ réduit ; si $x \in \mathbf{B}$, il existe un idempotent e tel que $\langle x\rangle = \langle 1-e\rangle$; alors $e + x$ est inversible.
4. Soit $a \in \mathbf{B}$ un élément idempotent dans $\mathbf{B}/\operatorname{Rad}\mathbf{B}$ et $b = 1-a$.
Puisque $\langle a, b\rangle = 1$, il existe deux idempotents orthogonaux e et f dans $\mathbf{B}$ tels que $ae + bf$ est inversible. Puisque $\langle e, f\rangle = 1$, on a $f = 1-e$. Maintenant, on raisonne dans le quotient. Le système (ae, bf, af, be) est un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Comme $ae + bf$ est inversible, on a $ae + bf = 1$, d'où $af = be = 0$. Finalement (dans le quotient) $a = e$ et $b = f$.

Exercice 19. Un anneau $\mathbf{A}$ est local si, et seulement si, $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ l'est ; un anneau $\mathbf{A}$ est semi-local si, et seulement si, $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ l'est.
1. Un anneau local vérifie le point *1d* de l'exercice précédent avec $e = 0$ ou $e = 1$.
2. $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ est connexe, semi-local donc local (utiliser le point *1d* de l'exercice précédent sachant que $e = 0$ ou 1) ; donc $\mathbf{A}$ est local.
4. Se démontre pour l'anneau résiduel et résulte de la constatation suivante.
Si f est un polynôme en n indéterminées et $(e_1,\dots,e_k)$ un système fondamental d'idempotents orthogonaux, alors pour $(x_1,\dots,x_k)$ dans $\mathbf{A}^n$, puisque l'homomorphisme d'évaluation commute aux produits directs, on a l'égalité

$$f(e_1x_1 + \cdots + e_kx_k) = e_1f(x_1) + \cdots + e_kf(x_k).$$

6. Un anneau $\mathbf{A}$ possède un nombre fini d'idéaux maximaux si, et seulement si, c'est le cas de $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$. En mathématiques classiques, $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ est un produit fini de corps.

Exercice 20.
Dans la suite $f = \sum_i b_iX^i \in \mathbf{A}[X]$ et $g = \sum_i c_iX^i \in U$, avec $1 = \sum_i c_iu_i$.
0. Soit $\underline{T}$ un jeu d'indéterminées sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}(\underline{T})$ le localisé de Nagata. On sait que $\mathbf{A}(\underline{T})$ est plat sur $\mathbf{A}$ et l'on montre que tout système linéaire sur $\mathbf{A}$ qui admet une solution sur $\mathbf{A}(\underline{T})$ admet une solution sur $\mathbf{A}$.
Soit donc le système linéaire $Ax = b$ avec $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$ et $b \in \mathbf{A}^n$. Supposons

l'existence d'une solution sur $\mathbf{A}(\underline{T})$; elle s'écrit P/D avec $P \in \mathbf{A}[\underline{T}]^m$ et $D \in \mathbf{A}[\underline{T}]$ un polynôme primitif. On a donc $A\,P = D\,b$ sur $\mathbf{A}[\underline{T}]$.
Écrivons $P = \sum_\alpha x_\alpha \underline{T}^\alpha$ avec $x_\alpha \in \mathbf{A}^m$ et $D = \sum_\alpha a_\alpha \underline{T}^\alpha$ où les $a_\alpha \in \mathbf{A}$ sont comaximaux. L'égalité $A\,P = D\,b$ donne $A\,x_\alpha = a_\alpha b$ pour chaque α.
Si $\sum u_\alpha a_\alpha = 1$, le vecteur $x = \sum_\alpha u_\alpha x_\alpha$ est solution du système $Ax = b$.

1. Soit $a \in \mathbf{A}$ inversible dans $\mathbf{B}$. Il existe f, g tels que $af = g$, donc a et f sont primitifs : $a \in \mathbf{A}^\times$.

2. Montrons $\operatorname{Rad}\mathbf{A} \subseteq \operatorname{Rad}\mathbf{B}$. Soit $a \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$, on veut montrer que $1 + a(f/g)$ est inversible dans $\mathbf{B}$, c'est-à-dire que $g + af \in U$. On souhaite $1 \in \langle (c_i + ab_i)_i \rangle$; or cet idéal contient $\sum_i u_i(c_i + ab_i) = 1 + az \in \mathbf{A}^\times$.
On sait donc que $\operatorname{Rad}\mathbf{B} \supseteq U^{-1}(\operatorname{Rad}\mathbf{A})[X]$. Soit $h = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Montrons que $h \in \operatorname{Rad}\mathbf{B}$ implique $a_n \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.
On en déduira par récurrence que $h \in (\operatorname{Rad}\mathbf{A})[X]$.
On considère $a \in \mathbf{A}$, on prend $f = a$ et $g = X^n - a(h - a_n X^n)$. Il est clair que $g \in U$, donc $g + fh = (1 + aa_n)X^n$ doit être inversible dans $\mathbf{B}$, i.e., $1 + aa_n$ doit être dans $\mathbf{A}^\times$.

Exercice 22. *(Algèbre d'un monoïde et idéaux binomiaux)*
1. Tout d'abord on vérifie que $\mathbf{k}[\Gamma]$ est bien une $\mathbf{k}$-algèbre et $\iota_{\mathbf{k},\Gamma}$ un morphisme de monoïdes. Ensuite, si $\alpha : \Gamma \to \mathbf{A}$ est un morphisme de monoïdes, il y a a priori une unique manière de le prolonger en un morphisme $\widetilde{\alpha}$ de $\mathbf{k}$-algèbres de $\mathbf{k}[\Gamma]$ vers $\mathbf{A}$: il faut poser $\widetilde{\alpha}\big(\sum_{\gamma\in I} a_\gamma \gamma\big) = \sum_{\gamma\in I} a_\gamma \alpha(\gamma)$ (ici, I est une partie finiment énumérée de Γ).
On vérifie alors que $\widetilde{\alpha}$ est bien un morphisme de $\mathbf{k}$-algèbres. Le lecteur est invité à vérifier tous les détails lorsque Γ n'est pas supposé discret, en se basant sur l'exercice VIII-16.
2. Il s'agit d'un résultat général d'algèbre universelle, car on est ici dans le cadre de structures algébriques purement équationnelles. Pour obtenir une $\mathbf{k}$-algèbre au moyen de générateurs et relations données par des égalités de monômes, on peut d'abord construire le monoïde défini de la même manière, puis l'algèbre librement engendrée par ce monoïde.
Si l'on ne veut pas invoquer un résultat aussi général, on peut simplement constater que les procédures de calculs dans $\mathbf{k}[\Gamma]$ avec $\Gamma =_{\mathrm{MC}} \langle truc \,|\, muche \rangle$ sont identiques à celles dans $\mathbf{A} =_{\mathbf{k}-\text{algèbres}} \langle truc \,|\, muche \rangle$.

Exercice 23. *(Monoïde fini monogène)*
1. On a $x^5 = x^7 = x^{5+2}$, donc $x^5 = x^{5+2n}$ et $x^6 = x^{6+2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On vérifie que l'ensemble $[\![0..6]\!]$ muni de la loi d'addition correspondante est bien un monoïde. Donc $\Gamma = \{1, x, \ldots, x^6\}$ admet exactement 7 éléments distincts.
En outre $x^6 = x^{12}$ donc $e = x^6$ est un idempotent.
La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\Gamma]$ est isomorphe à $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle \times \mathbf{k}[\Gamma]/\langle 1-e\rangle$.
On a $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle \simeq \mathbf{k}[X]\big/\big\langle X^6, X^7 - X^5\big\rangle = \mathbf{k}[X]\big/\big\langle X^6, X^5\big\rangle = \mathbf{k}[X]\big/\big\langle X^5\big\rangle$.
Et $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle 1-e\rangle \simeq \mathbf{k}[X]\big/\big\langle X^6 - 1, X^7 - X^5\big\rangle = \mathbf{k}[X]\big/\big\langle X^2 - 1\big\rangle$, car $\alpha = \overline{X}$ est inversible (ou si l'on préfère $\operatorname{pgcd}(X^6 - 1, X^7 - X^5) = X^2 - 1$).
2. Dans le cas général, on recopie la démonstration du cas particulier.
La suite x^n est périodique de période r à partir du rang m : $x^{m+k} = x^{m+k+nr}$

pour $k \in [\![0..r-1]\!]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$.
On vérifie que l'ensemble $[\![0..m+r-1]\!]$ muni de la loi d'addition correspondante

$$(a,b) \mapsto \begin{cases} a+b & \text{si } a+b < m, \\ m + (a+b-m \bmod r) & \text{sinon,} \end{cases}$$

est bien un monoïde. Donc $\Gamma = \left\{1, x, \dots, x^{m+r-1}\right\}$ admet exactement $m+r$ éléments distincts.
Pour l'idempotent, on considère l'unique élément de la forme ℓr dans $[\![m..m+r-1]\!]$. On a alors $x^{\ell r} = x^{(\ell+1)r}$ et donc $x^{\ell r} = x^{2\ell r}$. Soit e cet idempotent. On pourra se rappeler que $e = x^{Nr}$ pour tout $N \geqslant \ell$.
Dans $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle 1-e\rangle$, x est inversible donc $x^r = 1$. Et ceci implique bien $e = 1$. Ceci montre l'isomorphisme $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle 1-e\rangle \simeq \mathbf{k}[X]/\langle X^r - 1\rangle$.
Si l'on préfère : $\left\langle X^{\ell r}-1, X^m(X^r-1)\right\rangle = \langle X^r - 1\rangle$.
Enfin $\mathbf{k}[\Gamma]/\langle e\rangle = \mathbf{k}[X]\big/\left\langle X^{\ell r}, X^m(X^r-1)\right\rangle = \mathbf{k}[X]/\langle X^m\rangle$ car $m \leqslant \ell r$.
En bref $\mathbf{k}[\Gamma] \simeq \mathbf{k}[\epsilon] \times \mathbf{k}[\alpha]$ avec $\epsilon^m = 0$ et $\alpha^r = 1$.
Remarque. La seule chose un peu étonnante est que le résultat final, qui semble évident une fois constatée la périodicité de la suite x^n à partir du rang m, demande un petit effort pour être démontré. ∎

3. Puisque l'ensemble $\{\, x^n \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ est fini, la suite x^n est périodique à partir d'un certain rang, qui est le premier m tel que x^m soit égal à l'un de ses successeurs stricts. Si $m = 0$ on obtient le groupe cyclique d'ordre r. Dans le cas contraire, on retrouve la description du monoïde donné au point *2.*

Exercice 24. *(Idempotent dans un monoïde commutatif)*
1a. On note d'abord que $e\Gamma$ est un monoïde avec e pour élément neutre. L'application naturelle $\psi : e\Gamma \to \Gamma_1$, $ex \mapsto \overline{ex} = \overline{x}$ est la composée de deux morphismes pour la multiplication, donc l'est aussi. C'est un morphisme de monoïdes car $\overline{e} = \overline{1}$.
Par ailleurs l'application $\imath : \Gamma \to e\Gamma$, $x \mapsto ex$ est un morphisme de monoïdes. On a donc un unique morphisme $\theta : \Gamma_1 \to e\Gamma$ vérifiant $\theta(\overline{x}) = ex$ pour tout x. Il reste à vérifier que ψ et θ sont des bijections réciproques.
Les deux égalités $\psi(\theta(\overline{x})) = \overline{x}$ et $\theta(\psi(ex)) = ex$ résultent des définitions.
Remarque. On aurait pu aussi montrer directement que $\imath$ résout le problème universel du passage au quotient par la relation $e = 1$ dans le monoïde Γ. ∎

1b. Comme dans le point *2* de l'exercice 22, ll s'agit ici d'un résultat général d"algèbre universelle. Dans les deux cas on considère la $\mathbf{k}$-algèbre obtenue librement à partir du monoïde Γ tout en imposant la relation $e = 1$. On peut effectuer ces deux constructions dans l'ordre que l'on veut. L'important ici est que la relation $e = 1$ puisse s'écrire dans le langage des monoïdes.
Si l'on ne veut pas invoquer un résultat aussi général, on peut simplement constater que les procédures de calculs dans $\mathbf{k}[\Gamma]$ modulo $e = 1$ sont identiques à celles dans $\mathbf{k}[\Gamma_{e=1}]$.
1c. Si $x \in e\Gamma$, on écrit $x = ez$, donc $ex = e^2z = ez = x$. Inversement $ex = x$ implique $x \in e\Gamma$.

2a. Il suffit de voir que la plus fine relation d'équivalence $\sim$ sur Γ qui vérifie $ex \sim ey$ pour tous x, $y \in \Gamma$ est compatible avec la multiplication. Or la relation $a \sim b$ est obtenue en liant a à b par des suites de couples (a,x), …, (u,v), …, (z,b)

où chacun des couples (u, v) est certifié par une égalité $u =_\Gamma v$ ou par deux égalités $u =_\Gamma eu'$ et $v =_\Gamma ev'$. Par récurrence sur la longueur de la suite on en déduit que $a \sim b$ si, et seulement si, $a =_\Gamma b$ ou $\exists a', b'\, (a =_\Gamma a'e,\, b =_\Gamma b'e)$. Dans les deux cas on voit que pour un x arbitraire, on a $ax \sim bx$. Notez que la démonstration n'utilise pas que $e\Gamma$ soit détachable ou Γ discret.

2b. Notons ψ le morphisme naturel considéré $\mathbf{k}[\Gamma] \to \mathbf{k}[\Gamma'_e]/\langle e\rangle$. Il est composé de deux morphismes surjectifs et il annule e. Pour voir que c'est un morphisme de passage au quotient par e il faut maintenant vérifier que $\operatorname{Ker}\psi \subseteq \langle e\rangle$.

Soit $x = \sum_{\gamma\in I} u_\gamma\gamma$ (avec I une partie finiment énumérée de Γ) un élément de $\mathbf{k}[\Gamma]$ vérifiant $\psi(x) = 0$. Notons $\overline{\gamma}$ l'image de γ dans Γ'_e.

On sait que $\sum_{\gamma\in I} u_\gamma\overline{\gamma} \in \overline{e}\,\mathbf{k}[\Gamma'_e]$, i.e.

$$\sum_{\gamma\in I} u_\gamma\overline{\gamma} = \overline{e}\sum_{\eta\in J} v_\eta\overline{\eta} = \sum_{\eta\in J} v_\eta\overline{e\eta}.$$

La conclusion est claire si Γ est discret (donc $e\Gamma$ détachable), ce qui est souvent le cas dans les applications. Donnons néanmoins la démonstration dans le cas général, un peu plus sophistiquée. L'égalité $\sum_{\gamma\in I} u_\gamma\overline{\gamma} = \sum_{\eta\in J} v_\eta\overline{e\eta}$ est calculée à partir de l'égalité de Γ'_e. Dans chacune des deux sommes on a le droit de regrouper des termes selon l'égalité de Γ'_e, de supprimer un terme affecté d'un coefficient nul et l'on doit aboutir à deux sommes formellement identiques. Or on a vu que

$$\overline{a} = \overline{b} \text{ dans } \Gamma'_e \iff \big(a = b \text{ ou } \exists a', b'\, (a = a'e,\, b = b'e)\big) \text{ dans } \Gamma.$$

Donc, pour produire l'égalité $\sum_{\gamma\in I} u_\gamma\overline{\gamma} = \sum_{\eta\in J} v_\eta\overline{e\eta}$ dans $\mathbf{k}[\Gamma'_e]$, les $u_\gamma\gamma$ ou bien doivent être égaux à des termes $u_\gamma\gamma'e$, ou bien doivent se réduire à 0 dans $\mathbf{k}[\Gamma]$ après des regroupements utilisant des égalités dans Γ. Cela montre bien que $x \in e\Gamma$.

2c. Calcul immédiat.

2d. Calculs immédiats. Pour calculer un produit $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ dans $\mathbf{k}[\Gamma \setminus e\Gamma]$ on teste si $\gamma_1\gamma_2 \in e\Gamma$ dans Γ. Si la réponse est positive $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = 0$, sinon $\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \gamma_1\gamma_2$.

Exercice 25. *(Exemple d'étude d'un monoïde fini)*

1. L'égalité $x^a = y^b$ élevée à la puissance d donne $x^{ad} = y^{bd} = x^{bc}$, i.e. $x^m = x^{m+\Delta}$. Même chose pour y. Tout élément de Γ s'écrit donc $x^k y^\ell$ avec $k, \ell \in [\![0..\Delta - 1]\!]$. Ainsi Γ est borné. Si $m = 0$, x et y sont inversibles, donc Γ est un groupe.

Si $m > 0$, l'exercice 23 nous dit que $x^{\ell\Delta}$ est idempotent si $\ell\Delta \geqslant m$. On a le même résultat avec y, et comme $x^a = y^b$, on a $x^{\ell\Delta} = x^{a\ell\Delta} = y^{b\ell\Delta} = y^{\ell\Delta}$. On obtient donc deux fois le même idempotent, $e = x^{\ell\Delta}$.

Pour voir que $e \neq 1$ si $m > 0$ on peut passer au quotient en imposant $x = y$ et $x^2 = x$. On vérifie que le monoïde quotient est $\big\langle x \,|\, x^2 = x\big\rangle$ dans lequel $e \neq 1$.

2. En forçant $e = 1$ on force l'inversibilité de x et y donc de tous les éléments de Γ_1. Ainsi $\Gamma_1 =_{\mathrm{GAb}} \big\langle x, y \,|\, x^a = y^b, x^c = y^d\big\rangle$, où l'indice GAb est mis pour « groupe abélien ». En notation additive on considère donc le conoyau dans $\mathbb{Z}^2$ de la matrice $M = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. Ainsi Γ_1, que l'on peut identifier à $e\Gamma$, est un groupe abélien fini tel que décrit dans l'énoncé.

3. On sait que le sous-monoïde de Γ engendré par x est décrit par une seule équation $x^{m_x} = x^{m_x+r_x}$. L'entier r_x divise Δ et peut être calculé en examinant la réduction de Smith pour la matrice M.

En fait, des manipulations élémentaires de colonnes sur M nous donnent

$$M' = \begin{bmatrix} * & \frac{\Delta}{h} \\ h & 0 \end{bmatrix} \text{ avec } h = \operatorname{pgcd}(b,d).$$

Ainsi l'ordre r_x de $\overline{x} = ex$ dans $\Gamma_1 \simeq e\Gamma$ est égal à $\Delta/\operatorname{pgcd}(b,d)$.
De même l'ordre r_y de $\overline{y} = ey$ dans Γ_1 est égal à $\Delta/\operatorname{pgcd}(a,c)$.
Si l'un des deux pgcd est égal à 1, on obtient que Γ_1 est engendré par $\overline{x}$ ou $\overline{y}$.
Quant à l'entier m_x, il est $\leqslant m$ et peut être déterminé en calculant les formes normales (avec le calcul expliqué dans le point *4*) de x^k et x^{k+r_x} pour les valeurs successives de k. Il semble difficile de donner une réponse absolument générale à la question posée.

Remarque. Définissons les deux intervalles I_0, J_0 :

$$I_0 = [\![0..c-1]\!], \quad J_0 = [\![0..b-1]\!].$$

L'auteur de l'exercice a constaté sur tous les exemples qu'il a traités que $\mathcal{B} \setminus e\mathcal{B}$ est égal à $\left\{ x^i y^j \;\middle|\; i \in I_0,\ j \in J_0 \right\}$ ce qui revient à dire que l'on a une réunion disjointe $\mathcal{B} = e\Gamma \cup \left\{ x^i y^j \;\middle|\; i \in I_0,\ j \in J_0 \right\}$, ou encore

$$\mathcal{B} = \left\{ ex^i y^j \;\middle|\; i \in [\![0..r_x-1]\!],\ j \in [\![0..r_y-1]\!] \right\} \ \cup\ \left\{ x^i y^j \;\middle|\; i \in I_0,\ j \in J_0 \right\}$$

(le nombre $\Delta = \#(e\Gamma)$ est en général strictement plus petit que $r_x r_y$).
Il serait intéressant de prouver cette propriété du monoïde Γ. ∎

4a. Vérification laissée à la lectrice.
4b. Pour chaque réécriture, le monôme réécrit est strictement plus petit pour l'ordre monomial $\preccurlyeq$. Or vue la définition de $\preccurlyeq$ via un produit lexicographique, une suite strictement décroissante pour $\preccurlyeq$ s'arrête en un temps fini.
4c. Le système de réécriture mis au point comporte seulement deux règles et il est *localement confluent* au sens suivant : si un monôme $x^k y^\ell$ peut être réécrit selon chacune des deux règles, sous formes $x^{k'} y^{\ell'}$ et $x^{k''} y^{\ell''}$, alors les deux monômes réécrits peuvent être eux-mêmes réécrits (éventuellement en plusieurs étapes) en deux monômes identiques. Ici, c'est particulièrement simple car lorsque les deux règles peuvent s'appliquer séparément, elles le peuvent successivement et elles commutent.
Ceci dit, quand deux monômes sont-ils égaux dans Γ ?
Notons $\sim$ la plus fine relation d'équivalence dans $\mathbb{N}^2$ qui soit compatible avec l'addition et qui vérifie $(a,0) \sim (0,b)$ et $(c,0) \sim (0,d)$. On a alors $(k_1,\ell_1) \sim (k_2,\ell_2)$ si, et seulement si, $x^{k_1} y^{\ell_1} = x^{k_2} y^{\ell_2}$ dans Γ. On voit donc que $\sim$ est la clôture symétrique et transitive de la relation « (k,ℓ) se réécrit en (k',ℓ') selon l'une des deux règles de réécriture ».
C'est un résultat bien connu que pour un système de réécriture confluent, deux éléments sont équivalents selon la relation $\sim$ associée si, et seulement si, ils peuvent se réécrire (éventuellement en plusieurs étapes) en deux termes égaux. Voir par exemple la proposition II.3 page 52 dans Lalement R. *Logique Réduction Résolution.* Masson 1990.
Cela implique donc ici que deux monômes finaux (i.e. qui ne peuvent pas être réécrits) formellement distincts sont deux éléments distincts dans Γ. Ainsi on peut qualifier les formes finales de formes normales.
Et l'on a bien une bijection $(k,\ell) \mapsto x^k y^\ell$ de $[\![0..a-1]\!] \times [\![0..d-1]\!]$ sur Γ.

5. De manière générale, lorsqu'un monoïde commutatif Γ est fini, l'exercice 24 montre que pour un idempotent e, on a l'égalité $\#(\Gamma'_e) + \#(\Gamma_{e=1}) = 1 + \#(\Gamma)$, car on a des bijections $\Gamma_{e=1} \longleftrightarrow e\Gamma$ et $\Gamma'_e \longleftrightarrow (\Gamma \setminus e\Gamma) \cup \{e\}$.
6. Soit $f = x^k y^h$ (avec $k \in [\![0, a-1]\!]$ et $h \in [\![0, d-1]\!]$) un idempotent de Γ. Si $f \neq 1$, on a k ou $h > 0$. Alors pour N assez grand $f = f^{N\Delta} = x^{kN\Delta} y^{hN\Delta} = e$ d'après le point *2* de l'exercice 23.

Exercice 26. *(Étude d'un système zéro-dimensionnel, intersection de deux courbes planes affines)*
1. L'égalité $x^a = y^b$ élevée à la puissance d donne $x^{ad} = y^{bd} = x^{bc}$, donc x est entier sur $\mathbf{k}$ (car $ad > bc$). Même chose pour y. Notons que $x^{ad} - x^{bc} = x^m(x^\Delta - 1)$. Lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret contenant le groupe U_Δ des racines Δ-èmes de l'unité, les zéros de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{k}$ sont d'une part $(0,0)$, avec une multiplicité qui reste à déterminer, et d'autre part des couples (ξ, ζ) avec ξ et ζ dans U_Δ reliés par les relations $\xi^a = \zeta^b$ et $\xi^c = \zeta^d$. Ce sont des zéros isolés. Ils sont simples si la caractéristique de $\mathbf{k}$ ne divise pas Δ. On établira la réciproque plus loin. Ce sont là « tous les zéros de $\mathbf{A}$ » au sens où il n'y en a pas d'autres dans une extension quelconque de $\mathbf{k}$.
2. Tout est écrit dans l'énoncé.
3. Si $e = x^N = y^N$ dans Γ, alors $\langle x, y\rangle^{2N} = \langle e\rangle$ dans $\mathbf{k}[\Gamma]$. Localiser en $1 + \langle x, y\rangle$ est la même chose que localiser en $1 + \langle x, y\rangle^{2N}$ (lemme 3.1). Enfin inverser les éléments de $1 + \langle e\rangle$ avec e idempotent revient à inverser $1 - e$ (fait II-4.2).
4. D'après l'exercice 24, $\mathbf{A}_1 \simeq \mathbf{k}[\Gamma_1]$. D'après l'exercice 25, $\Gamma_1 = e\Gamma$ est un groupe abélien fini d'ordre Δ. On peut voir $\mathbf{k}[\Gamma_1]$ comme le $\mathbf{k}$-module de base $e\Gamma$. En s'inspirant de l'exercice VI-10, il est alors facile de déterminer la matrice tracique T de $\mathbf{A}_1$ dans la base $e\Gamma = \Gamma_1$:

$$\text{on a } \mathrm{Tr}(g_1 g_2) = \#(\Gamma_1) = \Delta \text{ si } g_1 g_2 = 1_G, \text{ et } \mathrm{Tr}(g_1 g_2) = 0 \text{ sinon,}$$

donc $T = \Delta P_\sigma$, où P_σ est la matrice de la permutation $\sigma : g \mapsto g^{-1}$ de Γ_1. Et le discriminant de $\mathbf{A}_1$ dans la base Γ_1 est $\det(T) = \varepsilon(\sigma)\Delta^\Delta$.
En particulier lorsque $\Delta \in \mathbf{k}^\times$, l'algèbre $\mathbf{A}_1$ est strictement étale sur $\mathbf{k}$. C'est le cas lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret dans lequel $\Delta.1_\mathbf{k} \neq 0$.
5. On cherche les zéros projectifs éventuels du système sur la droite $Z = 0$. On a déjà déterminé les zéros dans le plan affine $\mathbf{k}^2$ et la somme de leurs multiplicités et égale à ad. On note ensuite que puisque $ad > bc$, on a $a > b$ ou $d > c$.
Si $a > b$ et $d > c$, on a $F = X^a - Y^b Z^{a-b}$ et $G = X^c Z^{d-c} - Y^d$. En faisant $Z = 0$, on trouve le système $X^a = Y^d = 0$, donc aucun zéro projectif. Même chose si l'une des deux inégalités est large. La somme des multiplicités des zéros dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ est donc $ad = \deg(f)\deg(g)$.
Si $a > b$ et $d < c$, on a $F = X^a - Y^b Z^{a-b}$ et $G = X^c - Y^d Z^{c-d}$. Ceci donne pour $Z = 0$, $X^a = X^c = 0$ et correspond au zéro projectif $(0:1:0)$. En déshomogénéisant avec $Y = 1$ on trouve le système $x^a = z^{a-b}$, $x^c = z^{c-d}$, qui admet $(0,0)$ comme zéro de multiplicité $\inf(a(c-d), (a-b)c) = ac - ad$ (car $ad > bc$). La somme des multiplicités des zéros dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ est donc égale à $ad + (ac - ad) = ac = \deg(f)\deg(g)$.
Si $a < b$ et $d > c$, on trouve de même le zéro projectif $(1:0:0)$ avec la multiplicité $bd - ad$ et la somme des multiplicités des zéros dans $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ est encore égale à $\deg(f)\deg(g)$.

Commentaires bibliographiques

Le lecteur trouvera sans doute un peu arbitraire notre volonté de donner à l'anneau trivial toutes les propriétés imaginables, notamment à travers notre utilisation d'une version affaiblie de la négation (cf. la note 1 page 494). Nous espérons le convaincre de l'utilité pratique d'une telle convention par les exemples. Sur le bon usage de l'anneau trivial, voir [161, Richman].

La « preuve par Azumaya » du lemme de la liberté locale 2.2 est extraite de la preuve du théorème d'Azumaya III.6.2 dans [MRR], pour le cas qui nous occupe ici. Autrement dit, nous avons donné le contenu « matriciel » de la preuve du lemme de la liberté locale dans [MRR].

Les courbes monomiales (exemple page 515) sont traitées dans [Kunz], chapitre V, exemple 3.13.f.

Les anneaux décomposés jouent un rôle important dans la théorie classique des anneaux locaux hensséliens par exemple dans les ouvrages [Raynaud] ou [Lafon & Marot].

Un anneau local-global est parfois appelé « ring with many units » dans la littérature de langue anglaise. Les anneaux local-globals ont notamment été étudiés dans [81, Estes & Guralnick]. D'autres « anneaux avec beaucoup d'unités » sont apparus bien avant, sous la terminologie « unit-irreducible rings » (voir par exemple [115]). Ce sont les anneaux $\mathbf{A}$ pour lesquels est vérifiée la propriété suivante : si deux polynômes de $\mathbf{A}[X]$ représentent un inversible, alors leur produit représente aussi un inversible. Ont également été introduits les anneaux « primitifs » ou « strongly U-irreducible » qui sont les anneaux pour lesquels est vérifiée la propriété suivante : tout polynôme primitif représente un inversible. Ce sont des anneaux local-globals particuliers. Dans la démonstration du fait 6.7 on a montré qu'un localisé de Nagata est toujours « primitif ».

Concernant le localisé de Nagata $\mathbf{A}(X)$, vu le fait 6.7 et les bonnes propriétés des anneaux local-globals, il n'est pas étonnant que cet anneau joue un rôle crucial pour la solution uniforme des systèmes linéaires avec paramètres sur un corps discret et plus généralement pour les calculs uniformes « en temps raisonnable » sur des anneaux commutatifs arbitraires (voir [58, 59, Díaz-Toca&al.]).

Chapitre X

Modules projectifs de type fini, 2

Sommaire

Introduction

Nous poursuivons ici l'étude des modules projectifs de type fini commencée dans le chapitre V.
Dans la section 1 nous reprenons la question de la caractérisation des modules projectifs de type fini comme modules localement libres, c'est-à-dire du théorème de structure locale.
La section 2 est consacrée à l'anneau des rangs sur $\mathbf{A}$. Dans la théorie usuelle en mathématiques classiques le rang d'un module projectif de type fini est défini comme une fonction localement constante sur le spectre de Zariski. Nous donnons ici une théorie élémentaire du rang qui ne fait pas appel aux idéaux premiers.
Dans la section 3 nous donnons quelques applications simples du théorème de structure locale.
La section 4 est une introduction aux grassmanniennes.
Dans la section 5 nous introduisons le problème général de la classification complète des modules projectifs de type fini sur un anneau $\mathbf{A}$ fixé. Cette classification est un problème fondamental et difficile, qui n'admet pas de solution algorithmique générale.
La section 6 présente un exemple non trivial pour lequel cette classification peut être obtenue.

1. Les modules projectifs de type fini sont localement libres

Nous reprenons la théorie des modules projectifs de type fini après la section V-8. Nous demandons cependant à la lectrice d'oublier ce que lui a appris la section V-6 : la caractérisation par les idéaux de Fitting, le théorème de structure locale V-6.1 et les considérations sur le rang liées

aux idéaux de Fitting ainsi que le théorème V-8.14 dont la démonstration dépend du théorème de structure locale.
En fait, tous les résultats des sections V-8 et 1 pourraient être obtenus par des arguments de localisation en des éléments comaximaux puisque nous avons déjà obtenu le théorème de structure locale des modules projectifs de type fini (théorèmes II-5.26 et V-6.1) par des méthodes d'algèbre extérieure. Nous pensons néanmoins que le point de vue «plus global» développé dans ce chapitre est intéressant en soi, et, d'une certaine manière, plus simple, comme le met en évidence la démonstration élémentaire du théorème matriciel 1.7 qui résume (et précise) tous les théorèmes de structure antérieurs. Là aussi, l'algèbre extérieure est un outil indispensable, mais il semble mieux utilisé, de façon moins envahissante.

Compléments sur les puissances extérieures d'un module projectif de type fini

Le lemme suivant est immédiat.

1.1. Lemme. *Soit P un $\mathbf{A}$-module libre de rang h et $\varphi \in \mathrm{End}(P)$ un endomorphisme diagonalisable, avec une matrice semblable à $\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_h)$, alors pour le polynôme fondamental de φ on obtient :*

$$\mathrm{F}_\varphi(X) \stackrel{\text{def}}{=} \det(\mathrm{Id}_{P[X]} + X\varphi) = (1 + \lambda_1 X) \cdots (1 + \lambda_h X).$$

Nous établissons maintenant le résultat crucial.

1.2. Proposition. (Puissances extérieures)
Soit P un module projectif de type fini.

1. *La puissance extérieure k-ième de P, notée $\bigwedge^k P$, est aussi un module projectif de type fini. Si $P = \mathrm{Im}(F)$ pour $F \in \mathbb{GA}(\mathbf{A})$, le module $\bigwedge^k P$ est (isomorphe à) l'image de la matrice de projection $\bigwedge^k F$.*
2. *Si φ est un endomorphisme de P, le polynôme fondamental $\mathrm{F}_{\bigwedge^k \varphi}(X)$ ne dépend que de k et du polynôme $\mathrm{F}_\varphi(X)$. En particulier, le polynôme rang de $\bigwedge^k P$ ne dépend que de k et du polynôme rang de P.*
3. *a. Si P est de rang constant $h < k$, le module $\bigwedge^k P$ est nul.*
   b. Si P est de rang constant $h \geqslant k$, le module $\bigwedge^k P$ est de rang constant $\binom{h}{k}$.
   c. Dans ce cas, si φ est un endomorphisme dont le polynôme fondamental s'écrit $\mathrm{F}_\varphi = (1 + \lambda_1 X) \cdots (1 + \lambda_h X)$, on a

$$\mathrm{F}_{\bigwedge^k \varphi}(X) = \prod_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant h} (1 + \lambda_{i_1} \cdots \lambda_{i_k} X).$$

4. *Si une matrice de projection F a pour image un module projectif de rang constant k, alors $\mathcal{D}_{k+1}(F) = 0$.*

▷ *1.* Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules et considérons les premières puissances extérieures de leur somme directe $M \oplus N$. En examinant le problème universel que résout la puissance extérieure k-ième d'un module, nous obtenons les isomorphismes canoniques

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge^2(M\oplus N) &\simeq \textstyle\bigwedge^2 M \oplus (M\otimes N)\oplus \bigwedge^2 N\\ \textstyle\bigwedge^3(M\oplus N) &\simeq \textstyle\bigwedge^3 M \oplus \big(\bigwedge^2 M\otimes N\big)\oplus \big(M\otimes \bigwedge^2 N\big)\oplus \bigwedge^3 N,\end{aligned}$$

et plus généralement

$$\textstyle\bigwedge^m(M\oplus N) \;\simeq\; \bigoplus_{k=0}^{m}\Big(\big(\bigwedge^k M\big)\otimes\big(\bigwedge^{m-k} N\big)\Big) \qquad (1)$$

(avec $\bigwedge^0 M = \mathbf{A}$ et $\bigwedge^1 M = M$). En particulier, si $P\oplus Q \simeq \mathbf{A}^m$, $\bigwedge^k P$ est en facteur direct dans $\bigwedge^k \mathbf{A}^m \simeq \mathbf{A}^{\binom{m}{k}}$. On voit aussi que si $P = \mathrm{Im}(F)$ pour une matrice de projection F, $\bigwedge^k P$ est (isomorphe à) l'image de la matrice de projection $\bigwedge^k F$, car cette matrice représente l'identité sur $\bigwedge^k P$ et 0 sur tous les autres facteurs de la somme directe.
2. On peut supposer $P = \mathrm{Im}(F)$, où $F \in \mathbb{G}\mathbb{A}_n(\mathbf{A})$, et $n \geqslant k$.
On a donc $P\oplus Q = \mathbf{A}^n$ avec $Q = \mathrm{Ker}(F)$. L'endomorphisme φ se prolonge en un endomorphisme $\varphi_1 : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}^n$, nul sur Q, de matrice H avec $FHF = H$, et l'on a $\mathrm{F}_\varphi(X) = \mathrm{F}_{\varphi_1}(X) = \det(\mathrm{I}_n + XH)$. Alors, on voit que $\bigwedge^k\varphi_1$ est un prolongement de $\bigwedge^k\varphi$, nul sur les termes distincts de $\bigwedge^k P$ dans la somme directe explicitée dans la démonstration du point *1.* La matrice de $\bigwedge^k\varphi_1$ n'est autre que $\bigwedge^k H$. On veut donc montrer que $\det\big(\mathrm{I}_{\binom{n}{k}} + X\ \bigwedge^k H\big)$ ne dépend que de k et de $\det(\mathrm{I}_n + XH)$. Nous sommes donc ramenés au cas d'un module libre. Et ce cas a été traité dans la proposition III-5.6.
3. Ce point résulte du précédent, puisque le «cas projectif de rang k» peut se déduire du cas «libre de rang k». Notez que les points a et b disent tous deux que lorsque P est de rang constant h, $\bigwedge^k P$ est de rang constant $\binom{h}{k}$ (qui est égal à 0 si $h < k$). On ne les a séparés que dans le but de donner le résultat sous forme plus visible.
4. Cela équivaut au fait que $\bigwedge^{k+1} P$ est nul, ce qui est le point *3a.* □

Remarques. (Conséquences de la proposition 1.2.)
1) Posons $\mathrm{R}_P(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$. Chaque r_hP est un module projectif de rang constant h sur $A[1/r_h]$, ce qui donne pour $k > 0$ comme conséquence du point *3* :

$$\mathrm{R}_{\bigwedge^k(r_hP)}(X) = X^{\binom{h}{k}} \text{ sur } \mathbf{A}[1/r_h].$$

En écrivant $P = \bigoplus_h r_h P$ et $\mathbf{A} = \prod_h \mathbf{A}[1/r_h]$ on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{R}_{\bigwedge^k P}(X) &= r_0 + \cdots + r_{k-1} + r_k X + \cdots + r_{k+j} X^{\binom{k+j}{k}} + \cdots + r_n X^{\binom{n}{k}} \\ &= \textstyle\sum_{h=0}^{n} r_h X^{\binom{h}{k}}. \end{aligned}$$

On a aussi par convention $\bigwedge^0 P = \mathbf{A}$ et donc aussi $\mathrm{R}_{\bigwedge^0 P}(X) = X$ (pour que la formule précédente s'applique il faut convenir que $\binom{n}{0} = 1$ pour tout $n \geqslant 0$).

2) Si l'on note $\bigwedge P$ l'algèbre extérieure de P, le lecteur montrera par un calcul analogue que

$$\mathrm{R}_{\bigwedge P}(X) = r_0 X + r_1 X^2 + \cdots + r_k X^{2^k} + \cdots + r_n X^{2^n}.$$

3) On peut calculer $\mathrm{F}_{\bigwedge^k(\varphi)}$ à partir de F_φ de la manière suivante.

Puisque $\mathrm{F}_\varphi(0) = 1$ et $\deg(\mathrm{F}_\varphi) \leqslant n$, si ψ est l'endomorphisme de $\mathbf{A}^n$ ayant pour matrice la matrice compagne C de $X^n \mathrm{F}_\varphi(-1/X)$, on obtient $\mathrm{F}_\varphi = \mathrm{F}_\psi$. Donc

$$\mathrm{F}_{\bigwedge^k \varphi} = \mathrm{F}_{\bigwedge^k \psi} = \det\left(\mathrm{I}_{\binom{n}{k}} + X \bigwedge^k C\right) \qquad \blacksquare$$

Des remarques précédentes on déduit la proposition suivante.

1.3. Proposition. *Soit P un module projectif de type fini, et $k \leqslant h$ deux entiers > 0. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le module P est de rang constant h.*
2. *Le module $\bigwedge P$ est de rang constant 2^h.*
3. *Le module $\bigwedge^k P$ est de rang constant $\binom{h}{k}$.*

Avec $h = 0$, les propriétés 1. et 2. sont équivalentes.

Cas des modules de rang constant

1.4. Théorème. *Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant h avec n générateurs, (isomorphe à l') image d'un projecteur $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$. Alors les $\binom{n}{h}$ mineurs principaux (s_i) d'ordre h de F vérifient :*

- *$\sum_i s_i = 1$, et*
- *chaque $\mathbf{A}_{s_i}$-module P_{s_i} est libre de rang h, la matrice F vue comme matrice à coefficients dans $\mathbf{A}_{s_i}$ est semblable à la matrice de projection standard $\mathrm{I}_{h,n}$.*

$\mathbb{D}$ La somme des mineurs principaux s_i d'ordre h de F est égale à 1 puisque $\det(\mathrm{I}_n + XF) = (1+X)^h$.

Par ailleurs, puisque tout mineur d'ordre $h+1$ est nul (proposition 1.2), on peut appliquer le lemme de la liberté II-5.10 à chaque localisé P_{s_i}, lequel est isomorphe à l'image de la matrice F vue comme matrice à coefficients dans P_{s_i} (d'après la proposition V-5.1). $\square$

Remarque. Dans le théorème précédent, il se peut que s_i soit nilpotent pour certaines valeurs de i, donc que $\mathbf{A}_{s_i}$ soit trivial. Le fait de ne pas exclure ces localisations nulles est inévitable lorsque l'on ne dispose pas d'un test pour savoir si un élément de $\mathbf{A}$ est ou n'est pas nilpotent. Ceci justifie la convention naturelle donnée dans la remarque page 291. ∎

Cas général

1.5. Théorème. *Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini avec n générateurs. Alors pour chaque idempotent $\mathrm{e}_h(P)$ il existe $\binom{n}{h}$ éléments $(s_{h,i})$ de $\mathbf{A}$ avec les propriétés suivantes :*

- $\sum_i s_{h,i} = \mathrm{e}_h(P)$,
- *chaque $\mathbf{A}_{s_{h,i}}$-module $P_{s_{h,i}}$ est libre de rang h.*

En particulier, pour tout module projectif de type fini à n générateurs, il existe 2^n éléments comaximaux v_ℓ tels que chaque P_{v_ℓ} soit libre.

D On localise d'abord en inversant $\mathrm{e}_h(P)$ pour se ramener au théorème 1.4. On localise ensuite un peu plus conformément à ce dernier théorème. Le fait V-7.2 concernant les localisations successives s'applique. □

Le théorème suivant résume les théorèmes 1.4 et 1.5, et la réciproque donnée par le principe local-global V-2.4.

1.6. Théorème. *Un $\mathbf{A}$-module P est projectif de type fini si, et seulement si, il existe des éléments comaximaux $s_1, \ldots, s_\ell$ tels que chaque P_{s_i} est libre sur $\mathbf{A}_{s_i}$. Il est projectif de rang k si, et seulement si, il existe des éléments comaximaux $s_1, \ldots, s_\ell$ tels que chaque P_{s_i} est libre de rang k sur $\mathbf{A}_{s_i}$.*

Une forme pratique du théorème 1.5 est sa forme matricielle.

1.7. Théorème. (Forme matricielle explicite des théorèmes V-1.1 et V-1.3) *Soit $\mathbf{A}$ un anneau, $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ avec $F^2 = F$ et P le module projectif de type fini image de F dans $\mathbf{A}^n$. On définit les éléments r_h de $\mathbf{A}$ pour $h \in [\![0..n]\!]$ par les égalités :*

$$\mathrm{R}_P(1+X) := \det(\mathrm{I}_n + XF), \quad \mathrm{R}_P(X) =: r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n.$$

On a les résultats suivants.

1. *La famille $(r_h)_{h=0,\ldots,n}$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{A}$.*
2. *Pour $h \in [\![0..n-1]\!]$ et u mineur d'ordre $h+1$ de F, on a $r_h u = 0$.*
3. *Si les $t_{h,i}$ sont les mineurs principaux d'ordre h de F, on obtient en posant $s_{h,i} = r_h t_{h,i}$:*
   - *la somme (pour h fixé) des $s_{h,i}$ est égale à r_h,*
   - *chaque $\mathbf{A}_{s_{h,i}}$-module $P_{s_{h,i}}$ est libre de rang h,*
   - *la matrice F est semblable sur $\mathbf{A}_{s_{h,i}}$ à la matrice $\mathrm{I}_{h,n}$,*

– *les $s_{h,i}$ sont comaximaux, précisément* $\sum_{h,i} s_{h,i} = 1$.

Remarque. Le théorème 1.7 résume les théorèmes V-8.13, 1.4 et 1.5 qui l'ont précédé. Il est même légèrement plus précis. Il n'est donc pas inintéressant d'en donner une preuve purement matricielle qui concentre toutes les preuves précédentes, d'autant plus qu'elle est particulièrement élémentaire.

Preuve matricielle du théorème matriciel. 1. Cela résulte de $\mathrm{R}_P(1) = 1$ (évident) et de $\mathrm{R}_P(XY) = \mathrm{R}_P(X)\,\mathrm{R}_P(Y)$ qui se voit comme suit :

$$\begin{aligned}\mathrm{R}_P(1+X)\,\mathrm{R}_P(1+Y) &= \det(\mathrm{I}_n + XF)\det(\mathrm{I}_n + YF) \quad = \\ \det\big((\mathrm{I}_n + XF)(\mathrm{I}_n + YF)\big) &= \det(\mathrm{I}_n + (X+Y)F + XYF^2) = \\ \det(\mathrm{I}_n + (X+Y+XY)F) &= \mathrm{R}_P\big((1+X)(1+Y)\big).\end{aligned}$$

2. La matrice $r_h F$ a pour polynôme fondamental $\det(\mathrm{I}_n + r_h XF)$. Dans l'anneau $\mathbf{A}_{r_h}$, on a $1 = r_h$ et

$$\det(\mathrm{I}_n + r_h XF) = \det(\mathrm{I}_n + XF) = \mathrm{R}_P(1+X) = (1+X)^h.$$

En se plaçant dans l'anneau $\mathbf{A}_{r_h}$ on est donc ramené à démontrer le point *2* pour le cas où $r_h = 1$ et $\det(\mathrm{I}_n + XF) = (1+X)^h$, ce que nous supposons désormais. Nous devons montrer que les mineurs d'ordre $h+1$ de F sont tous nuls. Les mineurs d'ordre $h+1$ sont les coefficients de la matrice $\bigwedge^{h+1} F = G$. Puisque $F^2 = F$, on a aussi $G^2 = G$. Par ailleurs, pour n'importe quelle matrice carrée H, le polynôme caractéristique de $\bigwedge^k H$ ne dépend que de k et du polynôme caractéristique de H (proposition III-5.6). Appliquant ceci pour calculer le polynôme caractéristique de G, nous pouvons remplacer F par la matrice $\mathrm{I}_{h,n}$ qui a même polynôme caractéristique que F. Comme la matrice $\bigwedge^{h+1} \mathrm{I}_{h,n}$ est nulle, son polynôme caractéristique est $X^{\binom{h+1}{n}}$, donc, par Cayley-Hamilton, la matrice G est nilpotente, et comme elle est idempotente, elle est nulle.

3. Résulte de *1*, *2* et du lemme de la liberté II-5.10. □

Modules de rang constant : quelques précisions

Les deux résultats suivants sont désormais faciles et nous laissons leur preuve en exercice.

1.8. Proposition. (Modules projectifs de rang constant)
Pour un $\mathbf{A}$-module P les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *P est projectif de rang constant h.*
2. *Il existe des éléments comaximaux s_i de $\mathbf{A}$ tels que chaque P_{s_i} est libre de rang h sur $\mathbf{A}_{s_i}$.*
3. *P est projectif de type fini et pour tout élément s de $\mathbf{A}$, si P_s est libre sur $\mathbf{A}_s$, il est de rang h.*
4. *P est de présentation finie, $\mathcal{F}_h(P) = \langle 1\rangle$ et $\mathcal{F}_{h-1}(P) = 0$.*

5. P est isomorphe à l'image d'une matrice de projection de rang h.

En outre, si P engendré par n éléments le nombre des éléments comaximaux nécessaires dans le point *2.* est majoré par $\binom{n}{h}$.

1.9. Proposition. (Localisés de rang constant et unicité du système fondamental d'idempotents orthogonaux)
Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. Posons $r_h = \mathrm{e}_h(P)$. Soit s un élément de $\mathbf{A}$.

1. *Le localisé P_s est projectif de rang h si, et seulement si, $r_h/1 = 1$ dans $\mathbf{A}_s$, c'est-à-dire si $r_h s^m = s^m$ dans $\mathbf{A}$ pour un certain exposant m.*
2. *Si s est un idempotent, cela signifie que r_h divise s, ou encore que $1 - r_h$ et s sont deux idempotents orthogonaux.*
3. *Enfin, si $(s_0, \ldots, s_n)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux tel que chaque P_{s_h} soit de rang h sur $\mathbf{A}_{s_h}$, alors $r_h = s_h$ pour chaque $h \in [\![0..n]\!]$.*

Dans la proposition qui suit nous faisons le lien entre notre définition et la définition usuelle (en mathématiques classiques) d'un module projectif de rang k. La preuve de cette équivalence n'est cependant pas constructive (et ne peut pas l'être).

1.10. Proposition. *Soit k un entier naturel, P un module projectif de type fini sur un anneau $\mathbf{A}$ non trivial et $\mathfrak{a}$ un idéal contenu dans* Rad $\mathbf{A}$. *Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *P est de rang k, i.e.,* $\mathrm{R}_P(X) = X^k$
2.* *Pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$, l'espace vectoriel obtenu à partir de P en étendant les scalaires au corps résiduel $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ est de dimension k.*
3. $\mathrm{R}_P(X) \equiv X^k$ *modulo* $\mathfrak{a}[X]$.

▷ D'un point de vue classique, l'implication *2* $\Rightarrow$ *3* est immédiate ; il suffit de se rappeler que l'intersection des idéaux maximaux est le radical de Jacobson de $\mathbf{A}$. Notez que d'un point de vue constructif, la condition *2* est a priori trop faible, par manque d'idéaux maximaux.
Par ailleurs, *1* implique trivialement *2* et *3*.
Réciproquement, si $\mathrm{R}_P(X) = X^k$ modulo $\mathfrak{a}[X]$, puisque les idempotents sont toujours isolés (lemme IX-5.1), l'égalité a lieu dans $\mathbf{A}[X]$. □

1.11. Théorème. (Modules de rang constant k comme sous-modules de $\mathbf{A}^k$)
Supposons que sur Frac $\mathbf{A}$ *tout module projectif de rang constant k soit libre. Alors tout $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant k est isomorphe à un sous-module de $\mathbf{A}^k$.*

▷ D'après le lemme d'élargissement V-2.10, on peut supposer que le module est image d'un projecteur $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ de rang k et qu'il existe une

matrice P dans $\mathbb{GL}_n(\operatorname{Frac}\mathbf{A})$ telle que $PFP^{-1} = \mathrm{I}_{k,n}$. On a $P = Q/a$ avec $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ et $a \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$; ainsi $\det Q = a^n \det P$ est aussi régulier dans $\mathbf{A}$. On définit une matrice Q_1 par :

$$Q \cdot F = \mathrm{I}_{k,n} \cdot Q = \begin{array}{|c|c|}\hline \mathrm{I}_k & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} \cdot Q = \begin{array}{|c|}\hline Q_1 \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}.$$

Or l'image de $Q \cdot F$ est isomorphe à l'image de F parce que Q est injective, et l'image de $\mathrm{I}_{k,n} \cdot Q$ est clairement isomorphe à l'image de $Q_1 = Q_{1..k,1..n}$.□

Remarque. 1) Le théorème précédent s'applique aux anneaux quasi intègres et plus généralement à tout anneau $\mathbf{A}$ tel que $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$ soit zéro-dimensionnel, ou même simplement local-global. C'est par exemple le cas des anneaux réduits noethériens cohérents fortement discrets (voir le problème XIII-1). On démontre en mathématiques classiques que pour tout anneau noethérien $\mathbf{A}$, $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$ est résiduellement zéro-dimensionnel, donc on peut lui appliquer le théorème. On ne connaît pas d'analogue constructif de ce théorème.
2) Pour plus de précisions concernant le cas $k = 1$ voir le théorème 5.8.

Cas générique

Qu'est-ce que nous appelons le cas générique, concernant un module projectif à n générateurs ? Nous considérons l'anneau

$$\mathbf{G}_n = \mathbb{Z}[(f_{i,j})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]/\mathcal{G}_n,$$

où les $f_{i,j}$ sont des indéterminées, F est la matrice $(f_{i,j})_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ et $\mathcal{G}_n$ est l'idéal défini par les n^2 syzygies obtenues en écrivant $F^2 = F$. À coefficients dans cet anneau $\mathbf{G}_n$, nous avons la matrice F dont l'image dans $\mathbf{G}_n^n$ est ce qui mérite d'être appelé *le module projectif générique à n générateurs*.
Reprenons les notations du théorème 1.7 dans ce cas particulier.
Dire que $r_h r_k = 0$ dans $\mathbf{G}_n$ (pour $0 \leqslant h \neq k \leqslant n$) signifie que l'on a une appartenance

$$r_h(F)r_k(F) \in \mathcal{G}_n \qquad (*)$$

dans l'anneau $\mathbb{Z}[(f_{i,j})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]$. Cela implique une identité algébrique qui permet d'exprimer cette appartenance. Cette identité algébrique est naturellement valable dans tous les anneaux commutatifs. Il est donc clair que si l'appartenance $(*)$ est vérifiée dans le cas générique, elle implique $r_h r_k = 0$ pour n'importe quelle matrice de projection sur un anneau commutatif arbitraire.
La même chose vaut pour les égalités $r_h u = 0$ lorsque u est un mineur d'ordre $h + 1$.

En résumé : si le théorème 1.7 est vérifié dans le cas générique, il est vérifié dans tous les cas. Comme souvent, nous constatons donc que des théorèmes importants d'algèbre commutative ne font rien d'autre qu'affirmer l'existence de certains types particuliers d'identités algébriques.

2. Le semi-anneau $\mathbf{H_0^+(A)}$, et l'anneau des rangs généralisés $\mathbf{H_0(A)}$

Pour un module libre, en passant du rang k au polynôme rang X^k, on passe de la notation additive à la notation multiplicative. Pour un module projectif de type fini général, on peut considérer en sens inverse un « rang généralisé » du module, qui est le logarithme (purement formel) en base X de son polynôme rang. Bien qu'il s'agisse là d'un simple jeu de notation, il s'avère que les calculs avec les rangs en sont facilités. Expliquons comment cela fonctionne.

Le semi-anneau des rangs

Nous dirons qu'un polynôme $R(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$ est *multiplicatif* lorsque $R(1) = 1$ et $R(XY) = R(X)R(Y)$. Il revient au même de dire que les r_i forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux, ou encore que $R(X)$ est le polynôme rang d'un module projectif de type fini.

2.1. Notation. On note $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des modules quasi libres sur $\mathbf{A}$, et $[P]_{\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})}$ (ou $[P]_{\mathbf{A}}$, ou même $[P]$) la classe d'un tel module P dans $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$. L'ensemble $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ est muni d'une structure de *semi-anneau*[1] *pour les lois héritées de* $\oplus$ *et* $\otimes$ *:* $[P \oplus Q] = [P] + [Q]$ *et* $[P \otimes Q] = [P] \cdot [Q]$. *Pour un idempotent* e *on notera aussi* $[e]$ *à la place de* $[e\mathbf{A}]$, *lorsque le contexte est clair. L'élément neutre pour la multiplication est* $[1]$.

Tout module quasi libre P est isomorphe à un unique module[2]

$$(r_1\mathbf{A}) \oplus (r_2\mathbf{A})^2 \oplus \cdots \oplus (r_n\mathbf{A})^n,$$

où les r_i sont des idempotents orthogonaux, puisqu'alors $\mathrm{e}_i(P) = r_i$. On a donc $[P] = \sum_{k=1}^{n} k\,[r_k]$ et son polynôme rang est

$$\mathrm{R}_P(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$$

avec $r_0 = 1 - (r_1 + \cdots + r_n)$.

1. Ceci signifie que la structure est donnée par une addition, commutative et associative, une multiplication, commutative, associative et distributive par rapport à l'addition, avec un neutre 0 pour l'addition et un neutre 1 pour la multiplication. Par exemple $\mathbb{N}$ est un semi-anneau.

2. On a aussi (exercice II-14) $P \simeq e_1\mathbf{A} \oplus \cdots \oplus e_n\mathbf{A}$ avec $e_k = \sum_{j=k}^{n} r_j$, en outre e_k divise e_{k+1} pour $1 \leqslant k < n$.

Mais alors que $\mathrm{R}_{P\oplus Q} = \mathrm{R}_P\,\mathrm{R}_Q$, on a $[P\oplus Q] = [P] + [Q]$: ceci assure le passage de la notation multiplicative à la notation additive. Ainsi le «logarithme en base X» du polynôme multiplicatif $r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$ est défini comme l'élément $\sum_{k=1}^n k\,[r_k]$ de $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$.

2.2. Définition. Si M est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini on appelle *rang (généralisé)* et l'on note $\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(M)$ ou $\mathrm{rg}(M)$ l'unique élément de $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ qui a le même polynôme rang que lui.

Ainsi si $\mathrm{R}_M(X) = r_0 + r_1X + \cdots + r_nX^n$, alors $\mathrm{rg}(M) = \sum_{k=1}^n k\,[r_k]$.
Le module nul est caractérisé par $\mathrm{rg}(M) = 0$ (théorème V-8.4).
Si $\mathbf{A}$ est non trivial, alors $[1] \neq [0]$ et $\mathbb{N}$ s'identifie au sous-semi-anneau de $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ engendré par $[1]$ au moyen de l'injection $n \mapsto n\,[1]$. La définition ci-dessus n'entre donc pas en conflit avec la notion de rang pour les modules projectifs de rang constant, définie auparavant.
Notez aussi que lorsque $\mathbf{A}$ est trivial on a $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A}) = 0$: ceci est bien conforme à la convention selon laquelle le module nul sur l'anneau trivial a pour rang n'importe quel entier, puisque dans $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$, $k = 0$, ou si l'on préfère, les deux polynômes rang 1 et X^k sont égaux sur l'anneau trivial.

Remarque. Une règle de calcul pratique portant sur les rangs est la suivante :

$$[r] + [r'] = [r + r'] \quad \text{si} \quad rr' = 0,$$

c'est-à-dire plus généralement

$$[r] + [r'] = [r \vee r'] + [r \wedge r'] = [r \oplus r'] + 2\,[r \wedge r'] \tag{2}$$

où les lois $\vee$, $\wedge$ et $\oplus$ sont celles de l'algèbre de Boole des idempotents de l'anneau : $r \oplus r' = r + r' - 2rr'$, $r \vee r' = r + r' - rr'$ et $r \wedge r' = rr'$. Notez que les deux idempotents $r \oplus r'$ et $r \wedge r'$ sont orthogonaux, de somme $r \vee r'$, et que la signification de l'égalité (2) est donnée par les isomorphismes suivants

$$r\mathbf{A} \oplus r'\mathbf{A} \;\simeq\; (r \vee r')\mathbf{A} \oplus (r \wedge r')\mathbf{A} \;\simeq\; (r \oplus r')\mathbf{A} \oplus \big((r \wedge r')\mathbf{A}\big)^2. \qquad \blacksquare$$

Notation exponentielle

Remarquons que a^n est le résultat de l'évaluation du polynôme multiplicatif X^n au point a : $X^n(a) = a^{\log_X(X^n)}$.
Ainsi, pour un polynôme multiplicatif $R(X) = \sum_{k=0}^n e_kX^k$, dont le logarithme en base X est l'élément $r = \sum_{k=0}^n k\,[e_k]$, on adopte les notations légitimes suivantes :

— $a^r = \sum_{k=0}^n e_k a^k = R(a)$,
— et pour un $\mathbf{A}$-module M, $M^r = \bigoplus_{k=0}^n e_k M^k$.

Ce n'est pas une fantaisie : on a bien

— $a^{r+r'} = a^r a^{r'}$, $a^{rr'} = (a^r)^{r'}$,
— $M^{r+r'} \simeq M^r \times M^{r'}$ et $M^{rr'} \simeq M^r \otimes M^{r'} \simeq (M^r)^{r'}$,

pour r, r' arbitraires dans $\mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$.

Symétrisation

Le monoïde additif $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ est régulier : au choix d'après le lemme de McCoy (corollaire III-2.3), ou l'un des deux théorèmes d'unicité IV-5.1 et IV-5.2 page 215, ou enfin le point *3.* du théorème V-8.4.
Le semi-anneau $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ peut donc être considéré comme un sous-semi-anneau de l'anneau obtenu en le symétrisant. Cet anneau s'appelle l'*anneau des rangs (généralisés) de modules projectifs de type fini* sur $\mathbf{A}$, et l'on le note $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$.
Tout élément de $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ s'écrit sous forme $\sum_{k\in J} k\,[r_k]$ où les r_k sont des idempotents deux à deux orthogonaux et J est une partie finie de $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. L'écriture est unique au sens suivant : si $\sum_{k\in J} k\,[r_k] = \sum_{k\in J'} k\,[r'_k]$, alors $r_k = r'_k$ si $k \in J\cap J'$, et les autres sont nuls.

Multiplication des rangs

On a défini sur $\mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$ une multiplication, comme la loi héritée du produit tensoriel. Ceci implique que pour deux idempotents e et e' on a $[e]\cdot[e'] = [ee']$. Les autres calculs de produits s'en déduisent par distributivité. D'où le fait suivant.

2.3. Fait. *L'élément* 1 *est le seul inversible de* $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$.

D Si $r = \sum_k k[r_k]$ et $s = \sum_k k[s_k]$, alors $rs = \sum_k k(\sum_{i,j,ij=k}[r_i s_j])$. Par unicité de l'écriture, si $rs = 1 = 1[1]$, alors $r_1 s_1 = 1$ donc $r_1 = s_1 = 1$. □

On peut se demander quelle est la loi correspondante sur les polynômes multiplicatifs : la lectrice se convaincra qu'il s'agit de la loi

$$\big(R(X), R'(X)\big) \mapsto R\big(R'(X)\big) = R'\big(R(X)\big).$$

On a aussi le fait suivant qui découle de la proposition 3.3 à venir.

2.4. Fait. *Si P et Q sont deux modules projectifs de type fini, alors $P\otimes Q$ est un module projectif de type fini et* $\mathrm{rg}(P\otimes Q) = \mathrm{rg}(P)\cdot\mathrm{rg}(Q)$.

Relation d'ordre sur les rangs

La relation d'ordre naturelle associée à la structure de monoïde de $\mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$ est décrite dans la proposition suivante.

2.5. Proposition et définition.

1. *Pour s, $t\in\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ on définit $s\leqslant t$ par : $\exists r\in\mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$, $s+r=t$.*
2. *Cette relation fait de $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ un* anneau ordonné [3]*, et $\mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$ est la partie positive de $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$.*

3. Cela signifie que $\geqslant$ est une relation d'ordre partiel *compatible* avec les lois $+$ et $\times$:
— $1\geqslant 0$,
— $x\geqslant 0$ et $y\geqslant 0$ impliquent $x+y$ et $xy\geqslant 0$,
— $x\geqslant y \Leftrightarrow x-y\geqslant 0$.

3. Soient P et Q des modules projectifs de type fini, les propriétés suivantes sont équivalentes.

a. $\operatorname{rg}(P) \leqslant \operatorname{rg}(Q)$.

b. R_P *divise* R_Q *dans* $\mathbf{A}[X]$.

c. R_P *divise* R_Q *dans* $\mathbb{B}(\mathbf{A})[X]$.

d. Pour tout $s \in \mathbf{A}$, si P_s et Q_s sont libres, alors le rang de P_s est inférieur ou égal à celui de Q_s.

e. Pour tous $k > i$, $\mathrm{e}_k(P) \cdot \mathrm{e}_i(Q) = 0$.

f. Pour tout k, $\mathrm{e}_k(P) \cdot \sum_{i \geqslant k} \mathrm{e}_i(Q) = \mathrm{e}_k(P)$.

Exemple. Supposons que $P \oplus R = Q$ et que l'on connaisse les rangs de P et Q, on demande de calculer le rang de R.
On a $\operatorname{rg} P = \sum_{i=0}^{n} i\,[r_i]$ et $\operatorname{rg} Q = \sum_{j=0}^{m} j\,[s_j]$. On écrit

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{rg} P & = & \big(\sum_{i=0}^{n} i\,[r_i]\big)\big(\sum_{j=0}^{m} [s_j]\big) \;=\; \sum_{i,j} i\,[r_i s_j] \;\leqslant \\ \operatorname{rg} Q & = & \big(\sum_{j=0}^{m} j\,[s_j]\big)\big(\sum_{i=0}^{n} [r_i]\big) \;=\; \sum_{i,j} j\,[r_i s_j]. \end{array}$$

Les $r_i s_j$ forment un système fondamental d'idempotents orthogonaux et l'on obtient par soustraction, sans avoir à réfléchir, les égalités
$\operatorname{rg}(Q) - \operatorname{rg}(P) = \operatorname{rg}(R) = \sum_{i \leqslant j} (j-i)\,[r_i s_j] = \sum_{k=0}^{m} k\big(\sum_{j-i=k} [r_i s_j]\big)$. ∎

Dans la suite, nous laissons définitivement tomber le mot « généralisé » lorsque nous parlons de rang d'un module projectif de type fini.

Remarque. En mathématiques classiques, $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ est souvent défini comme l'anneau des fonctions localement constantes (i.e., continues) de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ vers $\mathbb{Z}$. Un commentaire plus détaillé sur ce sujet se trouve page 583. ∎

Autres utilisations du rang

2.6. Notations.

1. Si $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P, Q)$ avec P, Q projectifs de type fini, et si $\operatorname{Im}\varphi$ est facteur direct dans Q on notera $\operatorname{rg}\varphi$ pour $\operatorname{rg}(\operatorname{Im}\varphi)$.
2. Si $p(X)$ est un polynôme pseudo unitaire de $\mathbf{A}[X]$, on peut définir son degré $\deg p$ comme un élément de $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$.

Pour le point *1.* on a $\operatorname{Ker}\varphi$ qui est facteur direct dans P et l'on obtient les généralisations d'égalités bien connues dans le cas des espaces vectoriels sur un corps discret :

$$\operatorname{rg}(\operatorname{Ker}\varphi) + \operatorname{rg}\varphi = \operatorname{rg} P \;\text{ et }\; \operatorname{rg}(\operatorname{Ker}\varphi) + \operatorname{rg} Q = \operatorname{rg}(\operatorname{Coker}\varphi) + \operatorname{rg} P\,.$$

En outre, en cas de modules libres, et pour un rang $r \in \mathbb{N}$, on retrouve bien la notion de rang d'une matrice définie en II-5.7.
Concernant le point *2.*, notons que pour deux polynômes pseudo unitaires p et q on a l'égalité $\deg pq = \deg p + \deg q$.

Cette notion de degré s'étend de manière naturelle aux polynômes localement unitaires définis dans l'exercice 14.

3. Quelques applications du théorème de structure locale

Dans cette section nous envisageons des résultats concernant les modules projectifs de type fini et des applications linéaires entre ceux-ci.
Vu le théorème de structure locale pour les modules projectifs de type fini, et puisque le déterminant et les polynômes corrélatifs se comportent bien par changement d'anneau de base (fait V-8.8), on a de manière presque automatique tous les résultats souhaités au moyen de la démonstration donnée dans l'encadré suivant.

𝔻 Dans le cas de modules libres, le résultat est facile à établir. □

Nous ne le mentionnerons pas toujours dans cette section.
NB : si dans l'hypothèse figure une application linéaire localement simple entre deux modules différents, on est ramené par le théorème de structure locale au cas d'une application linéaire simple.

La démonstration fonctionne chaque fois que le résultat à établir est vrai si, et seulement si, il est vrai après localisation en des éléments comaximaux.

Remarque. Si l'on doit démontrer un résultat qui, dans le cas de modules libres, se résume à des identités algébriques on peut en outre, supposer que les endomorphismes sont diagonalisables. L'argument est ici différent du théorème de structure locale. C'est que pour vérifier une identité algébrique il suffit de le faire sur un ouvert de Zariski de l'espace des paramètres, et une matrice générique est diagonalisable d'après la proposition III-5.3.

Trace d'un endomorphisme et nouvelle écriture du polynôme fondamental

Rappelons que si M et N sont deux $\mathbf{A}$-modules, on note $\theta_{M,N}$ l'application linéaire canonique

$$\theta_{M,N} : M^\star \otimes_{\mathbf{A}} N \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N),\ (\alpha \otimes y) \mapsto (x \mapsto \alpha(x)y).$$

Rappelons aussi les résultats suivants (fait V-2.2 et proposition V-5.4).

Soit P un module projectif de type fini.

1. *$\theta_{P,N}$ est un isomorphisme de $P^\star \otimes_{\mathbf{A}} N$ dans $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,N)$.*
2. *$\theta_{N,P}$ est un isomorphisme de $N^\star \otimes_{\mathbf{A}} P$ dans $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(N,P)$.*
3. *L'homomorphisme canonique $P \to P^{\star\star}$ est un isomorphisme.*

4. *L'homomorphisme canonique*
$$\varphi \mapsto {}^{\mathrm{t}}\varphi \ ; \ \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(N,P) \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P^\star, N^\star),$$
est un isomorphisme.

Si P est un module projectif de type fini, rappelons que la *trace* de l'endomorphisme φ de P (notée $\mathrm{Tr}_P(\varphi)$) est le coefficient en X du polynôme fondamental $\mathrm{F}_\varphi(X)$. Elle peut être également définie à partir de l'application linéaire naturelle
$$\mathrm{tr}_P : P^\star \otimes_{\mathbf{A}} P \to \mathbf{A} \ : \ \alpha \otimes y \mapsto \alpha(y),$$
et de l'isomorphisme canonique $\theta_P : P^\star \otimes_{\mathbf{A}} P \to \mathrm{End}(P)$, comme suit :
$$\mathrm{Tr}_P = \mathrm{tr}_P \circ {\theta_P}^{-1}.$$

(Le lecteur pourra constater que les deux définitions coïncident dans le cas d'un module libre, ou se reporter au fait V-8.9.)
Lorsque P et Q sont projectifs de type fini, la trace permet aussi de définir une dualité canonique entre $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(P,Q)$ et $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(Q,P)$ au moyen de l'application bilinéaire $(\varphi,\psi) \mapsto \mathrm{Tr}(\varphi\circ\psi) = \mathrm{Tr}(\psi\circ\varphi)$. Cette dualité peut aussi être définie par l'isomorphisme canonique $(P^\star \otimes_{\mathbf{A}} Q)^\star \simeq P \otimes_{\mathbf{A}} Q^\star$.

3.1. Proposition. *Soit φ un endomorphisme d'un module projectif de type fini P à n générateurs. Les coefficients du polynôme fondamental de φ sont donnés par*
$$\mathrm{F}_\varphi(X) = 1 + \sum\nolimits_{h\in[\![1..n]\!]} \mathrm{Tr}\big(\textstyle\bigwedge^h \varphi\big)\, X^h .$$

3.2. Proposition. *Si P est un module projectif de type fini fidèle, alors l'application $\mathbf{A}$-linéaire trace $\mathrm{Tr}_P : \mathrm{End}(P) \to \mathbf{A}$ est surjective.*

Produit tensoriel

3.3. Proposition. *On considère deux $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini P et Q, φ et ψ des endomorphismes de P et Q. Le module $P\otimes_{\mathbf{A}} Q$ est un module projectif de type fini.*

1. *On a l'égalité*
$$\det(\varphi\otimes\psi) = (\det\varphi)^{\mathrm{rg}\,Q}\,(\det\psi)^{\mathrm{rg}\,P} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathrm{R}_Q(\det\varphi)\,\mathrm{R}_P(\det\psi).$$
2. *Le polynôme fondamental $\mathrm{F}_{\varphi\otimes\psi}(X)$ de $\varphi\otimes_{\mathbf{A}}\psi$ ne dépend que de $\mathrm{rg}(P)$, de $\mathrm{rg}(Q)$, de F_φ, et de F_ψ.*
3. *Si $\mathrm{F}_\varphi = (1+\lambda_1 X)\cdots(1+\lambda_m X)$, et $\mathrm{F}_\psi = (1+\mu_1 X)\cdots(1+\mu_n X)$, on a l'égalité $\mathrm{F}_{\varphi\otimes\psi}(X) = \prod_{i,j}(1+\lambda_i\mu_j X)$.*
4. *En particulier,* $\mathrm{rg}(P\otimes Q) = \mathrm{rg}(P)\,\mathrm{rg}(Q)$.

Remarquez que la dernière égalité se réécrit
$$\mathrm{e}_h(P\otimes Q) = \textstyle\sum_{jk=h} \mathrm{e}_j(P)\mathrm{e}_k(Q).$$

Notez aussi que la proposition précédente pourrait être démontrée « directement » sans passer par le théorème de structure locale, avec une démonstration calquée sur celle qui a été faite pour les puissances extérieures (proposition 1.2).

Rangs et applications linéaires

3.4. Proposition. *Soit $\varphi : P \to Q$ une application linéaire entre modules projectifs de type fini.*

1. *Si φ est surjective, alors $P \simeq \operatorname{Ker}\varphi \oplus Q$. Si en outre $\operatorname{rg}(P) = \operatorname{rg}(Q)$, alors φ est un isomorphisme.*
2. *Si φ est injective, alors $\operatorname{rg}(P) \leqslant \operatorname{rg}(Q)$.*

▷ Dans le point *2*, il suffit de prouver l'inégalité après localisation en un élément s qui rend les deux modules libres. Comme la localisation préserve l'injectivité, on peut conclure d'après le cas des modules libres (voir le corollaire II-5.23 et la remarque qui suit). □

3.5. Corollaire. *Soit $P_1 \subseteq P_2 \subseteq P$ avec P_1 facteur direct dans P.*
Alors P_1 est facteur direct dans P_2.
En conséquence, si les modules sont projectifs de type fini, on a l'équivalence

$$\operatorname{rg}(P_1) = \operatorname{rg}(P_2) \iff P_1 = P_2.$$

Si en outre $P_1 \oplus Q_1 = P_2 \oplus Q_2 = P$, on a les équivalences

$$\operatorname{rg}(P_1) = \operatorname{rg}(P_2) \iff \operatorname{rg}(Q_1) = \operatorname{rg}(Q_2) \iff P_1 = P_2.$$

Formules de transitivité

3.6. Notation. Soit une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$, strictement finie sur $\mathbf{A}$. Alors on note $[\mathbf{B} : \mathbf{A}] = \operatorname{rg}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$.

Rappelons que d'après le fait VI-4.4, si $\mathbf{B}$ est strictement finie sur $\mathbf{A}$, et si P est un $\mathbf{B}$-module projectif de type fini, alors P est aussi un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.
Lorsque l'on prend pour P un module quasi libre sur $\mathbf{B}$, en considérant son rang sur $\mathbf{A}$ cela définit un homomorphisme du groupe additif $\mathsf{H}_0\,\mathbf{B}$ vers le groupe additif $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$. Cet homomorphisme est appelé *homomorphisme de restriction* et il est noté $\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$. On obtient ainsi un foncteur contravariant d'une sous-catégorie des anneaux commutatifs vers celle des groupes abéliens. Il s'agit de la catégorie dont les morphismes sont les $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ qui font de $\mathbf{B}$ une algèbre strictement finie sur $\mathbf{A}$.
Par ailleurs, H_0 définit un foncteur covariant de la catégorie des anneaux commutatifs vers celle des semi-anneaux, puisque par extension des scalaires, un module quasi-libre donne un module quasi-libre.

Comme $\mathsf{H}_0(\mathbf{C})$ est complètement caractérisé par $\mathbb{B}(\mathbf{C})$ (pour une formulation catégorique, voir l'exercice 17), les points *1* et *2* du fait suivant décrivent complètement les deux foncteurs dont nous venons de parler.

3.7. Fait. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ une algèbre.*

1. *Pour $e \in \mathbb{B}(\mathbf{A})$, on a $\mathsf{H}_0(\rho)([e]_{\mathbf{A}}) = \big[\rho(e)\big]_{\mathbf{B}}$ dans $\mathsf{H}_0\,\mathbf{B}$.*
   En particulier $\mathsf{H}_0(\rho)$ est injectif (resp., surjectif, bijectif) si, et seulement si, la restriction de ρ à $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ et $\mathbb{B}(\mathbf{B})$ est injective (resp., surjective, bijective).

On suppose maintenant que $\mathbf{B}$ est strictement finie sur $\mathbf{A}$.

2. *Pour $e \in \mathbb{B}(\mathbf{B})$, $\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}([e]_{\mathbf{B}}) = \mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(e\mathbf{B})$. Et $\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(1) = [\mathbf{B} : \mathbf{A}]$.*
3. *Si un $\mathbf{B}$-module P est à la fois quasi libre sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$, on obtient simplement $\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}([P]_{\mathbf{B}}) = [P]_{\mathbf{A}}$.*

Remarque. Si $\mathbf{A}$ est connexe et contient $\mathbb{Z}$, on peut faire semblant de considérer $\mathsf{H}_0(\mathbf{A}) \simeq \mathbb{Z}$ comme un sous-anneau de $\mathbf{A}$. Dans le point *2* ci-dessus on voit alors que $\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}([e]_{\mathbf{B}}) = \big[\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(e)\big]_{\mathbf{A}}$ (il suffit de considérer le cas où $e\mathbf{B}$ est libre en facteur direct d'un libre dans $\mathbf{B}$). ∎

Le lemme suivant généralise le théorème II-5.29 (qui s'occupait du cas libre).

3.8. Lemme. (Formules de transitivité pour la trace et le déterminant)
Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre strictement finie et P un $\mathbf{B}$-module projectif de type fini. Soit $u_{\mathbf{B}} : P \to P$ une application $\mathbf{B}$-linéaire, que nous notons $u_{\mathbf{A}}$ lorsque nous la regardons comme une application $\mathbf{A}$-linéaire. Alors on a les égalités fondamentales :

$$\det_{\mathbf{A}}(u_{\mathbf{A}}) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\det_{\mathbf{B}}(u_{\mathbf{B}})\big) \quad \textit{et} \quad \mathrm{Tr}(u_{\mathbf{A}}) = \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\mathrm{Tr}(u_{\mathbf{B}})\big).$$

D Quitte à localiser en des éléments comaximaux de $\mathbf{A}$ nous pouvons supposer que $\mathbf{B}$ est un $\mathbf{A}$-module libre, de rang k. Nous écrivons

$$P \oplus N = L \simeq \mathbf{B}^n \simeq \mathbf{A}^{nk},$$

(le dernier isomorphisme est un isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules). Nous considérons $v = u \oplus \mathrm{Id}_N \in \mathrm{End}_{\mathbf{B}}(L)$. Alors, par définition du déterminant, on obtient les égalités $\det_{\mathbf{B}}(u_{\mathbf{B}}) = \det_{\mathbf{B}}(v_{\mathbf{B}})$ et $\det_{\mathbf{A}}(u_{\mathbf{A}}) = \det_{\mathbf{A}}(v_{\mathbf{A}})$. On peut donc appliquer la formule de transitivité du théorème II-5.29.
Le raisonnement pour la trace est similaire. □

3.9. Corollaire. *Soit $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$ une algèbre strictement finie, P un $\mathbf{B}$-module projectif de type fini et $u_{\mathbf{B}} \in \mathrm{End}_{\mathbf{B}}(P)$.*

1. $\mathrm{C}_{u_{\mathbf{A}}}(X) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[X]/\mathbf{A}[X]}\big(\mathrm{C}_{u_{\mathbf{B}}}(X)\big)$.
2. $\mathrm{F}_{u_{\mathbf{A}}}(X) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[X]/\mathbf{A}[X]}\big(\mathrm{F}_{u_{\mathbf{B}}}(X)\big)$.
3. *En particulier, les polynômes rang de P sur $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont reliés par*

$$\mathrm{R}_{P_{\mathbf{A}}}(X) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}[X]/\mathbf{A}[X]}\big(\mathrm{R}_{P_{\mathbf{B}}}(X)\big)$$

4. L'homomorphisme de restriction vérifie

$$\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}\big(\mathrm{rg}_{\mathbf{B}}(P)\big) = \mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(P).$$

5. Si P est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, alors

$$\mathrm{rg}_{\mathbf{B}}\big(\rho_\star(P)\big) = \mathsf{H}_0(\rho)\big(\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(P)\big), \quad \textit{et} \quad \mathrm{rg}_{\mathbf{A}}\big(\rho_\star(P)\big) = [\mathbf{B} : \mathbf{A}]\,\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}(P).$$

▷ Les points *1*, *2*, *3* résultent du lemme précédent.
4. Le point *3* nous dit que le polynôme rang de P sur $\mathbf{A}$ ne dépend que du polynôme rang de P sur $\mathbf{B}$. On peut donc supposer P quasi libre sur $\mathbf{B}$ et on applique la définition de l'homomorphisme $\mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$.
Le point *5* est laissé à la lectrice. □

Un autre corollaire est donné par le théorème suivant.

3.10. Théorème. *Soit $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre strictement finie et $\mathbf{C}$ une $\mathbf{B}$-algèbre strictement finie. Alors $\mathbf{C}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre strictement finie et*

$$[\mathbf{C} : \mathbf{A}] = \mathrm{Rs}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}([\mathbf{C} : \mathbf{B}]).$$

En particulier, si $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathsf{H}_0(\mathbf{B})$, et si le rang de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{B}$ est un élément de $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$, on a

$$[\mathbf{C} : \mathbf{A}] = [\mathbf{B} : \mathbf{A}]\,[\mathbf{C} : \mathbf{B}].$$

Modules projectifs de rang 1

3.11. Fait. *Une matrice $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est idempotente et de rang 1 si, et seulement si, $\mathrm{Tr}(F) = 1$ et $\bigwedge^2 F = 0$.*

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

3.12. Proposition. *Soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1.*

1. Les homomorphismes canoniques

$$\mathbf{A} \to \mathrm{End}(P),\ a \mapsto \mu_{P,a} \ \textit{ et } \ \mathrm{End}(P) \to \mathbf{A},\ \varphi \mapsto \mathrm{Tr}(\varphi)$$

sont deux isomorphismes réciproques.

2. Pour tout $\varphi \in \mathrm{End}(P)$, on a $\det(\varphi) = \mathrm{Tr}(\varphi)$.

3. L'homomorphisme canonique $P^\star \otimes_{\mathbf{A}} P \to \mathbf{A}$ est un isomorphisme.

3.13. Proposition. *Soient M et N deux $\mathbf{A}$-modules.*
Si $N \otimes_{\mathbf{A}} M$ est isomorphe à $\mathbf{A}$, alors M est un module projectif de rang 1 et N est isomorphe à $M^\star$.

▷ Notons φ un isomorphisme de $N \otimes_{\mathbf{A}} M$ sur $\mathbf{A}$. Soit $u = \sum_{i=1}^n c_i \otimes a_i$ l'élément de $N \otimes M$ tel que $\varphi(u) = 1$. On a deux isomorphismes de $N \otimes M \otimes M$ vers M, construits à partir de φ.

$$c \otimes a \otimes b \mapsto \varphi(c \otimes a)\, b \quad \text{et} \quad c \otimes a \otimes b \mapsto \varphi(c \otimes b)\, a.$$

Ceci donne un isomorphisme $\sigma : M \to M$ vérifiant

$$\sigma\big(\varphi(c \otimes a)\, b\big) = \varphi(c \otimes b)\, a \ \text{ pour tous } c \in N,\ a, b \in M, \text{ d'où}$$

$\sigma(x) = \sigma\big(\sum_i \varphi(c_i \otimes a_i)x\big) = \sum_i \varphi(c_i \otimes x)a_i$, et $x = \sum_i \varphi(c_i \otimes x)\sigma^{-1}(a_i)$.
Ceci montre que M est projectif de type fini, avec le système de coordonnées $\big((u_1, \dots, u_n), (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\big)$, où $u_i = \sigma^{-1}(a_i)$ et $\alpha_i(x) = \varphi(c_i \otimes x)$.
De même, N est projectif de type fini. Mais $1 = \mathrm{rg}(N \otimes M) = \mathrm{rg}(N)\,\mathrm{rg}(M)$, donc M et N sont de rang 1 (fait 2.3). Enfin $N \otimes M^\star \otimes M \simeq N \simeq M^\star$. □

4. Grassmanniennes

Les anneaux génériques $\mathbf{G}_n$ et $\mathbf{G}_{n,k}$

Nous avons défini l'anneau $\mathbf{G}_n = \mathbf{G}_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[(f_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]/\mathcal{G}_n$ page 554.
En fait la construction est fonctorielle et l'on peut définir $\mathbf{G}_n(\mathbf{A})$ pour tout anneau commutatif $\mathbf{A}$: $\mathbf{G}_n(\mathbf{A}) = \mathbf{A}[(f_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]/\mathcal{G}_n \simeq \mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{G}_n$.
Notons $r_k = \mathrm{e}_k(\mathrm{Im}\ F)$ où F est la matrice $(f_{i,j})$ dans $\mathbf{G}_n(\mathbf{A})$.
Si nous imposons en outre que le rang soit égal à k, nous introduisons l'idéal $\mathcal{G}_{n,k} = \mathcal{G}_n + \langle 1 - r_k\rangle$ et nous obtenons l'anneau

$$\mathbf{G}_{n,k} = \mathbb{Z}[F]/\mathcal{G}_{n,k} \simeq \mathbf{G}_n[1/r_k] \simeq \mathbf{G}_n/\langle 1 - r_k\rangle\,.$$

Nous avons aussi la version relativisée à $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A}) = \mathbf{A}[F]/\mathcal{G}_{n,k} \simeq \mathbf{G}_n(\mathbf{A})[1/r_k] \simeq \mathbf{A} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbf{G}_{n,k}.$$

L'anneau $\mathbf{G}_n(\mathbf{A})$ est isomorphe au produit des $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$.

Dans le paragraphe présent consacré à $\mathbf{G}_{n,k}$ on pose $h = n - k$.

Si $\mathbf{K}$ est un corps, l'anneau $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{K})$ peut être considéré comme l'anneau des coordonnées de la variété affine $\mathbb{GA}_{n,k}(\mathbf{K})$ dont les points sont les paires (E_1, E_2) de sous-espaces de $\mathbf{K}^n$ vérifiant les égalités $\dim(E_1) = k$ et $\mathbf{K}^n = E_1 \oplus E_2$.
En géométrie algébrique, il y a quelques arguments massue pour affirmer que l'anneau $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{K})$ a toutes les bonnes propriétés que l'on puisse imaginer, ceci en relation avec le fait que la variété $\mathbb{GA}_{n,k}(\mathbf{K})$ est un espace homogène pour une action du groupe linéaire.
Nous allons retrouver ces résultats «à la main» et en nous affranchissant de l'hypothèse «$\mathbf{K}$ est un corps».
En utilisant les localisations convenables en les mineurs principaux d'ordre k de la matrice $F = (f_{ij})$ (la somme de ces mineurs est égale à 1 dans $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$), nous allons établir quelques propriétés essentielles du foncteur $\mathbf{G}_{n,k}$.

4.1. Théorème. (Le foncteur $\mathbf{G}_{n,k}$)

1. *Il existe des éléments comaximaux μ_i de l'anneau $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$ tels que chaque localisé $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})[1/\mu_i]$ est isomorphe à l'anneau*

$$\mathbf{A}[(X_j)_{j\in[\![1..2hk]\!]}][1/\delta]$$

pour un certain δ qui vérifie $\delta(\underline{0}) = 1$.

2. *L'homomorphisme naturel* $\mathbf{A} \to \mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$ *est injectif.*
3. *Si* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est un homomorphisme, le noyau de* $\mathbf{G}_{n,k}(\varphi)$ *est engendré par* $\mathrm{Ker}\ \varphi$. *En particulier, si* φ *est injectif,* $\mathbf{G}_{n,k}(\varphi)$ *l'est également.*

4.2. Corollaire. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret et* $\mathbf{A}$ *un anneau.*

1. *L'anneau* $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{K})$ *est intègre, intégralement clos, cohérent, noethérien régulier, de dimension de Krull* $2kh$.
2. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau intègre (resp. réduit, quasi intègre, localement sans diviseur de zéro, normal, cohérent noethérien, cohérent noethérien régulier) il en va de même pour* $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$.
3. *La dimension de Krull de* $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$ *est égale à celle de* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_{2hk}]$.
4. *L'anneau* $\mathbf{G}_{n,k} = \mathbf{G}_{n,k}(\mathbb{Z})$ *est intègre, intégralement clos, cohérent noethérien, régulier, de dimension (de Krull)* $2kh + 1$.

Commentaire. Nous avons utilisé dans le corollaire la notion d'anneau normal et celle de dimension de Krull que nous n'avons pas encore définies (voir sections XII-2 et XIII-2). Enfin un anneau cohérent est dit régulier lorsque tout module de présentation finie admet une résolution projective finie (pour cette dernière notion voir le problème 8). ∎

Esquisse de la démonstration. Si l'on rend un mineur principal d'ordre k de F inversible, alors l'anneau $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$ devient isomorphe à un localisé d'un anneau de polynômes sur $\mathbf{A}$, donc hérite de toutes les propriétés agréables de $\mathbf{A}$. Pour l'intégrité il y a une subtilité en plus, car ce n'est pas une propriété locale. □

Nous développons maintenant l'esquisse ci-dessus. Pour le cas d'un corps discret nous commençons par le résultat suivant.

4.3. Lemme. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret et* (E_1, E_2) *une paire de sous-espaces supplémentaires de dimensions* k *et* h *dans* $\mathbf{K}^n$.
On suppose que la matrice $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$ *a ses* k *premières colonnes qui engendrent* E_1 *et ses* h *dernières colonnes qui engendrent* E_2.

1. *Les matrices* L *et* C *sont entièrement déterminées par la paire* (E_1, E_2).
2. *La matrice* $\mathrm{I}_k - LC$ *est inversible (on note* V *son inverse).*
3. *La matrice de projection sur* E_1 *parallèlement à* E_2 *est égale à*

$$F = \begin{bmatrix} V & -V\,L \\ C\,V & -C\,V\,L \end{bmatrix}.$$

D L'unicité est claire. Soit $F = \begin{bmatrix} V & L' \\ C' & W \end{bmatrix}$ la matrice de la projection considérée. Elle est caractérisée par l'égalité

$$F \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire encore

$$V + L'C = \mathrm{I}_k,\ VL + L' = 0,\ C' + WC = C \text{ et } C'L + W = 0,$$

ce qui équivaut à

$$L' = -VL,\ W = -C'L,\ C'(\mathrm{I}_k - LC) = C \text{ et } V(\mathrm{I}_k - LC) = \mathrm{I}_k,$$

ou encore : $(\mathrm{I}_k - LC)^{-1} = V$, $C' = CV$, $L' = -VL$, et $W = -CVL$. □

Ceci se généralise au cas d'une matrice de projection de rang k sur un anneau commutatif arbitraire de la manière suivante, qui est une variante commune au lemme de la liberté et au lemme de la liberté locale.

4.4. Deuxième lemme de la liberté.
Soit F un projecteur dans $\mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$; on rappelle que $k + h = n$.

1. *Si $\mathrm{rg}(F) \leqslant k$ et si un mineur principal d'ordre k est inversible, alors la matrice F est semblable à une matrice de projection standard $\mathrm{I}_{k,n}$.*
2. *Plus précisément, supposons que $F = \begin{bmatrix} V & L' \\ C' & W \end{bmatrix}$ avec $V \in \mathbb{GL}_k(\mathbf{A})$. Posons*
$$B = \begin{bmatrix} V & -L' \\ C' & \mathrm{I}_h - W \end{bmatrix}.$$
Alors, en posant $L = V^{-1}L'$ et $C = -C'V^{-1}$, la matrice B est inversible, d'inverse $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$. En outre, on a les égalités
$$B^{-1}\,F\,B = \mathrm{I}_{k,n},\ W = C'V^{-1}L',\ V = (\mathrm{I}_k - LC)^{-1},$$
$$\det V = \det(\mathrm{I}_h - W) \ \textit{ et } \ \mathrm{I}_h - W = (\mathrm{I}_h - CL)^{-1}.$$
3. *Réciproquement, si $L \in \mathbf{A}^{k\times h}$, $C \in \mathbf{A}^{h\times k}$ et si $\mathrm{I}_k - LC$ est inversible d'inverse V, alors la matrice*
$$F = \begin{bmatrix} V & VL \\ -CV & -CVL \end{bmatrix}$$
est une projection de rang k : c'est la projection sur le sous-module libre E_1 engendré par les k premières colonnes de $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$, parallèlement au sous-module libre E_2 engendré par les h dernières colonnes de cette matrice.

D Voir l'exercice 2 et sa solution. □

Ce que l'on a gagné par rapport au premier lemme de la liberté II-5.10, c'est que F est semblable à $\mathrm{I}_{k,n}$ au lieu d'être simplement équivalente (cependant, voir l'exercice V-3). Et surtout, les précisions obtenues ici nous seront utiles.

Le lemme précédent se reformule de la manière suivante, plus abstraite, mais essentiellement équivalente (quoique moins précise).

4.5. Lemme. (L'anneau $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$ est presque un anneau de polynômes)
On considère la matrice générique $F = (f_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ dans l'anneau $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$.
Soit $\mu = \det\big((f_{ij})_{i,j\in[\![1..k]\!]}\big)$ son mineur principal dominant d'ordre k.
Soit par ailleurs $\mathbf{A}[L,C]$ l'anneau des polynômes en $2kh$ indéterminées, vues comme des coefficients de deux matrices L et C de types respectifs $k\times h$ et $h\times k$. Enfin notons $\delta = \det(\mathrm{I}_k - LC) \in \mathbf{A}[L,C]$.
Alors les anneaux localisés $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})[1/\mu]$ et $\mathbf{A}[L,C][1/\delta]$ sont naturellement isomorphes.
$\mathbb{D}$ Notons $F = \begin{bmatrix} V & L' \\ C' & W \end{bmatrix}$ avec $V \in \mathbb{M}_k(\mathbf{A})$.
Lorsque l'on inverse $\mu = \det(V)$, on obtient $V \in \mathbb{GL}_k(\mathbf{A}[1/\mu])$. On applique le point *2* du lemme 4.4. Avec les matrices $L = V^{-1}L'$ et $C = -C'V^{-1}$ on obtient $\delta = \det(\mathrm{I}_k - LC) \in \mathbf{A}^\times$. Ceci définit un homomorphisme d'algèbres de $\mathbf{A}[L,C][1/\delta]$ vers $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})[1/\mu]$.
Dans l'autre sens : à L et C avec δ inversible on fait correspondre la matrice $F = \begin{bmatrix} V & VL \\ -CV & -CVL \end{bmatrix}$ (avec $V = (\mathrm{I}_k - LC)^{-1}$).
L'homomorphisme correspondant va de $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})[1/\mu]$ vers $\mathbf{A}[L,C][1/\delta]$.
En composant ces morphismes on trouve l'identité dans les deux cas. □

Démonstration du théorème 4.1.
1. Ce point se déduit du lemme précédent puisque la somme des mineurs principaux d'ordre k de F est égale à 1 dans $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{A})$.
2. Considérons le $\mathbf{A}$-homomorphisme $\psi : \mathbf{A}[(f_{i,j})] \to \mathbf{A}$ de spécialisation en $\mathrm{I}_{k,n}$ défini par $\psi(f_{i,j}) = 1$ si $i = j \in [\![1..k]\!]$ et $= 0$ sinon.
Il est clair que $\psi\big(\mathcal{G}_{n,k}(\mathbf{A})\big) = 0$. Ceci prouve que $\mathbf{A} \cap \mathcal{G}_{n,k}(\mathbf{A}) = 0$ car si a est dans cette intersection, $a = \psi(a) = 0$.
3. Le noyau de $\varphi_{L,C} : \mathbf{A}[L,C] \to \mathbf{B}[L,C]$ (l'extension naturelle de φ) est engendré par le noyau de φ. La propriété reste vraie après localisation. Puis elle reste vraie en recollant des localisations en des monoïdes comaximaux. Donc dans notre cas on recolle en disant que Ker $\mathbf{G}_{n,k}(\varphi)$ est engendré par Ker φ. □

Démonstration du corollaire 4.2.
2. Mise à part la question de l'intégrité cela résulte du point *1* du théorème 4.1, car toutes les notions considérées sont stables par $\mathbf{A} \rightsquigarrow \mathbf{A}[X]$ et relèvent du principe local-global de base. Pour l'intégrité, cela se déduit du résultat dans le cas d'un corps discret : si $\mathbf{A}$ est intègre et $S = \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$, alors $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A} = \mathbf{A}_S$ est un corps discret et le point *3* du théorème 4.1 permet de conclure.

3. Vu le principe local-global concret pour la dimension de Krull (voir page 779), il nous suffit de montrer que $\mathbf{A}[L,C]$ et $\mathbf{A}[L,C][1/\delta]$ ont la même dimension, ce qui résulte du lemme 4.6 ci-après.
1. Compte tenu des points *2* et *3* il reste à montrer que $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{K})$ est intègre. Pour cela on se rappelle que $\mathbb{SL}_n(\mathbf{K})$ opère transitivement sur $\mathbb{GA}_{n,k}(\mathbf{K})$, ce qui signifie que toute matrice de projection de rang k et d'ordre n peut s'écrire sous la forme $S \cdot \mathrm{I}_{k,n} \cdot S^{-1}$ avec $S \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{K})$. Introduisons l'anneau des coordonnées de la variété $\mathbb{SL}_n(\mathbf{K}) \subseteq \mathbb{M}_n(\mathbf{K})$:

$$\mathbf{SL}_n(\mathbf{K}) = \mathbf{K}[(s_{i,j})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]/\langle 1 - \det\, S\rangle\,.$$

À l'application surjective

$$\theta_{\mathbf{K}} : \mathbb{SL}_n(\mathbf{K}) \to \mathbb{GA}_{n,k}(\mathbf{K}) \,:\, S \mapsto S \cdot \mathrm{I}_{k,n} \cdot S^{-1},$$

correspond le $\mathbf{K}$-homomorphisme

$$\widetilde{\theta}_{\mathbf{K}} : \mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{K}) \to \mathbf{SL}_n(\mathbf{K}),$$

qui envoie chaque $f_{i,j}$ sur le coefficient i,j de la matrice $S \cdot \mathrm{I}_{k,n} \cdot S^{-1}$.
Il est bien connu que $\mathbf{SL}_n(\mathbf{K})$ est intègre, et il suffit donc de montrer que $\widetilde{\theta}_{\mathbf{K}}$ est injectif. Comme $\theta_{\mathbf{L}}$ est surjectif pour toute extension finie $\mathbf{L}$ de $\mathbf{K}$, tout élément de $\mathrm{Ker}\,\widetilde{\theta}_{\mathbf{K}}$ est nilpotent (par le Nullstellensatz [4]). Or $\mathbf{G}_{n,k}(\mathbf{K})$ est réduit, donc $\widetilde{\theta}_{\mathbf{K}}$ est injectif.
4. Résulte des autres points (pour la dimension de Krull, il faut aussi le théorème XIII-8.20). □

4.6. Lemme. *Avec les notations précédentes l'anneau* $\mathbf{A}[L,C][1/\delta]$ *est une extension entière monogène d'un anneau de polynômes sur* $\mathbf{A}$ *à* $2kh$ *indéterminées. En conséquence* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[L,C][1/\delta] = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_{2kh}]$.
▷ On pose $L = (l_{ij})_{i\in[\![1..k]\!],j\in[\![1..h]\!]}$, $C = (c_{ij})_{i\in[\![1..h]\!],j\in[\![1..k]\!]}$. Le polynôme δ est de degré $2m$ avec $m = \min(h,k)$ et contient le monôme

$$(-1)^m l_{11}\dots l_{mm}c_{11}\dots c_{mm}.$$

Le localisé $\mathbf{A}' = \mathbf{A}[L,C][1/\delta]$ peut être réalisé en adjoignant une indéterminée t : $\mathbf{A}' = \mathbf{A}[L,C,t]/\langle t\delta - 1\rangle$. On peut mettre le polynôme $g = t\delta - 1$ en position de Noether. En effet, avec le changement de variables

$$l'_{ii} = l_{ii} + t,\ c'_{ii} = c_{ii} + t,\ i \in [\![1..m]\!], \quad l'_{ij} = l_{ij},\ c'_{ij} = c_{ij} \text{ si } i \neq j,$$

le polynôme g devient, au signe près, unitaire en t. Donc $\mathbf{A}'$ est une extension entière monogène de $\mathbf{A}[L',C']$. On conclut avec le théorème XIII-7.16. □

Nous allons étudier maintenant les espaces tangents aux grassmanniennes. Nous avons besoin pour ceci de définir le concept lui-même.
Nous commençons donc par une introduction heuristique à des notions catégoriques et fonctorielles abstraites. La lectrice non familière avec le

4. Nous faisons ici une démonstration constructive en supposant que $\mathbf{K}$ est contenu dans un corps discret algébriquement clos. On pourrait l'adapter au cas général.

langage des catégories doit survoler cette introduction, dans laquelle nous ne donnons pratiquement pas de démonstrations, et simplement essayer de se convaincre à partir des exemples donnés que la notion d'espace tangent à un foncteur en un point est somme toute assez raisonnable, ce qui lui permettra de voir ensuite la belle application de ce concept aux grassmanniennes.

Schémas affines, espaces tangents

Nullstellensatz et équivalence de deux catégories

Soit $(\underline{f}) = (f_1, \dots, f_s)$ un système polynomial dans $\mathbf{k}[X_1, \dots, X_n] = \mathbf{k}[\underline{X}]$, et notons $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n] = \mathbf{k}[\underline{x}]$ l'algèbre quotient correspondante.
Nous avons vu page 328 l'identification cruciale

$$\boxed{\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = \mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k}) \subseteq \mathbf{k}^n}$$

entre les zéros sur $\mathbf{k}$ du système polynomial $(\underline{f})$ et les caractères de l'algèbre $\mathbf{A}$. Si $\mathbf{k}$ est réduit, on a évidemment $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}_{\mathrm{red}}, \mathbf{k})$.

Supposons maintenant que $\mathbf{k}$ soit un corps algébriquement clos discret.

Un tel ensemble de zéros $\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k}) \subseteq \mathbf{k}^n$ est alors appelé une *variété algébrique sur* $\mathbf{k}$.
Soient $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ deux $\mathbf{k}$-algèbres quotients correspondant à deux systèmes polynomiaux $(\underline{f})$ et $(\underline{g})$ dans $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$. Le Nullstellensatz (corollaire III-9.8) nous dit que les deux algèbres réduites $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ sont égales si, et seulement si, elles ont la même variété de zéros dans $\mathbf{k}^n$:

$$\boxed{\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k}) = \mathcal{Z}(\underline{g}, \mathbf{k}) \iff \mathrm{D}_{\mathbf{k}[\underline{X}]}(\underline{f}) = \mathrm{D}_{\mathbf{k}[\underline{X}]}(\underline{g}) \iff \mathbf{A}_{\mathrm{red}} = \mathbf{B}_{\mathrm{red}}}$$

Cette constatation est la première étape dans la mise au point de l'équivalence entre la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres réduites-de-présentation-finie d'une part, et celle des variétés algébriques sur $\mathbf{k}$ d'autre part.
Pour que l'équivalence soit complète, nous devons traiter aussi les morphismes. Nous faisons pour cela une étude préliminaire concernant l'algèbre $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$.
Nous remarquons que tout élément p de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ définit une fonction polynomiale $\mathbf{k}^n \to \mathbf{k}$, $\underline{\xi} \mapsto p(\underline{\xi})$, et qu'un élément de $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ définit (par restriction) une fonction $\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k}) \to \mathbf{k}$: en effet, si $p \equiv q \bmod \mathrm{D}_{\mathbf{k}[\underline{X}]}(\underline{f})$, une puissance de $p - q$ est dans l'idéal $\langle \underline{f} \rangle$, donc les restrictions des fonctions polynomiales p et q à $\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k})$ sont égales. Mais dans le cas où $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos, nous avons la réciproque : si les restrictions de p et q à $\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k})$ sont égales, $p - q$ s'annule sur $\mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k})$, et par le Nullstellensatz, une puissance de $p - q$ est dans l'idéal $\langle \underline{f} \rangle$.
Ainsi, $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ peut être interprétée comme une algèbre de fonctions sur la variété algébrique qu'elle définit, à savoir $A = \mathcal{Z}(\underline{f}, \mathbf{k}) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$. La

structure de $\mathbf{k}$-algèbre de $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ est bien celle de cette algèbre de fonctions. Ces fonctions $\mathcal{Z}(\underline{f},\mathbf{k}) \to \mathbf{k}$ sont appelées les *fonctions régulières*.
De la même manière, si $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1,\dots,x_n]$ et $\mathbf{C} = \mathbf{k}[y_1,\dots,y_m]$ sont les algèbres quotients correspondant à deux systèmes polynomiaux

$$(\underline{f}) \text{ dans } \mathbf{k}[X_1,\dots,X_n] \text{ et } (\underline{h}) \text{ dans } \mathbf{k}[Y_1,\dots,Y_m],$$

si $A = \mathcal{Z}(\underline{f},\mathbf{k}) \subseteq \mathbf{k}^n$ et $C = \mathcal{Z}(\underline{h},\mathbf{k}) \subseteq \mathbf{k}^m$ sont les variétés algébriques correspondantes, on définit une *application régulière* de A vers C comme la restriction à A et C d'une application polynomiale $\varphi : \mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^m$ qui envoie A dans C.
Les applications régulières sont, par définition, *les morphismes de A vers C dans la catégorie des variétés algébriques sur* $\mathbf{k}$. On notera $\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}}(A,C)$ l'ensemble de ces morphismes.
L'application φ ci-dessus est donnée par un système $(F_1,\dots,F_m)$ dans $\mathbf{k}[\underline{X}]$, ou encore, par l'homomorphisme $F : \mathbf{k}[\underline{Y}] \to \mathbf{k}[\underline{X}]$, $Y_j \mapsto F_j$.
Notons $\varphi_1 : A \to C$ la restriction de φ ; si $\gamma : C \to \mathbf{k}$ est une fonction régulière, alors la composée $\gamma \circ \varphi_1 : A \to \mathbf{k}$ est une fonction régulière, et l'application $\psi_1 : \gamma \mapsto \gamma \circ \varphi_1$ peut être vue comme une application de $\mathbf{C}_{\mathrm{red}}$ vers $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$. En fait, cette application n'est autre que l'homomorphisme qui provient de F par passage aux quotients.
Dans l'autre sens, on peut voir que tout homomorphisme $\psi_1 : \mathbf{C}_{\mathrm{red}} \to \mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ provient d'un homomorphisme $\psi : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$, et que ψ définit une application régulière $\varphi : A \to C$, parfois appelée le *co-morphisme* de ψ. Cela se passe de la manière suivante : via les identifications $A = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\mathbf{k})$ et $C = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C},\mathbf{k})$, on a simplement l'égalité $\varphi(\underline{\xi}) = \underline{\xi} \circ \psi$ (ce qui fait de φ la « transposée » de ψ).
Finalement, $\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}}(A,C)$, s'identifie naturellement à $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_{\mathrm{red}},\mathbf{A}_{\mathrm{red}})$, identification que nous écrivons sous la forme d'une égalité :

$$\boxed{\mathrm{Mor}_{\mathbf{k}}(A,C) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_{\mathrm{red}},\mathbf{A}_{\mathrm{red}}).}$$

Notons cependant que le sens des flèches est renversé.
Considérons comme cas particulier le cas où A est la variété algébrique réduite à un point, associée à l'algèbre $\mathbf{k}$, correspondant au système polynomial vide sur *l'algèbre polynomiale sans variable* $\mathbf{k}$. Si l'on préfère, on peut voir ici $\mathbf{k}$ comme le quotient $\mathbf{k}[X]/\langle X\rangle$, correspondant au point $\{0\}$, sous-variété de la variété algébrique $V = \mathbf{k}$ associée à l'algèbre $\mathbf{k}[X]$.
Dans ces conditions, l'égalité encadrée ci-dessus admet comme cas particulier $C = \mathrm{Mor}_{\mathbf{k}}(\{0\},C) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{C}_{\mathrm{red}},\mathbf{k})$. La boucle est bouclée !
Le bilan de cette étude est le suivant : on peut entièrement réduire la considération des variétés algébriques sur un corps algébriquement clos à l'étude des $\mathbf{k}$-algèbres réduites-de-présentation-finie : il s'agit d'une interprétation en termes finis (systèmes polynomiaux finis sur $\mathbf{k}$ pour les objets aussi

bien que pour les morphismes) d'objets a priori un peu plus mystérieux, et certainement plus infinis. En termes catégoriques : on peut avantageusement remplacer la catégorie des variétés algébriques sur $\mathbf{k}$ par la catégorie opposée à celle des $\mathbf{k}$-algèbres réduites-de-présentation-finie. Il y a une équivalence naturelle entre ces deux catégories.

Schémas affines

Maintenant on fait un grand saut dans l'abstraction. On admet tout d'abord que les variétés peuvent avoir des multiplicités. Par exemple l'intersection d'un cercle et d'une droite doit être un point double, et non pas seulement un point, lorsque la droite est tangente au cercle. En conséquence, il est parfois néfaste de se limiter aux $\mathbf{k}$-algèbres réduites.

On admet aussi qu'à la base on n'a pas nécessairement un corps algébriquement clos mais un anneau commutatif arbitraire. Auquel cas les points de la variété sur $\mathbf{k}$ ne sauraient en général caractériser ce que l'on a envie de considérer comme une variété algébrique abstraite définie sur $\mathbf{k}$ (en autorisant les multiplicités). Par exemple le cercle abstrait est certainement représenté par la $\mathbb{Z}$-algèbre

$$\mathbb{Z}[x,y] = \mathbb{Z}[X,Y]/\langle X^2+Y^2-1\rangle,$$

mais ce ne sont pas ses points sur $\mathbb{Z}$ qui vont nous donner beaucoup d'information. Bien au contraire, ce sont ses points sur toutes les $\mathbb{Z}$-algèbres, c'est-à-dire sur tous les anneaux commutatifs, qui nous importent. De même un *cercle double* abstrait est certainement représenté par la $\mathbb{Z}$-algèbre

$$\mathbb{Z}[x',y'] = \mathbb{Z}[X,Y]/\langle (X^2+Y^2-1)^2\rangle,$$

mais on ne saurait distinguer un cercle simple d'un cercle double si l'on ne considère que les points sur les anneaux réduits (les anneaux sans multiplicité).

Nous voici donc en état de définir la catégorie des *schémas affines sur l'anneau commutatif* $\mathbf{k}$. Cela pourrait être simplement la catégorie opposée à la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres : celle dont les objets sont les $\mathbf{k}$-algèbres et dont les flèches sont les homomorphismes de $\mathbf{k}$-algèbres.

Mais il est une description équivalente nettement plus parlante (et élégante ?) : *un schéma affine sur l'anneau commutatif* $\mathbf{k}$ *est connu lorsque l'on connaît ses zéros sur toutes les* $\mathbf{k}$*-algèbres.* Autrement dit, la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ définit un schéma affine qui n'est rien d'autre que le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\bullet)$ de la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres vers la catégorie des ensembles.

Et un homomorphisme de $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{B}\to\mathbf{A}$ définit une transformation naturelle du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A},\bullet)$ vers le foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{B},\bullet)$: les transformations naturelles des foncteurs sont « dans le bon sens », c'est-à-dire des zéros de $\mathbf{A}$ vers les zéros de $\mathbf{B}$.

Si l'on ne veut pas partir trop haut dans l'abstraction, on peut se limiter aux $\mathbf{k}$-algèbres de présentation finie, ce qui est bien assez pour faire de la

très belle géométrie algébrique abstraite (i.e., non limitée à la géométrie algébrique sur des corps discrets).

Espace tangent en un point à un foncteur

Rappelons tout d'abord la notion d'espace tangent à un système polynomial en un zéro du système introduite à la section IX-4.

Prenons l'exemple de la sphère comme schéma affine défini sur $\mathbb{Q}$. Ce schéma est associé à la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbf{A} = \mathbb{Q}[x,y,z] = \mathbb{Q}[X,Y,Z]\big/\langle X^2+Y^2+Z^2-1\rangle$. Si $\underline{\xi} = (\alpha,\beta,\gamma) \in \mathbb{Q}^3$ est un zéro de $\mathbf{A}$ sur $\mathbb{Q}$, c'est-à-dire un point rationnel de la sphère, nous lui avons associé

— l'idéal $\mathfrak{m}_{\underline{\xi}} = \langle x-\alpha, y-\beta, z-\gamma\rangle_{\mathbf{A}}$,

— l'algèbre locale $\mathbf{A}_{\underline{\xi}} = \mathbf{A}_{1+\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}$, et

— l'espace tangent $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}(\mathbf{A}/\mathbb{Q}) \simeq \mathrm{Der}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A}, \underline{\xi})$,

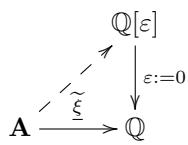
lequel est un $\mathbb{Q}$-espace vectoriel canoniquement isomorphe à $(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}}^2)^\star$ ou encore à $(\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}/{\mathfrak{m}_{\underline{\xi}}\mathbf{A}_{\underline{\xi}}}^2)^\star$.

De manière plus intuitive mais équivalente (proposition IX-4.3), un vecteur tangent à la sphère en $\underline{\xi}$ est simplement donné par un $(u,v,w) \in \mathbb{Q}^3$ qui vérifie $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$, c'est-à-dire en posant $f = X^2+Y^2+Z^2-1$,

$$u\tfrac{\partial f}{\partial X}(\underline{\xi}) + v\tfrac{\partial f}{\partial Y}(\underline{\xi}) + w\tfrac{\partial f}{\partial Z}(\underline{\xi}) = 0.$$

Voici maintenant une nouvelle manière de voir cet espace tangent, que nous exprimons en termes du schéma affine correspondant, c'est-à-dire du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A}, \bullet) = \mathcal{Z}(f, \bullet)$. Nous devons pour ceci introduire de manière formelle un infinitésimal que nous notons ε, c'est-à-dire considérer la $\mathbb{Q}$-algèbre $\mathbb{Q}[\varepsilon] = \mathbb{Q}[T]\big/\langle T^2\rangle$ (ε est la classe de T modulo T^2).

Le point $\underline{\xi}$ est vu comme un caractère de $\mathbf{A}$, i.e. comme l'élément $\widetilde{\underline{\xi}} : g \mapsto g(\underline{\xi})$ de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q})$. Nous nous demandons alors quels sont les éléments λ de l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Q}}(\mathbf{A}, \mathbb{Q}[\varepsilon])$ qui « relèvent $\widetilde{\underline{\xi}}$ », au sens que lorsque l'on compose avec l'évaluation de ε en 0, de $\mathbb{Q}[\varepsilon]$ vers $\mathbb{Q}$, on retombe sur $\widetilde{\underline{\xi}}$.



Un tel élément est a priori donné par un zéro de f sur $\mathbb{Q}[\varepsilon]$ qui redonne $\underline{\xi}$ lorsque l'on évalue ε en 0, c'est-à-dire un triplet $(\alpha + a\varepsilon, \beta + b\varepsilon, \gamma + c\varepsilon)$, avec $f(\alpha + a\varepsilon, \beta + b\varepsilon, \gamma + c\varepsilon) = 0$ dans $\mathbb{Q}[\varepsilon]$. Mais ceci signifie exactement que (a,b,c) est un vecteur tangent à la sphère en $\underline{\xi}$.

Il ne s'agit quant au fond que de la banale constatation selon laquelle « la différentielle est la partie linéaire de l'accroissement de la fonction » :

$$f(\underline{\xi} + \varepsilon V) = f(\underline{\xi}) + \varepsilon\, \mathrm{d}f(\underline{\xi})(V) \bmod \varepsilon^2.$$

Ce zéro $\underline{\xi} + \varepsilon(a,b,c)$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{k}[\varepsilon]$ définit un homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{k}[\varepsilon]$ via $x \mapsto \alpha + a\varepsilon$, $y \mapsto \beta + b\varepsilon$, $z \mapsto \gamma + c\varepsilon$.
Cet homomorphisme envoie g sur $g(\underline{\xi}) + a\frac{\partial g}{\partial X}(\underline{\xi}) + b\frac{\partial g}{\partial Y}(\underline{\xi}) + c\frac{\partial g}{\partial Z}(\underline{\xi})$, puisque

$$g\big(\underline{\xi} + \varepsilon(a,b,c)\big) = g(\underline{\xi}) + \varepsilon\, \mathrm{d}g(\underline{\xi})(a,b,c) \bmod \varepsilon^2.$$

Le lecteur pourra vérifier que ce petit calcul que nous venons de faire sur un petit exemple fonctionne pour n'importe quel zéro de n'importe quel système polynomial basé sur n'importe quel anneau commutatif.
Il faut cependant au moins rajouter comment on peut interpréter en termes du foncteur $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \bullet)$ la structure de $\mathbf{k}$-module sur l'espace tangent en un zéro d'un système polynomial sur un anneau $\mathbf{k}$.
Ici aussi, contentons-nous de notre petit exemple.
Dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres, le produit fibré de la « flèche de restriction »

$$\mathbb{Q}[\varepsilon] \to \mathbb{Q},\ \varepsilon \mapsto 0$$

avec elle-même est l'algèbre

$$\mathbb{Q}[\varepsilon] \times_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[\varepsilon] \simeq \mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \quad \text{avec } \varepsilon_1^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2^2 = 0,$$

munie des deux homomorphismes « de projection »

$$\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \xrightarrow{\pi_1} \mathbb{Q}[\varepsilon],\ \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon,\ \varepsilon_2 \mapsto 0 \quad \text{et}$$
$$\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{Q}[\varepsilon],\ \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon,\ \varepsilon_1 \mapsto 0,$$

et de la flèche « de restriction »

$$\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \to \mathbb{Q}, \quad \varepsilon_1 \mapsto 0,\ \varepsilon_2 \mapsto 0.$$

Il y a en outre un homomorphisme naturel « d'addition »

$$\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \to \mathbb{Q}[\varepsilon], \quad \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon,\ \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon,$$

qui commute avec les restrictions.
Lorsque l'on donne deux zéros $\underline{\xi} + \varepsilon V_1$ et $\underline{\xi} + \varepsilon V_2$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{Q}[\varepsilon]$, vue la propriété caractéristique du produit fibré dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres, les deux homomorphismes correspondants $\mathbf{A} \to \mathbb{Q}[\varepsilon]$ se factorisent de manière unique pour donner un homomorphisme de $\mathbf{A}$ vers $\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$ « produit fibré des deux », qui correspond au zéro $\underline{\xi} + \varepsilon_1 V_1 + \varepsilon_2 V_2$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2]$.
Enfin en composant cet homomorphisme produit fibré avec l'homomorphisme d'addition $\mathbb{Q}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \to \mathbb{Q}[\varepsilon]$, on obtient l'homomorphisme correspondant au zéro $\underline{\xi} + \varepsilon(V_1 + V_2)$. La boucle est donc bouclée, l'addition des vecteurs tangents a été décrite en termes purement catégoriques.
Résumons nous. Dans le cas du foncteur qui est un schéma affine défini par un système polynomial sur un anneau $\mathbf{k}$ avec son algèbre quotient $\mathbf{A}$, il y a une identification canonique entre $\mathrm{T}_{\underline{\xi}}(\mathbf{A}/\mathbf{k})$ et l'ensemble des points de $\mathbf{A}$ sur $\mathbf{k}[\varepsilon]$ qui relèvent $\underline{\xi}$, lorsque l'on identifie $\underline{\xi}$ et $\underline{\xi} + \varepsilon V$ aux éléments correspondants de $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k})$ et $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}, \mathbf{k}[\varepsilon])$. En outre, la structure de $\mathbf{k}$-module dans la deuxième interprétation est donné par l'« addition » fournie par l'homomorphisme

$$\mathbf{k}[\varepsilon_1, \varepsilon_2] \simeq \mathbf{k}[\varepsilon] \times_{\mathbf{k}} \mathbf{k}[\varepsilon] \to \mathbf{k}[\varepsilon], \quad \varepsilon_1 \mapsto \varepsilon,\ \varepsilon_2 \mapsto \varepsilon,$$

($\varepsilon^2 = \varepsilon_1^2 = \varepsilon_2^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 = 0$).

Notons que la « loi externe », multiplication par le scalaire a, provient, elle, de l'homomorphisme

$$\mathbf{k}[\varepsilon] \xrightarrow{\lambda_a} \mathbf{k}[\varepsilon], \quad b + \varepsilon c \mapsto b + \varepsilon ac.$$

Le mécanisme formel d'addition ainsi décrit pourra fonctionner avec n'importe quel autre foncteur qui voudra bien, lui aussi, transformer les produits fibrés (dans la catégorie des $\mathbb{Q}$-algèbres) en produits fibrés (dans la catégorie des ensembles).

Ainsi la notion d'espace tangent en un point à un foncteur [5] se généralise aux autres schémas sur un anneau $\mathbf{k}$, car ce sont « de bons foncteurs ». I.e. les schémas de Grothendieck (que nous ne définirons pas ici) sont de bons foncteurs. Et les foncteurs grassmanniennes (qui ont déjà été définis) sont de tels schémas.

Espaces tangents aux grassmanniennes

Projecteurs et rangs

Deux faits faciles avant d'entrer dans le vif du sujet. On considère un module E. Deux projecteurs π_1, $\pi_2 : E \to E$ sont dits *orthogonaux* s'ils vérifient $\pi_1 \circ \pi_2 = \pi_2 \circ \pi_1 = 0$.

4.7. Fait. *Si π_1, $\pi_2 : E \to E$ sont des projecteurs orthogonaux d'images E_1 et E_2, alors $\pi_1 + \pi_2$ est un projecteur et son image est $E_1 \oplus E_2$. En conséquence, lorsque E est un module projectif de type fini, on obtient*

$$\operatorname{rg}(\pi_1 + \pi_2) = \operatorname{rg}(E_1 \oplus E_2) = \operatorname{rg} E_1 + \operatorname{rg} E_2.$$

4.8. Fait. *Soient π_1, $\pi_2 \in \operatorname{End}_{\mathbf{A}}(E)$ deux projecteurs d'images E_1 et E_2. Alors l'application $\mathbf{A}$-linéaire*

$$\Phi : \operatorname{End}(E) \to \operatorname{End}(E),\ \varphi \mapsto \pi_2 \circ \varphi \circ \pi_1,$$

est un projecteur dont l'image est isomorphe à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E_1, E_2)$. En conséquence, lorsque E est un module projectif de type fini, on obtient l'égalité

$$\operatorname{rg} \Phi = \operatorname{rg} E_1 \cdot \operatorname{rg} E_2.$$

Grassmannienne affine

Ce paragraphe est consacré à la détermination de l'espace tangent en un point au foncteur $\mathbf{A} \mapsto \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$. Rappelons que l'acronyme $\mathbb{GA}$ est mis pour "Grassmannienne Affine". L'interprétation géométrique d'un point P de $\mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ est donnée par le couple ordonné $(E, F) = (\operatorname{Im} P, \operatorname{Ker} P)$ de sous-modules en somme directe dans $\mathbf{A}^n$.

Plus généralement, si $\mathbf{k}$ est un anneau donné en référence (en géométrie usuelle ce serait un corps discret) et si M est un $\mathbf{k}$-module projectif de type fini fixé, on peut considérer la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres et le

5. Foncteur de la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres vers la catégorie des ensembles.

foncteur $\mathbf{A} \mapsto \mathbb{GA}_M(\mathbf{A})$, où $\mathbb{GA}_M(\mathbf{A})$ désigne l'ensemble des couples ordonnés (E, F) de sous-modules en somme directe dans le module étendu $\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}} M$, que nous noterons $M_{\mathbf{A}}$. Un tel couple peut être représenté par la projection $\pi : M_{\mathbf{A}} \to M_{\mathbf{A}}$ sur E parallèlement à F. La grassmannienne affine $\mathbb{GA}_M(\mathbf{A})$ peut donc être vue comme le sous-ensemble des éléments idempotents dans $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M_{\mathbf{A}})$. C'est ce point de vue que nous adoptons dans la suite.
Pour étudier l'espace tangent on doit considérer l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{A}[\varepsilon]$ où ε est l'élément générique de carré nul. Nous donnons tout d'abord l'énoncé pour la grassmannienne usuelle $\mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$.

4.9. Théorème. (Espace tangent à une grassmanienne affine)
Soit $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ un projecteur d'image E et de noyau F. Pour $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ on a l'équivalence suivante.

$$P + \varepsilon H \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A}[\varepsilon]) \iff H = HP + PH.$$

Associons à P l'application $\mathbf{A}$-linéaire $\widehat{P} : \mathbb{M}_n(\mathbf{A}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ définie par

$$\widehat{P}(G) = P\,G\,(\mathrm{I}_n - P) + (\mathrm{I}_n - P)\,G\,P.$$

On a les résultats suivants.

- *Les applications $\mathbf{A}$-linéaires*
$$\pi_1 : G \mapsto P\,G\,(\mathrm{I}_n - P) \quad et \quad \pi_2 : G \mapsto (\mathrm{I}_n - P)\,G\,P$$
sont des projecteurs orthogonaux. En particulier, $\widehat{P}$ est un projecteur.
- *Pour $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, on a $H = PH + HP$ si, et seulement si, $H \in \mathrm{Im}\,\widehat{P}$.*
- *Le module $\mathrm{Im}\,\widehat{P}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, F) \oplus \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F, E)$. En particulier, $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}\,\widehat{P}) = 2\,\mathrm{rg}\,E \cdot \mathrm{rg}\,F$.*

En résumé, l'espace tangent en le $\mathbf{A}$-point P au foncteur $\mathbb{GA}_n$ est canoniquement isomorphe au module projectif de type fini $\mathrm{Im}\,\widehat{P}$ (via $H \mapsto P + \varepsilon H$), lui-même canoniquement isomorphe à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, F) \oplus \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F, E)$.

▷ Le premier point est immédiat. Notons V_P le sous-module des matrices H qui vérifient $H = HP + PH$. Ce module est canoniquement isomorphe à l'espace tangent que nous cherchons. Un calcul simple montre que π_1 et π_2 sont des projecteurs orthogonaux. Donc $\widehat{P}$ est un projecteur. L'égalité suivante est claire : $P\widehat{P}(G) + \widehat{P}(G)P = \widehat{P}(G)$. Donc $\mathrm{Im}\,\widehat{P} \subseteq V_P$. Par ailleurs, si $H = PH + HP$, on a $PHP = 0$, donc $\widehat{P}(H) = PH + HP = H$. Ainsi $V_P \subseteq \mathrm{Im}\,\widehat{P}$. En bref $V_P = \mathrm{Im}\,\widehat{P} = \mathrm{Im}\,\pi_1 \oplus \mathrm{Im}\,\pi_2$: on conclut en appliquant le fait 4.8. □

Nous donnons maintenant l'énoncé général (la preuve est identique).

4.10. Proposition. *Soit $\pi \in \mathbb{GA}_M(\mathbf{A})$ un projecteur d'image E et de noyau F. Pour $\eta \in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(M_{\mathbf{A}})$ on a l'équivalence*

$$\pi + \varepsilon\eta \in \mathbb{GA}_M(\mathbf{A}[\varepsilon]) \quad \Longleftrightarrow \quad \eta = \pi\eta + \eta\pi.$$

On associe à π l'application $\mathbf{A}$-linéaire $\widehat{\pi} : \mathrm{End}(M_{\mathbf{A}}) \to \mathrm{End}(M_{\mathbf{A}})$ définie par $\widehat{\pi}(\psi) = \pi\,\psi\,(\mathrm{I} - \pi) + (\mathrm{I} - \pi)\,\psi\,\pi$. Alors

- *Les applications linéaires $\pi_1 : \psi \mapsto \pi\,\psi\,(\mathrm{I} - \pi)$ et $\pi_2 : \psi \mapsto (\mathrm{I} - \pi)\,\psi\,\pi$ sont des projecteurs orthogonaux. En particulier, $\widehat{\pi}$ est un projecteur.*
- *Une application $\mathbf{A}$-linéaire $\eta \in \mathrm{End}(M_{\mathbf{A}})$ vérifie $\eta = \pi\eta + \eta\pi$ si, et seulement si, $\eta \in \mathrm{Im}\,\widehat{\pi}$.*
- *Le module $\mathrm{Im}\,\widehat{\pi}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E,F) \oplus \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,E)$. En particulier, $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}\,\widehat{\pi}) = 2\,\mathrm{rg}\,E \cdot \mathrm{rg}\,F$.*

En résumé l'espace tangent en le $\mathbf{A}$-point π au foncteur $\mathbb{GA}_M$ est canoniquement isomorphe au module projectif de type fini $\mathrm{Im}\,\widehat{\pi}$ (via $\eta \xrightarrow{\sim} \pi + \varepsilon\eta$), lui même canoniquement isomorphe à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E,F) \oplus \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,E)$.

Grassmannienne projective

Ce paragraphe est consacré à la détermination de l'espace tangent en un point au foncteur $\mathbf{A} \mapsto \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$, où $\mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ désigne l'ensemble des sous-modules en facteur direct dans $\mathbf{A}^n$.

4.11. Fait. (L'espace des projecteurs qui ont la même image qu'un projecteur fixé)
Soit $P \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ un projecteur d'image E. Notons Π_E l'ensemble des projecteurs qui ont E pour image, et $V = \mathbf{A}^n$. Alors Π_E est un sous-espace affine de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, ayant pour « direction » le $\mathbf{A}$-module projectif de type fini $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(V/E, E)$ (naturellement identifié à un sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$). On précise ce résultat de la manière suivante.

1. *Soit $Q \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ un autre projecteur.*
   Alors $Q \in \Pi_E$ si, et seulement si, $PQ = Q$ et $QP = P$.
   Dans ce cas, la différence $N = Q - P$ vérifie les égalités $PN = N$ et $NP = 0$, et donc $N^2 = 0$.
2. *Réciproquement, si $N \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ vérifie $PN = N$ et $NP = 0$ (auquel cas $N^2 = 0$), alors $Q := P + N$ est dans Π_E.*
3. *En résumé, l'ensemble Π_E s'identifie au $\mathbf{A}$-module $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(V/E, E)$ via l'application affine*

$$\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(V/E, E) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{A}),\ \varphi \mapsto P + j \circ \varphi \circ \pi,$$

   où $j : E \to V$ est l'injection canonique et $\pi : V \to V/E$ la projection canonique.

Informations supplémentaires.

4. Si $Q \in \Pi_E$, P et Q sont conjugués dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. Plus précisément, en posant $N = Q - P$, on a $(\mathrm{I}_n + N)(\mathrm{I}_n - N) = \mathrm{I}_n$ et $(\mathrm{I}_n - N)P(\mathrm{I}_n + N) = Q$.

5. Si $Q \in \Pi_E$, alors pour tout $t \in \mathbf{A}$, on a : $tP + (1-t)Q \in \Pi_E$.

▷ *1.* $N^2 = 0$ comme on le voit en multipliant $PN = N$ par N à gauche.
3. Les conditions $PN = N$ et $NP = 0$ sur la matrice N équivalent aux inclusions $\operatorname{Im} N \subseteq E = \operatorname{Im} P$ et $E \subseteq \operatorname{Ker} N$.
Les matrices N de ce type forment un $\mathbf{A}$-module $\widetilde{E}$ qui s'identifie au module $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(\operatorname{Ker} P, \operatorname{Im} P)$ « par restriction du domaine et de l'image ».
De manière plus intrinsèque, ce module $\widetilde{E}$ s'identifie aussi à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(V/E, E)$ via l'application linéaire $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(V/E, E) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, $\varphi \mapsto j \circ \varphi \circ \pi$, qui est injective et admet $\widetilde{E}$ pour image.
4. $(\mathrm{I}_n - N)\,P\,(\mathrm{I}_n + N) = P\,(\mathrm{I}_n + N) = P + PN = P + N = Q$. □

4.12. Fait. *Soit $E \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ et $E' \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A}[\varepsilon])$ qui donne E par la spécialisation $\varepsilon \mapsto 0$ (autrement dit E' est un point de l'espace tangent en E au foncteur $\mathbb{G}_n$). Alors E' est isomorphe au module obtenu à partir de E par extension des scalaires : $E' \simeq \mathbf{A}[\varepsilon] \otimes_{\mathbf{A}} E$.*

▷ D'après le théorème 5.10, un module projectif de type fini M sur un anneau $\mathbf{B}$ est caractérisé, à isomorphisme près, par sa « réduction » M_{red} (i.e., le module obtenu par extension des scalaires à $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$). Or E' et $\mathbf{A}[\varepsilon] \otimes_{\mathbf{A}} E$ ont même réduction E_{red} à $(\mathbf{A}[\varepsilon])_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{A}_{\mathrm{red}}$. □

4.13. Théorème. (Espace tangent à une grassmanienne projective)
Soit $E \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ un sous-$\mathbf{A}$-module en facteur direct dans $\mathbf{A}^n = V$. Alors l'espace tangent en le $\mathbf{A}$-point E au foncteur $\mathbb{G}_n$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, V/E)$. Plus précisément, si $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, V/E)$ et si l'on note

$$E_\varphi = \{\, x + \varepsilon h \mid x \in E,\ h \in V,\ h \equiv \varphi(x) \bmod E \,\},$$

alors $\varphi \mapsto E_\varphi$ est une bijection du module $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, V/E)$ sur l'ensemble des matrices $E' \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A}[\varepsilon])$ qui donnent E lorsque l'on spécialise ε en 0.

▷ Soient $E \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ et $\varphi \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, V/E)$.
Montrons d'abord que E_φ est dans $\mathbb{G}_n(\mathbf{A}[\varepsilon])$ et au dessus de E. Fixons une matrice $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ vérifiant $E = \operatorname{Im} P$. On a donc $V = E \oplus \operatorname{Ker} P$ et un isomorphisme $V/E \simeq \operatorname{Ker} P \subseteq V$. On peut donc relever l'applica-

tion linéaire φ en une matrice $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}) = \mathrm{End}(V)$ conformément au diagramme

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{H} & V \\ \downarrow & & \uparrow \\ E & \xrightarrow{\varphi} & V/E \end{array}$$

La matrice H vérifie $PH = 0$ et $H(\mathrm{I}_n - P) = 0$, i.e. $HP = H$.
Il suffit de montrer que $P + \varepsilon H$ est un projecteur d'image E_φ.
Pour l'inclusion $\mathrm{Im}(P + \varepsilon H) \subseteq E_\varphi$, soit $(P + \varepsilon H)(y + \varepsilon z)$ avec $y, z \in V$:

$$(P + \varepsilon H)(y + \varepsilon z) = Py + \varepsilon(Hy + Pz) = Py + \varepsilon(HPy + Pz) = x + \varepsilon h,$$

avec $x = Py \in E$, $h = Hx + Pz$. Puisque $x \in E$, on a $\varphi(x) = Hx$, et donc $h \equiv \varphi(x) \bmod E$. Pour l'inclusion réciproque, soit $x + \varepsilon h \in E_\varphi$ et montrons que $(P + \varepsilon H)(x + \varepsilon h) = x + \varepsilon h$:

$$(P + \varepsilon H)(x + \varepsilon h) = Px + \varepsilon(Hx + Ph).$$

Comme $x \in E$, on a $Px = x$. Il faut voir que $Hx + Ph = h$, mais h est de la forme $h = Hx + y$ avec $y \in E$, donc $Ph = 0 + Py = y$ et l'on a bien l'égalité $h = Hx + Ph$.
Enfin, il est clair que $P + \varepsilon H$ est un projecteur :

$$(P + \varepsilon H)(P + \varepsilon H) = P^2 + \varepsilon(HP + PH) = P + \varepsilon H.$$

Montrons la surjectivité de $\varphi \mapsto E_\varphi$. Soit $E' \subseteq \mathbf{A}[\varepsilon]^n$, facteur direct, au dessus de E. Alors E' est l'image d'un projecteur $P + \varepsilon H$ et l'on a :
$(P+\varepsilon H)(P+\varepsilon H) = P^2+\varepsilon(HP+PH)$ donc $P^2 = P$, $HP+PH = H$, ce qui donne $PHP = 0$ (multiplier $HP + PH = H$ par P à droite, par exemple). On voit donc que P est un projecteur d'image E (car E', pour $\varepsilon := 0$, c'est E). On remplace H par $K = HP$, qui vérifie :

$$KP = (HP)P = K, \qquad PK = P(HP) = 0.$$

Ceci ne change pas l'image de $P + \varepsilon H$, i.e. $\mathrm{Im}(P + \varepsilon H) = \mathrm{Im}(P + \varepsilon K)$. Pour le voir, il suffit de (et il faut) montrer que :

$$(P + \varepsilon H)(P + \varepsilon K) = P + \varepsilon K, \qquad (P + \varepsilon K)(P + \varepsilon H) = P + \varepsilon H.$$

À gauche, on obtient $P + \varepsilon(HP + PK) = P + \varepsilon(HP + 0) = P + \varepsilon K$; à droite, $P+\varepsilon(KP+PH) = P+\varepsilon(K+PH) = P+\varepsilon(HP+PH) = P+\varepsilon H$.
La matrice K vérifie $KP = K$, $PK = 0$, et représente une application linéaire $\varphi : E \to \mathbf{A}^n/E$ avec $E' = \mathrm{Im}(P + \varepsilon K) = E_\varphi$.
Prouvons l'injectivité de $\varphi \mapsto E_\varphi$. Supposons donc $E_\varphi = E_{\varphi'}$. On fixe un projecteur $P \in \mathbb{G}_n(\mathbf{A})$ d'image E et l'on code φ par H, φ' par H' avec :

$$HP = H, \quad PH = 0, \qquad H'P = H', \quad PH' = 0.$$

Comme $P + \varepsilon H$ et $P + \varepsilon H'$ ont même image, on a les égalités

$$(P + \varepsilon H)(P + \varepsilon H') = P + \varepsilon H' \quad \text{et} \quad (P + \varepsilon H')(P + \varepsilon H) = P + \varepsilon H.$$

L'égalité de droite donne $H = H'$, donc $\varphi = \varphi'$. □

Remarque. La projection $\mathbb{GA}_n \to \mathbb{G}_n$ associe à P son image $E = \mathrm{Im}\, P$. Voici comment s'organisent les espaces tangents et la projection (avec $F = \mathrm{Ker}\, P$) :

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{T}_P(\mathbb{GA}_n, \mathbf{A}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E,F) \oplus \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F,E) & \xrightarrow{\sim} & \{H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}) \mid H = HP + PH\} \\
\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle H \mapsto K = HP} \\
\mathrm{T}_E(\mathbb{G}_n, \mathbf{A}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(E, \mathbf{A}^n/E) & \xrightarrow{\sim} & \{K \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}) \mid KP = K,\ PK = 0\}
\end{array}$$ ∎

5. Classification des modules projectifs de type fini, groupes de Grothendieck et de Picard

Nous attaquons ici le problème général de la classification complète des modules projectifs de type fini sur un anneau $\mathbf{A}$ fixé.
Cette classification est un problème fondamental mais difficile, qui n'admet pas de solution algorithmique générale.
Nous commençons par poser quelques jalons pour le cas où tous les modules projectifs de rang constant sont libres.
Nous donnons dans les sous-sections suivantes une toute petite introduction à des outils classiques qui permettent d'appréhender le problème général.

Quand les modules projectifs de rang constant sont libres

Commençons par une remarque élémentaire.

5.1. Fait. *Un $\mathbf{A}$-module projectif de rang k est libre si, et seulement si, il est engendré par k éléments.*

▷ La condition est clairement nécessaire. Supposons maintenant le module engendré par k éléments. Le module est donc image d'une matrice de projection $F \in \mathbb{M}_k(\mathbf{A})$. Par hypothèse $\det(\mathrm{I}_k + XF) = (1+X)^k$. En particulier, $\det F = 1$, donc F est inversible, et puisque $F^2 = F$, cela donne $F = \mathrm{I}_k$. □

Voici une autre remarque facile.

5.2. Fait. *Tout $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant est libre si, et seulement si, tout $\mathbf{A}$-module projectif est quasi libre.*

▷ La condition est clairement suffisante. Si tout $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant est libre et si P est projectif soit $(r_0, \dots, r_n)$ le système fondamental d'idempotents orthogonaux correspondant. Alors $P_k = r_k P \oplus (1-r_k)\mathbf{A}^k$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang k donc libre. Soit une base B_k, la « composante » $r_k B_k$ est dans $r_k P$, et $r_k P \simeq (r_k \mathbf{A})^k$. Puisque P est la somme directe des $r_k P$, il est bien quasi libre. □

5.3. Proposition. *Tout module projectif de rang constant sur un anneau local-global est libre.*

▷ Déjà vu dans le théorème IX-6.9. □

5.4. Théorème. *Tout module projectif de type fini sur un anneau de Bézout intègre est libre. Tout module projectif de type fini de rang constant sur un anneau de Bézout quasi intègre est libre.*

$\mathbb{D}$ Voyons le cas intègre. Une matrice de présentation du module peut être ramenée à la forme $\begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où T est triangulaire avec des éléments réguliers sur la diagonale (voir l'exercice IV-6). Comme les idéaux déterminantiels de cette matrice sont idempotents le déterminant δ de T est un élément régulier qui vérifie $\delta\mathbf{A} = \delta^2\mathbf{A}$. Ainsi δ est inversible et la matrice de présentation est équivalente à $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
Pour le cas quasi intègre on applique la machinerie locale-globale élémentaire expliquée page 217. □

Signalons un autre cas important : $\mathbf{A} = \mathbf{B}[X_1, \ldots, X_n]$ où $\mathbf{B}$ est un anneau de Bézout intègre. Ceci est une extension remarquable du théorème de Quillen-Suslin, due à Bass (pour $n = 1$), puis Lequain et Simis [124]. Le théorème sera démontré dans la section XVI-6.

$\mathsf{GK}_0(\mathbf{A})$, $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$, $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A})$, et $\mathsf{Pic}(\mathbf{A})$

On note $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules projectifs de type fini sur $\mathbf{A}$. C'est un semi-anneau pour les lois héritées de $\oplus$ et $\otimes$. Le G de GK_0 est en hommage à Grothendieck.
Tout élément de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ peut être représenté par une matrice idempotente à coefficients dans $\mathbf{A}$. Tout homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ induit un homomorphisme $\mathsf{GK}_0\,\varphi : \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} \to \mathsf{GK}_0\,\mathbf{B}$. Ceci fait de GK_0 un foncteur covariant de la catégorie des anneaux commutatifs vers la catégorie des semi-anneaux. On a $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \simeq \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}_1 \times \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}_2$. Le passage d'un module projectif à son dual définit un automorphisme involutif de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$.
Si P est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini on peut noter $[P]_{\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}}$ l'élément de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ qu'il définit.
Le sous-semi-anneau de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ engendré par 1 (la classe du module projectif de type fini $\mathbf{A}$) est isomorphe à $\mathbb{N}$, sauf dans le cas où $\mathbf{A}$ est l'anneau trivial.
Comme sous-semi-anneau de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ on a aussi celui engendré par les classes d'isomorphisme des modules $r\mathbf{A}$ où $r \in \mathbb{B}(\mathbf{A})$, isomorphe à $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$. On obtient facilement l'isomorphisme $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A}) \simeq \mathsf{GK}_0\big(\mathbb{B}(\mathbf{A})\big)$. Par ailleurs, le rang définit un homomorphisme surjectif de semi-anneaux $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} \to \mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$, et les deux homomorphismes $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A}) \to \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} \to \mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ se composent selon l'identité.
Le *groupe de Picard* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ est le sous-ensemble de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ formé par les classes d'isomorphisme des modules projectifs de rang constant 1. D'après

les propositions 3.12 et 3.13 il s'agit du groupe des éléments inversibles du semi-anneau $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ (l'« inverse » de P est le dual de P).
Le monoïde additif (commutatif) de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ n'est pas toujours régulier. Pour obtenir un groupe, on symétrise le monoïde additif $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ et l'on obtient le *groupe de Grothendieck* que l'on note $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$.
La classe du module projectif de type fini P dans $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$ se note $[P]_{\mathsf{K}_0(\mathbf{A})}$, ou $[P]_{\mathbf{A}}$, ou même $[P]$ si le contexte le permet. Tout élément de $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$ s'écrit sous forme $[P]-[Q]$. Plus précisément, il peut se représenter sous les deux formes

- [projectif] - [libre] d'une part,
- [libre] - [projectif] d'autre part.

En effet :

$$[P]-[Q]=[P\oplus P']-[Q\oplus P']=[P\oplus Q']-[Q\oplus Q'],$$

avec au choix $P\oplus P'$ ou $Q\oplus Q'$ libre.
Le produit défini dans $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ donne par passage au quotient un produit dans $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$, qui a donc une structure d'anneau commutatif[6].
Les classes de deux modules projectifs de type fini P et P' sont égales dans $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$ si, et seulement si, il existe un entier k tel que $P\oplus\mathbf{A}^k\simeq P'\oplus\mathbf{A}^k$. On dit dans ce cas que P et P' sont *stablement isomorphes*.
Deux modules quasi libres stablement isomorphes sont isomorphes, de sorte que $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$. Et lorsque P est quasi libre, il n'y a pas conflit entre les deux notations $[P]_{\mathbf{A}}$ (ci-dessus et page 555).
Deux modules projectifs de type fini stablement isomorphes P et P' ont même rang puisque $\mathrm{rg}(P\oplus\mathbf{A}^k)=k+\mathrm{rg}(P)$. En conséquence, le rang (généralisé) des modules projectifs de type fini définit un homomorphisme surjectif d'anneaux $\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}:\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}\to\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$. On note $\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$ son noyau. Les deux homomorphismes $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}\to\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}\to\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ se composent selon l'identité, autrement dit l'application $\mathrm{rg}_{\mathbf{A}}$ est un caractère de la $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$-algèbre $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$ et l'on peut écrire

$$\mathsf{K}_0(\mathbf{A})=\mathsf{H}_0(\mathbf{A})\oplus\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A}).$$

La structure de l'idéal $\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$ de $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$ concentre une bonne part du mystère des classes d'isomorphisme stable des modules projectifs de type fini, puisque $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ ne présente aucun mystère (il est complètement décrypté par $\mathbb{B}(\mathbf{A})$). Dans ce cadre le résultat suivant peut être utile (cf. problème 2).

5.5. Proposition. *L'idéal* $\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$ *est le nilradical de* $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$.

Notons enfin que si $\rho:\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ est un homomorphisme d'anneaux, on obtient des homomorphismes corrélatifs

$$\mathsf{K}_0\,\rho:\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}\to\mathsf{K}_0\,\mathbf{B},\quad \widetilde{\mathsf{K}}_0\,\rho:\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}\to\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{B}\quad\text{et}\quad \mathsf{H}_0\,\rho:\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}\to\mathsf{H}_0\,\mathbf{B}.$$

6. Lorsque l'anneau $\mathbf{A}$ n'est pas commutatif, il n'y a plus de structure multiplicative sur $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$. Cela explique que la terminologie usuelle soit celle de groupe de Grothendieck et non d'anneau de Grothendieck.

Et K_0, $\widetilde{\mathsf{K}}_0$ et H_0 sont des foncteurs.

Le groupe de Picard

Le groupe de Picard n'est pas affecté par le passage aux classes d'isomorphisme stable, en raison du fait suivant.

5.6. Fait. *Deux modules projectifs de rang constant* 1 *stablement isomorphes sont isomorphes. En particulier, un module stablement libre de rang* 1 *est libre. Plus précisément, pour un module P projectif de rang constant* 1 *on a*

$$P \simeq \bigwedge^{k+1}(P \oplus \mathbf{A}^k). \tag{3}$$

En particulier, $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ *s'identifie à un sous-groupe de* $(\mathsf{K}_0\,\mathbf{A})^\times$.

$\mathbb{D}$ Voyons l'isomorphisme : cela résulte des isomorphismes généraux donnés dans la preuve de la proposition 1.2 (équation (1)). Pour des $\mathbf{A}$-modules arbitraires P, Q, R, ..., la considération de la propriété universelle qui définit les puissances extérieures conduit à :

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge^2(P\oplus Q) &\simeq \textstyle\bigwedge^2 P \oplus (P\otimes Q)\oplus \bigwedge^2 Q,\\ \textstyle\bigwedge^3(P\oplus Q\oplus R) &\simeq \textstyle\bigwedge^3 P \oplus \bigwedge^3 Q \oplus \bigwedge^3 R \oplus \big(\bigwedge^2 P\otimes Q\big)\oplus\cdots\oplus(P\otimes Q\otimes R),\end{aligned}$$

avec la formule générale suivante en convenant de $\bigwedge^0(P_i) = \mathbf{A}$

$$\textstyle\bigwedge^k\big(\bigoplus_{i=1}^m P_i\big) \simeq \bigoplus_{\sum_{i=1}^m k_i=k} \Big(\big(\bigwedge^{k_1} P_1\big)\otimes\cdots\otimes\big(\bigwedge^{k_m} P_m\big)\Big). \tag{4}$$

En particulier, si P_1, ..., P_r sont des modules projectifs de rang constant 1 on obtient

$$\textstyle\bigwedge^r(P_1\oplus\cdots\oplus P_r) \simeq P_1\otimes\cdots\otimes P_r. \tag{5}$$

Il reste à appliquer ceci avec la somme directe $P\oplus\mathbf{A}^k = P\oplus\mathbf{A}\oplus\cdots\oplus\mathbf{A}$. L'isomorphisme de l'équation (3) est alors obtenu avec l'application $\mathbf{A}$-linéaire $P\to\bigwedge^{k+1}(P\oplus\mathbf{A}^k)$, $x\mapsto x\wedge 1_1\wedge 1_2\wedge\cdots\wedge 1_k$, où l'indice représente la position dans la somme directe $\mathbf{A}\oplus\cdots\oplus\mathbf{A}$.
La dernière affirmation est alors claire puisque l'on vient de montrer que l'application $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}\to\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$, restreinte à $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$, est injective. □

Remarque. La lectrice pourra comparer le résultat précédent et sa démonstration avec l'exercice V-13. ■

On en déduit le théorème suivant.

5.7. Théorème. ($\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ et $\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$) *Supposons que tout $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant $k+1$ ($k\geqslant 1$) soit isomorphe à un module $\mathbf{A}^k\oplus Q$. Alors*

l'application de $(\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}, \times)$ *dans* $(\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}, +)$ *définie par*

$$[P]_{\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}} \mapsto [P]_{\mathsf{K}_0\mathbf{A}} - 1_{\mathsf{K}_0\mathbf{A}}$$

est un isomorphisme de groupes. En outre, $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} = \mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$ *et sa structure est entièrement connue à partir de celle de* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$.

D L'application est injective par le fait 5.6, et surjective par hypothèse. C'est un homomorphisme de groupe parce que $\mathbf{A} \oplus (P \otimes Q) \simeq P \oplus Q$, également en vertu du fait 5.6, puisque

$$\textstyle\bigwedge^2 \big(\mathbf{A} \oplus (P \otimes Q)\big) \simeq P \otimes Q \simeq \bigwedge^2 (P \oplus Q).$$

□

Notez que la loi de $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ est héritée du produit tensoriel tandis que celle de $\widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$ est héritée de la somme directe. Nous verrons au chapitre XIII que l'hypothèse du théorème est vérifiée pour les anneaux dimension de Krull $\leqslant 1$.

Commentaire. On a vu dans la section 2 comment la structure de $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ découle directement de celle de l'algèbre de Boole $\mathbb{B}(\mathbf{A})$.
Du point de vue des mathématiques classiques l'algèbre de Boole $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ est l'algèbre des ensembles ouverts et fermés dans $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ (l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{A}$ muni d'une topologie convenable, cf. chapitre XIII). Un élément de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ peut donc être vu comme la fonction caractéristique d'un ouvert-fermé de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$. Alors la manière dont on construit $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ à partir de $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ montre que $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ peut être vu comme l'anneau des fonctions à valeurs entières, combinaisons linéaires entières des éléments dans $\mathbb{B}(\mathbf{A})$. Il s'ensuit que $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ s'identifie à l'algèbre des fonctions localement constantes, à valeurs entières, sur $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$. Toujours du point de vue des mathématiques classiques le rang (généralisé) d'un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini P peut être vu comme la fonction (à valeurs dans $\mathbb{N}$) définie sur $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$, de la manière suivante : à un idéal premier $\mathfrak{p}$ on associe le rang du module libre $P_{\mathfrak{p}}$ (sur un anneau local tous les modules projectifs de type fini sont libres). Et l'anneau $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ est bien obtenu simplement en symétrisant le semi-anneau $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$ des rangs de $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini. ■

Groupe de Picard et groupe des classes d'idéaux

Considérons le monoïde multiplicatif des *idéaux fractionnaires de type fini* de l'anneau $\mathbf{A}$, formé par les sous-$\mathbf{A}$-modules de type fini de l'anneau total des fractions $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. Nous noterons ce monoïde $\mathrm{Ifr}\,\mathbf{A}$.
Plus généralement un *idéal fractionnaire* de $\mathbf{A}$ est un sous-$\mathbf{A}$-module $\mathfrak{b}$ de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ tel qu'il existe b régulier dans $\mathbf{A}$ vérifiant $b\,\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}$.
En bref on peut voir $\mathrm{Ifr}\,\mathbf{A}$ comme le monoïde obtenu à partir de celui des idéaux de type fini de $\mathbf{A}$ en forçant l'inversibilité des idéaux principaux engendrés par des éléments réguliers.

Un idéal $\mathfrak{a} \in \operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ est parfois dit *entier* s'il est contenu dans $\mathbf{A}$, auquel cas c'est un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ au sens usuel.
Un idéal $\mathfrak{a}$ arbitraire de $\mathbf{A}$ est inversible comme idéal de $\mathbf{A}$ (au sens de la définition III-8.19) si, et seulement si, c'est un élément inversible dans le monoïde $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$. Inversement tout idéal de $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ inversible dans ce monoïde s'écrit $\mathfrak{a}/b$, où $b \in \mathbf{A}$ est régulier et $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible de $\mathbf{A}$.
Les éléments inversibles de $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ forment un groupe, le *groupe des idéaux fractionnaires inversibles de* $\mathbf{A}$, que nous noterons $\operatorname{Gfr}\mathbf{A}$.
En tant que $\mathbf{A}$-module un idéal fractionnaire inversible est projectif de rang constant 1. Deux idéaux inversibles sont isomorphes en tant que $\mathbf{A}$-modules s'ils sont égaux modulo le sous-groupe des idéaux principaux inversibles (i.e. engendrés par un élément régulier de $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$). On note $\operatorname{Cl}\mathbf{A}$ le groupe quotient, que l'on appelle *groupe des classes d'idéaux inversibles*, ou parfois simplement le *groupe des classes* de $\mathbf{A}$, et l'on obtient une application naturelle bien définie $\operatorname{Cl}\mathbf{A} \to \operatorname{Pic}\mathbf{A}$.
Par ailleurs, considérons un idéal $\mathfrak{a}$ entier et inversible. Puisque $\mathfrak{a}$ est plat, l'application naturelle $\mathfrak{a}\otimes_{\mathbf{A}}\mathfrak{b} \to \mathfrak{a}\mathfrak{b}$ est un isomorphisme, ceci pour n'importe quel idéal $\mathfrak{b}$ (théorème VIII-1.11). Ainsi, l'application $\operatorname{Cl}\mathbf{A} \to \operatorname{Pic}\mathbf{A}$ est un homomorphisme de groupes, et c'est clairement un homomorphisme injectif, donc $\operatorname{Cl}\mathbf{A}$ s'identifie à un sous-groupe de $\operatorname{Pic}\mathbf{A}$.
Ces deux groupes sont souvent identiques comme le montre le théorème suivant, qui résulte des considérations précédentes et du théorème 1.11.

5.8. Théorème. (Modules de rang constant 1 comme idéaux de $\mathbf{A}$)
Supposons que sur $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$ *tout module projectif de rang* 1 *soit libre.*

1. *Tout* $\mathbf{A}$*-module projectif de rang* 1 *est isomorphe à un idéal inversible de* $\mathbf{A}$.
2. *Tout idéal projectif de rang* 1 *est inversible.*
3. *Le groupe des classes d'idéaux inversibles est naturellement isomorphe au groupe de Picard.*

D Le théorème 1.11 montre que tout module projectif de rang 1 est isomorphe à un idéal $\mathfrak{a}$. Il reste donc à voir qu'un tel idéal est inversible. Puisqu'il est localement principal il suffit de montrer qu'il contient un élément régulier. Pour cela on considère un idéal entier $\mathfrak{b}$ isomorphe à l'inverse de $\mathfrak{a}$ dans $\operatorname{Pic}\mathbf{A}$. Le produit de ces deux idéaux est isomorphe à leur produit tensoriel (parce que $\mathfrak{a}$ est plat) donc c'est un module libre, donc c'est un idéal principal engendré par un élément régulier. □

NB : concernant la comparaison de $\operatorname{Pic}\mathbf{A}$ et $\operatorname{Cl}\mathbf{A}$ on trouvera un résultat plus général en exercice 16.

Les semi-anneaux $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A})$, $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}_{\mathrm{red}})$ et $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A})$

Dans ce paragraphe nous utilisons $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, le radical de Jacobson de $\mathbf{A}$, qui est défini page 494. Nous comparons les modules projectifs de type fini définis sur $\mathbf{A}$, ceux définis sur $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ et ceux définis sur $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$.
L'extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ transforme un module projectif de type fini défini sur $\mathbf{A}$ en un module projectif de type fini sur $\mathbf{B}$. Du point de vue matrices de projection, cela correspond à considérer la matrice transformée par l'homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

5.9. Proposition. *L'homomorphisme naturel* $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}) \to \mathsf{GK}_0(\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A})$ *est injectif, ce qui signifie que si deux modules projectifs de type fini E, F sur $\mathbf{A}$ sont isomorphes sur $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, ils le sont également sur $\mathbf{A}$. De manière plus précise, si deux matrices idempotentes P, Q de même format sont conjuguées sur $\mathbf{A}'$, elles le sont également sur $\mathbf{A}$, via un isomorphisme qui relève l'isomorphisme de conjugaison résiduel.*

▷ On note $\overline{x}$ l'objet x vu modulo $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$. Soit $C \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ une matrice telle que $\overline{C}$ conjugue $\overline{P}$ à $\overline{Q}$. Puisque $\det C$ est inversible modulo $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, $\det C$ est inversible dans $\mathbf{A}$ et $C \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$. On a donc $\overline{Q} = \overline{C\,P\,C^{-1}}$. Quitte à remplacer P par $C\,P\,C^{-1}$ on peut supposer $\overline{Q} = \overline{P}$ et $\overline{C} = \mathrm{I}_n$. Dans ce cas on cherche une matrice inversible A telle que $\overline{A} = \mathrm{I}_n$ et $APA^{-1} = Q$.
On remarque que QP code une application $\mathbf{A}$-linéaire de $\mathrm{Im}\,P$ vers $\mathrm{Im}\,Q$ qui donne résiduellement l'identité. De même $(\mathrm{I}_n - Q)(\mathrm{I}_n - P)$ code une application $\mathbf{A}$-linéaire de $\mathrm{Ker}\,P$ vers $\mathrm{Ker}\,Q$ qui donne résiduellement l'identité. En s'inspirant du lemme d'élargissement V-2.10 ceci nous conduit à la matrice $A = QP + (\mathrm{I}_n - Q)(\mathrm{I}_n - P)$ qui réalise $AP = QP = QA$ et $\overline{A} = \mathrm{I}_n$, donc A est inversible et $APA^{-1} = Q$.
Pour deux modules projectifs de type fini résiduellement isomorphes E et F on utilise le lemme d'élargissement qui permet de réaliser $\overline{E}$ et $\overline{F}$ comme images de matrices idempotentes de même format conjuguées. □

Pour ce qui concerne la réduction modulo les nilpotents, on obtient en plus la possibilité de relever tout module projectif de type fini en raison du corollaire III-10.4. D'où le théorème qui suit.

5.10. Théorème. *L'homomorphisme naturel* $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}) \to \mathsf{GK}_0(\mathbf{A}_{\mathrm{red}})$ *est un isomorphisme. De manière plus précise, on a les résultats suivants.*

1. a. *Toute matrice idempotente sur $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ se relève en une matrice idempotente sur $\mathbf{A}$.*
   b. *Tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ provient d'un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}$.*
2. a. *Si deux matrices idempotentes de même format sont conjuguées sur $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$, elles le sont également sur $\mathbf{A}$, via un isomorphisme qui relève l'isomorphisme de conjugaison résiduel.*

b. Deux modules projectifs de type fini sur $\mathbf{A}$ *isomorphes sur* $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ *le sont également sur* $\mathbf{A}$.

Le carré de Milnor

Un carré commutatif (dans une catégorie arbitraire) du style suivant

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i_2} & A_2 \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_2} \\ A_1 & \xrightarrow{j_1} & A' \end{array}$$

est appelé un *carré cartésien* s'il définit (A, i_1, i_2) comme la limite projective de (A_1, j_1, A'), (A_2, j_2, A'). Dans une catégorie équationnelle on peut prendre

$$A = \{\, (x_1, x_2) \in A_1 \times A_2 \mid j_1(x_1) = j_2(x_2) \,\}.$$

Le lecteur vérifiera par exemple qu'étant donné $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ et $\mathfrak{f}$ un idéal de $\mathbf{A}$ qui est aussi un idéal de $\mathbf{B}$ (autrement dit, $\mathfrak{f}$ est contenu dans le conducteur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$), on a un carré cartésien d'anneaux commutatifs, défini ci-dessous :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{B} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{A}/\mathfrak{f} & \longrightarrow & \mathbf{B}/\mathfrak{f} \end{array}$$

Soit un homomorphisme $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, M un $\mathbf{A}$-module et N un $\mathbf{B}$-module. Rappelons qu'une application $\mathbf{A}$-linéaire $\alpha : M \to N$ est un *morphisme d'extension des scalaires* (cf. définition IV-4.10) si, et seulement si, l'application $\mathbf{B}$-linéaire naturelle $\rho_\star(M) \to N$ est un isomorphisme.
Dans tout ce paragraphe nous considérons dans la catégorie des anneaux commutatifs le « carré de Milnor » ci-dessous à gauche, noté $\mathcal{A}$, dans lequel j_2 est surjective,

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \xrightarrow{i_2} & \mathbf{A}_2 \\ \downarrow{\scriptstyle i_1} & \textcircled{\mathcal{A}} & \downarrow{\scriptstyle j_2} \\ \mathbf{A}_1 & \xrightarrow{j_1} & \mathbf{A}' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\psi_2} & M_2 \\ \downarrow{\scriptstyle \psi_1} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_2} \\ M_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & M' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E_2 \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle j_{2\star}} \\ E_1 & \xrightarrow{h \circ j_{1\star}} & E' \end{array}$$

Étant donnés un $\mathbf{A}$-module M, un $\mathbf{A}_1$-module M_1, un $\mathbf{A}_2$-module M_2, un $\mathbf{A}'$-module M' et un carré cartésien de $\mathbf{A}$-modules comme ci-dessus au centre, ce dernier est dit *adapté à* $\mathcal{A}$, si les ψ_i et φ_i sont des morphismes d'extension des scalaires.
Étant donnés un $\mathbf{A}_1$-module E_1, un $\mathbf{A}_2$-module E_2, et un isomorphisme d'$\mathbf{A}'$-modules

$$h : j_{1\star}(E_1) \to j_{2\star}(E_2) = E',$$

nous notons $M(E_1, h, E_2) = E$ (ci-dessus à droite) le $\mathbf{A}$-module limite projective de

$$\big(E_1, h \circ j_{1\star}, j_{2\star}(E_2)\big), \big(E_2, j_{2\star}, j_{2\star}(E_2)\big)$$

Notons qu'a priori le carré cartésien obtenu n'est pas nécessairement adapté à $\mathcal{A}$.

5.11. Théorème. (Théorème de Milnor)

1. *On suppose que E_1 et E_2 sont projectifs de type fini, alors :*
   a. *E est projectif de type fini,*
   b. *le carré cartésien est adapté à $\mathcal{A}$: les homomorphismes naturels $j_{k\star}(E) \to E_k$ $(k = 1, 2)$ sont des isomorphismes.*
2. *Tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}$ est obtenu (à isomorphisme près) par ce procédé.*

Nous aurons besoin du lemme suivant.

5.12. Lemme. *Soient $A \in \mathbf{A}^{m\times n}$, $A_k = i_k(A)$ $(k = 1, 2)$, $A' = j_1(A_1) = j_2(A_2)$, $K = \operatorname{Ker} A \subseteq \mathbf{A}^n$, $K_i = \operatorname{Ker} A_i$ $(i = 1, 2)$, $K' = \operatorname{Ker} A'$. Alors K est la limite projective (comme $\mathbf{A}$-module) de $K_1 \to K'$ et $K_2 \to K'$.*

▷ Soient $x \in \mathbf{A}^n$, $x_1 = j_{1\star}(x) \in \mathbf{A}_1^n$, $x_2 = j_{2\star}(x) \in \mathbf{A}_2^n$. Puisque $x \in K$ si, et seulement si, $x_i \in K_i$ pour $i = 1, 2$, K est bien la limite projective convoitée. □

La lectrice remarquera que le lemme ne s'appliquerait pas en général pour les sous-modules images des matrices.

Démonstration du théorème 5.11. 2. Si $V \oplus W = \mathbf{A}^n$, soit P la matrice de projection sur V parallèlement à W. Si V_1, V_2, V' sont les modules obtenus par extension des scalaires à $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ et $\mathbf{A}'$, ils s'identifient aux noyaux des matrices $P_1 = i_1(\mathrm{I}_n - P)$, $P_2 = i_2(\mathrm{I}_n - P)$, $P' = j_2(\mathrm{I}_n - P_2) = j_1(\mathrm{I}_n - P_1)$, et le lemme s'applique : V est la limite projective de $V_1 \to V'$ et $V_2 \to V'$. L'isomorphisme h est alors $\mathrm{Id}_{V'}$. Ce « miracle » se produit grâce à l'identification de $j_{i\star}(V_i)$ et $\operatorname{Ker} P_i$.

1a. Soit $P_i \in \mathbb{M}_{n_i}(\mathbf{A}_i)$ un projecteur d'image isomorphe à E_i $(i = 1, 2)$. On dispose d'un isomorphisme d'$\mathbf{A}'$-modules de $\operatorname{Im}\big(j_1(P_1)\big) \in \mathbb{M}_{n_1}(\mathbf{A}')$ vers $\operatorname{Im}\big(j_2(P_2)\big) \in \mathbb{M}_{n_2}(\mathbf{A}')$. Notons $n = n_1 + n_2$. D'après le lemme d'élargissement V-2.10 il existe une matrice $C \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}')$ réalisant la conjugaison

$$\operatorname{Diag}(j_1(P_1), 0_{n_2}) = C \ \operatorname{Diag}\big(0_{n_1}, j_2(P_2)\big)\ C^{-1}.$$

Puisque j_2 est surjective (ah ah !), C se relève en une matrice $C_2 \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_2)$. Posons

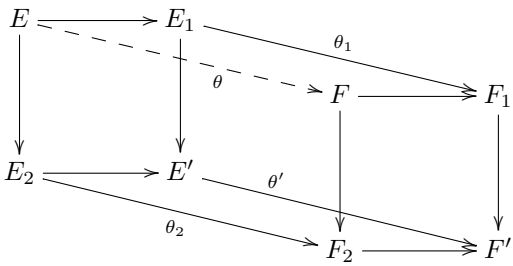
$$Q_1 = \operatorname{Diag}(P_1, 0_{n_2}),\ \ Q_2 = C_2 \operatorname{Diag}(0_{n_1}, P_2)\, C_2^{-1},$$

de sorte que $j_1(Q_1) = j_2(Q_2)$ (pas mal, n'est-ce pas). Il existe alors une unique matrice $Q \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $i_1(Q) = Q_1$ et $i_2(Q) = Q_2$. L'unicité

de Q assure $Q^2 = Q$, et le lemme précédent s'applique pour montrer que $\operatorname{Im} Q$ est isomorphe à E (chapeau, M. Milnor !).
1b. Résulte du fait que $Q_k = i_k(Q)$ et $\operatorname{Im} Q_k \simeq \operatorname{Im} P_k \simeq E_k$ pour $k = 1, 2$.□

Le fait suivant est purement catégorique et abandonné à la bonne volonté du lecteur.

5.13. Fait. *Étant donné deux carrés cartésiens adaptés à $\mathcal{A}$ comme ci-dessous, il revient au même de se donner une application linéaire θ de E vers F ou de se donner trois applications linéaires (pour les anneaux correspondants) $\theta_1 : E_1 \to F_1$, $\theta_2 : E_2 \to F_2$ et $\theta' : E' \to F'$ qui rendent les carrés adéquats commutatifs.*



5.14. Corollaire.
On considère deux modules $E = M(E_1, h, E_2)$ et $F = M(F_1, k, F_2)$ comme dans le théorème 5.11. Tout homomorphisme ψ de E dans F est obtenu à l'aide de deux homomorphismes de $\mathbf{A}_i$-modules $\psi_i : E_i \to F_i$ compatibles avec h et k en ce sens que le diagramme ci-dessous est commutatif. L'homomorphisme ψ est un isomorphisme si, et seulement si, ψ_1 et ψ_2 sont des isomorphismes.

$$\begin{array}{ccc} j_{1\star}(E_1) & \xrightarrow{j_{1\star}(\psi_1)} & j_{1\star}(F_1) \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle k} \\ j_{2\star}(E_2) & \xrightarrow{j_{2\star}(\psi_2)} & j_{2\star}(F_2) \end{array}$$

6. Un exemple non trivial : identification de points sur la droite affine

Préliminaires

On considère un anneau commutatif $\mathbf{k}$, la droite affine sur $\mathbf{k}$ *correspond à* la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[t] = \mathbf{B}$. Étant donné s points $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ de $\mathbf{k}$ et des ordres de multiplicité $e_1, \ldots, e_s \geqslant 1$, on définit formellement une $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ qui représente le résultat de l'identification de ces points avec les multiplicités

données.

$$\mathbf{A} = \left\{ f \in \mathbf{B} \;\middle|\; f(\alpha_1) = \cdots = f(\alpha_s),\ f^{[\ell]}(\alpha_i) = 0,\ \ell \in [\![1, e_i]\!],\ i \in [\![1..s]\!] \right\}$$

Dans cette définition $f^{[\ell]}$ représente la *dérivée de Hasse* du polynôme $f(t)$ c'est-à-dire $f^{[\ell]} = f^{(\ell)}/\ell!$ (formellement, car la caractéristique peut être finie). Les dérivées de Hasse permettent d'écrire une formule de Taylor pour n'importe quel anneau $\mathbf{k}$.
On pose $e = \sum_i e_i$, $x_0 = \prod_i (t-\alpha_i)^{e_i}$ et $x_\ell = t^\ell\, x_0$ pour $\ell \in [\![0..e-1]\!]$. On suppose $e > 1$ sans quoi $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. Il est clair que les x_ℓ sont dans $\mathbf{A}$.
On suppose aussi que les $\alpha_i - \alpha_j$ sont inversibles pour $i \neq j$. On a alors par le théorème chinois un homomorphisme surjectif

$$\varphi : \mathbf{B} \to \textstyle\prod_i \left(\mathbf{k}[t]/\langle (t-\alpha_i)^{e_i} \rangle\right)$$

dont le noyau est le produit des idéaux principaux $(t-\alpha_i)^{e_i}\mathbf{B}$, c'est-à-dire l'idéal $x_0\mathbf{B}$.

6.1. Lemme.

1. $\mathbf{A}$ *est une* $\mathbf{k}$*-algèbre de type fini, plus précisément :* $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{e-1}]$.
2. $\mathbf{B} = \mathbf{A} \oplus \bigoplus_{1 \leqslant \ell < e} \mathbf{k}\, t^\ell$ *en tant que* $\mathbf{k}$*-module.*
3. *Le conducteur de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$, $\mathfrak{f} = (\mathbf{A} : \mathbf{B})$ *est donné par*

$$\mathfrak{f} = \langle x_0 \rangle_{\mathbf{B}} = \langle x_0, \ldots, x_{e-1} \rangle_{\mathbf{A}}\,.$$

▷ Soit $f \in \mathbf{B}$, on l'écrit « en base x_0 », $f = r_0 + r_1 x_0 + r_2 x_0^2 + \cdots$ avec $\deg r_i < \deg x_0 = e$. Pour $i \geqslant 1$, en écrivant $r_i x_0^i = (r_i\, x_0) x_0^{i-1}$ on voit que $r_i x_0^i \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{e-1}]$. Ceci prouve que

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{e-1}] + \left(\textstyle\bigoplus_{1 \leqslant \ell < e} \mathbf{k}\, t^\ell \right).$$

Soit $f \in \mathbf{A}$ que l'on écrit $g + h$ dans la décomposition précédente. On a donc h dans $\mathbf{A}$, et si β est la valeur commune des $h(\alpha_i)$, on obtient l'égalité $\varphi(h - \beta) = 0$. Donc $h - \beta \in x_0\mathbf{B}$, et puisque $h \in \bigoplus_{1 \leqslant \ell < e} \mathbf{k}\, t^\ell$ (le $\mathbf{k}$-module des polynômes de degré $< e$ et sans terme constant), on obtient $h - \beta = 0$ puis $h = \beta = 0$, donc $f \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{e-1}]$.
En conclusion $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{e-1}]$, les points *1* et *2* sont démontrés.
En multipliant l'égalité du point *2* par x_0 on obtient

$$x_0\mathbf{B} = x_0\, \mathbf{A} \;\oplus\; \textstyle\bigoplus_{\ell \in [\![1..e-1]\!]} x_\ell\, \mathbf{k},$$

puis l'égalité $x_0\, \mathbf{B} = \langle x_0, \ldots, x_{e-1} \rangle_{\mathbf{A}}$, ce qui implique $x_0\, \mathbf{B} \subseteq \mathfrak{f}$. Soit enfin $f \in \mathfrak{f}$, et donc $f \in \mathbf{A}$, et $f = \lambda + g$ avec $\lambda \in \mathbf{k}$ et $g \in \langle x_0, \ldots, x_{e-1} \rangle_{\mathbf{A}}$. On en déduit que $\lambda \in \mathfrak{f}$, ce qui implique $\lambda = 0$: en effet, $\lambda t \in \mathbf{A}$, si β est la valeur commune des $\lambda\alpha_i$, on a $\varphi(\lambda t - \beta) = 0$, donc $\lambda t - \beta \in x_0\, \mathbf{B}$, et puisque x_0 est un polynôme unitaire de degré $\geqslant 2$, $\lambda = 0$. □

Un carré de Milnor

Dans la situation décrite dans le paragraphe précédent on a le carré de Milnor suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{B}=\mathbf{k}[t] \\ \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \mathbf{k}=\mathbf{A}/\mathfrak{f} & \xrightarrow{\Delta} & \mathbf{B}/\mathfrak{f} \simeq \prod_i (\mathbf{k}[t]/\langle (t-\alpha_i)^{e_i}\rangle) \end{array}$$

Dans la suite nous nous intéressons aux $\mathbf{A}$-modules projectifs de rang constant r obtenus en recollant le $\mathbf{B}$-module $\mathbf{B}^r$ et le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{k}^r$ à l'aide d'un $(\mathbf{B}/\mathfrak{f})$-isomorphisme

$$h : \Delta_\star(\mathbf{k}^r) \to \varphi_\star(\mathbf{B}^r),$$

comme décrit avant le théorème 5.11.

Nous avons noté $M(\mathbf{k}^r, h, \mathbf{B}^r)$ un tel $\mathbf{A}$-module.

En fait, $\Delta_\star(\mathbf{k}^r)$ et $\varphi_\star(\mathbf{B}^r)$ s'identifient tous les deux à $(\mathbf{B}/\mathfrak{f})^r$, et l'isomorphisme h s'identifie à un élément de

$$\mathbb{GL}_r(\mathbf{B}/\mathfrak{f}) \simeq \textstyle\prod_{i=1}^s \mathbb{GL}_r(\mathbf{k}[t]/\langle (t-\alpha_i)^{e_i}\rangle).$$

Nous utiliserons ces identifications dans la suite sans plus les mentionner, et, pour des raisons de commodité, nous coderons h^{-1} (et non pas h) par les s matrices H_i correspondantes (avec $H_i \in \mathbb{GL}_r(\mathbf{k}[t]/\langle (t-\alpha_i)^{e_i}\rangle)$). Et le module $M(\mathbf{k}^r, h, \mathbf{B}^r)$ sera noté $M(H_1, \ldots, H_s)$.

Dans le cas où les modules projectifs de rang constant sur $\mathbf{k}$ et $\mathbf{B} = \mathbf{k}[t]$ sont toujours libres, le théorème de Milnor affirme que l'on obtient ainsi (à isomorphisme près) tous les modules projectifs de rang constant r sur $\mathbf{A}$.

Dans le paragraphe qui suit nous donnons une description complète de la catégorie des modules projectifs de rang constant sur $\mathbf{A}$ obtenus par de tels recollements, dans un cas particulier. Celui où toutes les multiplicités sont égales à 1.

Identification de points sans multiplicités

On applique maintenant les conventions précédentes en supposant que les multiplicités e_i sont toutes égales à 1.

6.2. Théorème. *Avec les conventions précédentes.*

1. *Le module $M(H_1, \ldots, H_s)$, (avec $H_i \in \mathbb{GL}_r(\mathbf{k}[t]/\langle t-\alpha_i\rangle) \simeq \mathbb{GL}_r(\mathbf{k})$) s'identifie au sous-$\mathbf{A}$-module $M'(H_1, \ldots, H_s)$ de $\mathbf{B}^r$ constitué des éléments f de $\mathbf{B}^r$ tels que*

$$\forall 1 \leqslant i < j \leqslant s, \;\; H_i \cdot f(\alpha_i) = H_j \cdot f(\alpha_j).$$

En particulier, $M'(H_1, \ldots, H_s) = M'(HH_1, \ldots, HH_s)$ si $H \in \mathbb{GL}_r(\mathbf{k})$.

2. *Soient, pour* $i \in [\![1..s]\!]$,

$$G_i \in \mathbb{GL}_{r_1}(\mathbf{k}[t]/\langle t-\alpha_i\rangle) \simeq \mathbb{GL}_{r_1}(\mathbf{k}) \quad \textit{et}$$
$$H_i \in \mathbb{GL}_{r_2}(\mathbf{k}[t]/\langle t-\alpha_i\rangle) \simeq \mathbb{GL}_{r_2}(\mathbf{k}).$$

Une application $\mathbf{A}$*-linéaire* ϕ *de* $M(G_1,\dots,G_s)$ *vers* $M(H_1,\dots,H_s)$ *peut être codée par une matrice* $\Phi \in \mathbf{B}^{r_2\times r_1}$ *vérifiant, pour* $1 \leqslant i < j \leqslant s$,

$$H_i \cdot \Phi(\alpha_i) \cdot G_i^{-1} = H_j \cdot \Phi(\alpha_j) \cdot G_j^{-1}. \tag{6}$$

Une telle matrice envoie $M'(G_1,\dots,G_s)$ *dans* $M'(H_1,\dots,H_s)$*. L'application* $\mathbf{A}$*-linéaire* ϕ *est un isomorphisme si, et seulement si,* $r_1 = r_2$ *et les* $\Phi(\alpha_i)$ *sont inversibles.*

D Le premier point n'a pas d'incidence sur les résultats qui suivent, et il est laissé à la lectrice. Le deuxième point est un conséquence immédiate du lemme 5.12 et du corollaire 5.14. □

Dans le théorème qui suit on suppose que :
- — $\mathbf{k}$ est réduit,
- — les modules projectifs de rang constant sur $\mathbf{k}[t]$ sont tous libres,
- — les matrices carrées de déterminant 1 sont produits de matrices élémentaires, i.e. $\mathbb{SL}_n(\mathbf{k}) = \mathbb{E}_n(\mathbf{k})$ pour tout n.

Par exemple $\mathbf{k}$ peut être un corps discret, un anneau zéro-dimensionnel réduit ou un anneau euclidien intègre. Notez aussi que si les modules projectifs de rang constant sur $\mathbf{k}[t]$ sont libres, c'est a fortiori vrai des modules projectifs de rang constant sur $\mathbf{k}$.

6.3. Théorème. *Pour* $a \in \mathbf{k}$ *notons* $J_{r,a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Diag}(1,\dots,1,a) \in \mathbb{M}_r(\mathbf{k})$*. Sous les hypothèses précédentes on obtient la classification complète des modules projectifs de rang constant sur l'anneau* $\mathbf{A}$ *(on utilise les notations et conventions précédentes).*

1. *Les modules de rang constant* $M(H_1,\dots,H_s)$ *et* $M(G_1,\dots,G_s)$ *sont isomorphes si, et seulement si,* $\det(H_j^{-1}\cdot H_1) = \det(G_j^{-1}\cdot G_1)$ *pour tout* j*.*

2. *Tout* $\mathbf{A}$*-module projectif de rang constant* r *est isomorphe à un unique module*

$$M_r(a_2,\dots,a_s) \stackrel{\text{def}}{=} M(\mathrm{I}_r, J_{r,a_2},\dots,J_{r,a_s}),$$

où les a_i *sont dans* $\mathbf{k}^\times$*. En outre :*

$$M_r(a_2,\dots,a_s) \simeq \mathbf{A}^{r-1} \oplus M_1(a_2,\dots,a_s).$$

3. Enfin la structure de $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ *est précisée par*

$$M_1(a_2,\dots,a_s)\otimes M_1(b_2,\dots,b_s)\ \simeq\ M_1(a_2b_2,\dots,a_sb_s)$$
$$M_1(a_2,\dots,a_s)\oplus M_1(b_2,\dots,b_s)\ \simeq\ \mathbf{A}\oplus M_1(a_2b_2,\dots,a_sb_s)$$

En particulier, $\mathsf{Pic}(\mathbf{A})\simeq(\mathbf{k}^\times)^{s-1}$.

▷ *1.* En cas d'isomorphisme toutes les matrices dans les équations (6) sont inversibles, et il revient au même de demander

$$H_j^{-1}\cdot H_1\cdot\Phi(\alpha_1)\cdot G_1^{-1}\cdot G_j=\Phi(\alpha_j)$$

pour $j\in[\![2..s]\!]$. Puisque $\Phi=\Phi(t)$ est inversible, son déterminant est un élément inversible de $\mathbf{k}[t]$, donc de $\mathbf{k}$, et tous les $\det\Phi(\alpha_i)$ sont égaux à $\det\Phi$. En conséquence les deux modules ne peuvent être isomorphes que si

$$\det(H_j^{-1}\cdot H_1)=\det(G_j^{-1}\cdot G_1)$$

pour tout j (ceci prouve en particulier l'unicité de la suite $a_2,\dots,a_s$ lorsque $M_r(a_2,\dots,a_s)$ est isomorphe à un module projectif de rang constant donné). Inversement si cette condition est satisfaite, on peut trouver une matrice élémentaire Φ qui réalise les conditions ci-dessus. Il suffit en effet d'avoir

$$\Phi(\alpha_1)=\mathrm{I}_r\ \text{et}\ \Phi(\alpha_j)=H_j^{-1}\cdot H_1\cdot G_1^{-1}\cdot G_j,$$

ce que l'on obtient en appliquant le lemme qui suit.
La fin est laissée au lecteur. Rappel : si $Q=P_1\oplus P_2\simeq\mathbf{A}\oplus P$ (les P_i projectifs de rang constant 1), on a $P\simeq\bigwedge^2_{\mathbf{A}}Q\simeq P_1\otimes_{\mathbf{A}}P_2$. □

6.4. Lemme. *Soient* $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_s$ *dans un anneau commutatif* $\mathbf{k}$ *avec les différences* $\alpha_i-\alpha_j$ *inversibles pour* $i\neq j$.
Étant données $A_1,\ \dots,\ A_s\in\mathbb{E}_r(\mathbf{k})$, *il existe une matrice* $A\in\mathbb{E}_r(\mathbf{k}[t])$ *telle que* $A(\alpha_i)=A_i$ *pour chaque* i.

▷ Si une matrice $A\in\mathbb{E}_r(\mathbf{k}[t])$ s'évalue en s matrices $A_1,\ \dots,\ A_s$, et une matrice $B\in\mathbb{E}_r(\mathbf{k}[t])$ s'évalue en s matrices $B_1,\ \dots,\ B_s$, alors AB s'évalue en $A_1B_1,\ \dots,\ A_sB_s$. En conséquence, il suffit de prouver le lemme lorsque les A_i sont toutes égales à I_r sauf une qui est une matrice élémentaire. Dans ce cas on peut faire une interpolation à la Lagrange puisque les éléments $\alpha_i-\alpha_j$ sont inversibles. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées à la lectrice, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

— Démontrer les propositions 1.8 et 1.9.
— Vérifier les équivalences dans la proposition 2.5 *3.*
— Vérifier le corollaire 3.9.
— Vérifier les faits 4.7 et 4.8

Exercice 2. Vérifier les calculs dans le deuxième lemme de la liberté locale 4.4.

Exercice 3. *(Formule magique pour diagonaliser une matrice de projection)*
Soit un entier n fixé. Si $\alpha \in \mathcal{P}_n$ (ensemble des parties finies de $[\![1..n]\!]$), on considère le projecteur canonique obtenu à partir de I_n en annulant les éléments diagonaux dont l'indice n'appartient pas à α. Nous le notons I_α. Soit $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ un projecteur, on va expliciter une famille (F_α) indexée par $\mathcal{P}_n$ de matrices vérifiant les « conjugaisons »

$$FF_\alpha = F_\alpha \mathrm{I}_\alpha \tag{$\dagger$}$$

ainsi que l'identité algébrique

$$\sum\nolimits_\alpha \det F_\alpha = 1 \tag{$\ddagger$}$$

Ce résultat fournit une nouvelle méthode uniforme pour expliciter la liberté locale d'un module projectif de type fini : on prend les localisations en les éléments comaximaux $\det(F_\alpha)$, puisque sur l'anneau $\mathbf{A}[1/\det(F_\alpha)]$ on a $F_\alpha^{-1} F F_\alpha = \mathrm{I}_\alpha$. Nous allons voir que ceci est réalisé par la famille définie comme suit :

$$F_\alpha = F\,\mathrm{I}_\alpha + (\mathrm{I}_n - F)(\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_\alpha).$$

Par exemple si $\alpha = [\![1..k]\!]$, on a les décompositions par blocs suivantes

$$\mathrm{I}_\alpha = \mathrm{I}_{k,n} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{bmatrix}, \quad F_\alpha = \begin{bmatrix} F_1 & -F_2 \\ F_3 & \mathrm{I}_{n-k} - F_4 \end{bmatrix}.$$

1. Montrer ($\ddagger$). Indication : pour deux matrices carrées A et B d'ordre n, on développe le déterminant $\det(A+B)$ comme fonction multilinéaire des colonnes de $A+B$. On obtient une somme de 2^n déterminants de matrices obtenues en mélangeant des colonnes de A et des colonnes de B. On applique cette remarque avec $A = F$ et $B = \mathrm{I}_n - F$.

2. Si f et e sont deux idempotents dans un anneau non nécessairement commutatif, et si l'on note $f * e = fe + (1-f)(1-e)$, montrer que $f(f*e) = fe = (f*e)e$. Avec $f = F$ et $e = \mathrm{I}_\alpha$, on obtient $f * e = F_\alpha$ ce qui donne l'égalité ($\dagger$) ci-dessus.

3. Nous étudions maintenant quelques égalités qui font intervenir $\det F_\alpha$. On note β le complémentaire de α
   - Montrer que $(1-2f)(1-e-f) = (1-e-f)(1-2e) = f*e$
   - Montrer que $(1-2e)^2 = (1-2f)^2 = 1$.
   - Avec $f = F$ et $e = \mathrm{I}_\alpha$, on obtient $(\det F_\alpha)^2 = \big(\det(\mathrm{I}_\beta - F)\big)^2$.
   - Vérifier que $(1-e)f(1-e) + e(1-f)e = (e-f)^2$.
   - Si l'on note μ_α le mineur principal extrait de F sur les indices appartenant à α, et μ'_β le mineur principal extrait de $\mathrm{I} - F$ sur les indices appartenant à β montrer que $(\det F_\alpha)^2 = \mu_\alpha \mu'_\beta$.
     Indication : pour l'exemple ci-dessus avec $f = F$ et $e = \mathrm{I}_\beta$ l'égalité dans le point précédent donne

$$\begin{bmatrix} F_1 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_{n-k} - F_4 \end{bmatrix} = (\mathrm{I}_\beta - F)^2$$

NB. Cette méthode uniforme de diagonalisation des matrices de projection donne un raccourci pour le lemme de la liberté locale et pour le théorème de structure qui affirme qu'un module projectif de type fini est localement libre au sens fort. Nous avons pris la peine de démontrer ce théorème de structure deux fois. Une fois par les idéaux de Fitting dans le chapitre V, une autre fois de façon plus structurelle, dans le chapitre présent. Nous espérons que le lecteur ne nous en voudra pas de lui avoir fait subir des preuves nettement moins élémentaires dans le cours que celle de l'exercice 3. C'est que les formules magiques sont certainement une bonne chose, mais qu'elles cachent parfois la signification profonde de preuves plus élaborées.

Exercice 4. *(Généralisation de l'exercice précédent à la diagonalisation de matrices annulant un polynôme séparable scindé)*
Soient a, b, $c \in \mathbf{A}$ tels que $(a-b)(a-c)(b-c) \in \mathbf{A}^\times$, i.e., le polynôme

$$f(T) = (T-a)(T-b)(T-c)$$

est séparable, et $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ une matrice telle que $f(A) = 0$. On considère les polynômes de Lagrange $f_a(T) = \frac{(T-b)(T-c)}{(a-b)(a-c)}$, ... qui vérifient $f_a + f_b + f_c = 1$. On pose $A_a = f_a(A)$, $A_b = f_b(A)$, $A_c = f_c(A)$.

1. Montrer que $AA_a = aA_a$, i.e., tout vecteur colonne C de A_a vérifie $AC = aC$.
2. En déduire que si une matrice P a pour vecteurs colonnes des vecteurs colonnes de A_a ou A_b ou A_c, alors $AP = PD$, où D est une matrice diagonale avec pour éléments diagonaux, a, b ou c.
3. En écrivant $1 = \det(\mathrm{I}_n) = \det(A_a + A_b + A_c)$ et en utilisant la multilinéarité du déterminant comme fonction des vecteurs colonnes, montrer qu'il existe 3^n matrices P_i qui vérifient :
   — $\sum_i \det(P_i) = 1$
   — Dans $\mathbf{A}[1/\det(P_i)]$, la matrice A est semblable à une matrice diagonale avec pour éléments diagonaux, a, b ou c.
4. Si le polynôme caractéristique de A est égal à $(T-a)^m(T-b)^p(T-c)^q$, montrer que de nombreuses matrices P_i sont nulles et que la somme $\sum_i \det(P_i) = 1$ peut être restreinte à une famille de matrices indexée par un ensemble fini ayant $\frac{(m+p+q)!}{m!p!q!}$ éléments.

Exercice 5. *(Jacobienne du système $P^2 - P = 0$)*
Soit l'application $\mathbb{M}_n(\mathbf{A}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ définie par $P \mapsto P^2 - P$. Sa différentielle en un point $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ est

$$\varphi_P : \mathbb{M}_n(\mathbf{A}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{A}),\ H \mapsto HP + PH - H.$$

Si l'on identifie $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}^{n^2}$, φ_P est donné par la matrice jacobienne au point P des n^2 équations $P^2 - P = 0$.
En considérant

$$\mathbf{A} = \mathbf{G}_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[(X_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}]\big/\big\langle P^2 - P\big\rangle \text{ avec } P = (X_{ij}),$$

d'après le théorème 4.9, l'espace tangent du schéma affine $\mathbb{GA}_n$ au point P s'identifie canoniquement à

$$\operatorname{Ker}\varphi_P = \{\, H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}) \mid HP + PH = H \,\} = \operatorname{Im}\pi_P,$$

où $\pi_P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ est le projecteur défini par

$$\pi_P(H) = PH(\mathrm{I}_n - P) + (\mathrm{I}_n - P)HP = PH + HP - 2PHP.$$

Ceci amène à étudier les relations entre φ_P et π_P. Illustrer ce qui est affirmé concernant la matrice jacobienne et l'identification de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}^{n^2}$ pour $n = 2$.
En général montrer les égalités

$$\varphi_P \circ \pi_P = \pi_P \circ \varphi_P = 0,\ \ (\varphi_P)^2 = \mathrm{I}_n - \pi_P,\ \ (\varphi_P)^3 = \varphi_P,$$
$$\mathrm{Ker}\,\varphi_P = \mathrm{Ker}(\varphi_P)^2 = \mathrm{Im}\,\pi_P \ \text{ et } \ \mathrm{Im}\,\varphi_P = \mathrm{Im}(\varphi_P)^2 = \mathrm{Ker}\,\pi_P.$$

Exercice 6. Démontrer la caractérisation locale suivante des modules projectifs de type fini fidèles. Pour un $\mathbf{A}$-module P, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(*a*) P est projectif de type fini et fidèle.

(*b*) Il existe des éléments comaximaux s_i de $\mathbf{A}$ tels que chaque P_{s_i} est libre de rang $h \geqslant 1$ sur $\mathbf{A}_{s_i} = \mathbf{A}[1/s_i]$.

(*c*) P est projectif de type fini et pour tout élément s de $\mathbf{A}$, si P_s est libre sur l'anneau $\mathbf{A}_s$, il est de rang $h \geqslant 1$.

Exercice 7. Soit $\varphi : P \to Q$ une application $\mathbf{A}$-linéaire entre modules projectifs de type fini et $r \in \mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$. Exprimer $\mathrm{rg}(P) \leqslant r$ et $\mathrm{rg}(P) \geqslant r$ en termes des idéaux déterminantiels d'une matrice de projection ayant pour image P.

Exercice 8. *(Droite projective et fractions rationnelles)*
1. Soit $\mathbf{k}$ un anneau, P, $Q \in \mathbf{k}[u, v]$ deux polynômes homogènes de degrés p et q. On définit :

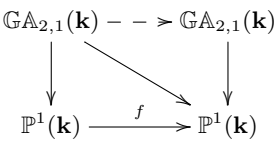
$$g(t) = P(t, 1), \quad \widetilde{g}(t) = P(1, t), \quad h(t) = Q(t, 1), \quad \widetilde{h}(t) = Q(1, t)$$

a. Montrer que $\mathrm{Res}(g, p, h, q) = (-1)^{pq}\mathrm{Res}(\widetilde{g}, p, \widetilde{h}, q)$, que l'on notera $\mathrm{Res}(P, Q)$.

b. Montrer l'inclusion :

$$\mathrm{Res}(P, Q)\,\langle u, v\rangle^{p+q-1} \subseteq \langle P, Q\rangle$$

2. On rappelle que $\mathbb{GA}_{2,1}(\mathbf{k})$ est la partie de $\mathbb{GA}_2(\mathbf{k})$ formée par les projecteurs de rang 1 ; on a une projection $F \mapsto \mathrm{Im}\,F$ de $\mathbb{GA}_{2,1}(\mathbf{k})$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$.
Lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret et $f \in \mathbf{k}(t)$ une fraction rationnelle, on associe à f le « morphisme », noté encore f, $\mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \xrightarrow{f} \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$, qui réalise $t \mapsto f(t)$ (pour l'inclusion usuelle $\mathbf{k} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$).
Comment généraliser à un anneau $\mathbf{k}$ quelconque ?
Expliquer comment on peut relever ce morphisme f en une application polynomiale, schématisée ci-dessous en pointillés :



3. Traiter les exemples $f(t) = t^2$, $f(t) = t^d$ et $f(t) = (t^2 + 1)/t^2$. Comment se relève une homographie $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$ $(ad - bc \in \mathbf{k}^\times)$?

Exercice 9. *(La conique fondamentale ou le plongement de Veronese $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$)*
Lorsque $\mathbf{k}$ est un corps discret, le plongement de Veronese $\mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \to \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ est défini par :

$$(u : v) \mapsto (X = u^2 : Y = uv : Z = v^2).$$

Son image est la « conique fondamentale » de $\mathbb{P}^2$ d'équation

$$\begin{vmatrix} X & Y \\ Y & Z \end{vmatrix} = XZ - Y^2 = 0.$$

De manière analogue à l'exercice 8 (voir aussi le problème 6), montrer que l'on peut relever le morphisme de Veronese en une application polynomiale, schématisée ci-dessous en pointillés :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{GA}_{2,1}(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & \mathbb{GA}_{3,1}(\mathbf{k}) \\ {\scriptstyle F\mapsto \operatorname{Im} F}\downarrow & \searrow & \downarrow{\scriptstyle F\mapsto \operatorname{Im} F} \\ \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) & \xrightarrow{\text{Veronese}} & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \end{array}$$

Votre relèvement obtenu doit s'appliquer à un anneau $\mathbf{k}$ quelconque.

Exercice 10. *(Matrices de projection de corang 1)* Soit $n \geqslant 2$.

1. Soit $P \in \mathbb{GA}_{n,n-1}(\mathbf{A})$. Montrer que $P + \widetilde{P} = \mathrm{I}_n$.
2. Si $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ vérifie $P + \widetilde{P} = \mathrm{I}_n$, alors P est de rang $n-1$.
3. Si $P \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ vérifie $\det(P) = 0$ et $P + \widetilde{P} = \mathrm{I}_n$, alors $P \in \mathbb{GA}_{n,n-1}(\mathbf{A})$.

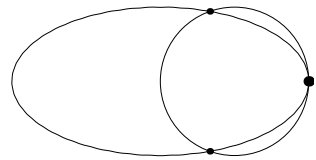
Exercice 11. Dans cet exercice, $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est une matrice de *corang 1*, i.e. de rang $n-1$. En utilisant l'exercice 10, montrer les points suivants.

1. $\operatorname{Im} A = \operatorname{Ker} \widetilde{A}$ (module projectif de rang $n-1$).
2. $\operatorname{Im} \widetilde{A} = \operatorname{Ker} A$ (module projectif de rang 1).
3. $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A = \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}\widetilde{A}$ (module projectif de rang $n-1$).
4. $\operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}\widetilde{A} = \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}A$ (module projectif de rang 1).
5. Les modules projectifs de rang 1, $\mathbf{A}^n / \operatorname{Im} A$ et $\mathbf{A}^n / \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A$, sont duaux l'un de l'autre. En résumé, à partir d'une matrice A de corang 1, on construit deux modules projectifs de rang 1 duaux l'un de l'autre :

$$\mathbf{A}^n / \operatorname{Im} A = \mathbf{A}^n / \operatorname{Ker} \widetilde{A} \simeq \operatorname{Im} \widetilde{A} = \operatorname{Ker} A,$$
$$\mathbf{A}^n / \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}A = \mathbf{A}^n / \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}\widetilde{A} \simeq \operatorname{Im} {}^{\mathrm{t}}\widetilde{A} = \operatorname{Ker} {}^{\mathrm{t}}A.$$

Exercice 12. *(Intersection de deux schémas affines sur $\mathbf{k}$)*
Cet exercice se situe dans le cadre informel des schémas affines sur un anneau $\mathbf{k}$ « définis » page 571. Soient $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$, $\mathbf{B} = \mathbf{k}[y_1, \ldots, y_n]$ deux $\mathbf{k}$-algèbres quotients correspondant à deux systèmes polynomiaux $(\underline{f})$, $(\underline{g})$ dans $\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Notons A, B les schémas affines correspondants. Le schéma intersection $A \cap B$ est défini comme associé à la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\underline{X}] / \langle \underline{f}, \underline{g} \rangle \simeq \mathbf{A} \otimes_{\mathbf{k}[\underline{X}]} \mathbf{B}$ (notez que le produit tensoriel est pris sur $\mathbf{k}[\underline{X}]$).

« Justifier » cette définition en vous appuyant sur le dessin ci-contre.
Dans un repère « euclidien », le dessin comprend l'ellipse $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + y^2 = 1$, i.e. $f(x,y) = 0$ avec $f = x^2 + a^2y^2 - a^2$, et le cercle $g(x,y) = 0$ avec $g = (x-c)^2 + y^2 - (c-a)^2$.



Exercice 13. *(Polynômes pseudo unitaires)*
On rappelle qu'un polynôme $p(t) = \sum_{k\geqslant 0} a_k T^k \in \mathbf{k}[T]$ est dit pseudo unitaire s'il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_0, \dots, e_r)$ tel que sur chaque $\mathbf{k}[1/e_j]$, p est un polynôme de degré j avec son coefficient de degré j inversible (voir page 398). Un tel polynôme est primitif et cette notion est stable par produit et morphisme.
1. Vérifier que $a_k = 0$ pour $k > r$ et que $\left\langle (1 - \sum_{j>k} e_j) a_k \right\rangle = \langle e_k \rangle$ pour $k \in [\![0..r]\!]$. En particulier, $\langle a_r \rangle = \langle e_r \rangle$ et les e_k sont uniques ou plutôt le polynôme $\sum_k e_k X^k$ est unique (on peut ajouter des idempotents nuls).
2. Soit $P = \mathbf{A}[T]/\langle p \rangle$. Montrer que P est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini dont le polynôme rang est $\mathrm{R}_P(X) = \sum_{k=0}^r e_k X^k$; on a également $\deg p = \sum_{k=1}^r k[e_k]$ (cf. le point *2* de 2.6). Dans le même ordre d'idées, voir l'exercice 14.

Exercice 14. *(Polynômes localement unitaires)*
1. Soit $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}[T]$ un idéal tel que $\mathbf{A}[t] = \mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}$ soit un $\mathbf{A}$-module libre de rang n. Soit $f \in \mathbf{A}[T]$ le polynôme caractéristique de t dans $\mathbf{A}[t]$. Montrer que $\mathfrak{a} = \langle f \rangle$. En particulier, $1, t, \dots, t^{n-1}$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{A}[t]$.
2. Résultat analogue en remplaçant l'hypothèse « $\mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang n » par « $\mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}$ est un module projectif de rang constant n ».
Un polynôme $f \in \mathbf{A}[T]$ de degré $\leqslant r$ est dit *localement unitaire* s'il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_0, \dots, e_r)$ tel que f soit unitaire de degré d dans $\mathbf{A}[1/e_d][T]$ pour chaque $d \in [\![0..r]\!]$. Ainsi, pour chaque $d \in [\![0..r]\!]$, le polynôme $f_d := e_d f$ est unitaire de degré d modulo $\langle 1 - e_d \rangle$. Il est clair que cette définition ne dépend pas du degré formel r choisi pour f, et que sur un anneau connexe, un polynôme localement unitaire est unitaire.
3. Caractériser un polynôme localement unitaire à l'aide de ses coefficients.
4. Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme d'un module projectif de type fini M est localement unitaire et le système fondamental d'idempotents orthogonaux correspondant est donné par les $\mathrm{e}_i(M)$.
5. Soient S_1, …, S_m des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$. Montrer que si f est localement unitaire (par exemple unitaire) sur chaque $S_i^{-1}\mathbf{A}$, il l'est sur $\mathbf{A}$.
6. Si $f \in \mathbf{A}[T]$ est localement unitaire, montrer que l'anneau $\mathbf{A}[t] = \mathbf{A}[T]/\langle f \rangle$ est un $\mathbf{A}$-module quasi libre et que f est le polynôme caractéristique de t.
7. Réciproquement, si $\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}[T]$ est un idéal tel que l'anneau $\mathbf{A}[t] = \mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}$ soit un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, alors $\mathfrak{a} = \langle f \rangle$. En particulier, si une $\mathbf{A}$-algèbre monogène est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, c'est un $\mathbf{A}$-module quasi libre.
8. Pour $g \in \mathbf{A}[T]$ les propriétés suivantes sont équivalentes.
— g peut s'écrire uf avec $u \in \mathbf{A}^\times$ et f localement unitaire.
— g est pseudo unitaire.

— $\mathbf{A}[T]/\langle g\rangle$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.

9.* Démontrer en mathématiques classiques qu'un polynôme est localement unitaire si, et seulement si, il devient unitaire après localisation en n'importe quel idéal premier.

Exercice 15. *(Modules inversibles et modules projectifs de rang constant 1)*
On propose une petite variation autour du théorème 5.8.
1. Soient deux anneaux commutatifs $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. Les sous-$\mathbf{A}$-modules de $\mathbf{B}$ forment un monoïde multiplicatif, d'élément neutre $\mathbf{A}$. Montrer qu'un sous-$\mathbf{A}$-module M de $\mathbf{B}$ *inversible* dans ce monoïde est de type fini et que pour tout sous-$\mathbf{A}$-module M' de $\mathbf{B}$ l'homomorphisme canonique $M \otimes_{\mathbf{A}} M' \to M.M'$ est un isomorphisme. En conséquence, les sous-$\mathbf{A}$-modules de $\mathbf{B}$ inversibles sont des $\mathbf{A}$-modules projectifs de rang constant 1.
2. Soit $S \subseteq \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$ un monoïde et $\mathfrak{a}$ un idéal localement principal. On suppose que $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un idéal inversible de $S^{-1}\mathbf{A}$; montrer que $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible de $\mathbf{A}$. C'est le cas par exemple si $S^{-1}\mathfrak{a}$ est un $S^{-1}\mathbf{A}$-module libre.

Exercice 16. *(La suite exacte avec* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ *et* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{K}$*, où* $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$*)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. Définir des morphismes naturels de groupes :

$$1 \to \mathbf{A}^\times \to \mathbf{K}^\times \to \mathrm{Gfr}(\mathbf{A}) \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{K},$$

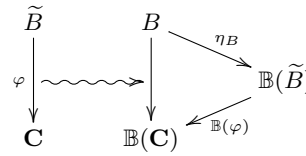
et montrer que la suite obtenue est exacte. En conséquence, on a une suite exacte

$$1 \to \mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{K}.$$

Si $\mathsf{Pic}\,\mathbf{K}$ est trivial, on obtient un isomorphisme $\mathrm{Cl}(\mathbf{A}) \simeq \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$, et l'on retrouve ainsi le théorème 5.8.

Exercice 17. Montrer que $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ est l'anneau « engendré par » $\mathbb{B}(\mathbf{A})$, l'algèbre de Boole des idempotents de $\mathbf{A}$, au sens des foncteurs adjoints.
Plus précisément, si B est une algèbre de Boole, l'anneau $\widetilde{B}$ librement engendré par B est donné avec un homomorphisme d'algèbres de Boole $\eta_B : B \to \mathbb{B}(\widetilde{B})$ tel que pour tout anneau $\mathbf{C}$ l'application décrite ci-après soit une bijection :

$$\begin{array}{c}\mathrm{Hom}_{\text{Anneaux}}(\widetilde{B}, \mathbf{C}) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\text{Alg. de Boole}}\big(B, \mathbb{B}(\mathbf{C})\big)\\ \varphi \longmapsto \mathbb{B}(\varphi) \circ \eta_B\end{array}$$



Montrer alors que $\widetilde{\mathbb{B}(\mathbf{A})} \simeq \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$.

Exercice 18. Démontrer en mathématiques classiques que $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ est canoniquement isomorphe à l'anneau des fonctions localement constantes (i.e., continues) de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ vers $\mathbb{Z}$.

Exercice 19. *(Le déterminant comme foncteur)*
On a défini le déterminant d'un endomorphisme d'un module projectif de type fini. Nous allons voir que plus généralement on peut définir le déterminant comme un foncteur de la catégorie des modules projectifs vers celle des modules projectifs de rang 1. Sans doute, la définition la plus simple du déterminant d'un module projectif de type fini est la suivante :
Définition :

(*a*) *Soit M un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini engendré par n éléments. On note $r_h = \mathrm{e}_h(M)$ ($h \in [\![0..n]\!]$) et $M^{(h)} = r_h M$. On définit* $\det(M)$ *par*
$$\det(M) := r_0\mathbf{A} \oplus M^{(1)} \oplus \bigwedge^2 M^{(2)} \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n M^{(n)}.$$
Nous utiliserons aussi la notation suggestive $\det(M) = \bigwedge^{\mathrm{rg}(M)} M$ *en utilisant le rang* $\mathrm{rg}(M) = \sum_{k=1}^{n} k\,[\mathrm{e}_k(M)] \in \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$.

(*b*) *Si $\varphi : M \to N$ est un homomorphisme de $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini, avec $s_h = \mathrm{e}_h(N)$, on définit* $\det(\varphi)$ *comme un homomorphisme de* $\det(M)$ *dans* $\det(N)$ *envoyant* $\bigwedge^h M^{(h)}$ *dans* $\bigwedge^h N^{(h)}$ *par* $x \mapsto s_h(\bigwedge^h \varphi)(x)$.

On notera que lorsque $x \in \bigwedge^h M^{(h)}$ on a $x = r_h x$.

1. Le module $\det(M)$ est un module projectif de rang constant 1, et l'on a les égalités $r_h \det(M) = \det(M)_{r_h} = \bigwedge^h M^{(h)}$. Plus généralement, pour tout idempotent e, on a $e\det(M) = \det(M_e)$.
2. La définition précédente fournit un foncteur qui commute avec la localisation et transforme les sommes directes en produits tensoriels. En déduire que le foncteur det induit un morphisme surjectif de $(\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}, +)$ sur $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$.
3. Un homomorphisme entre modules projectifs de type fini est un isomorphisme si, et seulement si, son déterminant est un isomorphisme.
4. Pour un endomorphisme d'un module projectif de type fini, la nouvelle définition du déterminant coïncide avec l'ancienne si l'on identifie $\mathrm{End}(L)$ avec $\mathbf{A}$ lorsque L est un module projectif de rang constant 1.

Exercice 20. À isomorphisme près, le foncteur déterminant est le seul foncteur de la catégorie des $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini dans elle-même qui possède les propriétés suivantes :
— il transforme toute flèche $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ en elle-même,
— il transforme les sommes directes en produits tensoriels,
— il commute à l'extension des scalaires pour tout changement de base $\mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{B}$.

Exercice 21. *(Idéaux déterminantiels d'une application linéaire entre modules projectifs de type fini)* Soit $\varphi : M \to N$ un homomorphisme entre modules projectifs de type fini. Écrivons $M \oplus M' \simeq \mathbf{A}^m$, $N \oplus N' \simeq \mathbf{A}^n$, et prolongeons φ en
$$\psi : M \oplus M' \to N \oplus N' \text{ avec } \psi(x + x') = \varphi(x)\ (x \in M,\ x' \in M').$$
Alors, pour chaque entier h, l'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_h(\psi)$ ne dépend que de h et de φ. On le note $\mathcal{D}_h(\varphi)$ et on l'appelle *l'idéal déterminantiel d'ordre h de φ.*

6.5. Notation. Soit $r = \sum_{k=1}^{n} k\,[r_k] \in \mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$. En application de l'exercice précédent, on appelle *idéal déterminantiel de type r pour φ* et l'on note $\mathcal{D}_r(\varphi)$ l'idéal
$$r_0\mathbf{A} + r_1\mathcal{D}_1(\varphi) + \cdots + r_n\mathcal{D}_n(\varphi).$$
Les notations $\mathrm{rg}(\varphi) \geqslant k$ et $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant k$ pour les applications linéaires entre modules libres de rang fini se généralisent comme suit aux applications linéaires entre modules projectifs de type fini : on note $\mathrm{rg}(\varphi) \geqslant r$ si $\mathcal{D}_r(\varphi) = \langle 1\rangle$, $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant r$ si $\mathcal{D}_{1+r}(\varphi) = \langle 0\rangle$, et $\mathrm{rg}(\varphi) = r$ si $\mathrm{rg}(\varphi) \leqslant r$ et $\mathrm{rg}(\varphi) \geqslant r$.
NB : voir l'exercice 23.

Exercice 22. (Suite de l'exercice 21) Soit $r \in \mathbb{N}^*$.

1. Si $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\varphi'} L$ sont des applications linéaires entre modules projectifs de type fini, on a : $\mathcal{D}_r(\varphi'\varphi) \subseteq \mathcal{D}_r(\varphi')\mathcal{D}_r(\varphi)$.
2. Si S est un monoïde de $\mathbf{A}$, alors $\big(\mathcal{D}_r(\varphi)\big)_S = \mathcal{D}_r(\varphi_S)$.
3. Pour tout $s \in \mathbf{A}$ tel que M_s et N_s sont libres, on a $\big(\mathcal{D}_r(\varphi)\big)_s = \mathcal{D}_r(\varphi_s)$. En outre, cette propriété caractérise l'idéal $\mathcal{D}_r(\varphi)$.

Soit $r = \sum_{k\in[\![1..n]\!]} k[r_k] \in \mathsf{H}_0^+\,\mathbf{A}$.

4. Reprendre les points précédents de l'exercice dans ce nouveau cadre.

Exercice 23. (Avec les notations 6.5) Soit $\varphi : M \to N$ une application linéaire entre $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
1. φ est localement simple.
2. φ a un rang bien défini dans $\mathsf{H}_0^+(\mathbf{A})$.
3. Après localisation en des éléments comaximaux les modules sont libres et l'application linéaire est simple.

Exercice 24. Soit $A \in \mathbf{A}^{n\times m}$; si A est de rang $m-1$, on va expliciter un système fini de générateurs du sous-module $\operatorname{Ker} A \subseteq \mathbf{A}^n$ sans utiliser ni test d'égalité ni test d'appartenance. En fait, sous la seule hypothèse (plus faible) $n \geqslant m-1$, on définit de manière uniforme une matrice $A' \in \mathbf{A}^{m\times N}$ avec $N = \binom{n}{m-1}$ qui est « une sorte de comatrice de $\mathbf{A}$ ». Cette matrice satisfait à $\operatorname{Im} A' \subseteq \operatorname{Ker} A$ dès que A est de rang $\leqslant m-1$, avec égalité lorsque A est de rang $m-1$.
On peut définir $A' \in \mathbf{A}^{m\times N}$ via l'algèbre extérieure : on voit A comme une application linéaire $u : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$ et l'on considère

$$u' = \textstyle\bigwedge^{m-1}({}^t u) : \bigwedge^{m-1}(\mathbf{A}^n) \to \bigwedge^{m-1}(\mathbf{A}^m).$$

Dans les bases canoniques, $\bigwedge^{m-1}(\mathbf{A}^n) = \mathbf{A}^N$ et $\bigwedge^{m-1}(\mathbf{A}^m) = \mathbf{A}^m$, donc u' est représenté par une matrice $A' \in \mathbf{A}^{m\times N}$. Pour expliciter cette matrice A', on ordonne l'ensemble des $N = \binom{n}{m-1}$ parties I de $[\![1..n]\!]$ de cardinal $m-1$ de façon à ce que leurs complémentaires soient rangés de manière croissante pour l'ordre lexicographique ; les colonnes de A' sont indexées par cet ensemble de parties, de la manière suivante :

$$a'_{j,I} = (-1)^{k_I+j}\det(A_{I,\{1..m\}\setminus\{j\}}), \qquad k_I \text{ étant le numéro de } I.$$

Par exemple, si $m = 2$, alors $N = n$, et $A' = \begin{bmatrix} a_{n,2} & -a_{n-1,2} & \cdots & \pm a_{1,2} \\ -a_{n,1} & a_{n-1,1} & \cdots & \mp a_{1,1} \end{bmatrix}$.

1. Pour $i \in [\![1..n]\!]$, on a $(AA')_{i,I} = (-1)^{k_I+1}\det(A_{\{i\}\cup I,\{1..m\}})$. En particulier, si $\mathcal{D}_m(A) = 0$, alors $AA' = 0$.
2. Si $n = m$, alors $A' = \widetilde{A}$ (la co-matrice de A).
3. Si A est de rang $m-1$, alors $\operatorname{Im} A' = \operatorname{Ker} A$; en particulier, A' est de rang 1.
4. Tout module stablement libre de rang 1 est libre. On pourra comparer avec le fait 5.6 et avec l'exercice V-13.
5. Si B est une matrice vérifiant $ABA = A$, alors $P = BA$ est une matrice de projection vérifiant $\operatorname{Im}(\mathrm{I}_n - P) = \operatorname{Ker} P = \operatorname{Ker} A$. Ceci fournit une autre manière de répondre à la question : donner un système fini de générateurs de $\operatorname{Ker} A$. Comparer cette autre solution à celle de l'exercice présent. Pour le calcul de la matrice P, on pourra utiliser la méthode expliquée dans la section II-5 (théorème II-5.14). Une

autre méthode, nettement plus économique, se trouve dans [59, Díaz-Toca&al.] (basé sur [139, Mulmuley]).

Exercice 25. *(Polynômes homogènes et $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$)*
Soit un système polynomial homogène $(f_1, \dots, f_s) = (\underline{f})$ dans $\mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]$. On cherche à définir les zéros de $(\underline{f})$ dans $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$. Soit P un point de $\mathbb{P}^n(\mathbf{k})$, i.e. un $\mathbf{k}$-module projectif de rang 1 en facteur direct dans $\mathbf{k}^{n+1}$. Montrer que si un système générateur de P annule $(\underline{f})$, alors tout élément de P annule $(\underline{f})$.

Exercice 26. *(Espace tangent à $\mathbb{GL}_n$)*
Déterminer l'espace tangent en un point au foncteur $\mathbf{k} \mapsto \mathbb{GL}_n(\mathbf{k})$.

Exercice 27. *(Espace tangent à $\mathbb{SL}_n$)*
Déterminer l'espace tangent en un point au foncteur $\mathbf{k} \mapsto \mathbb{SL}_n(\mathbf{k})$.

Exercice 28. *(Espace tangent en J_0 au cône nilpotent)* Soit $\mathbf{k}$ un anneau.
On note $(e_{ij})_{i,j\in[\![1..n]\!]}$ la base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ et $J_0 \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ la matrice de Jordan standard. Par exemple, pour $n = 3$, $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.
1. On définit $\varphi : \mathbb{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ par $\varphi(H) = \sum_{i+j=n-1} J_0^i H J_0^j$.
Déterminer $\operatorname{Im}\varphi$.
2. Déterminer un supplémentaire de $\operatorname{Im}\varphi$ dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$, puis $\psi : \mathbb{M}_n(\mathbf{k}) \to \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ vérifiant $\varphi \circ \psi \circ \varphi = \varphi$. Montrer que $\operatorname{Ker}\varphi$ est libre de rang $n^2 - n$ et donner une base de ce module.
3. On considère le foncteur $\mathbf{k} \mapsto \{N \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k}) \mid N^n = 0\}$. Déterminer l'espace tangent en J_0 à ce foncteur.

Exercice 29. *(Complément pour le théorème 4.9)* On note $\mathbf{A}[\varepsilon] = \mathbf{A}[T]/\langle T^2 \rangle$.
Soient P, $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. Montrer que la matrice $P + \varepsilon H$ est idempotente si, et seulement si,

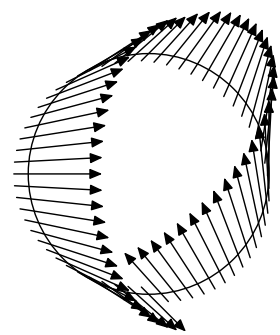
$$P^2 = P \quad \text{et} \quad H = HP + PH.$$

Généraliser à un anneau non commutatif arbitraire avec un idempotent ε dans le centre de l'anneau.
Commentaire. L'exemple de l'anneau $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ montre que dans le cas non commutatif la situation pour les idempotents est assez différente de celle dans le cas commutatif où $\mathbb{B}(\mathbf{A}) = \mathbb{B}(\mathbf{A}_{\mathrm{red}})$ (corollaire III-10.4) et où les idempotents sont « isolés » (lemme IX-5.1). ∎

Exercice 30. *(Syzygies entre monômes)*
Soit $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ un anneau de polynômes (où $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque) et s monômes $m_1, \dots, m_s$ de $\mathbf{k}[\underline{X}]$. On note $m_i \wedge m_j$ le pgcd de (m_i, m_j) et $m_{ij} = \frac{m_j}{m_i \wedge m_j}$ de sorte que $\boxed{m_{ij} \cdot m_i = m_{ji} \cdot m_j}$.
On note $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_s)$ la base canonique de $\mathbf{k}[\underline{X}]^s$.
L'encadré fournit des syzygies $r_{ij} = m_{ij}\varepsilon_i - m_{ji}\varepsilon_j$ pour $(m_1, \dots, m_s)$. Montrer que ces syzygies engendrent le module des syzygies pour $(m_1, \dots, m_s)$, i.e. le noyau de l'application $\mathbf{k}[\underline{X}]$-linéaire $\varepsilon_i \mapsto m_i$ de $\mathbf{k}[\underline{X}]^s$ vers $\mathbf{k}[\underline{X}]$.

Problème 1. *(L'anneau du cercle)*
Soit $\mathbf{k}$ un corps discret de caractéristique $\neq 2$, $f(X,Y) = X^2 + Y^2 - 1 \in \mathbf{k}[X,Y]$. C'est un polynôme irréductible et lisse, i.e. $1 \in \left\langle f, \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right\rangle$ (explicitement, on a $-2 = 2f - X\frac{\partial f}{\partial X} - Y\frac{\partial f}{\partial Y}$).
Il est donc licite de penser que l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X,Y]/\langle f \rangle = \mathbf{k}[x,y]$ est un anneau de Prüfer intègre. Ceci sera prouvé dans le problème XII-1 (point *4*).
On note $\mathbf{K}$ son corps des fractions et l'on pose $t = \frac{y}{x-1} \in \mathbf{K}$.

1. Montrer que $\mathbf{K} = \mathbf{k}(t)$; justifier géométriquement comment trouver t (paramétrage d'une conique ayant un point $\mathbf{k}$-rationnel) et expliciter x, y en fonction de t.
2. Soit $u = (1+t^2)^{-1}$, $v = tu$. Vérifier que la clôture intégrale de $\mathbf{k}[u]$ dans $\mathbf{K} = \mathbf{k}(t)$ est
$$\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[u,v] = \left\{ h(t)/(1+t^2)^s \mid h \in \mathbf{k}[t],\ \deg(h) \leqslant 2s \right\}.$$
En particulier, $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x,y]$ est intégralement clos. Expliquer en quoi le $\mathbf{k}$-cercle $x^2 + y^2 = 1$ est la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ privée « du $\mathbf{k}$-point » $(x,y) = (1, \pm i)$.
3. Si -1 est un carré dans $\mathbf{k}$, montrer que $\mathbf{k}[x,y]$ est un localisé $\mathbf{k}[w, w^{-1}]$ (pour un w à expliciter) d'un anneau de polynômes sur $\mathbf{k}$, donc un anneau de Bézout.
4. Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un $\mathbf{k}$-point du cercle $x^2 + y^2 = 1$ et $\langle x - x_0, y - y_0 \rangle \subseteq \mathbf{A}$ son idéal maximal. Vérifier que $\langle x - x_0, y - y_0 \rangle^2$ est un idéal principal de générateur $xx_0 + yy_0 - 1$. Interprétation géométrique de $xx_0 + yy_0 - 1$?
5. Ici $(x_0, y_0) = (1, 0)$. Décrire les calculs permettant d'expliciter la matrice (de projection)
$$P = \tfrac{1}{2} \begin{bmatrix} 1-x & -y \\ -y & 1+x \end{bmatrix}$$
comme matrice de localisation principale pour le couple $(x-1, y)$. La suite exacte :
$$\mathbf{A}^2 \xrightarrow{\mathrm{I}_2 - P} \mathbf{A}^2 \xrightarrow{(x-1,y)} \langle x-1, y \rangle \to 0$$
permet de réaliser l'idéal (inversible) du point $(1,0)$ comme l'image du projecteur P de rang 1.
Commenter le dessin ci-contre qui en est la contrepartie géométrique (fibré vectoriel en droites sur le cercle).



6. On suppose que -1 n'est pas un carré dans $\mathbf{k}$ et l'on voit $\mathbf{k}[x,y]$ comme une $\mathbf{k}[x]$-algèbre libre de rang 2, de base $(1, y)$. Expliciter la norme et vérifier, pour $z = a(x) + b(x)y \neq 0$, l'égalité
$$\deg \mathrm{N}_{\mathbf{k}[x,y]/\mathbf{k}[x]}(z) = 2\max(\deg a, 1 + \deg b).$$
En particulier, $\deg \mathrm{N}_{\mathbf{k}[x,y]/\mathbf{k}[x]}(z)$ est pair. En déduire le groupe $\mathbf{k}[x,y]^\times$, le fait que y et $1 \pm x$ sont irréductibles dans $\mathbf{k}[x,y]$, et que l'idéal $\langle x-1, y \rangle$ du point $(1,0)$ n'est pas principal (i.e. le fibré en droites ci-dessus n'est pas trivial).

Problème 2. *(Les opérations λ_t et γ_t sur $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$)*
Si P est un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}$, on note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\lambda^n(P)$ ou $\lambda^n([P])$ la classe de $\bigwedge^n P$ dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ et l'on a l'égalité fondamentale

$$\lambda^n(P \oplus Q) = \textstyle\sum_{p+q=n} \lambda^p(P)\lambda^q(Q). \qquad (*)$$

On définit également le polynôme $\lambda_t(P) \in \mathsf{K}_0(A)[t]$ par $\lambda_t(P) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^n(P)t^n$. C'est un polynôme de terme constant 1 que l'on regarde dans l'anneau des séries formelles $\mathsf{K}_0(A)[[t]]$. Alors

$$\lambda_t(P) \;\in\; 1 + t\,\mathsf{K}_0(\mathbf{A})[[t]] \;\subseteq\; (\mathsf{K}_0(\mathbf{A})[[t]])^\times.$$

D'après $(*)$ on a $\lambda_t(P \oplus Q) = \lambda_t(P)\lambda_t(Q)$, ce qui permet de prolonger λ_t en un morphisme $(\mathsf{K}_0(\mathbf{A}), +) \to (1 + t\,\mathsf{K}_0(\mathbf{A})[[t]], \times)$. Ainsi si P, Q sont deux modules projectifs de type fini, pour $x = [P] - [Q]$, on a par définition :

$$\lambda_t(x) = \frac{\lambda_t(P)}{\lambda_t(Q)} = \frac{1 + \lambda^1(P)t + \lambda^2(P)t^2 + \cdots}{1 + \lambda^1(Q)t + \lambda^2(Q)t^2 + \cdots}$$

série que l'on notera $\sum_{n\geqslant 0} \lambda^n(x)t^n$, avec $\lambda^0(x) = 1$, $\lambda^1(x) = x$.
Grothendieck a également défini sur $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ une autre opération γ_t par l'égalité

$$\gamma_t(x) = \lambda_{t/(1-t)}(x),$$

pour $x \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$. Ceci est licite car le sous-groupe multiplicatif $1 + t\,\mathsf{K}_0(\mathbf{A})[[t]]$ est stable par la substitution $t \leftarrow t/(1-t)$. Cette substitution $t \leftarrow t/(1-t)$ laisse invariant le terme en t, on note

$$\gamma_t(x) \;=\; 1 + tx + t^2\big(x + \lambda^2(x)\big) + \cdots \;=\; \textstyle\sum_{n\geqslant 0} \gamma^n(x)t^n.$$

1. Donner $\lambda_t(p)$ et $\gamma_t(p)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$. Montrer que $\gamma_t(x)$ est un polynôme t. En utilisant $\gamma_t(-x)$, en déduire que x est nilpotent.
2. Montrer que $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A})$ est le nilradical de l'anneau $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$.
On a $\operatorname{rg}\big(\lambda^n(x)\big) = \lambda^n(\operatorname{rg} x)$ et l'on dispose ainsi d'une série formelle $\operatorname{rg}_t^\lambda(x)$ à coefficients dans $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ définie par

$$\operatorname{rg}_t^\lambda(x) = \lambda_t(\operatorname{rg} x) = \textstyle\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{rg}\big(\lambda^n(x)\big)t^n.$$

Si $x \in \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ cela donne simplement $\operatorname{rg}_t^\lambda(x) = \lambda_t(x)$.
3. Si $x = [P]$, on rappelle que $(1+t)^{\operatorname{rg} x} = \mathrm{R}_P(1+t) = \mathrm{F}_{\mathrm{Id}_P}(t) \in \mathbb{B}(\mathbf{A})[t]$. Montrer que, lorsque l'on identifie $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ à $\mathbb{B}(\mathsf{H}_0\,\mathbf{A})$ en posant $e = [e\mathbf{A}] = [e]$ pour $e \in \mathbb{B}(\mathbf{A})$, on obtient $\operatorname{rg}_t^\lambda(x) = 1 + t\operatorname{rg} x = (1+t)^{\operatorname{rg} x}$ si $0 \leqslant \operatorname{rg} x \leqslant 1$.
Montrer ensuite que $\operatorname{rg}_t^\lambda(x) = (1+t)^{\operatorname{rg} x}$ pour tout $x \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$.
4. On définit $\operatorname{rg}_t^\gamma(x) = \gamma_t(\operatorname{rg} x) = \sum_{n\geqslant 0} \operatorname{rg}\big(\gamma^n(x)\big)t^n$.
Montrer que $\operatorname{rg}_t^\gamma(x) = (1-t)^{-\operatorname{rg} x}$ pour tout $x \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$, ou encore pour $x = [P]$ que $\operatorname{rg}_t^\gamma(x) = \mathrm{R}_P\big(1/(1-t)\big) = \mathrm{R}_P(1-t)^{-1}$. De plus, si $0 \leqslant \operatorname{rg} x \leqslant 1$, on obtient l'égalité $\operatorname{rg}_t^\gamma(x) = 1 + xt/(1-t) = 1 + xt + xt^2 + \ldots$
5. Pour tout x de $\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}$, $\gamma_t(x)(1-t)^{\operatorname{rg}(x)}$ est un polynôme.
6. Montrer les formules de réciprocité entre λ^n et γ^n pour $n \geqslant 1$:

$$\gamma^n(x) = \textstyle\sum_{p=0}^{n-1} \binom{n-1}{p}\lambda^{p+1}(x), \qquad \lambda^n(x) = \sum_{q=0}^{n-1} \binom{n-1}{q}(-1)^{n-1-q}\gamma^{q+1}(x).$$

Problème 3. *(L'application projective de Noether et les modules projectifs de rang constant 1 facteurs directs dans $\mathbf{k}^2$)*
On fixe un anneau $\mathbf{k}$, deux indéterminées X, Y sur $\mathbf{k}$ et un entier $n \geqslant 1$. Etant

donnés $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ deux n-suites d'éléments de $\mathbf{k}$, on leur associe une $(n+1)$-suite $z = z(x,y) = (z_0, \dots, z_n)$ de la manière suivante :

$$\prod_{i=1}^{n}(x_iX + y_iY) = z_0X^n + z_1X^{n-1}Y + \cdots + z_{n-1}XY^{n-1} + z_nY^n.$$

Ainsi, on a $z_0 = x_1 \cdots x_n$, $z_n = y_1 \cdots y_n$, et par exemple, pour $n = 3$:

$$z_1 = x_1x_2y_3 + x_1x_3y_2 + x_2x_3y_1, \quad z_2 = x_1y_2y_3 + x_2y_1y_3 + x_3y_1y_2.$$

Pour $d \in [\![0..n]\!]$, on vérifie facilement que $z_d(y,x) = z_{n-d}(x,y)$ et que l'on a l'expression formelle suivante à l'aide des fonctions symétriques élémentaires de n indéterminées $(S_0 = 1, S_1, \dots, S_n)$:

$$z_d = x_1 \cdots x_n S_d(y_1/x_1, \dots, y_n/x_n).$$

En particulier, z_d est homogène en x de degré $n-d$, et homogène en y de degré d. On peut donner une définition directe de z_d de la manière suivante :

$$z_d = \textstyle\sum_{\#I=n-d} \prod_{i\in I} x_i \prod_{j\in[\![1..n]\!]\setminus I} y_j.$$

Si $\mathbf{k}$ est un corps discret, on a une application $\psi : (\mathbb{P}^1)^n = \mathbb{P}^1 \times \cdots \times \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$, dite de Noether, définie par :

$$(\star) \qquad \psi : \big((x_1 : y_1), \dots, (x_n : y_n)\big) \mapsto (z_0 : \cdots : z_n)$$

On fait agir le groupe symétrique S_n sur le produit $(\mathbb{P}^1)^n$ par permutation des coordonnées ; alors l'application $(\star)$ ci-dessus, qui est S_n-invariante, intervient en géométrie algébrique pour mettre en isomorphie $(\mathbb{P}^1)^n/\mathrm{S}_n$ et $\mathbb{P}^n$.

1. Montrer que pour des points P_1, …, P_n, Q_1, …, Q_n de $\mathbb{P}^1$, on a

$$\psi(P_1, \dots, P_n) = \psi(Q_1, \dots, Q_n) \iff (Q_1, \dots, Q_n) \text{ est une permutation de } (P_1, \dots, P_n).$$

On veut maintenant, $\mathbf{k}$ étant un anneau quelconque, formuler l'application $(\star)$ en termes de $\mathbf{k}$-modules projectifs de rang constant 1.

De manière précise, on pose $L = \mathbf{k}X \oplus \mathbf{k}Y \simeq \mathbf{k}^2$, et l'on note

$$S_n(L) = \mathbf{k}X^n \oplus \mathbf{k}X^{n-1}Y \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}XY^{n-1} \oplus \mathbf{k}Y^n \simeq \mathbf{k}^{n+1}$$

la composante homogène de degré n de $\mathbf{k}[X,Y]$. Si P_1, …, $P_n \subset L$ sont n sous-$\mathbf{k}$-modules projectifs de rang constant 1 facteurs directs, on veut leur associer, de manière fonctorielle, un sous-$\mathbf{k}$-module $P = \psi(P_1, \dots, P_n)$ de $S_n(L)$, projectif de rang constant 1 et facteur direct. Bien sûr, on doit avoir

$$\psi(P_1, \dots, P_n) = \psi(P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(n)})$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$. De plus, si chaque P_i est libre de base $x_iX + y_iY$, alors P doit être libre de base $\sum_{i=0}^{n} z_iX^{n-i}Y^i$, de façon à retrouver $(\star)$.

2. Montrer que si chaque (x_i, y_i) est unimodulaire, il en est de même de $(z_0, \dots, z_n)$.

3. Définir $\psi(P_1, \dots, P_n) \subset S_n(L)$ à l'aide du module $P_1 \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} P_n$ et de l'application $\mathbf{k}$-linéaire $\pi : L^{n\otimes} \twoheadrightarrow S_n(L)$:

$$\pi : \textstyle\bigotimes_{i=1}^{n}(x_iX + y_iY) \longmapsto \prod_{i=1}^{n}(x_iX + y_iY).$$

4. Soient $\mathbf{k}[\underline{Z}] = \mathbf{k}[Z_0, \dots, Z_n]$, $\mathbf{k}[\underline{X}, \underline{Y}] = \mathbf{k}[X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n]$.

Que dire du $\mathbf{k}$-morphisme $\varphi : \mathbf{k}[\underline{Z}] \to \mathbf{k}[\underline{X}, \underline{Y}]$ défini par

$$Z_d \longmapsto z_d = \textstyle\sum_{\#I=n-d} \prod_{i\in I} X_i \prod_{j\in[\![1..n]\!]\setminus I} Y_j \quad ?$$

Note : φ est le co-morphisme de ψ.

Problème 4. *(Le théorème 90 multiplicatif d'Hilbert)*

Soit G un groupe fini agissant sur un anneau commutatif $\mathbf{B}$; un 1-*cocycle* de G sur $\mathbf{B}^\times$ est une famille $(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ telle que $c_{\sigma\tau} = c_\sigma \sigma(c_\tau)$; en conséquence, $c_{\mathrm{Id}} = 1$. Pour tout élément $b \in \mathbf{B}^\times$, $(\sigma(b)b^{-1})_{\sigma\in G}$ est un 1-cocycle appelé 1-*cobord*.

On note $Z^1(G,\mathbf{B}^\times)$ l'ensemble des 1-cocycles de G sur $\mathbf{B}^\times$; c'est un sous-groupe du groupe (commutatif) de toutes les applications de G dans $\mathbf{B}^\times$ muni du produit à l'arrivée. L'application $\mathbf{B}^\times \to Z^1(G,\mathbf{B}^\times)$, $b \mapsto (\sigma(b)b^{-1})_{\sigma\in G}$, est un morphisme ; on note $B^1(G,\mathbf{B}^\times)$ son image et l'on définit *le premier groupe de cohomologie de G sur $\mathbf{B}^\times$* :

$$H^1(G,\mathbf{B}^\times) = Z^1(G,\mathbf{B}^\times)\big/B^1(G,\mathbf{B}^\times)\ .$$

Enfin, on définit l'anneau (en général non commutatif) $\mathbf{B}\{G\}$ comme étant le $\mathbf{B}$-module de base G, muni du produit $(b\sigma)\cdot(b'\sigma') = b\sigma(b')\sigma\sigma'$. Alors $\mathbf{B}$ devient une $\mathbf{B}\{G\}$-algèbre via $(\sum_\sigma b_\sigma\sigma)\cdot b = \sum_\sigma b_\sigma\sigma(b)$.
On appelle $\mathbf{B}\{G\}$ *l'algèbre tordue du groupe G* (twisted group algebra of G).
Soit $(\mathbf{A},\mathbf{B},G)$ une algèbre galoisienne. Le but du problème est d'associer à tout 1-cocycle $c=(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1 noté $\mathbf{B}_c^G$ et de montrer que $c\mapsto \mathbf{B}_c^G$ définit un morphisme injectif de $H^1(G,\mathbf{B}^\times)$ dans $\mathsf{Pic}(\mathbf{A})$. En particulier, si $\mathsf{Pic}(\mathbf{A})$ est trivial, alors tout 1-cocycle de G sur $\mathbf{B}^\times$ est un cobord.
1. Montrer que $\mathbf{B}\{G\}\to \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$, $\sigma\mapsto\sigma$ est un isomorphisme de $\mathbf{A}$-algèbres.
2. Soit $c\in Z^1(G,\mathbf{B}^\times)$. On définit $\theta_c : \mathbf{B}\{G\}\to\mathbf{B}\{G\}$ par $\theta_c(b\sigma)=bc_\sigma\sigma$.

a. Vérifier $\theta_c\circ\theta_d=\theta_{cd}$; en déduire que θ_c est un $\mathbf{A}$-automorphisme de $\mathbf{B}\{G\}$.

b. Montrer que si $c\in B^1(G,\mathbf{B}^\times)$, alors θ_c est un automorphisme intérieur.

3. Soit $c\in Z^1(G,\mathbf{B}^\times)$. On considère l'action de $\mathbf{B}\{G\}$ sur $\mathbf{B}$ « tordue » par θ_c, i.e. $z\cdot b=\theta_c(z)\,b$; on note $\mathbf{B}_c$ ce $\mathbf{B}\{G\}$-module, $\mathbf{B}_c^G$ l'ensemble des éléments de $\mathbf{B}$ invariants par G (pour cette action tordue par θ_c), et

$$\pi_c=\textstyle\sum_{\sigma\in G} c_\sigma\,\sigma\in \mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}).$$

Vérifier que $\mathbf{B}_c^G$ est un sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{B}$. Montrer que π_c est une surjection de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{B}_c^G$ en en explicitant une section ; en déduire que $\mathbf{B}_c^G$ est facteur direct dans $\mathbf{B}$ (en tant que $\mathbf{A}$-module).
4. On va montrer que pour tout $c\in Z^1(G,\mathbf{B}^\times)$, $\mathbf{B}_c^G$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1.

a. Vérifier que $\mathbf{B}_c^G\mathbf{B}_d^G\simeq\mathbf{B}_{cd}^G$ et $\mathbf{B}_c^G\otimes_{\mathbf{A}}\mathbf{B}_d^G\simeq\mathbf{B}_{cd}^G$.

b. Montrer que si $c\in B^1(G,\mathbf{B}^\times)$, alors $\mathbf{B}_c^G\simeq\mathbf{A}$. Conclure.

c. Montrer que $c\mapsto\mathbf{B}_c^G$ induit un morphisme injectif de $H^1(G,\mathbf{B}^\times)$ dans $\mathsf{Pic}(\mathbf{A})$.

5. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau zéro-dimensionnel (par exemple un corps discret), montrer que tout 1-cocycle $(c_\sigma)_{\sigma\in G}$ est le cobord d'un $b\in\mathbf{B}^\times$.
6. On suppose que G est cyclique d'ordre n, $G=\langle\sigma\rangle$, et que $\mathsf{Pic}(\mathbf{A})=0$.
Soit $x\in B$; montrer que $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(x)=1$ si, et seulement si, il existe $b\in\mathbf{B}^\times$ tel que $x=\sigma(b)/b$.

Problème 5. *(Le morphisme de Segre dans un cas particulier)*
Soit $\mathbf{A}[\underline{X},\underline{Y}]=\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n,Y_1,\dots,Y_n]$. On considère l'idéal $\mathfrak{a}=\langle X_iY_j-X_jY_i\rangle$, i.e. l'idéal $\mathcal{D}_2(A)$, où A est la matrice générique $\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & \cdots & X_n\\ Y_1 & Y_2 & \cdots & Y_n\end{bmatrix}$. On veut montrer que $\mathfrak{a}$ est le noyau du morphisme :

$$\varphi:\mathbf{A}[\underline{X},\underline{Y}]\to\mathbf{A}[T,U,\underline{Z}]=\mathbf{A}[T,U,Z_1,\dots,Z_n],\quad X_i\to TZ_i,\ \ Y_i\to UZ_i,$$

où T, U, Z_1, …, Z_n sont des nouvelles indéterminées. Convenons de dire qu'un monôme $m\in\mathbf{A}[\underline{X},\underline{Y}]$ est normalisé si m est égal à $X_{i_1}\cdots X_{i_r}Y_{j_1}\cdots Y_{j_s}$

avec $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_s \leqslant n$ (les indices de $\underline{X}$ sont plus petits que ceux de $\underline{Y}$). On note $\mathfrak{a}_{\mathrm{nor}}$ le sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{A}[\underline{X},\underline{Y}]$ engendré par les monômes normalisés.

1. Si m, m' sont normalisés, montrer que $\varphi(m) = \varphi(m') \Rightarrow m = m'$. En déduire que $\operatorname{Ker}\varphi \cap \mathfrak{a}_{\mathrm{nor}} = \{0\}$.
2. Montrer que l'on a une somme directe de $\mathbf{A}$-modules : $\mathbf{A}[\underline{X},\underline{Y}] = \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{a}_{\mathrm{nor}}$
3. En déduire que $\mathfrak{a} = \operatorname{Ker}\varphi$. En particulier, si $\mathbf{A}$ est réduit (resp. sans diviseur de zéro), alors $\mathfrak{a}$ est radical (resp. premier).

Commentaire. Le morphisme φ induit, par co-morphisme, un morphisme entre espaces affines

$$\psi : \mathbb{A}^2(\mathbf{A}) \times \mathbb{A}^n(\mathbf{A}) \to \mathbb{M}_{2,n}(\mathbf{A}) \simeq \mathbb{A}^{2n}(\mathbf{A}),\ \big((t,u),z\big) \mapsto \begin{bmatrix} tz_1 & \cdots & tz_n \\ uz_1 & \cdots & uz_n \end{bmatrix}.$$

Si $\mathbf{A}$ est un corps, l'image de ψ est le lieu des zéros $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$, et ψ induit au niveau des espaces projectifs, une inclusion $\mathbb{P}^1(\mathbf{A}) \times \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{A}) \to \mathbb{P}^{2n-1}(\mathbf{A})$ (appelée « plongement »).
De manière plus générale, en changeant totalement les notations, avec des indéterminées $X_1, \ldots, X_n$, $Y_1, \ldots, Y_m$, Z_{ij}, $i \in [\![1..n]\!]$, $j \in [\![1..m]\!]$, considérons le morphisme $\varphi : \mathbf{A}[\underline{Z}] \to \mathbf{A}[\underline{X},\underline{Y}]$, $Z_{ij} \to X_iY_j$. On montre que $\operatorname{Ker}\varphi = \mathcal{D}_2(A)$ où $A \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{A}[\underline{Z}])$ est la matrice générique. Le morphisme φ induit, par co-morphisme, un morphisme entre espaces affines

$$\psi : \mathbb{A}^n(\mathbf{A}) \times \mathbb{A}^m(\mathbf{A}) \to \mathbb{M}_{n,m}(\mathbf{A}) \simeq \mathbb{A}^{nm}(\mathbf{A}),\ \big((x_i)_i,(y_j)_j\big) \mapsto (x_iy_j)_{ij},$$

dont l'image est le lieu des zéros $\mathcal{Z}\big(\mathcal{D}_2(A)\big)$. Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, ψ induit une injection $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{A}) \times \mathbb{P}^{m-1}(\mathbf{A}) \to \mathbb{P}^{nm-1}(\mathbf{A})$: c'est le plongement de Segre. Cela permet de réaliser $\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{m-1}$ *comme une sous-variété algébrique projective de* $\mathbb{P}^{nm-1}$ (en un sens précis que nous ne détaillons pas ici).
Si $\mathbf{A}$ est quelconque, soient $E \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{A})$, $F \in \mathbb{P}^{m-1}(\mathbf{A})$; E est donc un sous-module facteur direct dans $\mathbf{A}^n$, de rang 1 ; idem pour F. Alors $E \otimes_{\mathbf{A}} F$ s'identifie canoniquement à un sous-module de $\mathbf{A}^n \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}^m \simeq \mathbf{A}^{nm}$, facteur direct, de rang 1. En posant $\psi(E,F) = E \otimes_{\mathbf{A}} F$, on obtient ainsi une application de $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbf{A}) \times \mathbb{P}^{m-1}(\mathbf{A})$ vers $\mathbb{P}^{nm-1}(\mathbf{A})$ qui « prolonge » l'application précédemment définie : si $x \in \mathbf{A}^n$, $y \in \mathbf{A}^m$ sont unimodulaires, il en est de même de $x \otimes y \in \mathbf{A}^n \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{A}^m$, et en posant $E = \mathbf{A}x$, $F = \mathbf{A}y$, on a $E \otimes_{\mathbf{A}} F = \mathbf{A}(x \otimes y)$.

Problème 6. *(Le morphisme de Veronese dans un cas particulier)*
Soient $d \geqslant 1$, $\mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_0, \ldots, X_d]$ et $\mathfrak{a} = \langle X_iX_j - X_kX_\ell, i+j = k+\ell\rangle$. On va montrer que l'idéal $\mathfrak{a}$ est le noyau du morphisme :

$$\varphi : \mathbf{A}[\underline{X}] \to \mathbf{A}[U,V], \qquad \varphi(X_i) = U^{d-i}V^i.$$

où U, V sont deux nouvelles indéterminées. On définit un autre idéal $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = \langle X_iX_j - X_{i-1}X_{j+1}, 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant d-1\rangle$$

1. Montrer que :
$$\operatorname{Ker}\varphi \cap (\mathbf{A}[X_0,X_d] + \mathbf{A}[X_0,X_d]X_1 + \cdots + \mathbf{A}[X_0,X_d]X_{d-1}) = \{0\}$$
2. Montrer que l'on a une somme directe de $\mathbf{A}$-modules :
$$\mathbf{A}[\underline{X}] = \mathfrak{b} \oplus \mathbf{A}[X_0,X_d] \oplus \mathbf{A}[X_0,X_d]X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{A}[X_0,X_d]X_{d-1}$$

3. En déduire que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} = \operatorname{Ker}\varphi$. En particulier, si $\mathbf{A}$ est réduit (resp. sans diviseur de zéro), alors $\mathfrak{a}$ est radical (resp. premier).

Commentaire. Plus généralement, soient $N = \binom{n+d}{d} = \binom{n+d}{n}$ et $n+1+N$ indéterminées $U_0, \dots, U_n, (X_\alpha)_\alpha$, où les indices $\alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$ sont tels que $|\alpha| = d$. On dispose d'un morphisme $\varphi : \mathbf{A}[\underline{X}] \to \mathbf{A}[\underline{U}]$, $X_\alpha \mapsto \underline{U}^\alpha$ (le cas particulier étudié ici est $n = 1 \mapsto N = d+1$) ; son noyau est l'idéal

$$\mathfrak{a} = \langle X_\alpha X_\beta - X_{\alpha'} X_{\beta'}, \alpha + \beta = \alpha' + \beta' \rangle .$$

Par co-morphisme, φ induit un morphisme entre espaces affines :

$$\psi : \mathbb{A}^{n+1}(\mathbf{A}) \to \mathbb{A}^N(\mathbf{A}),\ u = (u_0, \dots, u_n) \mapsto (u^\alpha)_{|\alpha|=d}.$$

Si $\mathbf{A}$ est un corps discret, l'image de ψ est le lieu des zéros $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ et l'on peut montrer que ψ induit une injection $\mathbb{P}^n(\mathbf{A}) \to \mathbb{P}^{N-1}(\mathbf{A})$: c'est le plongement de Veronese de degré d.

De manière encore plus générale, soit E un sous-module facteur direct dans $\mathbf{A}^{n+1}$, de rang 1., La composante homogène de degré d de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}_\mathbf{A}(E)$, que l'on note $\mathbf{S}_\mathbf{A}(E)_d$, s'identifie à un sous-module de $\mathbf{S}_\mathbf{A}(\mathbf{A}^{n+1})_d \simeq \mathbf{A}[U_0, \dots, U_n]_d$ (composante homogène de degré d), facteur direct et de rang 1.

Si l'on pose $\psi(E) = \mathbf{S}_\mathbf{A}(E)_d$, on « prolonge » ainsi l'application ψ définie précédemment. ∎

Problème 7. *(Matrices de Veronese)*

Soient deux anneaux de polynômes $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \dots, X_n]$ et $\mathbf{k}[\underline{Y}] = \mathbf{k}[Y_1, \dots, Y_m]$. À toute matrice $A \in \mathbf{k}^{m\times n}$, qui représente une application linéaire $\mathbf{k}^n \to \mathbf{k}^m$, on peut associer (attention au renversement), un $\mathbf{k}$-morphisme $\varphi_A : \mathbf{k}[\underline{Y}] \to \mathbf{k}[\underline{X}]$ construit de la manière suivante : soient $X'_1, \dots, X'_m$ les m formes linéaires de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ définies comme suit.

$$\text{Si} \quad \begin{bmatrix} X'_1 \\ \vdots \\ X'_m \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}, \quad \text{alors} \quad \varphi_A : f(Y_1, \dots, Y_m) \mapsto f(X'_1, \dots, X'_m).$$

Il est clair que φ_A induit une application $\mathbf{k}$-linéaire $A_d : \mathbf{k}[\underline{Y}]_d \to \mathbf{k}[\underline{X}]_d$ entre les composantes homogènes de degré $d \geqslant 0$, et que la restriction $A_1 : \mathbf{k}[\underline{Y}]_1 \to \mathbf{k}[\underline{X}]_1$ a pour matrice dans les bases $(Y_1, \dots, Y_m)$ et $(X_1, \dots, X_n)$, la *transposée* de A. Le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{k}[\underline{X}]_d$ est libre de rang $n' = \binom{n-1+d}{d}$; il possède une base naturelle, celle des monômes de degré d, que l'on peut choisir d'ordonner par l'ordre lexicographique, avec $X_1 > \cdots > X_n$. Idem pour $\mathbf{k}[\underline{Y}]_d$ avec sa base de $m' = \binom{m-1+d}{m-1}$ monômes. On note $V_d(A) \in \mathbf{k}^{m'\times n'}$ la *transposée* de la matrice de l'endomorphisme A_d dans ces bases (de sorte que $V_1(A) = A$) et l'on dit que $V_d(A)$ est l'extension de Veronese de A en degré d.

Par exemple, soit $n = 2$, $d = 2$, donc $n' = 3$; si $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on obtient la matrice $V_2(A) \in \mathbb{M}_3(\mathbf{k})$ de la manière suivante

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x'^2 \\ x'y' \\ y'^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ ac & ad+bc & bd \\ c^2 & 2cd & d^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \end{bmatrix}.$$

1. Si A, B sont deux matrices pour lesquelles le produit AB a un sens, vérifier les égalités $\varphi_{AB} = \varphi_B \circ \varphi_A$ et $V_d(AB) = V_d(A)V_d(B)$ pour tout $d \geqslant 0$. Vérifier également que $V_d({}^{\mathrm{t}}A) = {}^{\mathrm{t}}V_d(A)$.
2. Si E est un $\mathbf{k}$-module, le *transformé d-Veronese de E* est le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(E)_d$, composante homogène de degré d de l'algèbre symétrique $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(E)$.
Si E est facteur direct dans $\mathbf{k}^n$, alors $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(E)_d$ s'identifie à un sous-module de $\mathbf{S}_{\mathbf{k}}(\mathbf{k}^n)_d \simeq \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]_d$, facteur direct (voir aussi le problème 6). Montrer que l'image par V_d d'un projecteur est un projecteur et que l'on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{GA}_n(\mathbf{k}) & \xrightarrow{V_d} & \mathbb{GA}_{n'}(\mathbf{k}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Im}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{Im}} \\ \mathbb{G}_n(\mathbf{k}) & \xrightarrow{d-\mathrm{Veronese}} & \mathbb{G}_{n'}(\mathbf{k}) \end{array} \qquad \text{avec} \quad n' = \tbinom{n-1+d}{d} = \tbinom{n-1+d}{n-1}$$

3. Montrer que si A est un projecteur de rang 1, il en est de même de $V_d(A)$. Et plus généralement, si A est un projecteur de rang r, alors $V_d(A)$ est un projecteur de rang $\binom{d+1-r}{r-1}$.

Problème 8. *(Quelques exemples de résolutions projectives finies)*
Étant donnés $2n+1$ éléments z, x_1, …, x_n, y_1, …, y_n, d'un anneau $\mathbf{A}$, on définit une suite de matrices $F_k \in \mathbb{M}_{2^k}(\mathbf{A})$, pour $k \in [\![0..n]\!]$, de la manière suivante :

$$F_0 = \begin{bmatrix} z \end{bmatrix}, \qquad F_k = \begin{bmatrix} F_{k-1} & x_k \mathrm{I}_{2^{k-1}} \\ y_k \mathrm{I}_{2^{k-1}} & \mathrm{I}_{2^{k-1}} - F_{k-1} \end{bmatrix}.$$

Ainsi avec $\overline{z} = 1 - z$:

$$F_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 \\ y_1 & \overline{z} \end{bmatrix}, \qquad F_2 = \begin{bmatrix} z & x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & \overline{z} & 0 & x_2 \\ y_2 & 0 & \overline{z} & -x_1 \\ 0 & y_2 & -y_1 & z \end{bmatrix}.$$

1. Vérifier que $F_k^2 - F_k$ est la matrice scalaire de terme $z(z-1) + \sum_{i=1}^k x_i y_i$. Montrer également que ${}^{\mathrm{t}}F_n$ est semblable à $\mathrm{I}_{2^n} - F_n$ pour $n \geqslant 1$. En conséquence, si $z(z-1) + \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$, alors F_n est un projecteur de rang 2^{n-1}.
2. On définit trois suites de matrices

$$U_k, V_k \in \mathbb{M}_{2^{k-1}}(\mathbf{A})\,(k \in [\![1..n]\!]), \quad G_k \in \mathbb{M}_{2^k}(\mathbf{A})\,(k \in [\![0..n]\!]),$$

de la manière suivante : $U_1 = \begin{bmatrix} x_1 \end{bmatrix}$, $V_1 = \begin{bmatrix} y_1 \end{bmatrix}$, $G_0 = \begin{bmatrix} z \end{bmatrix}$ et :

$$U_k = \begin{bmatrix} U_{k-1} & x_k \mathrm{I} \\ y_k \mathrm{I} & -V_{k-1} \end{bmatrix}, \; V_k = \begin{bmatrix} V_{k-1} & x_k \mathrm{I} \\ y_k \mathrm{I} & -U_{k-1} \end{bmatrix}, \; G_k = \begin{bmatrix} z\mathrm{I} & U_k \\ V_k & \overline{z}\mathrm{I} \end{bmatrix}.$$

Ainsi :

$$U_2 = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_2 & -y_1 \end{bmatrix}, \; V_2 = \begin{bmatrix} y_1 & x_2 \\ y_2 & -x_1 \end{bmatrix}, \; G_2 = \begin{bmatrix} z & 0 & x_1 & x_2 \\ 0 & z & y_2 & -y_1 \\ y_1 & x_2 & \overline{z} & 0 \\ y_2 & -x_1 & 0 & \overline{z} \end{bmatrix}.$$

a. Vérifier que G_n et F_n sont conjuguées par une matrice de permutation.
b. Vérifier que $U_k V_k$ est le scalaire $\sum_{i=1}^k x_i y_i$ et que $U_k V_k = V_k U_k$.
c. Pour $n \geqslant 1$, si $z(z-1) + \sum_{i=1}^n x_i y_i = 0$, montrer que G_n (donc F_n) est un projecteur de rang 2^{n-1}.

3. Soit M un $\mathbf{A}$-module. Une *résolution projective finie* de M est une suite exacte de modules projectifs de type fini $0 \to P_n \to \cdots \to P_1 \to P_0 \twoheadrightarrow M \to 0$; on dit que n est *la longueur de la résolution.* Dans ce cas, M est de présentation finie.

a. On considère deux résolutions projectives finies de M que l'on peut supposer de même longueur :

$$\begin{array}{l} 0 \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_1 \to P_0 \to M \to 0 \\ 0 \to P'_n \to P'_{n-1} \to \cdots \to P'_1 \to P'_0 \to M \to 0 \end{array}.$$

En utilisant l'exercice V-4, montrer que l'on a dans $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ l'égalité suivante :

$$(\star) \qquad \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[P_i] = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i[P'_i].$$

Note. L'exercice V-4 fournit un résultat bien plus précis. ∎

Définition et notation. Pour un module M qui admet une résolution projective finie on note $[M] \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ la valeur commune de $(\star)$ (même si M n'est pas projectif de type fini). On définit alors *le rang de M* comme celui de $[M]$ et l'on a $\operatorname{rg} M = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rg} P_i \in \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$.

b. Soit M un $\mathbf{A}$-module admettant une résolution projective finie ; on suppose que $aM = 0$ avec $a \in \operatorname{Reg}(\mathbf{A})$. Montrer que $\operatorname{rg}(M) = 0$ i.e. que $[M] \in \widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A})$.

Si $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque, on définit l'anneau

$$\mathbf{B}_n = \mathbf{k}[z, \underline{x}, \underline{y}] = \mathbf{k}[Z, X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n] \Big/ \Big\langle Z(Z-1) + \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i \Big\rangle$$

Ainsi $\mathbf{B}_0 \simeq \mathbf{k} \times \mathbf{k}$. On note $\mathfrak{b}_n$ l'idéal $\langle z, x_1, \ldots, x_n \rangle$.

4. Montrer que les localisés $\mathbf{B}_n[1/z]$ et $\mathbf{B}_n[1/(1-z)]$ sont des localisés élémentaires (i.e., obtenus en inversant un seul élément) d'un anneau de polynômes sur $\mathbf{k}$ à $2n$ indéterminées. Montrer que $\mathbf{B}_n/\langle x_n \rangle \simeq \mathbf{B}_{n-1}[y_n] \simeq \mathbf{B}_{n-1}[Y]$.

5. Pour $n = 1$, définir une résolution projective du $\mathbf{B}_1$-module $\mathbf{B}_1/\mathfrak{b}_1$ de longueur 2 et vérifier que $[\mathbf{B}_1/\mathfrak{b}_1] \in \widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{B}_1)$.

6. Pour $n = 2$, définir une résolution projective du $\mathbf{B}_2$-module $\mathbf{B}_2/\mathfrak{b}_2$ de longueur 3 :

$$0 \to \operatorname{Im} F_2 \to \mathbf{B}_2^4 \to \mathbf{B}_2^3 \xrightarrow{[z,x_1,x_2]} \mathbf{B}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{B}_2/\mathfrak{b}_2 \to 0,$$

et vérifier que $[\mathbf{B}_2/\mathfrak{b}_2] \in \widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{B}_2)$.

7. Expliciter une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_{2^n}$ telle que les $n+1$ premiers coefficients de la première ligne de la matrice $F'_n = P_\sigma F_n P_\sigma^{-1}$ soient z, x_1, …, x_n (P_σ est la matrice de la permutation σ).

8. Pour $n = 3$, définir une résolution projective du $\mathbf{B}_3$-module $\mathbf{B}_3/\mathfrak{b}_3$ de longueur 4 :

$$0 \to \operatorname{Im}(\mathrm{I}_8 - F'_3) \to \mathbf{B}_3^8 \to \mathbf{B}_3^7 \to \mathbf{B}_3^4 \xrightarrow{[z,x_1,x_2,x_3]} \mathbf{B}_3 \twoheadrightarrow \mathbf{B}_3/\mathfrak{b}_3 \to 0,$$

et vérifier que $[\mathbf{B}_3/\mathfrak{b}_3] \in \widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{B}_3)$.

9. Et en général ?

Problème 9. *(Quand les monômes dominants sont premiers entre eux)*
Dans ce problème, $\mathbf{k}$ est anneau quelconque et $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]$ un anneau de polynômes avec un ordre monomial $\preccurlyeq$ fixé.
Si $m = \underline{X}^\alpha$ est un monôme et f un polynôme, la notation $f \preccurlyeq m$ signifie que f est une combinaison $\mathbf{k}$-linéaire de monômes $\preccurlyeq m$; convention analogue pour $f \prec m$.
Enfin $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ est dit $\preccurlyeq$*-unitaire* si $f = m + r$ où m est un monôme et $r \prec m$.

Soient $f_1, \ldots, f_s \in \mathbf{k}[\underline{X}]$. On suppose que chaque f_i est $\preccurlyeq$-unitaire, de monôme dominant m_i et enfin que $\operatorname{pgcd}(m_i, m_j) = 1$ pour $i \neq j$.
On note S le sous-$\mathbf{k}$-module de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ admettant base les monômes m tels que $m \notin \langle m_1, \ldots, m_s \rangle$:

$$S = \bigoplus_{m \notin \langle m_1, \ldots, m_s \rangle} \mathbf{k}\, m$$

Un des objectifs du problème est de montrer que

$$(\star) \qquad \mathbf{k}[\underline{X}] = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \oplus S$$

La démonstration ci-dessous fournit les moyens d'écrire tout polynôme f dans la décomposition $\mathfrak{a} \oplus S$.
Pour ceux qui connaissent les bases de Gröbner : si $\mathbf{k}$ est un corps, la décomposition $(\star)$ ci-dessus est classique ; on dit parfois que les monômes de S (les « monômes sous l'escalier ») sont standard : tout polynôme f est donc équivalent modulo $\mathfrak{a}$ à un et un seul polynôme $\mathbf{k}$-combinaison de monômes standard, combinaison qualifiée de forme normale de f modulo $\mathfrak{a}$ (relativement à l'ordre monomial $\preccurlyeq$). Dans ce contexte, l'idéal momonial $\langle m_1, \ldots, m_s \rangle$ est l'idéal initial de $\mathfrak{a}$ relativement à l'ordre monomial $\preccurlyeq$ (idéal engendré par les monômes dominants des polynômes de $\mathfrak{a}$, on dit aussi souvent « idéal de tête »).
1. Pour un monôme m, on introduit deux $\mathbf{k}$-modules $\mathfrak{a}_{\prec m}$ et $\mathfrak{a}_{\preccurlyeq m}$ qui sont des sous-$\mathbf{k}$-modules de l'idéal $\mathfrak{a} = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$,

$$\mathfrak{a}_{\prec m} = \left\{ \sum_i g_i \,|\, g_i \in \langle f_i \rangle \text{ et } g_i \prec m \right\} \subset \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m} = \left\{ \sum_i g_i \,|\, g_i \in \langle f_i \rangle \text{ et } g_i \preccurlyeq m \right\}$$

Il est clair que $\mathfrak{a}$ est la réunion des $\mathfrak{a}_{\prec m}$ a fortiori des $\mathfrak{a}_{\preccurlyeq m}$.

a. Il existe des $r_i \prec m_i$ tels que $m_j f_i - m_i f_j = r_j f_i - r_i f_j$.

b. Soient m'_i, m'_j deux monômes tels que $m'_i m_i = m'_j m_j$.
En notant m le monôme $m'_i m_i = m'_j m_j$, montrer que $m'_i f_i - m'_j f_j \in \mathfrak{a}_{\prec m}$.

c. Plus généralement, pour une partie $I \subseteq \{1, \ldots, s\}$, supposons disposer de monômes $(m'_i)_{i \in I}$ et d'un monôme m tels que $m'_i m_i = m$. Alors si $(a_i)_{i \in I}$ est une famille finie d'éléments de $\mathbf{k}$ de somme nulle, on a $\sum_{i \in I} a_i m'_i f_i \in \mathfrak{a}_{\prec m}$.
On pourra utiliser une « transformation d'Abel »

$$a_1 b_1 + \cdots + a_k b_k = \textstyle\sum_{j=1}^{k-1} s_j (b_j - b_{j+1}),$$

avec $s_j = \sum_{i=1}^{j} a_i$ dès que $\sum a_i = 0$.

d. Soit $g \in \langle f_i \rangle$ et un monôme m tel que $g \preccurlyeq m$. Selon que m_i divise ou ne divise pas m, montrer que, ou bien $g \prec m$ ou bien $g - a m' f_i \in \mathfrak{a}_{\prec m}$ pour un $a \in \mathbf{k}$ et un monôme m' tel que $m' m_i = m$.

2. Soit m un monôme. Montrer que si $f \in \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m}$ et $f \prec m$, alors $f \in \mathfrak{a}_{\prec m}$. En déduire que $S \cap \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m} \subset \mathfrak{a}_{\prec m}$. Puis $S \cap \langle f_1, \ldots, f_s \rangle = 0$.
3. Montrer que $\mathbf{k}[\underline{X}] = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle + S$. Plus précisément : si $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ et $f \preccurlyeq m$ pour un monôme m, alors $f \in \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m} + S$.
Conclusion : $\mathbf{k}[\underline{X}] = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle \oplus S$.
En outre $\langle m_1, \ldots, m_s \rangle$ est *l'idéal initial* de $\langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ au sens suivant : si pour $a \in \mathbf{k}$ et m monôme on a $am + h \in \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ avec $h \prec m$, alors am appartient à $\langle m_1, \ldots, m_s \rangle$.
4. Montrer que le module des syzygies de $(f_1, \ldots, f_s)$ est engendré par les $f_i \varepsilon_j - f_j \varepsilon_i$ où $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s)$ est la base canonique de $\mathbf{k}[\underline{X}]^s$.

5. Montrer que la suite de monômes $(m_1, \dots, m_s)$ est régulière et qu'il en est de même de $(f_1, \dots, f_s)$.
6. On suppose $m_i \neq 1$ pour tout i. Soit M l'ensemble des monômes appartenant à S. Montrer que $\mathbf{k}[\underline{X}]$ est un $\mathbf{k}[f_1, \dots, f_s]$-module libre de base les $m \in M$ et que $(f_1, \dots, f_s)$ sont $\mathbf{k}$-algébriquement indépendants.
7. Soient, dans $\mathbf{k}[X, Y]$, les deux polynômes $f_1 = X^2$ et $f_2 = XY + aY^2$ avec $a \in \mathbf{k}$, tous les deux homogènes de degré 2 et unitaires pour l'ordre lexicographique $Y \prec X$.

a. On a $a^2Y^3 \in \langle f_1, f_2\rangle$, et $Y^3 \in \langle f_1, f_2\rangle \iff a \in \mathbf{k}^\times$.
b. On suppose a régulier. Alors l'idéal $\langle f_1, f_2\rangle$ est facteur direct dans $\mathbf{k}[X, Y]$ si, et seulement si, a est inversible.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. On reprend à peu près la deuxième preuve du lemme de la liberté locale. Notons φ l'application linéaire qui a pour matrice F. Appelons f_j la colonne j de la matrice F, et $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbf{A}^n$. Par hypothèse, $(f_1, \dots, f_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbf{A}^n$. La matrice de passage correspondante est $B_1 = \begin{bmatrix} V & 0 \\ C' & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$. Puisque $\varphi(f_i) = \varphi\big(\varphi(e_i)\big) = \varphi(e_i) = f_i$, par rapport à cette base, φ a une matrice du type $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & X \\ 0 & Y \end{bmatrix}$. Le calcul donne :

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}, \qquad G = B_1^{-1} F B_1 = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ 0 & -C'V^{-1}L' + W \end{bmatrix},$$

où $L = V^{-1}L'$, et $C = -C'V^{-1}$.
Puisque $\mathcal{D}_{k+1}(G) = 0$, on a $G = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, donc $W = C'V^{-1}L'$.
On pose $B_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & -L \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$, on a $B_2^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$, puis $B_2^{-1} G B_2 = \mathrm{I}_{k,n}$.
Finalement on obtient $B^{-1} F B = \mathrm{I}_{k,n}$ avec

$$B = B_1 B_2 = \begin{bmatrix} V & 0 \\ C' & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & -L \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & -L' \\ C' & \mathrm{I}_h - W \end{bmatrix}$$

et

$$B^{-1} = B_2^{-1} B_1^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V^{-1} & 0 \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V^{-1} + LC & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}.$$

L'égalité $F^2 = F$ donne en particulier $V = V^2 + L'C'$.
Donc $\mathrm{I}_k = V\,(\mathrm{I}_k + L'C'V^{-1}) = V\,(\mathrm{I}_k - LC)$, et finalement $V^{-1} = \mathrm{I}_k - LC$. Donc comme annoncé $B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$.
Avant de démontrer l'affirmation concernant $\mathrm{I}_h - W$ voyons la réciproque.

La double égalité

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k - LC & L \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ C & \mathrm{I}_h - CL \end{bmatrix}$$

montre que $\mathrm{I}_k - LC$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{I}_h - CL$ est inversible si, et seulement si, $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$ est inversible. Cela donne aussi

$$\det \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \det(\mathrm{I}_k - LC) = \det(\mathrm{I}_h - CL)\,.$$

Le calcul donne alors

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} V & -VL \\ -CV & \mathrm{I}_h + CVL \end{bmatrix},$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V & VL \\ -CV & -CVL \end{bmatrix},$$

ce qui établit la réciproque.
Enfin l'égalité $B^{-1}\,F\,B = \mathrm{I}_{k,n}$ implique $B^{-1}\,(\mathrm{I}_n - F)\,B = \mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{k,n}$, ce qui donne

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_k - V & -L' \\ -C' & \mathrm{I}_h - W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_h \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_k & L \\ C & \mathrm{I}_h \end{bmatrix}$$

et l'on se retrouve dans la situation symétrique, donc $(\mathrm{I}_h - W)^{-1} = \mathrm{I}_h - CL$ et $\det V = \det(\mathrm{I}_h - W)$.

Exercice 5. Noter g (resp. d) la multiplication à gauche (resp. à droite) par P. On a alors $g^2 = g$, $d^2 = d$, $gd = dg$, $\varphi = g + d - 1$ et $\pi = g + d - 2gd$.

Exercice 8. *1a.* La « matrice de Sylvester homogène » S est définie comme celle de l'application linéaire $(A, B) \mapsto PA + QB$ sur les bases $(u^{q-1}, \dots, v^{q-1})$ pour A (polynôme homogène de degré $q-1$), $(u^{p-1}, \dots, v^{p-1})$ pour B (polynôme homogène de degré $p-1$) et $(u^{p+q-1}, \dots, v^{p+q-1})$ pour $PA + QB$ (polynôme homogène de degré $p+q-1$).
En faisant $v = 1$, on voit que ${}^{\mathrm{t}}S = \mathrm{Syl}(g, p, h, q)$, d'où $\det(S) = \mathrm{Res}(g, p, h, q)$.
En faisant $u = 1$, on voit que ${}^{\mathrm{t}}S$ est presque la matrice $\mathrm{Syl}(\widetilde{g}, p, \widetilde{h}, q)$: il faut renverser l'ordre des lignes, l'ordre des q premières colonnes et l'ordre des p dernières. D'où le résultat annoncé car $(-1)^{\lfloor q/2 \rfloor + \lfloor p/2 \rfloor + \lfloor (p+q)/2 \rfloor} = (-1)^{pq}$.
1b. L'égalité $S\widetilde{S} = \mathrm{Res}(P, Q)\,\mathrm{I}_{p+q}$ signifie que, si $k + \ell = p + q - 1$, $u^k v^\ell \mathrm{Res}(P, Q)$ est une combinaison linéaire des vecteurs colonnes de la matrice S. Cela donne donc exactement l'inclusion requise, qui n'est en fin de compte que la version homogène de l'inclusion habituelle.
2. On écrit f sous forme irréductible $f = a/b$ avec $a, b \in \mathbf{k}[t]$, et l'on homogénéise a et b en degré d (maximum des degrés de a et b) pour obtenir deux polynômes homogènes A, $B \in \mathbf{k}[u, v]$ de degré d.
Si $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque, on demande que $\mathrm{Res}(A, B)$ soit inversible. Cela

est nécessaire pour que la fraction reste bien définie après toute extension des scalaires. Voyons alors que le morphisme f est d'abord défini au niveau des vecteurs unimodulaires :

$$(\xi : \zeta) \mapsto \big(A(\xi,\zeta) : B(\xi,\zeta)\big).$$

Ceci a bien un sens car si $1 \in \langle \xi, \zeta \rangle$, alors $1 \in \langle A(\xi,\zeta), B(\xi,\zeta)\rangle$ d'après le point *1b.*
Pour remonter au niveau $\mathbb{GA}_{2,1}(\mathbf{k})$, on prend deux nouvelles indéterminées x, y en pensant à la matrice $\begin{bmatrix} xu & yu \\ xv & yv \end{bmatrix}$. Comme $\langle u, v\rangle^{2d-1} \subseteq \langle A, B\rangle$, on peut écrire

$$(xu + yv)^{2d-1} = E(x,y,u,v)A(u,v) + F(x,y,u,v)B(u,v)$$

avec E et F homogènes en (x, y, u, v).
En fait, E et F sont bi-homogènes en $\big((x,y),(u,v)\big)$, de degré $2d-1$ en (x,y), de degré $d-1$ en (u,v). Comme EA est bi-homogène, de bi-degré $(2d-1, 2d-1)$, il existe [7] un polynôme homogène α' en 4 variables, $\alpha' = \alpha'(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, tel que :

$$EA = \alpha'(xu, yu, xv, yv), \quad \deg(\alpha') = 2d-1.$$

Même chose avec FA, EB, FB pour produire β', γ', δ'. On considère alors les matrices :

$$\begin{bmatrix} xu & yu \\ xv & yv \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} EA & FA \\ EB & FB \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix}.$$

Le relèvement cherché est alors $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{bmatrix}$.
Note : α', β', γ', δ' sont des polynômes homogènes en $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$, de degré $2d-1$, tels que :

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \text{ divise } \begin{vmatrix} \alpha' & \beta' \\ \gamma' & \delta' \end{vmatrix}, \qquad \alpha + \delta - 1 \text{ divise } \alpha' + \delta' - 1.$$

Justification de l'existence de α'.
Cela repose sur le fait simple suivant : $u^i v^j x^k y^\ell$ est un monôme en (xu, yu, xv, yv) si, et seulement si, $i + j = k + \ell$; en effet, si cette égalité est vérifiée, il y a une matrice $\begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbb{N})$ telle que les sommes de lignes soient (i, j) et les sommes de colonnes soient (k, l). Un schéma pour aider la lecture :

$$\begin{array}{c} \\ i \\ j \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} k & \ell \end{array} \\ \begin{bmatrix} m & n \\ r & s \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{bmatrix} xu & yu \\ xv & yv \end{bmatrix},$$

et alors

$$u^i v^j x^k y^\ell = u^{m+n} v^{r+s} x^{m+r} y^{n+s} = (xu)^m (yu)^n (xv)^r (yv)^s.$$

On en déduit qu'un polynôme bi-homogène en $\big((x,y),(u,v)\big)$, de bi-degré (d,d), est l'évaluation en (xu, yu, xv, yv) d'un polynôme homogène de degré d.
3. Pour $f(t) = t^2$, on obtient le relèvement :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha^2(\alpha + 3\delta) & \beta^2(3\alpha + \delta) \\ \gamma^2(\alpha + 3\delta) & \delta^2(3\alpha + \delta) \end{bmatrix}.$$

7. Voir la justification ci-dessous.

Plus généralement, on développe $(\alpha+\delta)^{2d-1}$ sous la forme $\alpha^d S_d(\alpha,\delta)+\delta^d S_d(\delta,\alpha)$, et l'on obtient le relèvement :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} \alpha^d S_d(\alpha,\delta) & \beta^d S_d(\delta,\alpha) \\ \gamma^d S_d(\alpha,\delta) & \delta^d S_d(\delta,\alpha) \end{bmatrix}.$$

Si $H = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, on obtient le relèvement suivant de $f(t) = \frac{at+b}{ct+d}$:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto H \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} H^{-1}.$$

Exercice 9. On procède comme dans l'exercice 8, mais c'est plus simple car puisque $\langle u,v\rangle^2 = \langle u^2, uv, v^2\rangle$, l'application $(u:v) \mapsto (u^2 : uv : v^2)$ est bien définie au niveau des vecteurs unimodulaires.

On introduit (x,y) en pensant à la matrice $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} xu & yu \\ xv & yv \end{bmatrix}$. On développe $(xu+yv)^2 = x^2u^2+2xyuv+y^2v^2$, somme de trois termes qui vont être les termes diagonaux d'une matrice de $\mathbb{GA}_{3,1}(\mathbf{k})$, puis on complète de façon à ce que chaque colonne soit le multiple ad-hoc du vecteur ${}^t[\,u^2\ uv\ v^2\,]$. Ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} x^2u^2 & 2xyu^2 & y^2u^2 \\ x^2uv & 2xyuv & y^2uv \\ x^2v^2 & 2xyv^2 & y^2v^2 \end{bmatrix} \qquad F = \begin{bmatrix} \alpha^2 & 2\alpha\beta & \beta^2 \\ \alpha\gamma & 2\alpha\delta & \beta\delta \\ \gamma^2 & 2\gamma\delta & \delta^2 \end{bmatrix}.$$

Le relèvement $\mathbb{GA}_{2,1}(\mathbf{k}) \to \mathbb{GA}_{3,1}(\mathbf{k})$ est $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \mapsto F$.

On a bien sûr $\mathrm{Tr}(F) = (\alpha+\delta)^2 = 1$, $\mathcal{D}_2(F) \subseteq \langle \alpha\delta-\beta\gamma\rangle = 0$, et F est un projecteur de rang 1.

Exercice 10. *1.* On fournit deux solutions pour cette question. La première consiste à utiliser l'expression de l'adjointe en fonction de la matrice de départ ; la seconde preuve utilise la localisation.

Pour $A \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ on a l'expression classique de $\widetilde{A}$ comme polynôme en A :

$$\widetilde{A} = (-1)^{n-1}Q(A) \ \text{ avec } \ XQ(X) = \mathrm{C}_A(X) - \mathrm{C}_A(0).$$

Appliquons ceci à un projecteur P de rang $n-1$. Il vient

$$\mathrm{C}_P(X) = (X-1)^{n-1}X,\ Q(X) = (X-1)^{n-1} \text{ et } (P-\mathrm{I}_n)^{n-1} = (-1)^{n-1}\widetilde{P}.$$

Puisque $(\mathrm{I}_n - P)^{n-1} = \mathrm{I}_n - P$, on obtient $P + \widetilde{P} = \mathrm{I}_n$.

Voici la preuve par localisation. D'après le théorème de structure locale des modules projectifs de type fini (théorème V-6.1 ou théorème 1.5), il existe des localisations comaximales telles que sur chaque localisé, P est semblable à $\mathrm{I}_{r,n}$, où l'entier r dépend a priori de la localisation. Ici, puisque P est de rang $n-1$, on a $r = n-1$ ou $1 = 0$. Donc $P + \widetilde{P} = \mathrm{I}_n$ sur chaque localisé. Et l'égalité est aussi vraie globalement d'après le principe local-global de base.

2. Voyons la démonstration par localisations comaximales. Sur le localisé $\mathbf{A}_s$, le projecteur P est semblable à $Q_s = \mathrm{I}_{r,n}$, où r dépend de s. On a $Q_s + \widetilde{Q_s} = \mathrm{I}_n$.

Si $r < n-1$, alors $Q_s + \widetilde{Q_s} = \mathrm{I}_{r,n}$. Si $r = n$, alors $Q_s + \widetilde{Q_s} = 2\,\mathrm{I}_n$.

Bilan : si $r \neq n-1$, alors $1 = 0$ et le rang est aussi égal à $n-1$. En conséquence

sur tous les localisés $\mathbf{A}_s$, le projecteur P est de rang $n-1$, et donc globalement aussi.
3. Il suffit de multiplier $P+\widetilde{P}=\mathrm{I}_n$ par P pour obtenir $P^2=P$.

Exercice 11. Il existe $B\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $ABA=A$, de sorte que AB est un projecteur de même image que A, donc de rang $n-1$, et BA un projecteur de même noyau que A, donc également de rang $n-1$. On définit P et $Q\in\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ par $AB=\mathrm{I}_n-P$, et $BA=\mathrm{I}_n-Q$.
Ainsi P, $Q\in\mathbb{GA}_{1,n}(\mathbf{A})$, avec $A=(\mathrm{I}_n-P)A=A(\mathrm{I}_n-Q)$.
1. On a $\det A=0$, i.e. $\widetilde{A}A=A\widetilde{A}=0$, donc $\mathrm{Im}\,A\subseteq\mathrm{Ker}\,\widetilde{A}$.
Ensuite $\widetilde{AB}=\widetilde{\mathrm{I}_n-P}=P$ (car $P\in\mathbb{GA}_{1,n}(\mathbf{A})$). Et l'égalité $\widetilde{B}\widetilde{A}=P$ prouve que :

$$\mathrm{Ker}\,\widetilde{A}\subseteq\mathrm{Ker}\,P=\mathrm{Im}(\mathrm{I}_n-P)=\mathrm{Im}\,A.$$

Conclusion : $\mathrm{Ker}\,\widetilde{A}=\mathrm{Im}\,A=\mathrm{Im}(\mathrm{I}_n-P)$.
2. En raisonnant comme on point *1*, on obtient $\mathrm{Im}\,\widetilde{A}\subseteq\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Ker}(BA)=\mathrm{Im}\,Q$, puis $\widetilde{A}\widetilde{B}=\widetilde{BA}=\widetilde{\mathrm{I}_n-Q}=Q$, et $\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Im}\,\widetilde{A}=\mathrm{Im}\,Q$.
3. On applique le point *1* à ${}^{\mathrm{t}}A$, donc $\mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}A=\mathrm{Ker}\,{}^{\mathrm{t}}\widetilde{A}$. Ensuite, on explicite le projecteur "de gauche" (de rang 1) associé à ${}^{\mathrm{t}}A$. On a :

$${}^{\mathrm{t}}A\,{}^{\mathrm{t}}B\,{}^{\mathrm{t}}A={}^{\mathrm{t}}A,\quad\text{que l'on écrit}\quad{}^{\mathrm{t}}(BA)\,{}^{\mathrm{t}}A={}^{\mathrm{t}}A\quad\text{avec}\quad{}^{\mathrm{t}}(BA)=\mathrm{I}_n-{}^{\mathrm{t}}Q.$$

Ce projecteur de gauche est donc ${}^{\mathrm{t}}Q$.
4. De même, le point *2* donne $\mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}\widetilde{A}=\mathrm{Ker}\,{}^{\mathrm{t}}A$. On explicite le "projecteur de droite" (de rang 1) associé à ${}^{\mathrm{t}}A$, on obtient ${}^{\mathrm{t}}P$, d'où le résultat annoncé.
5. Enfin :

$$\mathbf{A}^n/\,\mathrm{Im}\,A=\mathbf{A}^n/\,\mathrm{Im}(\mathrm{I}_n-P)\simeq\mathrm{Im}\,P,\qquad\mathrm{Ker}\,{}^{\mathrm{t}}A=\mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}P,$$

donc les deux modules (projectifs de rang 1) sont bien duaux l'un de l'autre.
Remarque : on peut également utiliser

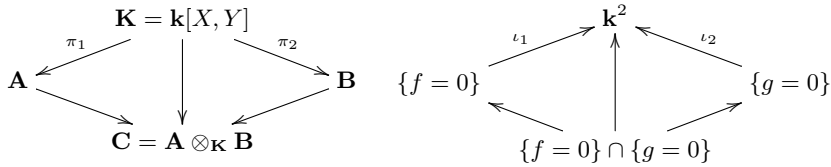
$$\mathbf{A}^n/\,\mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}A=\mathbf{A}^n/\,\mathrm{Im}(\mathrm{I}_n-{}^{\mathrm{t}}Q)\simeq\mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}Q,\qquad\mathrm{Ker}\,A=\mathrm{Im}\,Q,$$

pour voir que les deux modules (projectifs de rang 1) $\mathbf{A}^n/\,\mathrm{Im}\,{}^{\mathrm{t}}A$ et $\mathrm{Ker}\,A$ sont bien duaux l'un de l'autre.

Exercice 12. Tout d'abord on remarque que les flèches surjectives $\mathbf{k}[\underline{X}]\xrightarrow{\pi_1}\mathbf{A}$ et $\mathbf{k}[\underline{X}]\xrightarrow{\pi_2}\mathbf{B}$ dans la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres de présentation finie sont vues, du point de vue des schémas, comme des « inclusions » $A\xrightarrow{\iota_1}\mathbf{k}^n$ et $B\xrightarrow{\iota_2}\mathbf{k}^n$, où $\mathbf{k}^n$ est interprété comme le schéma affine correspondant à $\mathbf{k}[\underline{X}]$. La définition de l'intersection par produit tensoriel est donc en fait une définition comme somme amalgamée des deux flèches π_1 et π_2 dans la catégorie des $\mathbf{k}$-algèbres de présentation finie, ou comme produit fibré des deux flèches ι_1 et ι_2 dans la catégorie des schémas affines sur $\mathbf{k}$.
Le centre de l'ellipse, le centre du cercle et point d'intersection double ont pour coordonnées respectives $(0,0)$, $(c,0)$ et $(a,0)$. Le calcul des autres points d'intersection donne $x=a(2ac+1-a^2)/(a^2-1)$ et $y^2=4ac(a^2-ac-1)/(a^2-1)^2$.
Du point de vue des algèbres quotients on obtient

$$\mathbf{A}=\mathbf{k}[X,Y]/\langle f\rangle\,,\quad\mathbf{B}=\mathbf{k}[X,Y]/\langle g\rangle\,,\quad\mathbf{C}=\mathbf{k}[X,Y]/\langle f,g\rangle\,.$$

Ce qui donne les morphismes



Si $\mathbf{k}$ est un corps discret et si $4ac(a^2-ac-1)(a^2-1) \in \mathbf{k}^\times$, les $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont intègres, mais pas $\mathbf{C}$: on a un isomorphisme

$$\mathbf{C} \xrightarrow{\sim} \mathbf{k}[\zeta] \times \mathbf{k}[\varepsilon], \quad \text{où } \varepsilon^2 = 0 \text{ et } \zeta^2 = 4ac(a^2-ac-1)/(a^2-1)^2.$$

L'algèbre $\mathbf{C}$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension 4, correspondant au schéma affine formé par deux points de multiplicité 1 (définis sur $\mathbf{k}$ ou sur une extension quadratique de $\mathbf{k}$) et un point de multiplicité 2 (défini sur $\mathbf{k}$).

Exercice 13. On rappelle que pour un idempotent e, on a $\langle a, e\rangle = \langle (1-e)a + e\rangle$; si e' est un autre idempotent orthogonal à e, on a $\langle \overline{a}\rangle = \langle \overline{e'}\rangle$ dans $\mathbf{A}/\langle e\rangle$ si, et seulement si, $\langle (1-e)a\rangle = \langle e'\rangle$ dans $\mathbf{A}$.

1. Pour $k > r$, on a $a_k = 0$ dans chaque composante, donc dans $\mathbf{A}$. L'élément a_r est nul dans $\mathbf{A}/\langle e_r\rangle$, inversible dans $\mathbf{A}/\langle 1-e_r\rangle$ donc $\langle a_r\rangle = \langle e_r\rangle$.

De même dans $\mathbf{A}/\langle e_r\rangle$, on a $\langle \overline{a_{r-1}}\rangle = \langle \overline{e_{r-1}}\rangle$ donc $\langle (1-e_r)a_{r-1}\rangle = \langle e_{r-1}\rangle$. Et ainsi de suite.

2. Localiser en chacun des e_i.

Exercice 14. *1.* Comme $f(t) = 0$, on a $f \in \mathfrak{a}$, d'où une application $\mathbf{A}$-linéaire surjective $\mathbf{A}[T]/\langle f\rangle \twoheadrightarrow \mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}$ entre deux $\mathbf{A}$-modules libres de même rang n : c'est un isomorphisme (proposition II-5.2), donc $\mathfrak{a} = \langle f\rangle$.

2. Le polynôme caractéristique f de t est unitaire de degré n car $\mathbf{A}[t]$ est de rang constant n. Comme $f(t) = 0$, on a $f \in \mathfrak{a}$, d'où une application $\mathbf{A}$-linéaire surjective $\mathbf{A}[T]/\langle f\rangle \twoheadrightarrow \mathbf{A}[T]/\mathfrak{a}$, d'un $\mathbf{A}$-module libre de rang n sur un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant n ; c'est donc un isomorphisme (proposition 3.4), donc $\mathfrak{a} = \langle f\rangle$.

3. Soit $f = \sum_{i=0}^{r} a_i T^i = \sum_{i=0}^{r} f_r$ un polynôme localement unitaire de degré formel r, avec le système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_0, \dots, e_r)$, et $fe_d = f_d$ unitaire de degré d modulo $\langle 1-e_d\rangle$ pour chaque $d \in [\![0..r]\!]$.

Alors $a_r = e_r$ est idempotent. Ensuite $f - f_r = (1-e_r)f$ est localement unitaire de degré formel $r-1$ et l'on peut terminer par récurrence descendante sur r pour calculer les e_d à partir de f. Si l'anneau est discret on obtient un test pour décider si un polynôme donné est localement unitaire : chacun des e_d calculés successivement doit être idempotent et la somme des e_d doit être égale à 1.

Exercice 15. *1.* Il existe un sous-$\mathbf{A}$-module N de $\mathbf{B}$ tel que $M.N = \mathbf{A}$.

On a $(x_1, \dots, x_n)$ dans M et $(y_1, \dots, y_n)$ dans N tels que $1 = \sum_i x_i y_i$ et $x_i y_j \in \mathbf{A}$. On vérifie que $M = \sum_i \mathbf{A}x_i$ et $N = \sum_i \mathbf{A}y_i$. Soit $\sum_k z_k \otimes z'_k$ dans $M \otimes_{\mathbf{A}} M'$. On a, en remarquant que $y_i z_k \in N.M = \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_k z_k \otimes z'_k &= \textstyle\sum_{k,i} x_i y_i z_k \otimes z'_k &&= \textstyle\sum_{k,i} x_i\,(y_i z_k) \otimes z'_k \\ &= \textstyle\sum_{k,i} x_i \otimes (y_i z_k)\, z'_k &&= \textstyle\sum_i x_i \otimes \Big(y_i \sum_k z_k z'_k\Big),\end{aligned}$$

donc la surjection canonique $M \otimes_{\mathbf{A}} M' \to M.M'$ est injective.

2. Il faut montrer que $\mathfrak{a}$ contient un élément régulier (lemme V-7.7 *5*), ce qui est immédiat.

Exercice 16. Définir la suite va de soi ; ainsi, l'application $\mathbf{K}^\times \to \mathrm{Gfr}(\mathbf{A})$ est celle qui à $x \in \mathbf{K}^\times$ associe l'idéal fractionnaire principal $\mathbf{A}x$. Pas de problème non plus pour vérifier que le composé de deux morphismes consécutifs est trivial.
Exactitude en $\mathbf{K}^\times$ *:* si $x \in \mathbf{K}^\times$ est tel que $\mathbf{A}x = \mathbf{A}$, alors $x \in \mathbf{A}^\times$.
Exactitude en $\mathrm{Gfr}(\mathbf{A})$ *:* si $\mathfrak{a} \in \mathrm{Gfr}(\mathbf{A})$ est libre, cela signifie qu'il est principal i.e. de la forme $\mathbf{A}x$ avec $x \in \mathbf{K}^\times$.
Seule l'exactitude en $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ est plus délicate. De manière générale, si P est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini, alors l'application canonique $P \to \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} P$ est injective car P est contenu dans un $\mathbf{A}$-module libre. Soit donc P un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1 tel que $\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} P \simeq \mathbf{K}$. Alors P s'injecte dans $\mathbf{K}$ puis dans $\mathbf{A}$ (multiplier par un dénominateur), i.e. P est isomorphe à un idéal entier $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$. De même, le dual $P^\star$ est isomorphe à un idéal entier $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$.
Et l'on a $\mathbf{A} \simeq P \otimes_{\mathbf{A}} P^\star \simeq \mathfrak{a} \otimes_{\mathbf{A}} \mathfrak{b} \simeq \mathfrak{ab}$, donc $\mathfrak{ab}$ est engendré par un élément régulier $x \in \mathbf{A}$. On a $x \in \mathfrak{a}$ donc $\mathfrak{a}$ est un idéal inversible : on a trouvé un idéal inversible $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ tel que $\mathfrak{a} \simeq P$.

Exercice 24. *1* et *2.* Immédiat.
3. On considère la courte suite $\mathbf{A}^N \xrightarrow{A'} \mathbf{A}^m \xrightarrow{A} \mathbf{A}^n$; elle est exacte localement, donc globalement.
4. Tout module stablement libre de rang 1 peut être donné sous la forme $\mathrm{Ker}\, A$ où $A \in \mathbf{A}^{n\times(n+1)}$ est une matrice surjective $\mathbf{A}^{n+1} \xrightarrow{A} \mathbf{A}^n$. Puisque $1 \in \mathcal{D}_n(A)$, on applique la question *3* avec $m = n+1$. On obtient $A' \in \mathbf{A}^{(n+1)\times 1}$ de rang 1 avec $\mathrm{Im}\, A' = \mathrm{Ker}\, A$; donc la colonne A' est une base de $\mathrm{Ker}\, A$.

Exercice 25. Soit $f \in \mathbf{k}[X_0, \dots, X_n]$ un polynôme homogène de degré m et (pour simplifier) $P = \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}\rangle \subseteq \mathbf{k}^{n+1}$ un facteur direct de rang 1. On suppose que $f(\underline{a}) = f(\underline{b}) = f(\underline{c}) = 0$ et l'on veut montrer que $f(\underline{x}) = 0$ si $\underline{x} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$. La matrice de $(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c})$ est de rang 1, donc les a_i, b_j, c_k sont comaximaux. Il suffit donc de prouver l'égalité après localisation en une de ces coordonnées. Par exemple sur $\mathbf{k}[1/a_0]$ on a $\underline{x} = (\alpha + \frac{b_0}{a_0}\beta + \frac{c_0}{a_0}\gamma)\underline{a} = \lambda\underline{a}$, et donc $f(\underline{x}) = \lambda^m f(\underline{a}) = 0$.

Exercice 26. On considère la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\varepsilon] = \mathbf{k}[T]/\langle T^2\rangle$.
Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{k})$ et $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$. On a $A + \varepsilon H = A(\mathrm{I}_n + \varepsilon A^{-1}H)$. Et $\mathrm{I}_n + \varepsilon M$ est inversible, d'inverse $\mathrm{I}_n - \varepsilon M$, pour tout $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$. Donc $A + \varepsilon H \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{k})$ pour n'importe quel H. Ainsi, l'espace tangent $\mathrm{T}_A(\mathbb{GL}_n)$ est isomorphe à $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$.
NB : $(A + \varepsilon H)^{-1} = A^{-1} - \varepsilon A^{-1}HA^{-1}$.

Exercice 27. On utilise la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\varepsilon]$ de l'exercice 26. Pour A, $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$, on a $\det(A + \varepsilon H) = \det(A) + \varepsilon\,\mathrm{Tr}(\widetilde{A}H)$. On en déduit

$$\det(A + \varepsilon H) = 1 \iff (\det(A) = 1 \text{ et } \mathrm{Tr}(\widetilde{A}H) = 0).$$

On a donc, pour $A \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{k})$, $\mathrm{T}_A(\mathbb{SL}_n) = \left\{ H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k}) \;\middle|\; \mathrm{Tr}(\widetilde{A}H) = 0 \right\}$.
Montrons que $\mathrm{T}_A(\mathbb{SL}_n)$ est un $\mathbf{k}$-module libre de rang $n^2 - 1$.
En effet, l'automorphisme $\mathbf{k}$-linéaire $H \mapsto AH$ de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ transforme I_n en A et applique bijectivement $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathbb{SL}_n)$ sur $\mathrm{T}_A(\mathbb{SL}_n)$, comme on peut le vérifier en écrivant $\mathrm{Tr}(H) = \mathrm{Tr}(\widetilde{A}\,AH)$. Enfin $\mathrm{T}_{\mathrm{I}_n}(\mathbb{SL}_n)$ est le sous-$\mathbf{k}$-module de $\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ constitué des matrices de trace nulle (qui est bien libre de rang $n^2 - 1$).
NB : $H \mapsto HA$ était aussi possible, car $\mathrm{Tr}(AH\,\widetilde{A}) = \mathrm{Tr}(\widetilde{A}\,AH) = \mathrm{Tr}(H)$.

Exercice 28. *1.* On voit facilement que $\varphi(H)J_0 = J_0\varphi(H)$. Si $\mathbf{k}$ était un corps, on pourrait en déduire que $\varphi(H)$ est un polynôme en J_0. Le calcul direct donne

$$\varphi(e_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i < j \\ J_0^{n-1-(i-j)} & \text{sinon .} \end{cases}$$

En particulier, $\varphi(e_{i1}) = J_0^{n-i}$. On a donc $\operatorname{Im}\varphi = \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbf{k}J_0^k$.
2. Pour $k \in [\![0..n-1]\!]$, la matrice J_0^k a ses coefficients nuls, sauf ceux qui sont sur la k-ième sur-diagonale, tous égaux à 1. On peut donc prendre comme supplémentaire de $\operatorname{Im}\varphi$ le sous-module engendré par les e_{ij}, avec $j < n$ (on omet donc les e_{in} qui correspondent à la dernière position des sur-diagonales des J_0^k). On définit alors ψ par

$$\psi(e_{ij}) = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n \\ e_{i1} & \text{si } j = n \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \psi(H) = H\,{}^{\mathrm{t}}J_0^{n-1}.$$

On vérifie facilement que $\psi(J_0^{n-i}) = e_{i1}$ pour $i \in [\![1..n]\!]$, puis $(\varphi\circ\psi)(A) = A$ si $A \in \operatorname{Im}\varphi$, et enfin $\varphi\circ\psi\circ\varphi = \varphi$. Par miracle, on a aussi $\psi\circ\varphi\circ\psi = \psi$.
On a $e_{ij} - e_{i'j'} \in \operatorname{Ker}\varphi$ dès que $i'-j' = i-j$ ($i' \geqslant j'$, $i \geqslant j$) et l'on obtient une base de $\operatorname{Ker}\varphi$ en considérant les $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices e_{ij} avec $i<j$ et les $\frac{n(n-1)}{2}$ matrices $e_{i1} - e_{i+r,1+r}$, $r \in [\![1..n-i]\!]$, $i \in [\![1..n-1]\!]$.
3. On utilise la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{k}[\varepsilon] \simeq \mathbf{k}[T]\big/\langle T^2\rangle$. Pour $A, H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$, on a

$$(A+\varepsilon H)^n = A^n + \varepsilon \textstyle\sum_{i+j=n-1} A^i H A^j.$$

Pour $A = J_0$, on trouve que l'espace tangent « au cône nilpotent » est $\operatorname{Ker}\varphi$ qui est un module libre de rang n^2-n (c'est la dimension du cône nilpotent).

Exercice 30. *(Syzygies entre monômes)*
Soit $r \in \mathbf{k}[\underline{X}]^s$; dire que $r \in \sum_{i,j} \mathbf{k}[\underline{X}](m_{ij}\varepsilon_i - m_{ji}\varepsilon_j)$ c'est dire qu'il existe des $r_{ij} \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ vérifiant $r_{ii} = 0$, $r_{ij} + r_{ji} = 0$ et

$$r = \textstyle\sum_{i,j} r_{ij}m_{ij}\varepsilon_i = \sum_i \left(\sum_j r_{ij}m_{ij}\right)\varepsilon_i.$$

Soit une relation $\sum_i u_i m_i = 0$ avec $u_i \in \mathbf{k}[\underline{X}]$. En considérant la composante sur un monôme quelconque fixé m, on obtient un terme $a_i m_i'$ de u_i avec $a_i \in \mathbf{k}$, m_i' monôme tel que $m_i' m_i = m$ et $\sum_i a_i m_i' m_i = 0$, i.e. $\sum_i a_i = 0$. Il est entendu que $a_i = 0$ si $m_i \not| \, m$ et l'on peut se limiter dans la suite aux m_i tels que $m_i \mid m$. Il suffit donc de montrer que $\sum_i a_i m_i' \varepsilon_i$ est dans le module engendré par les $m_{ij}\varepsilon_i - m_{ji}\varepsilon_j$.
Puisque $m_i' m_i = m = m_j' m_j$, le monôme m est divisible par m_i, par m_j donc par leur ppcm $m_i \vee m_j$; par conséquent, on peut écrire :

$$m = q_{ij}(m_i \vee m_j), \quad \text{et l'on a donc} \quad q_{ij} = q_{ji}.$$

Il vient :

$$m_i' m_i = q_{ij}(m_i \vee m_j), \quad \text{donc} \quad m_i' = q_{ij}\tfrac{m_i \vee m_j}{m_i} = q_{ij}\tfrac{m_j}{m_i \wedge m_j} = q_{ij}m_{ij}.$$

D'autre part, puisque $\sum_i a_i = 0$, il existe une matrice antisymétrique $(a_{ij}) \in \mathbb{M}_s(\mathbf{k})$ telle que $a_i = \sum_j a_{ij}$ (la somme sur la ligne i vaut a_i). Par exemple, pour $s = 4$:

$$\begin{bmatrix} 0 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ a_2 & 0 & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 0 & 0 \\ a_4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix}$$

On écrit alors (comme par magie en ayant gratté un peu sur son brouillon) :

$$a_i m_i' = \textstyle\sum_j a_{ij} m_i' = \sum_j a_{ij} q_{ij} m_{ij}.$$

Et il ne reste plus qu'à poser $r_{ij} = a_{ij}q_{ij}$: on a bien $r_{ii} = 0$, $r_{ij} + r_{ji} = 0$ et $\sum_i a_i m'_i \varepsilon_i = \sum_{i,j} r_{ij} m_{ij} \varepsilon_i$.

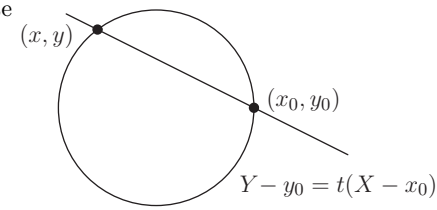
Problème 1. *(L'anneau du cercle)*

1. De manière naïve : soit $f = f(x,y) \in \mathbf{k}[x,y]$ une conique, i.e. un polynôme de degré 2, et (x_0, y_0) un $\mathbf{k}$-point de $\{f(x,y) = 0\}$.

L'astuce classique de paramétrage consiste à définir t par $y - y_0 = t(x - x_0)$ et, dans l'équation

$$f(x,y) = f\big(x, t_0 + t(x - x_0)\big) = 0,$$

à chercher x en fonction de t. Cette équation admet $x = x_0$ comme solution, d'où l'autre solution sous forme rationnelle.



Algébriquement parlant, on supppose f irréductible, on pose $\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[X,Y]/\langle f \rangle$ et l'on obtient $\mathbf{k}(x,y) = \mathbf{k}(t)$ avec $t = (y - y_0)/(x - x_0)$. Ici, la lectrice calculera les expressions de x, y en fonction de t : $x = \frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = \frac{-2t}{t^2+1}$.

Géométriquement, les éléments de $\mathbf{k}[x,y]$ sont exactement les fractions rationnelles définies partout sur la droite projective $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ (paramétrée par t) sauf peut-être au « point » $t = \pm i$.

2. On a $x = 1 - 2u$, $y = -2v$, donc $\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[u,v]$. L'égalité $\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[u,v]$ n'est pas difficile et est laissée au lecteur. Ce qui est plus difficile, c'est de montrer que $\mathbf{k}[u,v]$ est la clôture intégrale de $\mathbf{k}[u]$ dans $\mathbf{k}(t)$. On renvoie à l'exercice XII-8.

Géométriquement, les pôles de x et y sont $t = \pm i$, ce qui confirme que x, y sont entiers sur $\mathbf{k}[(1+t^2)^{-1}] = \mathbf{k}[u]$. Algébriquement, on a $x = 1 - u$, $y^2 = -1 - x^2 \in \mathbf{k}[u]$, et x, y sont bien entiers sur $\mathbf{k}[u]$.

3. Si $i^2 = -1$, on a $(x + iy)(x - iy) = 1$.

En posant $w = x + iy$, on a $\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[w, w^{-1}]$.

4. On applique la méthode standard en un point non singulier d'une courbe plane. On écrit

$$f(X,Y) - f(x_0,y_0) = (X - x_0)u(X,Y) + (Y - y_0)v(X,Y)$$

avec ici $u = X + x_0$, $v = Y + y_0$; la matrice $A = \begin{bmatrix} y - y_0 & x + x_0 \\ x_0 - x & y + y_0 \end{bmatrix}$ est donc une matrice de présentation de $(x - x_0, y - y_0)$ avec $1 \in \mathcal{D}_1(A)$. Explicitons l'appartenance $1 \in \mathcal{D}_1(A)$:

$$(-y_0)(y - y_0) + x_0(x + x_0) + x_0(x_0 - x) + y_0(y + y_0) = 2.$$

Ceci conduit à la matrice $B = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -y_0 & x_0 \\ x_0 & y_0 \end{bmatrix}$; celle-ci vérifie $ABA = A$ et la matrice P cherchée est $P = \mathrm{I}_2 - AB = \widetilde{AB}$:

$$AB = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} y - y_0 & x + x_0 \\ x_0 - x & y + y_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -y_0 & x_0 \\ x_0 & y_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_0x - y_0y + 1 & y_0x + x_0y \\ y_0x + x_0y & -x_0x + y_0y + 1 \end{bmatrix}.$$

D'où l'expression générale de P : $P = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -x_0x + y_0y + 1 & -(y_0x + x_0y) \\ -(y_0x + x_0y) & x_0x - y_0y + 1 \end{bmatrix}$,

pour $x_0 = 1$, $y_0 = 0$: $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 - x & -y \\ -y & 1 + x \end{bmatrix}$. Ainsi, P est un projecteur de rang 1,

matrice de présentation de $(x-x_0, y-y_0)$. Comme P est symétrique, l'égalité (5) de la proposition V-7.4 a comme conséquence que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2$ est un générateur de $\langle x-x_0, y-y_0\rangle$ avec $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2 = -2(x_0x+y_0y-1)$. Géométriquement, $xx_0+yy_0-1=0$ est la tangente au cercle $x^2+y^2=1$ au point $P_0=(x_0,y_0)$. Pour ceux qui connaissent les diviseurs : le diviseur des zéros-pôles de cette tangente est le diviseur principal $2P_0-2P_{t=\pm i}$, ce qui correspond au fait que le carré de l'idéal $\langle x-x_0, y-y_0\rangle$ est principal.

Variante I : on traite directement le cas du point $(x,y)=(1,0)$ (voir question suivante) puis on utilise le fait que le cercle est un groupe pour passer du point $(1,0)$ à un point quelconque $P_0=(x_0,y_0)$. Ainsi, on dispose de l'automorphisme « rotation »

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ qui réalise } \begin{bmatrix} x_0 & -y_0 \\ y_0 & x_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

On considère son inverse R,

$$R = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{bmatrix},\ R\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},\ R\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de sorte que :

$$R\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'-1 \\ y' \end{bmatrix}, \quad \text{d'où} \quad \langle x'-1, y'\rangle = \langle x-x_0, y-y_0\rangle.$$

Comme $\langle x'-1, y'\rangle^2 = \langle x'-1\rangle$, on obtient $\langle x-x_0, y-y_0\rangle^2 = \langle x_0x+y_0y-1\rangle$.

Variante II : on fournit une autre justification de l'inversibilité de $\langle x-x_0, y-y_0\rangle$ qui n'utilise pas directement le fait que le cercle est lisse. On considère $\mathbf{k}[x,y]$ comme une extension de degré 2 de $\mathbf{k}[x]$, en utilisant $(1,y)$ comme base. On dispose d'un $\mathbf{k}[x]$-automorphisme σ qui transforme y en $-y$.

On considère la norme N de $\mathbf{k}[x,y]$ sur $\mathbf{k}[x]$. Pour $z=a(x)+b(x)y$, on a :

$$\mathrm{N}(z) = z\sigma(z) = (a+by)(a-by) = a^2-(1-x^2)b^2 = a^2+(x^2-1)b^2.$$

L'idée pour inverser $\langle x-x_0, y-y_0\rangle$ est de le multiplier par son $\mathbf{k}[x]$-conjugué. Montrons l'égalité suivante, certificat de l'inversibilité de l'idéal $\langle x-x_0, y-y_0\rangle$:

$$\langle x-x_0, y-y_0\rangle\ \langle x-x_0, y+y_0\rangle = \langle x-x_0\rangle.$$

En effet, les générateurs du produit de gauche sont :

$$(x-x_0)^2, \quad (x-x_0)(y+y_0), \quad (x-x_0)(y-y_0), \quad y^2-y_0^2 = x_0^2-x^2.$$

D'où $\langle x-x_0, y-y_0\rangle\ \langle x-x_0, y+y_0\rangle = (x-x_0)\langle g_1,g_2,g_3,g_4\rangle$ avec

$$g_1 = x-x_0, \quad g_2 = y+y_0, \quad g_3 = y-y_0, \quad g_4 = x+x_0.$$

Mais $\langle g_1,g_2,g_3,g_4\rangle$ contient $\frac{g_4-g_1}{2} = x_0$ et $\frac{g_2-g_3}{2} = y_0$ donc il contient $1 = x_0^2+y_0^2$.

5. Par la brute force, en utilisant à droite que $1 \in \langle x-1, x+1\rangle$:

$$\langle x-1, y\rangle\ \langle x-1, y\rangle = \left\langle (x-1)^2, (x-1)y, y^2\right\rangle = (x-1)\ \langle x-1, y, -(x+1)\rangle = \langle x-1\rangle.$$

On divise cette égalité par $x-1$: $\langle x-1, y\rangle\ \left\langle 1, \frac{y}{x-1}\right\rangle = \langle 1\rangle$ et l'on pose :

$$x_1 = x-1, \quad x_2 = y,\ y_1 = 1,\ y_2 = \tfrac{y}{x-1}, \text{ de sorte que } x_1y_1+x_2y_2 = -2,$$

ce qui conduit à la matrice de projection P de rang 1 :

$$P = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}[x_1,x_2] = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 \\ x_1y_2 & x_2y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1-x & -y \\ -y & 1+x \end{bmatrix}$$

6. Notons $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathbf{k}[x,y]/\mathbf{k}}$. Pour $a,b \in \mathbf{k}[x]$, $\mathrm{N}(a+by) = a^2+(x^2-1)b^2$. L'égalité à prouver sur les degrés est évidente si a ou b est nul. Sinon, on écrit, avec $n = \deg a$ et $m = 1+\deg b$, $a^2 = \alpha^2x^{2n}+\ldots$, $(x^2-1)b^2 = \beta^2x^{2m}+\ldots$ ($\alpha,\beta \in \mathbf{k}^\star$). Le cas où $2n \neq 2m$ est facile. Si $2n = 2m$, alors $\alpha^2+\beta^2 \neq 0$ (car -1 non carré dans $\mathbf{k}$),

et donc le polynôme $a^2 + (x^2-1)b^2$ est de degré $2n = 2m$.
Si $a+by$ est inversible dans $\mathbf{A}$, $\mathrm{N}(a+by) \in \mathbf{k}[x]^\times = \mathbf{k}^\star$; d'où $b = 0$ puis a constant.
Bilan : $\mathbf{k}[x,y]^\times = \mathbf{k}^\star$. Ceci est spécifique au fait que -1 n'est pas carré dans $\mathbf{k}$ car si $i^2 = -1$, l'égalité $(x+iy)(x-iy) = 1$ montre l'existence d'inversibles autres que les constantes.
Montrons que y est irréductible.
Si $y = zz'$, alors $\mathrm{N}(y) = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$, i.e $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = \mathrm{N}(z)\mathrm{N}(z')$. Mais dans $\mathbf{k}[x]$, $x \pm 1$ ne sont pas associés à une norme (une norme non nulle est de degré pair). Donc $\mathrm{N}(z)$ ou $\mathrm{N}(z')$ est une constante, i.e. z ou z' est inversible. De la même façon, $1 \pm x$ sont irréductibles.
On va utiliser l'égalité

$$y^2 = (1-x)(1+x), \quad \text{analogue à } 2 \cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{-5}) \text{ dans } \mathbb{Z}[\sqrt{-5}],$$

pour voir que $\langle x-1, y\rangle$ n'est pas un idéal principal : une égalité $\langle x-1, y\rangle = \langle d\rangle$ entraînerait $d \mid x-1$, $d \mid y$, i.e. d inversible, i.e. $1 \in \langle x-1, y\rangle$, ce qui n'est pas.

Problème 2. *(Les opérations λ_t et γ_t sur $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$)*
1. On a $\lambda_t(\mathbf{A}) = \lambda_t(1) = 1+t$ et $\gamma_t(1) = 1/(1-t)$.
Donc $\lambda_t(p) = (1+t)^p$ et $\gamma_t(p) = 1/(1-t)^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.
On écrit x sous la forme $[P] - [\mathbf{A}^p] = P - p$ pour un certain $p \in \mathbb{N}^*$, avec P de rang constant p. D'après la définition $\gamma_t([P]) = \sum_{n=0}^{p} \lambda^n(P) t^n/(1-t)^n$, on a

$$\gamma_t(x) = \frac{\gamma_t([P])}{\gamma_t(p)} = \textstyle\sum_{n=0}^{p} \lambda^n(P) t^n (1-t)^{p-n}.$$

Ainsi $\gamma_t(x)$ est un polynôme de degré $\leqslant p$ en t.
Note : $\gamma^p(x) = \sum_{n=0}^{p} \lambda^n(P)(-1)^{p-n} = (-1)^p \sum_{n=0}^{p} \lambda^n(P)(-1)^n = (-1)^p \lambda_{-1}(P)$.
On a $\gamma_t(x)\gamma_t(-x) = 1$ et comme ce sont des polynômes de $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})[t]$, leurs coefficients de degré > 0 sont nilpotents (lemme II-2.6 et exercice VII-8). En particulier l'élément x, qui est le coefficient de degré 1 de $\gamma_t(x)$, est nilpotent.
2. Soit $x \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ nilpotent, alors $\mathrm{rg}\, x$ est un élément nilpotent de $\mathsf{H}_0(\mathbf{A})$. Mais ce dernier anneau est réduit (en fait, quasi intègre) ; donc $\mathrm{rg}\, x = 0$.
3. Supposons $\mathrm{rg}\, x = [e]$ pour un idempotent e.
On a $\bigwedge^n(e\mathbf{A}) = 0$ pour $n \geqslant 2$, donc $\lambda_t([e]) = 1 + [e]t$. Par définition de a^r pour $a \in \mathbf{B}$ et $r \in \mathsf{H}_0\,\mathbf{B}$, on obtient $(1+t)^{[e]} = (1-e) + e(1+t) = 1 + et$.
Par calcul direct on obtient aussi $\mathrm{R}_{e\mathbf{A}}(t) = (1-e) + te$.
Enfin, on a par convention $\mathbb{B}(\mathbf{A}) \subseteq \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ avec l'identification $e = [e]$.
On obtient ensuite l'égalité générale pour $x = [P]$ en utilisant le système fondamental d'idempotents orthogonaux formé par les coefficients de R_P et en notant que les deux membres sont des morphismes de $\mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ vers $1 + t\,\mathsf{K}_0(\mathbf{A})[[t]]$.
Notons aussi que $\lambda_t(p) = (1+t)^p$ pour $p \in \mathbb{N}^*$ est l'égalité voulue lorsque $\mathrm{rg}\, x \in \mathbb{N}^*$.
4. S'obtient à partir du point *1* en remplaçant t par $t/(1-t)$.
5. Un $x \in \mathsf{K}_0(\mathbf{A})$ s'écrit $y + r$ avec $r = \mathrm{rg}\, x \in \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$ et $y \in \widetilde{\mathsf{K}}_0\,\mathbf{A}$.
Alors $\gamma_t(x) = \gamma_t(y)(1-t)^{-r}$.
6. On rappelle les deux formules suivantes pour $d \geqslant 1$:

$$\tfrac{1}{(1-t)^d} = \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \binom{k+d-1}{d-1} t^k, \qquad (1-t)^{-d} = \sum_{k\geqslant 0} \binom{-d}{k} (-t)^k.$$

Elles sont reliées par l'égalité

$$\textstyle\binom{k+d-1}{d-1} = \binom{k+d-1}{k} = \binom{-d}{k}(-1)^k.$$

Par définition,

$$\gamma_t(x) = 1 + \sum_{d\geqslant 1} \frac{\lambda^d(x)t^d}{(1-t)^d} = 1 + \sum_{d\geqslant 1,k\geqslant 0} \lambda^d(x)t^d\tbinom{k+d-1}{d-1}t^k.$$

Pour $n \geqslant 1$, le coefficient $\gamma^n(x)$ de t^n est :

$$\sum_{k+d=n} \lambda^d(x)\tbinom{k+d-1}{d-1} \quad \text{i.e. avec } p = d-1 \quad \sum_{p=0}^{n-1} \lambda^{p+1}(x)\tbinom{n-1}{p}.$$

L'autre égalité s'en déduit via l'équivalence $\gamma_t = \lambda_{t/(1-t)} \iff \lambda_t = \gamma_{t/(1+t)}$.

Problème 3. *(L'application projective de Noether et les modules projectifs de rang constant 1 facteurs directs dans* $\mathbf{k}^2$*)*

1. Unicité de la factorisation à l'ordre près des facteurs et aux inversibles près.

2. Le produit de polynômes primitifs est un polynôme primitif, cf. le lemme II-2.6 (Gauss-Joyal du pauvre). On a le résultat plus précis qui consiste en l'inclusion d'idéaux :

$$\langle x_1, y_1\rangle \cdots \langle x_n, y_n\rangle \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{k}}(\langle z_0, \ldots, z_n\rangle).$$

On peut le déduire du fait suivant : si f, g sont deux polynômes à une indéterminée, le produit d'un coefficient de f et d'un coefficient de g est entier sur l'idéal engendré par les coefficients du produit fg (voir le lemme XII-2.7), et en particulier il est dans le radical de cet idéal.

On peut également utiliser l'approche qui suit : pour $I \subseteq [\![1..n]\!]$, notons I' son complémentaire, $x_I = \prod_{i\in I} x_i$, $y_I = \prod_{i\in I} y_i$. Pour $d = \#I$ et $N = \binom{n}{d}$, on va montrer une égalité :

$$(\star') \qquad \prod_{\#I=d}(T - x_I y_{I'}) = T^N + \sum_{j=1}^{N} a_j T^{N-j}, \quad a_j \in \langle z_0, \ldots, z_n\rangle\,.$$

En faisant $T = x_I y_{I'}$, on aura $(x_I y_{I'})^N \in \langle z_0, \ldots, z_n\rangle$, montrant ainsi l'inclusion d'idéaux annoncée. Pour prouver $(\star')$, on examine d'abord le cas où tous les y_i sont égaux à 1. On écrit, en notant $S_1(x), \ldots, S_n(x)$ les fonctions symétriques élémentaires de $(x_1, \ldots, x_n)$:

$$\textstyle\prod_{\#I=d}(T - x_I) = T^N + \sum_{j=1}^{N} b_j T^{N-j}, \qquad b_j = f_j\big(S_1(x), \ldots, S_n(x)\big).$$

Un examen attentif montre que f_j est un polynôme de degré $\leqslant j$ en $(S_1, \ldots, S_n)$. Remplaçons dans cette dernière égalité x_i par x_i/y_i et multiplions par $(y_1 \cdots y_n)^N$; on obtient, avec $U = y_1 \cdots y_n T$ et $s_i = S_i(x_1/y_1, \ldots, x_n/y_n)$:

$$\textstyle\prod_{\#I=d}(U - x_I y_{I'}) = U^N + \sum_{j=1}^{N} (y_1 \cdots y_n)^j f_j(s_1, \ldots, s_n) U^{N-j}.$$

Soit $s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}$ un monôme de $f_j(s_1, \ldots, s_n)$; puisque $\sum_i \alpha_i \leqslant \deg f_j \leqslant j$, on obtient, en se souvenant que $z_n = y_1 \cdots y_n$, une égalité :

$z_n^j s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n} = z_n^{\alpha_0}(z_n s_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n s_n)^{\alpha_n} = z_n^{\alpha_0} z_{n-1}^{\alpha_1} \cdots z_0^{\alpha_n}$ avec $\alpha_0 = j - \sum_i \alpha_i$. Puisque $j \geqslant 1$, l'un des exposants α_i ci-dessus n'est pas nul et l'on a bien l'appartenance à $\langle z_0, \ldots, z_n\rangle$, puis l'égalité $(\star')$.

3. Posons $E = P_1 \otimes_{\mathbf{k}} \cdots \otimes_{\mathbf{k}} P_n \subset L^{n\otimes}$; c'est un module projectif de rang constant 1. Montrons que la restriction de π à E est injective et que $\pi(E)$ est facteur direct dans $S_n(L)$. Ceci prouvera bien que $\pi(E)$ est un $\mathbf{k}$-point de $\mathbb{P}^n$. On se ramène à l'aide d'un nombre fini de localisations comaximales au cas où chaque P_i est libre de base $x_i X + y_i Y$. Alors chaque (x_i, y_i) est unimodulaire et $\sum_{i=0}^{n} z_i X^{n-i} Y^i$ est une base unimodulaire de $\pi(E)$. Ceci prouve d'une part que $\pi|_E$ est injective (puisqu'elle transforme une base de E en un vecteur unimodulaire de $S_n(L)$) et que $\pi(E)$ est facteur direct dans $S_n(L)$.

4. Il semble que φ soit injectif, i.e. que $(z_0, \ldots, z_n)$ sont algébriquement indépendants sur $\mathbf{k}$. L'image par φ est le sous-anneau gradué $\mathbf{A} = \mathbf{k}[z_0, \ldots, z_n] \subset \mathbf{k}[\underline{X}, \underline{Y}]$

(la composante homogène d'un élément de $\mathbf{A}$ est dans $\mathbf{A}$) ; si $f \in \mathbf{A}$ est homogène de degré m, on a $m \equiv 0 \bmod n$, et pour $t_1, \dots, t_n$ quelconques :

$$f(t_1X_1, t_1Y_1, \dots, t_nX_n, t_nY_n) = (t_1 \dots t_n)^{m/n} f(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n).$$

Enfin, $\mathbf{A}$ est invariant sous l'action du groupe symétrique S_n qui agit sur $\mathbf{k}[\underline{X}, \underline{Y}]$ par

$$\sigma \cdot f(X_1, Y_1, \dots, X_n, Y_n) = f(X_{\sigma(1)}, Y_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(n)}, Y_{\sigma(n)}).$$

Ces deux dernières propriétés caractérisent probablement $\mathbf{A}$.

Problème 4. *(Le théorème 90 multiplicatif d'Hilbert)*

On fixe une fois pour toutes un élément $b_0 \in \mathbf{B}$ de trace 1.

1 et *2.* Pas de difficulté. Le fait que θ_c soit multiplicatif traduit exactement le fait que c est un 1-cocycle.

3. L'action de G sur $\mathbf{B}$ tordue par le 1-cocycle c est $\sigma \cdot_c b = c_\sigma \sigma(b)$; le fait que cela soit une action est exactement la condition de 1-cocyclicité de c. En effet :

$\tau \cdot_c (\sigma \cdot_c b) = \tau \cdot_c c_\sigma \sigma(b) = c_\tau \tau\big(c_\sigma \sigma(b)\big) = c_\tau \tau(c_\sigma)\,(\tau\sigma)(b) = c_{\tau\sigma}\,(\tau\sigma)(b) = (\tau\sigma) \cdot_c b.$

On remarquera que $\pi_c = \sum_\sigma c_\sigma\, \sigma$ est une sorte de G-trace relativement à l'action de G tordue par c.

On a donc $\mathbf{B}_c^G = \{\, b \in \mathbf{B} \mid c_\sigma \sigma(b) = b \,\}$. En utilisant le fait que c est un 1-cocycle, on trouve que $\tau \circ \pi_c = c_\tau^{-1}\, \pi_c$; on en déduit que $c_\tau \tau(z) = z$ pour tout $z \in \operatorname{Im} \pi_c$, i.e. $\operatorname{Im} \pi_c \subseteq \mathbf{B}_c^G$. On définit $s : \mathbf{B}_c^G \to \mathbf{B}$ par $s(b) = bb_0$. Alors $\pi_c \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}_c^G}$; en effet, pour $b \in \mathbf{B}_c^G$:

$$\pi_c(b_0 b) = \textstyle\sum_\sigma c_\sigma \sigma(bb_0) = \sum_\sigma c_\sigma \sigma(b)\sigma(b_0) = \sum_\sigma b\sigma(b_0) = b \operatorname{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_0) = b.$$

De l'égalité $\pi_c \circ s = \mathrm{Id}_{\mathbf{B}_c^G}$, on déduit que π_c est une surjection de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{B}_c^G$, que s est injectif et que $\mathbf{B} = s(\mathbf{B}_c^G) \oplus \operatorname{Ker} \pi_c \simeq \mathbf{B}_c^G \oplus \operatorname{Ker} \pi_c$. En particulier, $\mathbf{B}_c^G$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini.

Remarque. Voyons $s : b \mapsto b_0 b$ dans $\mathrm{End}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B})$, alors $(\pi_c \circ s)\big(\pi_c(z)\big) = \pi_c(z)$ pour tout $z \in \mathbf{B}$, i.e. $\pi_c \circ s \circ \pi_c = \pi_c$. En conséquence $\pi_c' \overset{\text{def}}{=} \pi_c \circ s = \sum_\sigma c_\sigma \sigma(b_0 \bullet)$ est un projecteur ; on pourrait certainement calculer sa trace et trouver 1, ce qui prouverait que π_c' un projecteur de rang 1.

4. Soient c, d deux 1-cocycles, $x \in \mathbf{B}_c^G$, $y \in \mathbf{B}_d^G$, donc $c_\sigma \sigma(x) = x$, $d_\sigma \sigma(y) = y$; on vérifie facilement que $xy \in \mathbf{B}_{cd}^G$.

D'où une application $\mathbf{A}$-linéaire $\mathbf{B}_c^G \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_d^G \to \mathbf{B}_{cd}^G$, $x \otimes y \mapsto xy$, notée $\mu_{c,d}$.

Notons (x_i), (y_i) deux systèmes d'éléments de $\mathbf{B}$ comme dans le lemme VI-7.10 et posons $\varepsilon = \sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i y_i \otimes x_i$ (idempotent de séparabilité). On rappelle que $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J})$, ce qui se traduit par

$$\forall\, b \in \mathbf{B} \quad \textstyle\sum_i bx_i \otimes y_i = \sum x_i \otimes by_i \quad \text{dans} \quad \mathbf{B}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{e}} \overset{\text{def}}{=} \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}.$$

On a aussi, pour b, $b' \in \mathbf{B}$

$$\operatorname{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(bb') = \textstyle\sum_i \operatorname{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(bx_i) \operatorname{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b'y_i).$$

On va montrer que $z \mapsto (\pi_c \otimes \pi_d)(b_0 z \varepsilon)$, $\mathbf{B}_{cd}^G \mapsto \mathbf{B}_c^G \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}_d^G$ et $\mu_{c,d}$ sont réciproques l'une de l'autre. Dans un sens :

$(\pi_c \otimes \pi_d)(b_0 z \varepsilon) = \sum_i a_i \otimes b_i$, avec $a_i = \sum_\sigma c_\sigma \sigma(b_0 z x_i)$, $b_i = \sum_\tau c_\tau \tau(y_i)$,

et l'on a

$$\textstyle\sum_i a_i b_i = \sum_{\sigma,\tau} \sigma(b_0 z) c_\sigma d_\tau \sum_i \sigma(x_i)\tau(y_i),$$

et comme la somme interne (sur i) vaut 1 ou 0, il reste, pour $z \in \mathbf{B}_{cd}^G$:

$$\sum_i a_i b_i = \sum_\sigma \sigma(b_0 z) c_\sigma d_\sigma = \sum_\sigma \sigma(b_0)\sigma(z)(cd)_\sigma = \sum_\sigma \sigma(b_0) z = z \operatorname{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_0) = z.$$

Dans l'autre sens, soient $x \in \mathbf{B}_c^G$ et $y \in \mathbf{B}_d^G$. Alors, puisque $\varepsilon \in \mathrm{Ann}(\mathrm{J})$, on peut écrire :

$$(\pi_c \otimes \pi_d)(b_0 xy\varepsilon) = \textstyle\sum_i a_i \otimes b_i, \text{ avec } a_i = \sum_\sigma c_\sigma \sigma(b_0 x x_i),\ b_i = \sum_\tau d_\tau \tau(y y_i).$$

En utilisant

$$c_\sigma \sigma(b_0 x x_i) = c_\sigma \sigma(x)\sigma(b_0 x_i) = x\sigma(b_0 x_i) \text{ et } d_\tau\tau(yy_i) = d_\tau\tau(y)\tau(y_i) = y\tau(y_i),$$

il vient

$$\textstyle\sum_i a_i \otimes b_i = \sum_i x \,\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_0 x_i) \otimes y \,\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(y_i) =$$
$$(x \otimes y) \cdot \Big(\textstyle\sum_i \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_0 x_i)\, \mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(y_i) \otimes 1 \Big) = (x \otimes y) \cdot \big(\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b_0) \otimes 1 \big) = x \otimes y.$$

Le point a est prouvé.
Pour le point b, soit un 1-cocycle, cobord de $b_1 \in \mathbf{B}^\times$, $c_\sigma = \sigma(b_1) b_1^{-1}$.
Alors $b \in \mathbf{B}_c^G$ si, et seulement si, pour tout σ, $c_\sigma \sigma(b) = b$, i.e. $\sigma(b_1 b) = b_1 b$ c'est-à-dire $b_1 b \in \mathbf{A}$; donc $\mathbf{B}_c^G = b_1^{-1}\mathbf{A}$. On en déduit que $\mathbf{B}_c^G \otimes \mathbf{B}_{c^{-1}}^G \simeq \mathbf{A}$, donc $\mathbf{B}_c^G$ est un $\mathbf{A}$-module projectif de rang constant 1.
De plus $c \mapsto \mathbf{B}_c^G$ induit un morphisme $Z^1(G, \mathbf{B}^\times) \to \mathsf{Pic}(\mathbf{A})$.
Il reste à montrer que si $\mathbf{B}_c^G$ est libre, i.e. $\mathbf{B}_c^G = \mathbf{A}b_1$ avec $b_1 \in \mathbf{B}$ et $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(b_1) = 0$, alors c est un cobord. Mais $\mathbf{B}_{c^{-1}}^G$, étant l'inverse de $\mathbf{B}_c^G$ est aussi libre, $\mathbf{B}_{c^{-1}}^G = \mathbf{A}b_2$, et $\mathbf{B}_c^G \mathbf{B}_{c^{-1}}^G = \mathbf{B}_1^G = \mathbf{A}$. On a donc $\mathbf{A}b_1 b_2 = \mathbf{A}$, puis b_1, b_2 sont inversibles dans $\mathbf{B}$ (et $\mathbf{A}b_2 = \mathbf{A}b_1^{-1}$). Alors $c_\sigma^{-1}\sigma(b_2) = b_2$, i.e. c est le cobord de b_2.
5. Puisque $\mathbf{A}$ est un anneau zéro-dimensionnel, $\mathsf{Pic}(\mathbf{A}) = 0$ donc $H^1(G, \mathbf{B}^\times) = 0$.
6. On pose $c_\tau = x\sigma(x)\cdots\sigma^{i-1}(x)$ avec $i \in [\![1..n]\!]$ et $\tau = \sigma^i$.
Ainsi, $c_{\mathrm{Id}} = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(x) = 1$, $c_\sigma = x$, $c_{\sigma^2} = x\sigma(x)$.
C'est un 1-cocycle : $c_\sigma \sigma(c_{\sigma^i}) = c_{\sigma^{i+1}}$, i.e. $c_\sigma\sigma(c_\tau) = c_{\sigma\tau}$, puis $c_{\sigma^j}\sigma^j(c_\tau) = c_{\sigma^j\tau}$.

Problème 5. *(Le morphisme de Segre dans un cas particulier)*
Il est clair que $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$.
1. Soient $m = X_{i_1}\cdots X_{i_r} Y_{j_1}\cdots Y_{j_s}$, $m' = X_{i'_1}\cdots X_{i'_{r'}} Y_{j'_1}\cdots Y_{j'_{s'}}$ avec

$$1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_r \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_s \leqslant n,\ 1 \leqslant i'_1 \leqslant \cdots \leqslant i'_{r'} \leqslant j'_1 \leqslant \cdots \leqslant j'_{s'} \leqslant n.$$

L'égalité $\varphi(m) = \varphi(m')$ fournit

$$T^r U^s Z_{i_1} \ldots Z_{i_r} Z_{j_1} \ldots Z_{j_s} = T^{r'} U^{s'} Z_{i'_1} \ldots Z_{i'_{r'}} Z_{j'_1} \ldots Z_{j'_{s'}}.$$

Donc $r = r'$, $s = s'$ puis $i_k = i'_k$ et $j_\ell = j'_\ell$. En définitive $m = m'$.
Soient $s = \sum_\alpha a_\alpha m_\alpha$ une combinaison $\mathbf{A}$-linéaire de monômes normalisés telle que $\varphi(s) = 0$. Comme les monômes $\varphi(m_\alpha)$ sont deux à deux distincts, on a $a_\alpha = 0$, i.e. $s = 0$.
2. Puisque $X_i Y_j \equiv X_j Y_i \bmod \mathfrak{a}$, on voit que tout monôme est équivalent modulo $\mathfrak{a}$ à un monôme normalisé. Il vient donc $\mathbf{A}[\underline{X}, \underline{Y}] = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}_{\mathrm{nor}}$. Comme $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$, la somme est directe d'après la question précédente.
3. Soit $h \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ que l'on décompose en $h = f + g$ avec $f \in \mathfrak{a}$, $g \in \mathfrak{a}_{\mathrm{nor}}$.
Puisque $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$, on a $g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$, donc $g = 0$. Conclusion : $h = f \in \mathfrak{a}$, ce qui prouve $\mathrm{Ker}\,\varphi \subseteq \mathfrak{a}$, puis $\mathrm{Ker}\,\varphi = \mathfrak{a}$.

Problème 6. *(Le morphisme de Veronese dans un cas particulier)*
Il est clair que $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$.
1. Soit f dans l'intersection ; f s'écrit $f = f_0 + \sum_{i=1}^{d-1} f_i X_i$ avec $f_i \in \mathbf{A}[X_0, X_d]$; on écrit que $\varphi(f) = 0$:

$$f_0(U^d,V^d)+f_1(U^d,V^d)U^{d-1}V+\cdots+f_{d-1}(U^d,V^d)UV^{d-1}=0.$$

Ceci est de la forme, dans $\mathbf{A}[U][V]$, $h_0(V^d)+h_1(V^d)V+\cdots+h_{d-1}(V^d)V^{d-1}=0$; en examinant dans cette égalité les exposants de V modulo d, on obtient $h_0=h_1=\cdots=h_{d-1}=0$. Bilan : $f_i=0$ puis $f=0$.

2. On travaille modulo $\mathfrak{b}$ en posant

$\mathbf{A}[\underline{x}]=\mathbf{A}[\underline{X}]/\mathfrak{b}$, $\mathbf{B}=\mathbf{A}[x_0,x_d]+\mathbf{A}[x_0,x_d]x_1+\cdots+\mathbf{A}[x_0,x_d]x_{d-1}\subseteq\mathbf{A}[\underline{x}]$.

On va montrer que $\mathbf{B}$ est une sous-$\mathbf{A}$-algèbre ; comme elle contient les x_i, c'est $\mathbf{A}[\underline{x}]$ tout entier. Il suffit de prouver que $x_ix_j\in\mathbf{B}$ pour $i\leqslant j\in[\![1..d-1]\!]$, car les autres produits sont dans $\mathbf{B}$ par définition de $\mathbf{B}$. On utilise les relations $x_ix_j=x_{i-1}x_{j+1}$ pour $i\leqslant j\in[\![1..d-1]\!]$. On a $x_0x_k\in\mathbf{B}$ pour tout k ; on en déduit $x_1x_j\in\mathbf{B}$ pour tout $j\in[\![1..d-1]\!]$ et c'est encore vrai pour $j=d$ et 0 par définition de $\mathbf{B}$. On en déduit ensuite $x_2x_j\in\mathbf{B}$ pour $j\in[\![2..d-1]\!]$, et ainsi de suite.

L'égalité obtenue $\mathbf{B}=\mathbf{A}[\underline{x}]$ s'écrit

$$\mathbf{A}[\underline{X}]=\mathfrak{b}+\big(\mathbf{A}[X_0,X_d]\oplus\mathbf{A}[X_0,X_d]X_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{A}[X_0,X_d]X_{d-1}\big),$$

et le $+$ représente une somme directe d'après le point *1* (puisque $\mathfrak{b}\subseteq\operatorname{Ker}\varphi$).

3. Soit $h\in\operatorname{Ker}\varphi$ que l'on décompose en $h=f+g$ comme ci-dessus.

Puisque $f\in\mathfrak{b}\subseteq\operatorname{Ker}\varphi$, on a $g\in\operatorname{Ker}\varphi$, donc $g=0$. Conclusion : $h=f\in\mathfrak{b}$, ce qui prouve $\operatorname{Ker}\varphi\subseteq\mathfrak{b}$, puis $\operatorname{Ker}\varphi=\mathfrak{b}=\mathfrak{a}$.

Problème 7. *(Matrices de Veronese)*

2. Il est clair que $V_d(P)$ est un projecteur si P en est un, et le diagramme est commutatif pour des raisons fonctorielles.

On peut apporter la précision suivante : si P, $Q\in\mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ sont deux projecteurs tels que $\operatorname{Im}P\subseteq\operatorname{Im}Q$, alors $\operatorname{Im}V_d(P)\subseteq\operatorname{Im}V_d(Q)$. En effet, on a $\operatorname{Im}P\subseteq\operatorname{Im}Q$ si, et seulement si, $QP=P$, et l'on en déduit que $V_d(Q)V_d(P)=V_d(P)$, i.e. $\operatorname{Im}V_d(P)\subseteq\operatorname{Im}V_d(Q)$.

3. Il suffit de le faire localement, i.e. de calculer $V_d(A)$ lorsque A est un projecteur standard $\mathrm{I}_{r,n}$. Si $A=\operatorname{Diag}(a_1,\dots,a_n)$, alors $V_d(A)$ est diagonale, de diagonale les n' monômes a^α avec $|\alpha|=d$. En particulier, pour $A=\mathrm{I}_{r,n}$, on voit que $V_d(A)$ est une projection standard, de rang le nombre de α tels que $\alpha_1+\cdots+\alpha_r=d$, c'est-à-dire $\binom{d+1-r}{r-1}$. Et $V_d(\mathrm{I}_{1,n})=\mathrm{I}_{1,n'}$.

Problème 8. *(Quelques exemples de résolutions projectives finies)*

1. Le calcul de $F_k^2-F_k$ se fait par récurrence et ne pose pas de problème. Pour la conjugaison ($n\geqslant1$), on utilise

$$\begin{bmatrix}0&-\mathrm{I}\\ \mathrm{I}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A&B\\ C&D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&\mathrm{I}\\ -\mathrm{I}&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D&-C\\ -B&A\end{bmatrix}.$$

Pour $\begin{bmatrix}A&B\\ C&D\end{bmatrix}=F_n$, cela fournit une conjugaison entre F_n et $\mathrm{I}_{2^n}-{}^{\mathrm{t}}F_n$.

Lorsque $z(z-1)+\sum_{i=1}^n x_iy_i=0$, les projecteurs F_n et $\mathrm{I}_{2^n}-F_n$ ont pour image des modules projectifs de type fini P et Q avec $P\oplus Q\simeq\mathbf{A}^{2^n}$ et $P\simeq Q^\star$.

Donc $2\operatorname{rg}(P)=2^n$, et comme $mx=0\Rightarrow x=0$ pour $m\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\mathsf{H}_0\,\mathbf{A}$, on obtient $\operatorname{rg}(P)=2^{n-1}$.

2. Le calcul de U_kV_k et V_kU_k se fait par récurrence. Le fait que F_n et G_n sont conjuguées par une matrice de permutation est laissé à la sagacité de la lectrice. Par exemple, $G_2=P_\tau F_2P_\tau^{-1}$ pour $\tau=(2,4,3)=(3,4)(2,3)$, et $G_3=P_\tau F_3P_\tau^{-1}$ pour $\tau=(2,4,7,5)(3,6)=(3,6)(2,4)(4,7)(5,7)$.

En ce qui concerne le rang constant 2^{n-1} on peut invoquer le point *1*, ou faire un calcul direct après localisation en z et en $\overline{z} = 1 - z$.
3a. Utilisation directe de l'exercice référencé.
3b. Soit S le monoïde $a^{\mathbb{N}}$. On peut localiser une résolution projective finie de M sur $\mathbf{A}$ pour en obtenir une sur $S^{-1}\mathbf{A}$:

$$0 \to S^{-1}P_n \to \cdots \to S^{-1}P_1 \to S^{-1}P_0 \twoheadrightarrow S^{-1}M \to 0.$$

Comme $aM = 0$, on a $S^{-1}M = 0$, donc $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rg}(S^{-1}P_i) = 0$. Mais le morphisme naturel $\mathsf{H}_0(\mathbf{A}) \to \mathsf{H}_0(S^{-1}\mathbf{A})$ est injectif. Donc $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \operatorname{rg} P_i = 0$.
4. Le localisé $(\mathbf{B}_n)_z$ contient les $y'_i = y_i/z$, et puisque $z(1-z) = \sum_i x_i y_i$, on a $1 - z = \sum_i x_i y'_i$. Donc $z \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_n]$ et $1 - \sum_i x_i y'_i \in (\mathbf{B}_n)_z^{\times}$. On vérifie alors que

$$(\mathbf{B}_n)_z = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, y'_1, \ldots, y'_n]_s \quad \text{avec} \quad s = 1 - \sum x_i y'_i.$$

De même, $(\mathbf{B}_n)_{1-z} = \mathbf{k}[x'_1, \ldots, x'_n, y_1, \ldots, y_n]_{1-\sum x'_i y_i}$ avec $x'_i = x_i/(1-z)$.
5. Pour $n \geqslant 1$, tout élément $a \in \{z, x_1, \ldots, x_n\}$ est régulier et $a(\mathbf{B}_n/\mathfrak{b}_n) = 0$. Comme $F_1 = \begin{bmatrix} z & x_1 \\ y_1 & \overline{z} \end{bmatrix}$ est un projecteur, on a $[z, x_1]F_1 = [z, x_1]$. Le lecteur vérifiera que $\operatorname{Ker}[z, x_1] = \operatorname{Ker} F_1 = \operatorname{Im}(\mathrm{I}_2 - F_1)$; d'où la suite exacte :

$$0 \to \operatorname{Im}(\mathrm{I}_2 - F_1) \to \mathbf{B}_1^2 \xrightarrow{[z,x_1]} \mathbf{B}_1 \twoheadrightarrow \mathbf{B}_1/\mathfrak{b}_1 \to 0.$$

On a bien $\operatorname{rg}(\mathbf{B}_1/\mathfrak{b}_1) = 1 - 2 + 1 = 0$.
6. Soit A la matrice constituée des 3 premières lignes de $\mathrm{I}_4 - F_2$:

$$A = \begin{bmatrix} 1-z & -x_1 & -x_2 & 0 \\ -y_1 & z & 0 & -x_2 \\ -y_2 & 0 & z & x_1 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que $AF_2 = 0$ et $[z, x_1, x_2]A = 0$. La lectrice vérifiera que la suite ci-dessous est exacte :

$$0 \to \operatorname{Im} F_2 \to \mathbf{B}_2^4 \xrightarrow{A} \mathbf{B}_2^3 \xrightarrow{[z,x_1,x_2]} \mathbf{B}_2 \twoheadrightarrow \mathbf{B}_2/\mathfrak{b}_2 \to 0.$$

On a bien $\operatorname{rg}(\mathbf{B}_2/\mathfrak{b}_2) = 1 - 3 + 4 - 2 = 0$.
7. Immédiat vu la définition de F_n.
8. On considère la moitié haute de la matrice $\mathrm{I}_8 - F'_3$ et on supprime sa dernière colonne (nulle) pour obtenir une matrice A de format 4×7. Soit B la matrice de format 7×8 obtenue en supprimant la dernière ligne de F'_3. Alors le lecteur courageux vérifiera l'exactitude de :

$$0 \to \operatorname{Im}(\mathrm{I}_8 - F'_3) \to \mathbf{B}_3^8 \xrightarrow{B} \mathbf{B}_3^7 \xrightarrow{A} \mathbf{B}_3^4 \xrightarrow{[z,x_1,x_2,x_3]} \mathbf{B}_3 \twoheadrightarrow \mathbf{B}_3/\mathfrak{b}_3 \to 0.$$

On a $\operatorname{rg}(\mathbf{B}_3/\mathfrak{b}_3) = 1 - 4 + 7 - 8 + 4 = 0$.
9. Il y a une suite exacte (on a posé $\mathbf{B} = \mathbf{B}_n$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_n$) :

$$L_{n+1} \xrightarrow{A_{n+1}} L_n \xrightarrow{A_n} L_{n-1} \xrightarrow{A_{n-1}} \cdots \longrightarrow L_2 \xrightarrow{A_2} L_1 \xrightarrow{A_1} L_0 = \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{b}\ .$$

où L_r est un module libre de rang $\sum_{i \in I_r} \binom{n+1}{i}$ avec $I_r = \{\, i \in [\![0..r]\!] \mid i \equiv r \bmod 2 \,\}$.
En particulier, $L_1 = \mathbf{B}^{n+1}$ et $L_n = L_{n+1} = \mathbf{B}^{2^n}$.
Quant aux matrices A_r, on a $A_1 = [z, x_1, \ldots, x_n]$, et la matrice A_r est extraite de F_n si r est impair, et extraite de $\mathrm{I} - F_n$ sinon. On a $A_{n+1} = F_n$ pour n pair, et $A_{n+1} = \mathrm{I} - F_n$ pour n impair.
En notant $P_{n+1} = \operatorname{Im} A_{n+1}$, le $\mathbf{B}$-module $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ admet une résolution projective de longueur $n+1$ de type suivant :

$$0 \to P_{n+1} \to L_n = \mathbf{B}^{2^n} \xrightarrow{A_n} L_{n-1} \xrightarrow{A_{n-1}} \cdots \to L_2 \xrightarrow{A_2} L_1 \xrightarrow{A_1} L_0 = \mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{b}\ .$$

(P_{n+1} de rang constant 2^{n-1}).
L'expression explicite du rang de L_i confirme que $[\mathbf{B}/\mathfrak{b}] \in \widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{B})$.
On a $\operatorname{rg} L_{n-1} + \operatorname{rg} L_0 = \operatorname{rg} L_{n-2} + \operatorname{rg} L_1 = \cdots = 2^n$ (en particulier, si $n = 2m+1$, alors $\operatorname{rg} L_m = 2^{n-1}$).
Note : Si $\mathbf{k}$ est un corps discret, on peut montrer que $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{B}_n) \simeq \mathbb{Z}$ avec comme générateur $[\mathbf{B}_n/\mathfrak{b}_n]$. On en déduit que l'idéal $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{B}_n)$ est de carré nul : de manière générale, soit un anneau $\mathbf{A}$ vérifiant $\widetilde{\mathsf{K}}_0(\mathbf{A}) = \mathbb{Z}x \simeq \mathbb{Z}$, alors $x^2 = mx$ avec $m \in \mathbb{Z}$, donc $x^{k+1} = m^k x$ pour $k \geqslant 1$, comme x est nilpotent (voir le problème 2), il y a un $k \geqslant 1$ tel que $m^k x = 0$, donc $m^k = 0$, puis $m = 0$ et $x^2 = 0$.

Problème 9. *(Quand les monômes dominants sont premiers entre eux)*
1a. Soient $f_i = m_i - r_i$ avec $r_i \prec m_i$; alors
$$m_j f_i - m_i f_j = (f_j + r_j)f_i - (f_i + r_i)f_j = r_j f_i - r_i f_j.$$
1b. Par hypothèse $m'_i m_i = m'_j m_j$; comme $\operatorname{pgcd}(m_i, m_j) = 1$, on a $m_i \mid m'_j$. On dispose donc d'un monôme q défini par $q = m'_j/m_i = m'_i/m_j$. On écrit alors
$$m'_i f_i - m'_j f_j = q(m_j f_i - m_i f_j) = q(r_j f_i - r_i f_j) = q r_j f_i - q r_i f_j,$$
et l'on a $q r_j f_i \prec q m_j m_i = m'_i m_i = m$. De même $q r_i f_j \prec m$.
Bilan : $m'_i f_i - m'_j f_j \in \mathfrak{a}_{\prec m}$.
1c. On peut supposer $I = \{1, \dots, k\}$; on écrit la transformation d'Abel :
$$\textstyle\sum_{i\in I} a_i m'_i f_i = \sum_{j=1}^{k-1} s_j (m'_j f'_j - m'_{j+1} f'_{j+1}).$$
D'après la question précédente $m'_j f'_j - m'_{j+1} f'_{j+1}$ appartient à $\mathfrak{a}_{\prec m}$, et il en est de même de leur somme $\sum_{i\in I} a_i m'_i f_i$.
1d. On écrit $g = q f_i \preccurlyeq m$; q est donc une combinaison $\mathbf{k}$-linéaire de monômes m' tels que $m' m_i \preccurlyeq m$. Si $m_i \not\mid m$, on a $m' m_i \prec m$ donc $g \prec m$. Si $m_i \mid m$, on écrit $m = m' m_i$; si $a \in \mathbf{k}$ est le coefficient de m' dans q, on a $q - am' \prec m'$.
Donc $g = q f_i = am' f_i + (q - am') f_i$ avec $(q - am') f_i \prec m' m_i = m$.
2. Soit $f \in \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m}$. On écrit $f = \sum_i g_i$ avec $g_i \in \langle f_i \rangle$ et $g_i \preccurlyeq m$. On coupe cette somme en deux :
$$f = \textstyle\sum_{j\notin I} g_j + \sum_{i\in I} g_i \quad \text{avec} \quad I = \{\, i \in \{1, \dots, s\} \mid m_i \text{ divise } m \,\}.$$
Si $m_j \not\mid m$, on a $g_j \prec m$ donc $\sum_{j\notin I} g_j \in \mathfrak{a}_{\prec m}$. Pour les i tels que $m_i \mid m$, on écrit $m = m'_i m_i$ et comme dans la question *1d*, il y a un $a_i \in \mathbf{k}$ tel que $g_i - a_i m'_i f_i \in \mathfrak{a}_{\prec m}$. Bilan :
$$f = \text{un élément de } \mathfrak{a}_{\prec m} + \textstyle\sum_{i\in I} a_i m'_i f_i.$$
On utilise maintenant le fait que $f \prec m$. Ceci implique $\sum_{i\in I} a_i = 0$. D'après la question *1c* on a $\sum_{i\in I} a_i m'_i f_i \in \mathfrak{a}_{\prec m}$ donc $f \in \mathfrak{a}_{\prec m}$.
Soit $f \in S \cap \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m}$, donc $f = \sum_i g_i$ avec $g_i \in \langle f_i \rangle$ et $g_i \preccurlyeq m$, a fortiori $f \preccurlyeq m$. Si $m_i \not\mid m$ pour chaque i, alors $g_i \prec m$ donc $f \in \mathfrak{a}_{\prec m}$. Si $m_i \mid m$ pour un indice i i.e. si $m \in \langle m_1, \dots, m_s \rangle$, alors la composante de f sur m est nulle car $f \in S$. Comme $f \preccurlyeq m$, on a $f \prec m$; d'après le début de cette question, on en déduit que $f \in \mathfrak{a}_{\prec m}$.
On a $S \cap \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m} \subset \mathfrak{a}_{\prec m}$; et pour tout $f \in \mathfrak{a}_{\prec m}$, il existe un monôme $m' \prec m$ tel que $f \in \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m'}$. On en déduit au bout d'un nombre fini d'étapes que $f = 0$, i.e. $S \cap \mathfrak{a}_{\preccurlyeq m} = \{0\}$. Comme $\mathfrak{a}$ est la réunion des $\mathfrak{a}_{\preccurlyeq m}$, on a bien $S \cap \mathfrak{a} = \{0\}$.
3. Il s'agit d'une technique de division d'un polynôme par le système $(f_1, \dots, f_s)$ au sens des bases de Gröbner. On utilise le fait que si $f \prec m$ pour un monôme m,

alors $f \preccurlyeq m'$ pour un monôme $m' \prec m$. Supposons le résultat à montrer vrai pour les polynômes $\prec m$ et montrons le pour $f \preccurlyeq m$. On écrit $f = am + g$ avec $a \in \mathbf{k}$ et $g \prec m$. Si $m \in \langle m_1, \dots, m_s \rangle$, alors $m = m'm_i$ pour un i et on remplace f par $f - am'f_i \prec m$. Si $m \notin \langle m_1, \dots, m_s \rangle$, alors $m \in S$ a fortiori $am \in S$, et on remplace f par $f - am \prec m$.

4. Soit E le sous-module de $\mathbf{k}[\underline{X}]^s$ engendré par les $f_i\varepsilon_j - f_j\varepsilon_i$. Soit m un monôme, des polynômes u_i tels que $\sum_i u_i f_i = 0$ et $u_i f_i \preccurlyeq m$. Il suffit de montrer qu'il existe des polynômes v_i tels que

$$\textstyle\sum_i u_i\varepsilon_i = \text{un élément de } E + \sum_i v_i\varepsilon_i \text{ avec } v_i f_i \prec m.$$

Soit $I = \{\, i \in \{1, \dots, s\} \mid m_i \text{ divise } m \,\}$. Pour $i \notin I$, on a $u_i f_i \prec m$. Pour $i \in I$, on définit le monôme $m'_i = m/m_i$; si a_i est la composante de u_i sur m'_i, on a $(u_i - a_i m'_i) \prec m'_i$. Alors $\sum_{i\in I} a_i m_i m'_i = 0$ i.e. $\sum_{i\in I} a_i = 0$. En suivant la solution de l'exercice 30, on pose, pour $i, j \in I$

$$q_{ij} = m'_i/m_j = m'_j/m_i = m/(m_i m_j).$$

Il existe une matrice antisymétrique $(a_{ij})_{I\times I} \in \mathbf{k}^{I\times I}$ telle que $a_i = \sum_{j\in J} a_{ij}$ de sorte que

$$\textstyle\sum_{i\in I} a_i m'_i\varepsilon_i = \sum_{i\in I}\big(\sum_{j\in I} a_{ij}q_{ij}\underline{m_j}\big)\varepsilon_i \qquad (\text{ici } m_{ij} = m_j/(m_i \wedge m_j) = m_j).$$

Pour $i \in I$, on définit $w_i = \sum_{j\in I} a_{ij}q_{ij}\underline{f_j}$ de sorte que $\sum_{i\in I} w_i\varepsilon_i \in E$ et $w_i f_i \preccurlyeq q_{ij}m_j m_i = m$. Enfin on pose

$$v_i = \begin{cases} u_i - w_i & \text{si } i \in I, \\ u_i & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a $v_i f_i \prec m$ (car pour $i \in I$, la composante de $v_i f_i$ sur m est $a_i - \sum_{j\in J} a_{ij} = 0$). Et c'est gagné puisque

$$\textstyle\sum_i u_i\varepsilon_i = \sum_{i\in I} w_i\varepsilon_i + \sum_i v_i\varepsilon_i = \text{un élément de } E + \sum_i v_i\varepsilon_i.$$

5. Le fait que la suite de monômes $(m_1, \dots, m_s)$ soit régulière et est laissé à la lectrice. Montrons le pour $(f_1, \dots, f_s)$. Il suffit de voir que

$$uf_s \in \langle f_1, \dots, f_{s-1} \rangle \;\Rightarrow\; u \in \langle f_1, \dots, f_{s-1} \rangle .$$

Encore une fois on raisonne par récurrence sur l'ordre monomial en écrivant $u = am + v$ avec $v \prec m$. En multipliant par f_s, on a donc un $w \prec mm_s$ tel que $amm_s + w \in \langle f_1, \dots, f_{s-1}\rangle$et donc $amm_s \in \langle m_1, \dots, m_{s-1}\rangle$. La suite $(m_1, \dots, m_s)$ étant régulière, on a $am \in \langle m_1, \dots, m_{s-1}\rangle$, disons $am = qm_i$ avec $i < s$.

Alors $(u - qf_i)f_s \in \langle f_1, \dots, f_{s-1}\rangle$ avec $u - qf_i \prec m$. Donc, par récurrence, $u - qf_i \in \langle f_1, \dots, f_{s-1}\rangle$, d'où l'on tire $u \in \langle f_1, \dots, f_{s-1}\rangle$.

6. Soit $\mathbf{A}$ le $\mathbf{k}[f_1, \dots, f_s]$-module engendré par les monômes de M. Il faut d'abord montrer que $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathbf{A}$. On procède par récurrence sur l'ordre monomial en supposant que tout polynôme $g \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ tel que $g \prec m$ est dans $\mathbf{A}$ et en montrant que c'est vrai pour un polynôme $f \in \mathbf{k}[\underline{X}]$ tel que $f \preccurlyeq m$. On écrit $f = \sum_i u_i f_i + r$ avec $u_i f_i \preccurlyeq m$ et $r \in S \subset \mathbf{A}$. On a $u_i \prec m$ (car $m_i \neq 1$) donc $u_i \in \mathbf{A}$ par récurrence. Bilan : $f \in \mathbf{A}$.

Pour $e = (e_1, \dots, e_s) \in \mathbb{N}^s$ notons $f^e = f_1^{e_1} \cdots f_s^{e_s}$. On va montrer simultanément que les $m \in M$ forment une base de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ sur $\mathbf{k}[f_1, \dots, f_s]$ et que les f_i sont $\mathbf{k}$-algébriquement indépendants en prouvant, pour une famille $(a_{e,m})_{e\in\mathbb{N}^s, m\in M}$

d'éléments de $\mathbf{k}$ à support fini, l'implication :

$$(\star)\ \sum_{e,m} a_{e,m} f^e\, m = \sum_m \big(\sum_e a_{e,m} f^e\big) m = \sum_e \big(\sum_m a_{e,m} m\big) f^e = 0 \ \Rightarrow\ a_{e,m} = 0$$

La clef réside dans les différentes façons de regrouper les sommes ; ceci est lié au fait d'écrire que les $m \in M$ constituent un système générateur de $\mathbf{k}[\underline{X}]$ sur $\mathbf{k}[f_1, \dots, f_s]$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}[\underline{X}] &= \textstyle\sum_{m\in M} \mathbf{k}[f_1,\dots,f_s]m = \sum_{m\in M}\big(\sum_{e\in\mathbb{N}^s} \mathbf{k} f^e\big)m \\ &= \textstyle\sum_{e\in\mathbb{N}^s} f^e \sum_{m\in M} \mathbf{k}m = \sum_{e\in\mathbb{N}^s} f^e S\,. \end{aligned}$$

Comme la suite $(f_1, \dots, f_s)$ est régulière et que $\langle f_1, \dots, f_s\rangle \cap S = 0$, on se convainc que la dernière somme est directe. Par exemple, avec 2 polynômes f_1, f_2 et des $s_{ij} \in S$, on veut :

$$\big(s_{00}\cdot 1 + s_{10}\cdot f_1 + s_{01}\cdot f_2 + s_{20}\cdot f_1^2 + s_{11}\cdot f_1 f_2 + s_{02}\cdot f_2^2 = 0\big) \ \Rightarrow\ s_{ij} = 0.$$

On a $s_{00} \in S \cap \langle f_1, f_2\rangle$ donc $s_{00} = 0$. Ensuite, on raisonne modulo f_1, et en utilisant le fait que f_2 est régulier modulo f_1, il vient $s_{01} + s_{02} f_2 \equiv 0 \bmod f_1$, donc $s_{01} = 0$ puis $s_{02} = 0$. On peut alors simplifier par f_1 et ainsi de suite.
Bilan : on a bien justifié $(\star)$, ce qui prouve le résultat escompté.

7. On a $a^2Y^3 = Yf_1 + (aY - X)f_2$. Si $Y^3 \in \mathfrak{a} := \langle f_1, f_2\rangle$, comme les polynômes sont homogènes, on a $Y^3 = (\alpha X + \beta Y)f_1 + (\gamma X + \delta Y)f_2$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{k}$. L'examen de la composante sur Y^3 donne $1 = \delta a$.
Supposons a régulier. Si $\mathfrak{a}$ est facteur direct, $\mathbf{k}[X, Y] = \mathfrak{a} \oplus S$, alors $Y^3 = f + r$ avec $f \in \mathfrak{a}$ et $r \in S$. Comme $a^2Y^3 \in \mathfrak{a}$, on a $a^2 r = 0$ puis $r = 0$; donc $Y^3 \in \mathfrak{a}$ et a inversible.
Réciproquement, si a est inversible, on considère f_1, $a^{-1}f_2 = Y^2 + a^{-1}XY$ et l'ordre lexicographique avec $X \prec Y$: les monômes dominants sont X^2, Y^2, premiers entre eux et on peut appliquer l'étude précédente.

Commentaires bibliographiques

Le théorème 1.4 précise le théorème 2 dans [Bourbaki] chap. II §5.
La section 6 est basée sur les articles [31, 32, Chervov&Talalaev] qui s'occupent de «systèmes de Hitchin» sur les courbes singulières.
Le problème 2 est inspiré d'un article non publié de R.G. Swan : *On a theorem of Mohan, Kumar and Nori.*
Le problème 4 provient d'un exercice du chapitre 4 de [Jensen, Ledet & Yui].
Dans le problème 8, la matrice F_k intervient dans l'article : *Vector bundles over Spheres are Algebraic*, R. Fossum, Inventiones Math. **8**, 222–225 (1969).
L'anneau $\mathbf{B}_n$ est un classique en K-théorie algébrique.

Chapitre XI

Treillis distributifs Groupes réticulés

Sommaire

Introduction

Ce chapitre commence par une section introductive qui fixe le cadre algébrique formel des treillis distributifs et des algèbres de Boole.

Les treillis distributifs sont importants en algèbre commutative pour plusieurs raisons.

D'une part la théorie de la divisibilité a comme « modèle idéal » la théorie de la divisibilité des entiers naturels. Si l'on prend pour relation d'ordre $a \preccurlyeq b$, la relation « a est multiple de b », on obtient que $\mathbb{N}$ est un treillis distributif avec : 0 élément minimum, 1 élément maximum, le sup $a \vee b$ égal au pgcd et le inf $a \wedge b$ égal au ppcm. Quelques belles propriétés de la divisibilité dans $\mathbb{N}$ s'expriment en termes modernes en disant que l'anneau $\mathbb{Z}$ est un anneau de Bézout (voir les sections III-8 et IV-7). Les nombres idéaux en théorie des nombres ont été créés par Kummer pour combler l'écart entre la théorie de la divisibilité dans les anneaux de nombres et celle dans $\mathbb{N}$. Les anneaux de nombres ne sont pas en général des anneaux de Bézout, mais leurs idéaux de type fini [1] forment un treillis distributif, et leurs idéaux de type fini non nuls forment la partie positive d'un groupe réticulé (voir la section 2) ce qui rétablit le bon ordonnancement des choses. Les anneaux dont les idéaux de type fini forment un treillis distributif sont appelés des anneaux arithmétiques (traités ailleurs dans les sections VIII-4 et XII-1). Leurs idéaux inversibles forment aussi la partie positive d'un groupe réticulé. La théorie des anneaux à pgcd (section 3) trouve aussi son cadre naturel dans le contexte des groupes réticulés.

D'autre part les treillis distributifs interviennent comme la contrepartie constructive des espaces spectraux divers et variés qui se sont imposés comme des outils puissants de l'algèbre abstraite. La discussion sur ce sujet est particulièrement éclairante quand on considère le treillis de Zariski d'un anneau commutatif, relativement peu connu, qui sert de contrepartie constructive au très célèbre spectre de Zariski. Espace spectral que l'on pourrait croire indispensable à la théorie de la dimension de Krull et à

1. Ce qui pour Kummer était « le pgcd idéal de plusieurs nombres » a été remplacé en langage moderne par l'idéal de type fini correspondant. Ce *coup de force* dû à Dedekind a été une des premières intrusions de l'infini « actuel » en mathématiques.

celle des schémas de Grothendieck. Une étude systématique du treillis de Zariski sera donnée au chapitre XIII concernant la dimension de Krull, avec une introduction heuristique dans la section XIII-1. Dans la section 4 nous mettons en place le treillis de Zariski d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$ essentiellement en rapport avec la construction de la clôture zéro-dimensionnelle réduite $\mathbf{A}^\bullet$ (page 665) de l'anneau. Cette construction peut être vue comme une construction parallèle à celle de l'algèbre de Boole engendrée par un treillis distributif (voir le théorème 4.26). L'objet global $\mathbf{A}^\bullet$ ainsi construit contient essentiellement la même information que le produit des anneaux $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$. Ceci alors même que dans la situation générale on n'a pas accès constructivement aux idéaux premiers d'un anneau de manière individuelle.

Une autre raison de s'intéresser aux treillis distributifs est la logique constructive (ou intuitionniste) dans laquelle l'ensemble des valeurs de vérité de la logique classique, à savoir $\{\mathsf{Vrai}, \mathsf{Faux}\}$, qui est une algèbre de Boole à deux éléments, est remplacé par un treillis distributif plus mystérieux [2]. La logique constructive sera abordée dans l'annexe (voir page 977) particulièrement dans les sections 2 et 3. Dans la section 5 du chapitre présent nous mettons en place les outils qui servent de cadre à une étude algébrique formelle de cette logique : les relations implicatives et les algèbres de Heyting. Il est remarquable que Heyting ait défini ces algèbres dans la première tentative de décrire la logique intuitionniste de façon formelle, et qu'il n'y ait pas eu une virgule à rajouter depuis. Par ailleurs, relations implicatives et algèbres de Heyting ont leur utilité propre dans l'étude générale des treillis distributifs. Par exemple il est parfois important de pouvoir dire que le treillis de Zariski d'un anneau est une algèbre de Heyting.

2. En fait les valeurs de vérité des mathématiques constructives ne forment pas un ensemble à proprement parler, mais une classe. Néanmoins les connecteurs logiques constructifs agissent sur ces valeurs de vérité avec les mêmes propriétés algébriques que le $\wedge$ le $\vee$ et le $\to$ des algèbres de Heyting. Voir la discussion page 982.

1. Treillis distributifs et algèbres de Boole

Dans un ensemble ordonné X on note, pour un $a \in X$:

$$\downarrow a = \{\, x \in X \mid x \leqslant a \,\}, \quad \uparrow a = \{\, x \in X \mid x \geqslant a \,\}. \tag{1}$$

On appelle *chaîne croissante* une liste finie $(a_0, \dots, a_n)$ d'éléments de X rangés en ordre croissant. Le nombre n est appelé la *longueur* de la chaîne. Par convention la liste vide est une chaîne de longueur -1.

1.1. Définition.

1. Un *treillis* est un ensemble $\mathbf{T}$ muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ pour laquelle toute famille finie admet une borne supérieure et une borne inférieure. On note $0_{\mathbf{T}}$ le minimum de $\mathbf{T}$ (la borne supérieure de la famille vide) et $1_{\mathbf{T}}$ le maximum de $\mathbf{T}$. On note $a \vee b$ la borne supérieure de (a, b) et $a \wedge b$ sa borne inférieure.
2. Une application d'un treillis vers un autre est appelé un *homomorphisme de treillis* si elle respecte les lois $\vee$ et $\wedge$ ainsi que les constantes 0 et 1.
3. Le treillis est appelé un *treillis distributif* lorsque chacune des deux lois $\vee$ et $\wedge$ est distributive par rapport à l'autre.

Les axiomes des treillis peuvent être formulés avec des égalités universelles concernant uniquement les deux lois $\wedge$ et $\vee$ et les deux constantes $0_{\mathbf{T}}$ et $1_{\mathbf{T}}$. La relation d'ordre est alors définie par : $a \leqslant_{\mathbf{T}} b \overset{\text{def}}{\iff} a \wedge b = a$. Voici ces axiomes.

$$\begin{aligned} a \vee a &= a & a \wedge a &= a \\ a \vee b &= b \vee a & a \wedge b &= b \wedge a \\ (a \vee b) \vee c &= a \vee (b \vee c) & (a \wedge b) \wedge c &= a \wedge (b \wedge c) \\ (a \vee b) \wedge a &= a & (a \wedge b) \vee a &= a \\ a \vee 0_{\mathbf{T}} &= a & a \wedge 1_{\mathbf{T}} &= a \end{aligned}$$

On obtient ainsi une théorie purement équationnelle, avec toutes les facilités afférentes. Par exemple on peut définir un treillis par générateurs et relations. Même chose pour les treillis distributifs.

Dans un treillis, une distributivité implique l'autre. Supposons par exemple que $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, pour tous a, b, c. Alors l'autre distributivité résulte du calcul suivant :

$$\begin{aligned} (a \vee b) \wedge (a \vee c) = \big((a \vee b) \wedge a\big) \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) = a \vee \big((a \vee b) \wedge c\big) = \\ a \vee \big((a \wedge c) \vee (b \wedge c)\big) = \big(a \vee (a \wedge c)\big) \vee (b \wedge c) = a \vee (b \wedge c). \end{aligned}$$

Dans un treillis discret on a un test pour $a \leqslant b$, puisque cette relation équivaut à $a \wedge b = a$.

Les sous-groupes d'un groupe (ou les idéaux d'un anneau commutatif) forment un treillis pour l'inclusion, mais ce n'est pas en général un treillis distributif.

Un ensemble totalement ordonné [3] est un treillis distributif s'il possède un élément maximum et un élément minimum. On note $\mathbf{n}$ l'ensemble totalement ordonné à n éléments. Une application entre deux treillis totalement ordonnés $\mathbf{T}$ et $\mathbf{S}$ est un homomorphisme si, et seulement si, elle est croissante et $0_{\mathbf{T}}$ et $1_{\mathbf{T}}$ ont pour images $0_{\mathbf{S}}$ et $1_{\mathbf{S}}$.
Si $\mathbf{T}$ et $\mathbf{T}'$ sont deux treillis distributifs, l'ensemble $\mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{T}')$ des homomorphismes de $\mathbf{T}$ vers $\mathbf{T}'$ est muni d'une structure d'ordre naturelle donnée par

$$\varphi \leqslant \psi \overset{\text{def}}{\iff} \forall x \in \mathbf{T} \;\; \varphi(x) \leqslant \psi(x)$$

Un produit cartésien de treillis distributifs est un treillis distributif (pour les lois $\wedge$ et $\vee$ produits, ce qui donne la relation d'ordre partiel produit).
Pour tout treillis distributif $\mathbf{T}$, si l'on remplace la relation d'ordre $x \leqslant_{\mathbf{T}} y$ par la relation symétrique $y \leqslant_{\mathbf{T}} x$ on obtient le *treillis opposé* $\mathbf{T}^\circ$ avec échange de $\wedge$ et $\vee$ (on dit parfois *treillis dual*).
Si $A \in \mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(\mathbf{T})$ avec un treillis distributif $\mathbf{T}$ on notera

$$\bigvee A := \bigvee_{x \in A} x \qquad \text{et} \qquad \bigwedge A := \bigwedge_{x \in A} x.$$

Treillis quotients, idéaux, filtres

Si une structure algébrique est définie par des lois de composition de différentes arités et des axiomes qui sont des égalités universelles (comme les groupes, les anneaux, les treillis distributifs), une structure quotient est obtenue lorsque l'on a une relation d'équivalence et que les lois de composition « passent au quotient ». Si l'on regarde la structure comme définie par générateurs et relations (ce qui est toujours possible), on obtient une structure quotient en rajoutant des relations.
Un *treillis quotient* $\mathbf{T}'$ *d'un treillis* $\mathbf{T}$ peut également être donné par une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbf{T}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left.\begin{array}{rcl} a \leqslant b & \Longrightarrow & a \preccurlyeq b \\ a \preccurlyeq b,\, b \preccurlyeq c & \Longrightarrow & a \preccurlyeq c \\ a \preccurlyeq b,\, a \preccurlyeq c & \Longrightarrow & a \preccurlyeq b \wedge c \\ b \preccurlyeq a,\, c \preccurlyeq a & \Longrightarrow & b \vee c \preccurlyeq a \end{array}\right\} \tag{2}$$

La relation $\preccurlyeq$ induit alors une structure de treillis sur l'ensemble quotient $\mathbf{T}'$

3. Rappelons que c'est un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ pour laquelle on a, pour tous x et $y \in E$, $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Ceci n'implique pas que l'égalité soit décidable.

obtenu avec la nouvelle égalité [4]

$$(a, b \in \mathbf{T}) \quad : \qquad a =_{\mathbf{T}'} b \overset{\text{def}}{\iff} (a \preccurlyeq b \text{ et } b \preccurlyeq a)$$

Naturellement si $\mathbf{T}$ est distributif, il en va de même pour $\mathbf{T}'$.
Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est un homomorphisme de treillis distributifs, $\varphi^{-1}(0)$ est appelé un *idéal de* $\mathbf{T}$. Un idéal $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{T}$ est une partie de $\mathbf{T}$ soumise aux contraintes suivantes :

$$\left.\begin{array}{rcl} & & 0 \in \mathfrak{b} \\ x, y \in \mathfrak{b} & \implies & x \vee y \in \mathfrak{b} \\ x \in \mathfrak{b},\ z \in \mathbf{T} & \implies & x \wedge z \in \mathfrak{b} \end{array}\right\} \tag{3}$$

(la dernière se réécrit $(x \in \mathfrak{b},\ y \leqslant x) \Rightarrow y \in \mathfrak{b}$). Un *idéal principal* est un idéal engendré par un seul élément a, il est égal à $\downarrow a$.
L'idéal $\downarrow a$, muni des lois $\wedge$ et $\vee$ de $\mathbf{T}$ est un treillis distributif dans lequel l'élément maximum est a. L'injection canonique $\downarrow a \to \mathbf{T}$ n'est pas un morphisme de treillis distributifs parce que l'image de a n'est pas égale à $1_{\mathbf{T}}$. Par contre l'application surjective $\mathbf{T} \to \downarrow a,\ x \mapsto x \wedge a$ est un morphisme surjectif, qui définit donc $\downarrow a$ comme une structure quotient.
La notion opposée à celle d'idéal est la notion de *filtre*. Le filtre principal engendré par a est égal à $\uparrow a$.
L'*idéal engendré* par une partie J de $\mathbf{T}$ est égal à

$$\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(J) = \big\{x \in \mathbf{T} \;\big|\; \exists J_0 \in \mathrm{P}_{\mathrm{fe}}(J),\ x \leqslant \bigvee J_0\big\}.$$

En conséquence *tout idéal de type fini est principal.*
Si A et B sont deux parties de $\mathbf{T}$ on note

$$A \vee B = \big\{a \vee b \mid a \in A,\ b \in B\big\} \ \text{ et } \ A \wedge B = \big\{a \wedge b \mid a \in A,\ b \in B\big\}. \tag{4}$$

Alors l'idéal engendré par deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ est égal à

$$\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b}. \tag{5}$$

L'ensemble des idéaux de $\mathbf{T}$ forme lui-même un treillis distributif [5] pour

4. Le fait de ne pas changer d'objets quand on passe au quotient, mais de changer seulement la relation d'égalité sur les objets est plus simple, mais aussi plus conforme à la tradition (Gauss) et à l'implémentation sur machine. Sans doute le succès populaire des classes d'équivalence comme objets de l'ensemble quotient est dû en bonne partie à l'heureux hasard qui fait que dans le cas d'un groupe quotient G/H, en notation additive par exemple, on a $(x + H) + (y + H) = (x + y) + H$ avec trois significations différentes du symbole $+$. Les choses se passent pourtant moins bien pour les anneaux quotients, et par exemple $(3 + 7\mathbb{Z})(2 + 7\mathbb{Z})$ n'est pas égal à $6 + 7\mathbb{Z}$, mais seulement contenu dedans.

5. En fait il faut introduire une restriction pour obtenir vraiment un ensemble, de façon à ce que l'on ait un procédé bien défini de construction des idéaux concernés. Par exemple on peut considérer l'ensemble des idéaux obtenus à partir des idéaux principaux par certaines opérations prédéfinies, comme les réunions et intersections dénombrables. C'est le même problème que celui indiqué dans la note 2.

l'inclusion, avec pour borne inférieure de $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ l'idéal

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}. \tag{6}$$

Ainsi les opérations $\vee$ et $\wedge$ définies en (4) correspondent au sup et au inf dans le treillis des idéaux.
On notera $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(S) = \{\, x \in \mathbf{T} \mid \exists S_0 \in \mathrm{P_{fe}}(S),\ x \geqslant \bigwedge S_0 \,\}$ le filtre de $\mathbf{T}$ engendré par le sous-ensemble S.
Quand on considère le treillis des filtres, il faut faire attention à ce que produit le renversement de la relation d'ordre : $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{f} \vee \mathfrak{g}$ est le inf des filtres $\mathfrak{f}$ et $\mathfrak{g}$, tandis que leur sup est égal à $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{f} \cup \mathfrak{g}) = \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{g}$.
Le *treillis quotient de* $\mathbf{T}$ *par l'idéal* $\mathfrak{a}$, noté $\mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$ est défini comme le treillis distributif engendré par les éléments de $\mathbf{T}$ avec pour relations, les relations vraies dans $\mathbf{T}$ d'une part, et les relations $x = 0$ pour les $x \in \mathfrak{a}$ d'autre part. Il peut aussi être défini par la relation de préordre suivante

$$a \leqslant_{\mathbf{T}/(\mathfrak{a}=0)} b \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists x \in \mathfrak{a}\ \ a \leqslant x \vee b.$$

Ceci donne

$$a \equiv b \mod (\mathfrak{a} = 0) \quad \iff \quad \exists x \in \mathfrak{a} \quad a \vee x = b \vee x.$$

En particulier, l'homomorphisme de passage au quotient

$$\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}' = \mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$$

vérifie $\varphi^{-1}(0_{\mathbf{T}'}) = \mathfrak{a}$. Dans le cas du quotient par un idéal principal $\downarrow a$ on obtient $\mathbf{T}/(\downarrow a = 0) \simeq \uparrow a$ avec le morphisme $y \mapsto y \vee a$ de $\mathbf{T}$ vers $\uparrow a$.

1.2. Proposition. *Soit* $\mathbf{T}$ *un treillis distributif et* (J, U) *un couple de parties de* $\mathbf{T}$. *On considère le quotient* $\mathbf{T}'$ *de* $\mathbf{T}$ *défini par les relations* $x = 0$ *pour les* $x \in J$, *et* $y = 1$ *pour les* $y \in U$. *Alors l'inégalité* $a \leqslant_{\mathbf{T}'} b$ *est satisfaite si, et seulement si, il existe* $J_0 \in \mathrm{P_{fe}}(J)$ *et* $U_0 \in \mathrm{P_{fe}}(U)$ *tels que :*

$$a \wedge \bigwedge U_0 \ \leqslant_{\mathbf{T}}\ b \vee \bigvee J_0 \tag{7}$$

Nous noterons $\mathbf{T}/(J = 0, U = 1)$ *ce treillis quotient* $\mathbf{T}'$.

On voit sur l'exemple des ensembles totalement ordonnés qu'une structure quotient d'un treillis distributif n'est pas en général caractérisée par les classes d'équivalence de 0 et 1.
Soient $\mathfrak{a}$ un idéal et $\mathfrak{f}$ un filtre de $\mathbf{T}$. On dit que $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{f}$-*saturé* si l'on a

$$(g \in \mathfrak{f},\ x \wedge g \in \mathfrak{a}) \Longrightarrow x \in \mathfrak{a},$$

on dit que $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{a}$-*saturé* si l'on a

$$(a \in \mathfrak{a},\ x \vee a \in \mathfrak{f}) \Longrightarrow x \in \mathfrak{f}.$$

Si $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{f}$-saturé et $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{a}$-saturé on dit que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ est un *couple saturé* dans $\mathbf{T}$.

1.3. Fait. *Soit $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}_1$ un homomorphisme de treillis distributifs. L'idéal $\mathfrak{a} = \varphi^{-1}(0)$ et le filtre $\mathfrak{f} = \varphi^{-1}(1)$ forment un couple saturé. Réciproquement, si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ est un couple saturé de $\mathbf{T}$, l'homomorphisme de passage au quotient $\pi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0, \mathfrak{f} = 1)$ vérifie $\pi^{-1}(0) = \mathfrak{a}$ et $\pi^{-1}(1) = \mathfrak{f}$.*

Lorsque $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ est un couple saturé, on a les équivalences

$$1 \in \mathfrak{a} \iff 0 \in \mathfrak{f} \iff (\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) = (\mathbf{T}, \mathbf{T})$$

Les algèbres de Boole

Dans un treillis distributif un élément x' est appelé un *complément*, ou un *complémentaire*, de x si l'on a $x \wedge x' = 0$ et $x \vee x' = 1$. S'il existe le complément de x est unique. Il est alors souvent noté $\neg x$.
Rappelons que par définition un anneau $\mathbf{B}$ est une algèbre de Boole si, et seulement si, tout élément est idempotent. On définit alors une relation d'ordre $x \preccurlyeq y$ par : x est multiple de y, c'est-à-dire $\langle x \rangle \subseteq \langle y \rangle$.
On obtient ainsi un treillis distributif dans lequel tout élément x admet pour complément $x' = 1 + x$ (cf. proposition VII-3.1).
On a la réciproque suivante.

1.4. Proposition. (Algèbres de Boole)

1. *Sur un treillis distributif dans lequel tout élément x admet un complément, noté $\neg x$, on peut définir une structure d'algèbre de Boole en posant*

$$xy = x \wedge y \quad \text{et} \quad x \oplus y = (x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x).$$

   On retrouve $x \vee y = x \oplus y \oplus xy$ et $\neg x = 1 \oplus x$.

2. *Tout homomorphisme de treillis distributifs entre deux algèbres de Boole est un homomorphisme d'algèbres de Boole, et il respecte le passage au complémentaire.*

Algèbre de Boole engendrée par un treillis distributif

Commençons par quelques remarques sur les éléments qui possèdent un complément dans un treillis distributif. Si a admet un complément a', puisque $b = (b \wedge a) \vee (b \wedge a')$ pour tout $b \in \mathbf{T}$, l'homomorphisme canonique

$$\mathbf{T} \to \mathbf{T}/(a = 1) \times \mathbf{T}/(a' = 1)$$

est injectif. En outre, ce morphisme est surjectif parce que, pour $x, y \in \mathbf{T}$, en posant $z = (x \wedge a) \vee (y \wedge a')$, on a $z \wedge a = x \wedge a$, i.e. $z \equiv x \bmod (a = 1)$, et, de même, $z \equiv y \bmod (a' = 1)$. Réciproquement, on a le résultat suivant qui montre la similitude entre un idempotent dans un anneau commutatif et un élément possédant un complément dans un treillis distributif (voyez le fait II-4.1).

1.5. Lemme. *Pour tout isomorphisme $\lambda : \mathbf{T} \to \mathbf{T}_1 \times \mathbf{T}_2$, il existe un (unique) élément $a \in \mathbf{T}$ tel que :*

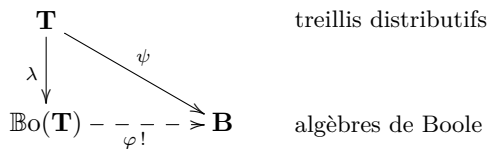
1. *a possède un complément $\neg a$,*
2. *l'homomorphisme composé $\mathbf{T} \to \mathbf{T}_1$ identifie $\mathbf{T}_1$ avec $\mathbf{T}/(a = 0)$ ainsi qu'avec $\mathbf{T}/(\neg a = 1)$,*
3. *l'homomorphisme composé $\mathbf{T} \to \mathbf{T}_2$ identifie $\mathbf{T}_2$ avec $\mathbf{T}/(a = 1)$ ainsi qu'avec $\mathbf{T}/(\neg a = 0)$.*

▷ L'élément a est donné par $\lambda(a) = (0_{\mathbf{T}_1}, 1_{\mathbf{T}_2})$. □

Lorsque deux éléments a et b possèdent des compléments $\neg a$ et $\neg b$, les *lois de Morgan* sont vérifiées :

$$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b \quad \text{et} \quad \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b. \tag{8}$$

Par définition, l'*algèbre de Boole librement engendrée par le treillis distributif* $\mathbf{T}$ est donnée par un couple $(\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T}), \lambda)$, où $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ est une algèbre de Boole, et où $\lambda : \mathbf{T} \to \mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ est un homomorphisme de treillis distributifs satisfaisant la propriété universelle suivante.
Tout homomorphisme ψ de treillis distributifs de $\mathbf{T}$ vers une algèbre de Boole $\mathbf{B}$ se factorise de manière unique sous la forme $\varphi \circ \lambda$.



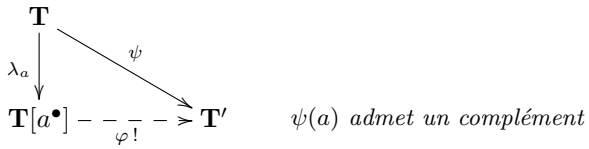
Puisque nous sommes dans le cadre de structures algébriques purement équationnelles, cette algèbre de Boole peut être construite à partir de $\mathbf{T}$ en rajoutant par force une loi unaire $a \mapsto \neg a$ et en imposant les axiomes $a \wedge \neg a = 0$, $a \vee \neg a = 1$.
Autrement dit encore $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ peut être définie comme une algèbre de Boole obtenue par générateurs et relations. Les générateurs sont les éléments de $\mathbf{T}$ et les relations sont celles qui sont vraies dans $\mathbf{T}$: de la forme $a \wedge b = c$ ou $a \vee b = d$, sans oublier $0_{\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})} = 0_{\mathbf{T}}$ et $1_{\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})} = 1_{\mathbf{T}}$.
Cette description est cependant peu précise et nous allons construire $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ à la vitesse de la tortue pour y voir plus clair.

1.6. Lemme. *Soit $\mathbf{T}$ un treillis distributif et $a \in \mathbf{T}$. Considérons le treillis distributif*

$$\mathbf{T}[a^\bullet] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}/(a = 0) \times \mathbf{T}/(a = 1)$$

et $\lambda_a : \mathbf{T} \to \mathbf{T}[a^\bullet]$ l'homomorphisme canonique.

1. *L'homomorphisme λ_a est injectif et $\lambda_a(a) = (0,1)$ admet $(1,0)$ pour complément.*
2. *Pour tout homomorphisme $\psi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ tel que $\psi(a)$ admette un complément, il existe un unique homomorphisme $\varphi : \mathbf{T}[a^\bullet] \to \mathbf{T}'$ tel que $\varphi \circ \lambda_a = \psi$.*



▷ Le lemme 1.5 donne $\mathbf{T}' \simeq \mathbf{T}'/(\psi(a) = 0) \times \mathbf{T}'/(\psi(a) = 1)$, d'où l'homomorphisme φ et l'unicité. L'injectivité de λ_a ne saute pas aux yeux mais c'est un grand classique : si $x \wedge a = y \wedge a$ et $x \vee a = y \vee a$, alors

$$x = (x \vee a) \wedge x = (y \vee a) \wedge x = (y \wedge x) \vee (a \wedge x).$$

De manière symétrique $y = (y \wedge x) \vee (a \wedge y)$, donc $x = y$ puisque $a \wedge x = a \wedge y$. □

1.7. Corollaire. *Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{T}$.*

1. *Le treillis $\mathbf{T}[a_1^\bullet][a_2^\bullet] \cdots [a_n^\bullet]$ est indépendant, à isomorphisme unique près, de l'ordre des a_i. Il sera noté $\mathbf{T}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet]$.*
2. *Une description possible est la suivante :*

$$\mathbf{T}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet] \;\simeq\; \prod\nolimits_{I \in \mathcal{P}_n} \mathbf{T}/\big((a_i = 0)_{i \in I}, (a_j = 1)_{j \in [\![1..n]\!] \setminus I}\big)\,.$$

3. *L'homomorphisme naturel $\mathbf{T} \to \mathbf{T}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet]$ est injectif. Il factorise de manière unique tout homomorphisme ψ de $\mathbf{T}$ vers un treillis distributif $\mathbf{T}'$ tel que les $\psi(a_i)$ admettent un complément.*

1.8. Théorème. (Algèbre de Boole librement engendrée par un treillis distributif) *Pour tout treillis distributif $\mathbf{T}$ il existe une algèbre de Boole, notée $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$, avec un homomorphisme $\lambda : \mathbf{T} \to \mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$, qui factorise de manière unique tout homomorphisme $\psi : \mathbf{T} \to \mathbf{B}$ vers une algèbre de Boole. Ce couple $(\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T}), \lambda)$ est unique à isomorphisme unique près. On a de plus les propriétés suivantes.*

- *L'homomorphisme λ est injectif.*
- *On a $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T}) = \mathbf{T}[(a^\bullet)_{a \in \mathbf{T}}]$*

▷ On prend pour $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ la limite inductive (filtrante) des $\mathbf{T}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet]$. L'injectivité de λ et l'unicité de la factorisation résultent du lemme 1.6. Il reste à voir que cette limite inductive est bien une algèbre de Boole. Tout d'abord c'est un treillis distributif comme limite inductive de treillis distributifs. Ensuite, chaque a_i admet un complément dans $\mathbf{T}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet]$, lequel donne bien un complément de $\lambda(a_i)$ dans la limite inductive, parce

que tout morphisme de treillis distributifs conserve les compléments qui existent. Enfin, les lois de Morgan, comme énoncées précédemment assurent par récurrence que tout élément de $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ admet un complément. □

Exemples. 1) Supposons que $\mathbf{T}$ soit un treillis de parties détachables d'un ensemble E, au sens que si A et B sont des éléments de $\mathbf{T}$, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ également, avec en outre $\emptyset$ et E éléments de $\mathbf{T}$. Alors $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ s'identifie à l'ensemble des combinaisons booléennes finies d'éléments de $\mathbf{T}$ (ce sont toutes des parties détachables de E), qui est une algèbre de Boole de parties de E. Voir à ce sujet l'exercice 17 et son corrigé.
2) Soit $\mathbf{T}$ un ensemble totalement ordonné discret admettant un minimum $0_{\mathbf{T}}$ et un maximum $1_{\mathbf{T}}$. Alors $\mathbf{T}$ est un treillis distributif et il est isomorphe au treillis des parties de $\mathbf{T} \setminus \{1_{\mathbf{T}}\}$ qui sont de la forme $I_a = \{\, x \in \mathbf{T} \mid x < a \,\}$. L'isomorphisme est donné par $a \mapsto I_a$. Par suite $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ est formé par l'ensemble des parties qui sont réunions finies d'intervalles semi-ouverts $[\, a_i, b_i \,[$. L'écriture est unique si l'on réclame $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots < b_n$ (la partie vide correspond à une réunion vide, et la partie pleine est $[\, 0_{\mathbf{T}}, 1_{\mathbf{T}} \,[$).
Un exemple simple avec $\mathbf{T}$ infini est le suivant. On considère $\mathbf{T} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, alors $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ s'identifie à l'ensemble des parties finies ou cofinies de $\mathbb{N}$ (données en tant que telles, bien évidemment).
Notons que lorsque $\mathbf{T}$ est un ensemble totalement ordonné *non* discret, la description de $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ est nettement plus délicate. ∎

Commentaire. En mathématiques classiques, tout treillis distributif est isomorphe à un sous-treillis du treillis des parties d'un ensemble. Cela fournit en suivant l'exemple 1) ci-dessus une « construction » alternative de l'algèbre de Boole $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$. ∎

2. Groupes réticulés

Premier pas

Dans cet ouvrage nous nous limitons, pour les groupes ordonnés, au cas des groupes commutatifs.

2.1. Définition. On appelle *groupe ordonné* un groupe abélien G muni d'une relation d'ordre partiel *compatible* avec la loi de groupe, i.e., en notation additive,

$$\forall a, x, y \in G \qquad x \leqslant y \implies a + x \leqslant a + y.$$

Un groupe ordonné est dit *réticulé* lorsque deux éléments arbitraires admettent une borne inférieure, que l'on notera $x \wedge y$. Si nécessaire, on précise la structure en écrivant $(G, 0, +, -, \wedge)$. Un *morphisme de groupes réticulés* est un homomorphisme de groupe qui respecte la loi $\wedge$.

Un groupe abélien muni d'un ordre total compatible (on dit un *groupe totalement ordonné*) est un groupe réticulé. Les morphismes de groupes totalement ordonnés sont alors les homomorphismes de groupes croissants.
Un *sous-groupe réticulé* d'un groupe réticulé G est par définition un sous-groupe stable pour la loi de treillis $\wedge$. Il ne suffit pas pour cela que la relation d'ordre induite sur le sous-groupe en fasse un treillis.
Une idée directrice dans la théorie des groupes réticulés est qu'*un groupe réticulé se comporte dans les calculs comme un produit de groupes totalement ordonnés.* Ceci se traduira de manière constructive par le principe de recouvrement fermé 2.10.

Exemples. 1) (Attention, notation multiplicative !) L'ensemble $\mathbb{Q}^{>0}$ des rationnels strictement positifs est un groupe réticulé avec pour partie positive le monoïde $(\mathbb{N}^{>0}, 1, \times)$. L'exemple de cette structure multiplicative est paradigmatique. On a un isomorphisme de groupes réticulés $\mathbb{Q}^{>0} \simeq \mathbb{Z}^{(P)}$, où P est l'ensemble des nombres premiers, $\mathbb{Z}^{(P)} = \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}$ et l'ordre est induit par l'ordre produit. Ceci n'est qu'une autre manière d'exprimer le théorème fondamental de l'arithmétique « tout entier naturel s'écrit de manière unique comme produit de puissances de nombres premiers ». C'est en voulant à tout prix faire ressembler la multiplication pour les entiers des corps de nombres à la multiplication dans $\mathbb{N}^{>0}$ que les mathématiciens ont été amenés à inventer les « nombres pgcd idéaux ».
2) Si $(G_i)_{i\in I}$ est une famille de groupes réticulés indexée par un ensemble discret I, on définit la *somme directe orthogonale* de la famille, notée $\boxplus_{i\in I} G_i$, qui est un groupe réticulé avec comme groupe sous-jacent le groupe $\bigoplus_{i\in I} G_i$, la loi $\wedge$ étant définie coordonnée par coordonnée. Lorsque I est fini, par exemple $I = [\![1..3]\!]$, on notera $G_1 \boxplus G_2 \boxplus G_3$.
Par exemple $\mathbb{Z}^{(P)} = \boxplus_{p\in P}\mathbb{Z}$.
On définit également le produit $\prod_{i\in I} G_i$ de manière usuelle, et c'est le produit dans la catégorie des groupes réticulés. Si I est un ensemble fini, les groupes réticulés $\boxplus_{i\in I} G_i$ et $\prod_{i\in I} G_i$ sont naturellement isomorphes.
3) Si $(G_i)_{i\in I}$ est une famille de groupes totalement ordonnés discrets avec pour I un ensemble totalement ordonné discret on définit la somme lexicographique de cette famille, c'est le groupe totalement ordonné discret G dont le groupe sous-jacent est $\bigoplus_{i\in I} G_i$ et la relation d'ordre est l'ordre lexicographique : $(x_i)_{i\in I} < (y_i)_{i\in I}$ si, et seulement si, $x_{i_0} < y_{i_0}$ pour le plus petit indice i_0 tel que $x_{i_0} \neq y_{i_0}$. ∎

Dans un groupe réticulé les translations sont des automorphismes de la structure d'ordre, d'où la règle de distributivité

$$x + (a \wedge b) \;=\; (x + a) \wedge (x + b). \tag{9}$$

On voit aussi que la bijection $x \mapsto -x$ renverse l'ordre, et donc que deux éléments arbitraires x, y admettent aussi une borne supérieure

$$x \vee y = -\big((-x) \wedge (-y)\big),$$

avec $x + y - (x \vee y) = (x + y) + \big((-x) \wedge (-y)\big) = (x + y - x) \wedge (x + y - y)$, donc

$$x + y = (x \wedge y) + (x \vee y), \tag{10}$$

$$x + (a \vee b) = (x + a) \vee (x + b). \tag{11}$$

Il manque cependant un élément minimum et un élément maximum pour obtenir un treillis.

Identités remarquables dans les groupes réticulés

Dans ce paragraphe G est un groupe réticulé
et G^+ le sous-monoïde de G formé des éléments positifs ou nuls.

On note

$$x^+ = x \vee 0, \quad x^- = (-x) \vee 0 \quad \text{et} \quad |x| = x \vee (-x).$$

On les appelle respectivement la *partie positive*, la *partie négative* et la *valeur absolue* de x.

2.2. Théorème. (Distributivité dans les groupes réticulés)
Dans un groupe réticulé les lois $\wedge$ et $\vee$ sont distributives l'une par rapport à l'autre.

D Il suffit de montrer $x \vee (y_1 \wedge y_2) = (x \vee y_1) \wedge (x \vee y_2)$. En translatant par $-x$, on se ramène à $x = 0$, i.e. à $(y_1 \wedge y_2)^+ = y_1^+ \wedge y_2^+$.
L'inégalité $(y_1 \wedge y_2)^+ \leqslant y_1^+ \wedge y_2^+$ est immédiate.
Posons $y = y_1 \wedge y_2$. L'élément $y_i + y^+ - y$ est $\geqslant y_i$ et $\geqslant 0$, donc $\geqslant y_i^+$.
D'où $y_i^+ + y \leqslant y_i + y^+$. Puis $(y_1^+ + y) \wedge (y_2^+ + y) \leqslant (y_1 + y^+) \wedge (y_2 + y^+)$,
i.e. $(y_1^+ \wedge y_2^+) + y \leqslant (y_1 \wedge y_2) + y^+$, i.e. $y_1^+ \wedge y_2^+ \leqslant y^+$. □

Deux éléments x, y sont dits *disjoints* ou *orthogonaux* si $|x| \wedge |y| = 0$.

2.3. Lemme. *Soient x, $y \in G$.*

$$x = x^+ - x^-, \quad x^+ \perp x^-, \quad |x| = x^+ + x^- = x^+ \vee x^- \in G^+ \tag{12}$$

$$x \leqslant y \iff x^+ \leqslant y^+ \quad \textit{et} \quad y^- \leqslant x^-, \quad x = 0 \iff |x| = 0 \tag{13}$$

D (12). Tout d'abord $x^+ - x = (x \vee 0) - x = (x - x) \vee \big(0 + (-x)\big) = x^-$.
Toujours par distributivité on obtient
$x^+ + x^- = (x \vee 0) + ((-x) \vee 0) = (x - x) \vee (x + 0) \vee \big(0 + (-x)\big) \vee (0 + 0) = x^+ \vee x^-$.
Enfin puisque $x^+ + x^- = (x^+ \vee x^-) + (x^+ \wedge x^-)$, cela donne $x^+ \wedge x^- = 0$.
(13). Laissé au lecteur. □

2.4. Lemme. (Lemme de Gauss) *Soient x, y, $z \in G^+$.*

$$(x \perp y \quad \textit{et} \quad x \leqslant y + z) \implies x \leqslant z \tag{14}$$

$$x \perp y \implies x \wedge (y + z) = x \wedge z \tag{15}$$

$$(x \perp y \quad et \quad x \perp z) \implies x \perp (y+z) \tag{16}$$

$$(x \perp y \quad et \quad x \leqslant z \quad et \quad y \leqslant z) \implies x+y \leqslant z \tag{17}$$

D (14). On a $x \leqslant z+x$ parce que $z \geqslant 0$ et $x \leqslant z+y$ par hypothèse, donc $x \leqslant (z+x) \wedge (z+y) = z + (x \wedge y) = z$.
(15). Soit $x' = x \wedge (y+z)$. Il suffit de voir que $x' \leqslant x \wedge z$. On a $x' \geqslant 0$, $x' \leqslant x$ donc $x' \perp y$. On peut appliquer le point précédent à l'inégalité $x' \leqslant y+z$: elle fournit $x' \leqslant z$, ce que l'on voulait.
(16). Conséquence directe du point précédent.
(17). Car $x+y = x \vee y$ et $x \vee y \leqslant z$. □

2.5. Corollaire. *Soient x, y, $z \in G$, $n \in \mathbb{N}^*$.*

$$(x = y-z \ \ et \ \ y \geqslant 0 \ \ et \ \ z \geqslant 0 \ \ et \ \ y \perp z) \iff (y = x^+ \ \ et \ \ z = x^-) \tag{18}$$

$$(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x \perp y) \implies x \perp ny \tag{19}$$

$$(nx)^+ = nx^+,\ (nx)^- = nx^-,\ |nx| = n\,|x| \tag{20}$$

$$nx = 0 \implies x = 0 \tag{21}$$

$$n(x \wedge y) = nx \wedge ny, \quad n(x \vee y) = nx \vee ny \tag{22}$$

D (18). Il reste à montrer le sens $\Longrightarrow$. On a $x^+ + z = x^- + y$. En appliquant le lemme de Gauss, on obtient $y \leqslant x^+$ (parce que $y \perp z$) et $x^+ \leqslant y$ (parce que $x^+ \perp x^-$).
(19). Résulte de (21).
(20). D'après (18) et (19) puisque $nx = nx^+ - nx^-$ et $nx^+ \perp nx^-$.
(21). D'après (20) puisque l'implication est vraie pour $x \geqslant 0$.
(22). Les éléments $b = x \vee y$, $a = x \wedge y$, $x_1 = x-a$ et $y_1 = y-a$ sont caractérisés par les relations suivantes :

$$x_1 \geqslant 0,\ y_1 \geqslant 0,\ x = x_1 + a,\ y = y_1 + a,\ x_1 \perp y_1,\ a+b = x+y.$$

On multiplie tout par n. □

Congruences simultanées, principe de recouvrement par quotients

2.6. Définition. Si $a \in G$, on définit la *congruence modulo a* comme suit

$$x \equiv y \mod a \overset{\text{def}}{\iff} \exists n \in \mathbb{N}^*,\ |x-y| \leqslant n\,|a|\,.$$

On note $\mathcal{C}(a)$ l'ensemble des x congrus à 0 modulo a.

2.7. Fait. *L'ensemble $\mathcal{C}(a)$ est un sous-groupe réticulé de G et les lois du treillis passent au quotient dans $G/\mathcal{C}(a)$.*
Ainsi, l'application canonique $\pi_a : G \to G/\mathcal{C}(a)$ est un morphisme de groupes réticulés, et tout morphisme de groupes réticulés $G \to G'$ qui annule a se factorise par π_a.

La signification de la congruence $x \equiv 0 \bmod a$ est donc que tout morphisme de groupes réticulés $G \xrightarrow{\varphi} G'$ qui annule a annule x([6]).

Le lemme suivant a la saveur d'un théorème des restes chinois arithmétique (voir théorème XII-1.6 point *5*) pour les groupes réticulés, mais seulement la saveur. Il est nettement plus simple.

2.8. Lemme. (Lemme des congruences simultanées)
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ dans G^+ et $(a_1, \dots, a_n)$ dans G.

1. *Si sont satisfaites les inégalités $|a_i - a_j| \leqslant x_i + x_j$, $i, j \in [\![1..n]\!]$, il existe un $a \in G$ tel que $|a - a_i| \leqslant x_i$, $i \in [\![1..n]\!]$. Par ailleurs :*
   — *Si les a_i sont dans G^+ on a une solution a dans G^+.*
   — *Si $\bigwedge_i x_i = 0$, la solution a est unique.*
2. *De même, si $a_i \equiv a_j \bmod x_i + x_j$ pour i, $j \in [\![1..n]\!]$, il existe $a \in G$ tel que $a \equiv a_i \bmod x_i$, $i \in [\![1..n]\!]$. Par ailleurs :*
   — *Si les a_i sont dans G^+ on a une solution a dans G^+.*
   — *Si $\bigwedge_i x_i = 0$, la solution a est unique.*

▷ Il suffit de montrer le point *1.* Voyons d'abord l'unicité. Si l'on a deux solutions a et a' on aura $|a - a'| \leqslant 2x_i$ pour chaque i, donc $|a - a'| \leqslant 2 \bigwedge_i x_i$. Passons à l'existence. Traitons le cas où les a_i sont dans G^+. Il s'agit en fait de montrer que les hypothèses impliquent l'inégalité $\bigvee_i (a_i - x_i)^+ \leqslant \bigwedge_i (a_i + x_i)$. Il suffit pour cela de vérifier que pour chaque i, j, on a $(a_i - x_i) \vee 0 \leqslant a_j + x_j$. Or $0 \leqslant a_j + x_j$, et $a_i - x_i \leqslant a_j + x_j$ par hypothèse. □

2.9. Lemme. *Étant donnés une famille finie $(a_j)_{j \in J}$ dans un groupe réticulé G et une partie finie P de $J \times J$, il existe une famille finie $(x_i)_{i \in I}$ dans G telle que*

1. *$\bigwedge_{i \in I} x_i = 0$.*
2. *Modulo chacun des x_i, pour chaque $(j, k) \in P$, on a $a_j \leqslant a_k$ ou $a_k \leqslant a_j$.*

▷ Posons $y_{j,k} = a_j - (a_j \wedge a_k)$ et $z_{j,k} = a_k - (a_j \wedge a_k)$. On a $y_{j,k} \wedge z_{j,k} = 0$. Modulo $y_{j,k}$, on a $a_j = a_j \wedge a_k$, c'est-à-dire $a_j \leqslant a_k$, et modulo $z_{j,k}$, on a $a_k \leqslant a_j$.
En développant par distributivité la somme $0 = \sum_{(j,k) \in P} (y_{j,k} \wedge z_{j,k})$ on obtient un $\bigwedge_{i \in I} x_i$, où chaque x_i est une somme $\sum_{j,k} t_{j,k}$, avec pour $t_{j,k}$ l'un des deux éléments $y_{j,k}$ ou $z_{j,k}$. Modulo un tel x_i chacun des $t_{j,k}$ est nul (car ils sont $\geqslant 0$ et leur somme est nulle). On est donc bien dans la situation annoncée. □

6. D'ailleurs, par calcul direct, si $\varphi(a) = 0$, alors $\varphi(|a|) = |\varphi(a)| = 0$, et $|\varphi(x)| = \varphi(|x|) \leqslant \varphi(n\,|a|) = n\varphi(|a|) = 0$, donc $\varphi(x) = 0$.

Le principe ci-après est une sorte d'analogue, pour les groupes réticulés, du principe local-global de base pour les anneaux commutatifs.
En fait il s'agit d'un simple cas particulier du point *2* du lemme 2.8 lorsque les a_i sont tous nuls : on applique l'unicité.

2.10. Principe de recouvrement par quotients. (Pour les groupes réticulés) *Soient $a, b \in G$, $x_1, \ldots, x_n \in G^+$ avec $\bigwedge_i x_i = 0$. Alors $a \equiv b \bmod x_i$ pour chaque i si, et seulement si, $a = b$.*
En conséquence, vu le lemme 2.9, pour démontrer une égalité $a = b$ on peut toujours supposer que les éléments (en nombre fini) qui se présentent dans un calcul pour une démonstration de l'égalité sont comparables, si on en a besoin pour faire la démonstration. Ce principe s'applique aussi bien pour des inégalités que pour des égalités puisque $a \leqslant b$ équivaut à $a \wedge b = a$.

Remarque. En termes un peu plus abstraits, on aurait pu dire que le morphisme canonique de groupes réticulés $G \to \prod_i G/\mathcal{C}(x_i)$ est injectif. Et le commentaire qui conclut le principe de recouvrement par quotients peut être paraphrasé comme suit : dans les calculs, un groupe réticulé se comporte toujours comme un produit de groupes totalement ordonnés. ∎

Dans le théorème de Riesz qui suit on notera que les « il existe » sont des abréviations pour des formules explicites qui résultent de la démonstration. Ainsi ce théorème peut être vu comme une famille d'identités algébriques dans G, sous certaines conditions de signes (qui sont dans l'hypothèse). Il est aussi possible de voir ce théorème comme une famille d'identités algébriques « pures » dans G^+, c'est-à-dire sans aucune condition de signe. Dans ce cas il faut voir G^+ comme une structure algébrique pour laquelle on rajoute l'opération $x \dot{-} y \stackrel{\text{def}}{=} x - (x \wedge y)$ (bien définie sur G^+ malgré le fait qu'elle fasse appel à l'opération $-$ de G).

2.11. Théorème. (Théorème de Riesz)
Soient G un groupe réticulé et $u, x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ dans G^+.

1. *Si $u \leqslant \sum_j y_j$, il existe $u_1, \ldots, u_m \in G^+$ tels que $u_j \leqslant y_j$ pour $j \in [\![1..m]\!]$ et $u = \sum_j u_j$.*
2. *Si $\sum_i x_i = \sum_j y_j$, il existe $(z_{i,j})_{i\in[\![1..n]\!],j\in[\![1..m]\!]}$ dans G^+ tels que pour tous i, j on ait : $\sum_{k=1}^m z_{i,k} = x_i$ et $\sum_{\ell=1}^n z_{\ell,j} = y_j$.*

Démonstration « directe », mais astucieuse.
1. Il suffit de le prouver pour $m = 2$ (récurrence facile sur m). Si $u \leqslant y_1 + y_2$, on pose $u_1 = u \wedge y_1$ et $u_2 = u - u_1$. Il faut prouver $0 \leqslant u_2 \leqslant y_2$. Or $u_2 = u - (u \wedge y_1) = u + \big((-u) \vee (-y_1)\big) = (u - u) \vee (u - y_1) \leqslant y_2$.
2. Pour $n = 1$ ou $m = 1$ il n'y a rien à faire. Pour $n = 2$, c'est donné par le point *1.* Supposons donc $n \geqslant 3$. Posons $z_{1,1} = x_1 \wedge y_1$, $x_1' = x_1 - z_{1,1}$ et $y_1' = y_1 - z_{1,1}$. On a $x_1' + x_2 + \cdots + x_n = y_1' + y_2 + \cdots + y_m$.

Puisque $x'_1 \wedge y'_1 = 0$, le lemme de Gauss donne $x'_1 \leqslant y_2 + \cdots + y_m$.
Par le point *1* on peut écrire $x'_1 = z_{1,2} + \cdots + z_{1,m}$ avec les $z_{1,j} \leqslant y_j$, i.e. $y_j = z_{1,j} + y'_j$ et $y'_j \in G^+$. Donc $x_2 + \cdots + x_n = y'_1 + y'_2 + \cdots + y'_m$.
Ceci nous permet donc une récurrence sur n.
Démonstration par le principe de recouvrement par quotients.
Il suffit de prouver le point *2*. En application du principe 2.10, on peut supposer le groupe totalement ordonné. Supposons par exemple $x_1 \leqslant y_1$. On pose $z_{1,1} = x_1$, $z_{1,k} = 0$ pour $k \geqslant 2$. On remplace y_1 par $y_1 - x_1 = y'_1$. On est ramené à résoudre le problème pour $x_2, \ldots, x_n$ et $y'_1, y_2, \ldots, y_m$. De proche en proche, on fait ainsi diminuer $n + m$ jusqu'à ce que $n = 1$ ou $m = 1$, auquel cas tout est clair. □

2.12. Fait. (Autres identités dans les groupes réticulés)
Soient x, y, x', y', z, $t \in G$, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in G$.

1. $x + y = |x - y| + 2(x \wedge y)$
2. $(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^+$, $(x \wedge y)^- = x^- \vee y^-$,
   $(x \vee y)^+ = x^+ \vee y^+$, $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$.
3. $2(x \wedge y)^+ \leqslant (x + y)^+ \leqslant x^+ + y^+$.
4. $|x + y| \leqslant |x| + |y| \ : \ |x| + |y| = |x + y| + 2(x^+ \wedge y^-) + 2(x^- \wedge y^+)$.
5. $|x - y| \leqslant |x| + |y| \ : \ |x| + |y| = |x - y| + 2(x^+ \wedge y^+) + 2(x^- \wedge y^-)$.
6. $|x + y| \vee |x - y| = |x| + |y|$.
7. $|x + y| \wedge |x - y| = \big||x| - |y|\big|$.
8. $|x - y| = (x \vee y) - (x \wedge y)$.
9. $|(x \vee z) - (y \vee z)| + |(x \wedge z) - (y \wedge z)| = |x - y|$.
10. $|x^+ - y^+| + |x^- - y^-| = |x - y|$.
11. $x \leqslant z \implies (x \wedge y) \vee z = x \wedge (y \vee z)$.
12. $x + y = z + t \implies x + y = (x \vee z) + (y \wedge t)$.
13. $n\,x \geqslant \bigwedge_{k=1}^{n}(ky + (n-k)x) \implies x \geqslant y$.
14. $\bigvee_{i=1}^{n} x_i = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\big(\sum_{I \in \mathcal{P}_{k,n}} \bigwedge_{i \in I} x_i\big)$.
15. $x \perp y \iff |x + y| = |x - y| \iff |x + y| = |x| \vee |y|$.
16. $x \perp y \implies |x + y| = |x| + |y| = |x| \vee |y|$.
17. $(x \perp y,\ x' \perp y,\ x \perp y',\ x' \perp y',\ x + y = x' + y') \implies (x = x',\ y = y')$.
18. *On définit* $\mathrm{Tri}(\underline{x}) = [\mathrm{Tri}_1(\underline{x}), \mathrm{Tri}_2(\underline{x}), \ldots, \mathrm{Tri}_n(\underline{x})]$, *où*
    $$\mathrm{Tri}_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigwedge_{I \in \mathcal{P}_{k,n}} \big(\bigvee_{i \in I} x_i\big) \quad (k \in [\![1..n]\!]).$$
    On a les résultats suivants.
    a. $\mathrm{Tri}_k(x_1, \ldots, x_n) = \bigvee_{J \in \mathcal{P}_{n-k+1,n}} \big(\bigwedge_{j \in J} x_j\big)$, $(k \in [\![1..n]\!])$.
    b. $\mathrm{Tri}_1(\underline{x}) \leqslant \mathrm{Tri}_2(\underline{x}) \leqslant \cdots \leqslant \mathrm{Tri}_n(\underline{x})$.

c. Si les x_i sont deux à deux comparables, la liste $\mathrm{Tr}(\underline{x})$ *est la liste des x_i rangée en ordre croissant (il n'est pas nécessaire que le groupe soit discret).*

Supposons u, v, $w \in G^+$.

19. $u \perp v \iff u + v = |u - v|$.

20. $(u + v) \wedge w \leqslant (u \wedge w) + (v \wedge w)$.

21. $(x + y) \vee w \leqslant (x \vee w) + (y \vee w)$.

22. $v \perp w \implies (u + v) \wedge w = u \wedge w$.

23. $u \perp v \implies (u + v) \wedge w = (u \wedge w) + (v \wedge w)$.

D Tout ceci est à peu près immédiat dans un groupe totalement ordonné, en raisonnant cas par cas. On conclut avec le principe 2.10. □

Remarques.

1) Une implication comme par exemple

$$(u \wedge v = 0,\ u \geqslant 0,\ v \geqslant 0) \implies u + v = |u - v|$$

(voir le point *19*) peut être vue comme le résultat d'une identité qui exprime, pour un certain entier n, que $n\,|u + v - |u - v||$ est égal à une expression qui combine u^-, v^- et $|u \wedge v|$ au moyen des lois $\vee$, $\wedge$ et $+$. En fait, l'égalité donnée au point *1* règle directement la question sans hypothèse de signe sur u et v : $|u + v - |u - v|| = 2\,|u \wedge v|$.

2) Il y a une différence importante entre les identités algébriques usuelles, qui sont en dernière analyse des égalités entre polynômes dans un anneau commutatif libre sur des indéterminées, $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$, et les identités algébriques dans les groupes réticulés. Ces dernières sont certes des égalités entre expressions que l'on peut écrire dans un groupe réticulé librement engendré par un nombre fini d'indéterminées, mais la structure d'un tel groupe réticulé libre est nettement plus difficile à décrypter que celle d'un anneau de polynômes, dans lequel les objets ont une écriture normalisée. La comparaison de deux expressions dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ est « facile » dans la mesure où on ramène chacune d'elle à la forme normale. La tâche est beaucoup plus difficile dans les groupes réticulés libres, pour lesquels il n'y a pas de forme normale unique (on peut ramener toute expression à un sup de inf de combinaisons linéaires des indéterminées, mais il n'y a pas unicité). ■

Décomposition partielle, décomposition complète

2.13. Définition. Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille finie d'éléments > 0 dans un groupe réticulé discret G.

1. On dit que cette famille admet une *décomposition partielle* si l'on peut trouver une famille finie $(p_j)_{j \in J}$ d'éléments > 0 deux à deux orthogonaux telle que chaque a_i s'écrive $\sum_{j \in J} r_{i,j} p_j$ avec les $r_{i,j} \in \mathbb{N}$. La

famille $(p_j)_{j\in J}$ est alors appelée une *base de décomposition partielle* pour la famille $(a_i)_{i\in I}$.

2. Une telle décomposition partielle est appelée une *décomposition complète* si les p_j sont *irréductibles* (un élément $q>0$ est dit irréductible si une égalité $q=c+d$ dans G^+ implique $c=0$ ou $d=0$).
3. Un groupe réticulé est dit *à décomposition partielle* s'il est discret et si toute famille finie d'éléments >0 admet une décomposition partielle.
4. Un groupe réticulé est dit *à décomposition complète* s'il est discret et si tout élément >0 admet une décomposition complète.
5. Un groupe réticulé est dit *à décomposition bornée* lorsque pour tout $x\geqslant 0$ il existe un entier n tel que, lorsque $x=\sum_{j=1}^{n} y_j$ avec les $y_j\geqslant 0$, au moins l'un des y_j est nul.
6. Un groupe réticulé est dit *noethérien* si toute suite décroissante d'éléments $\geqslant 0$ admet deux termes consécutifs égaux.

Exemples.
Une famille vide, ou une famille d'éléments tous nuls, admet la famille vide comme base de décomposition partielle.
Le groupe réticulé $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est à décomposition complète.
Les groupes réticulés $\mathbb{Q}^n$ $(n\geqslant 1)$ sont à décomposition partielle mais pas complète.
Le groupe réticulé $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ n'est pas à décomposition partielle (considérer la famille finie $(1,\sqrt{2})$).
Le produit lexicographique $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ n'est pas à décomposition partielle.
Plus généralement un groupe totalement ordonné à décomposition partielle est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Q}$. ∎

Il est clair qu'un groupe réticulé à décomposition complète est à décomposition bornée et qu'un groupe réticulé à décomposition bornée est noethérien. Dans un groupe réticulé à décomposition partielle, deux décompositions partielles pour deux familles finies de G^+ admettent un raffinement commun pour la réunion des deux familles : ici on entend qu'une base de décomposition partielle $(q_1,\dots,q_s)$ en raffine une autre si elle est une base de décomposition partielle pour cette autre.

2.14. Proposition. *Dans un groupe réticulé, si un élément >0 admet une décomposition complète, elle est unique à l'ordre près des facteurs.*

𝔇 Il suffit de montrer que si un élément q irréductible est majoré par une somme $\sum_i p_i$ d'éléments irréductibles il est égal à l'un d'eux.
Or on a alors $q=q\wedge\sum_i p_i$, et puisque $q\wedge p_j=0$ ou p_j, on peut conclure avec le lemme de Gauss (égalité (15)).
Notez que l'on n'a pas besoin de supposer le groupe discret. □

2.15. Proposition. *Soit G un groupe réticulé à décomposition complète.*

1. *Les éléments irréductibles de G^+ forment une partie détachable P, et G est isomorphe à la somme directe orthogonale $\mathbb{Z}^{(P)}$.*
2. *Le groupe G est à décomposition bornée (et a fortiori noethérien).*

1. Le test d'irréductibilité est donné par la décomposition complète de l'élément à tester. L'isomorphisme s'obtient à partir de l'unicité de la décomposition complète (à l'ordre des facteurs près).
2. Soit $x \in G^+$. Écrivons $x = \sum_{j\in J} n_j p_j$ avec les p_j irréductibles et $n_j \in \mathbb{N}$, et posons $n = \sum_j n_j$. Alors si $x = \sum_{k=1}^{n+1} x_k$ avec des $x_k \geqslant 0$ on a nécessairement l'un des x_k nul (considérer la décomposition de chaque x_k en somme d'irréductibles). □

En mathématiques classiques, un groupe réticulé discret noethérien est à décomposition complète. Ce résultat ne peut pas être obtenu constructivement. Néanmoins on obtient une décomposition partielle.

2.16. Théorème. (Décomposition partielle sous condition noethérienne) *Un groupe réticulé G discret et noethérien est à décomposition partielle.*

Pour la démonstration, nous utiliserons le lemme suivant.

2.17. Lemme. *(sous les hypothèses du théorème 2.16)*
Pour $a \in G^+$ et $p_1, \ldots, p_m > 0$ deux à deux orthogonaux, on peut trouver des éléments deux à deux orthogonaux $a_0, a_1, \ldots, a_m$ dans G^+ satisfaisant les propriétés suivantes.

1. *$a = \sum_{i=0}^{m} a_i$.*
2. *Pour tout $i \in [\![1..m]\!]$, il existe un entier $n_i \geqslant 0$ tel que $a_i \leqslant n_i p_i$.*
3. *Pour tout $i \in [\![1..m]\!]$, $a_0 \wedge p_i = 0$.*

Pour chaque i, on considère la suite croissante $(a \wedge np_i)_{n\in\mathbb{N}}$ majorée par a. Il existe n_i tel que $a \wedge n_i p_i = a \wedge (n_i+1)p_i$. On prend alors $a_i = a \wedge n_i p_i$. Si $a = a_i + b_i$, on a $b_i \wedge p_i = 0$ car $a_i \leqslant a_i + (b_i \wedge p_i) \leqslant a \wedge (n_i+1)p_i = a_i$. Les a_i sont $\leqslant a$, deux à deux orthogonaux et $\geqslant 0$ donc $a \geqslant \bigvee_i a_i = \sum_i a_i$. Ainsi, on écrit dans G^+ $a = a_1 + \cdots + a_n + a_0$, avec $a_i \leqslant n_i p_i$ pour $i \in [\![1..m]\!]$. Enfin, on a $b_i = a_0 + \sum_{j\neq i} a_j$, donc $a_0 \leqslant b_i$, puis $a_0 \wedge p_i \leqslant b_i \wedge p_i = 0$. Comme $a_i \leqslant n_i p_i$, on a a fortiori $a_0 \wedge a_i = 0$. □

Démonstration du théorème 2.16.
Par récurrence sur le nombre m d'éléments de la famille.
• Supposons $m = 2$, considérons les éléments x_1, x_2. Pour les besoins de la notation, appelons les a, b. Posons $L_1 = [a, b]$, $m_1 = 1$, $E_{1,a} = [1, 0]$, et $E_{1,b} = [0, 1]$. L'algorithme procède par étapes, au début de l'étape k on a un entier naturel m_k et trois listes d'égale longueur : L_k, une liste d'éléments > 0 de G, $E_{k,a}$ et $E_{k,b}$ deux listes d'entiers naturels. A la fin de l'étape l'entier m_k et les trois listes sont remplacés par un nouvel

entier et de nouvelles listes, qui servent pour l'étape suivante (à moins que l'algorithme termine). L'idée générale est la suivante : si x, y sont deux termes consécutifs de L_k non orthogonaux, on remplace dans L_k le segment (x, y) par le segment $(x-(x\wedge y), x\wedge y, y-(x\wedge y))$ (en omettant le premier et/ou le dernier terme s'il est nul). Nous noterons cette procédure comme suit :

$$R : (x, y) \mapsto \text{ le nouveau segment (de longueur 1, 2 ou 3).}$$

Notez que $x + y > \big(x-(x\wedge y)\big) + x\wedge y + \big(y-(x\wedge y)\big)$.

Nous devons définir un invariant de boucle. Précisément les conditions vérifiées par l'entier m_k et les trois listes sont les suivantes :

- a est égal à la combinaison linéaire des éléments de L_k affectés des coefficients de $E_{k,a}$,
- b est égal à la combinaison linéaire des éléments de L_k affectés des coefficients de $E_{k,b}$,
- si $L_k = [x_{k,1}, \dots, x_{k,r_k}]$ les éléments $x_{k,j}$ et $x_{k,\ell}$ sont orthogonaux dès que
  - $j < m_k$ et $\ell \neq j$ ou
  - $j \geqslant m_k$ et $\ell \geqslant j+2$

En bref, les $x_{k,j}$ sont deux à deux orthogonaux, sauf peut-être certaines paires $(x_{k,j}, x_{k,j+1})$ avec $j \geqslant m_k$. Ces conditions constituent *l'invariant de boucle*. Il est clair qu'elles sont (trivialement) vérifiées au départ.

L'algorithme termine à l'étape k si les éléments de L_k sont deux à deux orthogonaux. En outre, si l'algorithme ne termine pas à l'étape k, on a l'inégalité $\sum_{x\in L_k} x > \sum_{z\in L_{k+1}} z$, donc la condition de chaîne décroissante assure la terminaison de l'algorithme.

Il nous reste à expliquer le déroulement d'une étape et à vérifier l'invariant de boucle. Pour ne pas manipuler trop d'indices, nous faisons un léger abus de notation et nous écrivons $L_k = [p_1, \dots, p_n]$, $E_{k,a} = [\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ et $E_{k,b} = [\beta_1, \dots, \beta_n]$.

Le segment (x, y) de L_k qui est traité par la procédure $R(x, y)$ est le suivant : on considère le plus petit indice j (nécessairement $\geqslant m_k$) tel que $p_j \wedge p_{j+1} \neq 0$ et l'on prend $(x, y) = (p_j, p_{j+1})$. Si un tel indice n'existe pas, les éléments de L_k sont deux à deux orthogonaux et l'algorithme est terminé. Dans le cas contraire on applique la procédure $R(x, y)$ et l'on met à jour l'entier (on peut prendre $m_{k+1} = j$) et les trois listes.

Par exemple en posant $q_j = p_j \wedge p_{j+1}$, $p'_j = p_j - q_j$ et $p'_{j+1} = p_{j+1} - q_j$, si $p'_j \neq 0 \neq p'_{j+1}$, on aura :

$$\begin{aligned} L_{k+1} &= \big[p_1, \dots, p_{j-1}, p'_j, q_j, p'_{j+1}, p_{j+2}, \dots, p_n\big] \\ E_{k+1,a} &= [\alpha_1, \dots, \alpha_{j-1}, \alpha_j, \alpha_j + \alpha_{j+1}, \alpha_{j+1}, \alpha_{j+2}, \dots \alpha_n] \\ E_{k+1,b} &= [\beta_1, \dots, \beta_{j-1}, \beta_j, \beta_j + \beta_{j+1}, \beta_{j+1}, \beta_{j+2}, \dots \beta_n] \end{aligned}$$

On vérifie sans peine dans chacun des 4 cas possibles que l'invariant de boucle est conservé.

• Si $m > 2$, par hypothèse de récurrence, on a pour $(x_1, \dots, x_{m-1})$ une base de décomposition partielle $(p_1, \dots, p_n)$. En appliquant le lemme 2.17 à x_m et $(p_1, \dots, p_n)$ on écrit $x_m = \sum_{i=0}^{n} a_i$.
Le cas de deux éléments nous donne pour chaque (a_i, p_i), $i \in [\![1..n]\!]$, une base de décomposition partielle S_i. Finalement une base de décomposition partielle pour $(x_1, \dots, x_m)$ est la concaténation des S_i et de a_0. □

Remarque. Il est facile de se convaincre que la base de décomposition partielle calculée par l'algorithme est minimale : toute autre base de décomposition partielle pour $(x_1, \dots, x_m)$ serait obtenue en décomposant certains des éléments de la base précédente.

3. Monoïdes à pgcd, anneaux à pgcd

Soit G un groupe réticulé. Puisque $a \leqslant b$ si, et seulement si, $b \in a + G^+$, la structure d'ordre est caractérisée par la donnée du sous-monoïde G^+. Vue l'égalité $x = x^+ - x^-$ le groupe G peut être obtenu par symétrisation du monoïde G^+, et il revient au même de parler de groupe réticulé ou de monoïde vérifiant certaines propriétés particulières (voir théorème 3.1).
On aurait donc eu de bonnes raisons de commencer par la théorie des objets du type « partie positive d'un groupe réticulé » plutôt que par celle des groupes réticulés. En effet, dans un groupe réticulé la relation d'ordre doit être donnée d'emblée dans la structure, alors que dans sa partie positive, seule la loi du monoïde intervient, exactement comme dans la théorie multiplicative des entiers naturels strictement positifs.
C'est donc uniquement des raisons de confort dans les démonstrations qui nous ont fait choisir de commencer par les groupes réticulés.

Partie positive d'un groupe réticulé

3.1. Théorème. *Pour qu'un monoïde commutatif $(M, 0, +)$ soit la partie positive d'un groupe réticulé, il faut et suffit que les conditions 1, 2 et 3 ci-dessous soient satisfaites. En outre, on peut remplacer la condition 3 par la condition 4.*

1. *Le monoïde est* régulier, *i.e.,* $x + y = x + z \Rightarrow y = z$.
2. *La relation de préordre $x \in y + M$ est une relation d'ordre, autrement dit, on a :* $x + y = 0 \Rightarrow x = y = 0$.
   On la note $y \leqslant_M x$, ou si le contexte est clair $y \leqslant x$.
3. *Deux éléments arbitraires admettent une borne supérieure, i.e.,*
   $$\forall a, b\ \exists c\ \ {\uparrow}c = ({\uparrow}a) \cap ({\uparrow}b).$$
4. *Deux éléments arbitraires admettent une borne inférieure, i.e.,*
   $$\forall a, b\ \exists c\ \ {\downarrow}c = ({\downarrow}a) \cap ({\downarrow}b)$$

D A priori la condition *3* pour un couple (a, b) particulier est plus forte que la condition *4* pour la raison suivante : si a, $b \in M$, l'ensemble des éléments de M inférieurs à a et b est contenu dans $X = \downarrow(a + b)$. Sur cet ensemble X, l'application $x \mapsto a + b - x$ est une bijection qui renverse l'ordre et échange donc sup et inf quand ils existent. Par contre dans l'autre sens, le inf dans X (qui est le inf absolu) peut a priori être transformé seulement en un sup pour la relation d'ordre restreinte au sous-ensemble X, qui peut ne pas être une borne supérieure dans M tout entier.
Néanmoins, quand la condition *4* est vérifiée pour tous a, $b \in M$, elle implique la condition *3*. En effet, montrons que $m = a + b - (a \wedge b)$ est le sup de (a, b) dans M en considérant un $x \in M$ tel que $x \geqslant a$ et $x \geqslant b$. Nous voulons montrer que $x \geqslant m$, i.e. en posant $y = x \wedge m$, que $y \geqslant m$. Or y est un majorant de a et b, et $y \in X$. Puisque m est le sup de a et b dans X, on a bien $m \leqslant y$.
Le reste de la démonstration est laissé à la lectrice. □

Le théorème précédent conduit à la notion de monoïde à pgcd. Comme cette notion est surtout utilisée pour le monoïde multiplicatif des éléments réguliers d'un anneau commutatif, nous passons en notation multiplicative, et nous acceptons que la relation de divisibilité définie par le monoïde ne soit qu'une relation de préordre, de façon à tenir compte du groupe des unités.

Monoïdes à pgcd

En notation multiplicative, un monoïde commutatif M est régulier lorsque, pour tous a, x, $y \in M$, l'égalité $ax = ay$ implique $x = y$.

3.2. Définition. On considère un monoïde commutatif, noté multiplicativement, $(M, 1, \cdot)$. On dit que a *divise* b lorsque $b \in a \cdot M$, on dit aussi que b *est multiple de* a, et l'on écrit $a \mid b$. Le monoïde M est appelé un *monoïde à pgcd* lorsque les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. M est régulier.
2. Deux éléments arbitraires admettent un pgcd, i.e.,
$$\forall a, b,\ \exists g,\ \forall x, \quad (x \mid a \quad \text{et} \quad x \mid b) \iff x \mid g.$$

On note U le groupe des éléments inversibles (c'est un sous-monoïde), encore appelé *groupe des unités*. Deux éléments a et b de M sont dits *associés* s'il existe un élément inversible u tel que $ua = b$. Il s'agit d'une relation d'équivalence (on dit « la relation d'*association* ») et la structure de monoïde passe au quotient. On note M/U le monoïde quotient. C'est encore un monoïde régulier, et la relation de divisibilité, qui était une relation de préordre sur M devient une relation d'ordre sur M/U.
D'après le théorème 3.1, on obtient le résultat suivant.

3.3. Théorème. *Avec les notations qui précèdent, un monoïde commutatif régulier M est un monoïde à pgcd si, et seulement si, M/U est la partie positive d'un groupe réticulé.*

En notation multiplicative, les décompositions, partielles ou complètes, s'appellent des *factorisations*. On parle alors de *base de factorisation partielle* au lieu de base de décomposition partielle.
De même on utilise la terminologie suivante : un monoïde M *vérifie la condition de chaîne des diviseurs* si M/U est noethérien, c'est-à-dire si dans toute suite d'éléments $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de M telle que a_{k+1} divise a_k pour tout k, il y a deux termes consécutifs associés.
Un monoïde est dit *à factorisation bornée* si M/U est à décomposition bornée, c'est-à-dire si pour chaque a dans M il existe un entier n tel que pour toute factorisation $a = a_1 \cdots a_n$ de a dans M, l'un des a_i est une unité.
Il est clair qu'un tel monoïde vérifie la condition de chaîne des diviseurs.

Anneaux à pgcd

On appelle *anneau à pgcd* un anneau commutatif pour lequel le monoïde multiplicatif des éléments réguliers est un monoïde à pgcd. On définit de la même manière un anneau *à factorisation bornée* ou *qui vérifie la condition de chaîne des diviseurs*.
Un anneau intègre à pgcd pour lequel $\mathrm{Reg}(\mathbf{A})/\mathbf{A}^\times$ est à factorisation partielle s'appelle un *anneau à pgcd à factorisation partielle*. Rappelons qu'en particulier, le groupe réticulé correspondant doit être discret, ce qui signifie ici que $\mathbf{A}^\times$ doit être une partie détachable de $\mathrm{Reg}(\mathbf{A})$.
Un anneau intègre à pgcd pour lequel $\mathrm{Reg}(\mathbf{A})/\mathbf{A}^\times$ est à factorisation complète s'appelle un *anneau factoriel*. Dans ce cas on parle plutôt de *factorisation totale*.

Outre les résultats généraux sur les monoïdes à pgcd (qui sont la traduction en langage multiplicatif des résultats correspondants dans les groupes réticulés), on établit quelques faits spécifiques aux anneaux à pgcd, car l'addition intervient dans les énoncés. Ils pourraient être étendus aux anneaux quasi intègres sans difficulté.

3.4. Fait.

1. *Un anneau intègre à pgcd dont le groupe des unités est détachable et qui vérifie la condition de chaîne des diviseurs est à factorisation partielle (théorème 2.16).*
2. *Un anneau de Bézout est un anneau à pgcd.*
3. *Un anneau principal est un anneau à pgcd intègre qui vérifie la condition de chaîne des diviseurs. Si le groupe des unités est détachable, l'anneau est à factorisation partielle.*

4. *Si* $\mathbf{K}$ *est un corps discret non trivial,* $\mathbf{K}[X]$ *est un anneau de Bézout, à factorisation bornée, et le groupe des unités est détachable. En particulier, l'anneau* $\mathbf{K}[X]$ *est à factorisation partielle.*
5. *Les anneaux* $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[X]$ *et* $\mathbb{Q}[X]$ *sont factoriels (proposition III-8.15).*

D La démonstration est laissée au lecteur. □

3.5. Théorème. *Tout anneau à pgcd intègre est intégralement clos.*

D La preuve du lemme III-8.11 peut être reprise mot à mot. □

Nous laissons à la lectrice la démonstration des faits suivants (pour 3.8 il faut utiliser le théorème de Kronecker).

3.6. Fait. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau intègre à pgcd et* S *un monoïde. Alors* $\mathbf{A}_S$ *est un anneau intègre à pgcd, et pour* $a, b \in \mathbf{A}$ *un pgcd dans* $\mathbf{A}$ *est un pgcd dans* $\mathbf{A}_S$.

Nous dirons qu'un sous-monoïde V d'un monoïde S est *saturé* (dans S) si $xy \in V$ et $x, y \in S$ impliquent $x \in V$. Dans la littérature, on trouve aussi : *V est factoriellement clos dans S*. Un monoïde V d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$ est donc saturé si, et seulement si, il est saturé dans le monoïde multiplicatif $\mathbf{A}$.

3.7. Fait. *Un sous-monoïde saturé V d'un monoïde à pgcd (resp. à factorisation bornée) S est un monoïde à pgcd (resp. à factorisation bornée) avec les mêmes pgcd et ppcm que dans S.*

3.8. Fait.
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau intégralement clos non trivial et* $\mathbf{K}$ *son corps de fractions. Le monoïde multiplicatif des polynômes unitaires de* $\mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ *s'identifie naturellement à un sous-monoïde saturé de* $\mathbf{K}[\underline{X}]^*/\mathbf{K}^\times$.
En particulier, le monoïde multiplicatif des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ *est un monoïde à pgcd à factorisation bornée.*

Anneaux à pgcd de dimension $\leqslant 1$

3.9. Définition. Un anneau quasi intègre $\mathbf{A}$ est dit *de dimension* $\leqslant 1$ si pour tout élément a régulier le quotient $\mathbf{A}/\langle a\rangle$ est zéro-dimensionnel.

Remarque. Sous l'hypothèse que a est régulier, nous obtenons donc que pour tout b, il existe $x, y \in \mathbf{A}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que

$$b^n(1 + bx) + ay = 0. \qquad (*)$$

Si nous ne faisons plus d'hypothèse sur a, nous pouvons considérer l'idempotent e qui engendre $\mathrm{Ann}(a)$, et nous avons alors une égalité du type $(*)$, mais en remplaçant a par $a + e$, qui est régulier. Cette égalité donne, après une multiplication par a qui fait disparaître e :

$$a(b^n(1 + bx) + ay) = 0 \qquad (+).$$

Nous obtenons ainsi une égalité conforme à celle donnée dans le chapitre XIII où apparaît une définition constructive de la phrase « **A** est un anneau de dimension de Krull $\leqslant 1$ », pour un anneau **A** arbitraire (voir le point *3* de la proposition XIII-2.8). ∎

3.10. Lemme. (Une factorisation en dimension 1)

1. *Soit dans un anneau* **A** *deux idéaux* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *avec* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *zéro-dimensionnel et* $\mathfrak{b}$ *de type fini. Alors on peut écrire :*
$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \quad \text{avec} \quad \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} = \langle 1\rangle \ \text{ et } \ \mathfrak{b}^n \subseteq \mathfrak{a}_2$$
pour un entier n *convenable. Cette écriture est unique et l'on a*
$$\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 = \langle 1\rangle\,, \ \ \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^n = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}^m \ \text{ pour tout } m \geqslant n.$$
2. *Le résultat s'applique si* **A** *est quasi intègre de dimension* $\leqslant 1$, $\mathfrak{a}$ *est inversible, et* $\mathfrak{b}$ *de type fini. Dans ce cas* $\mathfrak{a}_1$ *et* $\mathfrak{a}_2$ *sont inversibles. En particulier,* $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}^n$ *est inversible pour* n *assez grand.*

▷ Il suffit de prouver le point *1.*
Existence et unicité de la factorisation. On considère un triplet $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, n)$ susceptible de vérifier les hypothèses. Puisque $\mathfrak{a}_1$ et $\mathfrak{a}_2$ doivent contenir $\mathfrak{a}$, on peut raisonner modulo $\mathfrak{a}$, et donc supposer **A** zéro-dimensionnel avec l'égalité $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = \langle 0\rangle$.
Notons que $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} = \langle 1\rangle$ implique $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}^\ell = \langle 1\rangle$ pour tout exposant $\ell \geqslant 1$. En particulier, $\mathbf{A} = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b}^m$ pour tout $m \geqslant n$. Ceci force, avec e idempotent, $\mathfrak{a}_1 = \langle 1 - e\rangle$ et $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{b}^m = \langle e\rangle$ pour m tel que $\mathfrak{b}^m = \mathfrak{b}^{m+1}$ (voir le lemme II-4.4 et le point *3* du lemme IV-8.2). □

Remarque. Le point *2* est valable sans supposer **A** quasi intègre. Cela deviendra clair après la définition constructive générale de la dimension de Krull, puisque pour tout élément régulier a, si **A** est de dimension $\leqslant 1$, l'anneau $\mathbf{A}/\langle a\rangle$ est zéro-dimensionnel. ∎

3.11. Proposition. *Soit* **A** *un anneau intègre à pgcd ; alors tout idéal localement principal est principal.*

▷ Soit $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ localement principal et $d = \operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)$. Montrons que $\mathfrak{a} = \langle d\rangle$. Il existe un système d'éléments comaximaux $(s_1, \ldots, s_n)$ avec $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle a_i\rangle$ dans $\mathbf{A}_{s_i}$. Il suffit de voir que $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle d\rangle$ dans chaque $\mathbf{A}_{s_i}$ car cette égalité, vraie localement, le sera globalement. Or $\mathbf{A}_{s_i}$ reste un anneau à pgcd, et les pgcds ne changent pas. Donc, dans $\mathbf{A}_{s_i}$, on obtient $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle a_i\rangle = \langle \operatorname{pgcd}(a_1, \ldots, a_n)\rangle = \langle d\rangle$. □

3.12. Théorème. *Un anneau intègre à pgcd de dimension* $\leqslant 1$ *est un anneau de Bézout.*

▷ Puisque $\langle a, b\rangle = g\,\langle a_1, b_1\rangle$ avec $\operatorname{pgcd}(a_1, b_1) = 1$, il suffit de montrer que $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ implique $\langle a, b\rangle = \langle 1\rangle$. Or $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$ implique $\operatorname{pgcd}(a, b^n) = 1$ pour tout $n \geqslant 0$. Enfin d'après le point *2* du lemme 3.10,

pour n assez grand, $\langle a, b^n\rangle$ est inversible donc localement principal, et on conclut avec la proposition 3.11. □

Pgcd dans un anneau de polynômes

Si $\mathbf{A}$ est un anneau à pgcd intègre et $f \in \mathbf{A}[X]$ on note $\mathrm{G}_X(f)$ ou $\mathrm{G}(f)$ un pgcd des coefficients de f (il est défini à une unité près multiplicativement) et on l'appelle le *G-contenu* de f. Un polynôme dont le G-contenu est égal à 1 est dit *G-primitif*.

3.13. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau à pgcd intègre de corps de fractions* $\mathbf{K}$ *et* f *un élément non nul de* $\mathbf{K}[X]$.

- *On peut écrire* $f = af_1$ *avec* $a \in \mathbf{K}$ *et* f_1 *G-primitif dans* $\mathbf{A}[X]$.
- *Cette écriture est unique au sens suivant : pour une autre écriture du même type* $f = a'f_1'$, *il existe* $u \in \mathbf{A}^\times$ *tel que* $a' = ua$ *et* $f_1 = uf_1'$.
- $f \in \mathbf{A}[X]$ *si, et seulement si,* $a \in \mathbf{A}$, *dans ce cas* $a = \mathrm{G}(f)$.

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

3.14. Proposition. (Lemme de Gauss, un autre) *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau à pgcd intègre et* f, $g \in \mathbf{A}[X]$. *Alors* $\mathrm{G}(fg) = \mathrm{G}(f)\mathrm{G}(g)$. *En particulier, le produit de deux polynômes G-primitifs est un polynôme G-primitif.*

▷ Notons f_i et g_j les coefficients de f et g. Il est clair que $\mathrm{G}(f)\mathrm{G}(g)$ divise $\mathrm{G}(fg)$. Par distributivité le pgcd des f_ig_j est égal à $\mathrm{G}(f)\mathrm{G}(g)$, or la proposition III-8.13 implique que $\mathrm{G}(fg)$ divise les f_ig_j donc leur pgcd. □

3.15. Corollaire. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau à pgcd intègre de corps de fractions* $\mathbf{K}$ *et* f, $g \in \mathbf{A}[X]$. *Alors* f *divise* g *dans* $\mathbf{A}[X]$ *si, et seulement si,* f *divise* g *dans* $\mathbf{K}[X]$ *et* $\mathrm{G}(f)$ *divise* $\mathrm{G}(g)$ *dans* $\mathbf{A}$.

▷ Le « seulement si » résulte du lemme de Gauss. Pour le « si » nous pouvons supposer que f est G-primitif. Si $g = hf$ dans $\mathbf{K}[X]$, nous pouvons écrire $h = ah_1$ où $h_1 \in \mathbf{A}[X]$ est G-primitif et $a \in \mathbf{K}$. Par le lemme de Gauss, on a fh_1 G-primitif. En appliquant le lemme 3.13 à l'égalité $g = a(h_1f)$, on obtient $a \in \mathbf{A}$, puis $h \in \mathbf{A}[X]$. □

Rappelons que si $\mathbf{A}$ est un anneau réduit, $\mathbf{A}[X]^\times = \mathbf{A}^\times$ (lemme II-2.6 *4*). En particulier, si $\mathbf{A}$ est intègre non trivial et si le groupe des unités de $\mathbf{A}$ est détachable, il en va de même pour $\mathbf{A}[X]$.

3.16. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau à pgcd intègre, de corps de fractions* $\mathbf{K}$.

1. $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ *est un anneau à pgcd intègre.*
2. *Si* $\mathbf{A}$ *est à factorisation partielle, il en va de même pour* $\mathbf{A}[X]$.
3. *Si* $\mathbf{A}$ *vérifie la condition de chaîne des diviseurs, il en va de même pour* $\mathbf{A}[X]$.
4. *Si* $\mathbf{A}$ *est à factorisation bornée, il en va de même pour* $\mathbf{A}[X]$.

5. *Si* $\mathbf{A}[X]$ *est factoriel, il en va de même pour* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ (Kronecker).

1. Il suffit de traiter le cas $n = 1$. Soient f, $g \in \mathbf{A}[X]$.
Écrivons $f = af_1$, $g = bg_1$, avec f_1 et g_1 G-primitifs. Soit $c = \mathrm{pgcd}_{\mathbf{A}}(a, b)$ et $h = \mathrm{pgcd}_{\mathbf{K}[X]}(f_1, g_1)$. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que h est dans $\mathbf{A}[X]$ et qu'il est G-primitif. Alors, en utilisant le corollaire 3.15, on vérifie que ch est un pgcd de f et g dans $\mathbf{A}[X]$.
Les points *2*, *3* et *4* sont laissés à la lectrice.
5. Il suffit de traiter le cas $n = 2$ et de savoir détecter si un polynôme admet un facteur strict. On utilise l'astuce de Kronecker. Pour tester le polynôme $f(X, Y) \in \mathbf{A}[X, Y]$, supposé de degré $< d$ en X, on considère le polynôme $g(X) = f(X, X^d)$. Une décomposition complète de $g(X)$ permet de savoir s'il existe un facteur strict de g de la forme $h(X, X^d)$ (en regardant tous les facteurs stricts de g, à association près), ce qui correspond à un facteur strict de f. Pour quelques précisions voir l'exercice 6. □

3.17. Corollaire. *Si* $\mathbf{K}$ *est un corps discret non trivial,* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *est un anneau intègre à pgcd, à factorisation bornée et à factorisation partielle. Le groupe des unités est* $\mathbf{K}^\times$. *Enfin* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ *($n \geqslant 2$) est factoriel si, et seulement si,* $\mathbf{K}[X]$ *est factoriel.*

4. Treillis de Zariski d'un anneau commutatif

Généralités

Nous rappelons la notation $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ avec quelques précisions.

4.1. Notation. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{A}$ on note $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ le nilradical de $\mathfrak{a}$. Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ on note $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ pour $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$. On note $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ l'ensemble des $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ (pour $n \in \mathbb{N}$ et x_1, …, $x_n \in \mathbf{A}$).

On a donc $x \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ si, et seulement si, une puissance de x appartient à $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.
L'ensemble $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ est ordonné par la relation d'inclusion.

4.2. Fait. $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *est un treillis distributif avec*

$$\begin{array}{ll} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) = 0_{\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}}, & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2), \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1) = 1_{\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}}, & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2). \end{array}$$

On l'appelle le treillis de Zariski de l'anneau $\mathbf{A}$.

En mathématiques classiques $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ peut être vu comme un ouvert quasi-compact de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$: l'ensemble des idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$ tels que l'un au moins des x_i n'appartienne pas à $\mathfrak{p}$. Et $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ s'identifie au treillis des ouverts quasi-compacts de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$. Pour plus de détails sur ce sujet voir la section XIII-1.

4.3. Fait.

1. *Pour tout morphisme* $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$*, on a un morphisme naturel* $\mathsf{Zar}\,\varphi$ *de* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *vers* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$*, et l'on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des anneaux commutatifs vers celle des treillis distributifs.*
2. *Pour tout anneau* $\mathbf{A}$ *l'homomorphisme naturel* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ *est un isomorphisme, de sorte que l'on peut identifier les deux treillis.*
3. *L'homomorphisme naturel* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2) \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}_1 \times \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}_2$ *est un isomorphisme.*
4. *Pour une algèbre de Boole* $\mathbf{B}$*, l'application* $x \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(x)$ *est un isomorphisme de* $\mathbf{B}$ *sur* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$*.*

4.4. Fait. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *est une algèbre de Boole.*
2. $\mathbf{A}$ *est zéro-dimensionnel.*

▷ Rappelons qu'un treillis distributif «est» une algèbre de Boole si, et seulement si, tout élément admet un complément (proposition 1.4).
Supposons *2.* Alors pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$, il existe un idempotent e et un entier n tels que $\mathfrak{a}^n = \langle e\rangle$. Donc $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(e)$. Par ailleurs, il est clair que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(e)$ et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1-e)$ sont complémentaires dans $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$.
Supposons *1.* Soit $x \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ tel que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ soit le complément de $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x)$ dans $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$. Alors il existe $b \in \mathbf{A}$ et $a \in \mathfrak{a}$ tels que $bx + a = 1$. Comme $xa = x(1-bx)$ est nilpotent on obtient une égalité $x^n(1+cx) = 0$. □

4.5. Fait. *Soient* $a \in \mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{a} \in \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$*.*

1. *L'homomorphisme* $\mathsf{Zar}\,\pi : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}(\mathbf{A}/\langle a\rangle)$*, où* $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\langle a\rangle$ *est la projection canonique, est surjectif, et il permet d'identifier* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}/\langle a\rangle)$ *au treillis quotient* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) = 0)$*. Plus généralement,* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ *s'identifie à* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathfrak{a} = 0)$*.*
2. *L'homomorphisme* $\mathsf{Zar}\,j : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}(\mathbf{A}[1/a])$*, où* $j : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/a]$ *est l'homomorphisme canonique, est surjectif et il permet d'identifier* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}[1/a])$ *au treillis quotient* $\mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) = 1)$*.*
3. *Pour un idéal* $\mathfrak{c}$ *et un monoïde* S *de* $\mathbf{A}$ *on a un isomorphisme naturel*
$$\mathsf{Zar}(\mathbf{A}_S/\mathfrak{c}\mathbf{A}_S) \;\simeq\; \mathsf{Zar}(\mathbf{A})/(\mathfrak{b} = 0, \mathfrak{f} = 1)\,,$$
où $\mathfrak{b}$ *est l'idéal de* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *engendré par les* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c)$ *pour* $c \in \mathfrak{c}$*, et* $\mathfrak{f}$ *est le filtre de* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *engendré par les* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(s)$ *pour* $s \in S$*.*

Dualité dans les anneaux commutatifs

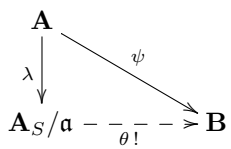
Annuler et inverser simultanément

Dans les treillis distributifs on échange les rôles de $\wedge$ et $\vee$ en passant au treillis opposé, c'est-à-dire en renversant la relation d'ordre.
Dans les anneaux commutatifs, une dualité féconde existe aussi entre l'addition et la multiplication, plus mystérieuse, lorsque l'on essaie d'échanger leurs rôles.
Rappelons qu'un monoïde saturé est appelé un *filtre*. La notion de filtre est une notion duale de celle d'idéal, tout aussi importante.
Les idéaux sont les images réciproques de 0 par les homomorphismes, ils servent à passer au quotient, c'est-à-dire à annuler des éléments par force.
Les filtres sont les images réciproques du groupe des unités par les homomorphismes, ils servent à localiser, c'est-à-dire à rendre des éléments inversibles par force.
Étant donnés un idéal $\mathfrak{a}$ et un monoïde S de l'anneau $\mathbf{A}$ on peut vouloir annuler les éléments de $\mathfrak{a}$ et inverser les éléments de S. La solution de ce problème est donnée par la considération de l'anneau suivant.

4.6. Définition et notation. On note (par abus) $\mathbf{A}_S/\mathfrak{a}$ ou $S^{-1}\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ l'anneau dont les éléments sont donnés par les couples $(a,s) \in \mathbf{A} \times S$, avec l'égalité $(a,s) = (a',s')$ dans $\mathbf{A}_S/\mathfrak{a}$ si, et seulement si, il existe $s'' \in S$ tels que $s''(as' - a's) \in \mathfrak{a}$ (on notera a/s pour le couple (a,s)).

Le fait que $\mathbf{A}_S/\mathfrak{a}$ ainsi défini répond au problème posé signifie que le théorème de factorisation suivant est vrai (voir les faits analogues II-1.1 et II-1.2).

4.7. Fait. (Théorème de factorisation)
Avec les notations ci-dessus, soit $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorphisme. Alors ψ se factorise par $\mathbf{A}_S/\mathfrak{a}$ si, et seulement si, $\psi(\mathfrak{a}) \subseteq \{0\}$ et $\psi(S) \subseteq \mathbf{B}^\times$. Dans ce cas, la factorisation est unique.



$\psi(\mathfrak{a}) \subseteq \{0\}$ et $\psi(S) \subseteq \mathbf{B}^\times$

Naturellement on peut aussi résoudre le problème en annulant d'abord $\mathfrak{a}$ puis en inversant (l'image de) S, ou bien en inversant d'abord S puis en annulant (l'image de) $\mathfrak{a}$. On obtient ainsi des isomorphismes canoniques

$$\mathbf{A}_S/\mathfrak{a} \;\simeq\; \big(\pi_{\mathbf{A},\mathfrak{a}}(S)\big)^{-1}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \;\simeq\; (\mathbf{A}_S)/(j_{\mathbf{A},S}(\mathfrak{a})\mathbf{A}_S)\;.$$

Des définitions duales

La dualité entre idéaux et filtres est une forme de dualité entre l'addition et la multiplication.

Ceci se voit bien sur les axiomes respectifs qui servent à définir les idéaux (resp. idéaux premiers) et les filtres (resp. filtres premiers) :

Idéal $\mathfrak{a}$		Filtre $\mathfrak{f}$	
	$\vdash 0 \in \mathfrak{a}$		$\vdash 1 \in \mathfrak{f}$
$x \in \mathfrak{a},\ y \in \mathfrak{a}$	$\vdash x+y \in \mathfrak{a}$	$x \in \mathfrak{f},\ y \in \mathfrak{f}$	$\vdash xy \in \mathfrak{f}$
$x \in \mathfrak{a}$	$\vdash xy \in \mathfrak{a}$	$xy \in \mathfrak{f}$	$\vdash x \in \mathfrak{f}$
premier		premier	
$xy \in \mathfrak{a}$	$\vdash x \in \mathfrak{a}$ ou $y \in \mathfrak{a}$	$x+y \in \mathfrak{f}$	$\vdash x \in \mathfrak{f}$ ou $y \in \mathfrak{f}$

Notez que selon la définition ci-dessus, **A** est à la fois un idéal premier et un filtre premier de **A**. Cette convention peut paraître étrange, mais il s'avère que c'est celle qui est la plus pratique : un idéal est premier si, et seulement si, l'anneau quotient est sans diviseur de zéro, un filtre est premier si, et seulement si, le localisé est un anneau local. Pour ce qui concerne les idéaux nous nous sommes déjà expliqués à ce sujet dans le commentaire page 497.

Nous adopterons la définition suivante pour un *filtre maximal* : le localisé est un anneau local zéro-dimensionnel (lorsque l'anneau est réduit : un corps discret). En particulier, tout filtre maximal est premier. Nous ferons usage de cette définition essentiellement à titre heuristique.

Supposons maintenant l'anneau **A** non trivial. Alors un idéal strict détachable (resp. un filtre strict détachable) est premier si, et seulement si, son complémentaire est un filtre (resp. un idéal). Nous retrouvons dans ce cas le terrain familier en mathématiques classiques.

De manière générale en mathématiques classiques le complémentaire d'un idéal premier strict est un filtre premier strict et vice versa, donc le complémentaire idéal maximal strict est un filtre premier minimal, et le complémentaire d'un filtre maximal strict est un idéal premier minimal. Les filtres premiers paraissent donc plus ou moins inutiles et ont tendance à disparaître de la scène.

Couples saturés

Une bonne façon de comprendre la dualité est de traiter simultanément idéaux et filtres. Pour ceci nous introduisons la notion de *couple saturé*, analogue à celle que nous avons donnée pour les treillis distributifs.

4.8. Définition. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal et $\mathfrak{f}$ un filtre. On dit que $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{f}$-*saturé* si l'on a :

$$(as \in \mathfrak{a},\ s \in \mathfrak{f}) \Longrightarrow a \in \mathfrak{a},$$

on dit que $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{a}$-*saturé* si l'on a :

$$(a + s \in \mathfrak{f},\ a \in \mathfrak{a}) \Longrightarrow s \in \mathfrak{f},$$

si $\mathfrak{a}$ est $\mathfrak{f}$-saturé et $\mathfrak{f}$ est $\mathfrak{a}$-saturé on dit que $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ est un *couple saturé* dans $\mathbf{A}$.

Récapitulons les axiomes pour les couples saturés (notez que la dernière condition se réécrit $\mathfrak{a} + \mathfrak{f} = \mathfrak{f}$).

$$\begin{array}{rl\qquad rl} & \vdash\ 0 \in \mathfrak{a} & & \vdash\ 1 \in \mathfrak{f} \\ x \in \mathfrak{a},\ y \in \mathfrak{a} & \vdash\ x + y \in \mathfrak{a} & x \in \mathfrak{f},\ y \in \mathfrak{f} & \vdash\ xy \in \mathfrak{f} \\ x \in \mathfrak{a} & \vdash\ xy \in \mathfrak{a} & xy \in \mathfrak{f} & \vdash\ x \in \mathfrak{f} \\ xy \in \mathfrak{a},\ y \in \mathfrak{f} & \vdash\ x \in \mathfrak{a} & x + y \in \mathfrak{f},\ y \in \mathfrak{a} & \vdash\ x \in \mathfrak{f} \end{array}$$

4.9. Fait.

1. *Pour tout homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, le couple $\big(\operatorname{Ker}\varphi, \varphi^{-1}(\mathbf{B}^\times)\big)$ est un couple saturé.*
2. *Réciproquement si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ est un couple saturé et si $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_\mathfrak{f}/\mathfrak{a} = \mathbf{C}$ désigne l'homomorphisme canonique, on a $\operatorname{Ker}\psi = \mathfrak{a}$ et $\psi^{-1}(\mathbf{C}^\times) = \mathfrak{f}$.*
3. *Soit $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un homomorphisme et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ un couple saturé de $\mathbf{C}$, alors $\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}), \varphi^{-1}(\mathfrak{g})\big)$ est un couple saturé de $\mathbf{A}$.*

4.10. Fait. *Soit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ un couple saturé.*

1. *$\mathbf{A}_\mathfrak{f}/\mathfrak{a}$ est local si, et seulement si, $\mathfrak{f}$ est un filtre premier (c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathbf{A}_\mathfrak{f}$ est local).*
2. *$\mathbf{A}_\mathfrak{f}/\mathfrak{a}$ est sans diviseur de zéro si, et seulement si, $\mathfrak{a}$ est un idéal premier (c'est-à-dire si, et seulement si, $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est sans diviseur de zéro).*

4.11. Définition. Si $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ et $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ sont deux couples saturés de $\mathbf{A}$ on dit que $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ *raffine* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ et l'on écrit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f}) \leqslant (\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ lorsque $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{f} \subseteq \mathfrak{g}$.

Le lemme suivant décrit le couple saturé «engendré» (au sens de la relation de raffinement) par un couple de parties de $\mathbf{A}$. En fait il suffit de traiter le cas d'un couple formé par un idéal et un monoïde.

4.12. Lemme. *Soit un idéal $\mathfrak{a}$ et un monoïde $\mathfrak{f}$ de $\mathbf{A}$.*

1. *Le couple saturé $(\mathfrak{b}, \mathfrak{g})$ engendré par $(\mathfrak{a}, \mathfrak{f})$ est obtenu comme suit :*

   $$\mathfrak{b} = \{\, x \in \mathbf{A} \mid \exists s \in \mathfrak{f},\ xs \in \mathfrak{a} \,\},\ \text{ et }\ \mathfrak{g} = \{\, y \in \mathbf{A} \mid \exists u \in \mathbf{A},\ uy \in \mathfrak{a} + \mathfrak{f} \,\}.$$

2. *Si $\mathfrak{f} \subseteq \mathbf{A}^\times$, alors $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{g}$ est le filtre obtenu en saturant le monoïde $1 + \mathfrak{a}$. Dans ce cas, $\mathbf{A}_\mathfrak{g}/\mathfrak{a} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$.*
3. *Si $\mathfrak{a} = 0$, alors $\mathfrak{b} = \{\, x \in \mathbf{A} \mid \exists s \in \mathfrak{f},\ xs = 0 \,\} = \sum_{s\in\mathfrak{f}}(0 : s)$, et $\mathfrak{g}$ est le saturé de $\mathfrak{f}$. Dans ce cas, $\mathbf{A}_\mathfrak{g}/\mathfrak{b} = \mathbf{A}_\mathfrak{f}$. Si en outre $\mathfrak{f} = s^{\mathbb{N}}$, $\mathfrak{b} = (0 : s^\infty)$.*

Un cas important est celui du filtre obtenu par saturation d'un monoïde S. Nous introduisons la notation S^{sat}, ou, si nécessaire, $S^{\mathrm{sat}_{\mathbf{A}}}$ pour ce filtre.

Idéal et filtre incompatibles

Pour un couple saturé $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ on a les équivalences suivantes.

$$\mathfrak{a}=\mathbf{A} \iff 1\in\mathfrak{a} \iff 0\in\mathfrak{f} \iff \mathfrak{f}=\mathbf{A} \iff \mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}=\{0\}\,. \tag{23}$$

Un idéal $\mathfrak{a}$ et un filtre $\mathfrak{f}$ sont dit *incompatibles* lorsqu'ils engendrent la paire $(\mathbf{A},\mathbf{A})$, c'est-à-dire lorsque $0\in\mathfrak{a}+\mathfrak{f}$.
Un idéal $\mathfrak{a}$ et un filtre $\mathfrak{f}$ sont dit *compatibles* si l'on a $(0\in\mathfrak{a}+\mathfrak{f}\Rightarrow 1=0)$. Si l'anneau est non trivial cela signifie aussi $\mathfrak{a}\cap\mathfrak{f}=\emptyset$. Dans ce cas on peut à la fois annuler les éléments de $\mathfrak{a}$ et rendre inversibles les éléments de $\mathfrak{f}$ sans que l'anneau ne soit réduit à 0.

4.13. Fait. *Soit $\mathfrak{a}$ un idéal et $\mathfrak{f}$ un filtre compatibles.*
Si $\mathfrak{a}$ est premier, il est $\mathfrak{f}$-saturé, si $\mathfrak{f}$ est premier, il est $\mathfrak{a}$-saturé.

Le treillis des couples saturés

4.14. Fait. *Les couples saturés de $\mathbf{A}$ ont une structure de treillis pour la relation de raffinement, avec :*

- *L'élément minimum est $(\{0\},\mathbf{A}^\times)$ et l'élément maximum $(\mathbf{A},\mathbf{A})$.*
- *$(\mathfrak{a},\mathfrak{f})\vee(\mathfrak{b},\mathfrak{g})$ est le couple saturé engendré par $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b},\mathfrak{f}\,\mathfrak{g})$.*
- *$(\mathfrak{a},\mathfrak{f})\wedge(\mathfrak{b},\mathfrak{g})=(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b},\mathfrak{f}\cap\mathfrak{g})$.*

Idéaux et filtres dans un quotient localisé

4.15. Fait. *Soit $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$ un couple saturé de $\mathbf{A}$ et $\pi:\mathbf{A}\to\mathbf{B}=\mathbf{A}_{\mathfrak{f}}/\mathfrak{a}$ l'application canonique. Alors :*

1. *L'application $(\mathfrak{b},\mathfrak{g})\mapsto\big(\pi^{-1}(\mathfrak{b}),\pi^{-1}(\mathfrak{g})\big)$ est une bijection croissante (pour les relations de raffinement) entre d'une part, les couples saturés de $\mathbf{B}$, et d'autre part, les couples saturés de $\mathbf{A}$ qui raffinent $(\mathfrak{a},\mathfrak{f})$.*
2. *Si $(\mathfrak{b},\mathfrak{g})$ est un couple saturé de $\mathbf{B}$ l'application canonique*
$$\mathbf{A}_{\pi^{-1}(\mathfrak{g})}/\pi^{-1}(\mathfrak{b}) \longrightarrow \mathbf{B}_{\mathfrak{g}}/\mathfrak{b}$$
est un isomorphisme.
3. *Dans cette bijection*
   - *l'idéal $\mathfrak{b}$ est premier si, et seulement si, $\pi^{-1}(\mathfrak{b})$ est premier,*
   - *tout idéal premier de $\mathbf{A}$ compatible avec $\mathfrak{f}$ et contenant $\mathfrak{a}$ est obtenu,*
   - *le filtre $\mathfrak{g}$ est premier si, et seulement si, $\pi^{-1}(\mathfrak{g})$ est premier,*
   - *tout filtre premier de $\mathbf{A}$ compatible avec $\mathfrak{a}$ et contenant $\mathfrak{f}$ est obtenu.*

On en déduit la comparaison suivante qui est instructive sur la dualité entre idéaux et filtres.

4.16. Fait. *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal strict de* $\mathbf{A}$ *et* $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *l'homomorphisme correspondant.*

1. *L'application* $\mathfrak{b} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{b})$ *est une bijection croissante entre idéaux de* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *et idéaux de* $\mathbf{A}$ *contenant* $\mathfrak{a}$*. Dans cette bijection les idéaux premiers correspondent aux idéaux premiers.*
2. *L'application* $\mathfrak{g} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{g})$ *est une bijection croissante entre filtres de* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *et filtres* $\mathfrak{a}$*-saturés de* $\mathbf{A}$*.*
3. *Dans cette bijection les filtres premiers stricts de* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *correspondent exactement aux filtres premiers de* $\mathbf{A}$ *compatibles avec* $\mathfrak{a}$*.*

4.17. Fait. *Soit* $\mathfrak{f}$ *un filtre strict de* $\mathbf{A}$ *et* $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_\mathfrak{f}$ *l'homomorphisme correspondant.*

1. *L'application* $\mathfrak{g} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{g})$ *est une bijection croissante entre filtres de* $\mathbf{A}_\mathfrak{f}$ *et filtres de* $\mathbf{A}$ *contenant* $\mathfrak{f}$*. Dans cette bijection les filtres premiers correspondent aux filtres premiers.*
2. *L'application* $\mathfrak{b} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{b})$ *est une bijection croissante entre idéaux de* $\mathbf{A}_\mathfrak{f}$ *et idéaux* $\mathfrak{f}$*-saturés de* $\mathbf{A}$*.*
3. *Dans cette bijection les idéaux premiers stricts de* $\mathbf{A}_\mathfrak{f}$ *correspondent exactement aux idéaux premiers de* $\mathbf{A}$ *compatibles avec* $\mathfrak{f}$*.*

Principes de recouvrement fermé

La dualité entre idéaux et filtres suggère qu'un principe dual du principe local-global doit pouvoir fonctionner en algèbre commutative.
Tout d'abord notons que les idéaux de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ correspondent bijectivement aux idéaux radicaux (i.e, égaux à leur nilradical) de $\mathbf{A}$ via :

$$\mathfrak{a} \text{ (idéal de } \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}) \mapsto \{\, x \in \mathbf{A} \mid \mathrm{D}_\mathbf{A}(x) \in \mathfrak{a} \,\}.$$

En outre, les idéaux premiers correspondent aux idéaux premiers.
Pour les filtres, cela ne se passe pas aussi parfaitement, mais pour un filtre $\mathfrak{f}$ de $\mathbf{A}$, l'ensemble $\{\, \mathrm{D}_\mathbf{A}(x) \mid x \in \mathfrak{f} \,\}$ engendre un filtre de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$, et ceci donne une application injective qui est bijective pour les filtres premiers.
Revenons au principe local-global et regardons ce que cela signifie dans le treillis $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$. Lorsque l'on a des monoïdes comaximaux $S_1, \ldots, S_n$ de $\mathbf{A}$, cela correspond à des filtres $\mathfrak{f}_i$ de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ (chacun engendré par les $\mathrm{D}_\mathbf{A}(s)$ pour les $s \in S_i$) qui sont «comaximaux» en ce sens que $\bigcap_i \mathfrak{f}_i = \{1_{\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}}\}$.
Dans ce cas les homomorphismes naturels

$$\mathbf{A} \to \textstyle\prod_i \mathbf{A}_{S_i} \quad \text{et} \quad \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \prod_i \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}/(\mathfrak{f}_i = 1)$$

sont injectifs.

Par dualité, on dira qu'un système d'idéaux $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n)$ constitue un *recouvrement fermé* de $\mathbf{A}$ lorsque $\bigcap_i \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i) = \{0_{\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}}\}$, c'est-à-dire encore lorsque $\prod_i \mathfrak{a}_i \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$. Dans ce cas les homomorphismes naturels

$$\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \to \prod_i \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i) \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \prod_i \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}/(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i) = 0)$$

sont injectifs.
Nous dirons qu'une propriété P (concernant des objets reliés à un anneau $\mathbf{A}$) vérifie le « principe de recouvrement fermé » lorsque :
chaque fois que des idéaux $\mathfrak{a}_i$ forment un recouvrement fermé de $\mathbf{A}$, la propriété P est vraie pour $\mathbf{A}$ si, et seulement si, elle est vraie après passage au quotient par chacun des $\mathfrak{a}_i$.
Par exemple on obtient facilement (voir aussi le lemme II-2.7).

4.18. Principe de recouvrement fermé. (Éléments nilpotents, comaximaux) *On considère un recouvrement fermé $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r)$ de l'anneau $\mathbf{A}$. Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ deux idéaux et S un monoïde.*

1. *Le monoïde S contient 0 si, et seulement si, il contient 0 modulo chaque $\mathfrak{a}_i$.*
2. *On a $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{c}}$ si, et seulement si, $\mathfrak{b} \subseteq \sqrt{\mathfrak{c}}$ modulo chaque $\mathfrak{a}_i$.*
3. *Les éléments $x_1, \dots, x_n$ sont comaximaux si, et seulement si, ils sont comaximaux modulo chaque $\mathfrak{a}_i$.*

▷ Il suffit de montrer le point *2.* On suppose que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{c}) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i)$, donc $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) \leqslant \bigwedge_i (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{c}) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i)) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{c}) \vee (\bigwedge_i \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i)) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{c})$. □

Remarque. Par contre, il n'y a pas de principe de recouvrement fermé pour les solutions de systèmes linéaires. Considérons en effet $u, v \in \mathbf{A}$ tels que $uv = 0$. Le système linéaire (avec x pour inconnue)

$$ux = u,\ vx = -v,$$

admet une solution modulo u (à savoir $x = -1$) et une solution modulo v (à savoir $x = 1$). Mais dans le cas de l'anneau $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[u, v] = \mathbb{Z}[U, V]/\langle UV \rangle$ le système linéaire n'a pas de solution dans $\mathbf{A}$. ■

4.19. Principe de recouvrement fermé. (Modules de type fini)
On considère un recouvrement fermé $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r)$ de l'anneau $\mathbf{A}$. On suppose que $\prod_i \mathfrak{a}_i = 0$ (c'est le cas si $\mathbf{A}$ est réduit). Un $\mathbf{A}$-module M est de type fini si, et seulement si, il est de type fini modulo chaque $\mathfrak{a}_i$.

▷ On suppose sans perte de généralité $r = 2$. Soient $g_1, \dots, g_k$ des générateurs modulo $\mathfrak{a}_1$, et $g_{k+1}, \dots, g_\ell$ des générateurs modulo $\mathfrak{a}_2$. Soit $x \in M$. On écrit $x = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_j x_j$ avec $\alpha_i \in \mathbf{A}$, $\beta_j \in \mathfrak{a}_1$, $x_j \in M$.
Chaque x_j s'écrit comme une combinaison linéaire de $g_{k+1}, \dots, g_\ell$ modulo $\mathfrak{a}_2$. Puisque $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 = 0$, on obtient x comme combinaison linéaire de $g_1, \dots, g_\ell$. □

4.20. Principe de recouvrement fermé. (Modules projectifs de type fini) *On considère un recouvrement fermé* $(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_r)$ *de l'anneau* $\mathbf{A}$*, une matrice* $F \in \mathbf{A}^{m\times n}$*,* $\mathfrak{a}$ *un idéal de type fini et* M *un module de présentation finie.*

1. *La matrice* F *est de rang* $\geqslant k$ *si, et seulement si, elle est de rang* $\geqslant k$ *modulo chaque* $\mathfrak{a}_i$*.*

Supposons $\bigcap_i \mathfrak{a}_i = 0$ *(c'est le cas si* $\mathbf{A}$ *est réduit). Alors :*

2. *La matrice* F *est de rang* $\leqslant k$ *si, et seulement si, elle est de rang* $\leqslant k$ *modulo chaque* $\mathfrak{a}_i$*.*
3. *L'idéal de type fini* $\mathfrak{a}$ *est engendré par un idempotent si, et seulement si, il est engendré par un idempotent modulo chaque* $\mathfrak{a}_i$*.*
4. *La matrice* F *est localement simple si, et seulement si, elle est localement simple modulo chaque* $\mathfrak{a}_i$*.*
5. *Le module* M *est projectif de type fini si, et seulement si, il est projectif de type fini modulo chaque* $\mathfrak{a}_i$*.*

▷ Le point *1* résulte du principe de recouvrement fermé 4.18 en considérant l'idéal déterminantiel d'ordre k. Le point *2* vient de ce que si un idéal déterminantiel est nul modulo chaque $\mathfrak{a}_i$, il est nul modulo leur intersection. Le point *5* est une reformulation du point *4* qui est une conséquence du point *3*.
Montrons le point *3*. On suppose sans perte de généralité $r = 2$. On utilise le lemme de l'idéal engendré par un idempotent (lemme II-4.5). On a

$$\mathfrak{a} + (0 : \mathfrak{a})_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}_i \quad (i = 1, 2).$$

Cela signifie $\mathfrak{a}+\mathfrak{a}_i+(\mathfrak{a}_i : \mathfrak{a}) = \mathbf{A}$, et puisque $\mathfrak{a}_i \subseteq (\mathfrak{a}_i : \mathfrak{a})$, on a $1 \in \mathfrak{a}+(\mathfrak{a}_i : \mathfrak{a})$. En faisant le produit cela donne $1 \in \mathfrak{a} + (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a})(\mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a})$ et puisque

$$(\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a})(\mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}) \subseteq (\mathfrak{a}_1 : \mathfrak{a}) \cap (\mathfrak{a}_2 : \mathfrak{a}) = ((\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2) : \mathfrak{a}) = (0 : \mathfrak{a}),$$

on obtient $1 \in \mathfrak{a} + (0 : \mathfrak{a})$. □

Clôture zéro-dimensionnelle réduite d'un anneau commutatif

Commençons par des résultats concernant un sous-anneau $\mathbf{A}$ d'un anneau zéro-dimensionnel réduit. Le lecteur peut se reporter à l'étude des anneaux zéro-dimensionnels réduits page 224 et revisiter les égalités (6) pour la caractérisation d'un quasi inverse.
Si dans un anneau un élément c admet un quasi inverse, nous notons celui-ci $c^\bullet$, et nous notons $e_c = c^\bullet c$ l'idempotent associé à c qui satisfait les égalités $\mathrm{Ann}(c) = \mathrm{Ann}(e_c) = \langle 1 - e_c\rangle$.

4.21. Lemme. (Anneau engendré par un quasi inverse)

1. *Soit $a \in \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. On suppose que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont réduits et que a admet un quasi inverse dans $\mathbf{B}$. Alors*
$$\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}[a^\bullet] \simeq \mathbf{A}[a^\bullet]/\langle 1-e_a\rangle \times \mathbf{A}[a^\bullet]/\langle e_a\rangle = \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2.$$
En outre :
   a. *On a un homomorphisme naturel bien défini $\mathbf{A}[1/a] \to \mathbf{A}_1$, et c'est un isomorphisme. En particulier, l'homomorphisme naturel $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_1$ a pour noyau $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a)$.*
   b. *L'homomorphisme naturel $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_2$ est surjectif, son noyau est l'intersection $\mathfrak{a} = \mathbf{A} \cap e_a\mathbf{A}[a^\bullet]$ et vérifie la double inclusion*
$$\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a)\big) \supseteq \mathfrak{a} \supseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) \qquad (*).$$
En bref $\mathbf{A}[a^\bullet] \simeq \mathbf{A}[1/a] \times \mathbf{A}/\mathfrak{a}$.
2. *Inversement pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ vérifiant $(*)$, l'élément $(1/a, 0)$ est un quasi inverse de (l'image de) a dans l'anneau $\mathbf{C} = \mathbf{A}[1/a] \times \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ et l'homomorphisme canonique de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{C}$ est injectif.*

D L'isomorphisme $\mathbf{A}[a^\bullet] \simeq \mathbf{A}_1 \times \mathbf{A}_2$ signifie seulement que e_a est un idempotent dans $\mathbf{A}[a^\bullet]$. Nous notons $\pi_i : \mathbf{A}[a^\bullet] \to \mathbf{A}_i$ les homomorphismes canoniques.
1b. Soit μ l'homomorphisme composé $\mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}[a^\bullet] \longrightarrow \mathbf{A}_2$. Dans $\mathbf{A}_2$, on a $a^\bullet = e_a a^\bullet = 0$, donc $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}/(\mathbf{A} \cap e_a\mathbf{A}[a^\bullet])$. Ainsi $\mathfrak{a} = \mathbf{A} \cap e_a\mathbf{A}[a^\bullet]$.
Dans $\mathbf{A}[a^\bullet]$, on a $a = e_a a$, donc $\mu(a) = \pi_2(a) = \pi_2(e_a a) = 0$, et $a \in \mathfrak{a}$.
Comme $\mathbf{B}$ est réduit, les trois anneaux $\mathbf{A}[a^\bullet]$, $\mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2$ le sont aussi. Donc $\langle a\rangle \subseteq \mathfrak{a}$ implique $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) \subseteq \mathfrak{a}$.
Enfin, $\mathfrak{a}\,\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a) \subseteq \langle e_a\rangle\,\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a) = 0$, donc $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a)\big)$.
1a. Puisque $aa^\bullet =_{\mathbf{A}_1} 1$, on a un unique homomorphisme $\lambda : \mathbf{A}[1/a] \to \mathbf{A}_1$ obtenu à partir de l'homomorphisme composé $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[a^\bullet] \to \mathbf{A}_1$, et λ est clairement surjectif. Considérons un élément x/a^n de $\mathrm{Ker}\,\lambda$. Alors $\lambda(ax) = 0$, donc $\pi_1(ax) = 0$. Comme on a aussi $\pi_2(ax) = 0$, on en déduit $ax = 0$, donc $x =_{\mathbf{A}[1/a]} 0$. Ainsi λ est injectif.
2. L'image de a dans $\mathbf{C}$ est $(a/1, 0)$, donc $(1/a, 0)$ est bien son quasi inverse. Soit maintenant $x \in \mathbf{A}$ dont l'image dans $\mathbf{C}$ est 0. D'une part $x =_{\mathbf{A}[1/a]} 0$, donc $ax =_{\mathbf{A}} 0$. D'autre part $x\,\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a) = 0$ donc $x^2 =_{\mathbf{A}} 0$, et $x =_{\mathbf{A}} 0$. □

Commentaire. On voit que la notation $\mathbf{A}[a^\bullet]$ présente a priori une possible ambiguïté, au moins lorsque $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) \neq \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a)\big)$. ■

4.22. Lemme. *Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}$ zéro-dimensionnel réduit, le plus petit sous-anneau zéro-dimensionnel de $\mathbf{C}$ contenant $\mathbf{A}$ est égal à $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$. Plus généralement si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B}$ réduit, et si tout élément de $\mathbf{A}$ admet un quasi inverse dans $\mathbf{B}$, alors le sous-anneau $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$ de $\mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel. En outre, tout élément de $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$ s'écrit sous forme*
$$\textstyle\sum_j a_j b_j^\bullet e_j, \quad \textit{avec}$$

— *les* e_j *sont des idempotents de* $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$ *deux à deux orthogonaux,*
— $a_j, b_j \in \mathbf{A}$ *et* $b_j b_j^\bullet e_j = e_j$ *pour tout* j,

de sorte que $\big(\sum_j a_j b_j^\bullet e_j\big)^\bullet = \sum_j a_j^\bullet b_j e_j$.

NB. On prendra garde cependant que l'on n'a pas toujours $a_j a_j^\bullet e_j = e_j$. Il faut donc a priori remplacer e_j par $e'_j = a_j a_j^\bullet e_j$ pour obtenir une écriture du même type que la précédente. On pourra aussi noter que tout idempotent de $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$ s'écrit sous forme $e_c \prod_i (1 - e_{d_i})$ pour un c et des $d_i \in \mathbf{A}$.

D Parmi les éléments de $\mathbf{B}$, ceux qui s'écrivent comme somme de produits $ab^\bullet$ avec $a,\ b \in \mathbf{A}$ forment clairement un sous-anneau de $\mathbf{B}$, qui est donc égal à $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$. Par ailleurs, $ab^\bullet = ab^\bullet e_b$. En considérant l'algèbre de Boole engendrée par les e_b qui interviennent dans une somme finie du type précédent, on en déduit que tout élément de $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$ peut s'écrire sous la forme

$$\textstyle\sum_j \big(\sum_i a_{i,j} b_{i,j}^\bullet\big)\ e_j, \quad \text{avec}$$

— les e_j sont des idempotents dans $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}]$ deux à deux orthogonaux,
— $a_{i,j}, b_{i,j} \in \mathbf{A}$, et $b_{i,j} b_{i,j}^\bullet e_j = e_j$, pour tous i, j.

On note que $b_{i,j}^\bullet$ est l'inverse de $b_{i,j}$ dans $\mathbf{A}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}}][1/e_j]$, et on peut faire le calcul comme pour une somme de fractions ordinaires $\sum_i a_{i,j}/b_{i,j}$. Par exemple prenons pour simplifier un terme avec une somme de 3 éléments

$$(a_1 b_1^\bullet + a_2 b_2^\bullet + a_3 b_3^\bullet)e.$$

Puisque $b_2 b_2^\bullet e = b_3 b_3^\bullet e = e$, on a $a_1 b_1^\bullet e = a_1 b_2 b_3 (b_1 b_2 b_3)^\bullet e$, et

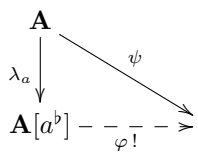
$$(a_1 b_1^\bullet + a_2 b_2^\bullet + a_3 b_3^\bullet)e = (a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + a_3 b_1 b_2)(b_1 b_2 b_3)^\bullet e = dc^\bullet e,$$

qui admet pour quasi inverse $cd^\bullet e$. □

Rappelons que $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ désigne le quotient d'un anneau $\mathbf{B}$ par son nilradical. Dans le lemme qui suit on regarde ce qui se passe lorsque l'on rajoute de force un quasi inverse à un élément d'un anneau. C'est une opération voisine de la localisation, lorsque l'on rajoute de force un inverse d'un élément, mais un peu plus délicate.

4.23. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau et* $a \in \mathbf{A}$.

1. *Considérons l'anneau* $\mathbf{A}[T]/\langle aT^2 - T, a^2T - a\rangle = \mathbf{A}[a^\flat]$ *et notons* $\lambda_a : \mathbf{A} \to \mathbf{A}[a^\flat]$ *l'homomorphisme canonique (*$a^\flat$ *désigne l'image de* T*). Alors pour tout homomorphisme* $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *tel que* $\psi(a)$ *admette un quasi inverse il existe un unique homomorphisme* $\varphi : \mathbf{A}[a^\flat] \to \mathbf{B}$ *tel que* $\varphi \circ \lambda_a = \psi$.



$\psi(a)$ *admet un quasi inverse*

2. *En outre,* $aa^\flat$ *est un idempotent et* $\mathbf{A}[a^\flat] \simeq \mathbf{A}[1/a] \times \mathbf{A}/\langle a\rangle$.
3. *Si* $\mathbf{B}$ *est réduit on a une factorisation unique via* $(\mathbf{A}[a^\flat])_{\mathrm{red}}$.

Dans la suite on note $\mathbf{A}[a^\bullet]$ *pour l'anneau* $(\mathbf{A}[a^\flat])_{\mathrm{red}}$.

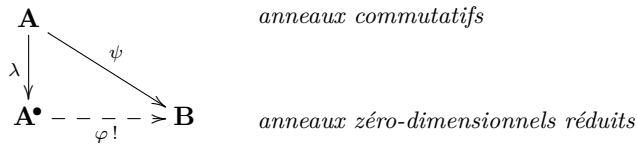
4. *On a* $\mathbf{A}[a^\bullet] \simeq \mathbf{A}_{\mathrm{red}}[1/a] \times \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$. *Si* $\mathbf{A}$ *est réduit l'homomorphisme canonique* $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[a^\bullet]$ *est injectif.*
5. $\mathsf{Zar}(\mathbf{A}[a^\bullet]) = \mathsf{Zar}(\mathbf{A}[a^\flat])$ *s'identifie à* $(\mathsf{Zar}\,\mathbf{A})[\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)^\bullet]$.

▷ Laissée à la lectrice. Le dernier point résulte du lemme 1.6 et du fait 4.5.□

4.24. Corollaire. *Soient* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$.

1. *L'anneau* $\mathbf{A}[a_1^\bullet][a_2^\bullet]\cdots[a_n^\bullet]$ *est indépendant, à isomorphisme unique près, de l'ordre des* a_i. *Il sera noté* $\mathbf{A}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet]$.
2. *Une description possible est la suivante :*
$$\mathbf{A}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet] \simeq \big(\mathbf{A}[T_1, T_2, \ldots, T_n]/\mathfrak{a}\,\big)_{\mathrm{red}}$$
avec $\mathfrak{a} = \big\langle (a_i T_i^2 - T_i)_{i=1}^n, (T_i a_i^2 - a_i)_{i=1}^n \big\rangle$.
3. *Une autre description possible :*
$$\mathbf{A}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet] \simeq \prod\nolimits_{I \in \mathcal{P}_n} \left(\mathbf{A}/\langle (a_i)_{i\in I}\rangle\right)_{\mathrm{red}}[1/\alpha_I]$$
avec $\alpha_I = \prod_{j \in [\![1..n]\!]\setminus I} a_j$.

4.25. Théorème. (Clôture zéro-dimensionnelle réduite d'un anneau commutatif) *Pour tout anneau* $\mathbf{A}$ *il existe un anneau zéro-dimensionnel réduit* $\mathbf{A}^\bullet$ *avec un homomorphisme* $\lambda : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^\bullet$, *qui factorise de manière unique tout homomorphisme* $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *vers un anneau zéro-dimensionnel réduit.*



Ce couple $(\mathbf{A}^\bullet, \lambda)$ *est unique à isomorphisme unique près. En outre :*

- *L'homomorphisme naturel* $\mathbf{A}_{\mathrm{red}} \to \mathbf{A}^\bullet$ *est injectif.*
- *On a* $\mathbf{A}^\bullet = \mathbf{A}_{\mathrm{red}}[(a^\bullet)_{a\in\mathbf{A}_{\mathrm{red}}}]$

▷ Ceci est un corollaire des lemmes précédents. On peut supposer $\mathbf{A}$ réduit. Le résultat d'unicité (corollaire 4.24) permet de construire une limite inductive (qui mime une réunion filtrante) basée sur les extensions du type $\mathbf{A}[a_1^\bullet, a_2^\bullet, \ldots, a_n^\bullet]$, et l'on conclut avec le lemme 4.22. □

Commentaires. 1) A priori, puisque l'on a affaire à des structures purement équationnelles, la clôture zéro-dimensionnelle réduite universelle d'un anneau existe et l'on pourrait la construire comme suit : on rajoute formellement

l'opération unaire $a \mapsto a^\bullet$ et l'on force $a^\bullet$ à être un quasi inverse de a. Notre preuve a permis de donner en plus une description précise simplifiée de l'objet construit et de montrer l'injectivité dans le cas réduit.
2) En mathématiques classiques, la clôture zéro-dimensionnelle réduite $\mathbf{A}^\bullet$ d'un anneau $\mathbf{A}$ peut être obtenue comme suit. Tout d'abord on considère le produit $\mathbf{B} = \prod_{\mathfrak{p}} \mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$, où $\mathfrak{p}$ parcourt tous les idéaux premiers de $\mathbf{A}$. Comme $\mathbf{B}$ est un produit de corps, il est zéro-dimensionnel réduit. Ensuite on considère le plus petit sous-anneau zéro-dimensionnel de $\mathbf{B}$ contenant l'image de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$ par l'homomorphisme diagonal naturel.
On comprend alors l'importance de la construction à la main que nous avons faite de $\mathbf{A}^\bullet$. Elle nous permet d'avoir accès de manière explicite à quelque chose qui ressemble à « l'ensemble de tous les » idéaux premiers de $\mathbf{A}$ (ceux des mathématiques classiques) sans avoir besoin d'en construire un seul individuellement. Le pari est que les raisonnements des mathématiques classiques qui manipulent des idéaux premiers arbitraires non précisés de l'anneau $\mathbf{A}$ (des objets en général inaccessibles) peuvent être relus comme des arguments au sujet de l'anneau $\mathbf{A}^\bullet$: un objet sans aucun mystère ! ∎

Exemples.
1) Voici une description de la clôture zéro-dimensionnelle réduite de $\mathbb{Z}$.
Tout d'abord, pour $n \in \mathbb{N}^*$ l'anneau $\mathbb{Z}[n^\bullet]$ est isomorphe à $\mathbb{Z}[1/n] \times \prod_{p|n} \mathbb{F}_p$, où p est mis pour « p nombre premier », et $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Ensuite, $\mathbb{Z}^\bullet$ est la limite inductive (que l'on peut voir comme une réunion croissante) des $\mathbb{Z}[(n!)^\bullet]$.
2) Voici une description de la clôture zéro-dimensionnelle réduite de $\mathbb{Z}[X]$.
Tout d'abord, si Q un polynôme unitaire sans facteur carré, et si $n \in \mathbb{N}^*$ est multiple de $\mathrm{disc}(Q)$, l'anneau $\mathbb{Z}[X][n^\bullet, Q^\bullet]$ est isomorphe à

$$\mathbb{Z}[X, 1/n, 1/Q] \times \prod_{p|n} \mathbb{F}_p[X, 1/Q] \times \prod_{P|Q} \mathbb{Z}[X, 1/n]/\langle P\rangle \times \prod_{p|n, R|Q} \mathbb{F}_p[X]/\langle R\rangle$$

avec p mis pour « p premier », P mis pour « P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ », et $R \mid Q$ mis pour « R irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$ divise Q dans $\mathbb{F}_p[X]$ ».
Ensuite, on passe à la limite inductive des $\mathbb{Z}[X][u_n^\bullet, Q_n^\bullet]$ (ici, c'est une réunion croissante), où Q_n est la partie sans carré du produit des n premiers éléments dans une énumération des polynômes unitaires sans facteur carré de $\mathbb{Z}[X]$, et où $u_n = n!\,\mathrm{disc}(Q_n)$.
Notez que l'on obtient ainsi un anneau par lequel se factorisent tous les homomorphismes naturels $\mathbb{Z}[X] \to \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p})$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbb{Z}[X]$: un tel $\mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[X]/\mathfrak{p})$ est en effet ou bien $\mathbb{Q}(X)$, ou bien un $\mathbb{Q}[X]/\langle P\rangle$, ou bien un $\mathbb{F}_p(X)$, ou bien un $\mathbb{F}_p[X]/\langle R\rangle$.
3) L'anneau (constructivement bien défini) $\mathbb{R}^\bullet$ est certainement un des objets les plus intrigants qui soient pour l'investigation du monde « sans

tiers exclu» que constituent les mathématiques constructives. Naturellement, en mathématiques classiques, $\mathbb{R}$ est zéro-dimensionnel et $\mathbb{R}^\bullet = \mathbb{R}$. ∎

4.26. Théorème. *Pour tout anneau* $\mathbf{A}$ *on a des isomorphismes naturels*
$$\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}) \simeq \mathbb{B}(\mathbf{A}^\bullet) \simeq \mathsf{Zar}(\mathbf{A}^\bullet).$$

▷ Cela résulte du dernier point du lemme 4.23, et du fait que les deux constructions peuvent être vues comme des limites inductives de «constructions à un étage» $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}[a^\bullet]$ ($\mathbf{E}$ un anneau ou un treillis distributif). □

Notez que si l'on adoptait la notation $\mathbf{T}^\bullet$ pour $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathbf{T})$ on aurait la jolie formule $(\mathsf{Zar}\,\mathbf{A})^\bullet \simeq \mathsf{Zar}(\mathbf{A}^\bullet)$.

4.27. Proposition. *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *un idéal et* S *un monoïde.*
- *Les deux anneaux* $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})^\bullet$ *et* $\mathbf{A}^\bullet/\mathrm{D}(\mathfrak{a}\mathbf{A}^\bullet)$ *sont canoniquement isomorphes.*
- *Les deux anneaux* $(\mathbf{A}_S)^\bullet$ *et* $(\mathbf{A}^\bullet)_S$ *sont canoniquement isomorphes.*

▷ Notons que $(\mathbf{A}^\bullet)_S$ est zéro-dimensionnel réduit comme localisation d'un anneau zéro-dimensionnel réduit. Et de même, $\mathbf{A}^\bullet/\mathrm{D}(\mathfrak{a}\mathbf{A}^\bullet)$ est zéro-dimensionnel réduit. Écrivons la démonstration pour les localisations. Considérons les homomorphismes naturels
$$\mathbf{A} \to \mathbf{A}_S \to (\mathbf{A}_S)^\bullet \quad \text{et} \quad \mathbf{A} \to \mathbf{A}^\bullet \to (\mathbf{A}^\bullet)_S.$$
L'homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^\bullet$ «se prolonge» de manière unique en un homomorphisme $\mathbf{A}_S \to (\mathbf{A}^\bullet)_S$, et d'après la propriété universelle de la clôture zéro-dimensionnelle réduite, fournit un morphisme unique $(\mathbf{A}_S)^\bullet \to (\mathbf{A}^\bullet)_S$ qui rend le diagramme ad-hoc commutatif. De même, le morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_S$ donne naissance à un unique morphisme $\mathbf{A}^\bullet \to (\mathbf{A}_S)^\bullet$ qui se prolonge en un morphisme $(\mathbf{A}^\bullet)_S \to (\mathbf{A}_S)^\bullet$. En composant ces deux morphismes, par unicité, on obtient deux fois l'identité. □

5. Treillis distributifs, relations implicatives et algèbres de Heyting

Un nouveau regard sur les treillis distributifs

Une règle particulièrement importante pour les treillis distributifs, dite *coupure*, est la suivante
$$\big(x \wedge a \leqslant b\big) \quad \& \quad \big(a \leqslant x \vee b\big) \quad \Longrightarrow \quad a \leqslant b. \tag{24}$$
Pour la démontrer on écrit $x \wedge a \wedge b = x \wedge a$ et $a = a \wedge (x \vee b)$ donc
$$a = (a \wedge x) \vee (a \wedge b) = (a \wedge x \wedge b) \vee (a \wedge b) = a \wedge b$$

5.1. Notation. Pour un treillis distributif $\mathbf{T}$ on note $A \vdash B$ ou $A \vdash_{\mathbf{T}} B$ la relation définie comme suit sur l'ensemble $\mathrm{P_{fe}}(\mathbf{T})$:

$$A \vdash B \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \bigwedge A \leqslant \bigvee B.$$

Notez que la relation $A \vdash B$ est bien définie sur $\mathrm{P_{fe}}(\mathbf{T})$ parce que les lois $\wedge$ et $\vee$ sont associatives, commutatives et idempotentes. Notez que $\emptyset \vdash \{x\}$ implique $x = 1$ et que $\{y\} \vdash \emptyset$ implique $y = 0$. Cette relation vérifie les axiomes suivants, dans lesquels on écrit x pour $\{x\}$ et A, B pour $A \cup B$.

$$\begin{aligned} a \ &\vdash\ a && (R)\\ A \vdash B \ &\implies\ A, A' \ \vdash\ B, B' && (M)\\ (A, x \vdash B) \ \&\ (A \vdash B, x) \ &\implies\ A \ \vdash\ B && (T). \end{aligned}$$

On dit que la relation est *réflexive*, *monotone* et *transitive*. La troisième règle (transitivité) peut être vue comme une généralisation de la règle (24) et s'appelle également la règle de *coupure*.
Signalons aussi les deux règles suivantes dites *de distributivité* :

$$\begin{aligned} (A,\ x \vdash B)\ \&\ (A,\ y \vdash B) \ &\iff\ A,\ x \vee y \vdash B\\ (A \vdash B,\ x)\ \&\ (A \vdash B,\ y) \ &\iff\ A \vdash B,\ x \wedge y \end{aligned}$$

Une manière intéressante d'aborder la question des treillis distributifs définis par générateurs et relations est de considérer la relation $A \vdash B$ définie sur l'ensemble $\mathrm{P_{fe}}(\mathbf{T})$ des parties finiment énumérées d'un treillis distributif $\mathbf{T}$. En effet, si $S \subseteq \mathbf{T}$ engendre $\mathbf{T}$ comme treillis, alors la connaissance de la relation $\vdash$ sur $\mathrm{P_{fe}}(S)$ suffit à caractériser sans ambigüité le treillis $\mathbf{T}$, car toute formule sur S peut être réécrite, au choix, en « forme normale conjonctive » (inf de sups dans S) ou « normale disjonctive » (sup de infs dans S). Donc si l'on veut comparer deux éléments du treillis engendré par S on écrit le premier en forme normale disjonctive, le second en forme normale conjonctive, et l'on remarque que

$$\textstyle\bigvee_{i\in I}\big(\bigwedge A_i\big) \leqslant \bigwedge_{j\in J}\big(\bigvee B_j\big) \quad\iff\quad \forall i \in I,\ \forall j \in J,\ \ A_i \vdash B_j$$

5.2. Définition. Pour un ensemble S arbitraire, une relation sur $\mathrm{P_{fe}}(S)$ qui est réflexive, monotone et transitive est appelée une *relation implicative* (en anglais, *entailment relation*).

Le théorème suivant est fondamental. Il dit que les trois propriétés des relations implicatives sont exactement ce qu'il faut pour que l'interprétation en forme de treillis distributif soit adéquate.

5.3. Théorème. (Théorème fondamental des relations implicatives)
Soit un ensemble S avec une relation implicative $\vdash_S$ sur $\mathrm{P_{fe}}(S)$. On considère le treillis distributif $\mathbf{T}$ défini par générateurs et relations comme suit : les

générateurs sont les éléments de S et les relations sont les

$$A \vdash_{\mathbf{T}} B$$

chaque fois que $A \vdash_S B$. Alors, pour tous A, B dans $\mathrm{P_{fe}}(S)$, on a

$$A \vdash_{\mathbf{T}} B \implies A \vdash_S B.$$

D On donne une description explicite du treillis distributif $\mathbf{T}$. Les éléments de $\mathbf{T}$ sont représentés par ceux de $\mathrm{P_{fe}}\big(\mathrm{P_{fe}}(S)\big)$, i.e. des X de la forme :

$$X = \{A_1, \ldots, A_n\}$$

(intuitivement X représente $\bigwedge_{i\in[\![1..n]\!]} \bigvee A_i$). On définit alors de manière inductive la relation $A \preccurlyeq Y$ pour $A \in \mathrm{P_{fe}}(S)$ et $Y \in \mathrm{P_{fe}}\big(\mathrm{P_{fe}}(S)\big)$ comme suit :

— Si $B \in Y$ et $B \subseteq A$ alors $A \preccurlyeq Y$.

— Si l'on a $A \vdash_S y_1, \ldots, y_m$ et $A, y_j \preccurlyeq Y$ pour $j = 1, \ldots, m$ alors $A \preccurlyeq Y$.

On montre facilement que si $A \preccurlyeq Y$ et $A \subseteq A'$ alors on a $A' \preccurlyeq Y$. On en déduit que $A \preccurlyeq Z$ si $A \preccurlyeq Y$ et $B \preccurlyeq Z$ pour tout $B \in Y$. On peut alors définir $X \leqslant Y$ par « $A \preccurlyeq Y$ pour tout $A \in X$ ». On vérifie enfin que $\mathbf{T}$ est un treillis distributif[7] pour les opérations (0-aires et binaires)

$$\left.\begin{array}{cc} 1 = \emptyset & 0 = \{\emptyset\} \\ X \wedge Y = X \cup Y & X \vee Y = \{\, A \cup B \mid A \in X,\ B \in Y \,\} \end{array}\right| \qquad (25)$$

Pour ceci on montre que si $C \preccurlyeq X$ et $C \preccurlyeq Y$, alors on a $C \preccurlyeq X \wedge Y$ par induction sur les preuves de $C \preccurlyeq X$ et $C \preccurlyeq Y$.

On remarque que si $A \vdash_S y_1, \ldots, y_m$ et $A, y_j \vdash_S B$ pour tout j, alors on obtient $A \vdash_S B$ en utilisant m fois la règle de coupure. Il en résulte que si l'on a $A \vdash_{\mathbf{T}} B$, c'est à dire $A \preccurlyeq \{\{b\} \mid b \in B\}$, alors on a $A \vdash_S B$. □

5.4. Corollaire. (Treillis distributifs de présentation finie)

1. *Un treillis distributif librement engendré par un ensemble E fini est fini.*
2. *Un treillis distributif de présentation finie est fini.*

D *1.* On considère la relation implicative minimale sur E. Elle est définie par

$$(A, B \in \mathrm{P_{fe}}(E)) \quad A \vdash_E B \overset{\text{def}}{\iff} \exists x \in A \cap B.$$

On considère alors le treillis distributif correspondant à cette relation implicative via le théorème 5.3. Il est isomorphe à un sous-ensemble de $\mathrm{P_{fe}}\big(\mathrm{P_{fe}}(E)\big)$, celui qui est représenté par les listes $(A_1, \ldots, A_k)$ dans $\mathrm{P_{fe}}(E)$ telles que deux A_i d'indices distincts sont incomparables pour l'inclusion. Les lois sont

7. Plus précisément, comme $\leqslant$ est seulement un préordre, on prend pour $\mathbf{T}$ le quotient de $\mathrm{P_{fe}}\big(\mathrm{P_{fe}}(S)\big)$ par la relation d'équivalence : $X \leqslant Y$ et $Y \leqslant X$.

obtenues à partir de (25), en simplifiant les listes obtenues lorsqu'elles ne satisfont pas le critère d'incomparabilité.
2. Si l'on impose un nombre fini de relations entre les éléments de E, on doit passer à un treillis quotient du treillis distributif libre sur E. La relation d'équivalence engendrée par ces relations et compatible avec les lois de treillis est décidable parce que la structure est définie en utilisant seulement un nombre fini d'axiomes. □

Remarques. 1) Une autre preuve du point *1* pourrait être la suivante. L'algèbre de Boole librement engendrée par le treillis distributif $\mathbf{T}$ librement engendré par E est l'algèbre de Boole $\mathbf{B}$ librement engendrée par E. Cette dernière peut être facilement décrite par les éléments de $\mathrm{P_{fe}}\big(\mathrm{P_{fe}}(E)\big)$, sans aucun passage au quotient : la partie $\{A_1, \ldots, A_n\}$ représente intuitivement $\bigvee_{i\in[\![1..n]\!]} (\bigwedge A_i \wedge \bigwedge A'_i)$, en désignant par A'_i la partie de E formée par les $\neg x$ pour les $x \notin A_i$. Donc $\mathbf{B}$ possède $2^{2^{\#E}}$ éléments. Enfin on a vu que $\mathbf{T}$ s'identifie à un sous-treillis distributif de $\mathbf{B}$ (théorème 1.8).
2) La preuve donnée du point *2* utilise un argument tout à fait général. Dans le cas des treillis distributifs on peut plus précisément se reporter à la description des quotients donnée page 634. ■

Dualité entre treillis distributifs finis et ensembles ordonnés finis

Si $\mathbf{T}$ est un treillis distributif on note $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T} \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(\mathbf{T}, \mathbf{2})$. C'est un ensemble ordonné appelé *spectre (de Zariski) de* $\mathbf{T}$. Un élément α de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est caractérisé par son noyau. En mathématiques classiques un tel noyau est appelé un idéal premier. Du point de vue constructif il doit être détachable. Nous sommes intéressés ici par le cas où $\mathbf{T}$ est fini, ce qui implique que $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est également fini (au sens constructif).
Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est un homomorphisme de treillis distributifs et si $\alpha \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}'$, alors $\alpha \circ \varphi \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$. Ceci définit une application croissante de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}'$ vers $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$, notée $\mathsf{Spec}\,\alpha$, dite « duale » de φ.
Inversement soit E un ensemble ordonné fini. On note $E^\star$ l'ensemble des *sections initiales* de E, i.e., l'ensemble des parties finies de E stables pour l'opération $x \mapsto {\downarrow}x$. Cet ensemble, ordonné par la relation $\supseteq$, est un treillis distributif fini, un sous-treillis du treillis $\mathrm{P_f}(E)^\circ$ (le treillis opposé à $\mathrm{P_f}(E)$).

5.5. Fait. *Le nombre d'éléments d'un ensemble ordonné fini E est égal à la longueur maximum d'une chaîne strictement croissante d'éléments de $E^\star$.*
▷ Il est clair qu'une chaîne strictement monotone d'éléments de $E^\star$ (donc de parties finies de E) ne peut avoir plus que $1 + \#E$ éléments. Sa « longueur » est donc $\leqslant \#E$. Concernant l'inégalité opposée, on la vérifie pour $E = \emptyset$ (ou pour un singleton), puis on fait une récurrence sur $\#E$, en regardant

un ensemble ordonné à n éléments ($n \geqslant 1$) comme un ensemble ordonné à $n-1$ éléments que l'on étend en rajoutant un élément maximal. □

Si $\psi : E \to E_1$ est une application croissante entre ensembles ordonnés finis, alors pour tout $X \in E_1^\star$, $\psi^{-1}(X)$ est un élément de $E^\star$. Ceci définit un homomorphisme $E_1^\star \to E^\star$ noté $\psi^\star$, dit «dual» de ψ.

5.6. Théorème. (Dualité entre ensembles ordonnés finis et treillis distributifs finis)

1. *Pour tout ensemble ordonné fini E définissons $\nu_E : E \to \mathsf{Spec}(E^\star)$ par*
$$\nu_E(x)(S) = 0 \ \text{ si } \ x \in S,\ 1 \ \text{ sinon.}$$
Alors, ν_E est un isomorphisme d'ensembles ordonnés. En outre, pour toute application croissante $\psi : E \to E_1$, on a $\nu_{E_1} \circ \psi = \mathsf{Spec}(\psi^\star) \circ \nu_E$.
2. *Pour tout treillis distributif fini $\mathbf{T}$ définissons $\iota_{\mathbf{T}} : \mathbf{T} \to (\mathsf{Spec}\,\mathbf{T})^\star$ par*
$$\iota_{\mathbf{T}}(x) = \{\, \alpha \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{T} \mid \alpha(x) = 0 \,\}.$$
Alors, $\iota_{\mathbf{T}}$ est un isomorphisme de treillis distributifs. En outre, pour tout morphisme $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$, on a $\iota_{\mathbf{T}'} \circ \varphi = (\mathsf{Spec}\,\varphi)^\star \circ \iota_{\mathbf{T}}$.

D Voir l'exercice 13. □

En d'autres termes, les catégories des treillis distributifs finis et des ensembles ordonnés finis sont antiéquivalentes. L'antiéquivalence est donnée par les foncteurs contravariants $\mathsf{Spec}\,\bullet$ et $\bullet^\star$, et par les transformations naturelles ν et ι définies ci-dessus.
La généralisation de cette antiéquivalence de catégories pour le cas des treillis distributifs non nécessairement finis sera abordée brièvement page 767.

Algèbres de Heyting

Un treillis distributif $\mathbf{T}$ est appelé un *treillis implicatif* ou une *algèbre de Heyting* lorsqu'il existe une opération binaire $\to$ vérifiant pour tous a, b, c :

$$a \wedge b \leqslant c \iff a \leqslant (b \to c) \tag{26}$$

Ceci signifie que pour tous b, $c \in \mathbf{T}$, l'*idéal transporteur*

$$(c : b)_{\mathbf{T}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\, x \in \mathbf{T} \mid x \wedge b \leqslant c \,\}$$

est principal, son générateur étant noté $b \to c$. Donc si elle existe, l'opération $\to$ est déterminée de manière unique par la structure du treillis. On définit alors la loi unaire $\neg x = x \to 0$. La structure d'algèbre de Heyting peut être définie comme purement équationnelle en donnant de bons axiomes, décrits dans le fait suivant.

5.7. Fait. *Un treillis* $\mathbf{T}$ *(non supposé distributif) muni d'une loi* $\to$ *est une algèbre de Heyting si, et seulement si, les axiomes suivants sont vérifiés :*

$$\begin{aligned} a \to a &= 1 \\ a \wedge (a \to b) &= a \wedge b \\ b \wedge (a \to b) &= b \\ a \to (b \wedge c) &= (a \to b) \wedge (a \to c) \end{aligned}$$

Notons aussi les faits importants suivants.

5.8. Fait. *Dans une algèbre de Heyting on a :*

$$a \leqslant b \iff a \to b = 1$$

$$\begin{aligned} a \to (b \to c) &= (a \wedge b) \to c, & a \to b &\leqslant \neg b \to \neg a, \\ (a \vee b) \to c &= (a \to c) \wedge (b \to c), & a &\leqslant \neg\neg a, \\ \neg\neg\neg a &= \neg a, & a \to b &\leqslant (b \to c) \to (a \to c), \\ \neg(a \vee b) &= \neg a \wedge \neg b, & \neg a \vee b &\leqslant a \to b. \end{aligned}$$

Tout treillis distributif fini est une algèbre de Heyting, car tout idéal de type fini est principal. Un cas particulier important d'algèbre de Heyting est une algèbre de Boole.

Un *homomorphisme d'algèbres de Heyting* est un homomorphisme de treillis distributifs $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ tel que $\varphi(a \to b) = \varphi(a) \to \varphi(b)$ pour tous $a, b \in \mathbf{T}$. Le fait suivant est immédiat.

5.9. Fait. *Soit* $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}_1$ *un homomorphisme de treillis distributifs, avec* $\mathbf{T}$ *et* $\mathbf{T}_1$ *des algèbres de Heyting. Notons* $a \preccurlyeq b$ *pour* $\varphi(a) \leqslant_{\mathbf{T}_1} \varphi(b)$. *Alors* φ *est un homomorphisme d'algèbres de Heyting si, et seulement si, on a pour tous* $a, a', b, b' \in \mathbf{T}$ *:*

$$a \preccurlyeq a' \Longrightarrow (a' \to b) \preccurlyeq (a \to b), \quad \text{et} \quad b \preccurlyeq b' \Longrightarrow (a \to b) \preccurlyeq (a \to b').$$

5.10. Fait. *Si* $\mathbf{T}$ *est une algèbre de Heyting tout quotient* $\mathbf{T}/(y = 0)$ *(c'est-à-dire tout quotient par un idéal principal) est aussi une algèbre de Heyting.*

▷ Soit $\pi : \mathbf{T} \to \mathbf{T}' = \mathbf{T}/(y = 0)$ la projection canonique. On a

$$\begin{aligned} \pi(x) \wedge \pi(a) \leqslant_{\mathbf{T}'} \pi(b) &\iff \pi(x \wedge a) \leqslant_{\mathbf{T}'} \pi(b) \iff \\ x \wedge a \leqslant b \vee y &\iff x \leqslant a \to (b \vee y). \end{aligned}$$

Or $y \leqslant b \vee y \leqslant a \to (b \vee y)$, donc

$$\pi(x) \wedge \pi(a) \leqslant_{\mathbf{T}'} \pi(b) \iff x \leqslant \big(a \to (b \vee y)\big) \vee y,$$

c'est-à-dire $\pi(x) \leqslant_{\mathbf{T}'} \pi\big(a \to (b \vee y)\big)$, ce qui montre que $\pi\big(a \to (b \vee y)\big)$ vaut pour $\pi(a) \to \pi(b)$ dans $\mathbf{T}'$. □

Remarques. 1) La notion d'algèbre de Heyting est reminiscente de la notion d'anneau cohérent en algèbre commutative. En effet, un anneau cohérent peut être caractérisé comme suit : l'intersection de deux idéaux de type fini est un idéal de type fini et le transporteur d'un idéal de type fini dans un idéal de type fini est un idéal de type fini. Si l'on « relit » ceci pour un

treillis distributif en se rappelant que tout idéal de type fini est principal on obtient une algèbre de Heyting.
2) Tout treillis distributif $\mathbf{T}$ engendre une algèbre de Heyting de façon naturelle. Autrement dit on peut rajouter formellement un générateur pour tout idéal $(b : c)$. Mais si l'on part d'un treillis distributif qui se trouve être une algèbre de Heyting, l'algèbre de Heyting qu'il engendre est strictement plus grande. Prenons par exemple le treillis $\mathbf{3}$ qui est le treillis distributif libre à un générateur. L'algèbre de Heyting qu'il engendre est donc l'algèbre de Heyting libre à un générateur. Or celle-ci est infinie (cf. [Johnstone]). A contrario le treillis booléen engendré par $\mathbf{T}$ (cf. théorème 1.8) reste égal à $\mathbf{T}$ lorsque celui-ci est booléen. ∎

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées au lecteur, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

- Montrer que les relations (2) page 634 sont exactement ce qu'il faut pour définir un treillis quotient.
- Démontrer la proposition 1.2.
- Démontrer le corollaire 1.7.
- Démontrer les faits 3.4, 3.6, 3.7 et 3.8.
- Démontrer le fait 4.3 et tous les faits numérotés entre 4.5 et 4.17 (pour le fait 4.2 voir l'exercice 7).
- Démontrer ce qui est affirmé dans les exemples page 669.
- Démontrer les faits 5.7 et 5.8.

Exercice 2. Soit $\mathbf{T}$ un treillis distributif et $x \in \mathbf{T}$. On a vu (lemme 1.6) que

$$\lambda_x : \mathbf{T} \to \mathbf{T}[x^\bullet] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}/(x = 0) \times \mathbf{T}/(x = 1)$$

est injectif, ce qui signifie : si $y \wedge x = z \wedge x$ et $y \vee x = z \vee x$, alors $y = z$.
Montrer que l'on peut en déduire la règle de coupure (24).

Exercice 3. Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre et p, a, $b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$, avec p irréductible. On suppose que $p \mid ab$, mais $p \not\mid a$, $p \not\mid b$. Montrer que (pa, ab) n'a pas de pgcd. Montrer que dans $\mathbb{Z}[X^2, X^3]$ les éléments X^2 et X^3 admettent un pgcd, mais pas de ppcm, et que les éléments X^5 et X^6 n'ont pas de pgcd.

Exercice 4. *(Autre définition des groupes réticulés)*
Montrer que les axiomes que doit vérifier une partie G^+ d'un groupe $(G, 0, +, -)$ pour définir un ordre compatible réticulé sont :

- $G = G^+ - G^+$,
- $G^+ \cap -G^+ = \{0\}$,
- $G^+ + G^+ \subseteq G^+$,
- $\forall a, b\ \exists c,\ \ c + G^+ = (a + G^+) \cap (b + G^+)$.

Exercice 5. *(Une autre preuve du lemme de Gauss)*
Dans le contexte de la proposition 3.14, montrer que $\mathrm{G}(fg) = \mathrm{G}(f)\mathrm{G}(g)$ à l'aide d'une démonstration basée sur le lemme de Dedekind-Mertens III-2.1.

Exercice 6. *(L'astuce de Kronecker)* Soit d un entier fixé $\geqslant 2$.
1. Soit $\mathbf{A}[\underline{X}]_{<d} \subset \mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ le sous-$\mathbf{A}$-module constitué des polynômes P tels que $\deg_{X_i} P < d$ pour tout $i \in [\![1..n]\!]$, et $\mathbf{A}[T]_{<d^n} \subset \mathbf{A}[T]$ celui formé par les polynômes $f \in \mathbf{A}[T]$ de degré $< d^n$.
Montrer que $\varphi : P(X_1, \ldots, X_n) \mapsto P(T, T^d, \ldots, T^{d^{n-1}})$ induit un isomorphisme de $\mathbf{A}$-modules entre les $\mathbf{A}$-modules $\mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ et $\mathbf{A}[T]_{<d^n}$.
2. On suppose $\mathbf{A}[X]$ factoriel. Soit $P \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ et $f = \varphi(P) \in \mathbf{A}[T]_{d^n}$. Montrer que toute factorisation de P dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$ peut être retrouvée par une procédure finie à partir de celles de $\varphi(P)$ dans $\mathbf{A}[T]$.

Exercice 7. Vérifier le fait 4.2, i.e. $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ est un treillis distributif. Montrer que ce treillis distributif peut être défini par générateurs et relations comme suit. Les générateurs sont les symboles $\mathrm{D}(a)$, $a \in \mathbf{A}$, avec le système de relations :
$$\mathrm{D}(0) = 0, \quad \mathrm{D}(1) = 1, \quad \mathrm{D}(a+b) \leqslant \mathrm{D}(a) \vee \mathrm{D}(b), \quad \mathrm{D}(ab) = \mathrm{D}(a) \wedge \mathrm{D}(b).$$

Exercice 8. Le contexte est celui du principe de recouvrement fermé 4.19. On considère un recouvrement fermé de l'anneau $\mathbf{A}$ par des idéaux $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$. On ne suppose pas que $\prod_i \mathfrak{a}_i = 0$, mais on suppose que chaque $\mathfrak{a}_i$ est de type fini. Montrer qu'un $\mathbf{A}$-module M est de type fini si, et seulement si, il est de type fini modulo chaque $\mathfrak{a}_i$.

Exercice 9. *(L'anneau $\mathbf{A}^\bullet$)* On se situe en mathématiques classiques.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}^\bullet$ l'homomorphisme naturel.
1. Montrer que l'application $\mathsf{Spec}\,\varphi : \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ est une bijection et que pour $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet$, l'homomorphisme naturel $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\varphi^{-1}(\mathfrak{q})) \to \mathbf{A}^\bullet/\mathfrak{q}$ est un isomorphisme.
2. L'anneau $\mathbf{A}^\bullet$ s'identifie au sous-anneau zéro-dimensionnel réduit de
$$\widetilde{\mathbf{A}} \stackrel{\text{def}}{=} \textstyle\prod_{\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}} \mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$$
engendré par (l'image de) $\mathbf{A}$.

Exercice 10. *(Idéaux premiers minimaux)*
On se situe en mathématiques classiques. Un idéal premier est dit minimal s'il est minimal parmi les idéaux premiers. On note $\mathsf{Min}\,\mathbf{A}$ le sous-espace de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ formé par les idéaux premiers minimaux. Rappelons que l'on a défini un *filtre maximal* comme un filtre dont le localisé est un anneau local zéro-dimensionnel. Dans le point *1* de cet exercice on fait le raccord avec la définition plus usuelle.
1. Montrer qu'un filtre strict $\mathfrak{f}$ est maximal parmi les filtres stricts si, et seulement si, pour tout $x \notin \mathfrak{f}$ il existe $a \in \mathfrak{f}$ tel que ax est nilpotent. Une autre caractérisation possible est que l'anneau localisé $\mathfrak{f}^{-1}\mathbf{A}$ est local, zéro-dimensionnel et non trivial. En particulier, tout filtre strict maximal parmi les filtres stricts est premier.
NB : reformulation de la première propriété caractéristique pour l'idéal premier complémentaire : un idéal premier $\mathfrak{p}$ est minimal si, et seulement si, pour tout $x \in \mathfrak{p}$, il existe $a \notin \mathfrak{p}$ tel que ax est nilpotent.

2. La notion duale du radical de Jacobson est le filtre intersection des filtres maximaux (c'est-à-dire le complémentaire de la réunion des idéaux premiers minimaux). Il peut être caractérisé de la manière suivante en mathématiques classiques (comparez avec le lemme IX-1.1 et sa preuve) : c'est l'ensemble des $a \in \mathbf{A}$ « nilréguliers » au sens suivant :

$$\forall y \in \mathbf{A} \quad ay \text{ nilpotent } \Rightarrow \ y \text{ nilpotent.} \tag{27}$$

En particulier, dans un anneau réduit, c'est l'ensemble des éléments réguliers.

Exercice 11. *(Algèbre de Boole librement engendrée par un ensemble fini)*
Soit $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble fini.
1. Montrer que l'algèbre de Boole $\mathbf{B}$ librement engendrée par E s'identifie à l'algèbre

$$\mathbb{F}_2[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a} = \mathbb{F}_2[x_1, \ldots, x_n]$$

avec $\mathfrak{a} = \left\langle (X_i^2 - X_i)_{i=1}^n \right\rangle$.
2. Définir deux $\mathbb{F}_2$-bases « naturelles » de $\mathbf{B}$, indexées par $\mathrm{P_f}(E)$, l'une étant monomiale et l'autre un système fondamental d'idempotents orthogonaux. Exprimer l'une en fonction de l'autre.

Exercice 12. Donner une description précise des treillis distributifs librement engendrés par des ensembles à 0, 1, 2 et 3 éléments. En particulier, préciser le nombre de leurs éléments.

Exercice 13. On démontre le théorème 5.6.
1. On utilise (comme dans le cours) la structure d'ordre $\supseteq$ sur $E^\star$ (ensemble des sections initiales de l'ensemble ordonné fini E).
Si $S_1, S_2 \in E^\star$, que valent $S_1 \wedge S_2$, $S_1 \vee S_2$?
2. Quelle est la structure d'ordre sur l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{T}$ correspondant à l'ordre qui a été défini pour $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$?
3. Démontrer le point *1* du théorème.
On commencera par vérifier que pour $S \in E^\star$, S engendre un idéal premier si, et seulement si, S est de la forme $\downarrow x$ avec $x \in E$; puis que $\operatorname{Ker} \nu_E(x) = \mathcal{I}_{E^\star}(\downarrow x)$.
4. Comment construire $E^\star$ à partir de E ? Traiter l'exemple suivant :

$$E = \quad \begin{array}{ccccc} & & & & d \\ & & & \nearrow & \\ c & & b & & \\ & \nwarrow & \nearrow & & \\ & & a & & \end{array} \qquad a < b < d,\ a < c.$$

Étudier le cas E totalement ordonné, et le cas E ordonné par la relation d'égalité.
5. Démontrer le point *2* du théorème.
6. Mêmes questions en considérant l'ordre opposé sur $E^\star$ et en adaptant l'ordre sur $\mathsf{Spec}(E^\star)$.

Exercice 14. Soient a, b non nuls dans un anneau intègre. On suppose que l'idéal $\langle a, b\rangle$ est inversible et que a et b admettent un ppcm m.
Montrer que $\langle a, b\rangle$ est un idéal principal.

Exercice 15. *(Un anneau factoriel avec seulement un nombre fini d'éléments irréductibles)*
Montrer qu'un anneau factoriel avec seulement un nombre fini d'éléments irréductibles est un anneau principal.

Exercice 16. *(Une intersection intéressante)*
Soit $\mathbf{k}$ un corps. On considère l'intersection

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}(x,y)[z] \cap \mathbf{k}(z, x+yz).$$

Ce sont deux sous-anneaux de $\mathbf{k}(x,y,z)$. Le premier est principal, le second est un corps. Montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{k}[z, x+yz]$, isomorphe à $\mathbf{k}[z,u]$. Ainsi l'intersection n'est pas un anneau principal, ni même un anneau de Bézout.

Exercice 17. *(Algèbre de Boole engendrée par un treillis de parties détachables)*
Démontrer ce qui est affirmé dans l'exemple 1) page 640 après le théorème 1.8.

Exercice 18. *(Quotients de treillis distributifs)*
1. Soit $(\mathbf{T}, \leqslant, \wedge, \vee)$ un treillis distributif et $a, b, x, y \in \mathbf{T}$ avec $a \leqslant b$.
Soit $(\mathbf{T}', \preccurlyeq, \curlywedge, \curlyvee)$ le treillis distributif quotient obtenu en forçant la relation $b \preccurlyeq a$ (ou, ce qui revient au même $a =_{\mathbf{T}'} b$). Alors on a les équivalences

$$(\dagger) \qquad x =_{\mathbf{T}'} y \iff (x \vee b = y \vee b \ \text{ et } \ x \wedge a = y \wedge a)$$

$$(\ddagger) \qquad x \preccurlyeq y \iff x \leqslant (y \vee b) \ \text{ et } \ (x \wedge a) \leqslant y$$

2. Soit $(\mathbf{T}, \leqslant, \wedge, \vee)$ un treillis distributif et $a, b \in \mathbf{T}$. On considère le treillis quotient $(\mathbf{T}', \preccurlyeq, \curlywedge, \curlyvee)$ obtenu en forçant la relation $a \preccurlyeq b$. Montrer l'équivalence

$$x \preccurlyeq y \iff (x \wedge a \wedge b) \leqslant y \text{ et } (x \leqslant y \vee a)$$

Exercice 19. *(Quotients de relations implicatives)*
Soit $(S, \vdash)$ un ensemble avec une relation implicative et $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n$ des éléments de S. On considère la relation implicative quotient $(S, \vdash')$ obtenue à partir de $\vdash$ en forçant la relation $a_1, \ldots, a_m \vdash' b_1, \ldots, b_n$. Montrer que les relations $c_1, \ldots, c_q \vdash d$ pour $c_1, \ldots, c_q, d \in S$ sont inchangées si, et seulement si, est vérifiée l'implication suivante :

$$(*) \qquad \left.\begin{array}{c} c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m, b_1 \vdash d \\ \vdots \\ c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m, b_n \vdash d \end{array}\right\} \Longrightarrow c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m \vdash d$$

Problème 1. *(Groupes réticulés quotients, sous-groupes solides)*
Dans un ensemble ordonné E, si $a \leqslant b$, on appelle *segment d'extrémités a et b* la partie $\{\, x \in E \mid a \leqslant x \leqslant b \,\}$. On le note $[a,b]_E$ ou $[a,b]$. Une partie F de E est dite *convexe* lorsqu'est satisfaite l'implication $a,\ b \in F \Rightarrow [a,b] \subseteq F$.
Un sous-groupe H d'un groupe réticulé est dit *solide* si c'est un sous-groupe réticulé convexe. On va voir que cette notion est l'analogue pour les groupes réticulés de celle d'idéal pour les anneaux.

1. Un sous-groupe H d'un groupe ordonné G est convexe si, et seulement si, la relation d'ordre sur G passe au quotient dans G/H, i.e. précisément G/H est muni d'une structure de groupe ordonné pour laquelle $(G/H)^+ = G^+ + H$. On dit aussi *sous-groupe isolé* pour « sous-groupe convexe d'un groupe ordonné ».
2. Le noyau H d'un morphisme de groupes réticulés $G \to G'$ est un sous-groupe solide de G.
3. Réciproquement, si H est sous-groupe solide d'un groupe réticulé G, la loi $\wedge$ passe au quotient, elle définit une structure de groupe réticulé sur G/H, et la surjection canonique de G sur G/H est un morphisme de groupes réticulés qui factorise tout morphisme de source G qui s'annule sur H.
4. On a défini en 2.6 le sous-groupe réticulé $\mathcal{C}(x)$.
Montrer que $\mathcal{C}(x) \cap \mathcal{C}(y) = \mathcal{C}(|x| \wedge |y|)$, et que le sous-groupe solide engendré par $x_1, \ldots, x_n \in G$ est égal à $\mathcal{C}(|x_1| + \cdots + |x_n|)$. En particulier, l'ensemble des sous-groupes solides *principaux*, i.e. de la forme $\mathcal{C}(a)$, est « presque » un treillis distributif (il manque en général un élément maximum).

Problème 2. *(Sous-groupes polaires, facteurs directs orthogonaux)*
1. Si A est une partie quelconque d'un groupe réticulé G on note

$$A^\perp := \{\, x \in G \mid \forall a \in A,\ |x| \perp |a| \,\}.$$

Montrer que $A^\perp$ est toujours un sous-groupe solide.
Montrer que l'on a comme d'habitude dans ce genre de situation :

$$A \subseteq (A^\perp)^\perp,\ (A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp,\ A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp \ \text{ et } \ A^{\perp\perp\perp} = A^\perp.$$

2. Un sous-groupe solide H d'un groupe réticulé est appelé un *sous-groupe polaire* lorsque $H^{\perp\perp} = H$. On dit encore *une polaire* au lieu de « un sous-groupe polaire ».
Un sous-groupe H est dit *facteur direct orthogonal* lorsque $G = H \oplus H^\perp$ (somme directe de sous-groupes dans un groupe abélien), auquel cas G est naturellement isomorphe à $H \boxplus H^\perp$. On dit aussi que G est la *somme directe orthogonale interne* de H et $H^\perp$ et l'on note (par abus) $G = H \boxplus H^\perp$.
Montrer qu'un facteur direct orthogonal est toujours un sous-groupe polaire.
Montrer que si $G = H \boxplus K$ (avec H et K identifiés à des sous-groupes de G) et si L est un sous-groupe solide, alors $L = (L \cap H) \boxplus (L \cap K)$.
3. De façon générale, on dit que G est la *somme directe orthogonale interne d'une famille de sous-groupes réticulés* $(H_i)_{i\in I}$, indexée par un ensemble discret I, lorsque l'on a $G = \sum_{i\in I} H_i$ et que les H_i sont deux à deux orthogonaux. Dans ce cas, chaque H_i est un sous-groupe polaire de G et l'on a un isomorphisme naturel de groupes réticulés $\boxplus_{i\in I} H_i \simeq G$. On écrit (par abus) $G = \boxplus_{i\in I} H_i$.
On suppose qu'un groupe réticulé est somme directe orthogonale d'une famille de sous-groupes polaires $(H_i)_{i\in I}$, ainsi que d'une autre famille $(K_j)_{j\in J}$. Montrer que ces deux décompositions admettent un raffinement commun.
En déduire que si les composantes d'une décomposition en somme directe orthogonale sont des sous-groupes non triviaux *indécomposables*, i.e., qui n'admettent pas de facteur direct orthogonal strict, alors la décomposition est unique, à bijection près de l'ensemble des indices.

Problème 3. *(Autour de Gauss-Joyal)*
Soit $u : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ ($\mathbf{A}$ est un anneau commutatif, $\mathbf{T}$ un treillis distributif) vérifiant :
$u(ab) = u(a) \wedge u(b)$, $u(1) = 1_{\mathbf{T}}$, $u(0) = 0_{\mathbf{T}}$, $u(a+b) \leqslant u(a) \vee u(b)$.
Pour $f = \sum_i a_i X^i \in \mathbf{A}[X]$, on pose

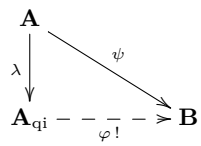
$$u(f) = u\big(\mathrm{c}(f)\big) \stackrel{\text{def}}{=} \bigvee_i u(a_i).$$

1. Montrer que « c'est bien défini », i.e., que $u(f)$ ne dépend que de $\mathrm{c}(f)$.
On veut prouver « de manière directe » (en particulier, sans utiliser le lemme II-2.6), la version suivante du lemme de Gauss-Joyal :

$$\mathsf{LGJ} : \quad u(fg) = u(f) \wedge u(g).$$

2. Vérifier que si $g = \sum b_j X^j \in \mathbf{A}[X]$ le résultat équivaut à $u(a_i b_j) \leqslant u(fg)$.
3. Que dit LGJ si $\mathbf{T} = \{\mathsf{Vrai}, \mathsf{Faux}\}$ et $u(a) = (a \neq 0)$?
4. En s'inspirant de la preuve classique du résultat de la question précédente, démontrer LGJ.
5. Que dit LGJ si $\mathbf{T} = \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ et $u(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$?

Problème 4. *(Clôture quasi intègre d'un anneau commutatif)*
En vous inspirant de la clôture zéro-dimensionnelle réduite, donner une construction de la clôture quasi intègre $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$ d'un anneau commutatif arbitraire $\mathbf{A}$.
Il faut résoudre le problème universel suivant :



homomorphismes d'anneaux

morphismes d'anneaux quasi intègres

où *les morphismes d'anneaux quasi intègres sont les homomorphismes d'anneaux qui respectent la loi* $a \mapsto e_a$ (e_a est l'idempotent vérifiant $\langle 1 - e_a \rangle = \mathrm{Ann}(a)$).
Dans la suite on parlera de *morphisme quasi intègre.*
Une clôture quasi intègre d'un anneau $\mathbf{A}$ existe « a priori », du simple fait que la théorie des anneaux quasi intègres est purement équationnelle. En effet, pour n'importe quel système de générateurs et de relations (une relation est une égalité entre deux termes construits à partir des générateurs, de 0 et de 1, en utilisant les lois $+, -, \times, a \mapsto e_a$), il existe un anneau quasi intègre « le plus général possible » correspondant à cette présentation : on prend sur l'ensemble des termes la plus petite relation d'équivalence qui respecte les axiomes et qui mette dans la même classe d'équivalence deux termes liés par une relation donnée au départ. Dans ces conditions l'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$ est simplement l'anneau quasi intègre engendré par les éléments de $\mathbf{A}$ avec pour relations toutes les égalités $a + b = c$, $a \times b = d$, $a = -a'$ vraies dans $\mathbf{A}$.
Mais on veut une description précise, comme pour la clôture zéro-dimensionnelle réduite.
On pourra alors démontrer les résultats suivants.
1. (Morphismes quasi intègres)

a. Un morphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est quasi intègre si, et seulement si, il transforme tout élément régulier en un élément régulier. Dans ce cas, il se prolonge de manière unique en un morphisme $\mathrm{Frac}(\varphi) : \mathrm{Frac}(\mathbf{A}) \to \mathrm{Frac}(\mathbf{B})$.

b. Un morphisme quasi intègre est injectif si, et seulement si, sa restriction à $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ est injective.
c. Il existe des homomorphismes injectifs entre anneaux quasi intègres qui ne sont pas quasi intègres.
d. Tout homomorphisme entre anneaux zéro-dimensionnels réduits est quasi intègre.
e. Si $\mathbf{A}$ est quasi intègre, $\mathbb{B}(\operatorname{Frac}\mathbf{A})$ s'identifie à $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ et l'injection $\mathbf{A} \to \operatorname{Frac}(\mathbf{A})$ est un morphisme quasi intègre.

2. On a des homomorphismes naturels d'anneaux $\mathbf{A}_{\mathrm{red}} \to \mathbf{A}_{\mathrm{qi}} \to \operatorname{Frac}(\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}) \to \mathbf{A}^\bullet$. Il sont tous injectifs et l'homomorphisme naturel $\operatorname{Frac}(\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}) \to \mathbf{A}^\bullet$ est un isomorphisme.
3. Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}$ quasi intègre, le plus petit sous-anneau quasi intègre de $\mathbf{C}$ contenant $\mathbf{A}$ est égal à $\mathbf{A}[(e_a)_{a\in\mathbf{A}}]$.
4. Si l'on identifie $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ à son image dans $\mathbf{A}^\bullet$, on peut identifier $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$ au sous-anneau de $\mathbf{A}^\bullet$ engendré par $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ et par les idempotents e_x pour $x \in \mathbf{A}_{\mathrm{red}}$.

Dans la suite on suppose sans perte de généralité que $\mathbf{A}$ est réduit.

5. On se reporte au corollaire 4.24 pour la description des étages finis de la construction de $\mathbf{A}^\bullet$. Vu le point *4*, ceci nous donne une description des étages finis d'une construction possible de $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$.
Pour $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$, on a une injection $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[a_1^\bullet, \cdots, a_n^\bullet] = \mathbf{C}$.
On note e_i l'idempotent $a_i a_i^\bullet$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}[e_1, \ldots, e_n] \subseteq \mathbf{C}$, et $e_I = \prod_{i\in I}(1-e_i)\prod_{j\notin I} e_j$ pour $I \in \mathcal{P}_n$. Montrer les résultats suivants.
a. La famille $(e_I)_{I\in\mathcal{P}_n}$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{B}$ et $\langle 1-e_I\rangle_{\mathbf{B}} = \langle (e_i)_{i\in I},\ (1-e_j)_{j\notin I}\rangle_{\mathbf{B}}$.
b. $\operatorname{Ann}_{\mathbf{B}}(a_i) = \langle 1-e_i\rangle_{\mathbf{B}}$.
c. $\mathbf{A} \cap \langle e_i, \in I\rangle_{\mathbf{B}} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I)$.
d. En notant $\mathfrak{a}'_I = (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i\in I) : \prod_{j\notin I} a_j)$, on a $\mathbf{A} \cap \langle 1-e_I\rangle_{\mathbf{B}} = \mathfrak{a}'_I$ et un isomorphisme $\mathbf{B} \simeq \prod_{I\in\mathcal{P}_n} \mathbf{A}/\mathfrak{a}'_I$.
e. L'anneau $\mathbf{C}$ est un localisé élémentaire de l'anneau $\mathbf{B}$: $\mathbf{C} = \mathbf{B}_s$ avec $s \in \mathbf{B}$ régulier.

En particulier, soit $a \in \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}[e_a] \subseteq \mathbf{A}[a^\bullet]$ avec $e_a = aa^\bullet$.
Alors, $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}[e_a]}(a) = \langle 1-e_a\rangle$, $\mathbf{A}[e_a] \simeq \mathbf{A}/\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(a) \times \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$, avec $e_a \leftrightarrow (1,0)$.
Et $\mathbf{A}[a^\bullet]$ est le localisé $\mathbf{A}[e_a]_s$ avec $s = 1 - e_a + a$ régulier.
Dans la suite on note $\mathbf{A}_{[a_1,\ldots,a_n]}$ pour $\mathbf{A}[a_1a_1^\bullet, \ldots, a_na_n^\bullet]$
6. Soient $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{D}$ un morphisme avec $\mathbf{D}$ réduit, $a \in \mathbf{A}$ et $b = \varphi(a)$. On suppose que $\operatorname{Ann}_{\mathbf{D}}(b) = \langle 1-e_b\rangle_{\mathbf{D}}$ avec e_b idempotent. Montrer que l'on peut prolonger φ en un morphisme de $\mathbf{A}_{[a]} \to \mathbf{D}$ réalisant $e_a \mapsto e_b$.
Cependant, en général, pour a, $b \in \mathbf{A}$, les anneaux $\mathbf{A}_{[a,b]}$ et $(\mathbf{A}_{[a]})_{[b]}$ ne sont pas isomorphes.
7. Donner une description précise de $\mathbb{Z}_{\mathrm{qi}}$.
Expliquer pourquoi l'homomorphisme $\mathbb{Z}_{\mathrm{qi}} \to (\mathbb{Z}_{\mathrm{qi}})_{\mathrm{qi}}$ n'est pas un isomorphisme.
8. (En mathématiques classiques) Si $\mathbf{A}$ est quasi intègre, et $\imath : \mathbf{A} \to \operatorname{Frac}\mathbf{A}$ est l'injection canonique, alors $\mathsf{Spec}\,\imath$ établit une bijection entre $\mathsf{Spec}(\operatorname{Frac}\mathbf{A})$ et $\mathsf{Min}\,\mathbf{A}$.

9. (En mathématiques classiques) Pour tout anneau $\mathbf{A}$, il y a une bijection naturelle entre $\mathsf{Min}(\mathbf{A}_{\mathrm{qi}})$ et $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$.

Commentaire. Bien que $\mathbb{Z}$ soit quasi intègre, $\mathbb{Z}_{\mathrm{qi}}$ n'est pas isomorphe à $\mathbb{Z}$. Ceci se comprend en remarquant que la projection naturelle $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/15\mathbb{Z}$ n'est pas un morphisme quasi intègre. Cette situation est différente de celle de la clôture zéro-dimensionnelle réduite : cela tient à ce que le quasi inverse b d'un élément a, quand il existe, est unique et simplement défini par deux équations $ab^2 = b$ et $a^2b = a$, ce qui implique que tout homomorphisme d'anneaux respecte les quasi inverses. ■

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 2. En effet, $(a \wedge b) \wedge x = a \wedge x$ car $x \wedge a \leqslant b$.
Et $(a \wedge b) \vee x = (a \vee x) \wedge (b \vee x) = a \vee x$ car $a \vee x \leqslant b \vee x$ (puisque $a \leqslant x \vee b$).
Donc $a \wedge b = a$, i.e. $a \leqslant b$.

Exercice 3. On note $a \sim b$ pour : a et b sont associés. Montrons la forme suivante (qui est d'ailleurs plus forte si la divisibilité dans $\mathbf{A}$ n'est pas explicite) : si p irréductible, $p \mid ab$ et (pa, ab) a un pgcd d, alors $p \mid a$ ou $p \mid b$. On a $p \mid pa$ et $p \mid ab$, donc $p \mid d$. Et aussi $a \mid pa$, $a \mid ab$, donc $a \mid d$. Soit $a' = d/a \in \mathbf{A}$. Comme $d \mid pa$, on a $a' \mid p$. Mais p étant irréductible, on a soit $a' \sim 1$, soit $a' \sim p$.
Dans le premier cas, $d \sim a$, et comme $p \mid d$, on a $p \mid a$. Dans le second cas, on a $d \sim ap$, donc $ap \mid ab$, i.e $p \mid b$.
Dans $\mathbb{Z}[X^2, X^3]$, X^2 est irréductible, $X^2 \mid X^3 \cdot X^3$ mais $X^2 \not\mid X^3$, donc $X^2 \cdot X^3$ et $X^3 \cdot X^3$ n'ont pas de pgcd. A fortiori ils n'ont pas de ppcm.
Enfin : le pgcd de X^2 et X^3 dans $\mathbb{Z}[X^2, X^3]$ est 1, s'ils avaient un ppcm ce serait donc X^5, mais X^5 ne divise pas X^6.

Exercice 5. Notons $\mathrm{G}(\mathfrak{a})$ le pgcd des générateurs d'un idéal de type fini $\mathfrak{a}$. On constate facilement que c'est bien défini. Ensuite, la distributivité $a(b \wedge c) = ab \wedge ac$ se généralise sous la forme $\mathrm{G}(\mathfrak{a})\mathrm{G}(\mathfrak{b}) = \mathrm{G}(\mathfrak{ab})$ pour deux idéaux de type fini $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$.
Enfin, pour deux polynômes f, $g \in \mathbf{A}[X]$, Dedekind-Mertens dit que

$$\mathrm{c}(f)^{p+1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^p\mathrm{c}(fg) \text{ pour } p \geqslant \deg g.$$

Comme $\mathrm{G}(f) = \mathrm{G}\big(\mathrm{c}(f)\big)$ on obtient $\mathrm{G}(f)^{p+1}\mathrm{G}(g) = \mathrm{G}(f)^p\mathrm{G}(fg)$. Et puisque ce sont des éléments de l'anneau, on peut simplifier pour obtenir $\mathrm{G}(fg) = \mathrm{G}(f)\mathrm{G}(g)$.

Exercice 6. *1.* Soit $\underline{X}^\alpha = X_1^{\alpha_1} \cdots X_n^{\alpha_n} \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$, alors :

$$\varphi(\underline{X}^\alpha) = T^a \quad \text{avec} \quad a = \alpha_1 + \alpha_2 d + \cdots + \alpha_n d^{n-1}.$$

On voit ainsi que $a < d^n$. La numération en base d prouve que φ transforme la $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ constituée des $\underline{X}^\alpha$ avec $\alpha_i < d$ en la $\mathbf{A}$-base $(1, T, \ldots, T^{d^n-1})$ de $\mathbf{A}[T]_{<d^n}$.
2. Rappelons que $\mathbf{A}[X]^\times = \mathbf{A}^\times = \mathbf{A}[\underline{X}]^\times$. Ici on suppose $\mathbf{A}[X]$ factoriel.
Si $P = QR \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$ alors Q et $R \in \mathbf{A}[\underline{X}]_{<d}$, et $\varphi(Q)$ et $\varphi(R) \in \mathbf{A}[T]_{<d^n}$.
Comme $\varphi(QR) = \varphi(Q)\varphi(R)$, et que $f = \varphi(P)$ n'a qu'un nombre fini de facteurs (dans $\mathbf{A}[X]^*/\mathbf{A}^\times$), il suffit de tester pour chaque facteur $g(T)$ de $f(T)$ si $\varphi^{-1}(g)$ est un facteur de P. Ceci est possible car $\mathbf{A}$ est supposé à divisibilité explicite.

Exercice 8. On se ramène à $r = 2$. L'hypothèse M de type fini modulo $\mathfrak{a}_i$, fournit un sous-module M_i de M de type fini tel que $M = M_i + \mathfrak{a}_i M$. En reportant la valeur de M dans le membre droit, on obtient

$$M = M_i + \mathfrak{a}_i M_i + \mathfrak{a}_i^2 M = M_i + \mathfrak{a}_i^2 M.$$

En itérant, on obtient pour $k \geqslant 1$, $M = M_i + \mathfrak{a}_i^k M$. En reportant $M = M_2 + \mathfrak{a}_2^k M$ dans $M = M_1 + \mathfrak{a}_1^k M$, on obtient $M = M_1 + M_2 + (\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^k M$. Mais $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ sont de type fini et $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$, donc il existe un k tel que $(\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2)^k = \{0\}$, et par suite $M = M_1 + M_2$ est de type fini.

Exercice 9. On peut supposer $\mathbf{A}$ réduit, sous-anneau de $\mathbf{A}^\bullet$.
1. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathbf{A}$; le morphisme canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$ se factorise à travers $\mathbf{A}^\bullet$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{A} & & \\ \downarrow & \searrow & \\ \mathbf{A}^\bullet & \xrightarrow[\pi_\mathfrak{p}]{} & \mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) \end{array}$$

Le morphisme $\pi_\mathfrak{p}$ est surjectif car pour $a \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$, on a $1/a = \pi_b(a^\bullet)$ dans $\mathbf{K}$. Son noyau $\mathfrak{q} = \mathrm{Ker}\,\pi_p$ est un idéal maximal de $\mathbf{A}^\bullet$; on a alors $\mathbf{A}/\mathfrak{p} \subseteq \mathbf{K} \simeq \mathbf{A}^\bullet/\mathfrak{q}$, donc la flèche naturelle $\mathbf{A}/\mathfrak{p} \to \mathbf{A}^\bullet/\mathfrak{q}$ étant injective, $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathbf{A}$. On dispose ainsi de deux transformations

$$\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{A},\ \mathfrak{q} \mapsto \mathfrak{q} \cap \mathbf{A}, \text{ et } \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet,\ \mathfrak{p} \mapsto \mathrm{Ker}\,\pi_p,$$

qui sont réciproques l'une de l'autre. En effet, si $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet$ et $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathbf{A}$, alors $\mathbf{K} = \mathbf{A}^\bullet/\mathfrak{q}$ (car $a^\bullet = 1/a$ pour $a \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$) donc $\mathrm{Ker}\,\pi_\mathfrak{p} = \mathfrak{q}$.
2. D'après le point *1* l'homomorphisme $\mathbf{A}^\bullet \to \widetilde{\mathbf{A}}$ qui factorise l'homomorphisme naturel $\mathbf{A} \to \widetilde{\mathbf{A}}$ est injectif, car son noyau est l'intersection de tous les idéaux premiers de $\mathbf{A}^\bullet$. On identifie $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{A}^\bullet \subseteq \widetilde{\mathbf{A}}$. Le lemme 4.22 décrit le plus petit sous-anneau zéro-dimensionnel réduit de $\widetilde{\mathbf{A}}$ contenant $\mathbf{A}$. On voit qu'il s'agit bien de $\mathbf{A}^\bullet$ (d'après la construction de $\mathbf{A}^\bullet$).
Autre démonstration, laissée à la lectrice. On note $\mathbf{A}_1$ le plus petit sous-anneau zéro-dimensionnel réduit de $\widetilde{\mathbf{A}}$ contenant $\mathbf{A}$. On démontre alors que cet objet satisfait la propriété universelle voulue.

Exercice 10. *1.* La première caractérisation des filtres stricts maximaux parmi les filtres stricts est immédiate : elle revient à dire que toute tentative de faire grandir $\mathfrak{f}$ en lui rajoutant un élément x extérieur échoue, parce que le filtre engendré par $\mathfrak{f}$ et x contient 0.
Montrons ensuite qu'un filtre strict maximal parmi les filtres stricts est premier. Soient x, $y \in \mathbf{A}$ avec $x + y \in \mathfrak{f}$. On veut montrer que $x \in \mathfrak{f}$ ou $y \in \mathfrak{f}$. Si $x \notin \mathfrak{f}$, il existe $a \in \mathfrak{f}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n x = 0$, donc $a^n(x + y) = a^n y \in \mathfrak{f}$ donc $y \in \mathfrak{f}$.
Montrons maintenant que le localisé est zéro-dimensionnel, c'est-à-dire (puisque l'anneau est local) que tout élément non inversible est nilpotent. Un élément non inversible dans le localisé est un multiple d'un $x/1$ avec $x \notin \mathfrak{f}$. Il suffit de voir que $x/1$ est nilpotent dans $\mathfrak{f}^{-1}\mathbf{A}$, or il existe $a \in \mathfrak{f}$ tel que ax est nilpotent dans $\mathbf{A}$, et a est inversible dans le localisé.
Montrons pour terminer que si $\mathfrak{f}^{-1}\mathbf{A}$ est local zéro-dimensionnel et non trivial, alors $\mathfrak{f}$ est strict, maximal parmi les filtres stricts. En effet, un $x \notin \mathfrak{f}$ n'est pas

inversible, donc est nilpotent dans le localisé, ce qui signifie qu'il existe $a \in \mathfrak{f}$ tel que ax est nilpotent dans $\mathbf{A}$.
2. Notons S la partie définie par l'équation (27) page 678. Si $a \in S$ et $a \notin \mathfrak{f}$ avec $\mathfrak{f}$ un filtre maximal, on a $0 \in a^{\mathbb{N}}\mathfrak{f}$ ce qui signifie que pour un $x \in \mathfrak{f}$ et $n \in \mathbb{N}$, $xa^n = 0$, donc, puisque $a \in S$, x est nilpotent : contradiction.
Si $a \notin S$, il existe x non nilpotent tel que xa est nilpotent. Donc il existe un filtre strict contenant x. Par le lemme de Zorn il existe un filtre maximal $\mathfrak{f}$ contenant x, et a ne peut pas être dans $\mathfrak{f}$ car sinon xa et donc 0 serait dans $\mathfrak{f}$.

Exercice 11. *1.* Résulte clairement de la définition d'une algèbre de Boole comme anneau où tous les éléments sont idempotents, à condition de vérifier que l'objet construit est bien une algèbre de Boole, ce qui n'offre pas de difficulté. On notera que $\mathbf{B}$ est isomorphe à

$$\mathbb{F}_2[x_1] \otimes_{\mathbb{F}_2} \cdots \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathbb{F}_2[x_n],$$

qui est la somme directe de n algèbres de Boole librement engendrées par un seul générateur dans la catégorie des algèbres de Boole. En effet, la somme directe de deux algèbres de Boole $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}'$ est l'algèbre de Boole $\mathbf{B} \otimes_{\mathbb{F}_2} \mathbf{B}'$.
2. La $\mathbb{F}_2$-base monomiale de $\mathbf{B}$ est (m_I) avec $m_I = \prod_{i\in I} x_i$. Elle est de cardinal 2^n, donc $\mathbf{B}$ est de cardinal 2^{2^n}. On définit e_I par $e_I = m_I \prod_{j\notin I}(1 + x_j)$; on vérifie facilement que (e_I) est un système fondamental d'idempotents orthogonaux, que $m_I e_J = e_J$ si $I \subseteq J$, et 0 sinon.
On a la même expression $e_I = \sum_{J \mid J\supseteq I} m_J$ et $m_I = \sum_{J \mid J\supseteq I} e_J$ (ce qui confirme que (e_I) est une $\mathbb{F}_2$-base de $\mathbf{B}$).
Par rapport à la description donnée dans le cours, $x_1^{\varepsilon_1} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ correspond à l'élément suivant de $\mathrm{P_f}\big(\mathrm{P_f}(E)\big)$: $\{\{\, x_i \mid \varepsilon_i = 1 \,\}\}$.

Exercice 12. Le treillis distributif librement engendré par $\emptyset$ est le treillis $\mathbf{2}$.
Le treillis distributif librement engendré par $\{a\}$ est $\{0, a, 1\}$.
Le treillis distributif librement engendré par un ensemble $\{a, b\}$ $(a \neq b)$ est formé par : 0, $a \wedge b$, a, b, $a \vee b$, 1.
Le treillis distributif librement engendré par un ensemble $\{a, b, c\}$ d'exactement trois éléments est formé par :

$$0,\ 1,\ a,\ b,\ c,\ a \vee b,\ a \vee c,\ b \vee c,\ a \vee b \vee c,\ a \wedge b,\ a \wedge c,\ b \wedge c,\ a \wedge b \wedge c,$$
$$a \wedge (b \vee c),\ b \wedge (a \vee c),\ c \wedge (a \vee b),\ (a \vee b) \wedge (a \vee c),\ (a \vee b) \wedge (b \vee c),$$
$$(a \vee c) \wedge (b \vee c),\ (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

Exercice 13. *1.* Par définition d'une section initiale l'intersection et la réunion de deux sections initiales en est une autre.
Donc dans $E^\star$: $S_1 \wedge S_2 = S_1 \cup S_2$, $S_1 \vee S_2 = S_1 \cap S_2$, $\emptyset = 1_{E^\star}$ et $E = 0_{E^\star}$.
2. Il revient au même de se donner $\alpha \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ ou l'idéal premier $\operatorname{Ker}\alpha$. Ceci conduit à ordonner l'ensemble des idéaux premiers de $\mathbf{T}$ par la relation $\supseteq$. En effet, si $\alpha, \beta : \mathbf{T} \to \{0, 1\}$ sont deux morphismes, on a l'équivalence

$$\alpha \leqslant \beta \iff \operatorname{Ker}\alpha \supseteq \operatorname{Ker}\beta.$$

3. On a :

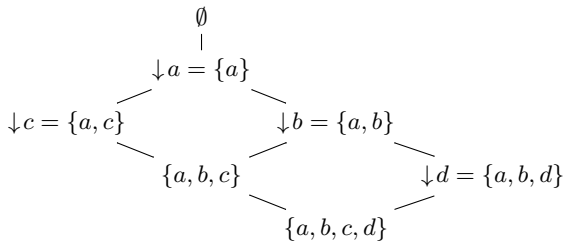
$$\operatorname{Ker}\nu_E(x) = \{\, S \in E^\star \mid x \in S \,\} = \{\, S \in E^\star \mid \downarrow x \subseteq S \,\} = \{\, S \in E^\star \mid S \leqslant \downarrow x \,\},$$

i.e. $\operatorname{Ker}\nu_E(x) = \mathcal{I}_{E^\star}(\downarrow x)$. On a bien les équivalences :

$$x \leqslant y \iff \downarrow x \subseteq \downarrow y \iff \downarrow y \leqslant \downarrow x \iff \mathcal{I}(\downarrow y) \subseteq \mathcal{I}(\downarrow x) \iff \mathcal{I}(\downarrow x) \leqslant \mathcal{I}(\downarrow y)$$

Par ailleurs, dans $E^\star$: $S_1 \wedge S_2 \leqslant {\downarrow}x \Rightarrow (S_1 \leqslant {\downarrow}x)$ ou $(S_2 \leqslant {\downarrow}x)$ (car la première inégalité signifie ${\downarrow}x \subseteq S_1 \cup S_2$, i.e. $x \in S_1 \cup S_2$). Et comme ${\downarrow}x \neq 1_{E^*} = \emptyset$, ${\downarrow}x$ engendre un idéal premier. Réciproquement, soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $E^\star$. Étant fini, il est principal : $\mathfrak{p} = \mathcal{I}_{E^\star}(S)$ avec $S \neq 1_{E^\star}$, i.e. S non vide. Il faut montrer que S est de la forme ${\downarrow}x$. Si $S = \{x_1, \ldots, x_n\}$, on a $S = ({\downarrow}x_1) \cup \cdots \cup ({\downarrow}x_n)$, i.e. $({\downarrow}x_1) \wedge \cdots \wedge ({\downarrow}x_n) = S$. Comme S engendre un idéal premier, il existe un i tel que ${\downarrow}x_i \leqslant S$, i.e. $S \subseteq {\downarrow}x_i$, puis $S = {\downarrow}x_i$.

4. On détermine $E^\star$ en remarquant que toute section initiale est une réunion de parties ${\downarrow}x$. Le dessin du treillis $E^\star$ est le suivant :

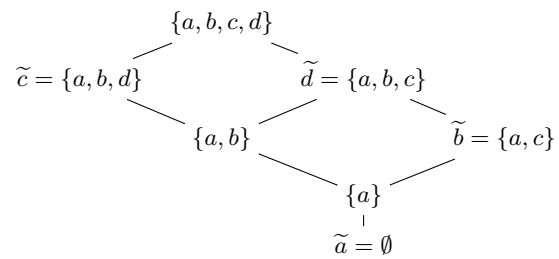


Si E est totalement ordonné, alors $E^\star = \{ {\downarrow}x \mid x \in E \} \cup \{\emptyset\}$ est aussi totalement ordonné et $\#E^\star = 1 + \#E$. Si $\mathbf{T}$ est un ensemble fini totalement ordonné, alors $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T} = \big\{\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(a) \mid a \in \mathbf{T} \setminus \{1_{\mathbf{T}}\}\big\}$, et $\#\,\mathsf{Spec}\,\mathbf{T} = \#\mathbf{T} - 1$. Si E est ordonné par la relation d'égalité, $E^\star = \mathcal{P}(E)$ ordonné par $\supseteq$. Quant à $\mathsf{Spec}(E^\star)$, c'est l'ensemble $\mathcal{I}_{\mathcal{P}(E)}(\{x\})$ avec $x \in E$ (qui est bien isomorphe à E).

5. Le lecteur vérifiera qu'en posant, pour $a \in \mathbf{T}$, $\widehat{a} = \{ \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{T} \mid a \in \mathfrak{p} \}$, on obtient une section initiale, que toute section initiale de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est de cette forme, et enfin que $a \leqslant b \iff \widehat{a} \leqslant \widehat{b}$.

6. On prend maintenant comme structure d'ordre $\subseteq$ sur $E^\star$ et sur $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$.

Alors $S_1 \wedge S_2 = S_1 \cap S_2$, $S_1 \vee S_2 = S_1 \cup S_2$, $\emptyset = 0_{E^\star}$, $E = 1_{E^\star}$. Pour $x \in E$, on pose $\widetilde{x} = E \setminus {\uparrow}x = \{ y \in E \mid y \not\geqslant x \}$: cet élément de $E^\star$ vérifie, pour $S \in E^\star$, l'équivalence $x \notin S \iff S \subseteq \widetilde{x}$. On a $\widetilde{x} \neq 1_{E^\star} = E$, et $\widetilde{x}$ engendre un idéal premier du treillis $E^\star$: $S_1 \wedge S_2 \leqslant \widetilde{x} \Rightarrow S_1 \leqslant \widetilde{x}$ ou $S_2 \leqslant \widetilde{x}$ (en effet, l'hypothèse est ${\uparrow}x \subseteq (E \setminus S_1) \cup (E \setminus S_2)$, donc par exemple $x \notin S_1$, i.e. $S_1 \subseteq \widetilde{x}$). On a l'équivalence : $x \leqslant y \iff \widetilde{x} \subseteq \widetilde{y}$. On démontre que tout idéal premier de $E^\star$ est de la forme $\widetilde{x}$, donc l'ensemble ordonné E est isomorphe, via $x \mapsto \mathcal{I}_{E^\star}(\widetilde{x})$, à l'ensemble des idéaux premiers de $E^\star$, ordonné par inclusion.



Exercice 14. Puisque $\langle a, b\rangle$ est inversible on a s, t, u, v avec $sa = ub$, $tb = va$ et $s + t = 1$.

Puisque m est ppcm de a et b on peut écrire

$$m = ab' = ba' \text{ et } ab/m = g = b/b' = a/a'.$$

Ainsi $sa = mx = ab'x$ et $tb = m = ba'y$, qui donnent $s = b'x$ et $t = a'y$.
Donc $b'x + a'y = 1$, $bx + ay = gb'x + ga'y = g$ et par suite $\langle a, b\rangle = \langle g\rangle$.

Exercice 15. *(Un anneau factoriel avec seulement un nombre fini d'éléments irréductibles)* On note $(p_i)_{i\in I}$ la famille finie des éléments irréductibles distincts (à association près).
On doit montrer que $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout. Il suffit pour cela de montrer que si a et $b \in \mathbf{A}^*$ ont pour pgcd 1, alors $\langle a, b\rangle = \langle 1\rangle = \mathbf{A}$. On écrit

$$a = \textstyle\prod_{i\in A} p_i^{\alpha_i},\ b = \prod_{j\in B} p_i^{\beta_j}, \text{avec les } \alpha_i \text{ et } \beta_j > 0 \text{ et } A \cap B = \emptyset.$$

Soit $C = I \setminus (A \cup B)$ et $c = \prod_{k\in C} p_k$. On montre que $a + bc \in \mathbf{A}^\times$.
En effet, pour $i \in A$, p_i divise a, donc il ne peut pas diviser $a + bc$, sinon il diviserait $bc = (a + bc) - a$. De même, pour $j \in B \cup C$, p_j ne peut pas diviser $a + bc$, sinon il diviserait $a = (a + bc) - bc$. Ainsi $a + bc$ n'est divisible par aucun élément irréductible.

Exercice 16. *(Une intersection intéressante)*
On considère l'homomorphisme d'évaluation

$$\varphi : \mathbf{k}[z, u] \to \mathbf{k}[z, x + yz],\ z \mapsto z,\ u \mapsto x + yz.$$

Il est surjectif par construction. Il est injectif parce que, pour $f = f(z, u)$, en évaluant $\varphi(f)$ dans $\mathbf{k}[x, y, z]$ on obtient $\varphi(f)(x, 0, z) = f(z, x)$. C'est donc bien un isomorphisme.
Dans la suite on peut donc poser $u = x + yz$, avec $\mathbf{k}[z, x + yz] = \mathbf{k}[z, u]$ où z et u jouent le rôle d'indéterminées distinctes.
Par ailleurs on remarque que $\mathbf{k}[z, u][y] = \mathbf{k}[x, y, z]$. Comme $\mathbf{k}[z, u]$ est un anneau à pgcd, ceci implique que deux éléments de $\mathbf{k}[z, u]$ sont de pgcd 1 dans $\mathbf{k}[z, u]$ si, et seulement si, ils sont de pgcd 1 dans $\mathbf{k}[x, y, z]$.
Soit maintenant un élément arbitraire $h \in \mathbf{A}$ que l'on écrit sous forme d'une fraction irréductible $f(z, u)/g(z, u)$ dans $\mathbf{k}(z, u)$, et sous forme d'une fraction a/b ($a \in \mathbf{k}[x, y, z]$, $b \in \mathbf{k}[x, y]$) en tant qu'élément de $\mathbf{k}(x, y)[z]$. Cette dernière fraction peut elle-même être écrite sous forme irréductible, c'est-à-dire que le pgcd de a et b dans $\mathbf{k}[x, y, z]$ est égal à 1. Par unicité de l'écriture d'une fraction sous forme réduite, on a donc une constante $\gamma \in \mathbf{k}^*$ telle que $f(z, u) = \gamma a(x, y, z)$ et $g(z, u) = \gamma b(x, y)$.
Il nous reste à montrer que le dénominateur $g(z, x + yz)$ est une constante. En faisant $z = 0$ dans l'égalité $g(z, x + yz) = \gamma b(x, y)$ on obtient

$$g(0, x) = \gamma b(x, y) = c(x).$$

Enfin, en faisant $(z, y) = (1, -x)$ dans l'égalité $g(z, x + yz) = c(x)$, on obtient $c(x) = g(1, 0)$.

Exercice 17. *(Algèbre de Boole engendrée par un treillis de parties détachables)*
On considère un sous-treillis $\mathbf{T}$ de l'algèbre de Boole des parties détachables d'un ensemble E, algèbre que nous notons B_E. Il est clair que les combinaisons booléennes d'éléments de $\mathbf{T}$ sont des éléments de B_E et qu'elles forment une sous-algèbre de Boole $\mathbf{B}$ de B_E. Cela implique que l'on a un morphisme d'algèbre de

Boole $\alpha : \mathbb{B}o(\mathbf{T}) \to \mathbf{B}$ qui factorise le morphisme d'inclusion $\mathbf{T} \to \mathbf{B}$ (morphisme de treillis distributifs).
Vue la construction de $\mathbf{B}$, le morphisme α est surjectif et il reste à démontrer qu'il est injectif. Pour cela, on considère des éléments $A_1, \ldots, A_n, C_1, \ldots, C_m$ de $\mathbf{T}$ et deux combinaisons booléennes formelles A et C, respectivement des A_i et des C_j. On évalue A et C dans $\mathbf{B}$ et dans $\mathbb{B}o(\mathbf{T})$. On suppose que $\varphi(A) = \varphi(C)$ dans $\mathbf{B}$ et l'on doit montrer que $\psi(A) = \psi(C)$ dans $\mathbb{B}o(\mathbf{T})$. En fait, en utilisant la différence symétrique, on doit montrer que si $\varphi(A \oplus C) = \emptyset$, alors $\psi(A \oplus C) = 0_{\mathbb{B}o(\mathbf{T})}$.
On note que toute combinaison booléenne formelle se réécrit (en suivant les axiomes des algèbres de Boole) en une forme normale disjonctive. Une telle forme normale (pour $A \oplus C$) est évaluée nulle dans une algèbre de Boole B si, et seulement si, chacun des disjoncts est évalué nul. Considérons par exemple un disjonct

$$A_1 \wedge \overline{A_2} \wedge C_1 \wedge C_2 \wedge \overline{C_3} \wedge \overline{C_4} = (A_1 \wedge C_1 \wedge C_2) \wedge \overline{A_2 \vee C_3 \vee C_4}.$$

Il s'évalue en 0 via une évaluation β dans B si, et seulement si,

$$\beta(A_1) \wedge_B \beta(C_1) \wedge_B \beta(C_2) \leqslant_B \beta(A_2) \vee_B \beta(C_3) \vee_B \beta(C_4).$$

Or si cela est satisfait pour l'évaluation φ dans $\mathbf{B}$, par définition de $\mathbf{T}$, cela est satisfait dans $\mathbf{T}$, et donc aussi dans $\mathbb{B}o(\mathbf{T})$.
Ceci termine la démonstration.

Exercice 18. *(Quotients de treillis distributifs)*
1(‡). (Voir [Grätzer, Theorem 141])
Supposons $x \leqslant (y \vee b)$ et $(x \wedge a) \leqslant y$. Pour tout treillis quotient $(\widetilde{\mathbf{T}}, \widetilde{\leqslant}, \widetilde{\wedge}, \widetilde{\vee})$ dans lequel on a $a \mathrel{\widetilde{=}} b$, on obtient $x, a \mathrel{\widetilde{\vdash}} y$ et $x \mathrel{\widetilde{\vdash}} y, a$ qui donnent par coupure $x \mathrel{\widetilde{\vdash}} y$, i.e. $x \mathrel{\widetilde{\leqslant}} y$.
Or la relation cherchée $\cdot \preccurlyeq \cdot$ qui définit $\mathbf{T}'$ est la relation la moins grossière vérifiant d'une part $(\bullet) : b \preccurlyeq a$, et d'autre part les conditions suivantes définissant une relation de préordre qui par passage quotient préserve la structure de treillis distributif.

$$\begin{array}{lrcl}
(\alpha) & x \leqslant y & \Longrightarrow & x \preccurlyeq y \\
(\beta) & x \preccurlyeq y,\ y \preccurlyeq z & \Longrightarrow & x \preccurlyeq z \\
(\gamma) & x \preccurlyeq y,\ x \preccurlyeq z & \Longrightarrow & x \preccurlyeq y \wedge z \\
(\delta) & y \preccurlyeq x,\ z \preccurlyeq x & \Longrightarrow & y \vee z \preccurlyeq x
\end{array}$$

Vue la remarque initiale il suffit donc de vérifier que la relation en (x, y) définie par « $x \leqslant (y \vee b)$ et $(x \wedge a) \leqslant y$ » satisfait bien les conditions ci-dessus.

- $(\bullet)$ Clair.
- (α) Clair.
- (β) Les conditions $x \leqslant (y \vee b)$ et $(x \wedge a) \leqslant y$ sont clairement équivalentes à

  $$(x \vee b) \leqslant (y \vee b) \ \text{ et } \ (x \wedge a) \leqslant (y \wedge a).$$

  La transitivité est donc immédiate.

(γ) On suppose $x \leqslant (y \vee b)$, $x \leqslant (z \vee b)$, $(x \wedge a) \leqslant y$, $(x \wedge a) \leqslant z$. Les deux premières inégalités donnent

$$x \leqslant (y \vee b) \wedge (z \vee b) = (y \wedge z) \vee b.$$

Les deux dernières donnent $(x \wedge a) \leqslant (y \wedge z)$

(δ) On suppose $y \leqslant (x \vee b)$, $z \leqslant (x \vee b)$, $(y \wedge a) \leqslant x$, $(z \wedge a) \leqslant x$. Les deux premières inégalités donnent $(y \vee z) \leqslant (x \vee b)$. Les deux dernières donnent

$$(y \vee z) \wedge a = (y \wedge a) \vee (z \wedge a) \leqslant x.$$

1(†). Vue la remarque initiale dans la démonstration du point (β), (†) résulte immédiatement de (‡).
2. Dans (‡) on remplace a et b respectivement par $a \wedge b$ et a.

Exercice 19. *(Quotients de relations implicatives)*
Considérons le treillis distributif $\mathbf{T}$ défini par $(S, \vdash)$. Définissons dans $\mathbf{T}$ les éléments $a = \bigwedge_{i=1}^{m} a_i$ et $b = \bigvee_{j=1}^{n} b_j$. La relation implicative $\vdash'$ donnée dans l'énoncé définit le treillis quotient $\mathbf{T}'$ de $\mathbf{T}$ que l'on obtient en forçant $a \leqslant b$. D'après le point *2* de l'exercice 18 on aura donc $c_1, \ldots, c_q \vdash' d$ si, et seulement si, dans $\mathbf{T}$ on a

$$c \wedge a \wedge b \leqslant d \quad \text{et} \quad c \leqslant a \vee d,$$

où $c = \bigwedge_{k=1}^{q} c_k$. La première inégalité se traduit dans $(S, \vdash)$ par

$$\begin{array}{rcl} c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m, b_1 & \vdash & d \\ \text{et} & \vdots & \\ c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m, b_n & \vdash & d \end{array}$$

La deuxième inégalité signifie

$$c \leqslant a_1 \vee d \text{ et } \ldots \text{ et } c \leqslant a_m \vee d.$$

Si l'implication ($*$) de l'énoncé a lieu, on déduit de la première inégalité

$$c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m \vdash d$$

et par coupures successives avec les $c_1, \ldots, c_q \vdash a_k, d$ on obtient $c_1, \ldots, c_q \vdash d$. Ainsi, quand l'implication ($*$) a lieu, les relations $c_1, \ldots, c_q \vdash d$ et $c_1, \ldots, c_q \vdash' d$ son équivalentes.
Inversement, si ces relations sont équivalentes c'est que l'on déduit la relation

$$c_1, \ldots, c_q \vdash d$$

des relations

$$\begin{array}{rcl} c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m, b_1 & \vdash & d \\ \text{et} & \vdots & \\ c_1, \ldots, c_q, a_1, \ldots, a_m, b_n & \vdash & d \\ c_1, \ldots, c_q & \vdash & a_1, d \\ \text{et} & \vdots & \\ c_1, \ldots, c_q & \vdash & a_m, d \end{array}$$

Lorsque l'on remplace $c_1, \dots, c_q$ (cette suite est, dans l'énoncé, arbitraire) par la suite $c_1, \dots, c_q, a_1, \dots, a_m$, on voit que le deuxième groupe de relations est automatiquement vérifié, et que donc l'implication $(*)$ de l'énoncé est bien vérifiée.

Problème 3. Le premier point est laissé à la lectrice. Notons $fg = \sum_k c_k X^k$.

2. On a facilement $u(fg) \leqslant u(f) \wedge u(g)$.
En effet, $c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j$, donc $u(c_k) \leqslant \bigvee_{i+j=k} u(a_i b_j) \leqslant \bigvee_i u(a_i) = u(f)$ (on a utilisé $u(ab) \leqslant u(a)$).
Si l'on dispose de Gauss-Joyal, alors $u(a_i b_j) \leqslant u(a_i) \wedge u(b_j) \leqslant u(f) \wedge u(g) = u(fg)$.
Réciproquement, si l'on sait prouver $u(a_i b_j) \leqslant u(fg)$ pour tous i, j, alors
$\bigvee_{i,j} u(a_i b_j) \leqslant u(fg)$, i.e. par distributivité $\big(\bigvee_i u(a_i)\big) \wedge \big(\bigvee_j u(b_j)\big) \leqslant u(fg)$,
i.e. $u(f) \wedge u(g) \leqslant u(fg)$.

3. Si $\mathbf{A}$ est intègre, il en est de même de $\mathbf{A}[X]$.

4. Montrons par récurrence descendante sur $i_0 + j_0$ que $u(a_{i_0} b_{j_0}) \leqslant u(fg)$. C'est vrai si i_0 ou j_0 est grand car alors $a_{i_0} b_{j_0} = 0$. On écrit la définition du produit de deux polynômes :

$$a_{i_0} b_{j_0} = c_{i_0+j_0} - \sum_{\substack{i+j=i_0+j_0 \\ i>i_0}} a_i b_j - \sum_{\substack{i+j=i_0+j_0 \\ j>j_0}} a_i b_j.$$

On applique u en utilisant d'une part $u(\alpha+\beta+\cdots) \leqslant u(\alpha) \vee u(\beta) \vee \dots$ et d'autre part $u(\alpha\beta) \leqslant u(\alpha)$ pour obtenir

$$(\star) \ : \ u(a_{i_0} b_{j_0}) \leqslant u(c_{i_0+j_0}) \vee \bigvee_{i>i_0} u(a_i) \vee \bigvee_{j>j_0} u(b_j).$$

On dispose ainsi d'une inégalité $x \leqslant y$ que l'on écrit $x \leqslant x \wedge y$. Autrement dit, dans $(\star)$, on réinjecte $u(a_{i_0} b_{j_0})$ dans le membre droit, ce qui donne, en utilisant la distributivité :

$$u(a_{i_0} b_{j_0}) \leqslant u(c_{i_0+j_0}) \vee \bigvee_{i>i_0} \big(u(a_i) \wedge u(a_{i_0} b_{j_0})\big) \vee \bigvee_{j>j_0} \big(u(b_j) \wedge u(a_{i_0} b_{j_0})\big).$$

En utilisant $u(a_i) \wedge u(a_{i_0} b_{j_0}) \leqslant u(a_i) \wedge u(b_{j_0})$ et $u(b_j) \wedge u(a_{i_0} b_{j_0}) \leqslant u(b_j) \wedge u(a_{i_0})$, et (par définition) $u(c_{i_0+j_0}) \leqslant u(fg)$, on majore $u(a_{i_0} b_{j_0})$ par :

$$u(fg) \vee \bigvee_{i>i_0} u(a_i b_{j_0}) \vee \bigvee_{j>j_0} u(a_{i_0} b_j).$$

Par récurrence sur i_0, j_0, $u(a_i b_{j_0}) \leqslant u(fg)$, $u(a_{i_0} b_j) \leqslant u(fg)$.
D'où $u(a_{i_0} b_{j_0}) \leqslant u(fg)$.

5. Dans ce cas : $a_i b_j \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c_k, k = 0, \dots)$, ce qui est le lemme de Gauss-Joyal usuel.

Problème 4. *(Clôture quasi intègre d'un anneau commutatif)*
Remarque préalable : si dans un anneau $\mathbf{A}$, $\mathrm{Ann}(a) = \langle e'_a \rangle$ avec e'_a idempotent, alors e'_a est l'unique e' tel que :

$$e'a = 0, \quad e' + a \text{ est régulier} \quad \text{et} \quad e' \text{ est idempotent.}$$

En effet, $e' = e' e'_a$ (car $e'a = 0$) et $(e'+a)e' = (e'+a)e'_a$ $(= e')$ d'où $e' = e'_a$.

1. Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ quasi intègres et un morphisme quasi intègre $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

1a. Si $a \in \mathbf{A}$ est régulier, $e_a = 1$ donc $e_{\varphi(a)} = 1$ donc $\varphi(a)$ est régulier. Inversement, soit $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un homomorphisme d'anneaux qui transforme tout élément régulier en un élément régulier. Soit $a \in \mathbf{A}$, $b = \psi(a)$ et $f = \psi(1 - e_a)$.
Alors $fb = \psi\big((1-e_a)a\big) = 0$, $f + b = \psi(1 - e_a + a)$ est régulier et $f^2 = f$, et donc $f = 1 - e_b$.

1b. Supposons $\varphi(x) = 0$, alors $e_{\varphi(x)} = 0$, i.e. $\varphi(e_x) = 0$. Donc si $\varphi|_{\mathbb{B}(\mathbf{A})}$ est injectif, on obtient $e_x = 0$, i.e. $x = 0$.

1c. On considère l'unique homomorphisme $\rho : \mathbb{Z} \to \prod_{n>0} \mathbb{Z}/\langle 2^n \rangle$. Alors ρ est

injectif mais $\rho(2)$ n'est pas régulier.
1d. L'homomorphisme conserve les quasi inverses, donc aussi les idempotents associés car $e_a = aa^\bullet$ si $a^\bullet$ est le quasi inverse de a.
1e. Résulte immédiatement du fait IV-8.6.
2. Puisque $\mathbf{A}_{\rm qi}$ est réduit, il y a un unique homomorphisme d'anneau $\mathbf{A}_{\rm red} \to \mathbf{A}_{\rm qi}$ qui factorise les deux homomorphismes canoniques $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\rm red}$ et $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\rm qi}$. Puisque $\mathbf{A}^\bullet$ est quasi intègre, il y a un unique morphisme quasi intègre $\mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathbf{A}^\bullet$ qui factorise les deux homomorphismes canoniques $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\rm qi}$ et $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^\bullet$. Puisque le morphisme $\mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathbf{A}^\bullet$ transforme un élément régulier en un élément régulier, et qu'un élément régulier dans un anneau zéro-dimensionnel (réduit ou pas) est inversible, il existe un unique homomorphisme $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi}) \to \mathbf{A}^\bullet$ qui factorise les deux homomorphismes canoniques $\mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi})$ et $\mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathbf{A}^\bullet$.
De la même manière, pour tout homomorphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B}$ zéro-dimensionnel réduit, on obtient d'abord un unique morphisme quasi intègre $\mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathbf{B}$ (qui factorise ce qu'il faut), puis un unique morphisme $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi}) \to \mathbf{B}$ qui factorise les deux homomorphismes $\mathbf{A} \to \mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi})$ et $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$.
Autrement dit, puisque $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi})$ est zéro-dimensionnel réduit, il résout le problème universel de la clôture zéro-dimensionnelle réduite pour $\mathbf{A}$. En conséquence l'homomorphisme $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi}) \to \mathbf{A}^\bullet$ que l'on a construit est un isomorphisme.
3. Ce point est recopié du lemme 4.22 qui concerne les anneaux zéro-dimensionnels réduits : le lecteur pourra aussi à très peu près recopier la démonstration.
4. On note tout d'abord que l'homomorphisme naturel $\mathbf{A}_{\rm red} \to \mathbf{A}_{\rm qi}$ est injectif parce que l'homomorphisme $\mathbf{A}_{\rm red} \to \mathbf{A}^\bullet$ est injectif et qu'il y a factorisation. On peut donc identifier $\mathbf{A}_{\rm red}$ à un sous-anneau de $\mathbf{A}_{\rm qi}$, qui s'identifie lui-même à un sous-anneau de $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi})$ que l'on identifie à $\mathbf{A}^\bullet$. Dans ce cadre $\mathbf{A}_{\rm qi}$ contient nécessairement $\mathbf{A}_{\rm red}$ ainsi que les éléments $e_x = xx^\bullet$ pour les $x \in \mathbf{A}_{\rm red}$ puisque le morphisme $\mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathbf{A}^\bullet$ est quasi intègre et injectif.
Notons $\mathbf{B}$ le sous anneau de $\mathbf{A}^\bullet$ engendré par $\mathbf{A}_{\rm red}$ et les idempotents $(e_x)_{x\in\mathbf{A}_{\rm red}}$. Il reste à voir que l'inclusion $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}_{\rm qi}$ est une égalité.
Il est clair que $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}) = \mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\rm qi})$. D'autre part, comme $\mathbf{B}$ est quasi intègre, l'injection $\mathbf{A}_{\rm red} \to \mathbf{B}$ fournit un (unique) morphisme quasi intègre $\varphi : \mathbf{A}_{\rm qi} \to \mathbf{B}$ tel que $\varphi(a) = a$ pour tout $a \in \mathbf{A}_{\rm red}$. Puisque le morphisme est quasi intègre, on en déduit que que $\varphi(e_a) = e_a$ pour tout $a \in \mathbf{A}_{\rm red}$, puis que $\varphi(b) = b$ pour tout $b \in \mathbf{B}$.
Soit $x \in \mathbf{A}_{\rm qi}$; on veut montrer que $x \in \mathbf{B}$; comme $x \in \mathrm{Frac}(\mathbf{B})$, il existe $b \in \mathbf{B}$ régulier tel que $bx \in \mathbf{B}$ donc $\varphi(bx) = bx$ c'est-à-dire $b\varphi(x) = bx$; comme b est régulier dans $\mathbf{B}$, il l'est dans $\mathrm{Frac}(\mathbf{B})$, a fortiori dans $\mathbf{A}_{\rm qi}$, donc $x = \varphi(x) \in \mathbf{B}$.
5a et *5b.* Facile.
5c. Puisque $a_j = a_j e_j$, on a, pour $j \in I$, $a_j \in \langle e_i, i \in I\rangle_{\mathbf{B}} = \langle e\rangle_{\mathbf{B}}$ avec e l'idempotent $1 - \prod_{i\in I}(1 - e_i)$. Mais dans un anneau réduit, tout idempotent engendre un idéal radical :

$$b^m \in \langle e\rangle \Rightarrow b^m(1-e) = 0 \Rightarrow b(1-e) = 0 \Rightarrow b = be \in \langle e\rangle\,.$$

Donc $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I) \subseteq \langle e_i, i \in I\rangle_{\mathbf{B}}$.
Montrons maintenant que $\mathbf{A} \cap \langle e_i, \in I\rangle_{\mathbf{C}} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I)$. Soit $x \in \mathbf{A} \cap \langle e_i, \in I\rangle_{\mathbf{C}}$; en revenant à la définition initiale de $\mathbf{C}$, on a $x \in \langle a_i T_i, i \in I\rangle_{\mathbf{A}[\underline{T}]} + \mathfrak{c}$. Travaillons sur l'anneau réduit $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I)$; on a alors

$$\overline{x} \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}'[\underline{T}]}(a_k T_k^2 - T_k, a_k^2 T_k - a_k, k \in [\![1..n]\!]).$$

Puisque $\mathbf{A}' \to \mathbf{A}'[\overline{a}_1^\bullet, \dots, \overline{a}_n^\bullet]$ est injectif, on a $\overline{x} = 0$ i.e. $x \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I)$.
5d. Notons π le produit $\prod_{j \notin I} a_j$. Soit $x \in \mathbf{A} \cap \langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{B}}$; puisque $\pi(1 - e_j) = 0$ pour $j \notin I$, on a $\pi x \in \langle e_i, i \in I \rangle_{\mathbf{B}}$, donc, d'après *5c)*, $\pi x \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I)$, i.e. $x \in \mathfrak{a}'_I = (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i, i \in I) : \pi)$.
Réciproquement, soit $x \in \mathfrak{a}'_I$; on écrit $x = \pi' x + (1 - \pi')x$ avec $\pi' = \prod_{j \notin I} e_j$. On a $1 - \pi' \in \langle 1 - e_j, j \notin I \rangle$. Quant à $\pi' x$, on remarque que dans $\mathbf{C}$, $\langle e_j \rangle_{\mathbf{C}} = \langle a_j \rangle_{\mathbf{C}}$, donc $\pi' x \in \langle \pi x \rangle_{\mathbf{C}} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{C}}(a_i, i \in I) \subseteq \langle e_i, i \in I \rangle_{\mathbf{C}}$.
Bilan : $x \in \langle (e_i)_{i \in I}, (1 - e_j)_{j \notin I} \rangle_{\mathbf{C}} = \langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{C}}$.
Mais $\mathbf{A} \cap \langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{C}} = \mathbf{A} \cap \langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{B}}$, donc $x \in \langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{B}}$.
Enfin, $\mathbf{B}$ est isomorphe au produit des $\mathbf{B}\big/\langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{B}\big/\langle 1 - e_I \rangle_{\mathbf{B}} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{a}'_I$.
5e. Prendre $s = \sum_I e_I \prod_{j \notin I} a_j = \sum_I \prod_{i \in I} (1 - e_i) \prod_{j \notin I} a_j$: s est l'unique élément de $\mathbf{B}$ qui vaut $\prod_{j \notin I} a_j$ sur la composante $e_I = 1$.
6. Dans l'isomorphisme $\mathbf{A}[e_a] \simeq \mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a) \times \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$, on a $e_a = (1, 0)$ et donc $(\overline{x}, \overline{y}) = xe_a + y(1 - e_a)$. On considère alors l'application

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to \mathbf{D},\ (x, y) \mapsto \varphi(x)e_b + \varphi(y)(1 - e_b).$$

C'est un morphisme d'anneaux et puisque $\mathbf{D}$ est réduit, elle passe au quotient modulo $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a) \times \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$.
Comparons maintenant $\mathbf{A}_{[a,b]}$ et $(\mathbf{A}_{[a]})_{[b]}$. On trouve :

$$\mathbf{A}_{[a,b]} \simeq \mathbf{A}/(0 : ab) \times \mathbf{A}/(\mathrm{D}(b) : a) \times \mathbf{A}/(\mathrm{D}(a) : b) \times \mathbf{A}/\mathrm{D}(a, b)\ ,$$

$$(\mathbf{A}_{[a]})_{[b]} \simeq \mathbf{A}/(0 : ab) \times \mathbf{A}\big/\mathrm{D}\big((0 : a) + \langle b \rangle\big) \times \mathbf{A}/(\mathrm{D}(a) : b) \times \mathbf{A}/\mathrm{D}(a, b)\ .$$

Enfin, on note que $\mathrm{D}\big((0 : a) + \langle b \rangle\big)$ est contenu dans $(\mathrm{D}(b) : a)$ mais que l'inclusion peut être stricte. Prenons par exemple $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$, $a = 2p$, $b = 2q$ où p et q sont deux premiers impairs disctints. On utilise $(x : y) = x/\gcd(x, y)$ pour x, $y \in \mathbb{Z}$.
Alors $\mathbb{Z}_{[a,b]} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, mais $(\mathbb{Z}_{[a]})_{[b]} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2q\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
Dans le premier anneau, $\mathrm{Ann}(a)$ est engendré par $(0, 0, 1, 1)$. Dans le second (le premier anneau en est un quotient), $\mathrm{Ann}(a)$ engendré par l'idempotent $(0, q, 1, 1)$.
8. On rappelle (exercice 10) qu'un idéal premier $\mathfrak{p}$ d'un anneau $\mathbf{A}$ est minimal si, et seulement si, pour tout $x \in \mathfrak{p}$, il existe $s \in \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$ tel que $sx^n = 0$ pour un certain n (si $\mathbf{A}$ est réduit, on peut prendre $n = 1$).
D'abord, un idéal premier minimal de $\mathbf{A}$ reste un idéal premier strict dans $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ (ce fait n'utilise pas $\mathbf{A}$ quasi intègre), i.e. $\mathfrak{p} \cap \mathrm{Reg}(\mathbf{A}) = \emptyset$: si $x \in \mathfrak{p}$, il existe $s \notin \mathfrak{p}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $sx^n = 0$, ce qui prouve que $x \notin \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$.
Réciproquement, pour $\mathfrak{q}$ idéal premier de $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$, prouvons que $\mathfrak{p} = \mathfrak{q} \cap \mathbf{A}$ est un idéal premier minimal de $\mathbf{A}$. Soit $x \in \mathfrak{p}$; alors $x + 1 - e_x$ est régulier dans $\mathbf{A}$, donc inversible dans $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$, donc $1 - e_x \notin \mathfrak{p}$. Alors $x(1 - e_x) = xe_x(1 - e_x) = 0$: on a trouvé $s = 1 - e_x \notin \mathfrak{p}$ tel que $sx = 0$.
9. D'après l'exercice 9, l'injection $\mathbf{A} \to \mathbf{A}^\bullet$ induit une bijection $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$; mais $\mathbf{A}^\bullet = \mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\mathrm{qi}})$ et $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$ est quasi intègre.
Donc, d'après le point *8* appliqué à $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$, $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet$ s'identifie à $\mathsf{Min}(\mathbf{A}_{\mathrm{qi}})$, d'où la bijection naturelle entre $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ et $\mathsf{Min}(\mathbf{A}_{\mathrm{qi}})$.

Commentaires bibliographiques

Des livres de référence pour l'étude des treillis sont [Birkhoff], [Grätzer] et [Johnstone]. Dans [Johnstone] l'accent est mis essentiellement sur les

treillis distributifs, qui sont les objets qui nous intéressent au premier chef.
Ce livre présente la théorie des locales. La notion de *locale* est une généralisation de celle d'espace topologique. La structure d'une locale est donnée par le treillis distributif de ses ouverts, mais les ouverts ne sont plus nécessairement des ensembles de points. C'est la raison pour laquelle une locale est parfois appelée un *espace topologique sans points* [112, Johnstone].
L'auteur essaie en général de donner des preuves constructives et signale explicitement les théorèmes dont la preuve utilise l'axiome du choix.
En algèbre abstraite, les espaces spectraux sont omniprésents, au premier rang desquels on compte le spectre de Zariski d'un anneau commutatif. Du point de vue constructif ce sont des locales bien particulières qui « manquent de points ». Nous présenterons rapidement cette notion dans la section 1 du chapitre XIII consacré à la dimension de Krull.
Une démonstration élégante du théorème 3.16 (si $\mathbf{A}$ un anneau à pgcd intègre il en va de même pour $\mathbf{A}[X]$) se trouve dans [MRR, th. IV.4.7].
L'origine des relations implicatives se trouve dans le calcul des séquents de Gentzen, qui mit le premier l'accent sur la coupure (la règle (T)). Le lien avec les treillis distributifs a été mis en valeur dans [29, 50, Coquand&al.].
Le théorème fondamental des relations implicatives 5.3 page 671 se trouve dans [29].
On trouve la terminologie de *treillis implicatif* dans [Curry], celle d'*algèbre de Heyting* dans [Johnstone].
Un ouvrage de base pour théorie des groupes réticulés et anneaux réticulés (non nécessairement commutatifs) est [Bigard, Keimel & Wolfenstein]. Nous avons dit [8] qu'une idée directrice dans la théorie des groupes réticulés est qu'un groupe réticulé se comporte dans les calculs comme un produit de groupes totalement ordonnés. Cela se traduit en mathématiques classiques par le théorème de représentation qui affirme que tout groupe réticulé (abélien) est isomorphe à un sous-groupe réticulé d'un produit de groupes totalement ordonnés (théorème 4.1.8 dans le livre cité).
Les groupes réticulés qui sont des $\mathbb{Q}$-espaces vectoriels constituent en quelque sorte la version purement algébrique de la théorie des espaces de Riesz. Tout bon livre sur les espaces de Riesz commence par développer les propriétés purement algébriques de ces espaces, qui sont décalquées (avec des preuves très voisines, sinon identiques) de la théorie des groupes réticulés (abéliens). Voir par exemple [Zaanen].
Dans les exercices de Bourbaki (Algèbre commutative, Diviseurs) un anneau de Bézout intègre est appelé *anneau bezoutien*, un anneau à pgcd intègre est appelé un *anneau pseudo-bezoutien*, et un domaine de Prüfer est appelé un *anneau pruferien*.

8. Dans l'introduction et dans la remarque qui suit le principe de recouvrement fermé 2.10.

Chapitre XII

Anneaux de Prüfer et de Dedekind

Sommaire

Introduction

Les définitions usuelles d'anneau de Dedekind se prêtent mal à un traitement algorithmique.

Premièrement, la notion de noethérianité est délicate (du point de vue algorithmique). Deuxièmement les questions de factorisation réclament en général des hypothèses extrêmement fortes. Par exemple, même si $\mathbf{K}$ est un corps discret tout à fait explicite, il n'y a pas de méthode générale (valable sur tous les corps discrets) pour factoriser les polynômes de $\mathbf{K}[X]$.

Ainsi, un aspect essentiel de la théorie des anneaux de Dedekind, à savoir que la clôture intégrale d'un anneau de Dedekind dans une extension finie de son corps de fractions reste un anneau de Dedekind, ne fonctionne plus en toute généralité (d'un point de vue algorithmique) si l'on exige la factorisation complète des idéaux (voir par exemple le traitement de cette question dans [MRR]).

Par ailleurs, même si une factorisation totale est en théorie faisable (dans les anneaux d'entiers des corps de nombres par exemple), on se heurte très rapidement à des problèmes d'une complexité rédhibitoire comme celui de factoriser le discriminant (tâche en pratique impossible si celui-ci a plusieurs centaines de chiffres). Aussi Lenstra et Buchmann, [25], ont-ils proposé de travailler dans les anneaux d'entiers sans disposer d'une $\mathbb{Z}$-base.

Un fait algorithmique important est qu'il est toujours facile d'obtenir une *factorisation partielle* pour une famille d'entiers naturels, c'est-à-dire une décomposition de chacun de ces entiers en produits de facteurs pris dans une famille d'entiers premiers entre eux deux à deux (voir [15, Bernstein], et [16, Bernstein] pour une mise en œuvre avec les idéaux de corps de nombres, voir aussi le problème II-2 page 71).

Un but de ce chapitre est de montrer la validité générale d'un tel point de vue et de proposer des outils dans ce cadre.

Un rôle crucial et simplificateur dans la théorie est joué par les anneaux arithmétiques (conformément à une intuition de Gian Carlo Rota [166]), qui sont les anneaux dans lesquels le treillis des idéaux est distributif, et par les *matrices de localisation principale*, qui sont les matrices qui explicitent la machinerie calculatoire des idéaux de type fini localement principaux, de manière essentiellement équivalente à ce que Dedekind [55] estimait être une propriété fondamentale des anneaux d'entiers dans les corps de nombres (voir [4, Avigad] et le point $3'$. de notre proposition 1.1).

La volonté de repousser le plus tard possible la mise en place des hypothèses noethériennes nous a également incité à développer un traitement constructif

de nombreux points importants de la théorie dans un cadre plus simple et moins rigide que celui des anneaux de Dedekind. C'est le contexte des anneaux qui ont les deux propriétés suivantes :

— les idéaux de type fini sont projectifs (ceci caractérise ce que nous appelons un *anneau de Prüfer cohérent*),

— la dimension de Krull est inférieure ou égale à 1.

Comme la lectrice pourra le constater, les preuves ne sont pas rendues plus compliquées, bien au contraire, par cet affaiblissement des hypothèses.

De même, nous avons été amenés à étudier les anneaux de Prüfer cohérents «à factorisation partielle» (dans le cas local, ce sont les anneaux de valuation dont le groupe de valuation est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Q}$). Nous pensons que ces anneaux constituent le cadre de travail naturel suggéré par Buchman et Lenstra [25].

Enfin pour ce qui concerne les anneaux de Dedekind, nous nous sommes libérés de l'hypothèse usuelle d'intégrité (car elle se conserve difficilement d'un point de vue algorithmique par extension algébrique) et nous avons laissé au second plan la factorisation totale des idéaux de type fini (pour la même raison) au profit du seul caractère noethérien. La noethérianité implique la factorisation partielle des familles d'idéaux de type fini, qui elle-même implique la dimension $\leqslant 1$ sous forme constructive.

1. Anneaux arithmétiques

Rappelons qu'un anneau arithmétique est un anneau dont les idéaux de type fini sont localement principaux (voir la section VIII-4). Nous commençons par quelques précisions concernant les idéaux localement principaux dans un anneau arbitraire.

Idéaux localement principaux, matrice de localisation principale

Nous reprenons le théorème V-7.3 (énoncé pour les modules localement monogènes) dans le cadre des idéaux localement principaux.

1.1. Proposition. (Idéaux localement principaux)
Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'idéal $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ est localement principal.*
2. *Il existe n éléments comaximaux s_i de $\mathbf{A}$ tels que pour chaque i, après localisation en s_i, $\mathfrak{a}$ devient principal, engendré par x_i.*
3. *Il existe une matrice de localisation principale pour $(x_1, \ldots, x_n)$,*

c'est-à-dire une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ *qui vérifie :*

$$\begin{cases} \sum a_{ii} = 1 \\ a_{\ell j} x_i = a_{\ell i} x_j \qquad \forall i, j, \ell \in [\![1..n]\!] \end{cases} \tag{1}$$

NB. Le deuxième point se lit comme suit : pour chaque ligne ℓ*, les mineurs d'ordre 2 de la matrice* $\begin{bmatrix} a_{\ell 1} & \cdots & a_{\ell n} \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ *sont nuls.*

4. $\bigwedge^2_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = 0$.
5. $\mathcal{F}_1(\mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$.

Dans le cas où l'un des x_k *est régulier l'existence de la matrice* A *dans le point 3 a la même signification que le point suivant.*

3′. *Il existe* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *dans* $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$ *tels que* $\sum_i \gamma_i x_i = 1$ *et chacun des* $\gamma_i x_j$ *est dans* $\mathbf{A}$ (formulation de Dedekind).

▷ La seule chose nouvelle est la formulation 3′. Si par exemple $x_1 \in \operatorname{Reg}(\mathbf{A})$ et si l'on dispose de A, on pose $\gamma_i = a_{i1}/x_1$. Réciproquement, si l'on dispose des γ_i, on pose $a_{ij} = \gamma_i x_j$. □

La proposition suivante reprend et précise la proposition V-7.4. Les résultats pourraient être obtenus de manière plus directe, en utilisant la formulation de Dedekind, lorsque l'un des x_k est régulier.

1.2. Proposition. *Soit* $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ *un idéal localement principal de* $\mathbf{A}$ *et* $A = (a_{ij})$ *une matrice de localisation principale pour* $(x_1, \ldots, x_n)$*. Nous avons les résultats suivants.*

1. $[\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]\, A = [\, x_1 \ \cdots \ x_n \,]$.
2. *Chaque* x_i *annule* $\mathcal{D}_2(A)$ *et* $A^2 - A$.
3. *Soit* $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/a_{ii}]$*, on a* $\mathfrak{a} =_{\mathbf{A}_i} \langle x_i \rangle$.
4. $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \langle a_{1j}, \ldots, a_{nj} \rangle = \langle x_j \rangle$.
5. *Plus généralement, si* $a = \sum \alpha_i x_i$ *et* ${}^{\mathrm{t}}[\, y_1 \ \cdots \ y_n \,] = A \ {}^{\mathrm{t}}[\, \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n \,]$*, alors*
$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \langle y_1, \ldots, y_n \rangle = \langle a \rangle .$$
En outre, si $\operatorname{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$*, la matrice* ${}^{\mathrm{t}}A$ *est une matrice de localisation principale pour* $(y_1, \ldots, y_n)$.
6. *En particulier, si* $\sum \alpha_i x_i = 0$ *et* ${}^{\mathrm{t}}[\, y_1 \ \cdots \ y_n \,] = A \ {}^{\mathrm{t}}[\, \alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n \,]$*, alors*
$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \langle y_1, \ldots, y_n \rangle = 0$$
7. *On considère la forme linéaire* $\underline{x} : (\alpha_i) \mapsto \sum_i \alpha_i x_i$ *associée à* $(x_1, \ldots, x_n)$*, on note* $\mathfrak{N} = \operatorname{Ann} \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ *et* $\mathfrak{N}^{(n)}$ *le produit cartésien*
$$\{\, (\nu_1, \ldots, \nu_n) \mid \nu_i \in \mathfrak{N},\ i \in [\![1..n]\!] \,\} \subseteq \mathbf{A}^n.$$
Alors $\operatorname{Ker} \underline{x} = \operatorname{Im}(\mathrm{I}_n - A) + \mathfrak{N}^{(n)}$.

8. Pour $i \in [\![1..n-1]\!]$ l'intersection $\langle x_1,\dots,x_i\rangle \cap \langle x_{i+1},\dots,x_n\rangle$ est l'idéal de type fini engendré par les n coefficients du vecteur ligne

$$[\,x_1\ \cdots\ x_i\ 0\ \cdots\ 0\,](\mathrm{I}_n - A) = -[\,0\ \cdots\ 0\ x_{i+1}\ \cdots\ x_n\,](\mathrm{I}_n - A).$$

▷ Le point *3* est clair, les points *4* et *6* sont des cas particuliers de la première partie du point *5*.
Les points *1*, *2* et la première partie du point *5* ont été montrés pour les matrices de localisation monogène.
5. Il reste à montrer que, lorsque $\mathrm{Ann}(\mathfrak{a}) = 0$, ${}^{\mathrm{t}}A$ est une matrice de localisation principale pour $(y_1,\dots,y_n)$. En effet, d'une part $\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}A) = 1$, et d'autre part, puisque $\mathfrak{a}\mathcal{D}_2(A) = 0$, on a $\mathcal{D}_2(A) = 0$, ou encore $A_i \wedge A_j = 0$, A_i étant la colonne i de A. Comme le vecteur $y := {}^{\mathrm{t}}[\,y_1\ \cdots\ y_n\,]$ est dans $\mathrm{Im}\,A$, on a aussi $y \wedge A_j = 0$, ce qui traduit que ${}^{\mathrm{t}}A$ est une matrice de localisation principale pour $(y_1,\dots,y_n)$.
7. L'inclusion $\mathrm{Ker}\,\underline{x} \subseteq \mathrm{Im}(\mathrm{I}_n - A) + \mathfrak{N}^{(n)}$ résulte du point *6* et l'inclusion réciproque du *1*.
8. Résulte de *7* en remarquant que se donner un élément a de l'idéal $\mathfrak{b} = \langle x_1,\dots,x_i\rangle \cap \langle x_{i+1},\dots,x_n\rangle$ revient à se donner un élément $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathrm{Ker}\,\underline{x}$: $a = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_i x_i = -\alpha_{i+1}x_{i+1} - \cdots - \alpha_n x_n$.
Ainsi, $\mathfrak{b}$ est engendré par les coefficients de $[\,x_1\ \cdots\ x_i\ 0\ \cdots\ 0\,](\mathrm{I}_n - A)$. □

1.3. Corollaire. *Soit $\mathfrak{a} = \langle x_1,\dots,x_n\rangle$ un idéal de type fini de* **A**.

1. *Si $\mathfrak{a}$ est localement principal, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{c}$ contenu dans $\mathfrak{a}$, il existe un idéal de type fini $\mathfrak{b}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$.*
2. *Inversement, si $n = 2$ et s'il existe un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\langle x_1\rangle = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, alors $\mathfrak{a}$ est localement principal.*
3. *L'idéal $\mathfrak{a}$ est un module projectif de rang constant 1 si, et seulement si, il est localement principal et fidèle. Dans ce cas, si A est une matrice de localisation principale pour $(x_1,\dots,x_n)$, c'est une matrice de projection de rang 1 et $\mathfrak{a} \simeq \mathrm{Im}\,A$.*
4. *L'idéal $\mathfrak{a}$ est inversible si, et seulement si, il est localement principal et contient un élément régulier.*

▷ *1*, *3*, *4*. Voir le lemme V-7.7, qui donne des résultats un peu plus généraux. Ces points résultent aussi de la proposition précédente, points *5* et *7*.
2. Dans $\mathfrak{b}$ on doit avoir u_1 et u_2 tels que d'une part $u_1x_1 + u_2x_2 = x_1$, donc $(1-u_1)x_1 = u_2x_2$, et d'autre part $u_1x_2 \in \langle x_1\rangle$. Lorsque l'on inverse l'élément u_1, x_1 engendre $\mathfrak{a}$, et lorsque l'on inverse $1-u_1$, c'est x_2 qui engendre $\mathfrak{a}$. □

Premières propriétés

Rappelons qu'un anneau est cohérent si, et seulement si, d'une part l'intersection de deux idéaux de type fini est un idéal de type fini, et d'autre part l'annulateur de tout élément est de type fini (théorème II-3.4). Par conséquent, en utilisant le point *8* de la proposition 1.2, nous obtenons :

1.4. Fait. *Dans un anneau arithmétique l'intersection de deux idéaux de type fini est un idéal de type fini. Un anneau arithmétique est cohérent si, et seulement si, l'annulateur de tout élément est de type fini.*

Tout quotient et tout localisé d'un anneau arithmétique est un anneau arithmétique.
Dans un anneau fortement discret, la relation de divisibilité est explicite. On a la réciproque (remarquable) pour les anneaux arithmétiques.

1.5. Proposition. *Un anneau arithmétique est fortement discret si, et seulement si, la relation de divisibilité est explicite. De manière plus précise, dans un anneau quelconque, si un idéal $\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ est localement principal et si $A=(a_{ij})$ est une matrice de localisation principale pour $(b_1,\dots,b_n)$, on a l'équivalence*

$$c\in\langle b_1,\dots,b_n\rangle \iff a_{jj}c\in\langle b_j\rangle \text{ pour tout } j.$$

En particulier, on a $1\in\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ si, et seulement si, pour tout j, b_j divise a_{jj}.

▷ Si $a_{jj}c=u_jb_j$, alors $c=\sum_j u_jb_j$. Réciproquement, si $c\in\langle b_1,\dots,b_n\rangle$, alors pour chaque j :

$$a_{jj}c\in\langle a_{1j},\dots,a_{nj}\rangle\,\langle b_1,\dots,b_n\rangle=\langle b_j\rangle\,.$$

□

Dans le théorème qui suit nous donnons quelques caractérisations possibles des anneaux arithmétiques. La caractérisation la plus simple des anneaux arithmétiques est sans doute celle donnée dans le point *1b*. Puisqu'un idéal $\langle x,y\rangle$ est localement principal si, et seulement si, il y a une matrice de localisation principale pour (x,y), la condition *1b* signifie :

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbf{A}\ \ \exists u,a,b\in\mathbf{A},\qquad ux=ay,\ (1-u)y=bx,}$$

ce qui est aussi exactement ce que dit le point *2c*.

1.6. Théorème. (Caractérisations des anneaux arithmétiques)
Pour un anneau $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- *1a.* $\mathbf{A}$ *est arithmétique (tout idéal de type fini est localement principal).*
- *1b. Tout idéal* $\mathfrak{a}=\langle x_1,x_2\rangle$ *est localement principal.*
- *2a. Pour tous idéaux de type fini* $\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{a}$*, il existe un idéal de type fini* $\mathfrak{c}$ *tel que* $\mathfrak{ac}=\mathfrak{b}$.
- *2b. Pour tout idéal* $\mathfrak{a}=\langle x_1,x_2\rangle$*, il existe un idéal de type fini* $\mathfrak{c}$ *tel que* $\mathfrak{ac}=\langle x_1\rangle$.

2c. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ *le système linéaire* $BX = C$ *suivant admet une solution :*

$$[\, B \mid C \,] = \left[\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & 0 & x_1 \\ x_2 & 0 & x_1 & 0 \end{array}\right] \tag{2}$$

2d. $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ *il existe* $u \in \mathbf{A}$ *tel que*

$$\langle x_1 \rangle \cap \langle x_2 \rangle = \langle (1-u)x_1, ux_2 \rangle .$$

3. Pour tous idéaux de type fini $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$*, la suite exacte courte ci-après est scindée :*

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \xrightarrow{\delta} \mathbf{A}/\mathfrak{a} \times \mathbf{A}/\mathfrak{b} \xrightarrow{\sigma} \mathbf{A}/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \longrightarrow 0$$

où $\delta : \overline{x}_{\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b}} \mapsto (\overline{x}_{\mathfrak{a}}, \overline{x}_{\mathfrak{b}})$ *et* $\sigma : (\overline{y}_{\mathfrak{a}}, \overline{z}_{\mathfrak{b}}) \mapsto \overline{(y-z)}_{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

4. Pour tous idéaux de type fini $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$, $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) = \langle 1 \rangle$.

5. (Théorème des restes chinois, forme arithmétique)
Si $(\mathfrak{b}_k)_{k=1,\dots,n}$ *est une famille finie d'idéaux de* $\mathbf{A}$ *et* $(x_k)_{k=1,\dots,n}$ *est une famille d'éléments de* $\mathbf{A}$ *vérifiant* $x_k \equiv x_\ell \mod \mathfrak{b}_k + \mathfrak{b}_\ell$ *pour tous* k, ℓ, *alors il existe un* $x \in \mathbf{A}$ *tel que* $x \equiv x_k \mod \mathfrak{b}_k$ *pour tout* k.

6. Le treillis des idéaux de $\mathbf{A}$ *est un treillis distributif.*

D *1b* $\Rightarrow$ *1a.* Si l'on a un idéal de type fini avec n générateurs, des localisations successives (chaque fois en des éléments comaximaux) le rendent principal.
Considérons le point *2a* Soit $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ et $\mathfrak{b} = \langle y_1, \dots, y_m \rangle$. Si $\mathfrak{c}$ existe, pour chaque $j = 1, \dots, m$ il existe des éléments $a_{i,j} \in \mathfrak{c}$ tels que

$$\textstyle\sum_i a_{i,j} x_i = y_j .$$

Par ailleurs, pour chaque i, i', j on doit avoir $a_{i,j} x_{i'} \in \mathfrak{b}$, ce qui s'exprime par l'existence d'éléments $b_{i,i',j,j'} \in \mathbf{A}$ vérifiant

$$\textstyle\sum_{j'} b_{i,i',j,j'} y_{j'} = a_{i,j} x_{i'} .$$

Réciproquement, si l'on peut trouver des $a_{i,j}$ et $b_{i,i',j,j'} \in \mathbf{A}$ vérifiant les équations linéaires ci-dessus (dans lesquelles les x_i et y_j sont des coefficients), alors l'idéal $\mathfrak{c}$ engendré par les $a_{i,j}$ vérifie bien $\mathfrak{a}\mathfrak{c} = \mathfrak{b}$. Ainsi, trouver $\mathfrak{c}$ revient à résoudre un système linéaire.
Il s'ensuit que pour prouver *1a* $\Rightarrow$ *2a* on peut utiliser des localisations convenables : les deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ deviennent principaux, l'un étant inclus dans l'autre, auquel cas $\mathfrak{c}$ est évident.
On vérifie facilement que les propriétés *1b*, *2b*, *2c* et *2d* sont équivalentes (en tenant compte de la remarque précédente pour *1b*).
Pour montrer que *1a* implique *3*, *4*, *5* et *6*, on note que chacune des propriétés considérées peut s'interpréter comme l'existence d'une solution d'un certain système linéaire, et que cette solution est évidente lorsque les idéaux qui interviennent sont principaux et totalement ordonnés pour l'inclusion.

Il reste à voir les réciproques.
3 $\Rightarrow$ *2c* et *4* $\Rightarrow$ *2c*. On considère dans *3* ou *4* le cas où $\mathfrak{a} = \langle x_1 \rangle$ et $\mathfrak{b} = \langle x_2 \rangle$.
5 $\Rightarrow$ *1b*. Soient $a, b \in \mathbf{A}$. Posons

$$c = a + b,\ \mathfrak{b}_1 = \langle a \rangle,\ \mathfrak{b}_2 = \langle b \rangle,\ \mathfrak{b}_3 = \langle c \rangle,\ x_1 = c,\ x_2 = a \text{ et } x_3 = b.$$

On a $\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_3 = \mathfrak{b}_3 + \mathfrak{b}_2 = \langle a, b \rangle$.
Les congruences $x_i \equiv x_k \mod \mathfrak{b}_i + \mathfrak{b}_k$ sont vérifiées, donc il existe u, v, w dans $\mathbf{A}$ tels que

$$c + ua = a + vb = b + wc,$$

d'où

$$wb = (1 + u - w)a,\ (1 - w)a = (1 + w - v)b.$$

Donc l'idéal $\langle a, b \rangle$ est localement principal.
6 $\Rightarrow$ *1b*. Prenons la propriété de distributivité $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$, avec $\mathfrak{a} = \langle x \rangle$, $\mathfrak{b} = \langle y \rangle$ et $\mathfrak{c} = \langle x + y \rangle$. On a donc $y \in \langle x \rangle + (\langle y \rangle \cap \langle x + y \rangle)$, c'est-à-dire qu'il existe a, b, c tels que $y = ax + by$, $by = c(x + y)$.
D'où $cx = (b - c)y$ et $(1 - c)y = (a + c)x$. Ainsi, $\langle x, y \rangle$ est localement principal. □

L'isomorphisme $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \oplus \mathbf{A}/\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \oplus \mathbf{A}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ qui résulte du point *3* du théorème précédent admet la généralisation suivante.

1.7. Corollaire. *Soit* $(\mathfrak{a}_i)_{i \in [\![1..n]\!]}$ *une famille d'idéaux de type fini d'un anneau arithmétique* $\mathbf{A}$*. Posons*

$$\mathfrak{b}_1 = \textstyle\sum_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k,\ \mathfrak{b}_2 = \sum_{1 \leqslant j < k \leqslant n} (\mathfrak{a}_j \cap \mathfrak{a}_k),\ \ldots$$
$$\mathfrak{b}_r = \textstyle\sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_r \leqslant n} (\mathfrak{a}_{j_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_{j_r}),\ \ldots,\ \mathfrak{b}_n = \bigcap_{k=1}^{n} \mathfrak{a}_k.$$

Alors on a $\mathfrak{b}_n \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{b}_1$ *avec un isomorphisme*

$$\bigoplus\nolimits_{k=1}^{n} \mathbf{A}/\mathfrak{a}_k \ \simeq\ \bigoplus\nolimits_{k=1}^{n} \mathbf{A}/\mathfrak{b}_k.$$

En rapprochant ce résultat du théorème IV-5.1 on obtient une classification complète des $\mathbf{A}$-modules de ce type. On peut aussi comparer avec le fait XI-2.12 *18.*

1.8. Corollaire. *Soit* $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre fidèlement plate. Si* $\mathbf{B}$ *est un anneau arithmétique (resp. un anneau de Prüfer, un anneau de Prüfer cohérent), alors* $\mathbf{A}$ *également.*

D Puisque $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, si $\mathbf{B}$ est réduit, $\mathbf{A}$ également. Le théorème VIII-6.7 *3* implique que si $\mathbf{B}$ est cohérent, $\mathbf{A}$ également. Il reste à montrer le résultat pour « anneau arithmétique ».
On considère x, $y \in \mathbf{A}$. On doit montrer qu'il existe u, a, $b \in \mathbf{A}$ tels que $ux = ay$ et $(1 - u)y = bx$. Il s'agit en fait d'un système linéaire à coefficients dans $\mathbf{A}$, avec les inconnues (u, a, b). Or ce système admet une solution dans $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}$ est fidèlement plate sur $\mathbf{A}$, donc il admet une solution dans $\mathbf{A}$. □

Structure multiplicative des idéaux de type fini

Rappelons que nous notons $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ le monoïde multiplicatif des idéaux fractionnaires de type fini d'un anneau arbitraire $\mathbf{A}$ (voir page 583).
A priori une inclusion $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ dans $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ n'implique pas l'existence d'un idéal fractionnaire $\mathfrak{c} \in \operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ tel que $\mathfrak{bc} = \mathfrak{a}$. Mais ceci est vérifié dans le cas des anneaux arithmétiques.
Pour $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ dans $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$, on note $\boxed{\mathfrak{a} \div \mathfrak{b} = \{\, x \in \operatorname{Frac}\mathbf{A} \mid x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \,\}}$.

1.9. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un* anneau cohérent.

1. $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ *est un treillis pour la relation d'inclusion, le sup est donné par la somme et le inf par l'intersection.*
2. $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ *est un treillis distributif si, et seulement si, l'anneau est arithmétique.*
3. *Au sujet des éléments inversibles de* $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$.
   a. *Si* $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = \mathbf{A}$ *dans* $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$, *on a* $\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \div \mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{a}(\mathfrak{c} \div \mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$ *pour tout* $\mathfrak{c} \in \operatorname{Ifr}\mathbf{A}$. *En particulier* $\mathbf{A} \div \mathfrak{a}$ *est l'inverse de* $\mathfrak{a}$.
   b. *Un idéal fractionnaire* $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ *(où* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini de* $\mathbf{A}$*) est inversible dans* $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ *si, et seulement si,* $\mathfrak{a}$ *est un idéal inversible.*
   c. *Si* $\mathfrak{a}(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) = \mathbf{A}$, $\mathfrak{a}$ *est inversible dans* $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$.

Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ *avec* $b \in \mathfrak{b} \cap \operatorname{Reg}\mathbf{A}$. *On suppose que* $\mathbf{A}$ *est intégralement clos dans* $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$.

4. *On a* $\mathfrak{a} \div \mathfrak{b} \in \operatorname{Ifr}\mathbf{A}$.
5. *Si en outre* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}$, *alors on a* $\mathfrak{a} \div \mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{b}$.

D Tout élément de $\operatorname{Ifr}\mathbf{A}$ s'écrit sous la forme $\frac{\mathfrak{a}}{a}$ pour un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ et un $a \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$. En outre $\frac{\mathfrak{a}}{a}\,\frac{\mathfrak{b}}{b} = \frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}{ab}$. Enfin l'élément neutre du monoïde est $\mathbf{A} = \langle 1 \rangle$. Ceci montre les points *1*, *2* et *3b*.
3a. On a $\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c} = \mathfrak{c}$ donc $\mathfrak{a}'\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c} \div \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c} = \mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}(\mathfrak{c} \div \mathfrak{a}) = \mathfrak{c}$.
Si $x \in \mathfrak{c} \div \mathfrak{a}$, i.e. $x\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{c}$, alors $x\mathbf{A} = x\mathfrak{a}\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}'\mathfrak{c}$, donc $x \in \mathfrak{a}'\mathfrak{c}$.
3c. Avec $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle \subseteq \mathbf{A}$, supposons que $\mathfrak{a}(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) = \mathbf{A}$.
Il existe $x_1, \ldots, x_k \in (\mathbf{A} \div \mathfrak{a})$ tels que $\sum_i x_i a_i = 1$ et $x_i a_j \in \mathfrak{a}$ pour tous i, j.
On peut écrire les x_i sous la forme $\frac{b_i}{c}$ avec un même dénominateur c. On obtient $\sum_i a_i b_i = c$ et $a_i b_j \in \langle c \rangle$ pour tous i, j.
Ainsi en posant $\mathfrak{b} = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$ on obtient $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b} = \langle c \rangle$.
5. L'inclusion $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \div \mathfrak{b}$ est immédiate. Réciproquement, si un $x \in \mathbf{K}$ vérifie $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}$, nous devons montrer que $x \in \mathbf{A}$.
Comme $\mathbf{A}$ est intégralement clos dans $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$, on applique le point *3* du fait III-8.2, avec $M = \mathfrak{b}$ et $\mathbf{B} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$, car $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$.
4. Résulte du point *5* car on se ramène au cas traité dans le point *5*, et dans un anneau cohérent, le transporteur $\mathfrak{a} : \mathfrak{b}$ est de type fini si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ le sont.□

Le théorème suivant dit que la structure multiplicative du monoïde des idéaux inversibles d'un anneau arithmétique a toutes les propriétés souhaitables.
Rappelons que d'après le lemme V-7.7, un idéal de type fini est projectif de rang constant 1 si, et seulement si, il est localement principal et fidèle.

1.10. Théorème. *Dans un anneau arithmétique les idéaux de type fini fidèles forment un monoïde multiplicatif qui est la partie positive d'un groupe réticulé. Les lois de treillis sont* $\mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ *et* $\mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.
Les idéaux inversibles (c'est-à-dire les idéaux de type fini qui contiennent un élément régulier) forment la partie positive d'un sous-groupe réticulé du précédent.

▷ Cela résulte du corollaire 1.3, du théorème 1.6 et du théorème XI-3.1.□

En fait les deux groupes sont confondus dès que $\mathbf{A}$ est quasi intègre, ou plus généralement lorsque les modules projectifs de rang constant 1 sur $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$ sont libres (théorème X-5.8, point *2*).

2. Éléments entiers et localisation

La définition suivante généralise la définition III-3.2 dans deux directions.

2.1. Définition. Soit $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ un homomorphisme entre anneaux commutatifs et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$.

1. Un élément $x \in \mathbf{C}$ est dit *entier* sur $\mathfrak{a}$ s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que
$$x^k = \varphi(a_1)x^{k-1} + \varphi(a_2)x^{k-2} + \cdots + \varphi(a_k) \qquad (*)$$
avec les $a_h \in \mathfrak{a}^h$.
Dans le cas où $\mathbf{C} = \mathbf{A}$, cela équivaut à $\big(\mathfrak{a} + \langle x\rangle\big)^k = \mathfrak{a}\big(\mathfrak{a} + \langle x\rangle\big)^{k-1}$.
On dit aussi que l'égalité $(*)$ est *une relation de dépendance intégrale* de x sur $\mathfrak{a}$.
2. Un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ est dit *intégralement clos* dans $\mathbf{C}$ si tout élément de $\mathbf{C}$ entier sur $\mathfrak{a}$ est dans $\varphi(\mathfrak{a})$.
3. L'anneau $\mathbf{A}$ est dit *normal* si tout idéal principal de $\mathbf{A}$ est intégralement clos dans $\mathbf{A}$.

Dans tous les cas, un anneau normal est intégralement clos dans son anneau total de fractions. On a la réciproque partielle suivante.

2.2. Fait. *Un anneau quasi intègre est normal si, et seulement si, il est intégralement clos dans son anneau total de fractions.*

▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

Il est clair que tout anneau normal est réduit (car un nilpotent est entier sur $\langle 0\rangle$). On a même un peu mieux.

2.3. Lemme. *Tout anneau normal est localement sans diviseur de zéro. Plus précisément, on a pour tout anneau* $\mathbf{A}$ *les implications 1 ⇒ 2 ⇒ 3.*

1. *Tout idéal principal est intégralement clos (i.e.* $\mathbf{A}$ *est normal).*
2. *Pour tous* $x, y \in \mathbf{A}$*, si* $x^2 \in \langle xy \rangle$*, alors* $x \in \langle y \rangle$ *.*
3. *Tout idéal principal est plat (i.e.* $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro).*

D Notons que l'idéal 0 est intégralement clos si, et seulement si, l'anneau est réduit. On a évidemment *1 ⇒ 2*, et *2* implique que l'anneau est réduit. Supposons *2* et soient x, $y \in \mathbf{A}$ tels que $xy = 0$. On a $x^2 = x(x + y)$ donc $x \in \langle x + y \rangle$, e.g., $x = a(x+y)$. Alors $(1-a)x = ay$, $ay^2 = (1-a)xy = 0$. Et puisque l'anneau est réduit, $ay = 0$, puis $(1 - a)x = 0$. □

2.4. Fait. *Soient* x *un élément et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$*. Pour les propriétés qui suivent on a 2 ⇒ 1, et 1 ⇒ 2 si* $\mathfrak{a}$ *est fidèle et de type fini.*

1. *L'élément* x *est entier sur l'idéal* $\mathfrak{a}$*.*
2. *Il existe un* $\mathbf{A}$*-module fidèle* M *de type fini tel que* $xM \subseteq \mathfrak{a}M$*.*

D (Comparer à la démonstration du fait III-8.2.)
2 ⇒ 1. On considère une matrice A à coefficients dans $\mathfrak{a}$ qui représente $\mu_{M,x}$ (la multiplication par x dans M) sur un système générateur fini de M. Si f est le polynôme caractéristique de A, on a par le théorème de Cayley-Hamilton $0 = f(\mu_{M,x}) = \mu_{M,f(x)}$, et puisque le module est fidèle, $f(x) = 0$.
1 ⇒ 2. Si l'on a une relation de dépendance intégrale de degré k de x sur $\mathfrak{a}$ on prend $M = (\mathfrak{a} + \langle x \rangle)^{k-1}$. □

Soit un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ et une indéterminée t, la sous-algèbre $\mathbf{A}[\mathfrak{a}t]$ de $\mathbf{A}[t]$, c'est-à-dire précisément

$$\mathbf{A}[\mathfrak{a}t] = \mathbf{A} \oplus \mathfrak{a}t \oplus \mathfrak{a}^2t^2 \oplus \cdots$$

est appelée l'*algèbre de Rees de l'idéal* $\mathfrak{a}$.
La démonstration des deux faits suivants est laissée à la lectrice.

2.5. Fait. *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$*.*

1. *Pour* $x \in \mathbf{A}$*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*
   a. *L'élément* x *est entier sur l'idéal* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathbf{A}$*.*
   b. *Le polynôme* xt *est entier sur la sous-algèbre* $\mathbf{A}[\mathfrak{a}t]$ *de* $\mathbf{A}[t]$*.*
2. *De manière plus précise :*
   a. *Si* $\overline{\mathfrak{a}}$ *est l'ensemble des éléments de* $\mathbf{A}$ *entiers sur* $\mathfrak{a}$*, alors la clôture intégrale de* $\mathbf{A}[\mathfrak{a}t]$ *dans* $\mathbf{A}[t]$ *est le sous-anneau* $\mathbf{A}[\overline{\mathfrak{a}}t]$*.*
   b. *En particulier,* $\overline{\mathfrak{a}}$ *est un idéal de* $\mathbf{A}$*, appelé la* clôture intégrale de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans $\mathbf{A}$*. On le note* $\mathrm{Icl}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ *ou* $\mathrm{Icl}(\mathfrak{a})$*.*

2.6. Fait. *Soient* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *deux idéaux de* $\mathbf{A}$.

1. $\mathrm{Icl}\big(\mathrm{Icl}(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{Icl}(\mathfrak{a})$.
2. $\mathfrak{a}\,\mathrm{Icl}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Icl}(\mathfrak{a})\,\mathrm{Icl}(\mathfrak{b}) \subseteq \mathrm{Icl}(\mathfrak{ab})$.

Nous revisitons maintenant deux résultats importants déjà établis.
Le point *2c* du théorème de Kronecker III-3.3 donne précisément le résultat suivant.

2.7. Lemme. (Théorème de Kronecker, reformulé)
Supposons que l'on a dans $\mathbf{A}[T]$ *une égalité*
$f = \sum_{i=0}^{n} f_i T^{n-i}$, $g = \sum_{j=0}^{m} g_j T^{m-j}$ *et* $h = fg = \sum_{r=0}^{m+n} h_r T^{m+n-r}$.
Soit $\mathbf{k}$ *le sous-anneau de* $\mathbf{A}$ *engendré par les* $f_i g_j$. *Alors, chaque* $f_i g_j$ *est entier sur l'idéal* $\mathrm{c}_{\mathbf{k}}(h)$ *de* $\mathbf{k}$.

Notez que le point *2c* du théorème de Kronecker III-3.3 nous dit précisément ceci : *il existe un polynôme homogène* $R_{i,j} \in \mathbb{Z}[Y, H_0, \ldots, H_p]$ *(toutes les variables ont le même poids* 1*), unitaire en* Y, *tel que*
$$R_{i,j}(f_i g_j, h_0, \ldots, h_p) = 0.$$
Voici une nouvelle version du lemme « lying over » (lemme VI-3.12).

2.8. Lemme. (Lying over, forme plus précise)
Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *avec* $\mathbf{B}$ *entier sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$, *alors* $\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
Plus précisément, tout élément de $\mathfrak{a}\mathbf{B}$ *est entier sur* $\mathfrak{a}$.

▷ On reprend textuellement la preuve du lemme VI-3.12. Si $x \in \mathfrak{a}\mathbf{B}$, on a $x = \sum a_i b_i$, avec $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathbf{B}$. Les b_i engendrent une sous-$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}'$ qui est finie. Soit G un système générateur fini (avec ℓ éléments) du $\mathbf{A}$-module $\mathbf{B}'$. Soit $B_i \in \mathbb{M}_\ell(\mathbf{A})$ une matrice qui exprime la multiplication par b_i sur G. La multiplication par x est exprimée par la matrice $\sum a_i B_i$, qui est à coefficients dans $\mathfrak{a}$. Le polynôme caractéristique de cette matrice, qui annule x (parce que $\mathbf{B}'$ est un $\mathbf{A}$-module fidèle), a donc son coefficient de degré $\ell - d$ dans $\mathfrak{a}^d$.
On pourrait également appliquer le fait 2.4 en prenant $M = \mathbf{B}'$. En effet, comme $x \in \mathfrak{a}\mathbf{B}'$, on a bien $x\mathbf{B}' \subseteq \mathfrak{a}\mathbf{B}'$ et donc x est entier sur $\mathfrak{a}$. □

Nous examinons maintenant les rapports entre propriétés de type « entier sur » et localisations.

2.9. Fait. *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$, S *un monoïde de* $\mathbf{A}$ *et* $x \in \mathbf{A}$.

1. *L'élément* $x/1 \in \mathbf{A}_S$ *est entier sur* $\mathfrak{a}_S$ *si, et seulement si, il existe* $u \in S$ *tel que* xu *est entier sur* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathbf{A}$.
2. *Si* $\mathbf{A}$ *est normal, alors* $\mathbf{A}_S$ *également.*

Soit $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ *une algèbre fidèlement plate.*

3. *Si* $\mathbf{A}'$ *est la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$, *alors* $\mathbf{A}'_S$ *est la clôture intégrale de* $\mathbf{A}_S$ *dans* $\mathbf{B}_S$.
4. *Si* $\mathbf{B}$ *est normal, alors* $\mathbf{A}$ *est normal.*

D On montre seulement le point *1.* Dans la démonstration on confond un élément de $\mathbf{A}$ et son image dans $\mathbf{A}_S$ pour alléger les notations. Si une égalité $x^k = a_1x^{k-1} + a_2x^{k-2} + \cdots + a_k$ est réalisée dans $\mathbf{A}_S$ avec chaque $a_j \in (\mathfrak{a}\mathbf{A}_S)^j$, on obtient «en réduisant toutes les fractions au même dénominateur et en chassant le dénominateur» une égalité

$$sx^k = b_1x^{k-1} + b_2x^{k-2} + \cdots + b_k$$

dans $\mathbf{A}_S$ avec $s \in S$ et chaque $b_j \in \mathfrak{a}^j$. Ceci signifie une égalité dans $\mathbf{A}$ après multiplication par un autre élément s' de S. On peut aussi bien multiplier par $s'^k s^{k-1}$ et l'on obtient avec $u = ss'$ une égalité

$$(xu)^k = c_1(xu)^{k-1} + c_2(xu)^{k-2} + \cdots + c_k$$

dans $\mathbf{A}$ avec chaque $c_j \in \mathfrak{a}^j$. □

Le fait qu'un anneau est normal est une notion locale, au sens suivant.

2.10. Principe local-global concret. (Anneaux normaux)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$, $x \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$.

1. *L'élément x est entier sur $\mathfrak{a}$ si, et seulement si, il est entier sur chacun des $\mathfrak{a}_{S_i}$.*
2. *L'idéal $\mathfrak{a}$ est intégralement clos dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, chacun des $\mathfrak{a}_{S_i}$ est intégralement clos dans $\mathbf{A}_{S_i}$.*
3. *L'anneau $\mathbf{A}$ est normal si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ est normal.*

D Il suffit de montrer le point *1*, passage du local au global. On obtient en appliquant le fait 2.9 pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$ un $s_i \in S_i$ tel que s_ix est entier sur l'idéal $\mathfrak{a}$ dans $\mathbf{A}$. On peut supposer que toutes les relations de dépendance intégrale ont le même degré k. Écrivons ces relations de dépendance intégrale

$$(s_ix)^k \in \sum\nolimits_{h=1}^{k} \mathfrak{a}^h(s_ix)^{k-h}, \qquad i \in [\![1..n]\!].$$

Une combinaison linéaire de ces relations basée sur une égalité $\sum_{i=1}^n b_i s_i^k = 1$ nous donne une relation de dépendance intégrale de x sur $\mathfrak{a}$ dans $\mathbf{A}$. □

Notons que puisque la propriété dans le point *1* est de caractère fini, le lemme II-2.12 nous dit que le principe local-global concret précédent est équivalent au principe local-global abstrait correspondant (dans lequel intervient la localisation en n'importe quel idéal maximal de $\mathbf{A}$).

3. Anneaux de Prüfer

Rappelons qu'un anneau est de Prüfer lorsque ses idéaux sont plats, ou s'il est arithmétique et réduit, ou encore s'il est arithmétique et localement sans diviseur de zéro (proposition VIII-4.4).

3.1. Proposition et définition. *On appelle* anneau de valuation *un anneau* $\mathbf{A}$ *vérifiant l'une des propriétés équivalentes suivantes.*

1. $\mathbf{A}$ *est un anneau de Bézout local réduit.*
2. $\mathbf{A}$ *est un anneau de Prüfer local.*
3. $\mathbf{A}$ *est réduit et vérifie : pour tous* a, $b \in \mathbf{A}$, $a \mid b$ *ou* $b \mid a$.

Si $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$, *le groupe quotient* $\mathbf{K}^\times/\mathbf{A}^\times$ *est muni de la relation d'ordre total* $\overline{x} \mid \overline{y}$ *définie par* $\exists a \in \operatorname{Reg}(\mathbf{A})$, $y = ax$. *Ce groupe totalement ordonné est appelé le* groupe de valuation *de* $\mathbf{A}$.

En outre, $\mathbf{A}$ est alors sans diviseur de zéro.

Exemple. Soit $\mathbf{k}$ un corps discret non trivial et $(\Gamma, \cdot, 1_\Gamma)$ un groupe totalement ordonné discret noté multiplicativement. On fabrique une $\mathbf{k}$-algèbre qui est un domaine de valuation avec Γ pour groupe de valuation comme suit. On considère tout d'abord la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A} = \mathbf{k}[\Gamma^+]$ décrite dans l'exercice IX-22.
Pour un élément $a = \sum_i a_i\gamma_i$ de $\mathbf{A}^*$ on définit $v(a)$ comme le plus petit γ_i qui intervient dans l'écriture de a (on a pris les γ_i deux à deux distincts et les $a_i \neq 0$). On vérife alors que $v(ab) = v(a)v(b)$, ce qui implique que $\mathbf{A}$ est intègre. On pose aussi $v(0) = +\infty$. Enfin notre anneau de valuation est le sous-anneau $\mathbf{V} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{A}^*, v(a) \geqslant v(b) \right\}$ de $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$. ∎

Nous donnons maintenant quelques autres propriétés caractéristiques des anneaux de Prüfer, qui s'ajoutent à celles que l'on peut obtenir à partir du théorème 1.6 pour les anneaux arithmétiques.

3.2. Théorème. (Caractérisations des anneaux de Prüfer)
Pour un anneau $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1a. $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique localement sans diviseur de zéro (i.e., un anneau de Prüfer).*

1b. $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro et pour tous* x, y *il existe* $n \in \mathbb{N}^*$ *et un idéal* $\mathfrak{b}$ *tels que* $\langle x, y\rangle\, \mathfrak{b} = \langle x^n\rangle$.

2a. *Tout sous-module d'un* $\mathbf{A}$*-module plat est plat.*

2b. $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro et tout module sans torsion est plat.*

3a. *Un système linéaire* $BX = C$ *arbitraire, dès que les idéaux déterminantiels de* $[\, B \mid C \,]$ *sont égaux à ceux de* B, *admet une solution.*

3b. *Même chose en se limitant à* $B \in \mathbf{A}^{2\times 3}$ *et* $C \in \mathbf{A}^{2\times 1}$.

4a. *Tout idéal est intégralement clos.*

4b. *Tout idéal de type fini est intégralement clos.*

4c. *Tout idéal* $\langle x, y\rangle$ *est intégralement clos.*

4d. $\mathbf{A}$ *est normal et pour tous* $x, y \in \mathbf{A}$*, on a* $xy \in \langle x^2, y^2 \rangle$.

5a. Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ *et* $\mathfrak{c}$ *sont des idéaux de type fini, on a l'implication :*

$$\mathfrak{a} + \mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{c},\ \ \mathfrak{ac} \subseteq \mathfrak{a}'\mathfrak{c} \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'.$$

5b. Si $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ *et* $\mathfrak{c}$ *sont des idéaux de type fini, on a l'implication :*

$$\mathrm{Ann}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}') \supseteq \mathrm{Ann}(\mathfrak{c}),\ \ \mathfrak{ac} \subseteq \mathfrak{a}'\mathfrak{c} \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}'.$$

▷ On s'occupe d'abord des équivalences entre *1*, *2* et *3*.
Les implications *1a* ⇒ *1b*, *2a* ⇒ *1a* et *3a* ⇒ *3b* sont évidentes.
1b ⇒ *1a.* Résulte du lemme 3.3 ci-après.
3b ⇒ *1a.* L'anneau est arithmétique parce que le système linéaire (2) dans le théorème 1.6 admet une solution. En outre, l'anneau est réduit : si $a^2 = 0$, le système linéaire $\{\, ax = 0,\ 0x = a \,\}$ admet une solution car cela correspond à

$$B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix} \quad \text{avec } \mathcal{D}_2([\, B \,|\, C \,]) = \mathcal{D}_2(B) = 0\ !$$

1a ⇒ *3b.* Supposons tout d'abord l'anneau local. Donc l'anneau est sans diviseur de zéro et tout idéal de type fini est principal. Alors, on peut conclure par le lemme 3.4 ci-après. Dans le cas général, la preuve du lemme peut être reproduite après des localisations en des monoïdes comaximaux convenables, et comme il s'agit de résoudre un système linéaire le principe local-global de base s'applique.
2b ⇒ *2a.* Un module plat est sans torsion (lemme VIII-3.4). Tout sous-module d'un module sans torsion est sans torsion, donc plat.
1a ⇒ *2b.* Soit M un module sans torsion sur un anneau de Prüfer. Nous voulons montrer qu'il est plat. Supposons tout d'abord l'anneau local.
Soit $LX = 0$ une relation de dépendance linéaire avec $L = [\, a_1 \ \cdots \ a_m \,]$ dans $\mathbf{A}$ et $X \in M^{m\times 1}$. Sans perte de généralité, on suppose que $a_i = b_i a_1$ pour $i > 1$. La relation de dépendance linéaire se réécrit $a_1 y = 0$ avec $y = x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_m x_m$. Le sous-module monogène $\mathbf{A}y$ est plat et l'anneau est local donc $a_1 = 0$ ou $y = 0$. Dans le premier cas $L = 0$. Dans le deuxième cas $X = HX$ et $LH = 0$ avec la matrice triangulaire H suivante :

$$H = \begin{bmatrix} 0 & -b_2 & -b_3 & \dots & -b_m \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dans le cas d'un anneau de Prüfer arbitraire, on reprend le raisonnement précédent en utilisant les localisations (en des éléments comaximaux) qui rendent l'idéal $\langle a_1, \dots, a_m \rangle$ engendré par l'un des a_i.
On passe maintenant aux équivalences entre *1*, *4* et *5*.
Les implications *4a* ⇔ *4b* ⇒ *4c* ⇒ *4d* et *5b* ⇒ *5a* sont immédiates.

4d ⇒ *1a.* L'anneau **A** est localement sans diviseur de zéro (lemme 2.3). Il suffit donc de montrer que tout idéal $\mathfrak{a} = \langle x, y\rangle$ est localement principal. On a $xy = ax^2 + by^2$, et $z = ax$ vérifie $z^2 = zy - aby^2$. Donc, puisque l'anneau est normal, $ax = a'y$ pour un certain a'. De même, $by = b'x$ pour un certain b'. Donc, $xy(1-a'-b') = 0$. Les éléments $1-a'-b'$, a' et b' sont comaximaux. Lorsque l'on inverse $1-a'-b'$, on obtient $xy = 0$, et après deux nouvelles localisations, $x = 0$ ou $y = 0$, donc $\mathfrak{a}$ est principal. Lorsque l'on inverse a', on obtient $\mathfrak{a} = \langle x\rangle$ car $a'y = ax$. Même chose lorsque l'on inverse b'.
1a ⇒ *4b.* Soit $x \in \mathbf{A}$ entier sur un idéal de type fini $\mathfrak{a}$. On a pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + \langle x\rangle)^n = (\mathfrak{a} + \langle x\rangle)^{n+1}$. Puisque l'anneau est arithmétique, on a un idéal de type fini $\mathfrak{b}$ tel que $(\mathfrak{a} + \langle x\rangle)\mathfrak{b} = \langle x\rangle$. Donc en multipliant par $\mathfrak{b}^n$ on obtient $x^n\mathfrak{a} = x^n(\mathfrak{a} + \langle x\rangle)$ ce qui signifie qu'il existe un $y \in \mathfrak{a}$ tel que $x^{n+1} = x^n y$ c'est-à-dire $x^n(y-x) = 0$. Puisque l'anneau est localement sans diviseur de zéro, cela implique qu'après des localisations comaximales on a $x = 0$ ou $y - x = 0$, et dans chaque cas $x \in \mathfrak{a}$.
5a ⇒ *4b.* Soit $x \in \mathbf{A}$ entier sur un idéal de type fini $\mathfrak{a}$. On a pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $\mathfrak{a}(\mathfrak{a} + \langle x\rangle)^n = (\mathfrak{a} + \langle x\rangle)^{n+1}$. On applique plusieurs fois la propriété de simplification avec l'idéal $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \langle x\rangle$ et l'on obtient en fin de parcours $\mathfrak{a} + \langle x\rangle \subseteq \mathfrak{a}$.
4b ⇒ *5b.* Soient $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ trois idéaux de type fini vérifiant l'hypothèse dans *5b*. Soit x un élément de $\mathfrak{a}$ et X un vecteur colonne formé par un système générateur de $\mathfrak{c}$. Puisque $x\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{a}'\mathfrak{c}$, il existe une matrice $G \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{a}')$ telle que $xX = GX$, i.e. $(x\mathrm{I}_n - G)X = 0$. Si P est le polynôme caractéristique de G, on a d'une part $P(x)X = 0$, et d'autre part $P(x) \in x^n + \mathfrak{a}'$.
Donc $P(x) \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{c}) \subseteq \mathrm{Ann}(\mathfrak{a} + \mathfrak{a}')$ et $P(x) \in \mathfrak{a} + \mathfrak{a}'$. D'où $P(x)^2 = 0$, puis $P(x) = 0$. Ceci est une relation de dépendance intégrale de x sur $\mathfrak{a}'$. Donc $x \in \mathfrak{a}'$. □

3.3. Lemme. *Dans un anneau localement sans diviseur de zéro, si l'on a* $\langle x, y\rangle\, \mathfrak{b} = \langle x^n\rangle$ *avec* $n \geqslant 1$, *alors* $\langle x, y\rangle$ *est localement principal.*

D Il suffit de résoudre ce problème après des localisations comaximales. La caractère localement sans diviseur de zéro de l'anneau va servir à fabriquer ces localisations.
On a une égalité $\langle u, v\rangle\, \langle x, y\rangle = \langle x^n\rangle$ avec $x^n = ux + vy$, $ux = u_1x^n$, $vx = ax^n$ et $uy = bx^n$. Il vient :

$$(u_1y - bx)x^n = 0, \quad (u_1x + ay - x)x^n = (ux + vy - x^n)x = 0.$$

On a donc des localisations comaximales dans lesquelles $x = 0$ et le résultat est clair. Dans la dernière, $u_1y = bx$ et $u_1x + ay = x$ i.e. $(1-u_1)x = ay$. Ainsi, $\langle x, y\rangle$ est localement principal. □

3.4. Lemme. *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau arbitraire,* $B \in \mathbf{A}^{m\times n}$ *et* $C \in \mathbf{A}^{m\times 1}$. *Le système linéaire* $BX = C$ *admet une solution dans* $\mathbf{A}^{n\times 1}$ *lorsque les conditions suivantes sont réalisées pour tout* $k \in [\![1..\inf(m,n)]\!]$:

1. *L'idéal déterminantiel* $\mathcal{D}_k(B)$ *est de la forme* $\delta_k\mathbf{A}$, *où* δ_k *est un mineur d'ordre* k.
2. δ_k *vérifie la condition :* $\forall y \in \mathbf{A}\ \ (y\delta_k = 0 \ \Rightarrow\ \big(\delta_k = 0 \ \vee\ y = 0\big)$.
3. $\mathcal{D}_k([\,B \mid C\,]) = \mathcal{D}_k(B)$.

D On commence avec $k = \inf(m,n)$. On écrit l'identité à la Cramer

$$\delta_k \times C = \delta_k \times (\text{une combinaison linéaire des colonnes de } B),$$

qui résulte de la nullité des idéaux déterminantiels d'indice $k+1$ et du fait que $\mathcal{D}_k([\,B \mid C\,])$ est engendré par δ_k. Vu *2*, on est dans l'un des deux cas suivants :
– on peut simplifier en divisant tout par δ_k, donc $C \in \operatorname{Im} B$.
– $\delta_k = 0$: ou bien $k = 1$ auquel cas $C \in \operatorname{Im} B$ (car $B = C = 0$), ou bien $k \geqslant 2$, et l'on peut faire une récurrence en remplaçant k par $k-1$. □

Extensions d'anneaux de Prüfer

Le fait qu'un anneau normal est localement sans diviseur de zéro signifie que localement il se comporte comme un anneau sans diviseur de zéro. En fait la machinerie de localisations comaximales à l'œuvre dans la définition d'un anneau localement sans diviseur de zéro permet souvent de se ramener au cas intègre, comme on a déjà pu le voir dans la démonstration du lemme 3.3. On a le théorème important suivant, qui est une généralisation du résultat analogue obtenu en théorie des nombres (théorème III-8.21).

3.5. Théorème. (Extension entière normale d'un anneau de Prüfer).
Soient $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *avec* $\mathbf{B}$ *normal entier sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{A}$ *de Prüfer. Alors* $\mathbf{B}$ *est un anneau de Prüfer.*

D On va montrer que tout idéal $\langle \alpha, \beta\rangle$ est localement principal.
Voyons d'abord le cas d'un idéal $\langle a, \beta\rangle$ avec $(a,\beta) \in \mathbf{A}\times\mathbf{B}$. On peut alors reprendre presque mot à mot la démonstration « à la Dedekind [1] » du théorème III-8.21.
Soit $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire s'annulant en β. On écrit $f(X) = (X-\beta)h(X)$ où $h \in \mathbf{B}[X]$. On a donc $f(aX) = (aX-\beta)h(aX)$, que l'on écrit $f_1 = g_1h_1$.
Soit $\mathfrak{c} = \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(f_1)$, $\mathfrak{b} = \mathrm{c}_{\mathbf{B}}(h_1)$ et $\mathfrak{a} = \mathrm{c}_{\mathbf{B}}(g_1) = \langle a, \beta\rangle$.
Si $\deg(f) = n$, on a $a^n \in \mathfrak{c}$. Soit $\mathfrak{c}'$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ avec $\mathfrak{c}\mathfrak{c}' = a^n\mathbf{A}$.
En utilisant le théorème de Kronecker (reformulé dans le lemme 2.7), on obtient $\mathfrak{c}\mathbf{B} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b} \subseteq \mathrm{Icl}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{c})$ et donc
$a^n\mathbf{B} = (\mathfrak{c}\mathbf{B})(\mathfrak{c}'\mathbf{B}) \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}(\mathfrak{c}'\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Icl}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{c})(\mathfrak{c}'\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{Icl}_{\mathbf{B}}(\mathfrak{c}\mathfrak{c}') = \mathrm{Icl}_{\mathbf{B}}(a^n) = a^n\mathbf{B}$.

1. Cela fonctionnerait aussi avec la démonstration à la Kronecker.

Donc $\mathfrak{ab}(\mathfrak{c}'\mathbf{B}) = a^n\mathbf{B}$ et $\mathfrak{a}$ est localement principal d'après le lemme 3.3.
Passons au cas général, avec $\alpha, \beta \in \mathbf{B}$. Si $\mathbf{B}$ est intègre, on peut supposer que $\alpha \neq 0$ et l'on trouve $\gamma \neq 0$ dans $\mathbf{B}$ tel que $\alpha\gamma = a \in \mathbf{A}$, ce qui nous ramène au problème déjà traité.
Il reste à voir le cas, plus délicat, où l'on ne suppose pas $\mathbf{B}$ intègre. En fait on applique avec persévérance la recette des localisations comaximales fournies par le caractère localement sans diviseur de zéro de l'anneau, et cela marche. On écrit $p(\alpha) = 0$ avec p unitaire dans $\mathbf{A}[X]$. On fait une récurrence sur $m = \deg(p)$. On a déjà traité le cas $m = 0$. Passons de m à $m+1$. On écrit $p(X) = Xq(X) + a$ avec q unitaire, $\deg(q) = m$ et l'on pose $\widetilde{\alpha} = q(\alpha)$. Puisque $\alpha\widetilde{\alpha} = -a \in \mathbf{A}$, on sait trouver $u, v \in \mathbf{B}$ pour lesquels on a $\langle u, v\rangle \langle \alpha\widetilde{\alpha}, \beta\widetilde{\alpha}\rangle = \langle \alpha\widetilde{\alpha}\rangle$, avec

$$\alpha\widetilde{\alpha} = u\alpha\widetilde{\alpha} + v\beta\widetilde{\alpha}, \quad u\beta\widetilde{\alpha} = u_1\alpha\widetilde{\alpha}, \quad v\beta\widetilde{\alpha} = v_1\alpha\widetilde{\alpha}.$$

Si l'on pouvait simplifier par $\widetilde{\alpha}$, on aurait $\langle u, v\rangle \langle \alpha, \beta\rangle = \langle \alpha\rangle$. Les trois égalités ci-dessus s'écrivent :

$$(\alpha - u\alpha - v\beta)\,\widetilde{\alpha} = 0, \quad (u\beta - u_1\alpha)\,\widetilde{\alpha} = 0 \quad (v\beta - v_1\alpha)\,\widetilde{\alpha} = 0.$$

À partir de ces égalités, on va trouver des localisations comaximales (comme dans la preuve du lemme 3.3). Dans les unes $\widetilde{\alpha} = 0$, i.e. $q(\alpha) = 0$ et l'on applique l'hypothèse de récurrence. Dans la dernière on a $\langle u, v\rangle \langle \alpha, \beta\rangle = \langle \alpha\rangle$, ce qui montre que $\langle \alpha, \beta\rangle$ est localement principal. □

Remarque. Cette démonstration, comme d'ailleurs celle du lemme 3.3, est plus redoutable qu'il n'y paraît. Elle arrive à traiter d'une seule manière le cas où $\alpha = 0$, le cas où α est régulier, et « tous les cas intermédiaires. » ∎

On a aussi le résultat facile suivant.

3.6. Théorème. *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \operatorname{Frac}\mathbf{A}$.

1. *Si* $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro, il en va de même pour* $\mathbf{B}$.
2. *Si* $\mathbf{A}$ *est arithmétique, il en va de même pour* $\mathbf{B}$.
3. *Si* $\mathbf{A}$ *est de Prüfer, il en va de même pour* $\mathbf{B}$.

▷ Le point *1* est laissé au lecteur.
2. Soient x, $y \in \mathbf{B}$. Il existe $d \in \operatorname{Reg}(\mathbf{A})$ tel que $x_1 = dx$, et $y_1 = dy$ sont dans $\mathbf{A}$. Alors $d(x, y) = (x_1, y_1)$, et une matrice de localisation principale dans $\mathbf{A}$ pour (x_1, y_1) est aussi une matrice de localisation principale pour (x, y). □

Les deux théorèmes précédents sont reliés à deux résultats classiques dans le cadre noethérien (cf. [Freid & Jarden, page 17]) :

Théorème de Krull-Akizuki. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau de Dedekind et* $\mathbf{L}$ *une extension finie du corps des fractions de* $\mathbf{A}$*, alors la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{L}$ *est un anneau de Dedekind.*

Théorème de Grell-Noether. *Si* **A** *est un anneau de Dedekind, alors tout anneau compris entre* **A** *et son corps des fractions est de Dedekind.*

Vue la caractérisation des anneaux de Dedekind (en mathématiques classiques) comme anneaux de Prüfer noethériens intègres, on voit que nous avons établi les versions non-noethériennes et non-intègres de ces deux théorèmes. Nous démontrerons plus loin que dans les circonstances analogues, la dimension de Krull de **B** est toujours inférieure ou égale à celle de **A**, ce qui cette fois-ci est lié à la caractérisation des anneaux de Dedekind comme anneaux intégralement clos de dimension $\leqslant 1$ et noethériens.

4. Anneaux de Prüfer cohérents

Premières propriétés

Rappelons que sur un anneau quasi intègre un idéal de type fini est fidèle si, et seulement si, il contient un élément régulier (voir le corollaire IV-6.5). En fait tout idéal de type fini contient un élément qui a le même annulateur que lui. En particulier, sur un anneau quasi intègre un idéal de type fini projectif est inversible si, et seulement si, il est fidèle.

Après avoir fourni des caractérisations des anneaux de Prüfer (voir la proposition et définition VIII-4.4 et le théorème 3.2), en voici pour les anneaux de Prüfer cohérents ; la lectrice en trouvera d'autres dans l'exercice 16.

4.1. Théorème. (Caractérisations des anneaux de Prüfer cohérents)
Pour un anneau **A***, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. **A** *est un anneau de Prüfer cohérent.*
2. **A** *est un anneau arithmétique quasi intègre.*
3. *Tout idéal de type fini est projectif.*
4. *Tout idéal à deux générateurs est projectif.*
5. **A** *est quasi intègre et tout idéal* $\langle a, b\rangle$ *avec* $a \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$ *est inversible.*
6. **A** *est quasi intègre et tout idéal de type fini fidèle est un module projectif de rang constant 1.*

D *1* $\Leftrightarrow$ *2.* Utiliser le fait VIII-3.5.
3 $\Rightarrow$ *4.* Trivial.
4 $\Rightarrow$ *2.* Le théorème 1.6 donne l'implication pour le caractère localement principal des idéaux. Par ailleurs un anneau est quasi intègre si, et seulement si, les idéaux principaux sont projectifs.
Les implications *1* $\Rightarrow$ *3*, *5*, *6* tiennent à la caractérisation des idéaux projectifs comme idéaux localement principaux dont l'annulateur est un idempotent et celle des idéaux inversibles comme idéaux localement principaux contenant un élément régulier (lemme V-7.7, points *2* et *6.*).

Pour les réciproques, on se rappelle qu'un idéal principal est projectif si, et seulement si, son annulateur est engendré par un idempotent (lemme V-7.5), et l'on peut voir le corrigé de l'exercice 16. On peut aussi examiner ces réciproques dans le cas intègre, où elles sont claires, et utiliser la machinerie locale-globale des anneaux quasi intègres. □

Dans le cas local on obtient le résultat suivant (trivial en mathématiques classiques, mais significatif d'un point de vue constructif).

4.2. Fait. *Un anneau de valuation est cohérent si, et seulement si, il est intègre.*

D Un anneau de Prüfer est cohérent si, et seulement si, il est quasi intègre. Un anneau local est connexe. Un anneau connexe est intègre si, et seulement si, il est quasi intègre. □

Dans ce cas $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$ est un corps discret et pour tout $x \in \mathbf{K}^\times$, x ou $1/x$ est dans $\mathbf{A}$. De manière générale, on appelle *anneau de valuation d'un corps discret* $\mathbf{K}$ un sous-anneau vérifiant la propriété précédente. Et il est clair que c'est un anneau de valuation intègre.
Les propriétés de stabilité suivantes sont faciles.

4.3. Fait.

1. *Un anneau zéro-dimensionnel réduit est un anneau de Prüfer cohérent.*
2. *Un localisé, un quotient réduit d'un anneau de Prüfer cohérent par un idéal de type fini est un anneau de Prüfer cohérent.*
3. *Un anneau est de Prüfer et cohérent si, et seulement si, il a la même propriété après localisation en des monoïdes comaximaux.*

Un simple rappel ci-après : le point *1* est valable pour les anneaux quasi intègres et le point *2* pour les anneaux arithmétiques.

4.4. Fait. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau de Prüfer cohérent.*

1. $\mathbf{A}$ *est discret si, et seulement si,* $\mathbb{B}(\mathbf{A})$ *est discret.*
2. $\mathbf{A}$ *est fortement discret si, et seulement si, il est à divisibilité explicite.*

Noyau, image et conoyau d'une matrice

4.5. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau de Prüfer cohérent.*

1. *L'image d'une matrice* $F \in \mathbf{A}^{n\times m}$ *est isomorphe à une somme directe de* n *idéaux de type fini.*
2. *Tout sous-module de type fini d'un module projectif de type fini est un module projectif de type fini.*
3. *Le noyau d'une application linéaire entre modules projectifs de type fini est facteur direct (donc projectif de type fini).*

4. *Tout module de présentation finie est somme directe de son sous-module de torsion (qui est de présentation finie) et d'un sous-module projectif de type fini.*
5. *Tout module projectif de rang $k \geqslant 0$ est isomorphe à une somme directe de k idéaux inversibles.*
6. *Tout module projectif de rang $\leqslant k$ est isomorphe à une somme directe de k idéaux de type fini.*

NB : on ne demande pas que $\mathbf{A}$ soit discret.

D On considère une application linéaire arbitraire $\varphi : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}^n$.
1. On traite le cas du module $M = \operatorname{Im} \varphi \subseteq \mathbf{A}^n$. Soit $\pi_n : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ la dernière forme coordonnée. L'idéal $\pi_n(M) = \mathfrak{a}_n$ est de type fini donc projectif, et l'application linéaire surjective induite $\pi'_n : M \to \mathfrak{a}_n$ est scindée, et

$$M \simeq \operatorname{Ker} \pi'_n \oplus \operatorname{Im} \pi'_n = (M \cap \mathbf{A}^{n-1}) \oplus \mathfrak{a}_n.$$

On termine la preuve par récurrence sur n : $M \cap \mathbf{A}^{n-1}$ est de type fini puisque isomorphe à un quotient de M. On obtient donc $M \simeq \mathfrak{a}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{a}_n$.
2. Résulte immédiatement de *1.*
3. Cela résulte de ce que l'image de l'application linéaire est un module projectif de type fini.
4. On traite le cas du module $N = \operatorname{Coker} \varphi$.
Voyons d'abord le cas où $\mathbf{A}$ *est local*, i.e., est un anneau de valuation intègre. La matrice de φ se met en forme de Smith (proposition IV-7.2). Puisque l'anneau est intègre, N est somme directe d'un module libre (correspondant aux éléments diagonaux nuls dans la réduite de Smith) et d'un sous-module de torsion, lui-même somme directe de sous-modules $\mathbf{A}/\langle d_i \rangle$ correspondant aux éléments diagonaux réguliers.
Voyons ensuite le cas où $\mathbf{A}$ *est intègre.*
Au moyen d'un nombre fini de localisations en des éléments comaximaux, disons $s_1, \ldots, s_r$, on se ramène à la situation du cas local (réduction de Smith de la matrice). Puisque $\operatorname{Ann}_{\mathbf{A}}(s_i) = \langle 0 \rangle$ ou $\langle 1 \rangle$, et puisque les localisations en 0 sont inutiles, on peut supposer que les s_i sont dans $\operatorname{Reg}(\mathbf{A})$.
Notons T le sous-module de torsion de N et regardons ce qui se passe après localisation en $S_i = s_i^{\mathbb{N}}$. On constate facilement que le sous-module de torsion de N_{S_i} est égal à T_{S_i}. Ainsi, T est de présentation finie parce qu'il est de présentation finie après localisation en les S_i. Il est facteur direct dans N parce que T_{S_i} est facteur direct dans N_{S_i} pour chaque i : l'injection canonique $T \to N$ admet un inverse à gauche d'après le principe local-global IV-3.1. Enfin, le module N/T, qui est projectif de type fini après localisation en les S_i, est bien projectif de type fini.
Nous obtenons donc ce que nous souhaitions, avec un petit plus : le module T

devient, après localisation en chacun des éléments s_j d'un système comaximal $(s_1, \dots, s_r)$, une somme directe de modules de torsion monogènes, i.e. isomorphes à $\mathbf{A}[1/s_j]/\langle u_{k,j}\rangle$, avec $u_{k,j} \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$.
Voyons enfin le cas général, où $\mathbf{A}$ *est quasi intègre.*
En partant de la démonstration du cas intègre, la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres produit un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_1, \dots, e_r)$ tel que le résultat soit acquis dans chacune des composantes $e_i N$ (vue comme $\mathbf{A}[1/e_i]$-module). Et cela donne immédiatement le résultat global.
5. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est intègre, cela résulte du point *1* puisque chaque idéal dans la décomposition en somme directe est de rang 0 ou 1.
On peut déduire le cas général par la machinerie locale-globale élémentaire. Voici une autre démonstration [2], indépendante de la démonstration du point *1.* Si M est de rang constant $k \geqslant 1$, alors son dual $M^\star$ l'est également, leurs annulateurs sont nuls, et il existe $\mu \in M^\star$ tel que $\mathrm{Ann}(\mu) = \langle 0\rangle$ (voir le lemme IV-6.4). Alors $\mu(M)$ est un idéal inversible de $\mathbf{A}$ car son annulateur est également nul. De plus, $M \simeq \mathrm{Ker}\,\mu \oplus \mathrm{Im}\,\mu$, ce qui prouve que $\mathrm{Ker}\,\mu$ est projectif de type fini de rang constant $k-1$. On termine par récurrence.
6. On considère M comme somme directe de ses composantes de rang constant, et l'on applique le point *4* à chacune d'elles. □

Extensions d'anneaux de Prüfer cohérents

Un élément x d'une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ est dit *primitivement algébrique sur* $\mathbf{A}$ s'il annule un polynôme primitif de $\mathbf{A}[X]$. Après changement d'anneau de base, un élément primitivement algébrique reste primitivement algébrique. La propriété pour un élément d'être primitivement algébrique est locale au sens suivant.

4.6. Principe local-global concret. (Éléments primitivement algébriques) *Soient* S_1, …, S_n *des monoïdes comaximaux d'un anneau* $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre et* $x \in \mathbf{B}$. *Alors* x *est primitivement algébrique sur* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, il est primitivement algébrique sur chacun des* $\mathbf{A}_{S_i}$.

▷ Il faut montrer que la condition est suffisante. On a des éléments comaximaux s_1, …, s_n ($s_i \in S_i$) et des polynômes $f_i \in \mathbf{A}[X]$ tels que $s_i \in \mathrm{c}(f_i)$ et $f_i(x) = 0$. Si $d_i \geqslant \deg_X(f_i) + 1$, on considère le polynôme

$$f = f_1 + X^{d_1} f_2 + X^{d_1+d_2} f_3 + \cdots.$$

On a alors $f(x) = 0$ et $\mathrm{c}(f) = \sum_{i=1}^n \mathrm{c}(f_i) = \langle 1\rangle$. □

2. Plus savante ou moins savante, c'est difficile à dire. Cela dépend des goûts.

4.7. Lemme. (Les entiers d'Emmanuel) *Soient* $\mathbf{B}$ *un anneau et* $\mathbf{A}$ *un sous-anneau, soient* $\mathbf{A}'$ *la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$ *et* s *un élément de* $\mathbf{B}$ *qui annule un polynôme* $f(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{A}[X]$.
On note $g(X) = \sum_{k=1}^{n} b_k X^{k-1}$ *le polynôme* $f(X)/(X-s)$.

1. *Les éléments* b_i *et* $b_i s$ *sont dans* $\mathbf{A}'$.
2. *Dans* $\mathbf{A}'$ *on obtient :*
$$\langle a_0, \dots, a_n \rangle = \mathrm{c}(f) \subseteq \mathrm{c}(g) + \mathrm{c}(sg) = \langle b_1, \dots, b_n, b_1 s, \dots, b_n s \rangle .$$
3. *Dans* $\mathbf{A}'[s]$ *les deux idéaux sont égaux.*

▷ Puisque $f(X) = (X-s)g(X)$, le théorème de Kronecker nous dit que les b_i et $b_i s$ sont entiers sur $\mathbf{A}$. On a
$$b_n = a_n,\ b_{n-1} = b_n s + a_{n-1},\ \dots,\ b_1 = b_2 s + a_1,\ 0 = b_1 s + a_0.$$
Donc chaque $a_i \in \mathrm{c}(g) + \mathrm{c}(sg)$. Et, dans $\mathbf{A}'[s]$, de proche en proche, on obtient $b_n \in \mathrm{c}(f)$, $b_{n-1} \in \mathrm{c}(f)$, …, $b_1 \in \mathrm{c}(f)$. □

4.8. Théorème. (Une autre caractérisation des anneaux de Prüfer cohérents, voir aussi les exercices 15 et 16)
Un anneau $\mathbf{A}$ *est un anneau de Prüfer cohérent si, et seulement si, il est quasi intègre, intégralement clos dans* $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$*, et si tout élément de* $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ *est primitivement algébrique sur* $\mathbf{A}$.

▷ Supposons que $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer cohérent. Il nous reste à montrer que tout élément de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$.
Soit $x = a/b \in \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. Il y a une matrice $\begin{bmatrix} s & u \\ v & t \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$, de localisation principale pour (b, a), i.e. $s + t = 1$, $sa = ub$ et $va = tb$.
Ce qui donne $sx - u = 0$ et $t = vx$. Ainsi, x annule le polynôme primitif $-u + sX + X^2(t - vX)$, ou si l'on préfère $t - (u+v)X + sX^2$.
Voyons la réciproque. Il suffit de faire la preuve dans le cas intègre. On doit montrer que tout idéal $\langle a, b \rangle$ est localement principal. On suppose sans perte de généralité $a,\ b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$. L'élément $s = a/b$ annule un polynôme primitif $f(X)$. Puisque $\mathrm{c}(f) = \langle 1 \rangle$ dans $\mathbf{A}$, d'après le lemme 4.7 (points *1* et *2*), on a des éléments b_1, …, b_n, $b_1 s$, …, $b_n s$ comaximaux dans $\mathbf{A}$.
On a alors $s \in \mathbf{A}[1/b_i]$ et $1/s \in \mathbf{A}[1/(b_i s)]$: dans chacune des localisations comaximales, a divise b ou b divise a. □

Le théorème qui suit contient une nouvelle démonstration de la stabilité des anneaux de Prüfer intègres par extension entière et intégralement close (voir le théorème 3.5). Elle semble d'une facilité déconcertante par rapport à celle donnée sans l'hypothèse de cohérence.

4.9. Théorème. *Si* $\mathbf{B}$ *est un anneau quasi intègre normal, et une extension entière d'un anneau de Prüfer cohérent* $\mathbf{A}$*, alors* $\mathbf{B}$ *est un anneau de Prüfer cohérent.*

D Voyons d'abord le cas où $\mathbf{B}$ *est intègre et non trivial.* Soit $s \in \operatorname{Frac}\mathbf{B}$. Il suffit de montrer que s est primitivement algébrique sur $\mathbf{B}$. On a un polynôme non nul $f(X) \in \mathbf{A}[X]$ tel que $f(s) = 0$.
Cas où $\mathbf{A}$ *est un anneau de Bézout.* On divise f par $\mathrm{c}(f)$ et l'on obtient un polynôme primitif qui annule s.
Cas d'un anneau de Prüfer. Après localisation en des éléments comaximaux, l'idéal $\mathrm{c}(f)$ est engendré par un des coefficients de f, le premier cas s'applique.
Dans le cas général, la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres nous ramène au cas intègre. □

Voici maintenant l'analogue de la proposition III-8.17, qui décrivait l'anneau d'entiers d'un corps de nombres. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout intègre, on aurait pu reprendre presque mot pour mot les mêmes démonstrations. Notez aussi que le théorème VI-3.18 étudie une situation du même style avec une hypothèse un peu plus faible. Voir aussi le point *1* du problème III-9.

4.10. Théorème. (Anneau d'entiers dans une extension algébrique)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau de Prüfer cohérent,* $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}(\mathbf{A})$, $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre entière réduite et* $\mathbf{B}$ *la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{L}$.

1. $\operatorname{Frac}\mathbf{B} = \mathbf{L} = (\operatorname{Reg}\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{B}$ *est un anneau de Prüfer cohérent.*
2. *Si* $\mathbf{L}$ *est strictement finie sur* $\mathbf{K}$ *et si* $\mathbf{A}$ *est fortement discret,* $\mathbf{B}$ *est fortement discret.*

Si en outre $\mathbf{L}$ *est étale sur* $\mathbf{K}$*, on obtient :*

3. *Si* $\mathbf{A}$ *est noethérien, il en va de même pour* $\mathbf{B}$.
4. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau de Dedekind (définition 7.7),* $\mathbf{B}$ *également.*
5. *Si* $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x] = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$ *avec* $f \in \mathbf{A}[X]$ *unitaire et* $\operatorname{disc}_X(f) \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$,
   alors $\frac{1}{\Delta}\mathbf{A}[x] \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{A}[x]$ *(*$\Delta = \operatorname{disc}_X(f)$*).*
   En particulier $\mathbf{A}[x][\frac{1}{\Delta}] = \mathbf{B}[\frac{1}{\Delta}]$.
6. *Si en outre* $\operatorname{disc}_X(f) \in \mathbf{A}^\times$*, on a* $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$ *strictement étale sur* $\mathbf{A}$.

D *1.* Conséquence directe du fait VI-3.16 et du théorème 4.9.
2. Puisque $\mathbf{B}$ est un anneau de Prüfer, il suffit de savoir tester la divisibilité dans $\mathbf{B}$, c'est-à-dire l'appartenance d'un élément de $\mathbf{L}$ à $\mathbf{B}$. Soit $y \in \mathbf{L}$ et $Q \in \mathbf{K}[Y]$ son polynôme minimal (unitaire) sur $\mathbf{K}$. Alors y est entier sur $\mathbf{A}$ si, et seulement si, $Q \in \mathbf{A}[Y]$: dans le sens non immédiat, soit $P \in \mathbf{A}[Y]$ unitaire tel que $P(y) = 0$, alors Q divise P dans $\mathbf{K}[Y]$ et le lemme III-8.10 implique que $Q \in \mathbf{A}[Y]$.
Note : on aurait aussi bien pu utiliser le polynôme caractéristique, mais la démonstration qui utilise le polynôme minimal fonctionne dans un cadre

plus général (il suffit que $\mathbf{L}$ soit algébrique sur $\mathbf{K}$ et que l'on sache calculer les polynômes minimaux).
5. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout intègre et $\mathbf{L}$ un corps, on applique le théorème VI-3.18. Le résultat dans le cas général est ensuite obtenu à partir de cette démonstration en utilisant les machineries locales-globales des anneaux quasi intègres et des anneaux arithmétiques.
3. On fait la démonstration sous les hypothèses du point *5.* Ce n'est pas restrictif car d'après le théorème VI-1.9, $\mathbf{L}$ est un produit de $\mathbf{K}$-algèbres étales monogènes.
Soit $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{b}_n \subseteq \ldots$ une suite d'idéaux de type fini de $\mathbf{B}$ que l'on écrit $\mathfrak{b}_n = \langle G_n \rangle_{\mathbf{B}}$ avec $G_n \subseteq G_{n+1}$; on définit

$$L_n = \mathrm{disc}_X(f) \cdot \left(\textstyle\sum_{g \in G_n} \mathbf{A} g \right) \subseteq \mathbf{A}[x].$$

Alors $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \cdots \subseteq L_n \subseteq \ldots$ est une suite de sous-$\mathbf{A}$-modules de type fini de $\mathbf{A}[x]$. Or $\mathbf{A}[x]$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang fini (égal à $\deg(f)$), donc noethérien. On termine en notant que si $L_m = L_{m+1}$, alors $\mathfrak{b}_m = \mathfrak{b}_{m+1}$.
4. Résulte de *2* et *3*.
6. Il est clair que $\mathbf{B} = \mathbf{A}[x]$. □

Remarque. Le théorème précédent s'applique dans deux cas importants dans l'histoire de l'algèbre commutative.
Le premier cas est celui des anneaux d'entiers de corps de nombres, avec $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$ et $\mathbf{B}$ l'anneau d'entiers d'un corps de nombres (cas déjà examiné en section III-8).
Le deuxième cas est celui des courbes algébriques. On considère un corps discret $\mathbf{k}$, l'anneau principal $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x]$ et un polynôme $f(x, Y) \in \mathbf{k}[x, Y]$ unitaire en Y, irréductible, avec $\mathrm{disc}_Y(f) \neq 0$. On note $\mathbf{K} = \mathbf{k}(x)$.
L'anneau $\mathbf{A}[y] = \mathbf{k}[x, y] = \mathbf{k}[x, Y]/\langle f \rangle$ est intègre. La courbe plane $\mathcal{C}$ d'équation $f(x, Y) = 0$ peut avoir des points singuliers, auquel cas $\mathbf{A}[y]$ n'est pas arithmétique. Mais la clôture intégrale $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{K}[y] = \mathbf{K}[Y]/\langle f \rangle$ est bien un domaine de Prüfer (théorème 6.2), en fait un domaine de Dedekind. Le corps $\mathbf{K}[y]$ est appelé le corps de fonctions de $\mathcal{C}$. L'anneau $\mathbf{B}$ correspond à une courbe (qui n'est plus nécessairement plane) sans point singulier, avec le même corps de fonctions que $\mathcal{C}$. ∎

5. Anneaux quasi intègres de dimension $\leqslant 1$

La plupart des théorèmes « classiques » concernant les domaines de Dedekind sont déjà valables pour les anneaux de Prüfer cohérents de dimension inférieure ou égale à 1, voire pour les anneaux arithmétiques. Nous en démontrons un certain nombre dans cette section et la suivante.
Dans cette section les résultats concernent les anneaux quasi intègres de dimension inférieure ou égale à 1.

Le théorème suivant est un cas particulier du «stable range» de Bass dont nous donnerons des versions générales (théorèmes XIV-1.4 et XIV-2.6).

5.1. Théorème. *Soit $n \geqslant 3$ et ${}^t[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,]$ un vecteur unimodulaire sur un anneau quasi intègre $\mathbf{A}$ de dimension inférieure ou égale à 1. Ce vecteur est la première colonne d'une matrice de $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$. En particulier, $\mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$ est engendré par $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ et $\mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ pour $n \geqslant 3$. Et pour $n \geqslant 2$ tout vecteur unimodulaire est la première colonne d'une matrice de $\mathbb{SL}_n(\mathbf{A})$.*

D L'annulateur de $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ est nul, donc on peut par manipulations élémentaires transformer le vecteur $v = {}^t[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,]$ en un vecteur unimodulaire ${}^t[\,y_1\ x_2 \ \cdots \ x_n\,]$, avec $y_1 \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$ (cf. lemme IV-6.4).
Considérons l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle y_1\rangle$. Cet anneau est zéro-dimensionnel et le vecteur v devient égal à ${}^t[\,0\ x_2 \ \cdots \ x_n\,]$ toujours unimodulaire.
Puisque $n \geqslant 3$, on peut transformer dans $\mathbf{B}$ par manipulations élémentaires ${}^t[\,x_2 \ \cdots \ x_n\,]$ en ${}^t[\,1\ 0 \ \cdots \ 0\,]$ (exercice IX-10). Regardons dans $\mathbf{A}$ ce que l'on obtient alors : ${}^t[\,y_1\ 1 + ay_1\ z_3 \ \cdots \ z_n\,]$, d'où ensuite, toujours par manipulations élémentaires ${}^t[\,y_1\ 1\ z_3 \ \cdots \ z_n\,]$, puis ${}^t[\,1\ 0 \ \cdots \ 0\,]$. □

Le théorème suivant généralise le résultat analogue déjà obtenu en théorie des nombres (corollaire V-3.2). Le point *1* concerne les idéaux inversibles. Le point *2* s'applique à tous les idéaux de type fini d'un anneau de Prüfer cohérent de dimension $\leqslant 1$. Une généralisation est proposée dans le théorème XIII-3.4.

5.2. Théorème. (Théorème un et demi)
Soit $\mathbf{A}$ un anneau quasi intègre de dimension $\leqslant 1$ et $\mathfrak{a}$ un idéal localement principal (donc projectif de type fini).

1. *Si $a \in \mathfrak{a} \cap \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$, il existe $b \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \langle a^n, b\rangle$ pour tout $n \geqslant 1$.*
2. *Il existe $a \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$. Pour un tel a il existe $b \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \langle a^n, b\rangle$ pour tout $n \geqslant 1$.*

D La démonstration du point *1* est identique à celle du corollaire V-3.2 qui donnait le résultat en théorie des nombres.
2. Tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ contient un élément a tel que $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$ (corollaire IV-6.5). On passe au quotient $\mathbf{A}/\langle 1 - e\rangle$ où e est l'idempotent tel que $\mathrm{Ann}(a) = \mathrm{Ann}(e)$ et l'on applique le point *1*. □

5.3. Proposition. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau quasi intègre de dimension $\leqslant 1$, dont le radical de Jacobson contient un élément régulier, et $\mathfrak{a}$ un idéal inversible. Alors $\mathfrak{a}$ est principal.*

D Soient $y \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ et $x \in \mathfrak{a}$ tous deux réguliers. Alors $\mathfrak{a} \cap \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$ contient $a = xy$ qui est régulier. Par le théorème un et demi, il existe $z \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \langle a^2, z\rangle$. Donc $a = ua^2 + vz$ ce qui donne $a(1 - ua) = vz$ et puisque $a \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$, $a \in \langle z\rangle$ donc $\mathfrak{a} = \langle z\rangle$. □

Nous revisitons maintenant le résultat classique suivant, dans lequel nous allons nous débarrasser de l'hypothèse noethérienne : *si* $\mathbf{A}$ *est un anneau noethérien intègre de dimension inférieure ou égale à 1 et* $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ *deux idéaux avec* $\mathfrak{a}$ *inversible et* $\mathfrak{b} \neq 0$, *alors il existe* $u \in \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ *tel que* $u\,\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}$ *et* $u\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle 1 \rangle$.

5.4. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau quasi intègre (par exemple un anneau de Prüfer cohérent) de dimension inférieure ou égale à 1. Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal inversible de* $\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{b}$ *un idéal contenant un élément régulier. Alors il existe un élément* u *inversible dans* $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ *tel que* $u\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}$ *et* $u\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = \langle 1 \rangle$.

▷ Nous faisons la démonstration dans le cas intègre, en laissant le soin au lecteur d'appliquer ensuite la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres. Pour lui faciliter la tâche, nous ne supposons pas $\mathbf{A}$ non trivial et nous mettons « régulier » lorsque dans le cas non trivial nous aurions mis « non nul ».
On cherche a et b réguliers tels que $\frac{b}{a}\,\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{A}$, c'est-à-dire encore $b\,\mathfrak{a} \subseteq a\mathbf{A}$, et $\mathbf{A} = \frac{b}{a}\,\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$. Si c est un élément régulier de $\mathfrak{b}$, comme la condition devrait être aussi réalisée lorsque $\mathfrak{b}$ est l'idéal $c\mathbf{A}$, on doit trouver a et b réguliers tels que $b\,\mathfrak{a} \subseteq a\mathbf{A}$ et $\mathbf{A} = \frac{b}{a}\,\mathfrak{a} + c\mathbf{A}$. Si l'on s'arrange pour que $a \in \mathfrak{a}$, on aura $b \in \frac{b}{a}\mathfrak{a}$, et il suffit donc de réaliser les conditions $b\,\mathfrak{a} \subseteq a\mathbf{A}$
et $\mathbf{A} = \langle b, c \rangle$. C'est ce que nous allons faire.
Soit $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ un élément régulier (par exemple le produit de deux éléments réguliers, l'un dans $\mathfrak{a}$ et l'autre dans $\mathfrak{b}$). D'après le théorème un et demi, il existe un $a \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a} = \langle a, c^2 \rangle = \langle a, c \rangle$. Si $a = 0$, l'idéal $\mathfrak{a} = \langle c \rangle$ est idempotent donc égal à $\langle 1 \rangle$, et ce n'était donc pas la peine de se fatiguer [3] : on pouvait choisir $b = a = 1$.
On suppose donc a régulier. Puisque $c \in \mathfrak{a}$, on a une égalité $c = \alpha a + \beta c^2$, ce qui donne $c(1 - \beta c) = \alpha a$. Posons $b = 1 - \beta c$ de sorte que $\mathbf{A} = \langle b, c \rangle$. On obtient $b\,\mathfrak{a} = b\,\langle a, c \rangle = \langle ba, bc \rangle = a\,\langle b, \alpha \rangle \subseteq a\mathbf{A}$. Si b est régulier, on a donc gagné, et si $b = 0$, alors $1 \in \langle c \rangle$ et ce n'était pas la peine de se fatiguer. □

5.5. Proposition. *Soit* $\mathfrak{a}$ *un idéal inversible d'un anneau intègre* $\mathbf{A}$ *de dimension* $\leqslant 1$. *Pour tout idéal non nul* $\mathfrak{b}$ *de* $\mathbf{A}$, *on a un isomorphisme de* $\mathbf{A}$*-modules* $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{b}$.

▷ D'après le lemme 5.4, il existe un idéal entier $\mathfrak{a}'$ dans la classe [4] de $\mathbf{A} \div \mathfrak{a}$ tel que $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b} = \mathbf{A}$; on a $\mathfrak{a}\mathfrak{a}' = x\mathbf{A}$ avec $x \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$. La multiplication par x, $\mu_x : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$, induit un isomorphisme

$$\mathbf{A}/\mathfrak{b} \xrightarrow{\sim} x\mathbf{A}/x\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

3. Notons cependant que nous ne sommes pas censés savoir d'avance si un idéal inversible de $\mathbf{A}$ contient 1, nous ne nous sommes donc pas fatigués complètement pour rien, le calcul nous a permis de savoir que $1 \in \mathfrak{a}$.

4. Voir page 584.

Considérons maintenant l'application canonique

$$f : \mathfrak{a}'\mathfrak{a} \to \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b}$$

qui à $y \in \mathfrak{a}'\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$ associe la classe de y modulo $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Montrons que f est surjective : en effet, $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b} = \mathbf{A} \Rightarrow \mathfrak{a}'\mathfrak{a} + \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$, donc tout élément de $\mathfrak{a}$ est congru à un élément de $\mathfrak{a}'\mathfrak{a}$ modulo $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Examinons enfin $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{a}'\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}\mathfrak{b}$. Puisque $\mathfrak{a}$ est inversible, $\mathfrak{a}'\mathfrak{a} \cap \mathfrak{a}\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b})$, et enfin $\mathfrak{a}' + \mathfrak{b} = \mathbf{A}$ entraîne que $\mathfrak{a}' \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{b}$, donc $\operatorname{Ker} f = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}$. On a ainsi des isomorphismes de $\mathbf{A}$-modules

$$\mathbf{A}/\mathfrak{b} \simeq x\mathbf{A}/x\mathfrak{b} = \mathfrak{a}'\mathfrak{a}/\mathfrak{a}'\mathfrak{a}\mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{b},$$

d'où le résultat. □

5.6. Corollaire. *Soient* $\mathbf{A}$ *un anneau intègre avec* $\operatorname{Kdim} \mathbf{A} \leqslant 1$, $\mathfrak{a}$ *un idéal inversible et* $\mathfrak{b}$ *un idéal non nul. On a alors une suite exacte de* $\mathbf{A}$*-modules :*

$$0 \to \mathbf{A}/\mathfrak{b} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}\mathfrak{b} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a} \to 0$$

5.7. Lemme. (Radical de Jacobson d'un anneau de dimension $\leqslant 1$)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau intègre de dimension* $\leqslant 1$.

1. *Pour tout* a *non nul dans* $\mathbf{A}$ *on a* $\operatorname{Rad}(\mathbf{A}) \subseteq \sqrt[\mathbf{A}]{a\mathbf{A}}$.
2. *Pour* $\mathfrak{b}$ *de type fini contenant* $\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$*, on a* $\operatorname{Rad}(\mathbf{A}) = \mathfrak{b}\big(\operatorname{Rad}(\mathbf{A}) : \mathfrak{b}\big)$.
3. *Si* $\operatorname{Rad}(\mathbf{A})$ *est un idéal inversible,* $\mathbf{A}$ *est un domaine de Bézout.*

▷ On note $\mathfrak{a} = \operatorname{Rad}(\mathbf{A})$.
1. Soit $x \in \mathfrak{a}$, $\mathbf{A}/\langle a\rangle$ est zéro-dimensionnel, donc il existe y, $z \in \mathbf{A}$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que $x^m(1 + xz) = ay$. Comme $x \in \operatorname{Rad}(\mathbf{A})$, on a $1 + xz \in \mathbf{A}^\times$, donc $x^m \in a\mathbf{A}$ et $x \in \sqrt[\mathbf{A}]{a\mathbf{A}}$.
2. Si $\mathfrak{a} = 0$ c'est clair, sinon l'anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est zéro-dimensionnel réduit, donc l'idéal de type fini $\mathfrak{b}$ est égal à un idéal $\langle e\rangle$ modulo $\mathfrak{a}$, avec e idempotent modulo $\mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{b} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} + \langle e\rangle$, puis $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} + \langle 1 - e\rangle$, et enfin

$$\mathfrak{b}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a} + \langle e\rangle)(\mathfrak{a} + \langle 1 - e\rangle) = \mathfrak{a}.$$

3. Soit $\mathfrak{c}_1$ un idéal de type fini non nul arbitraire. On définit $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c}_2 = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{b}_1)$. D'après le point *2*, puisque $\mathfrak{a}$ est inversible, $\mathfrak{b}_1$ également. Si $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}' = \langle b\rangle$ (b régulier), tous les éléments de $\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}'$ sont divisibles par b, on considère alors $\mathfrak{d} = \frac{1}{b}\mathfrak{c}_1\mathfrak{b}'$, donc $\mathfrak{d}\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{c}_1$ et $\mathfrak{d}$ est de type fini. On a clairement $\mathfrak{d} \subseteq \mathfrak{c}_2$. Réciproquement si $x\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{c}_1$ alors $bx = x\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}' \subseteq b\mathfrak{d}$, donc $x \in \mathfrak{d}$. En bref $\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{d}$ et l'on a établi l'égalité $\mathfrak{b}_1\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{c}_1$, avec $\mathfrak{c}_2$ de type fini. En itérant le processus on obtient une suite croissante d'idéaux de type fini $(\mathfrak{c}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $\mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c}_k : \mathfrak{b}_k)$ et $\mathfrak{b}_k = \mathfrak{c}_k + \mathfrak{a}$.
En fait $\mathfrak{c}_2 = \big(\mathfrak{c}_1 : (\mathfrak{c}_1 + \mathfrak{a})\big) = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a})$, puis $\mathfrak{c}_3 = (\mathfrak{c}_2 : \mathfrak{a}) = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a}^2)$ et plus généralement $\mathfrak{c}_{k+1} = (\mathfrak{c}_1 : \mathfrak{a}^k)$.
Soit $a \neq 0$ dans $\mathfrak{c}_1$. Par le point *1*, $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{a\mathbf{A}}$. Or $\mathfrak{a}$ est de type fini, donc l'inclusion $\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{a\mathbf{A}}$ implique que pour un certain k, $\mathfrak{a}^k \subseteq a\mathbf{A} \subseteq \mathfrak{c}_1$, donc $\mathfrak{c}_{k+1} = \langle 1\rangle$.

Lorsque $\mathfrak{c}_{k+1} = \langle 1 \rangle$, on a $\mathfrak{c}_1 = \prod_{i=1}^{k} \mathfrak{b}_i$, qui est inversible comme produit d'idéaux inversibles.
On a montré que tout idéal de type fini non nul est inversible, donc l'anneau est un domaine de Prüfer, et d'après la proposition 5.3 c'est un anneau de Bézout. □

6. Anneaux de Prüfer cohérents de dimension $\leqslant 1$

Quand un anneau de Prüfer est un anneau de Bézout

Nous généralisons maintenant un résultat classique souvent formulé ainsi [5] : *un anneau de Dedekind intègre ayant un nombre fini d'idéaux maximaux est un anneau principal.*

6.1. Théorème. *Soit* **A** *un anneau de Prüfer cohérent de dimension inférieure ou égale à 1 et dont le radical de Jacobson contient un élément régulier. Alors* **A** *est un anneau de Bézout.*

▷ Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini. Il existe $b \in \mathfrak{b}$ tel que $\operatorname{Ann} \mathfrak{b} = \operatorname{Ann} b = \langle e \rangle$ avec e idempotent. Alors $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \langle e \rangle$ contient l'élément régulier $b + e$: il est inversible et $\mathfrak{b} = (1 - e)\mathfrak{a}$. Il suffit de montrer que $\mathfrak{a}$ est principal. Or cela résulte de la proposition 5.3. □

Le théorème précédent et le suivant sont à comparer avec le théorème XI-3.12 qui affirme qu'un anneau intègre à pgcd de dimension $\leqslant 1$ est un anneau de Bézout.

Une caractérisation importante

Le résultat donné dans le théorème 6.2 ci-après est important : les trois machineries calculatoires de la normalité, de la cohérence et de la dimension 1 se combinent pour fournir la machinerie de la localisation principale des idéaux de type fini.

6.2. Théorème. *Un anneau* **A***, normal, cohérent, de dimension* $\leqslant 1$ *est un anneau de Prüfer.*

▷ Commençons par remarquer que $(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}\mathfrak{b}) = (\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) \div \mathfrak{b}$.
Puisque **A** est quasi intègre, il suffit de traiter le cas intègre et de terminer avec la machinerie locale-globale des anneaux quasi intègres. Nous supposons donc que **A** est intègre et nous montrons que tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ contenant un élément régulier est inversible.
Considérons $(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) \in \operatorname{Ifr} \mathbf{A}$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}(\mathbf{A} \div \mathfrak{a})$, qui est un idéal de type fini (entier) de **A** ; nous voulons montrer que $\mathfrak{b} = \mathbf{A}$. Montrons d'abord

5. Voir la définition constructive d'un anneau de Dedekind, page 727.

que $\mathbf{A} \div \mathfrak{b} = \mathbf{A}$. Soit $y \in \mathbf{A} \div \mathfrak{b}$, d'où $y(\mathbf{A} \div \mathfrak{a}) \subseteq (\mathbf{A} \div \mathfrak{a})$. Puisque $\mathbf{A} \div \mathfrak{a}$ est un module fidèle (il contient 1) et de type fini, y est entier sur $\mathbf{A}$ (cf. fait III-8.2) donc $y \in \mathbf{A}$ car $\mathbf{A}$ est normal.
Par récurrence, en utilisant $\mathbf{A} \div \mathfrak{b}^{k+1} = (\mathbf{A} \div \mathfrak{b}) \div \mathfrak{b}^k$, on obtient $\mathbf{A} \div \mathfrak{b}^k = \mathbf{A}$ pour tout $k \geqslant 1$.
Fixons $x \in \mathfrak{b}$ un élément régulier. Par le lemme XI-3.10, il existe un $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\mathfrak{b}' := \langle x \rangle + \mathfrak{b}^k$ est inversible. En conséquence $\mathfrak{b}'(\mathbf{A} \div \mathfrak{b}') = \mathbf{A}$. Enfin, comme $\mathfrak{b}^k \subseteq \mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{b}$, on a $\mathbf{A} \div \mathfrak{b}' = \mathbf{A}$, d'où $\mathfrak{b}' = \mathbf{A}$ puis $\mathfrak{b} = \mathbf{A}$. □

Exemple. Outre l'exemple des anneaux de valuation donné page 707, qui peuvent avoir une dimension de Krull arbitraire, il y a d'autres exemples naturels de domaines de Prüfer qui ne sont pas de dimension $\leqslant 1$.
On appelle *anneau des polynômes à valeurs entières* le sous-anneau de $\mathbb{Q}[X]$ formé par les polynômes $f(X)$ tels que $f(x) \in \mathbb{Z}$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. On montre facilement que c'est un $\mathbb{Z}$-module libre admettant pour base les polynômes combinatoires $\binom{x}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$. L'idéal engendré par les polynômes $\binom{x}{n}$ pour $n \geqslant 1$ n'est pas de type fini. On montre qu'un polynôme à valeurs entières peut être évalué en un entier p-adique arbitraire, ce qui fournit un ensemble non dénombrable d'idéaux premiers. Cet anneau est un domaine de Prüfer de dimension 2, mais la démonstration de ce résultat n'est pas simple, surtout si l'on demande qu'elle soit constructive. Voir à ce sujet [68, Ducos] et [128, Lombardi]. ∎

Structure des modules de présentation finie

6.3. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau de Prüfer cohérent de dimension inférieure ou égale à 1. Tout module projectif* M *de rang constant* $k \geqslant 1$ *est isomorphe à* $\mathbf{A}^{k-1} \oplus \mathfrak{a}$*, où* $\mathfrak{a}$ *est un idéal inversible. En particulier, il est engendré par* $k+1$ *éléments. Enfin puisque* $\mathfrak{a} \simeq \bigwedge^k M$*, la classe d'isomorphisme de* M *comme* $\mathbf{A}$*-module détermine celle de* $\mathfrak{a}$*.*

D'après le théorème 4.5, M est une somme directe de k idéaux inversibles. Il suffit donc de traiter le cas $M \simeq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b}$, avec des idéaux inversibles $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$. Par le lemme 5.4, on peut trouver un idéal $\mathfrak{a}_1$ tel que $\mathfrak{a}_1 \simeq \mathfrak{a}$ (en tant que $\mathbf{A}$-modules) et $\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} = \langle 1 \rangle$ (comme idéaux). On a alors la suite exacte courte

$$\langle 0 \rangle \longrightarrow \mathfrak{a}_1\mathfrak{b} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b} \xrightarrow{\delta} \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b} \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b} = \mathbf{A} \longrightarrow \langle 0 \rangle\,,$$

où $\delta(x) = (x, -x)$ et $\sigma(x, y) = x + y$. Enfin, puisque cette suite est scindée, on obtient $M \simeq \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{b} \simeq \mathfrak{a}_1 \oplus \mathfrak{b} \simeq \mathbf{A} \oplus (\mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{b}) = \mathbf{A} \oplus (\mathfrak{a}_1\mathfrak{b})$. □

Une conséquence immédiate est le théorème de structure suivant.

6.4. Corollaire. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau de Prüfer cohérent de dimension* $\leqslant 1$. *Tout module projectif de type fini est isomorphe à une somme directe*

$$r_1\mathbf{A} \oplus r_2\mathbf{A}^2 \oplus \cdots \oplus r_n\mathbf{A}^n \oplus \mathfrak{a},$$

où les r_i *sont des idempotents orthogonaux (certains peuvent être nuls) et* $\mathfrak{a}$ *est un idéal de type fini.*

6.5. Proposition. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau arithmétique zéro-dimensionnel. Toute matrice admet une forme réduite de Smith. En conséquence tout* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie est isomorphe à une somme directe de modules monogènes* $\mathbf{A}/\langle a_k\rangle$.

▷ Si $\mathbf{A}$ est local, c'est un anneau de Bézout local et la matrice admet une forme réduite de Smith (proposition IV-7.2), ce qui donne le résultat. En suivant la démonstration du cas local, et en appliquant la machinerie locale-globale des anneaux arithmétiques page 469, on produit une famille d'éléments comaximaux $(s_1, \ldots, s_r)$ tels que le résultat est assuré sur chaque anneau $\mathbf{A}[1/s_i]$.
Puisque $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, tout filtre principal est engendré par un idempotent (lemme IV-8.2 *2*). On considère les idempotents e_i correspondants aux s_i, puis un système fondamental d'idempotents orthogonaux (r_j) tel que chaque e_i soit une somme de certains r_j.
L'anneau s'écrit comme un produit fini $\prod \mathbf{A}_j$ avec la réduction de Smith sur chaque $\mathbf{A}_j$. Le résultat est donc assuré. □

Remarques. Pour l'unicité de la décomposition, voir le théorème IV-5.1. Par ailleurs, la démonstration montre que la réduction peut se faire avec des produits de matrices élémentaires. Enfin une généralisation est proposée en exercice 17. ■

6.6. Corollaire. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau arithmétique de dimension inférieure ou égale à* 1. *Tout* $\mathbf{A}$*-module de présentation finie de torsion est isomorphe à une somme directe de modules monogènes* $\mathbf{A}/\langle b, a_k\rangle$ *avec* $b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$.

▷ Le module est annulé par un élément $b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$. On le regarde comme un $\mathbf{A}/\langle b\rangle$-module et l'on applique la proposition 6.5. □

On peut maintenant synthétiser les théorèmes 6.3 et 4.5, et le corollaire 6.6 comme suit. Nous laissons le soin à la lectrice de donner l'énoncé pour le cas quasi intègre (i.e. pour les anneaux de Prüfer cohérents).

6.7. Théorème. (Théorème des facteurs invariants)
Sur un domaine de Prüfer $\mathbf{A}$ *de dimension* $\leqslant 1$, *tout module de présentation finie est somme directe*

- *d'un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini, nul ou de la forme* $\mathbf{A}^r \oplus \mathfrak{a}$ *(*$r \geqslant 0$, $\mathfrak{a}$ *un idéal inversible),*
- *et de son sous-module de torsion, qui est isomorphe à une somme directe de modules monogènes* $\mathbf{A}/\langle b, a_k\rangle$ *avec* $b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$.

En outre :

- *l'idéal* $\mathfrak{a}$ *est uniquement déterminé par le module,*
- *on peut supposer que les idéaux* $\langle b, a_k\rangle$ *sont totalement ordonnés pour la relation d'inclusion, et la décomposition du sous-module de torsion est alors unique au sens précisé dans le théorème IV-5.1.*

Remarques. 1) En particulier, le théorème de structure pour les modules de présentation finie sur un anneau principal (proposition IV-7.3) est valable pour tout anneau de Bézout intègre de dimension $\leqslant 1$.
2) Pour un module de torsion M, les idéaux $\langle b, a_k\rangle$ du théorème précédent sont les *facteurs invariants* de M, conformément à la définition donnée au théorème IV-5.1. ∎

Réduction de matrices

Le théorème suivant donne une forme réduite pour une matrice colonne, à la Bézout. Il serait intéressant de le généraliser à une matrice quelconque.

6.8. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau de Prüfer cohérent de dimension* $\leqslant 1$ *et* $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{A}$. *Il existe une matrice* $M \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ *telle que*

$$M\ {}^t[\,x_1\ \cdots\ x_n\,] = {}^t[\,y_1\ y_2\ 0\ \cdots\ 0\,].$$

◗ Il suffit de traiter le cas où $n = 3$.
Si e est un idempotent, alors $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}) \simeq \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_e) \times \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_{1-e})$: quitte à localiser en inversant l'idempotent annulateur de $\langle x_1, x_2, x_3\rangle$ et son complémentaire, on peut donc supposer que $\mathrm{Ann}(\langle x_1, x_2, x_3\rangle) = \langle 0\rangle$.
Soit A une matrice de localisation principale pour (x_1, x_2, x_3).
Le module $K = \mathrm{Im}(\mathrm{I}_3 - A)$ est le noyau de la forme linéaire associée au vecteur ligne $X = [\,x_1\ x_2\ x_3\,]$ et c'est un module projectif de rang 2 en facteur direct dans $\mathbf{A}^3$. Le théorème 6.3 nous dit que K contient un sous-module libre de rang 1 en facteur direct dans $\mathbf{A}^3$, c'est-à-dire un module $\mathbf{A}v$ où v est un vecteur unimodulaire de $\mathbf{A}^3$. Par le théorème 5.1, ce vecteur est la dernière colonne d'une matrice inversible U ; le dernier coefficient de XU est nul et la matrice $M = {}^tU$ convient. □

7. Factorisation d'idéaux de type fini

Factorisations générales

Dans un anneau arithmétique général il semble que l'on n'a pas de résultats de factorisation qui aillent au delà de ce qui découle du fait que les idéaux inversibles (c'est-à-dire les idéaux de type fini contenant un élément régulier) forment un monoïde à pgcd, et plus précisément la partie positive d'un groupe réticulé.
Par exemple le théorème de Riesz se relit comme suit.

7.1. Théorème. (Théorème de Riesz pour les anneaux arithmétiques)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau arithmétique,* $(\mathfrak{a}_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ *et* $(\mathfrak{b}_j)_{j\in[\![1..m]\!]}$ *des idéaux inversibles tels que* $\prod_{i=1}^{n}\mathfrak{a}_i = \prod_{j=1}^{m}\mathfrak{b}_j$.
Alors il existe des idéaux inversibles $(\mathfrak{c}_{i,j})_{i\in[\![1..n]\!],j\in[\![1..m]\!]}$ *tels que l'on ait pour tout* i *et tout* j *:*

$$\mathfrak{a}_i = \prod_{j=1}^{m}\mathfrak{c}_{i,j} \;\text{ et }\; \mathfrak{b}_j = \prod_{i=1}^{n}\mathfrak{c}_{i,j}.$$

Factorisations en dimension 1

7.2. Théorème. *Dans un anneau de Prüfer cohérent de dimension inférieure ou égale à 1, on considère deux idéaux de type fini* $\mathfrak{a}$ *et* $\mathfrak{b}$ *avec* $\mathfrak{a}$ *inversible. Alors on peut écrire :*

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2 \;\text{ avec }\; \mathfrak{a}_1+\mathfrak{b} = \langle 1\rangle \;\text{ et }\; \mathfrak{b}^n \subseteq \mathfrak{a}_2,$$

pour un entier n *convenable. Cette écriture est unique et l'on a*

$$\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2 = \langle 1\rangle, \;\; \mathfrak{a}_2 = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}^n = \mathfrak{a}+\mathfrak{b}^{n+1}.$$

▷ Ceci est un cas particulier du lemme XI-3.10. □

Remarque. On n'a pas besoin de supposer les idéaux détachables.

7.3. Théorème. *On considère dans un anneau de Prüfer cohérent de dimension* $\leqslant 1$ *des idéaux de type fini* $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ *deux à deux comaximaux, et un idéal inversible* $\mathfrak{a}$.
On peut écrire $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0\cdot\mathfrak{a}_1\cdots\mathfrak{a}_n$ *avec les idéaux de type fini* $\mathfrak{a}_0, \ldots, \mathfrak{a}_n$ *deux à deux comaximaux et, pour* $j\geqslant 1$, $\mathfrak{p}_j^{m_j}\subseteq\mathfrak{a}_j$ *avec* m_j *entier convenable. Cette écriture est unique et l'on a* $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{a}+\mathfrak{p}_j^{m_j} = \mathfrak{a}+\mathfrak{p}_j^{1+m_j}$.

▷ Par récurrence en utilisant le théorème 7.2 avec $\mathfrak{b}\in\{\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_n\}$. □

Anneaux de Prüfer à factorisation partielle

Reprenons la définition des décomposition partielles (donnée pour les groupes réticulés) dans le cadre du monoïde des idéaux inversibles d'un anneau de Prüfer cohérent $\mathbf{A}$ (ce monoïde est la partie positive du groupe réticulé formé par les éléments inversibles de $\mathrm{Ifr}(\mathbf{A})$).

7.4. Définition. Soit $F = (\mathfrak{a}_1,\ldots,\mathfrak{a}_n)$ une famille finie d'idéaux inversibles dans un anneau $\mathbf{A}$. On dit que F admet une *factorisation partielle* s'il existe une famille $P = (\mathfrak{p}_1,\ldots,\mathfrak{p}_k)$ d'idéaux inversibles deux à deux comaximaux telle que tout idéal $\mathfrak{a}_j$ peut s'écrire sous la forme : $\mathfrak{a}_j = \mathfrak{p}_1^{m_{1j}}\cdots\mathfrak{p}_k^{m_{kj}}$ (certains des m_{ij} peuvent être nuls). On dit alors que P est une *base de factorisation partielle* pour la famille F.

Pour que le monoïde $\mathrm{Ifr}(\mathbf{A})$ soit discret il faut supposer que $\mathbf{A}$ est fortement discret. Ceci conduit à la définition suivante.

7.5. Définition. Un anneau est appelé *anneau de Prüfer à factorisation partielle* si c'est un anneau de Prüfer cohérent fortement discret [6] et si toute famille finie d'idéaux inversibles admet une factorisation partielle.

7.6. Lemme. *Un anneau de Prüfer à factorisation partielle est de dimension inférieure ou égale à 1.*

▷ On considère un élément y régulier. On veut montrer que $\mathbf{A}/\langle y\rangle$ est zéro-dimensionnel.
Pour cela on prend un x régulier et l'on veut trouver $a \in \mathbf{A}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $x^n(1-ax) \equiv 0 \bmod y$. La factorisation partielle de (x, y) nous donne

$$\langle x\rangle = \mathfrak{p}_1^{\alpha_1}\cdots\mathfrak{p}_i^{\alpha_i}\mathfrak{q}_1^{\beta_1}\cdots\mathfrak{q}_j^{\beta_j} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}, \text{ et } \langle y\rangle = \mathfrak{p}_1^{\gamma_1}\cdots\mathfrak{p}_i^{\gamma_i}\mathfrak{h}_1^{\delta_1}\cdots\mathfrak{h}_k^{\delta_k} = \mathfrak{c}\mathfrak{d}$$

avec tous les exposants non nuls. Il existe $n \geqslant 0$ tel que $\mathfrak{a}^n$ soit un multiple de $\mathfrak{c}$ ce qui donne $\langle x^n\rangle = \mathfrak{c}\mathfrak{g}$. Comme $\langle x\rangle + \mathfrak{d} = 1$, il existe un $a \in \mathbf{A}$ tel que $1 - ax \in \mathfrak{d}$. On a donc $\langle y\rangle = \mathfrak{c}\mathfrak{d} \supseteq \mathfrak{c}\mathfrak{g}\mathfrak{d} = \langle x^n\rangle\,\mathfrak{d} \supseteq \langle x^n(1-ax)\rangle$, c'est-à-dire $x^n(1-ax) \equiv 0 \bmod y$. □

Anneaux de Dedekind

7.7. Définition. On appelle *anneau de Dedekind* un anneau de Prüfer cohérent fortement discret et noethérien. Un *domaine de Dedekind* est un anneau de Dedekind intègre (ou encore connexe).

7.8. Théorème. *Un anneau de Dedekind est un anneau de Prüfer à factorisation partielle, donc de dimension inférieure ou égale à 1.*

▷ Le théorème XI-2.16 donne le résultat de factorisation partielle dans le cadre des treillis distributifs et l'on termine avec le lemme 7.6. □

7.9. Théorème. (Caractérisations des anneaux de Dedekind)
Pour un anneau $\mathbf{A}$ *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est un anneau de Dedekind.*
2. $\mathbf{A}$ *est quasi intègre, arithmétique, à divisibilité explicite et noethérien.*
3. $\mathbf{A}$ *est quasi intègre, normal, de dimension inférieure ou égale à 1, à divisibilité explicite, cohérent et noethérien.*

▷ Puisque $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer cohérent si, et seulement si, il est arithmétique et quasi intègre, et puisque un anneau arithmétique est fortement discret si, et seulement si, il est à divisibilité explicite, les points *1* et *2* sont équivalents. L'implication *1* ⇒ *3* résulte du théorème 7.8, et le théorème 6.2 donne la réciproque (il faut simplement rajouter fortement discret et noethérien dans l'hypothèse et la conclusion). □

6. D'après la proposition 1.5 un anneau arithmétique est fortement discret si, et seulement si, la relation de divisibilité est explicite.

7.10. Définition. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal d'un anneau $\mathbf{A}$. On dit que $\mathfrak{a}$ admet une *factorisation totale* s'il s'écrit $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{m_k}$ ($m_i > 0$, $k > 0$) avec les idéaux $\mathfrak{p}_i$ maximaux stricts détachables (autrement dit, chaque anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{p}_i$ est un corps discret non trivial).

7.11. Théorème et définition. *Pour un anneau* $\mathbf{A}$ *quasi intègre fortement discret non trivial, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Tout idéal principal* $\langle a\rangle \neq \langle 1\rangle$ *avec* $a \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$ *admet une factorisation totale.*
2. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est un anneau de Dedekind, et tout idéal inversible* $\neq \langle 1\rangle$ *admet une factorisation totale.*

Un tel anneau est appelé un anneau de Dedekind à factorisation totale.

▷ Il faut montrer que *1* implique *2*. On traite le cas intègre (le cas quasi intègre s'en déduit facilement).
On se reporte à l'exercice III-22 et à sa correction. On voit que tout idéal de type fini contenant un élément régulier est inversible, et qu'il admet une factorisation totale. Le théorème 4.1 nous dit alors que $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer cohérent. Il reste à voir qu'il est noethérien. On considère un idéal de type fini et sa factorisation totale $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{m_k}$. Tout idéal de type fini $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ s'écrit $\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdots \mathfrak{p}_k^{n_k}$ avec les $n_i \in [\![0..m_i]\!]$. Toute suite croissante d'idéaux de type fini démarrant avec $\mathfrak{a}$ admet donc deux termes consécutifs égaux. □

Remarque. L'exercice III-22 n'utilise aucun attirail théorique compliqué. Aussi il est possible d'exposer la théorie des anneaux de Dedekind en commençant par le théorème précédent, qui conduit rapidement aux résultats essentiels. Le principal inconvénient de cette approche est qu'elle est basée sur une propriété de factorisation totale qui n'est pas généralement satisfaite du point de vue constructif, même par les anneaux principaux, et qui ne s'étend pas en général aux extensions entières. ■

Rappelons que nous avons déjà établi le théorème 4.10 concernant les extensions finies d'anneaux de Dedekind.
Nous pouvons rajouter la précision suivante.

7.12. Théorème. (Un calcul de clôture intégrale)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau de Dedekind,* $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}(\mathbf{A})$, $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre étale et* $\mathbf{B}$ *la clôture intégrale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{L}$.
Supposons que $\mathbf{L} = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$ *avec* $f \in \mathbf{A}[X]$ *unitaire et* $\operatorname{disc}_X(f) \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$ *(ce qui n'est pas vraiment restrictif). Si* $\langle \operatorname{disc}_X(f)\rangle$ *admet une factorisation totale, et si pour chaque idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de cette factorisation, le corps résiduel* $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ *est parfait, alors* $\mathbf{B}$ *est un* $\mathbf{A}$*-module projectif de type fini.*

▷ Comme $\mathbf{A}$ est quasi intègre, il suffit de traiter le cas où $\mathbf{A}$ est intègre (machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres), donc $\mathbf{K}$

est un corps discret. L'hypothèse $\mathbf{L} = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$ avec $f \in \mathbf{A}[X]$ unitaire et $\mathrm{disc}_X(f) \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{A}$ n'est pas vraiment restrictive car d'après le théorème VI-1.9, $\mathbf{L}$ est un produit de $\mathbf{K}$-algèbres étales monogènes. On peut même supposer que $\mathbf{L}$ est un corps étale sur $\mathbf{K}$ (machinerie locale-globale élémentaire des anneaux zéro-dimensionnels réduits).
On pose $\Delta = \mathrm{disc}_X(f)$. D'après le point *5* du théorème 4.10 on a les inclusions

$$\mathbf{A}[x] \subseteq \mathbf{B} \subseteq \tfrac{1}{\Delta}\,\mathbf{A}[x].$$

Ainsi $\mathbf{B}$ est un sous-module du $\mathbf{A}$-module de type fini $\frac{1}{\Delta}\mathbf{A}[x]$. D'après le théorème 4.5, si $\mathbf{B}$ est de type fini, il est projectif de type fini.
On a $\mathbf{A}[x, \frac{1}{\Delta}] = \mathbf{B}[\frac{1}{\Delta}]$, donc $\mathbf{B}$ est de type fini après localisation en $\Delta^{\mathbb{N}}$. Il reste à montrer que $\mathbf{B}$ est de type fini après localisation en $S = 1 + \Delta\mathbf{A}$. L'anneau $\mathbf{A}_S$ est un anneau de Bézout (théorème 6.1). Si $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ sont les idéaux maximaux qui interviennent dans la factorisation totale de Δ, les monoïdes $1 + \mathfrak{p}_i$ sont comaximaux dans $\mathbf{A}_S$, et il suffit de montrer que $\mathbf{B}$ est de type fini après localisation en chacun des $1 + \mathfrak{p}_i$. On est ainsi ramené au cas traité dans le lemme 7.13 qui suit. □

Notez qu'un domaine de Dedekind local $\mathbf{V}$ est aussi bien un domaine de valuation noethérien fortement discret, ou encore un anneau principal local avec $\mathbf{V}^\times$ détachable. Dans le lemme suivant, on demande en outre que $\mathrm{Rad}\,\mathbf{V}$ soit principal (ce qui est automatique en mathématiques classiques). Dans ce cas on dira que $\mathbf{V}$ est un *anneau de valuation discrète*, selon la terminologie classique, et un générateur de $\mathrm{Rad}(\mathbf{V})$ est appelé *une uniformisante*.

7.13. Lemme. *Soit* $\mathbf{V}$ *un anneau de valuation discrète avec* $\mathrm{Rad}\,\mathbf{V} = p\mathbf{V}$. *On suppose le corps résiduel* $\mathbf{k} = \mathbf{V}/\langle p\rangle$ *parfait. Soit* $f \in \mathbf{V}[X]$ *un polynôme unitaire irréductible (donc* $\Delta = \mathrm{disc}_X(f) \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{V}$*).*
On note $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{V})$, $\mathbf{L} = \mathbf{K}[x] = \mathbf{K}[X]/\langle f\rangle$, *et* $\mathbf{W}$ *la clôture intégrale de* $\mathbf{V}$ *dans* $\mathbf{L}$. *Alors* $\mathbf{W}$ *est de type fini sur* $\mathbf{V}$.

D Puisque $\mathbf{k}$ est parfait, d'après le lemme VI-1.16, pour tout polynôme unitaire f_i de $\mathbf{V}[X]$ on sait calculer la «partie sans carré» de $\overline{f_i}$ (f_i vu modulo p), i.e. un polynôme $\overline{g_i}$ séparable dans $\mathbf{k}[X]$ qui divise $\overline{f_i}$, et dont une puissance est multiple de $\overline{f_i}$.
La stratégie est de rajouter des éléments $x_i \in \mathbf{W}$ à $\mathbf{V}[x]$ jusqu'au moment où l'on obtient un anneau $\mathbf{W}'$ dont le radical est un idéal inversible. Lorsque ceci est réalisé, nous savons d'après le lemme 5.7 que $\mathbf{W}'$ est un domaine de Prüfer, donc qu'il est intégralement clos, donc égal à $\mathbf{W}$.
Pour «construire» $\mathbf{W}'$ (de type fini sur $\mathbf{V}$) on va utiliser dans une récurrence le fait suivant, initialisé avec $\mathbf{W}_1 = \mathbf{V}[x]$ ($x_1 = x$, $r_1 = 1$).
Fait. Soit $\mathbf{W}_k = \mathbf{V}[x_1, \ldots, x_{r_k}] \subseteq \mathbf{W}$, *alors*

$$\mathrm{Rad}(\mathbf{W}_k) = \big\langle p, g_1(x_1), \ldots, g_k(x_{r_k})\big\rangle,$$

où $\overline{g_i}$ *est la partie sans carré de* $\overline{f_i}$, f_i *polynôme minimal sur* $\mathbf{K}$ *de l'entier* x_i.

Le théorème IX-1.8 nous dit que $\mathrm{Rad}(\mathbf{W}_k) = \mathrm{D}_{\mathbf{W}_k}(p\mathbf{W}_k)$. Cet idéal est l'image réciproque de $\mathrm{D}_{\mathbf{W}_k/p\mathbf{W}_k}(0)$ et l'on a $\mathbf{W}_k/p\mathbf{W}_k = \mathbf{k}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{r_k}}]$. Comme les $g_i(x_i)$ sont nilpotents modulo p par construction, ils sont dans le nilradical $\mathrm{D}_{\mathbf{W}_k}(p\mathbf{W}_k)$. Il nous suffit maintenant de vérifier que la $\mathbf{k}$-algèbre

$$\mathbf{k}[\overline{x_1}, \ldots, \overline{x_{r_k}}]/\big\langle \overline{g_1}(\overline{x_1}), \ldots, \overline{g_{r_k}}(\overline{x_{r_k}})\big\rangle$$

est réduite. En fait $\mathbf{W}_k$ est un sous-$\mathbf{V}$-module de type fini de $\frac{1}{\Delta}\mathbf{V}[x]$, donc est libre fini sur $\mathbf{V}$. En conséquence $\mathbf{W}_k/p\mathbf{W}_k$ est strictement finie sur $\mathbf{k}$, et elle est étale parce qu'elle est engendrée par des éléments qui annulent des polynômes séparables sur $\mathbf{k}$ (théorème VI-1.7). □

Ceci étant vu, puisque $\mathbf{W}$ est un domaine de Prüfer, nous savons inverser l'idéal de type fini $\mathrm{Rad}(\mathbf{W}_k)$ dans $\mathbf{W}$.
Cela signifie calculer des éléments x_{r_k+1}, …, $x_{r_{k+1}}$ de $\mathbf{W}$ et un idéal de type fini $\mathfrak{g}_k$ dans le nouvel anneau $\mathbf{W}_{k+1}$ tels que l'idéal produit $\mathfrak{g}_k \mathrm{Rad}(\mathbf{W}_k)$ soit principal (non nul).
Il se peut cependant que les générateurs de $\mathrm{Rad}(\mathbf{W}_k)$ n'engendrent pas l'idéal $\mathrm{Rad}(\mathbf{W}_{k+1})$ de $\mathbf{W}_{k+1}$, ce qui oblige à itérer le processus.
La suite croissante des $\mathbf{W}_k$ est une suite croissante de $\mathbf{V}$-modules de type fini contenus dans $\frac{1}{\Delta}\mathbf{V}[x]$, donc elle admet deux termes consécutifs égaux. Dans ce cas on a atteint le but prescrit. □

7.14. Principe local-global concret. (Anneaux de Dedekind)
Soient s_1, …, s_n des éléments comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$. Alors

1. *L'anneau $\mathbf{A}$ est cohérent noethérien fortement discret si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{s_i}$ est cohérent noethérien fortement discret.*
2. *L'anneau $\mathbf{A}$ est un anneau de Dedekind si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{s_i}$ est un anneau de Dedekind.*

D On sait déjà que le principe local-global concret fonctionne pour les anneaux de Prüfer et pour les anneaux cohérents avec des monoïdes comaximaux. Il en va de même pour les anneaux ou modules noethériens (une démonstration est donnée avec le principe local-global XV-2.2).
Il reste à examiner la propriété « fortement discret » dans le cas d'éléments comaximaux. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini et $x \in \mathbf{A}$. Il est clair que si l'on a un test pour $x \in \mathfrak{a}\mathbf{A}_{s_i}$ pour chacun des s_i, cela fournit un test pour $x \in \mathfrak{a}\mathbf{A}$. La difficulté est dans l'autre sens : si $\mathbf{A}$ est fortement discret et si $s \in \mathbf{A}$, alors $\mathbf{A}[1/s]$ est fortement discret. Ce n'est pas vrai en général, mais c'est vrai pour les anneaux cohérents noethériens. En effet, l'appartenance $x \in \mathfrak{a}\mathbf{A}[1/s]$ équivaut à $x \in (\mathfrak{a} : s^\infty)_{\mathbf{A}}$. Or l'idéal $(\mathfrak{a} : s^\infty)_{\mathbf{A}}$ est la réunion de la suite croissante des idéaux de type fini $(\mathfrak{a} : s^n)_{\mathbf{A}}$, et dès que $(\mathfrak{a} : s^n)_{\mathbf{A}} = (\mathfrak{a} : s^{n+1})_{\mathbf{A}}$, la suite devient constante. □

8. Anneau intègre versus anneau sans diviseur de zéro

Motivation

La principale motivation de cette section est de fournir une preuve constructive du théorème suivant.

8.1. Théorème. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau normal il en va de même pour* $\mathbf{A}[X]$.

On a vu en comparant les démonstrations du théorème 3.5 et du théorème 4.9 que le cas « normal intègre » (ou normal quasi intègre) se traite plus facilement que le cas « normal tout court ». Pourtant un anneau normal est localement sans diviseur de zéro et dans le cas local, qui sert de référence pour les preuves classiques, après localisation en un idéal premier arbitraire, la différence entre « intègre » et « sans diviseur de zéro » n'est sensible qu'en mathématiques constructives.
Ceci pose un intéressant problème de décryptage des démonstrations classiques qui utilisent un test d'égalité dans un contexte où un tel test fait défaut.
Nous donnons dans cette section des exemples significatifs qui montrent que la stratégie implicitement utilisée pour démontrer le théorème 3.5 peut être souvent appliquée avec succès, sinon toujours.
La stratégie est la suivante. Tout d'abord on vérifie que la démonstration classique du « cas intègre » (voire du cas local intègre) est suffisamment claire pour être rendue constructive.
Ensuite on reprend la démonstration précédente en la modifiant « un petit peu » de façon à ce qu'elle puisse s'appliquer au cas « sans diviseur de zéro ».
Enfin, on traite le cas localement sans diviseur de zéro par la technique usuelle qui consiste à ouvrir deux branches de localisations comaximales pour le calcul chaque fois que nécessaire, et à « recoller » les résultats.
Ainsi on peut voir cette section comme quelques exemples illustrant une *machinerie locale-globale élémentaire des anneaux localement sans diviseur de zéro.*

Un premier exemple

On commence par un énoncé très simple, qui permet de voir les choses fonctionner.

8.2. Lemme. *Si l'anneau* $\mathbf{A}$ *est localement sans diviseur de zéro il en va de même pour l'anneau* $\mathbf{A}[X]$.

D On considère f et g deux polynômes tels que $fg = 0$.
Précisément, $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $g = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j$.
On va trouver u et $v \in \mathbf{A}[X]$, avec $u + v = 1$, $uf = 0$ et $vg = 0$. En fait, on va trouver u et $v \in \mathbf{A}$.

On rappelle d'abord la démonstration donnée dans le cas où l'anneau est non trivial et intègre.
Si $f = 0$, c'est bon. Si un coefficient de f est non nul, le degré de f est un entier $d \geqslant 0$ bien défini. On démontre par récurrence descendante sur j que tous les b_j sont nuls.
Voici la preuve dans le cas sans diviseur de zéro qui en résulte. On doit montrer que $f = 0$ ou $g = 0$ ($u = 1$ ou $v = 1$).
On fait une démonstration par récurrence descendante sur $m + n$.
Si $n = m = 0$, le résultat est clair (on est dans $\mathbf{A}$).
Supposons $n + m \geqslant 1$. Comme $a_n b_m = 0$, on a $a_n = 0$ ou $b_m = 0$. On applique l'hypothèse de récurrence.
Voici enfin la preuve dans le cas localement sans diviseur de zéro qui résulte de la précédente (laquelle fonctionnait notamment dans le cas local).
On fait une démonstration par récurrence descendante sur $m + n$ (avec m et $n \geqslant 0$). L'initialisation pour $n = m = 0$ est immédiate. Voyons l'étape de récurrence.
On a $a_n b_m = 0$, donc il existe s, $t \in \mathbf{A}$ tels que

$$s + t = 1, \quad sa_n = 0 \quad \text{et} \quad tb_m = 0.$$

Si $n > 0$, l'hypothèse de récurrence s'applique aux polynômes sf et g et fournit $u_1, v_1 \in \mathbf{A}[X]$ tels que $u_1 + v_1 = 1$, $u_1 sf = 0$, $v_1 g = 0$.
Si $m > 0$, l'hypothèse de récurrence s'applique aux polynômes f et tg et fournit $u_2, v_2 \in \mathbf{A}[X]$ tels que $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 f = 0$, $v_2 tg = 0$.
Ainsi si n et m sont > 0, on pose $u = su_1 + tu_2$ et $v = sv_1 + tv_2$, et l'on obtient $u + v = 1$, $uf = 0$ et $vg = 0$.
Enfin, si par exemple $n > 0$ et $m = 0$, on reprend le même calcul avec $u_2 = 0$ et $v_2 = 1$: en effet $u_2 f = 0$ et $v_2 tg = tg = tb_0 = 0$. □

Une version généralisée du lemme III-8.11

On cherche maintenant une généralisation du lemme III-8.11 dont nous rappelons l'énoncé.

Lemme III-8.11. *Lorsque* $\mathbf{K}$ *est un corps discret, l'anneau* $\mathbf{K}[X]$ *est intégralement clos.*

La généralisation recherchée consiste à remplacer $\mathbf{K}$ par un anneau réduit $\mathbf{A}$. On doit alors remplacer dans la conclusion « anneau intégralement clos » par « anneau normal ». On a donc en vue une propriété du style : « Si $a \in \mathbf{A}[X]$ est entier sur $b\mathbf{A}[X]$, alors $a \in b\mathbf{A}[X]$ ».
Nous introduisons pour ceci la notion de *pseudo-reste pour la division en puissances croissantes.*
Considérons a et b de degrés formels $\leqslant m$, autrement dit

$$a = \textstyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k \text{ et } b = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j.$$

Nous ne pouvons pas diviser a par b dans $\mathbf{A}[X]$ en puissances croissantes, mais c'est possible lorsque $b_0 = 1$. Le reste à l'ordre m est alors égal au déterminant d'une matrice «de type Sylvester».
Par exemple l'égalité de la division par puissances croissantes à l'ordre 3 est

$$a(X) = b(X)q_3(X) + X^3 s_3(X), \quad \deg(q_3) \leqslant 2.$$

Et le reste $X^3 s_3(X) = r_3(X)$ est égal au déterminant suivant (dans lequel on a mis $\cdot$ à la place de 0 pour plus de lisibilité)

$$X^3 s_3(X) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b(X) \\ \cdot & 1 & b_1 & Xb(X) \\ \cdot & \cdot & 1 & X^2 b(X) \\ a_0 & a_1 & a_2 & a(X) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b(X) \\ \cdot & 1 & b_1 & Xb(X) \\ \cdot & \cdot & 1 & X^2 b(X) \\ \cdot & \cdot & \cdot & r_3(X) \end{vmatrix}.$$

La deuxième matrice est en effet obtenue par manipulations élémentaires de lignes à partir de la première.
Lorsque b_0 n'est plus supposé égal à 1, on définit le *pseudo-reste à l'ordre* 3 *de* a *par* b comme le déterminant suivant :

$$\mathrm{Prsc}_X(a, b, 3) = \begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b(X) \\ \cdot & b_0 & b_1 & Xb(X) \\ \cdot & \cdot & b_0 & X^2 b(X) \\ a_0 & a_1 & a_2 & a(X) \end{vmatrix}.$$

Lorsque b_0 est inversible, la division est encore possible et l'on obtient, au lieu de $\mathrm{Prsc}(a, b, 3) = r_3$, l'égalité $\mathrm{Prsc}(a, b, 3) = b_0^3 r_3$. Ainsi, lorsque l'anneau est intègre et $b_0 \neq 0$, le polynôme $\mathrm{Prsc}(a, b, 3)$ est proportionnel au reste de la division par puissances croissantes à l'ordre 3 opérée dans le corps de fractions.
Lorsque $a_0 = b_0 c$ dans $\mathbf{A}$, on a la version «améliorée» suivante

$$R_3(X) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & b(X) \\ \cdot & b_0 & b_1 & Xb(X) \\ \cdot & \cdot & b_0 & X^2 b(X) \\ c & a_1 & a_2 & a(X) \end{vmatrix}.$$

de sorte que $\mathrm{Prsc}(a, b, 3) = b_0 R_3$ et $R_3 = b_0^2 r_3$.
En développant le déterminant R_3 selon la dernière colonne, on obtient une égalité dans $\mathbf{A}[X]$

$$R_3(X) = b_0^2 a(X) - Q_3(X)b(X), \quad \deg(Q_3) \leqslant 2.$$

Notons enfin dans le cas des corps discrets, que si a et b sont de degrés $\leqslant 2$ et si $b_0 \neq 0$, alors a est multiple de b si, et seulement si, le reste à l'ordre 3 est nul, si, et seulement si, $R_3 = 0$.
On peut généraliser ces définitions pour un reste à un ordre $m \geqslant 1$ arbitraire, sur un anneau $\mathbf{A}$ arbitraire, avec

$$a = \textstyle\sum_{k=0}^{m} a_k X^k \text{ et } b = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j,$$

et en hypotèse une égalité $a_0 = b_0 c$ dans $\mathbf{A}$. On pose alors

$$R_m(X) = \begin{vmatrix} 1 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{m-1} & b(X) \\ 0 & b_0 & \ddots & & & Xb(X) \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_0 & X^{m-1}b(X) \\ c & a_1 & \cdots & \cdots & a_{m-1} & a(X) \end{vmatrix}.$$

En développant ce déterminant selon la dernière colonne, on obtient une égalité dans $\mathbf{A}[X]$

$$\boxed{b_0^{m-1}a(X) = Q_m(X)b(X) + R_m(X), \quad \deg(Q_m) < m,\ R_m \in X^m\mathbf{A}[X]}.$$

Le lemme III-8.11 peut alors se relire comme suit.
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret,* $c \in \mathbf{K}$, $a = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ *et* $b = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in \mathbf{K}[X]$ *avec* $a(X)$ *entier sur l'idéal* $b(X)\mathbf{K}[X]$ *et* $a_0 = b_0 c$. *Alors* $b_0 R_{m+1} = 0$.
Notez que le résultat est bien correct pour toute valeur de b_0, c'est-à-dire y compris lorsque $b_0 = 0$.

8.3. Lemme. (Version du lemme III-8.11 pour un anneau réduit)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau réduit,* $c \in \mathbf{A}$, $a = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ *et* $b = \sum_{j=0}^{m} b_j X^j \in \mathbf{A}[X]$ *avec* $a(X)$ *entier sur l'idéal* $b(X)\mathbf{A}[X]$ *et* $a_0 = b_0 c$. *Alors* $b_0 R_{m+1} = 0$.

D Cela résulte du lemme III-8.11, relu comme ci-dessus, par le Nullstellensatz formel. En effet l'hypothèse selon laquelle a et est entier sur l'idéal $\langle b \rangle$ dans $\mathbf{A}[X]$ signifie une famille d'égalités polynomiales portant sur les coefficients de a, ceux de b et ceux d'autres polynômes $e_j(X)$ donnés implicitement dans l'hypothèse puisqu'on doit avoir une égalité dans $\mathbf{A}[X]$

$$a^p = e_1 b a^{p-1} + \cdots + e_{p-1} b^{p-1} a + e_p b^p.$$

Quant à la conclusion du lemme, elle signifie que certains polynômes en c et en les coefficients de a et b sont nuls. On est donc bien dans le cadre du Nullstellensatz formel III-9.9. □

Démonstration du théorème 8.1

Rappelons d'abord la démonstration constructive donnée dans le cas d'un anneau intégralement clos, c'est-à-dire normal et intègre.

Théorème III-8.12. *Si* $\mathbf{A}$ *est normal intègre, il en est de même pour* $\mathbf{A}[X]$.

D Posons $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$. Si un élément f de $\mathbf{K}(X)$ est entier sur $\mathbf{A}[X]$, il est entier sur $\mathbf{K}[X]$, donc dans $\mathbf{K}[X]$ car $\mathbf{K}[X]$ est intégralement clos (lemme III-8.11). On conclut avec le lemme III-8.4 : tous les coefficients du polynôme f sont entiers sur $\mathbf{A}$, donc dans $\mathbf{A}$. □

Voici ensuite la démonstration « naturelle » du théorème 8.1 en mathématiques classiques.

Démonstration du théorème 8.1 en mathématiques classiques.
Par définition un anneau est normal si, et seulement si, il est intégralement clos après localisation en un idéal premier arbitraire. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier de $\mathbf{A}[X]$ et $\mathfrak{p} = \mathbf{A} \cap \mathfrak{P}$ sa trace sur $\mathbf{A}$. L'anneau $\mathbf{A}[X]_{\mathfrak{P}}$ est un localisé de $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}[X]$, il suffit donc de montrer que $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}[X]$ est intégralement clos. Or $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ est intégralement clos. On termine avec le théorème III-8.12. □

Pour une démonstration constructive, nous appliquerons la stratégie indiquée auparavant et démontrerons d'abord la version sans diviseur de zéro (notez que si l'on était en mathématiques classiques cette deuxième version serait identique à version III-8.12 !).
Nous commençons par un cas particulier, qui est une légère généralisation du lemme III-8.4.

8.4. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est normal sans diviseur de zéro, et si* $q \in \mathbf{A}[X]$ *est entier sur* $\beta\mathbf{A}$ *(*$\beta \in \mathbf{A}$*) alors* $q \in \beta\mathbf{A}[X]$.

▷ Conséquence immédiate de l'exercice 20.
Voici une démonstration alternative. Dans les deux cas on utilise le théorème de Kronecker.
On considère l'anneau $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\frac{1}{\beta}]$ et l'image $\mathbf{C}$ de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$.
On a $\mathbf{C} \simeq \mathbf{A}/(0 : \beta)$. L'élément $\frac{q(X)}{\beta}$ de $\mathbf{B}[X]$ est entier sur $\mathbf{C}[X]$, donc chaque coefficient $\frac{q_k}{\beta}$ de $\frac{q(X)}{\beta}$ est entier sur $\mathbf{C}$ (lemme III-8.4).
En multipliant la relation de dépendance intégrale par la puissance convenable de β, on obtient dans $\mathbf{C}$ une égalité $U_k(q_k, \beta) = 0$ où $U_k(Y, B)$ est un polynôme homogène unitaire en Y. On peut lire les coefficients de U_k dans $\mathbf{A}$, et l'égalité dans $\mathbf{C}$ donne une égalité $\beta U_k(q_k, \beta) = 0$ dans $\mathbf{A}$.
Puisque $\mathbf{A}$ est sans diviseur de zéro on a

$$\beta = 0 \ \text{ ou } \ U_k(q_k, \beta) = 0.$$

Si $\beta = 0$, q est nilpotent donc nul, et $q \in \langle\beta\rangle$.
Dans le deuxième cas, puisque $\mathbf{A}$ est normal et q_k entier sur $\langle\beta\rangle$, on a $q_k = \beta v_k$ pour un certain v_k. En bref on a un polynôme v tel que $q = \beta v$.□

Montrons maintenant la version sans diviseur de zéro du théorème III-8.12.

8.5. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est normal sans diviseur de zéro, il en est de même pour* $\mathbf{A}[X]$.

▷ On a déjà montré (lemme 8.2) que $\mathbf{A}[X]$ est sans diviseur de zéro.
On considère a, $b \in \mathbf{A}[X]$ de degrés formels $\leqslant m$, et l'on suppose que a est entier sur l'idéal $b\mathbf{A}[X]$ (cela correspond dans la démonstration du théorème III-8.12 à la fraction $f = \frac{a}{b}$ entière sur $\mathbf{A}[X]$). On doit montrer que $a \in b\mathbf{A}[X]$. On fait une récurrence sur m. L'initialisation avec $m = 0$

est claire. Supposons $m \geqslant 1$.
Notons $b_0 = b(0)$ et $a_0 = a(0)$. Il est clair que a_0 est entier sur $\langle b_0 \rangle$ dans $\mathbf{A}$. Puisque $\mathbf{A}$ est normal, on a $a_0 = b_0 c$ pour un $c \in \mathbf{A}$. D'après le lemme 8.3 on a $b_0 R_{m+1} = 0$. Donc $b_0 = 0$ ou $R_{m+1} = 0$.
— Si $b_0 = 0$, on a $a_0 = 0$, $b = XB$ et $a = XA$ avec $A, B \in \mathbf{A}[X]$.
Puisque a est entier sur b, A est entier sur B : on a une relation de dépendance intégrale $a^\ell = \sum_{j=1}^{\ell} c_j b^j a^{\ell-j}$, et en divisant par X^ℓ, on obtient l'égalité $A^\ell = \sum_{j=1}^{\ell} c_j B^j A^{\ell-j}$. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence avec A et B.
— Si $R_{m+1} = 0$, on a une égalité $\boxed{b_0^m a = bq}$ dans l'anneau $\mathbf{A}[X]$ avec q de degré formel m.
On pose $\beta = b_0^m$, ce qui donne $\boxed{\beta a(X) = b(X)q(X)}$, et l'on considère une relation de dépendance intégrale de a sur $\langle b \rangle$ dans $\mathbf{A}[X]$

$$a^\ell - \textstyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j b^j a^{\ell-j} = 0 \quad (c_j \in \mathbf{A}[X]).$$

On multiplie par β^ℓ et l'on remplace βa par bq, on obtient

$$b^\ell \big(q^\ell - \textstyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j \beta^j q^{\ell-j}\big) = 0.$$

Puisque $\mathbf{A}[X]$ est sans diviseur de zéro, on a

$$b = 0 \ \text{ ou } \ q^\ell - \textstyle\sum_{j=1}^{\ell} c_j \beta^j q^{\ell-j} = 0.$$

Dans le premier cas a est nilpotent donc nul, et $a \in \langle b \rangle$.
Dans le second cas, q est entier sur $\langle \beta \rangle$. Le lemme 8.4 nous donne un v tel que $q = \beta v$. D'où finalement une égalité $\beta(a - bv) = 0$, ce qui permet de conclure car $a = bv$ ou $\beta = 0$ (cas déjà traité : $b_0 = 0$). □

Démonstration constructive du théorème 8.1. On prend $a(X)$ et $b(X)$ de degrés formels $\leqslant m$. Puisque $\mathbf{A}$ est normal, il est localement sans diviseur de zéro. On remplace chaque disjonction qui apparaît dans le raisonnement précédent lorsqu'un produit est nul par deux localisations comaximales de l'«l'anneau en cours» (au départ il s'agit de $\mathbf{A}$) dans chacune desquelles la démonstration peut se poursuivre.
À la fin, on a des u_i comaximaux dans $\mathbf{A}$; et dans chaque $\mathbf{A}[\frac{1}{u_i}][X]$ on a une égalité $a(X) = b(X)w_i(X)$ avec w_i de degré formel m. Ainsi le système linéaire en les coefficients de $w(X)$ ($\deg(w) \leqslant m$) qui signifie $a(X) = b(X)w(X)$ admet une solution locale. On conclut par le principe local-global de base.□

Notez que la preuve constructive construit un polynôme $w(X)$ vérifiant l'égalité $a(X) = w(X)b(X)$ sans faire appel à aucune hypothèse du type «l'anneau $\mathbf{A}[X]$ possède un test de divisibilité». Cette démonstration ne se contente donc pas de dire abstraitement «cette chose est vraie» (à savoir b divise a dans $\mathbf{A}[X]$). La démonstration classique, elle, certifie la vérité de la conclusion uniquement en un sens affaibli, puisque la construction du polynôme w n'y est indiquée en aucune manière.

Nous devons noter que, contrairement à de très nombreuses démonstrations dans cet ouvrage, qui sont directement simples et élégantes sous forme algorithmique, la preuve constructive demande ici un effort supplémentaire non négligeable par rapport à la démonstration classique. En particulier nous avons dû faire appel au Nullstellensatz formel III-9.9.

Exercices et problèmes

Exercice 1. *(Encore un « determinant trick»)*
Soit E un $\mathbf{A}$-module fidèle engendré par n éléments et $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ deux idéaux de $\mathbf{A}$ vérifiant $\mathfrak{a}E = \mathfrak{b}E$. Montrer que $\mathfrak{a}\mathfrak{b}^{n-1} = \mathfrak{b}^n$.

Exercice 2. *(Matrices de localisation principale* 2×2*)* Soient $x, y \in \mathbf{A}$.
1. Montrer que l'idéal $\langle x, y\rangle$ est localement principal si, et seulement si, il existe une matrice $B \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ de trace 1 vérifiant $[\,x\ y\,]B = 0$; dans ce cas, $A = \widetilde{B}$ est une matrice de localisation principale pour (x, y).
2. Soit $z \in \mathbf{A}$; on suppose qu'il existe un idéal $\mathfrak{b}$ tel que $\langle x, y\rangle\, \mathfrak{b} = \langle z\rangle$. Montrer qu'il existe $B \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ tel que $z[x\ y\,]B = 0$ et $z\big(1 - \mathrm{Tr}(B)\big) = 0$.
3. Déduire des questions précédentes une autre preuve du lemme 3.3.

Exercice 3. *(*$\mathbf{A}$ *arithmétique* $\Leftrightarrow$ $\mathbf{A}(X)$ *Bézout)* Voir aussi l'exercice XVI-5.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $\mathbf{A}(X)$ le localisé de Nagata.
1. Montrer que pour $a, b \in \mathbf{A}$, $a \mid b$ dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, $a \mid b$ dans $\mathbf{A}(X)$.
2. Si $\mathbf{A}$ est un anneau arithmétique et $f \in \mathbf{A}[X]$, on a dans $\mathbf{A}(X)$

$$\langle f\rangle = \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(f)\mathbf{A}(X).$$

Montrer aussi que $\mathbf{A}(X)$ est un anneau de Bézout.
3. Soient x, $y \in \mathbf{A}$. Montrer que si $\langle x, y\rangle$ est localement principal dans $\mathbf{A}(X)$, il est localement principal dans $\mathbf{A}$ (utiliser l'exercice 2). En particulier, si $\mathbf{A}(X)$ est arithmétique, il en est de même de $\mathbf{A}$. A fortiori, si $\mathbf{A}\langle X\rangle$ est arithmétique (notation XVI-4.2), il en est de même de $\mathbf{A}$.
4. Conclure.
NB : sur l'anneau $\mathbf{A}(X)$ voir le fait IX-6.7 et l'exercice IX-20.

Exercice 4. *(Quelques autres propriétés caractéristiques des anneaux arithmétiques)* Pour un anneau $\mathbf{A}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.

(1) $\mathbf{A}$ est un anneau arithmétique.
(2.1) Pour tous idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ on a $\mathfrak{a} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} \cap \mathfrak{c})$.
(2.2) Même chose en se limitant aux idéaux principaux.
(2.3) Même chose en se limitant au cas $\mathfrak{b} = \langle x\rangle$, $\mathfrak{c} = \langle y\rangle$ et $\mathfrak{a} = \langle x + y\rangle$.
(3.1) Pour tous idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ on a $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$.
(3.2) Même chose en se limitant aux idéaux principaux.
(3.3) Même chose en se limitant au cas $\mathfrak{a} = \langle x\rangle$, $\mathfrak{b} = \langle y\rangle$ et $\mathfrak{c} = \langle x + y\rangle$.
(4.1) Pour tous idéaux de type fini $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ on a $(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) : \mathfrak{a} = (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}) + (\mathfrak{c} : \mathfrak{a})$.
(4.2) Même chose avec $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ idéaux principaux et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$.
(5.1) Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ et tous idéaux de type fini $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ on a l'égalité

$$\mathfrak{a} : (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) + (\mathfrak{a} : \mathfrak{c}).$$

(5.2) Même chose avec $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ idéaux principaux et $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}$.
Indication : pour démontrer que les conditions sont nécessaires on utilise la méthode générale expliquée page 469.

Exercice 5. Démontrer en mathématiques classiques qu'un anneau est normal si, et seulement si, il devient normal lorsque l'on localise en un idéal premier arbitraire (rappelons que dans le cas intègre, normal signifie intégralement clos dans son corps de fractions).

Exercice 6. *(Fermeture algébrique : un théorème dû à Zariski)*
Soient $\mathbf{K} \subseteq \mathbf{L}$ deux corps discrets, $\mathbf{K}'$ la fermeture algébrique de $\mathbf{K}$ dans $\mathbf{L}$. Alors la fermeture algébrique de $\mathbf{K}(X_1, \ldots, X_n)$ dans $\mathbf{L}(X_1, \ldots, X_n)$ est $\mathbf{K}'(X_1, \ldots, X_n)$; résultat analogue si l'on remplace fermeture algébrique par fermeture algébrique séparable.

Exercice 7. *(Un défaut d'intégralité par extension des scalaires)*
Soit $\mathbf{k}$ un corps discret de caractéristique $p \geqslant 3$, $a \in \mathbf{k}$ et $f = Y^2 - f(X) \in \mathbf{k}[X, Y]$ avec $f(X) = X^p - a$.
1. Montrer que $Y^2 - f(X)$ est *absolument irréductible*, c'est-à-dire que pour tout surcorps $\mathbf{k}' \supseteq \mathbf{k}$, le polynôme $Y^2 - f(X)$ est irréductible dans $\mathbf{k}'[X, Y]$.
On note $\mathbf{k}[x, y] = \mathbf{k}[X, Y]\big/\big\langle Y^2 - f(X)\big\rangle$ et $\mathbf{k}(x, y) = \mathrm{Frac}(\mathbf{k}[x, y])$.
2. Montrer que $\mathbf{k}$ est algébriquement fermé dans $\mathbf{k}(x, y)$ et que pour toute extension algébrique $\mathbf{k}'$ de $\mathbf{k}$, on a $\mathbf{k}' \otimes_{\mathbf{k}} \mathbf{k}(x, y) = \mathbf{k}'(x, y)$.
3. On suppose que $a \notin \mathbf{k}^p$. Montrer que $\mathbf{k}[x, y]$ est intégralement clos et que $\mathbf{k}(x, y)$ n'est pas un corps de fractions rationnelles à une indéterminée sur $\mathbf{k}$.
4. On suppose $a \in \mathbf{k}^p$ (par exemple $a = 0$). Montrer que $\mathbf{k}[x, y]$ n'est pas intégralement clos et expliciter $t \in \mathbf{k}(x, y)$ tel que $\mathbf{k}(x, y) = \mathbf{k}(t)$.

Exercice 8. *(L'anneau des fonctions sur la droite projective privée d'un nombre fini de points)*
On utilise dans cet exercice de manière informelle les notions de schéma affine et de droite projective qui ont déjà été discutées dans les sections VI-3 et X-4 (voir notamment les pages 569 à 572).
Si $\mathbf{k}$ est un corps discret, la $\mathbf{k}$-algèbre des fonctions polynomiales définies sur la droite affine $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ est $\mathbf{k}[t]$. Si l'on pense à $\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \cup \{\infty\} = \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$, les éléments de $\mathbf{k}[t]$ sont alors les fractions rationnelles sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ qui sont « définies partout, sauf peut-être en ∞ ».
Soient t_1, …, t_r, des points de cette droite affine (on peut avoir $r = 0$).
On munit $\mathbb{A}^1(\mathbf{k}) \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ (droite affine privée de r points) d'une structure de variété affine en forçant l'inversibilité du produit des $t - t_i$, i.e. en définissant

$$\mathbf{B} = \mathbf{k}\big[t, (t - t_1)^{-1}, \ldots, (t - t_r)^{-1}\big] \simeq \mathbf{k}[t, x]/\langle F(t, x)\rangle\,,$$

avec $F(t, x) = (t - t_1) \cdots (t - t_r) \cdot x - 1$. Cette $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{B}$ apparaît alors comme l'algèbre des fractions rationnelles sur $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ définies partout sauf aux points ∞ et t_i. C'est un anneau intégralement clos et même un anneau de Bézout (en effet, c'est un localisé de $\mathbf{k}[t]$).
De manière analogue, pour n points t_1, …, t_n de la droite affine (avec $n \geqslant 1$ cette fois), on peut considérer la $\mathbf{k}$-algèbre

$$\mathbf{A} = \mathbf{k}\big[(t - t_1)^{-1}, \ldots, (t - t_n)^{-1}\big] \subseteq \mathbf{k}(t).$$

Cet anneau $\mathbf{A}$ est un localisé de $\mathbf{k}[(t-t_1)^{-1}]$ (qui est isomorphe à $\mathbf{k}[X]$) puisqu'en posant $v=(t-t_1)^{-1}$, on a $t-t_i=\big((t_1-t_i)v+1\big)/v$. Ainsi,

$$\mathbf{A}=\mathbf{k}\big[v,\big((t_1-t_2)v+1\big)^{-1},\dots,\big((t_1-t_n)v+1\big)^{-1}\big]\subseteq\mathbf{k}(v)=\mathbf{k}(t).$$

La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$ est donc un anneau intégralement clos (et même un anneau de Bézout). En notant $p(t)=(t-t_1)\cdots(t-t_n)$, on a aussi facilement l'égalité

$$\mathbf{A}=\mathbf{k}[1/p,t/p,\dots,t^{n-1}/p].$$

La $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$, constituée des fractions rationnelles u/p^s avec $\deg(u)\leqslant ns$, apparaît comme celle des fractions rationnelles définies partout sur $\mathbb{P}_1(\mathbf{k})$ (y compris au point $t=\infty$) sauf éventuellement aux points t_i. En bref, on peut convenir que $\mathbf{A}$ est la $\mathbf{k}$-algèbre des « fonctions » définies sur la droite projective privée des points t_1, …, t_n.

On étudie dans cet exercice un cas plus général où p est un polynôme unitaire de degré $n\geqslant 1$.

Soit $\mathbf{k}$ un corps discret, $p(t)=t^n+a_{n-1}t^{n-1}+\cdots+a_1t+a_0\in\mathbf{k}[t]$ $(n\geqslant 1)$, où t est une indéterminée. On pose $x_i=\frac{t^i}{p}$.

Montrer que la clôture intégrale de $\mathbf{k}[x_0]$ dans $\mathbf{k}(t)$ est la $\mathbf{k}$-algèbre

$$\mathbf{A}=\mathbf{k}[x_0,\dots,x_{n-1}]=\Big\{\ \tfrac{u}{p^s}\mid s\in\mathbb{N},\ u\in\mathbf{k}[t],\ \deg(u)\leqslant ns\ \Big\}.$$

En outre, $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})=\mathbf{k}(t)$.

Exercice 9. *(Une présentation de l'algèbre des fonctions sur la droite projective privée d'un nombre fini de points)*

Le contexte est celui de l'exercice 8, mais cette fois-ci $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque. On note $p=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0\in\mathbf{k}[t]$ un polynôme unitaire $(a_n=1)$ et

$$\mathbf{A}=\mathbf{k}\big[\tfrac{1}{p},\tfrac{t}{p},\dots,\tfrac{t^{n-1}}{p}\big].$$

On pose $x_i=\frac{t^i}{p}$ pour $i\in[\![0..n-1]\!]$. On peut alors écrire $\mathbf{A}=\mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}$ où $(\underline{X})=(X_0,\dots,X_{n-1})$ et $\mathfrak{a}$ est l'idéal des relateurs pour $(x_0,\dots,x_{n-1})$. Il va se révéler commode de définir x_n par $x_n=\frac{t^n}{p}$; on a donc $x_j=x_0t^j$ et

$$\textstyle\sum_{i=0}^{n}a_ix_i=1\quad\text{ou encore}\quad x_n=1-\sum_{i=0}^{n-1}a_ix_i.$$

L'égalité de droite prouve que $x_n\in\mathbf{A}$.

1. Vérifier que la famille R suivante est constituée de relateurs entre les x_j.

$$R\ :\quad x_ix_j=x_kx_\ell\qquad\text{pour } i+j=k+\ell,\qquad 0\leqslant i,j,k,\ell\leqslant n.$$

On définit la sous-famille $R_{\min}$, constituée de $\frac{n(n-1)}{2}$ relateurs.

$$R_{\min}\ :\quad x_ix_j=x_{i-1}x_{j+1},\qquad 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1.$$

2. Montrer que la famille $R_{\min}$ (donc R aussi) engendre l'idéal des relateurs entre les x_i pour $i\in[\![0..n-1]\!]$. En d'autres terms, si nous notons $\varphi:\mathbf{k}[\underline{X}]\to\mathbf{k}[t,1/p]$ le morphisme défini par $X_i\mapsto x_i$ pour $i\in[\![0..n-1]\!]$, cela signifie que

$$\mathrm{Ker}\,\varphi=\big\langle X_iX_j-X_{i-1}X_{j+1},\ 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n-1\big\rangle\ \ (\text{où } X_n:=1-\textstyle\sum_{i=0}^{n-1}a_iX_i).$$

On pourra faire intervenir le $\mathbf{k}$-module $\mathbf{k}[X_0]\oplus\mathbf{k}[X_0]X_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{k}[X_0]X_{n-1}$.

Exercice 10. *(Les entiers d'Emmanuel)*

Donner une preuve directe du point *1* du lemme 4.7 sans utiliser le théorème de Kronecker.

Exercice 11. *(Une autre démonstration du théorème de Kronecker)*
On considère les polynômes

$$f(T) = a_0T^n + \cdots + a_n, \quad g(T) = b_0T^m + \cdots + b_m \text{ et}$$
$$h(T) = f(T)g(T) = c_0T^{n+m} + \cdots + c_{n+m}.$$

Le théorème de Kronecker III-3.3 affirme que chaque produit a_ib_j est entier sur l'anneau $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[c_0, \ldots, c_{n+m}]$.
Il suffit de traiter le cas où les a_i et b_j sont des indéterminées. Alors dans un anneau contenant $\mathbb{Z}[a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m]$ on a :

$$f(T) = a_0(T - x_1)\cdots(T - x_n), \qquad g(T) = b_0(T - y_1)\cdots(T - y_m).$$

1. En utilisant les entiers d'Emmanuel (lemme 4.7, avec la démonstration donnée dans l'exercice 10, indépendante du théorème de Kronecker), montrer que pour tous $I \subseteq [\![1..n]\!]$, $J \subseteq [\![1..m]\!]$, le produit $a_0b_0 \prod_{i\in I} x_i \prod_{j\in J} y_j$ est entier sur $\mathbf{A}$.
2. Conclure.

Exercice 12. *(Anneau intermédiaire $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$, cas Bézout)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau de Bézout intègre de corps des fractions $\mathbf{K}$ et $\mathbf{B}$ un anneau intermédiaire $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B} \subseteq \mathbf{K}$. Montrer que $\mathbf{B}$ est un localisé de $\mathbf{A}$ (donc un anneau de Bézout).

Exercice 13. *(Anneau intermédiaire, cas Prüfer)*
Dans cet exercice on généralise le résultat de l'exercice 12 au cas où $\mathbf{A}$ est un domaine de Prüfer et l'on précise le théorème 3.6. Il s'agit donc d'une variation autour du théorème de Grell-Noether (page 712).
1. Soit $x \in \mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$.
- *a.* Montrer qu'il existe $s \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$ tel que $sx \in \mathbf{A}$ et $1 - s \in \mathbf{A}x$.
- *b.* Soit $t \in \mathbf{A}$ tel que $tx = 1 - s$. Pour tout anneau $\mathbf{A}'$ intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$, montrer que $\mathbf{A}'[x] = \mathbf{A}'_s \cap \mathbf{A}'_t$. En particulier, $\mathbf{A}[x] = \mathbf{A}_s \cap \mathbf{A}_t$. En conséquence, $\mathbf{A}[x]$ est intégralement clos, et c'est un anneau de Prüfer.

2. Montrer que toute sous-$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ de $\mathbf{K}$ de type fini est intersection d'un nombre fini de localisés de $\mathbf{A}$ de la forme $\mathbf{A}_s$ avec $s \in \mathbf{A}$. En conséquence, $\mathbf{B}$ est intégralement clos, et c'est un anneau de Prüfer.
3. En déduire que tout anneau intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$ est de Prüfer.
4. Donner un exemple d'anneau intégralement clos $\mathbf{A}$, avec un anneau $\mathbf{B}$ intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ qui n'est pas intégralement clos (en particulier, $\mathbf{B}$ n'est pas un localisé de $\mathbf{A}$).

Exercice 14. *(Être primitivement algébrique)*
Soient $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[A, B, U, V]/\langle AU + BV - 1\rangle = \mathbb{Z}[a, b, u, v]$ et $\mathbf{B} = \mathbf{A}[1/b]$.
On pose $x = a/b$. Montrer que x est primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$, mais que $y = 2x$ ne l'est pas.

Exercice 15. *(Caractérisations des anneaux de Prüfer cohérents, 1)*
Soit $\mathbf{A}$ quasi intègre et $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
1. $\mathbf{A}$ est de Prüfer.
2. $\mathbf{A}$ est normal et $x \in \mathbf{A}[x^2]$ pour tout $x \in \mathbf{K}$.
3. Tout anneau $\mathbf{A}[y]$ où $y \in \mathbf{K}$ est normal.
4. Tout anneau intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$ est normal.

5. $\mathbf{A}$ est normal et $x \in \mathbf{A} + x^2\mathbf{A}$ pour tout $x \in \mathbf{K}$.

Exercice 16. *(Caractérisations des anneaux de Prüfer cohérents, 2)*
Pour un anneau $\mathbf{A}$ quasi intègre, les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer.
2. Tout idéal de type fini contenant un élément régulier est inversible.
3. Tout idéal $\mathfrak{a} = \langle x_1, x_2\rangle$ avec x_1, $x_2 \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$ est inversible.
4. Pour tous a, $b \in \mathbf{A}$, on a : $\langle a, b\rangle^2 = \left\langle a^2, b^2\right\rangle = \left\langle a^2 + b^2, ab\right\rangle$.
5. Pour tous f, $g \in \mathbf{A}[X]$, on a : $\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(fg)$.

Exercice 17. *(Une généralisation de la proposition 6.5)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau de Prüfer cohérent local-global (par exemple résiduellement zéro-dimensionnel).

1. Toute matrice est équivalente à une matrice en forme de Smith (i.e. $\mathbf{A}$ est un anneau de Smith).
2. Tout $\mathbf{A}$-module de présentation finie est caractérisé, à isomorphisme près, par ses idéaux de Fitting. En fait il est isomorphe à une somme directe de modules monogènes $\mathbf{A}/\mathfrak{a}_k$ avec des idéaux principaux $\mathfrak{a}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{a}_n$ $(n \geqslant 0)$.
   NB : on peut naturellement en déduire une généralisation analogue du corollaire 6.6.

Exercice 18. *(Idéal réduction d'un autre idéal)*

1. Soient E un $\mathbf{A}$-module engendré par n éléments, $b \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal tels que $bE \subseteq \mathfrak{a}E$. Montrer qu'il existe $d = b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b + a_n$, avec les $a_i \in \mathfrak{a}^i$, qui annule E.

On dit qu'un idéal $\mathfrak{a}$ est une *réduction* d'un idéal $\mathfrak{b}$ si $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ et si $\mathfrak{b}^{r+1} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^r$ pour un certain exposant r (c'est alors vrai pour tous les exposants plus grands).

2. Soient f, $g \in \mathbf{A}[\underline{X}]$. Vérifier que $\mathrm{c}(fg)$ est une réduction de $\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)$.
3. Dans $\mathbf{A}[X, Y]$, montrer que $\mathfrak{a} = \left\langle X^2, Y^2\right\rangle$ est une réduction de $\mathfrak{b} = \langle X, Y\rangle^2$.
   Montrer que $\mathfrak{a}_1 = \left\langle X^7, Y^7\right\rangle$ et $\mathfrak{a}_2 = \left\langle X^7, X^6Y + Y^7\right\rangle$ sont des réductions de
   l'idéal $\mathfrak{b}' = \left\langle X^7, X^6Y, X^2Y^5, Y^7\right\rangle$. Donner les plus petits exposants possibles.
4. Soit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ deux idéaux avec $\mathfrak{b}$ de type fini. Montrer que $\mathfrak{a}$ est une réduction de $\mathfrak{b}$ si, et seulement si, $\mathrm{Icl}(\mathfrak{a}) = \mathrm{Icl}(\mathfrak{b})$.

Exercice 19. *(Anneau normal quasi intègre)*
Voici une légère généralisation du fait 2.2. D'après le problème XIII-1 l'hypothèse est satisfaite pour les anneaux noethériens cohérents réduits fortement discrets (en mathématiques classiques ce sont les anneaux noethériens réduits).
On considère un anneau $\mathbf{A}$ réduit. On suppose que son anneau total des fractions est zéro-dimensionnel.
1. Si $\mathbf{A}$ est normal, il est quasi intègre.
2. L'anneau $\mathbf{A}$ est normal si, et seulement si, il est intégralement clos dans $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$.

Exercice 20. *(Polynôme entier sur $\mathfrak{a}[X]$)*
Soient $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ deux anneaux, $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}[X]$ l'idéal de $\mathbf{A}[X]$ constitué des polynômes à coefficients dans $\mathfrak{a}$. Pour $F \in \mathbf{B}[X]$, montrer que F est entier sur $\mathfrak{a}[X]$ si, et seulement si, chaque coefficient de F est entier sur $\mathfrak{a}$.

Exercice 21. *(Modules indécomposables)*
On dit qu'un module M est *indécomposable* si les seuls sous-modules facteurs directs de M sont 0 et M. Le but de l'exercice est de démontrer que sur un domaine de Dedekind à factorisation totale, tout module de présentation finie est somme directe d'un nombre fini de modules indécomposables, cette décomposition étant unique à l'ordre des termes près lorsque le module est de torsion.
1. Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $\mathfrak{a}$ un idéal. Si le $\mathbf{A}$-module $M = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est somme directe de deux sous-modules N et P on a $N = \mathfrak{b}/\mathfrak{a}$, $P = \mathfrak{c}/\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}$ et $\mathfrak{c} \supseteq \mathfrak{a}$ comaximaux. Précisément, $\mathfrak{b} = \langle b\rangle + \mathfrak{a}$, $\mathfrak{c} = \langle c\rangle + \mathfrak{a}$, où b et c sont des idempotents complémentaires modulo $\mathfrak{a}$.
2. Soit $\mathbf{Z}$ un domaine de Dedekind.
2a. Montrer qu'un module projectif de rang constant 1 est indécomposable.
2b. Montrer qu'un module cyclique $\mathbf{Z}/\mathfrak{a}$ avec $\mathfrak{a}$ de type fini, $\neq \langle 0\rangle$, $\langle 1\rangle$ est indécomposable si, et seulement si, $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}^m$ pour un idéal maximal $\mathfrak{p}$ et un $m \geqslant 1$.
2c. En déduire que si $\mathbf{Z}$ est à factorisation totale, tout module de présentation finie est somme directe d'un nombre fini de modules indécomposables.
3. Lorsque le module est de torsion, montrer l'unicité de la décomposition en un sens à préciser.

Problème 1.
(Sous-anneau d'invariants par un groupe fini et caractère arithmétique)
NB : voir aussi le problème III-8.
1. Si $\mathbf{A}$ est un anneau normal, tout idéal localement principal est intégralement clos. En conséquence, si f, $g \in \mathbf{A}[X]$ avec $\mathrm{c}(fg)$ localement principal, alors $\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(fg)$.
2. On suppose $\mathbf{A}$ normal et $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ entière sur $\mathbf{A}$. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ localement principal, alors $\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{a}$.
3. Soit $(\mathbf{B}, \mathbf{A}, G)$ où $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathbf{B})$ est un groupe fini et $\mathbf{A} = \mathrm{Fix}_{\mathbf{B}}(G) = \mathbf{B}^G$. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathbf{B}$, on note $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = \prod_{\sigma\in G} \sigma(\mathfrak{b})$ (c'est un idéal de $\mathbf{B}$) et $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}) = \mathbf{A} \cap \mathrm{N}'_G(\mathfrak{b})$.
On suppose $\mathbf{B}$ normal et $\mathbf{A}$ de Prüfer (donc normal).

a. Pour $b \in \mathbf{B}$, vérifier que $\mathrm{N}'_G(b\mathbf{B}) = \mathrm{N}_G(b)\mathbf{B}$ et $\mathrm{N}_G(b\mathbf{B}) = \mathrm{N}_G(b)\mathbf{A}$.
b. Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de type fini de $\mathbf{B}$, montrer que $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b})$ est un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ et que $\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = \mathrm{N}_G(\mathfrak{b})\mathbf{B}$. On pourra écrire $\mathfrak{b} = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$, introduire n indéterminées $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ et le polynôme normique $h(\underline{X})$:
$$h(\underline{X}) = \prod_{\sigma\in G} h_\sigma(\underline{X}) \quad \text{avec} \quad h_\sigma(\underline{x}) = \sigma(b_1)X_1 + \cdots + \sigma(b_n)X_n.$$
c. Pour $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ idéaux de type fini de $\mathbf{B}$, on obtient $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = \mathrm{N}_G(\mathfrak{b}_1)\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}_2)$.
d. Un idéal de type fini $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{B}$ est inversible si, et seulement si, $\mathrm{N}_G(\mathfrak{b})$ est inversible dans $\mathbf{A}$.

Note : on sait que $\mathbf{B}$ est un anneau de Prüfer (théorème 3.5) ; dans le cas où $\mathbf{B}$ est intègre, la question *3d* en fournit une nouvelle preuve.
4. Soit $\mathbf{k}$ un corps discret avec $2 \in \mathbf{k}^\times$, $f(X) \in \mathbf{k}[X]$ un polynôme unitaire séparable. Le polynôme $Y^2 - f(X) \in \mathbf{k}[X,Y]$ est absolument irréductible (voir l'exercice 7) ; on pose $\mathbf{k}[x,y] = \mathbf{k}[X,Y]\big/\big\langle Y^2 - f(X)\big\rangle$. Montrer que $\mathbf{k}[x,y]$ est un anneau de Prüfer.

Problème 2. *(Sous-monoïdes pleins de $\mathbb{N}^n$)*
Soit $M \subseteq \mathbb{N}^n$ un sous-monoïde ; pour un anneau $\mathbf{k}$, on note $\mathbf{k}[M]$ la $\mathbf{k}$-algèbre du monoïde M. C'est la sous-$\mathbf{k}$-algèbre de $\mathbf{k}[\mathbb{N}^n] \simeq \mathbf{k}[\underline{x}] = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ engendrée par les monômes $\underline{x}^m = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ pour $m \in M$. On dit que M est un *sous-monoïde plein* de $\mathbb{N}^n$ si pour $m \in M$, $m' \in \mathbb{N}^n$, on a $m + m' \in M \Rightarrow m' \in M$.
1. Le sous-groupe de $\mathbb{Z}^n$ engendré par M est égal à $M - M$, et si M est plein, alors $M = (M - M) \cap \mathbb{N}^n$. Réciproquement, si $L \subseteq \mathbb{Z}^n$ est un sous-groupe, alors le monoïde $M = L \cap \mathbb{N}^n$ est un sous-monoïde plein de $\mathbb{N}^n$.
2. Soit $M \subseteq \mathbb{N}^n$ un sous-monoïde plein et $\mathbf{k}$ un corps discret.

a) Soit $\mathbf{A} = \mathbf{k}[M] \subseteq \mathbf{B} = \mathbf{k}[\underline{x}]$. Montrer que si $a \in \mathbf{A} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{B}$, et $ab \in \mathbf{A}$, alors $b \in \mathbf{A}$.

b) Soient $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ deux anneaux intègres vérifiant : si $a \in \mathbf{A} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbf{B}$, et $ab \in \mathbf{A}$, alors $b \in \mathbf{A}$.

i. Montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$; en déduire que si $\mathbf{B}$ est intégralement clos, il en est de même de $\mathbf{A}$.

ii. En particulier, si $M \subseteq \mathbb{N}^n$ un sous-monoïde plein, alors $\mathbf{k}[M]$ est intégralement clos pour tout corps discret $\mathbf{k}$.

iii. Plus généralement, si $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{C}$ est intégralement fermé dans $\mathbf{C}$, alors $\mathbf{A}$ est intégralement fermé dans $\mathbf{C} \cap \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$.

3. Soit $M \subseteq \mathbb{N}^n$ le sous-monoïde des matrices magiques (voir l'exercice VII-4) ; alors $\mathbf{k}[M]$ est intégralement clos pour tout corps discret $\mathbf{k}$.

Problème 3. *(Base normale à l'infini)*
Un anneau de valuation intègre $\mathbf{B}$ de corps de fractions $\mathbf{K}$ est un anneau de valuation discrète si $\mathbf{K}^\times/\mathbf{B}^\times \simeq \mathbb{Z}$ (isomorphisme de groupes ordonnés). On rappelle qu'une uniformisante est un élément $b \in \mathbf{B}$ tel que $v(b) = 1$, où $v : \mathbf{K}^\times \to \mathbb{Z}$ est l'application définie via l'isomorphisme précédent. Cette application v s'appelle aussi une *valuation du corps* $\mathbf{K}$. Tout élément z de $\mathbf{K}^\times$ s'écrit alors $ub^{v(z)}$ pour un $u \in \mathbf{B}^\times$.
Soient $\mathbf{k}$ un corps discret, t une indéterminée sur $\mathbf{k}$, $\mathbf{A} = \mathbf{k}[t]$, $\mathbf{A}_\infty = \mathbf{k}[t^{-1}]_{\langle t^{-1}\rangle}$, et $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{A}) = \mathbf{k}(t) = \mathrm{Frac}(\mathbf{A}_\infty) = \mathbf{k}(t^{-1})$. Si L est un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on étudie dans ce problème l'intersection d'un $\mathbf{A}$-réseau de L et d'un $\mathbf{A}_\infty$-réseau de L (cf. les définitions question *2*), intersection qui est toujours un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie. Cette étude est, dans la théorie des corps de fonctions algébriques, à la base de la détermination des espaces de Riemann-Roch, quand toutefois certaines clôtures intégrales sont connues par des bases ; comme sous-produit, on obtient la détermination de la fermeture algébrique de $\mathbf{k}$

dans une extension finie de $\mathbf{k}(t)$.
L'anneau $\mathbf{A}_\infty$ est un anneau de valuation discrète ; on note $v : \mathbf{K} \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ la valuation correspondante, définie par $v = -\deg_t$, et l'on fixe $\pi = t^{-1}$ comme uniformisante. Si $x = {}^t[x_1, \dots, x_n]$, on pose $v(x) = \min_i v(x_i)$. Ceci permet de définir une *réduction modulaire*

$$\mathbf{K}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{k}^n \setminus \{0\}, \quad x \mapsto \xi = \overline{x},$$

avec $\xi_i = (x_i/\pi^{v(x)}) \bmod \pi \in \mathbf{k}$.
De manière générale, si $\mathbf{V}$ est un anneau de valuation d'un corps discret $\mathbf{K}$, de corps résiduel $\mathbf{k}$, on a une *réduction* :

$$\mathbb{P}^m(\mathbf{K}) \to \mathbb{P}^m(\mathbf{k}), \qquad (x_0 : \dots : x_m) \mapsto (\xi_0 : \dots : \xi_m) \quad \text{avec } \xi_i = \overline{x_i/x_{i_0}},$$

où $x_{i_0} \,|\, x_i$ pour tout i ; l'élément $(\xi_0 : \dots : \xi_n) \in \mathbb{P}^m(\mathbf{k})$ est bien défini : il correspond à un vecteur unimodulaire de $\mathbf{V}^{m+1}$. En bref on a un « isomorphisme » $\mathbb{P}^m(\mathbf{V}) \simeq \mathbb{P}^m(\mathbf{K})$ et une réduction $\mathbb{P}^m(\mathbf{V}) \to \mathbb{P}^m(\mathbf{k})$.
Ici le choix de l'uniformisante $\pi = t^{-1}$ donne une définition directe, sans passer au projectif, de la réduction $\mathbf{K}^n \setminus \{0\} \to \mathbf{k}^n \setminus \{0\}$.
On dira qu'une matrice $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K})$ de colonnes $(A_1, \dots, A_n)$ est $\mathbf{A}_\infty$-*réduite* si la matrice $\overline{A} \in \mathbb{M}_n(\mathbf{k})$ est dans $\mathbb{GL}_n(\mathbf{k})$.
1. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K})$ de colonnes $A_1, \dots, A_n$. Montrer que $\sum_{j=1}^n v(A_j) \leqslant v(\det A)$.
2. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K})$; calculer $Q \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ telle que AQ soit $\mathbf{A}_\infty$-réduite. Ou encore : soit $E \subset \mathbf{K}^n$ un $\mathbf{A}$-réseau, i.e. un $\mathbf{A}$-module libre de rang n ; alors E admet une $\mathbf{A}$-base $\mathbf{A}_\infty$-réduite (une base $(A_1, \dots, A_n)$ telle que $(\overline{A_1}, \dots, \overline{A_n})$ soit une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{k}^n$). On pourra commencer par l'exemple $A = \begin{bmatrix} \pi^2 & \pi \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

3. Pour $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_\infty)$, montrer les points suivants.
- *a.* P est une v-isométrie, i.e. $v(Px) = v(x)$ pour tout $x \in \mathbf{K}^n$.
- *b.* Pour tout $x \in \mathbf{K}^n \setminus \{0\}$, $\overline{Px} = \overline{P}\,\overline{x}$.
- *c.* Si la matrice $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K})$ est $\mathbf{A}_\infty$-réduite, il en est de même de PA.

4. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K})$ triangulaire. Que signifie « A est $\mathbf{A}_\infty$-réduite » ?
5. Soit $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K})$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$, $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_\infty)$ et des entiers $d_i \in \mathbb{Z}$ tels que $PAQ = \mathrm{Diag}(t^{d_1}, \dots, t^{d_n})$; de plus, si l'on range les d_i par ordre croissant, ils sont uniques.
6. Soit L un $\mathbf{K}$-espace vectoriel de dimension n, $E \subset L$ un $\mathbf{A}$-réseau, et $E' \subset L$ un $\mathbf{A}_\infty$-réseau.
- *a.* Montrer qu'il existe une $\mathbf{A}$-base $(e_1, \dots, e_n)$ de E, une $\mathbf{A}_\infty$-base $(e'_1, \dots, e'_n)$ de E' et des entiers $d_1, \dots, d_n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $e'_i = t^{d_i} e_i$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. De plus, les d_i rangés par ordre croissant ne dépendent que de (E, E').
- *b.* En déduire que $E \cap E'$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie. De manière précise :

$$E \cap E' = \bigoplus_{d_i \geqslant 0} \bigoplus_{j=0}^{d_i} \mathbf{k} t^j e_i,$$

et en particulier :

$$\dim_{\mathbf{k}}(E \cap E') = \sum_{d_i \geqslant 0}(1 + d_i) = \sum_{d_i \geqslant -1}(1 + d_i)$$

7. On suppose que $\mathbf{L}$ est une $\mathbf{K}$-extension finie de degré n. On définit des clôtures intégrales dans $\mathbf{L}$: $\mathbf{B}$ celle de $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}_\infty$ celle de $\mathbf{A}_\infty$ et $\mathbf{k}'$ celle de $\mathbf{k}$. On dit qu'une base $(\underline{e}) = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbf{B}$ sur $\mathbf{A}$ est *normale à l'infini* s'il existe $r_1, \dots, r_n \in \mathbf{K}^*$ tels que $(r_1 e_1, \dots, r_n e_n)$ est une $\mathbf{A}_\infty$-base de $\mathbf{B}_\infty$. Montrer que les éléments de la

base (*e*) « entiers à l'infini », i.e. qui appartiennent à $\mathbf{B}_\infty$, forment une $\mathbf{k}$-base de l'extension $\mathbf{k}'$.
8. Soit $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$, $\mathbf{L} = \mathbf{k}[X,Y]\big/\langle X^2+Y^2\rangle = \mathbf{k}[x,y]$, $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x]$.
Montrer que $(y+1, y/x)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$ mais qu'elle n'est pas normale à l'infini. Expliciter une base normale à l'infini de $\mathbf{B}/\mathbf{A}$.

Problème 4. *(Anneau des fonctions d'une courbe hyper-elliptique affine ayant un seul point à l'infini)*
On utilisera ici une notion de *norme d'un idéal* dans le contexte suivant : $\mathbf{B}$ étant une $\mathbf{A}$-algèbre libre de rang fini n et $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini de $\mathbf{B}$, la norme de $\mathfrak{b}$ est l'idéal

$$\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) = \mathrm{N}(\mathfrak{b}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{F}_{\mathbf{A},0}(\mathbf{B}/\mathfrak{b}) \subseteq \mathbf{A}.$$

Il est clair que pour $b \in \mathbf{B}$, $\mathrm{N}(b\mathbf{B}) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(b)\mathbf{A}$, que $\mathrm{N}(\mathfrak{a}\mathbf{B}) = \mathfrak{a}^n$ pour $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ et que $\mathfrak{b}_1 \subseteq \mathfrak{b}_2 \Rightarrow \mathrm{N}(\mathfrak{b}_1) \subseteq \mathrm{N}(\mathfrak{b}_2)$.
Soit $\mathbf{k}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, $f = f(X) \in \mathbf{k}[X]$ un polynôme unitaire séparable de degré impair $2g+1$. Le polynôme $Y^2 - f(X) \in \mathbf{k}[X,Y]$ est absolument irréductible ; on pose $\mathbf{B} = \mathbf{k}[X,Y]\big/\langle Y^2 - f(X)\rangle = \mathbf{k}[x,y]$ et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x] \simeq \mathbf{k}[X]$.
L'anneau $\mathbf{B}$ est intègre, c'est un $\mathbf{A}$-module libre de base $(1, y)$. Pour $z = a + by$ avec a, $b \in \mathbf{A}$, on note $\overline{z} = a - yb$, et $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}$: $\mathrm{N}(z) = z\overline{z} = a^2 - fb^2$.
Le but du problème est de paramétrer les idéaux de type fini non nuls de $\mathbf{B}$, de montrer que $\mathbf{B}$ est un anneau de Prüfer et d'étudier le groupe $\mathrm{Cl}(\mathbf{B})$ des classes d'idéaux inversibles de $\mathbf{B}$.
Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de type fini de $\mathbf{B}$, son *contenu* est l'idéal de Fitting $\mathcal{F}_{\mathbf{A},1}(\mathbf{B}/\mathfrak{b})$.
À deux éléments u, $v \in \mathbf{A}$ vérifiant $v^2 \equiv f \bmod u$, on associe le sous-$\mathbf{A}$-module de $\mathbf{B}$: $\mathfrak{b}_{u,v} = \mathbf{A}u + \mathbf{A}(y - v)$. On a $u \neq 0$ parce que f est séparable. On fera parfois intervenir le polynôme $w \in \mathbf{A}$ tel que $v^2 - uw = f$ et l'on notera $\mathfrak{b}_{u,v,w}$ au lieu de $\mathfrak{b}_{u,v}$ (même si w est complètement déterminé par u, v).
1. Montrer que $\mathfrak{b}_{u,v}$ est un idéal de $\mathbf{B}$ et que $\mathfrak{b}_{u,v} = \mathbf{A}u \oplus \mathbf{A}(y-v)$. Réciproquement, pour $u, v \in \mathbf{A}$, si $\mathbf{A}u + \mathbf{A}(y-v)$ est un idéal de $\mathbf{B}$, alors $v^2 \equiv f \bmod u$.
2. Montrer que $\mathbf{A} \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}_{u,v}$ induit un isomorphisme $\mathbf{A}/\mathbf{A}u \simeq \mathbf{B}/\mathfrak{b}_{u,v}$; en conséquence, $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(\mathbf{B}/\mathfrak{b}_{u,v}) = \mathbf{A}u$. En déduire « l'unicité de u » :

$$u_1,\ u_2 \text{ unitaires et } \mathfrak{b}_{u_1,v_1} = \mathfrak{b}_{u_2,v_2} \implies u_1 = u_2.$$

Vérifier également que $\mathrm{N}(\mathfrak{b}_{u,v}) = u\mathbf{A}$ et que v est unique modulo u :

$$\mathfrak{b}_{u,v_1} = \mathfrak{b}_{u,v_2} \iff v_1 \equiv v_2 \bmod u.$$

3. Montrer que

$$\mathfrak{b}_{u,v,w}\mathfrak{b}_{w,v,u} = \langle y - v\rangle_{\mathbf{B}}, \qquad \mathfrak{b}_{u,v}\mathfrak{b}_{u,-v} = \langle u\rangle_{\mathbf{B}}.$$

En conséquence, l'idéal $\mathfrak{b}_{u,v}$ est inversible.
De plus, pour $u = u_1u_2$ vérifiant $v^2 \equiv f \bmod u$, on a $\mathfrak{b}_{u,v} = \mathfrak{b}_{u_1,v}\,\mathfrak{b}_{u_2,v}$.
4. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini non nul de $\mathbf{B}$.

a. Montrer qu'il existe deux polynômes unitaires uniques d, $u \in \mathbf{A}$ et $v \in \mathbf{A}$ avec $v^2 \equiv f \bmod u$, tels que $\mathfrak{b} = d\,\mathfrak{b}_{u,v}$. En conséquence, $\mathfrak{b}$ est un idéal inversible (donc $\mathbf{B}$ est un anneau de Prüfer). De plus, v est unique modulo u, donc unique si l'on impose $\deg v < \deg u$.

b. En déduire que $\mathfrak{b}\overline{\mathfrak{b}} = \mathrm{N}(\mathfrak{b})\mathbf{B}$ puis que la norme est multiplicative sur les idéaux.

c. Montrer que $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie.
Montrer que $\dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{B}/\mathfrak{b}) = \dim_{\mathbf{k}}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ avec $\mathfrak{a} = \mathrm{N}(\mathfrak{b})$. Cet entier sera noté $\deg(\mathfrak{b})$. Vérifier que $\deg(\mathfrak{b}_{u,v}) = \deg u$, que $\deg(\mathfrak{b}) = \deg \mathrm{N}(\mathfrak{b})$, et enfin que deg est additif, i.e. que $\deg(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = \deg(\mathfrak{b}_1) + \deg(\mathfrak{b}_2)$.

Soient u, $v \in \mathbf{A}$ avec $v^2 \equiv f \bmod u$. On dit que *le couple* (u, v) *est réduit* si u est unitaire et $\boxed{\deg v < \deg u \leqslant g}$. Par abus de langage, on dit aussi que $\mathfrak{b}_{u,v}$ est réduit. Par exemple, si (x_0, y_0) est un point de la courbe hyperelliptique $y^2 = f(x)$, son idéal $\langle x - x_0, y - y_0\rangle$ est un idéal réduit (prendre $u(x) = x - x_0$, $v = y_0$).

5. Montrer que tout idéal de type fini non nul de $\mathbf{B}$ est associé à un idéal réduit de $\mathbf{B}$ (deux idéaux $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{a}'$ sont dits *associés* s'il existe deux éléments réguliers a et a' tels que $a\mathfrak{a}' = a'\mathfrak{a}$, on note alors $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}'$).

6. Dans cette question, pour un idéal de type fini non nul $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{B}$, on désigne par $\mathrm{N}(\mathfrak{b})$ le polynôme unitaire générateur de l'idéal $\mathrm{N}_{\mathbf{B}/\mathbf{A}}(\mathfrak{b})$. Soit $\mathfrak{b}_{u,v}$ un idéal réduit.

a. Soit $z \in \mathfrak{b}_{u,v} \setminus \{0\}$ de sorte que $u = \mathrm{N}(\mathfrak{b}_{u,v}) \mid \mathrm{N}(z)$, i.e. $\mathrm{N}(z)/\mathrm{N}(\mathfrak{b}_{u,v})$ est un polynôme. Montrer que

$$\deg\left(\mathrm{N}(z)/\mathrm{N}(\mathfrak{b}_{u,v})\right) \geqslant \deg u,$$

avec l'égalité si, et seulement si, $z \in \mathbf{k}^\times u$.

b. Soit $\mathfrak{b}'$ un idéal de type fini de $\mathbf{B}$ vérifiant $\mathfrak{b}' \sim \mathfrak{b}_{u,v}$. Montrer que $\deg(\mathfrak{b}') \geqslant \deg(\mathfrak{b}_{u,v})$ avec l'égalité si, et seulement si, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_{u,v}$. En résumé, dans une classe d'idéaux inversibles de $\mathbf{B}$, il y a donc un et un seul idéal de degré minimum : c'est l'unique idéal réduit de la classe.

7a. Montrer que la courbe affine $y^2 = f(x)$ est lisse ; de manière précise, en posant $F(X, Y) = Y^2 - f(X) \in \mathbf{k}[X, Y]$, montrer que $1 \in \langle F, F'_X, F'_Y\rangle$; cela utilise uniquement le fait que f est séparable et que la caractéristique de $\mathbf{k}$ est distincte de 2, pas le fait que f est de degré impair.

Si $\mathbf{k}$ est algébriquement clos, on obtient ainsi une correspondance biunivoque entre les points $p_0 = (x_0, y_0)$ de la courbe affine $y^2 = f(x)$ et les anneaux de valuation (discrète) $\mathbf{W}$ de $\mathbf{k}(x, y)$ contenant $\mathbf{B} = \mathbf{k}[x, y]$: à p_0, on associe son anneau local $\mathbf{W}$ et dans l'autre sens, à $\mathbf{W}$ on associe le point $p_0 = (x_0, y_0)$ tel que $\langle x - x_0, y - y_0\rangle_{\mathbf{B}} = \mathbf{B} \cap \mathfrak{m}(\mathbf{W})$.

b. On étudie maintenant « les points à l'infini de la courbe projective lissifiée », à l'infini relativement au modèle $y^2 = f(x)$. De manière algébrique, il s'agit des anneaux de valuation pour $\mathbf{k}(x, y)$ ne contenant pas $\mathbf{B}$ (mais contenant $\mathbf{k}$ bien entendu). Soit l'anneau de valuation discrète $\mathbf{A}_\infty = \mathbf{k}[x^{-1}]_{\langle x^{-1}\rangle}$. Montrer qu'il existe un et un seul anneau $\mathbf{B}_\infty$, $\mathbf{A}_\infty \subseteq \mathbf{B}_\infty \subseteq \mathrm{Frac}(\mathbf{B}) = \mathbf{k}(x, y)$, ayant $\mathrm{Frac}(\mathbf{B})$ pour corps de fractions. Montrer que $\mathbf{B}_\infty$ est un anneau de valuation discrète, que $\mathbf{B}_\infty/\mathfrak{m}(\mathbf{B}_\infty) \simeq \mathbf{A}_\infty/\mathfrak{m}(\mathbf{A}_\infty) \simeq \mathbf{k}$ et que c'est le seul point à l'infini.

Problème 5. *(Trifolium : clôture intégrale et paramétrisation)*
Soit $\mathbf{k}$ un corps discret et

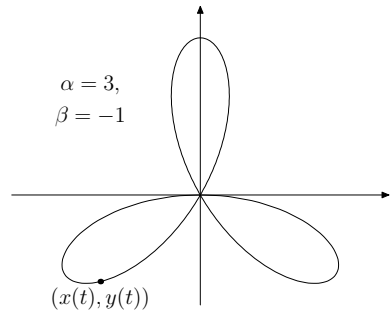
$$F(X, Y) = (X^2 + Y^2)^2 + \alpha X^2 Y + \beta Y^3,$$

avec $\alpha \neq \beta$ dans $\mathbf{k}$.

On étudie la courbe $F(x,y) = 0$, ses points singuliers, son corps de fonctions

$$\mathbf{L} = \mathbf{k}(x,y)$$

(on va montrer que F est irréductible), son anneau de fonctions $\mathbf{k}[x,y]$, la clôture intégrale $\mathbf{B}$ de $\mathbf{k}[x,y]$ dans $\mathbf{L}$ ... etc ...
On note que $F(-X,Y) = F(X,Y)$ et donc l'involution $(x,y) \mapsto (-x,y)$ laisse invariante la courbe $F(x,y) = 0$.
Ci-contre, un exemple d'une telle courbe.



1. Montrer que F est un polynôme absolument irréductible. Plus généralement : soit $\mathbf{k}$ un anneau intègre, $\mathbf{k}[\underline{T}]$ un anneau de polynômes à plusieurs indéterminées et $F \in \mathbf{k}[\underline{T}]$, $F = F_N + F_{N+1}$ avec F_N, F_{N+1} homogènes non nuls, de degrés respectifs N, $N+1$. Alors, dans toute factorisation $F = GH$, l'un des deux polynômes G ou H est homogène ; enfin, si $\mathbf{k}$ est un corps, alors F est irréductible si, et seulement si, F_N, F_{N+1} sont premiers entre eux.
2. Déterminer les points singuliers de la courbe $F = 0$.
On note $\mathbf{L} = \mathbf{k}(x,y)$ et $\mathbf{B}$ la clôture intégrale de $\mathbf{k}[x,y]$ dans $\mathbf{L}$.
3. Soit $t = y/x$ de sorte que $\mathbf{L} = \mathbf{k}(x,t)$.

a. Déterminer une équation primitive algébrique de t sur $\mathbf{k}[x]$.
On note $G(X,T) = a_4T^4 + \cdots + a_1T + a_0 \in \mathbf{k}[X][T]$, avec $a_i = a_i(X) \in \mathbf{k}[X]$, un tel polynôme primitif, vérifiant donc $G(x,t) = 0$. Vérifier que $(x,t) = (0,0)$ est un point non singulier de la courbe $G = 0$.

b. Déterminer les entiers d'Emmanuel b_4, ..., b_1 associés à (G,t) avec $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x]$ comme anneau de base (lemme 4.7). En déduire une matrice de localisation principale pour (x,y) et préciser l'idéal $\mathfrak{q}$ de $\mathbf{B}$ que $\langle x\rangle_{\mathbf{B}} = \mathfrak{q}\,\langle x,y\rangle_{\mathbf{B}}$.

4. Montrer que $\mathbf{L} = \mathbf{k}(t)$ et exprimer x, y comme éléments de $\mathbf{k}(t)$.
5. Détermination de la clôture intégrale $\mathbf{B}$ de $\mathbf{k}[x,y]$ dans $\mathbf{L}$.

a. Montrer que $\mathbf{B} = \mathbf{k}[g_0, g_1]$ avec $g_0 = 1/(1+t^2)$ et $g_1 = tg_0$. Exprimer x, y dans $\mathbf{k}[g_0,g_1]$. Quelle est « l'équation » liant g_0 et g_1 ?

b. Montrer que $(1, y, b_3t, b_2t)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$.

c. Vérifier que $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{B}\big/\langle x,y\rangle_{\mathbf{B}} = 3$.

6. On note $\mathbf{V}$ l'anneau de valuation [7] de $\mathbf{L}$ défini par le point non singulier $(0,0)$ de la courbe $G = 0$. C'est le seul anneau de valuation de $\mathbf{L}$ contenant $\mathbf{k}$ et tel que x, $t \in \operatorname{Rad}\mathbf{V}$ (et donc aussi $y \in \operatorname{Rad}\mathbf{V}$).
On considère l'idéal premier $\mathfrak{p}_1 = (\operatorname{Rad}\mathbf{V}) \cap \mathbf{B}$. Montrer que :

$$\mathfrak{p}_1 = \langle x, y, b_4t, b_3t, b_2t, b_1t\rangle = \langle g_0 - 1, g_1\rangle \quad \text{et} \quad \mathbf{B}/\mathfrak{p}_1 = \mathbf{k},$$

et vérifier que $\mathfrak{p}_1^2 = \langle g_0 - 1, g_1^2\rangle$.
7. Déterminer la factorisation dans $\mathbf{B}$ de l'idéal $\langle x,y\rangle_{\mathbf{B}}$ en produit d' idéaux premiers. La réponse n'est pas uniforme en (α,β), contrairement à la détermination de la clôture intégrale $\mathbf{B}$ de $\mathbf{A}$.
8. Reprendre les questions en supposant seulement que $\mathbf{k}$ est un anneau intégralement clos et que $\beta - \alpha \in \mathbf{k}^\times$.

---

7. Un sous-anneau $\mathbf{V}$ d'un corps discret $\mathbf{L}$ est appelé un *anneau de valuation de* $\mathbf{L}$ si pour tout $x \in \mathbf{L}^\times$ on a $x \in \mathbf{V}$ ou $x^{-1} \in \mathbf{V}$.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 1. Il faut montrer l'inclusion $\mathfrak{b}^n \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{n-1}$. Soient $(x_1, \dots, x_n)$ un système générateur de E, $X = {}^t[\,x_1 \ \cdots \ x_n\,]$, b_1, …, $b_n \in \mathfrak{b}$ et $B = \mathrm{Diag}(b_1, \dots, b_n)$. Puisque $b_i x_i \in \mathfrak{a}E$ $(i \in [\![1..n]\!])$, il existe $A \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{a})$ telle que $BX = AX$.
Soit $C = B - A$, il vient $CX = 0$, et puisque E est fidèle, $\det C = 0$. On développe ce déterminant, il vient $b_1 \cdots b_n + a = 0$ avec $a \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{n-1}$ (car $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$).

Exercice 2. *1.* Immédiat, car si $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$, alors $\widetilde{B} = \begin{bmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ -b_{21} & b_{11} \end{bmatrix}$ et $[x\ y]B = [x'\ y']$ avec :

$$x' = -\begin{vmatrix} -b_{21} & b_{11} \\ x & y \end{vmatrix}, \quad y' = \begin{vmatrix} b_{22} & -b_{12} \\ x & y \end{vmatrix}.$$

2. On a u, $v \in \mathfrak{b}$ avec $z = ux + vy$ et ux, uy, vx, vy multiples de z, ce que l'on écrit $\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}[v \ -u] = zB$. Comme $[x\ y]\begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} = 0$, on a $[x\ y]zB = 0$; de plus $\mathrm{Tr}(zB) = yv + xu = z$.
3. Dans le lemme en question, $z = x^n$ et l'anneau est localement sans diviseur de zéro. Les égalités $x^n[x\ y]B = 0$ et $x^n\big(1 - \mathrm{Tr}(B)\big) = 0$ fournissent deux localisations comaximales de $\mathbf{A}$: une dans laquelle $x^n = 0$, auquel cas $x = 0$ car l'anneau $\mathbf{A}$ et son localisé sont réduits, et l'autre dans laquelle $[x\ y]B = 0$ et $\mathrm{Tr}(B) = 1$. Dans chacune d'entre elles, $\langle x, y\rangle$ est localement principal donc il l'est dans $\mathbf{A}$.

Exercice 3. *1.* En effet, $\mathbf{A}(X)$ est fidèlement plat sur $\mathbf{A}$.
2. Soit $f = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbf{A}[X]$. Pour chaque k, on a dans $\mathbf{A}$ une égalité

$$\langle a_0, \dots, a_n\rangle\, \langle b_{0,k}, \dots, b_{n,k}\rangle = \langle a_k\rangle \text{ avec } a_0 b_{0,k} + \cdots + a_n b_{n,k} = a_k.$$

Considérons alors le polynôme $g_k = \sum_{j=0}^{n} b_{j,k} X^{n-j}$. Tous les coefficients de fg_k sont dans $\langle a_k\rangle$. On peut donc écrire $fg_k = a_k h_k$ avec le coefficient de degré k dans h_k égal à 1. Ceci implique que dans $\mathbf{A}(X)$, $a_k \in \langle f\rangle$. Or on a $f \in \langle a_0, \dots, a_n\rangle$ dans $\mathbf{A}[X]$. Ainsi, dans $\mathbf{A}(X)$, $\langle f\rangle = \langle a_0, \dots, a_n\rangle$.
On en déduit que $\mathbf{A}(X)$ est un anneau de Bézout, car pour f_0, …, $f_m \in \mathbf{A}[X]$ de degrés $< d$, une conséquence du résultat précédent est que dans $\mathbf{A}(X)$:

$$\langle f_0, \dots, f_m\rangle = \left\langle f_0 + X^d f_1 + \cdots + X^{dm} f_m \right\rangle.$$

3. D'après l'exercice 2, (x, y) admet une matrice de localisation principale sur $\mathbf{B}$ si, et seulement si, il existe $B \in \mathbb{M}_2(\mathbf{B})$ de trace 1 vérifiant $[x\ y]B = [0\ 0]$.
Soit donc $B \in \mathbb{M}_2\big(\mathbf{A}(X)\big)$ vérifiant $[x\ y]B = [0\ 0]$ et $\mathrm{Tr}(B) = 1$.
En multipliant les coefficients de B par un dénominateur commun, on obtient des éléments p, q, r, s de $\mathbf{A}[X]$ tels que $[x\ y]\begin{bmatrix} p & q \\ r & s \end{bmatrix} = [0\ 0]$ et $p + s$ primitif. On a donc (avec $p = \sum_k p_k X^k, \dots$) : $[x\ y]\begin{bmatrix} p_i & q_i \\ r_i & s_i \end{bmatrix} = [0\ 0]$. Comme $p+s$ est primitif, on a des $u_i \in \mathbf{A}$ tels que $\sum u_i(p_i + s_i) = 1$. Soit $B' = \sum_i u_i \begin{bmatrix} p_i & q_i \\ r_i & s_i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$: on obtient $[x\ y]B' = [0\ 0]$ avec $\mathrm{Tr}(B') = 1$.
4. $\mathbf{A}\langle X\rangle$ arithmétique $\Rightarrow$ $\mathbf{A}$ arithmétique et

$$\mathbf{A} \text{ arithmétique} \iff \mathbf{A}(X) \text{ arithmétique} \iff \mathbf{A}(X) \text{ Bézout.}$$

La dernière équivalence résulte aussi du principe local-global IX-6.10. En outre, le monoïde de la divisibilité dans $\mathbf{A}(X)$, i.e. $\mathbf{A}(X)/\mathbf{A}(X)^\times$, est isomorphe au monoïde des idéaux de type fini de $\mathbf{A}$.

Exercice 6. On montre seulement le premier point. Il est clair que $\mathbf{K}'(\underline{X})$ est algébrique sur $\mathbf{K}(\underline{X})$.
Réciproquement, soit $z \in \mathbf{L}(\underline{X})$ algébrique sur $\mathbf{K}(\underline{X})$, il existe $a \in \mathbf{K}[\underline{X}]$ non nul tel que az soit entier sur $\mathbf{K}[\underline{X}]$, a fortiori sur $\mathbf{L}[\underline{X}]$. Comme $\mathbf{L}[\underline{X}]$ est un anneau à pgcd, on a $az \in \mathbf{L}[\underline{X}]$. Par ailleurs, on sait que la clôture intégrale de $\mathbf{K}[\underline{X}]$ dans $\mathbf{L}[\underline{X}]$ est $\mathbf{K}'[\underline{X}]$ (lemme III-8.4) ; donc $az \in \mathbf{K}'[\underline{X}]$ puis $z = (az)/a \in \mathbf{K}'(\underline{X})$.

Exercice 7. *1.* Immédiat.
Dans la suite on va utiliser le fait que $(1, y)$ est une $\mathbf{k}[x]$-base de $\mathbf{k}[x, y]$; c'est aussi une $\mathbf{k}(x)$-base de $\mathbf{k}(x, y)$ et l'extension $\mathbf{k}(x, y)/\mathbf{k}(x)$ est galoisienne de groupe $\langle\sigma\rangle$ où $\sigma : \mathbf{k}(x, y) \to \mathbf{k}(x, y)$ est le $\mathbf{k}(x)$-automorphisme involutif qui réalise $y \mapsto -y$.
2. Soit $z = u(x) + yv(x) \in \mathbf{k}(x, y)$ algébrique sur $\mathbf{k}$.
Alors $z + \sigma(z) = 2u$ et $z\sigma(z) = u^2 - fv^2$ sont algébriques sur $\mathbf{k}$ et dans $\mathbf{k}(x)$ donc dans $\mathbf{k}$. D'où $u \in \mathbf{k}$, $v = 0$ et $z = u \in \mathbf{k}$.
3. Comme $a \notin \mathbf{k}^p$, on voit facilement que $f(X)$ est irréductible dans $\mathbf{k}[X]$. Montrons que $\mathbf{k}[x, y]$ est la clôture intégrale de $\mathbf{k}[x]$ dans $\mathbf{k}(x, y)$.
Soit $z = u(x) + yv(x) \in \mathbf{k}(x, y)$ entier sur $\mathbf{k}[x]$.
Alors $z + \sigma(z) = 2u$ et $z\sigma(z) = u^2 - fv^2$ sont dans $\mathbf{k}(x)$ et entiers sur $\mathbf{k}[x]$, donc dans $\mathbf{k}[x]$. Ainsi u et $fv^2 \in \mathbf{k}[x]$. En utilisant le fait que f est irréductible, on voit que $v \in \mathbf{k}[x]$. Bilan : $z \in \mathbf{k}[x, y]$.
4. Soit $\alpha = a^{1/p} \in \mathbf{k}$, d'où $f(X) = (X - \alpha)^p$. On pose $t = y/(x - \alpha)^{\frac{p-1}{2}}$.
Alors $t^2 = x - \alpha$, donc $x \in \mathbf{k}[t]$. Et $y = t(x - \alpha)^{\frac{p-1}{2}} = t^p \in \mathbf{k}[t]$.
Donc $\mathbf{k}[x, y] \subseteq \mathbf{k}[t]$ et $\mathbf{k}(x, y) = \mathbf{k}(t)$. On voit que t est entier sur $\mathbf{k}[x]$, mais que $t \notin \mathbf{k}[x, y] = \mathbf{k}[x] \oplus \mathbf{k}[x]y$. La clôture intégrale de $\mathbf{k}[x]$ (ou celle de $\mathbf{k}[x, y]$) dans $\mathbf{k}(x, y)$ est $\mathbf{k}[t]$ (qui contient bien x et y).

Exercice 8. Rappelons que $x_0 = \frac{1}{p}$. L'égalité

$$\mathbf{k}[x_0, \dots, x_{n-1}] = \{\, u/p^s \mid u \in \mathbf{k}[t],\ \deg(u) \leqslant ns \,\},$$

est facile en remarquant que $t^n x_0 \in \mathbf{k}[x_0, \dots, x_{n-1}]$ puisque

$$\tfrac{t^n}{p} = 1 + \tfrac{t^n - p}{p} \ \in\ \textstyle\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{k}\, \frac{t^i}{p}.$$

Écrivons que t est algébrique sur $\mathbf{k}(x_0)$ comme racine en T du polynôme

$$p(T)x_0 - 1 = x_0T^n + x_0a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + x_0a_1T + (x_0a_0 - 1).$$

Les « entiers d'Emmanuel » (cf. lemme 4.7 ou exercice 10) sont

$$\begin{aligned} &x_0t, \quad x_0t^2 + x_0a_{n-1}t, \quad x_0t^3 + x_0a_{n-1}t^2 + x_0a_{n-2}t, \\ &\qquad \dots, \qquad\quad x_0t^{n-1} + \cdots + x_0a_2t. \end{aligned}$$

Ainsi, $t^k x_0$ est entier sur $\mathbf{k}[x_0]$ pour $k \in [\![0..n-1]\!]$ et $\mathbf{k}[x_0, \dots, x_{n-1}] \subseteq \mathbf{A}$.
Reste à voir que $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{k}[x_0, \dots, x_{n-1}]$. On utilise l'inclusion

$$\mathbf{k}[x_0] \subseteq \mathbf{V}_\infty := \mathbf{k}[1/t]_{1+\langle 1/t\rangle}.$$

Ce dernier anneau est constitué des fractions rationnelles de degré $\leqslant 0$, i.e. définies en $t = \infty$. Il est isomorphe à $\mathbf{k}[y]_{1+\langle y\rangle}$ donc il est intégralement clos, et $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{V}_\infty$.
L'anneau $\mathbf{V}_\infty$ est appelé « l'anneau local du point $t = \infty$ ».

Soit $z \in \mathbf{k}(t)$ une fraction rationnelle entière sur $\mathbf{k}[x_0]$. En multipliant une relation de dépendance intégrale de z sur $\mathbf{k}[x_0]$ par p^N avec N assez grand, on obtient
$$p^N z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \cdots + b_1 + b_0 = 0, \qquad b_i \in \mathbf{k}[t].$$
Ceci entraîne que $p^N z$ est entier sur $\mathbf{k}[t]$ donc appartient à $\mathbf{k}[t]$ ($\mathbf{k}[t]$ est intégralement clos). Par ailleurs, $z \in \mathbf{V}_\infty$, i.e., $\deg z \leqslant 0$. En définitive, z est une fraction rationnelle de degré $\leqslant 0$ dont le dénominateur divise une puissance de p, donc $z \in \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{n-1}]$.
Enfin, on a $x_1 = t x_0$ donc $t = x_1/x_0 \in \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ puis $\mathbf{k}(t) = \mathrm{Frac}(\mathbf{A})$.

Exercice 9. *1.* Immédiat.
2. On note $\mathfrak{b}$ l'idéal engendré par les $X_i X_j - X_{i-1} X_{j+1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1$ et E le $\mathbf{k}$-module :
$$E = \mathbf{k}[X_0] \oplus \mathbf{k}[X_0] X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}[X_0] X_{n-1}.$$
On va prouver que $E \cap \operatorname{Ker} \varphi = 0$ et que $\mathbf{k}[\underline{X}] = E + \mathfrak{b}$. Comme $\mathfrak{b} \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$, on obtiendra $\mathbf{k}[\underline{X}] = E \oplus \mathfrak{b}$. Soit $y \in \operatorname{Ker} \varphi$ que l'on écrit $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in E$ et $y_2 \in \mathfrak{b}$. En appliquant φ, on obtient $\varphi(y_1) = 0$, donc $y_1 = 0$, puis $y = y_2 \in \mathfrak{b}$. On a obtenu $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq \mathfrak{b}$, d'où l'égalité $\operatorname{Ker} \varphi = \mathfrak{b}$.
• *Justification de* $E \cap \operatorname{Ker} \varphi = 0$. Soit $f \in E$
$$f = f_0(X_0) + f_1(X_0) X_1 + \cdots + f_{n-1}(X_0) X_{n-1}.$$
On écrit que $\varphi(f) = 0$:
$$\varphi(f) = f_0(1/p) + f_1(1/p) t/p + \cdots + f_{n-1}(1/p) t^{n-1}/p = 0.$$
En multipliant chaque $f_i(1/p)$ par p^N, N assez grand, on obtient $g_i(p) \in \mathbf{k}[p]$:
$$p g_0(p) + g_1(p) t + \cdots + g_{n-1}(p) t^{n-1} = 0.$$
Mais $(1, t, \ldots, t^{n-1})$ est une base de $\mathbf{k}[t]$ sur $\mathbf{k}[p]$, donc les $g_k = 0$, puis $f = 0$.
• *Justification de* $\mathbf{k}[\underline{X}] = E + \mathfrak{b}$.
En notant $\mathbf{k}[x_0, \ldots, x_{n-1}] = \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{b}$ et $E' = \mathbf{k}[x_0] + \mathbf{k}[x_0] x_1 + \cdots + \mathbf{k}[x_0] x_{n-1}$, cela revient à montrer que $\mathbf{k}[\underline{x}] = E'$. Or E' contient $x_n := 1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x_i$. Il suffit donc de prouver que E' est un sous-anneau, ou encore que $x_i x_j \in E'$ pour $i, j \in [\![0..n-1]\!]$. Par définition , il contient x_0^2, $x_0 x_1$, …, $x_0 x_{n-1}$ donc aussi $x_0 x_n$. Mais $x_1 x_j = x_0 x_{j+1}$ pour $j \in [\![1..n-1]\!]$, donc E' contient ces $x_1 x_j$ donc aussi $x_1 x_n$. Et en utilisant $x_2 x_j = x_1 x_{j+1}$ pour $j \in [\![2..n-1]\!]$, on voit que E' contient tous les $x_2 x_j$. Et ainsi de suite.
Remarque. L'auteur de l'exercice a opéré ainsi pour un corps discret $\mathbf{k}$: il a utilisé une indéterminée supplémentaire X_n et a choisi sur $\mathbf{k}[X_0, X_1, \ldots, X_n]$ l'ordre monomial gradué lexicographique inversé en ordonnant les indéterminées de la manière suivante : $X_0 < X_1 < \cdots < X_n$. On constate alors que l'idéal initial de l'idéal $\langle R_{\min} \rangle + \left\langle 1 - \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \right\rangle$ est l'idéal monomial engendré par les monômes :
$$(\star) \qquad X_n \text{ et } X_i X_j \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n-1.$$
Le $\mathbf{k}$-espace vectoriel engendré par les monômes non divisibles par un monôme de $(\star)$ est le $\mathbf{k}$-espace vectoriel $E = \mathbf{k}[X_0] \oplus \mathbf{k}[X_0] X_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{k}[X_0] X_{n-1}$. C'est celui qui apparaît dans le corrigé ci-dessus (dans lequel $\mathbf{k}$ est un anneau quelconque, pas nécessairement un corps discret). ∎

Exercice 10. En multipliant l'équation initiale par a_n^{n-1}, on obtient $a_n s$ entier sur $\mathbf{A}$. Écrivons ensuite l'équation initiale de la manière suivante :
$(a_n s + a_{n-1}) s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$, avec $b = b_{n-1} = a_n s + a_{n-1}$,

et considérons l'anneau $\mathbf{A}[b]$. Ainsi, s annule un polynôme de $\mathbf{A}[b][X]$ dont le coefficient dominant est b ; d'après ce qui précède, bs est entier sur $\mathbf{A}[b]$. Mais b est entier sur $\mathbf{A}$ donc $bs = a_n s^2 + a_{n-1}s$ est entier sur $\mathbf{A}$.
L'étape suivante consiste à écrire l'équation initiale sous la forme :
$cs^{n-2} + a_{n-3}s^{n-3} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$, avec $c = b_{n-2} = a_n s^2 + a_{n-1}s + a_{n-2}$.

Exercice 11. *1.* On écrit $[\![1..n]\!] \setminus I = \{i_1, i_2, \ldots\}$. En utilisant le lemme 4.7, on voit que les coefficients de $h_1(T) = h(T)/(T - x_{i_1})$ sont entiers sur $\mathbf{A}$, que ceux de $h_2(T) = h_1(T)/(T - x_{i_2})$ sont entiers sur $\mathbf{A}[\text{coeffs. de } h_1]$, donc entiers sur $\mathbf{A}$ et ainsi de suite. Donc en posant $q(T) = \prod_{i' \notin I}(T - x_{i'}) \prod_{j' \notin J}(T - y_{j'})$, les coefficients du polynôme $h(T)/q(T)$ sont entiers sur $\mathbf{A}$. Le coefficient constant de ce dernier polynôme est $\pm a_0 b_0 \prod_{i \in I} x_i \prod_{j \in J} y_j$.
2. Fonctions symétriques élémentaires : on a $a_i = \pm a_0 S_i(\underline{x})$, $b_j = \pm b_0 S_j(\underline{y})$, donc $a_i b_j$ est entier sur $\mathbf{A}$.

Exercice 12. Soit $S \subseteq \mathbf{A} \setminus \{0\}$ l'ensemble des dénominateurs b des éléments de $\mathbf{B}$ écrits sous la forme a/b avec $a, b \in \mathbf{A}$, $b \neq 0$ et $1 \in \langle a, b\rangle$. C'est clairement un monoïde. Pour montrer que $\mathbf{B} = \mathbf{A}_S$, il suffit de vérifier que $S^{-1} \subseteq \mathbf{B}$.
Soit $a/b \in \mathbf{B}$ écrit de manière irréductible ; il existe $u, v \in \mathbf{A}$ tels que $1 = ua + vb$ si bien que $1/b = u(a/b) + v \in \mathbf{AB} + \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$.

Exercice 13. On veut montrer que tout anneau intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$ est de Prüfer. Tout élément de $\mathbf{K}$ est primitivement algébrique sur n'importe quel anneau intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathbf{K}$. Il reste à montrer que l'anneau intermédiaire est intégralement clos pour pouvoir appliquer le théorème 4.8.
1. Si $x = a/b$, avec a, $b \in \mathbf{A}$, il y a une matrice $\begin{bmatrix} s & c \\ t & 1-s \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$, de localisation principale pour (b, a), i.e. $s + t = 1$, $sa = cb$ et $ta = (1 - s)b$.
Donc $x = c/s = (1 - s)/t$ et $x \in \mathbf{A}'_s \cap \mathbf{A}'_t$. Réciproquement, si $x' \in \mathbf{A}'_s \cap \mathbf{A}'_t$, il y a a', $b' \in \mathbf{A}'$ et n, $m \in \mathbb{N}$ tels que $x' = a'/s^n = b'/t^m$. Donc, pour u, $v \in \mathbf{A}$, puisque $1/t = x/(1 - s)$ on a :

$$x' = \frac{a'}{s^n} = \frac{b'x^m}{(1-s)^m} = \frac{ua' + vb'x^m}{us^n + v(1-s)^m} \ .$$

Il suffit de prendre $us^n + v(1 - s)^m = 1$ pour constater que $x' \in \mathbf{A}'[x]$.
2. Soit $\mathbf{B} \subseteq \mathbf{K}$ une $\mathbf{A}$-algèbre engendrée par n éléments ($n \geqslant 1$).
On écrit $\mathbf{B} = \mathbf{A}'[x]$, où $\mathbf{A}'$ est une $\mathbf{A}$-algèbre engendrée par $n - 1$ éléments. D'après le point *1*, il existe s, $t \in \mathbf{A}$ tels que $\mathbf{A}'[x] = \mathbf{A}'_s \cap \mathbf{A}'_t$.
Par récurrence, il existe u_1, …, $u_k \in \mathbf{A}$ tels que $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{u_1} \cap \cdots \cap \mathbf{A}_{u_k}$.
Alors, $\mathbf{A}'_s = \mathbf{A}_{su_1} \cap \cdots \cap \mathbf{A}_{su_k}$ et $\mathbf{A}'_t = \mathbf{A}_{tu_1} \cap \cdots \cap \mathbf{A}_{tu_k}$, donc

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}_{su_1} \cap \cdots \cap \mathbf{A}_{su_k} \cap \mathbf{A}_{tu_1} \cap \cdots \cap \mathbf{A}_{tu_k}.$$

3. Soit $\mathbf{B}$ un anneau intermédiaire et $x \in \mathbf{K}$ entier sur $\mathbf{B}$. Alors x est entier sur une sous-$\mathbf{A}$-algèbre de type fini, donc appartient à cette sous-$\mathbf{A}$-algèbre de type fini, donc à $\mathbf{B}$, i.e. $\mathbf{B}$ est intégralement clos.
4. Soient x, y deux indéterminées sur un corps discret $\mathbf{k}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x, y]$.
Posons $\mathbf{B} = \mathbf{k}[x, y, (x^2 + y^2)/xy]$. Alors $\mathbf{A}$ est intégralement clos mais pas $\mathbf{B}$: en effet, x/y et y/x sont entiers sur $\mathbf{B}$ (leur somme et leur produit appartient

à $\mathbf{B}$) mais x/y et $y/x \notin \mathbf{B}$ comme on le vérifie facilement à l'aide d'un argument d'homogénéité.

Exercice 14. On a $bx - a = 0$ avec $1 = ua + vb$. Le lecteur vérifiera que si $f(Y) \in \mathbf{A}[Y]$ satisfait à $f(y) = 0$, alors f est multiple, dans $\mathbf{A}[Y]$, de $bY - 2a$. Donc $\mathrm{c}(f) \subseteq \langle 2a, b\rangle$ et comme $1 \notin \langle 2a, b\rangle$, y n'est pas primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$.

Exercice 15. Les implications *4* $\Rightarrow$ *3* $\Rightarrow$ *2* et *5* $\Rightarrow$ *2* sont triviales. Le théorème 3.6 donne *1* $\Rightarrow$ *4* et le théorème 3.2 *4d* page 708 donne *1* $\Rightarrow$ *5.*
2 $\Rightarrow$ *1.* x est primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$, on applique le théorème 4.8.

Exercice 16. On sait déjà que *1* $\Rightarrow$ *2* $\Rightarrow$ *3* et *1* $\Rightarrow$ *5.*
Montrons que *3* implique que l'anneau est arithmétique. Considérons un idéal à deux générateurs arbitraire $\mathfrak{a} = \langle y_1, y_2\rangle$ et soit r_i l'annulateur idempotent de y_i. Considérons les idempotents orthogonaux : $e = (1 - r_1)(1 - r_2)$, $f = r_1(1 - r_2)$, et $g = r_2$. On a $e + f + g = 1$. Si l'on inverse f ou g, un des y_i est nul et l'idéal $\mathfrak{a}$ devient principal. Pour voir ce qui se passe si l'on inverse e, considérons les éléments réguliers $x_1 = (1 - e) + ey_1$ et $x_2 = (1 - e) + ey_2$. L'idéal $\mathfrak{b} = \langle x_1, x_2\rangle$ est inversible dans $\mathbf{A}$. Soient alors u, v, w tels que $ux_1 = vx_2$ et $(1 - u)x_2 = wx_1$. On multiplie par e et l'on obtient $uey_1 = vey_2$ et $(1 - u)ey_2 = wey_1$, ce qui implique que l'idéal $\mathfrak{a}\mathbf{A}_e = \langle ey_1, ey_2\rangle\, \mathbf{A}_e$ est localement principal.
5 $\Rightarrow$ *4.* Considérer d'abord $f = aX + b$, $g = aX - b$, puis $f = aX + b$, $g = bX + a$.
4 $\Rightarrow$ *3.* Soit $\mathfrak{a} = \langle a, b\rangle$, avec a et b réguliers. Soient α, β tels que $ab = \alpha a^2 + \beta b^2$, et soit $\mathfrak{b} = \langle \alpha a, \beta b\rangle$. On a $ab \in \mathfrak{ab}$, donc

$$a^2b^2 \in \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2 = \left\langle a^2, b^2\right\rangle \left\langle \alpha^2 a^2, \beta^2 b^2\right\rangle .$$

Montrons l'égalité $\left\langle a^2b^2\right\rangle = \mathfrak{a}^2\mathfrak{b}^2$, ce qui impliquera $\mathfrak{a}$ inversible.
En posant $u = \alpha a^2$, $v = \beta b^2$, il suffit de montrer que $u^2 = \alpha^2 a^4$ et $v^2 = \beta^2 b^4$ sont dans $\left\langle a^2b^2\right\rangle$. Par définition, $u + v = ab \in \mathfrak{ab}$ et $uv \in \left\langle a^2b^2\right\rangle$.
Donc $u^2 + v^2 = (u + v)^2 - 2uv \in \left\langle a^2b^2\right\rangle$. Comme u^2, $v^2 \in \left\langle u^2 + v^2, uv\right\rangle$, on a bien u^2, $v^2 \in \left\langle a^2b^2\right\rangle$.

Exercice 17. On fait la démonstration dans le cas intègre. Le cas quasi intègre s'en déduit par application de la machinerie locale-globale élémentaire usuelle.
1. Soit $M \in \mathbf{A}^{n\times m}$, $p = \inf(m, n)$. La proposition VIII-4.7 nous donne des idéaux localement principaux $\mathfrak{a}_i$ tels que
$\mathcal{D}_{\mathbf{A},1}(M) = \mathfrak{a}_1$, $\mathcal{D}_{\mathbf{A},2}(M) = \mathfrak{a}_1^2\mathfrak{a}_2$, $\mathcal{D}_{\mathbf{A},3}(M) = \mathfrak{a}_1^3\mathfrak{a}_2^2\mathfrak{a}_3$, $\mathcal{D}_{\mathbf{A},4}(M) = \mathfrak{a}_1^4\mathfrak{a}_2^3\mathfrak{a}_3^2\mathfrak{a}_4$, ...
Puisque l'anneau est local-global, les idéaux localement principaux $\mathfrak{a}_j$ sont principaux (principe local-global IX-6.10).
Posons $\mathfrak{a}_j = \langle a_j\rangle$ et considérons la matrice $M' \in \mathbf{A}^{n\times m}$ en forme de Smith, dont les éléments diagonaux sont a_1, a_1a_2, ..., $a_1a_2\cdots a_p$.
Comme dans la démonstration de la proposition VIII-4.7 l'algorithme qui produit la forme réduite de Smith dans le cas local et la machinerie locale-globale des anneaux arithmétiques nous fournissent un système comaximal $(s_1, \ldots, s_r)$ tel que, sur chaque $\mathbf{A}[1/s_i]$, la matrice M admet une forme réduite de Smith. En comparant les idéaux déterminantiels on voit que cette forme réduite peut toujours être prise égale à M' (ici intervient le fait que sur un anneau intègre, deux générateurs d'un idéal principal sont toujours associés).

Ainsi, M et M' sont équivalentes sur chaque $\mathbf{A}[1/s_i]$. On conclut par le principe local-global IX-6.8 qu'elles sont équivalentes.
2. Conséquence immédiate du *1.*

Exercice 18. *1.* On écrit $E = \mathbf{A}x_1 + \cdots + \mathbf{A}x_n$ donc $\mathfrak{a}E = \mathfrak{a}x_1 + \cdots + \mathfrak{a}x_n$. En utilisant $bE \subseteq \mathfrak{a}E$, on obtient une matrice $A \in \mathbb{M}_n(\mathfrak{a})$ telle que

$$b\,{}^{\mathrm{t}}[\,x_1\ \cdots\ x_n\,] = A\,{}^{\mathrm{t}}[\,x_1\ \cdots\ x_n\,].$$

Il suffit alors de poser $d = \det(b\mathrm{I}_n - A)$.
2. Si $\deg(g) \leqslant m$, on sait que $\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^m\mathrm{c}(fg)$ (lemme III-2.1). En multipliant par $\mathrm{c}(g)^m$, on obtient $\big(\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)\big)^{m+1} = \mathrm{c}(fg)\big(\mathrm{c}(f)\mathrm{c}(g)\big)^m$.
3. On a $\mathfrak{b}^2 = \mathfrak{a}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'^5 = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}'^4$ et $\mathfrak{b}'^4 = \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}'^3$.
4. Supposons $\mathfrak{b}^{r+1} = \mathfrak{a}\mathfrak{b}^r$. On applique la première question avec $E = \mathfrak{b}^r$ et $b \in \mathfrak{b}$. On obtient $d = b^n + a_1b^{n-1} + \cdots + a_{n-1}b + a_n \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{b}^r)$ avec $a_i \in \mathfrak{a}^i$.
Comme $d \in \mathfrak{b}$ et $d \in \mathrm{Ann}(\mathfrak{b}^r)$, on a $d^{r+1} = 0$, qui est une relation de dépendance intégrale de b sur $\mathfrak{a}$.
Pour la réciproque, soit $\mathfrak{b}$ entier sur $\mathfrak{a}$. Pour $b \in \mathfrak{b}$, en écrivant une relation de dépendance intégrale de b sur $\mathfrak{a}$, on obtient n tel que $b^{n+1} \in \mathfrak{a}\mathfrak{b}^n$. Or si l'on a deux idéaux $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2 \subseteq \mathfrak{b}$ avec $\mathfrak{b}_i^{n_i+1} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{n_i}$, on a $(\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2)^{n_1+n_2+1} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}^{n_1+n_2}$.
En utilisant un système fini générateur de $\mathfrak{b}$, on obtient un exposant r avec l'inclusion $\mathfrak{b}^{r+1} \subseteq \mathfrak{a}\mathfrak{b}^r$.

Exercice 19. On pose $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$.
1. Soit $a \in \mathbf{A}$ et e_a l'idempotent de $\mathbf{K}$ tel que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(a) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(e_a)$. L'élément e_a est entier sur $\mathbf{A}$, donc $e_a \in \mathbf{A}$. Et $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(b) = \mathrm{Ann}_{\mathbf{K}}(b) \cap \mathbf{A}$ pour tout $b \in \mathbf{A}$.
2. Implication directe. Le calcul est immédiat.
2. Implication réciproque. Soit a entier sur l'idéal principal $\langle b\rangle$ dans $\mathbf{A}$. Écrivons la relation de dépendance intégrale de a sur $\langle b\rangle$.

$$a^n = b(u_{n-1}a^{n-1} + u_{n-2}ba^{n-2} + \cdots + u_0b^{n-1}). \qquad (*)$$

On a $(1 - e_b)a^n = 0$, donc puisque $\mathbf{A}$ est réduit $(1 - e_b)a = 0$. On introduit l'élément régulier $b_1 = b + (1 - e_b)$. Alors l'élément $c = a/b_1 \in \mathbf{K}$ est entier sur $\mathbf{A}$. En effet, l'égalité $(*)$ reste vraie en remplaçant b par b_1 et les u_i par e_bu_i, car sur la composante $e_b = 1$ on obtient $(*)$ et sur la composante $e_b = 0$ on obtient $0 = 0$. Donc c est dans $\mathbf{A}$, et $a = e_ba = e_bb_1c = bc$.

Exercice 20. Soit T une nouvelle indéterminée sur $\mathbf{B}$. Pour $b \in \mathbf{B}$, on va utiliser le résultat (similaire au fait 2.5) : b est entier sur l'idéal $\mathfrak{a}$ si, et seulement si, bT est entier sur le sous-anneau $\mathbf{A}[\mathfrak{a}T] \overset{\text{def}}{=} \mathbf{A} \oplus \mathfrak{a}T \oplus \mathfrak{a}^2T^2 \oplus \ldots$ de $\mathbf{B}[T]$.
Voyons le cas difficile. Soit $F \in \mathbf{B}[X]$ entier sur $\mathfrak{a}[X]$, on doit montrer que chaque coefficient de F est entier sur $\mathfrak{a}$. On écrit une relation de dépendance intégrale :

$$F^n + G_1F^{n-1} + \cdots + G_{n-1}F + G_n = 0, \quad G_k = G_k(X) \in (\mathfrak{a}[X])^k = \mathfrak{a}^k[X].$$

On a donc une égalité dans $\mathbf{B}[X][T]$ avec des $Q_i \in \mathbf{B}[X]$

$$T^n + G_1T^{n-1} + \cdots + G_{n-1}T + G_n = (T - F)(T^{n-1} + Q_1T^{n-2} + \cdots + Q_{n-1}).$$

On remplace T par $1/(TX)$ et on multiplie par $(TX)^n = TX \times (TX)^{n-1}$. Ce qui donne

$$1 + XTG_1 + \cdots + X^nT^nG_n = (1 - XTF)(1 + XTQ_1 + \cdots + X^{n-1}T^{n-1}Q_{n-1}).$$

On regarde maintenant cette égalité dans $\mathbf{B}[T][X]$.
Si b est un coefficient de F, bT est un coefficient en X de $1 - XTF$ et 1 est

un coefficient en X de $1 + XTQ_1 + \cdots + X^{n-1}T^{n-1}Q_{n-1}$. D'après le théorème de Kronecker, le produit $bT = bT \times 1$ est entier sur l'anneau engendré par les coefficients (en X) du polynôme $1 + XTG_1 + \cdots + X^nT^nG_n$. Mais le coefficient en X^k de ce dernier polynôme est dans $\mathbf{A}[\mathfrak{a}T] = \mathbf{A} \oplus \mathfrak{a}T \oplus \mathfrak{a}^2T^2 \oplus \ldots$ et donc bT est entier sur $\mathbf{A}[\mathfrak{a}T]$ et par suite b est entier sur $\mathfrak{a}$.

Exercice 21. *(Modules indécomposables)*
1. Tout se passe modulo $\mathfrak{a}$. On considère donc l'anneau quotient $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$. Alors le résultat est évident (lemme II-4.4).
2a. Si $M = N \oplus P$, N et P sont projectifs de rang constant et la somme des rangs vaut 1, donc l'un des deux est nul.
2b. On se réfère au point *1.* Si le module est décomposable, on a $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ avec $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ comaximaux de type fini. Ces idéaux sont donc obtenus à partir de la factorisation totale de $\mathfrak{a}$ comme deux produits partiels de cette factorisation.
Ainsi, on ne peut pas avoir $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ comaximaux si la factorisation totale de $\mathfrak{a}$ fait intervenir un seul idéal maximal.
Dans le cas contraire la factorisation totale de $\mathfrak{a}$ fournit deux idéaux comaximaux $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{c}$ tels que $\mathfrak{bc} = \mathfrak{a}$. Donc $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathbf{Z}$ et $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$ ce qui donne $\mathbf{Z}/\mathfrak{a} = \mathfrak{b}/\mathfrak{a} \oplus \mathfrak{c}/\mathfrak{a}$.
En fait, si $\mathfrak{a} = \prod_{i=1}^k \mathfrak{q}_i = \prod_{i=1}^k \mathfrak{p}_i^{m_i}$ est la factorisation totale de $\mathfrak{a}$, on obtient pr récurrence sur k que $\mathbf{Z}/\mathfrak{a} = \bigoplus_{i=1}^k \mathfrak{q}_i/\mathfrak{a}$.
2c. Résulte des considérations précédentes et du théorème de structure des modules de présentation finie sur un domaine de Dedekind.
3. L'unicité peut s'énoncer comme suit : si M s'écrit de deux manières comme somme de modules indécomposables, il y a un automorphisme de M qui envoie les modules de la première décomposition sur ceux de la seconde.
Si un module de présentation finie et de torsion M est décomposé en somme directe de modules indécomposables, chaque terme de la somme est lui-même de présentation finie et de torsion. Et donc de la forme $\mathbf{Z}/\mathfrak{p}^m$ d'après le point *1.*
Par le théorème des restes chinois on se ramène au cas où un seul idéal maximal intervient dans la somme directe, et l'unicité résulte alors du théorème IV-5.1.
Notons aussi que dans le cas d'un anneau principal à factorisation totale, l'unicité est valable pour la décomposition de tout module de présentation finie.

Problème 1. Ci-après le mot « localement » signifie « après localisation en des éléments comaximaux ».
1. L'idéal $\mathfrak{a}$ est localement principal, donc puisque $\mathbf{A}$ est normal, localement intégralement clos, donc il est intégralement clos (principe local-global 2.10). On termine avec le lemme 2.7 (variante du théorème de Kronecker).
2. Si $x \in \mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A}$, alors x est entier sur l'idéal $\mathfrak{a}$ (lying over, lemme 2.8) donc dans $\mathfrak{a}$ d'après la question précédente.
3a. Si $a = \mathrm{N}_G(b)$, on a $\mathrm{N}_G(b\mathbf{B}) = a\mathbf{B} \cap \mathbf{A} = a\mathbf{A}$.
3b et *3c.* L'idéal de type fini $\mathfrak{a} = \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(h)$ est localement principal, donc $\mathrm{c}_{\mathbf{B}}(h) = \mathfrak{a}\mathbf{B}$ est un idéal localement principal de $\mathbf{B}$. D'après la première question, on a :

$$\textstyle\prod_\sigma \mathrm{c}_{\mathbf{B}}(h_\sigma) = \mathrm{c}_{\mathbf{B}}(h), \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}) = \mathfrak{a}\mathbf{B}.$$

Et d'après la question *2*, $\mathfrak{a} = \mathrm{N}_G(\mathfrak{b})$. Ensuite on note que

$$\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)\mathbf{B} = \mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = \mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}_1)\mathrm{N}'_G(\mathfrak{b}_2) = \mathrm{N}_G(\mathfrak{b}_1)\mathrm{N}_G(\mathfrak{b}_2)\mathbf{B},$$

d'où le résultat en prenant l'intersection avec $\mathbf{A}$.

3d. Cela résulte du point 2. et des deux faits suivants.
• Si $b \in \mathbf{B}$ est régulier alors $a = \mathrm{N}_G(b) \in \mathbf{A}$ est régulier dans $\mathbf{A}$: en effet, c'est un produit d'éléments réguliers dans $\mathbf{B}$ donc il est régulier dans $\mathbf{B}$.
• Si $a \in \mathbf{A}$ est régulier dans $\mathbf{A}$ alors il est régulier dans $\mathbf{B}$. Soit en effet $x \in \mathbf{B}$ tel que $ax = 0$, on veut montrer que $x = 0$. On considère le polynôme
$$\mathrm{C}_G(x)(T) = \textstyle\prod_{\sigma\in G} \big(T - \sigma(x)\big).$$
Comme $a\sigma(x) = 0$ pour chaque σ, les coefficients de $\mathrm{C}_G(x)(T)$ sont annulés par a donc nuls, à l'exception du coefficient dominant. Ainsi $x^{|G|} = 0$, or $\mathbf{B}$ est normal donc réduit.
4. Soit $\mathbf{k}(x,y) = \operatorname{Frac}\mathbf{k}[x,y]$. On va utiliser le fait que $(1,y)$ est une $\mathbf{k}[x]$-base de $\mathbf{k}[x,y]$; c'est aussi une $\mathbf{k}(x)$-base de $\mathbf{k}(x,y)$ et l'extension $\mathbf{k}(x,y)/\mathbf{k}(x)$ est galoisienne de groupe $\langle\sigma\rangle$ où $\sigma : \mathbf{k}(x,y) \to \mathbf{k}(x,y)$ est le $\mathbf{k}(x)$-automorphisme involutif qui réalise $y \mapsto -y$. Montrons que $\mathbf{k}[x,y]$ est la clôture intégrale de $\mathbf{k}[x]$ dans $\mathbf{k}(x,y)$. Soit $z = u(x) + yv(x) \in \mathbf{k}(x,y)$ entier sur $\mathbf{k}[x]$. Alors $z + \sigma(z) = 2u$ et $z\sigma(z) = u^2 - fv^2$ sont dans $\mathbf{k}(x)$ et entiers sur $\mathbf{k}[x]$ donc dans $\mathbf{k}[x]$. On a donc $fv^2 \in \mathbf{k}[x]$. En utilisant le fait que f est séparable, on voit que $v \in \mathbf{k}[x]$. Bilan : $z \in \mathbf{k}[x,y]$. Donc $\mathbf{k}[x,y]$ est intégralement clos. On applique ce qui précède avec $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x]$, $\mathbf{B} = \mathbf{k}[x,y]$, $G = \langle\sigma\rangle$.

Problème 2. *2a)* Posons $a = \sum_\alpha a_\alpha \underline{x}^\alpha$, $b = \sum_\beta b_\beta \underline{x}^\beta$.
On doit montrer que $\beta \in M$ pour chaque β tel que $b_\beta \neq 0$. On peut supposer b non nul. Soient $a_\alpha \underline{x}^\alpha$ le monôme dominant de a pour l'ordre lexicographique et $b_\beta \underline{x}^\beta$ celui de b. Le monôme dominant de ab est $a_\alpha b_\beta \underline{x}^{\alpha+\beta}$, donc $\alpha + \beta \in M$. Comme $\alpha \in M$ et que M est plein, on a $\beta \in M$. On recommence ensuite en remplaçant b par $b' = b - b_\beta \underline{x}^\beta$ qui satisfait $ab' \in \mathbf{k}[\underline{x}]$. On obtient $b' \in \mathbf{k}[\underline{x}]$ et finalement $b \in \mathbf{k}[\underline{x}]$.

Problème 3. *1.* Si $A = (a_{ij})$, alors $\det A = \sum_{\sigma\in\mathrm{S}_n} a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}$ et
$$v(a_{\sigma(1)1}\cdots a_{\sigma(n)n}) \geqslant v(A_1) + \cdots + v(A_n).$$
On en déduit que $v(\det A) \geqslant v(A_1) + \cdots + v(A_n)$.
2. Pour la matrice donnée en exemple : on a $\det(A) = \pi^2 - \pi \neq 0$.
Mais $\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ n'est pas inversible. En réalisant $A_1 \leftarrow A_1 - A_2$, on obtient l'égalité $A' = \begin{bmatrix} \pi^2 - \pi & \pi \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et cette fois $\overline{A'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est inversible.
Voici la méthode générale : si $\det\overline{A} \neq 0$, A est $\mathbf{A}_\infty$-réduite et c'est terminé. Sinon, il y a des $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{k}$, non tous nuls, tels que $\lambda_1\overline{A_1} + \cdots + \lambda_n\overline{A_n} = 0$. On considère une colonne A_j avec $\lambda_j \neq 0$ et $v(A_j)$ minimum ; pour simplifier, on peut supposer que c'est A_1 et que $\lambda_1 = 1$ (quitte à diviser la relation par λ_1) ; on réalise alors l'opération élémentaire :
$$A_1 \leftarrow A_1' = A_1 + \textstyle\sum_{j=2}^n \lambda_j \pi^{v(A_1)-v(A_j)} A_j.$$
Dans cette somme, en ne faisant intervenir que les A_j pour lesquels $\lambda_j \neq 0$, chaque exposant de π est $\geqslant 0$. Il s'agit donc d'une opération $\mathbf{k}[\pi^{-1}]$-élémentaire sur les colonnes, i.e. $\mathbf{k}[t]$-élémentaire , et l'on ne change pas le $\mathbf{k}[t]$-module engendré par les colonnes. Par ailleurs, $v(A_1') > v(A_1)$; en effet, (en se souvenant que $\lambda_1 = 1$) :
$$A_1'/\pi^{v(A_1)} = s \overset{\text{def}}{=} \textstyle\sum_{\lambda_j\neq 0} \lambda_j A_j/\pi^{v(A_j)},$$

et $v(s) > 0$ puisque par hypothèse $\sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j \overline{A_j} = 0$. On itère ce processus qui finit par s'arrêter car à chaque étape, la somme $\sum_j v(A_j)$ croit strictement tout en étant bornée par $v(\det A)$, invariant par les opérations ci-dessus.
3. Soit $y = Px$, i.e. $y_i = \sum_j p_{ij} x_j$; on a $v(p_{ij}) \geqslant 0$, $v(x_j) \geqslant v(x)$ donc $v(y_i) \geqslant v(x)$ puis $v(y) \geqslant v(x)$. Par symétrie, $v(y) = v(x)$. Le reste ne pose pas plus de difficultés.
4. A est $\mathbf{A}_\infty$-réduite si, et seulement si, tout coefficient diagonal (nécessairement non nul) divise (au sens $\mathbf{A}_\infty$) tous les coefficients de sa colonne.
5. Quitte à remplacer A par AQ avec $Q \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ convenable, on peut supposer que A est $\mathbf{A}_\infty$-réduite. On va réaliser des opérations $A \leftarrow PA$ avec $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_\infty)$ (i.e. considérer le $\mathbf{A}_\infty$-réseau engendré par les lignes de A), ce qui ne modifie pas le caractère $\mathbf{A}_\infty$-réduit de A. Il existe $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_\infty)$ telle que PA soit triangulaire supérieure et l'on remplace A par PA. Soient $L_1, \ldots, L_n$ les lignes de A ; on réalise alors l'opération $\mathbf{A}_\infty$-élémentaire

$$L_1 \leftarrow L_1 - \tfrac{a_{12}}{a_{22}} L_2 \qquad \text{rappel : } a_{22} \mid_{\mathbf{A}_\infty} a_{12},$$

ce qui amène un 0 en position a_{12} (et la nouvelle matrice est toujours triangulaire et $\mathbf{A}_\infty$-réduite). On continue pour annuler tous les coefficients de la première ligne (sauf a_{11}) ; on peut ensuite passer à la deuxième ligne et ainsi de suite de façon à obtenir une matrice diagonale (en utilisant constamment le fait que dans une matrice triangulaire $\mathbf{A}_\infty$-réduite, chaque coefficient diagonal $\mathbf{A}_\infty$-divise tous les coefficients de sa colonne). Comme $\mathbf{A}_\infty$ est un anneau de valuation discrète, on peut faire en sorte que la matrice diagonale finale obtenue soit $\mathrm{Diag}(\pi^{d_1}, \ldots, \pi^{d_n})$ avec $d_i \in \mathbb{Z}$.
6a. Soit $\underline{\varepsilon}$ une $\mathbf{A}$-base de E, $\underline{\varepsilon'}$ une $\mathbf{A}_\infty$-base de E' et $A = \mathrm{Mat}_{\underline{\varepsilon},\underline{\varepsilon'}}(\mathrm{Id}_L)$. Il existe alors $P \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_\infty)$ et $Q \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ telles que $PAQ = \mathrm{Diag}(t^{-d_1}, \ldots, t^{-d_n})$. Soient $\underline{e}$ et $\underline{e'}$ définies par $\mathrm{Mat}_{\underline{e},\underline{\varepsilon}}(\mathrm{Id}_L) = Q$, $\mathrm{Mat}_{\underline{\varepsilon'},\underline{e'}}(\mathrm{Id}_L) = P$.
Alors $\underline{e}$ est une $\mathbf{A}$-base de E, $\underline{e'}$ une $\mathbf{A}_\infty$-base de E' et $e_i = t^{-d_i} e'_i$.
6b. Puisque $t^j e_i = t^{j-d_i} e'_i$, il est clair que $t^j e_i \in E \cap E'$ pour $0 \leqslant j \leqslant d_i$. Réciproquement, soit $y \in E \cap E'$ que l'on écrit

$$y = \textstyle\sum_i a_i e_i = \sum_i a'_i t^{d_i} e_i, \quad \text{avec } a_i \in \mathbf{A} \text{ et } a'_i \in \mathbf{A}_\infty,$$

et donc $a_i = a'_i t^{d_i}$.
Si $d_i < 0$, on obtient $a_i = a'_i = 0$, et si $a_i \neq 0$, $0 \leqslant \deg a_i \leqslant d_i$. D'où la $\mathbf{k}$-base annoncée.
7. Tout d'abord $\mathbf{k}' = \mathbf{B} \cap \mathbf{B}_\infty$, donc $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_\infty$ sont des $\mathbf{k}'$-espaces vectoriels. Montrons que chaque $r_i \in \mathbf{A}_\infty$ et que de plus, si $e_i \notin \mathbf{B}_\infty$, alors $v(r_i) > 0$, i.e. $\deg(r_i) < 0$. Si $e_i \in \mathbf{B}_\infty$, on a $e_i \in \mathbf{B} \cap \mathbf{B}_\infty = \mathbf{k}'$, donc aussi $e_i^{-1} \in \mathbf{k}'$; par suite $r_i = e_i^{-1}(r_i e_i) \in \mathbf{B}_\infty$ donc $r_i \in \mathbf{B}_\infty \cap \mathbf{K} = \mathbf{A}_\infty$.
Si $e_i \notin \mathbf{B}_\infty$, on écrit $e_i = r_i^{-1}(r_i e_i)$, égalité qui prouve que $r_i^{-1} \notin \mathbf{A}_\infty$ (ne pas oublier que $r_i e_i \in \mathbf{B}_\infty$) donc $v(r_i^{-1}) < 0$, i.e. $v(r_i) > 0$.
Soit maintenant $c \in \mathbf{k}'$ que l'on écrit dans la $\mathbf{A}$-base (e_i) et la $\mathbf{A}_\infty$-base $(r_i e_i)$

$$c = \textstyle\sum_i a_i e_i = \sum_i a'_i r_i e_i, \quad a_i \in \mathbf{A}, \quad a'_i \in \mathbf{A}_\infty, \quad a_i = a'_i r_i.$$

Pour les i tels que $e_i \in \mathbf{k}'$, comme $r_i \in \mathbf{A}_\infty$, on a $a_i = a'_i r_i \in \mathbf{A} \cap \mathbf{A}_\infty = \mathbf{k}$. Reste à voir que pour $e_i \notin \mathbf{k}'$, $a_i = 0$; l'égalité $a_i = a'_i r_i$ et le fait que $a_i \in \mathbf{A}$, $a'_i \in \mathbf{A}_\infty$ et $\deg(r_i) < 0$ entraînent alors $a_i = a'_i = 0$. Bilan : les e_i qui sont dans $\mathbf{k}'$ forment une $\mathbf{k}$-base de $\mathbf{k}'$.
8. En posant $i = y/x$, on a $i^2 = -1$ et

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y+1 \\ i \end{bmatrix}.$$

La matrice de gauche est de déterminant 1, donc $(1,i)$ et $(y+1,i)$ sont deux base du même $\mathbf{A}$-module. Mais $y+1$ n'est pas entier sur $\mathbf{A}_\infty$ (car x est entier sur $\mathbf{k}[y]=\mathbf{k}[y+1]$ et n'est pas entier sur $\mathbf{A}_\infty$). La base $(1,i)$ est normale a l'infini mais pas la base $(y+1,i)$.

Problème 4. *1.* Soit $z=y-v$, $(1,z)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$ et $\mathbf{A}u\cap\mathbf{A}z=\{0\}$. Pour montrer que $\mathfrak{b}_{u,v}=\mathbf{A}u\oplus\mathbf{A}z$ est un idéal, il suffit de voir que $z^2\in\mathfrak{b}_{u,v}$. Or $y^2=(z+v)^2=z^2+2vz+v^2$, i.e. $z^2+2vz+uw=0$.
2. Comme $(1,z)$ est une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$ et (u,z) une $\mathbf{A}$-base de $\mathfrak{b}_{u,v}$, on obtient l'égalité $\mathbf{A}\cap\mathfrak{b}_{u,v}=u\mathbf{A}$. D'autre part, tout élément de $\mathbf{B}$ est congru modulo z à un élément de $\mathbf{A}$, donc $\mathbf{A}\to\mathbf{B}/\mathfrak{b}_{u,v}$ est surjective de noyau $u\mathbf{A}$.
La matrice M de $(u,y-v)$ sur $(1,y)$ est $M=\begin{bmatrix} u & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ avec $\det(M)=u$, ce qui donne $\mathrm{N}(\mathfrak{b}_{u,v})=u\mathbf{A}$. On voit également que le contenu de $\mathfrak{b}_{u,v}$ est 1. Les autres points sont faciles.
3. On a $\mathfrak{b}_{u,v,w}=\mathbf{A}u\oplus\mathbf{A}z$, $\mathfrak{b}_{w,v,u}=\mathbf{A}w\oplus\mathbf{A}z$. Le produit de ces deux idéaux est engendré (en tant qu'idéal ou $\mathbf{A}$-module) par les 4 éléments uw, uz, wz, z^2, tous multiples de z (car $z^2+2vz+uw=0$). Il suffit donc de voir que

$$z\in\left\langle uw,uz,wz,z^2\right\rangle_{\mathbf{B}}=\langle uw,uz,wz,2vz\rangle_{\mathbf{B}}=\langle uw,uz,wz,vz\rangle_{\mathbf{B}}.$$

Or $v^2-uw=f$ est séparable, donc $1\in\langle u,w,v\rangle_{\mathbf{A}}$, et $z\in\langle uz,wz,vz\rangle_{\mathbf{B}}$.
Quant à $\mathfrak{b}_{u,-v}$ c'est $\mathbf{A}u\oplus\mathbf{A}\overline{z}$ avec $z\overline{z}=uw$ et $z+\overline{z}=-2v$. Le produit π des deux idéaux $\mathfrak{b}_{u,v}$ et $\mathfrak{b}_{u,-v}$ est égal à $\left\langle u^2,u\overline{z},uz,z\overline{z}\right\rangle$, avec $z\overline{z}=uw$, donc $\pi\subseteq\langle u\rangle$. Enfin $-2uv=uz+u\overline{z}\in\pi$ et donc $\pi\supseteq\left\langle uv,u^2,uw\right\rangle=u\langle v,u,w\rangle=\langle u\rangle$.
Enfin, avec $u=u_1u_2$, on a $\mathfrak{b}_{u_1,v}\mathfrak{b}_{u_2,v}=\mathbf{A}u+\mathbf{A}u_1z+\mathbf{A}u_2z+\mathbf{A}z^2$ clairement inclus dans $\mathbf{A}u+\mathbf{A}z=\mathfrak{b}_{u,v}$. Comme $z^2+2vz+uw=0$ on obtient

$$\mathbf{A}u+\mathbf{A}u_1z+\mathbf{A}u_2z+\mathbf{A}z^2=\mathbf{A}u+\mathbf{A}u_1z+\mathbf{A}u_2z+\mathbf{A}vz=\mathbf{A}u+(\mathbf{A}u_1+\mathbf{A}u_2+\mathbf{A}v)z.$$

D'où $\mathfrak{b}_{u_1,v}\mathfrak{b}_{u_2,v}=\mathfrak{b}_{u,v}$; en effet, $1\in\langle u_1,u_2,v\rangle_{\mathbf{A}}$ car $v^2-u_1u_2w=f$ est séparable, donc $\langle u_1,u_2,v\rangle_{\mathbf{A}}\,z=\mathbf{A}z$.
4a. Soit $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini non nul de $\mathbf{B}$. Comme $\mathbf{A}$-module libre de rang 2, il admet une $\mathbf{A}$-base (e_1,e_2) et nous notons $M=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ la matrice de (e_1,e_2) sur $(1,y)$. On écrit que $\mathfrak{b}$ est un idéal, i.e. $y\mathfrak{b}\subseteq\mathfrak{b}$: l'appartenance $ye_1\in\mathbf{A}e_1\oplus\mathbf{A}e_2$ donne a multiple de d et l'appartenance $ye_2\in\mathbf{A}e_1\oplus\mathbf{A}e_2$ donne b multiple de d. En définitive, M est de la forme $M=d\begin{bmatrix} u & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et l'on obtient $\mathfrak{b}=d\mathfrak{b}_{u,v}$. On voit que $\langle d\rangle_{\mathbf{A}}$ est le contenu de $\mathfrak{b}$, et d est unique si l'on impose d unitaire.
4b. On a vu que $\mathfrak{b}=d\mathfrak{b}_{u,v}$ donc $\overline{\mathfrak{b}}=d\mathfrak{b}_{u,-v}$ puis $\mathfrak{b}\overline{\mathfrak{b}}=d^2u\mathbf{B}$.
Mais on aussi $\mathrm{N}(\mathfrak{b})=d^2u\mathbf{A}$ car $d\begin{bmatrix} u & -v \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ est la matrice d'une $\mathbf{A}$-base de $\mathfrak{b}$ sur une $\mathbf{A}$-base de $\mathbf{B}$. On en déduit que $\mathfrak{b}\overline{\mathfrak{b}}=\mathrm{N}(\mathfrak{b})\mathbf{A}$. Alors, pour deux idéaux non nuls $\mathfrak{b}_1,\mathfrak{b}_2$ de $\mathbf{B}$:

$$\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2)\mathbf{B}=\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\overline{\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2}=\mathfrak{b}_1\overline{\mathfrak{b}_1}\mathfrak{b}_2\overline{\mathfrak{b}_2}=\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1)\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2)\mathbf{B},$$

d'où $\mathrm{N}(\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2) = \mathrm{N}(\mathfrak{b}_1)\mathrm{N}(\mathfrak{b}_2)$ puisque les trois idéaux sont des idéaux principaux de $\mathbf{A}$.

4c. Tout d'abord, si $\mathfrak{b}$ est un idéal de type fini non nul de $\mathbf{B}$, il contient un élément régulier b et $a = \mathrm{N}(b) = b\widetilde{b}$ est un élément régulier de $\mathfrak{b}$ contenu dans $\mathbf{A}$. On a alors une surjection $\mathbf{B}/a\mathbf{B} \twoheadrightarrow \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ et comme $\mathbf{B}/a\mathbf{B}$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie, il en est de même de $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$.

Si $d \in \mathbf{A} \setminus \{0\}$, on a une suite exacte :

$$0 \to \mathbf{B}/\mathfrak{b}' \simeq d\mathbf{B}/d\mathfrak{b}' \to \mathbf{B}/d\mathfrak{b}' \to \mathbf{B}/d\mathbf{B} \to 0.$$

On en déduit $\deg(d\mathfrak{b}') = \deg(\mathfrak{b}') + \deg(d\mathbf{B}) = \deg(\mathfrak{b}') + \deg(d^2)$. En particulier, pour $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_{u,v}$ et $\mathfrak{b} = d\mathfrak{b}_{u,v}$, on obtient

$$\deg(\mathfrak{b}) = \deg(u) + \deg(d^2) = \deg \mathrm{N}(\mathfrak{b}).$$

Ceci montre que deg est additif.

5. On fournit d'abord un algorithme de réduction de (u, v) vérifiant $v^2 \equiv f \bmod u$. Quitte à remplacer v par $v \bmod u$, on peut supposer $\deg v < \deg u$. Si $\deg u \leqslant g$, alors, en rendant u unitaire, (u, v) est réduit. Sinon, avec $v^2 - uw = f$ montrons que $\deg w < \deg u$; cela permettra de considérer $\widetilde{u} := w$, $\widetilde{v} := (-v) \bmod \widetilde{u}$, ayant la propriété $\mathfrak{b}_{u,v} \sim \mathfrak{b}_{\tilde{u},\tilde{v}}$ et d'itérer le processus $(u, v) \leftarrow (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ jusqu'à l'obtention de l'inégalité $\deg u \leqslant g$. Pour montrer $\deg u > g \Rightarrow \deg w < \deg u$, on considère les deux cas suivants ; ou bien $\deg(uw) > 2g + 1 = \deg f$, auquel cas l'égalité $f + uw = v^2$ fournit $\deg(uw) = 2\deg v < 2\deg u$ donc $\deg w < \deg u$; ou bien $\deg(uw) \leqslant 2g + 1$, auquel cas $\deg w \leqslant 2g + 1 - \deg u < 2g + 1 - g$ donc $\deg w \leqslant g < \deg u$.

Tout idéal $\mathfrak{b}_{u,v}$ est donc associé à un idéal réduit et comme tout idéal de type fini non nul $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{B}$ est associé à un idéal $\mathfrak{b}_{u,v}$, $\mathfrak{b}$ est donc associé à un idéal réduit.

6a. Soit w vérifiant $v^2 - uw = f = y^2$; comme (u, v) est réduit, on a :

$$\deg v < \deg u \leqslant g < g + 1 \leqslant \deg w \quad \text{et} \quad \deg u + \deg w = 2g + 1.$$

Posons $y' = y - v$ et $z = au + by'$ avec $a, b \in \mathbf{A}$.

On a $y' + \overline{y'} = -2v$, $y\overline{y'} = -(y^2 - v^2) = uw$, donc :

$$\mathrm{N}(z) = z\overline{z} = a^2u^2 + aub(y' + \overline{y'}) + b^2y'\overline{y'} = u(a^2u - 2vab + b^2w),$$

d'où $\mathrm{N}(z)/\mathrm{N}(\mathfrak{b}_{u,v}) = \mathrm{N}(z)/u = a^2u - 2vab + b^2w$, polynôme dont il s'agit de minorer le degré. Notons le cas particulier $b = 0$ (donc $a \neq 0$) auquel cas $\mathrm{N}(z)/u = a^2u$, de degré $2\deg a + \deg u \geqslant \deg u$. On voit ici que l'égalité $\deg(\mathrm{N}(z)/u) = \deg u$ est atteinte si, et seulement si, $\deg a = 0$, i.e. si, et seulement si, $z \in \mathbf{k}^\times u$.

Il y a aussi le cas particulier $a = 0$ (donc $b \neq 0$) auquel cas $\mathrm{N}(z)/u = b^2w$, qui est de degré $2\deg b + \deg w > \deg u$.

Il reste donc à montrer que pour $a \neq 0$, $b \neq 0$, on a $\deg(\mathrm{N}(z)/u) > \deg u$. On introduit $\alpha = \deg a \geqslant 0$, $\beta = \deg b \geqslant 0$ et :

$d_1 = \deg(a^2u) = 2\alpha + \deg u$, $d_2 = \deg(vab) = \alpha + \beta + \deg v$, $d_3 = \deg(b^2w) = 2\beta + \deg w$.

On a $d_1 + d_3 \equiv \deg u + \deg w = 2g + 1 \bmod 2$ donc $d_1 \neq d_3$. Aussi, $\alpha \geqslant \beta \Rightarrow d_1 > d_2$ et enfin $\beta \geqslant \alpha \Rightarrow d_3 > \max(d_1, d_2)$.

Si $d_3 > \max(d_1, d_2)$, alors $\deg(\mathrm{N}(z)/u) = d_3 \geqslant \deg w > \deg u$. Si $d_3 \leqslant \max(d_1, d_2)$, alors $\alpha > \beta$, donc $d_1 > d_2$, puis $d_1 > \max(d_2, d_3)$.

On a donc $\deg(\mathrm{N}(z)/u) = d_1 = 2\alpha + \deg u \geqslant 2 + \deg u > \deg u$.

6b. On a $\mathfrak{b}' = d\mathfrak{b}_{u_1,v_1}$ et $\deg(\mathfrak{b}') = 2\deg(d) + \deg(\mathfrak{b}_{u_1,v_1})$. On peut donc supposer que $d = 1$. On a c, $c_1 \in \mathbf{B} \setminus \{0\}$ avec $c\mathfrak{b}_{u,v} = c_1\mathfrak{b}_{u_1,v_1}$, que nous notons $\mathfrak{b}$. On a $\mathrm{N}(\mathfrak{b}) = u\mathrm{N}(c) = u_1\mathrm{N}(c_1)$. Le degré minimum des $\mathrm{N}(z)/\mathrm{N}(\mathfrak{b})$ pour $z \in \mathfrak{b} \setminus \{0\}$ est

$\deg u$ et il est atteint uniquement pour $z \in \mathbf{k}^\times cu$.
Pour $z = c_1u_1 \in \mathfrak{b}$, on a $\mathrm{N}(z) = u_1^2\mathrm{N}(c_1)$ donc $\mathrm{N}(z)/\mathrm{N}(\mathfrak{b}) = \frac{u_1^2\mathrm{N}(c_1)}{u_1\mathrm{N}(c_1)} = u_1$. On a donc $\deg u_1 \geqslant \deg u$, i.e. $\deg(\mathfrak{b}_{u_1,v_1}) \geqslant \deg(\mathfrak{b}_{u,v})$. L'égalité n'est possible que si $c_1u_1 \in \mathbf{k}^\times cu$. Dans ce cas, $u\mathfrak{b}_{u_1,v_1} = u_1\mathfrak{b}_{u,v}$. Puisque le contenu de $u\mathfrak{b}_{u_1,v_1}$ est u, et que celui de $u_1\mathfrak{b}_{u,v}$ est u_1, l'égalité précédente entraîne $u = u_1$ puis $v = v_1$.
7a. On a $F'_X(X,Y) = -f'(X)$, $F'_Y(X,Y) = 2Y$.
Comme $\mathrm{car}(\mathbf{k}) \neq 2$, on obtient $f(X) \in \langle F, F'_X, F'_Y\rangle$, puis $1 \in \langle F, F'_X, F'_Y\rangle$.
7b. On réalise le changement de variables $\mathbf{x} = 1/x$ dans

$$y^2 = f(x) = x^{2g+1} + a_{2g}x^{2g} + \cdots + a_1x + a_0,$$

et l'on multiplie par $\mathbf{x}^{2g+2}$ pour obtenir :

$$\mathbf{y}^2 = \mathbf{x} + a_{2g}\mathbf{x}^2 + \cdots + a_0\mathbf{x}^{2g+2} = \mathbf{x}\big(1 + \mathbf{x}h(\mathbf{x})\big) \quad \text{avec} \quad \mathbf{y} = y\mathbf{x}^{g+1}.$$

Bilan : le changement de variables $\mathbf{x} = 1/x$, $\mathbf{y} = y/x^{g+1}$ donne $\mathbf{k}(x) = \mathbf{k}(\mathbf{x})$ et $\mathbf{k}(x,y) = \mathbf{k}(\mathbf{x},\mathbf{y})$. Et $\mathbf{y}$ est entier sur $\mathbf{k}[\mathbf{x}]$, a fortiori sur $\mathbf{A}_\infty$.
On pose $\mathbf{B}_\infty = \mathbf{k}[\mathbf{x},\mathbf{y}]_{\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}$; dans ce localisé, on a $\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{y}\rangle$ puisque $\mathbf{x} = \frac{\mathbf{y}^2}{1+\mathbf{x}h(\mathbf{x})}$.
Conclusion : $\mathbf{B}_\infty$ est un anneau de valuation discrète d'uniformisante $\mathbf{y}$.
Enfin, soit $\mathbf{W}$ un anneau de valuation pour $\mathbf{k}(x,y)$ contenant $\mathbf{k}$.
Si $x \in \mathbf{W}$, alors $\mathbf{k}[x] \subset \mathbf{W}$. Alors y, entier sur $\mathbf{k}[x]$, est dans $\mathbf{W}$, donc $\mathbf{B} \subset \mathbf{W}$.
Si $x \notin \mathbf{W}$, on a $x^{-1} \in \mathfrak{m}(\mathbf{W})$, donc $\mathbf{A}_\infty = \mathbf{k}[x^{-1}]_{\langle x^{-1}\rangle} \subset \mathbf{W}$, et $\mathbf{W} = \mathbf{B}_\infty$.

Problème 5. On note ε l'inversible défini par $\boxed{\varepsilon = \beta - \alpha}$.
1. On décompose G et H en composantes homogènes G_i, H_j :

$$G = G_a + \cdots + G_b,\ a \leqslant b, \quad H = H_c + \cdots + H_d,\ c \leqslant d.$$

La composante homogène basse de GH, de degré $a+c$, est G_aH_c tandis que la composante homogène haute de GH, de degré $b+d$, est G_bH_d. On en déduit que $a + c = N$, $b + d = N + 1$; on ne peut pas avoir à la fois $a < b$ et $c < d$ (car on aurait alors $a + c + 2 \leqslant b + d$, i.e. $N + 2 \leqslant N + 1$). Si $a = b$, alors G est homogène, si $c = d$ c'est H. Supposons F_N, F_{N+1} premiers entre eux et soit une factorisation $F = GH$; par exemple, G est homogène de degré g ; on en déduit que $H = H_{N-g} + H_{N+1-g}$ et que $F_N = GH_{N-g}$, $F_{N+1} = GH_{N+1-g}$: G est un facteur commun à F_N, F_{N+1}, donc G est inversible. La réciproque est facile.
Les polynômes $(X^2+Y^2)^2$ et $\alpha X^2Y + \beta Y^3 = Y(\alpha X^2 + \beta Y^2)$ sont premiers entre eux si, et seulement si, les polynômes $X^2 + Y^2$ et $\alpha X^2 + \beta Y^2$ le sont i.e. si, et seulement si, $\alpha \neq \beta$.
2. La lectrice vérifiera que $(0,0)$ est le seul point singulier ; on a le résultat plus précis :

$$\varepsilon^2X^5, \varepsilon^2Y^5 \in \langle F, F'_X, F'_Y\rangle$$

3. On pose $Y = TX$ dans $F(X,Y)$ et l'on obtient $F(X,TX) = X^3G(X,T)$ avec

$$G(X,T) = XT^4 + \beta T^3 + 2XT^2 + \alpha T + X.$$

Le polynôme G est primitif (en T) et $(x = 0, t = 0)$ est un point simple de la courbe $G = 0$. Avec $a_4 = x$, $a_3 = \beta$, $a_2 = 2x$, $a_1 = \alpha$, $a_0 = x$, on considère les entiers d'Emmanuel :

$$b_4 = a_4, \quad b_3 = a_3 + tb_4, \quad b_2 = a_2 + tb_3, \quad b_1 = a_1 + tb_2.$$

Ainsi, $b_4 = x$, $b_3 = \beta + y$ et $b_2 = 2x + (\beta + y)y/x$.
Il est clair que $a_4, a_3, \ldots, a_0 \in \sum_i \mathbf{A}b_i + \sum_i \mathbf{A}tb_i$. Comme $a_3 - a_1 = \varepsilon$ est inversible, il y a des $u_i, v_i \in \mathbf{A}$ tels que $1 = \sum_i u_ib_i + \sum_i v_itb_i$. On écrit formellement

(sans se soucier de la nullité d'un b_i) :

$$t = \tfrac{b_1 t}{b_1} = \cdots = \tfrac{b_4 t}{b_4} = \frac{\sum_i v_i b_i t}{\sum_i v_i b_i} = \frac{\sum_i u_i b_i t}{\sum_i u_i b_i}.$$

Ainsi, $t = y/x = a/b = c/d$ avec a, b, c, $d \in \mathbf{B}$ et $a + d = 1$.
Les égalités $by = ax$, $dy = cx$, $a + d = 1$ sont celles convoitées.
On obtient ainsi $\mathfrak{q}\,\langle x, y\rangle_{\mathbf{B}} = \langle x\rangle_{\mathbf{B}}$ avec $\mathfrak{q} = \langle d, b\rangle_{\mathbf{B}}$. Ici en posant :

$$a = b_2 t - b_4 t, \quad b = b_2 - b_4, \quad c = b_3 t - b_1 t, \quad d = b_3 - b_1,$$

on a $\varepsilon = a + d$. En posant $g_0 = 1/(1 + t^2)$, $g_1 = t g_0$, on trouve $b = \varepsilon g_1$, $d = \varepsilon g_0$, donc $\mathfrak{q} = \langle g_0, g_1\rangle_{\mathbf{B}}$. On va montrer (question *5*) que $\mathbf{B} = \mathbf{k}[g_0, g_1]$, donc $\mathbf{B}/\mathfrak{q} = \mathbf{k}$.
4. Une idée géométrique conduit à l'égalité $\mathbf{k}(t) = \mathbf{k}(x, y)$. C'est le paramétrage du trifolium. Le polynôme définissant la courbe est de degré 4 et l'origine est un point singulier de multiplicité 3. Donc une droite rationnelle passant par l'origine recoupe la courbe en un point rationnel. Algébriquement, cela correspond au fait que le polynôme $G(X, T)$ est de degré 1 en X :

$$G(T, X) = (T^4 + 2T^2 + 1)X + \beta T^3 + \alpha T = (T^2 + 1)^2 X + T(\beta T^2 + \alpha),$$

d'où :

$$x = -\frac{t(\beta t^2 + \alpha)}{(t^2 + 1)^2}, \quad y = tx = -\frac{t^2(\beta t^2 + \alpha)}{(t^2 + 1)^2}.$$

En $t = 0$, on a $(x, y) = (0, 0)$. Quelles sont les autres valeurs du paramètre t pour lesquelles $\big(x(t), y(t)\big) = (0, 0)$?
Il faut d'abord trouver les zéros de $x(t)$, fraction rationnelle de hauteur 4. Il y a la valeur $t = \infty$, pour laquelle $y(t) = -\beta$.
Si $\alpha = 0$, on a seulement deux zéros de x : $t = 0$ (de multiplicité 3) et $t = \infty$ (de multiplicité 1).
Si $\beta = 0$, on a seulement deux zéros de x : $t = 0$ (de multiplicité 1) et $t = \infty$ (de multiplicité 3).
Si $\beta \neq 0$, on a deux autres zéros de x (éventuellement confondus) : $t = \pm\sqrt{-\alpha/\beta}$.
On peut rendre cela plus uniforme en faisant intervenir le caractère quadratique de $-\alpha\beta$, voir la question *7.*
Remarque : dans tous les cas, en $t = \infty$, on a $(x, y) = (0, -\beta)$.
5. On sait d'après l'exercice 8 que $\mathbf{k}[g_0, g_1]$ est un anneau intégralement clos, clôture intégrale de $\mathbf{k}[g_0]$ dans $\mathbf{k}(t)$. Pour obtenir un $\mathbf{k}$-relateur entre g_0 et g_1, on reporte $t = g_1/g_0$ dans l'expression $g_0 = 1/(1 + t^2)$, ce qui donne $g_0^2 - g_0 + g_1^2 = 0$ et confirme que g_1 est entier sur $\mathbf{k}[g_0]$. En $t = 0$, on a $(g_0, g_1) = (1, 0)$; ce point est un point non singulier de la courbe $g_0^2 - g_0 + g_1^2 = 0$. En fait la conique $C(g_0, g_1) = g_0^2 - g_0 + g_1^2$ est lisse sur tout anneau puisque

$$1 = -4C + (2g_0 - 1)\tfrac{\partial C}{\partial g_0} + 2g_1 \tfrac{\partial C}{\partial g_1}.$$

Il en est de même de la conique homogénéisée notée encore C, $C = g_0^2 - g_0 g_2 + g_1^2$, qui vérifie $\langle g_0, g_1, g_2\rangle^2 \subseteq \big\langle C, \tfrac{\partial C}{\partial g_0}, \tfrac{\partial C}{\partial g_1}, \tfrac{\partial C}{\partial g_2}\big\rangle$:

$$g_0 = -\frac{\partial C}{\partial g_2}, \quad g_1^2 = C + (g_0 - g_2)\frac{\partial C}{\partial g_2}, \quad g_2 = -\frac{\partial C}{\partial g_0} - 2\frac{\partial C}{\partial g_2}.$$

On dispose de $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ défini par $(u : v) \mapsto (g_0 : g_1 : g_2) = (u^2 : uv : u^2 + v^2)$ dont l'image est la conique homogène $C = 0$; à quelque chose près, il s'agit du plongement de Veronese $\mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^2$ de degré 2.

Par ailleurs, la décomposition en éléments simples fournit les expressions suivantes de x, y, b_3t, b_2t dans $\mathbf{k}[g_0, g_1]$:

$$x = \varepsilon g_0 g_1 - \beta g_1, \quad y = \varepsilon g_0^2 + (2\beta - \alpha)g_0 - \beta = (g_0 - 1)(\beta - \varepsilon g_0)$$
$$b_2t = 2y + (\beta + y)t^2 = -\alpha + \beta g_0 - \varepsilon g_0^2, \quad b_3t = (2\beta - \alpha)g_1 - \varepsilon g_0 g_1.$$

On y voit que g_0 est entier sur $\mathbf{k}[y]$, donc entier sur $\mathbf{k}[x]$; comme g_1 est entier sur $\mathbf{k}[g_0]$, il l'est sur $\mathbf{k}[x]$. On vient d'obtenir l'égalité $\mathbf{B} = \mathbf{k}[g_0, g_1]$.
Considérons d'abord $\mathbf{k}[y] \subset \mathbf{k}[g_0] \subset \mathbf{k}[g_0, g_1]$; il est clair que $(1, g_0)$ est une base de $\mathbf{k}[g_0]$ sur $\mathbf{k}[y]$ et $(1, g_1)$ est une base de $\mathbf{k}[g_0, g_1]$ sur $\mathbf{k}[g_0]$, donc $(1, g_0, g_1, g_0g_1)$ est une base de $\mathbf{k}[g_0, g_1]$ sur $\mathbf{k}[y]$ (mais pas sur $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x]$).
Montrons que $(1, y, b_3t, b_2t)$ est une $\mathbf{A}$-base, soit le $\mathbf{A}$-module E engendré. En utilisant $y - b_2t = \varepsilon(g_0 - 1)$ et $x + b_3t = \varepsilon g_1$, on voit que g_0, $g_1 \in E$. Enfin, E contient $x + \beta g_1 = \varepsilon g_0 g_1$, donc $g_0g_1 \in E$ et $E = \mathbf{k}[g_0, g_1] = \mathbf{B}$.
Un idéal inversible $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{B}$ contient un élément régulier donc $\mathbf{B}/\mathfrak{b}$ est un $\mathbf{k}$-espace vectoriel de dimension finie, ce qui permet de définir $\deg \mathfrak{b}$ par $\deg \mathfrak{b} = \dim_{\mathbf{k}} \mathbf{B}/\mathfrak{b}$; on a alors (voir la proposition 5.5 et son corollaire 5.6) $\deg(\mathfrak{b}\mathfrak{b}') = \deg(\mathfrak{b}) + \deg(\mathfrak{b}')$. On en déduit que $\deg \langle x, y\rangle_{\mathbf{B}} = 4 - 1 = 3$.
6. On a $\mathfrak{p}_1 = \langle g_0 - 1, g_1\rangle$, donc pour montrer l'égalité $\mathfrak{p}_1^2 = \left\langle g_0 - 1, g_1^2\right\rangle$, il suffit de voir que $g_0 - 1 \in \left\langle (g_0 - 1)^2, g_1^2\right\rangle$. Cela résulte de l'égalité $1 - g_0 = (1 - g_0)^2 + g_1^2$ qui découle de $g_0^2 - g_0 + g_1^2 = 0$.
7. On pose $X = UY$ dans $F(X, Y)$ et on obtient $F(UY, Y) = U^3H(U, Y)$ avec

$$H(U, Y) = YU^4 + (2Y + \alpha)U^2 + Y + \beta, \qquad H(U, 0) = \alpha U^2 + \beta.$$

Ce polynôme $H = a_4'U^4 + a_2'U^2 + a_0'$ est primitif en U (on a $a_2' = 2a_4' + \alpha$ et $a_0' = a_4' + \beta$ donc $\epsilon = a_0' - a_2' + a_4'$). Il vérifie $H(u, y) = 0$ avec $u = x/y$; l'entier b_3' d'Emmanuel associé est x, et l'on a donc $b_3'u \in \mathbf{B}$ avec :

$$b_3'u = x^2/y = \varepsilon g_0 - \beta - y.$$

En t racine de $\beta t^2 + \alpha = 0$, on a $g_0 = \beta/\varepsilon$ et $g_1^2 = -\alpha\beta/\varepsilon^2$, ce qui rend naturel l'introduction de l'idéal $\mathfrak{a} = \left\langle \varepsilon g_0 - \beta, \varepsilon^2 g_1^2 + \alpha\beta\right\rangle$. On vérifie l'égalité :

$$\left\langle y, x^2/y\right\rangle_{\mathbf{B}} = \left\langle \varepsilon g_0 - \beta, \varepsilon^2 g_1^2 + \alpha\beta\right\rangle.$$

On a alors $\langle x, y\rangle_{\mathbf{B}} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{a}$ et $\deg \mathfrak{a} = 2$. Si $-\alpha\beta$ n'est pas un carré, alors $\mathfrak{a}$ est premier. Sinon, on a $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3$ avec $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3$ s'exprimant avec les deux racines carrées de $-\alpha\beta$. On a $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$ si, et seulement si, les deux racines carrées sont confondues ; ceci arrive quand $\alpha\beta = 0$ par exemple ou en caractéristique 2. Enfin, pour $\alpha = 0$, on a $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 = \mathfrak{p}_3$.

Commentaires bibliographiques

Concernant la genèse de la théorie des idéaux de corps de nombres développée par Dedekind, on peut lire les articles de H. Edwards [71] et de J. Avigad [4].
Les anneaux de Prüfer intègres ont été introduits par H. Prüfer en 1932 dans [149]. Leur place centrale en théorie multiplicative des idéaux est mise en valeur dans le livre de référence sur le sujet [Gilmer]. Voir aussi les commentaires bibliographiques en fin du chapitre VIII.
Dans la littérature classique un anneau de Prüfer cohérent est souvent appelé un *anneau semihéréditaire* (selon le point *3* dans le théorème 4.1),

ce qui n'est pas très joli. Ces anneaux sont signalés comme importants dans [Cartan & Eilenberg]. La preuve du point *1* du théorème 4.5 y est donnée, constructive, dans le chapitre 1, proposition 6.1.
Un *anneau héréditaire* est un anneau dans lequel tout idéal est projectif. Cette notion est mal définie en mathématiques constructives à cause de la quantification non légitime « tout idéal ». Un exemple d'un tel anneau non noethérien est le sous anneau d'un produit dénombrable de corps $\mathbb{F}_2$, formé par les suites qui sont ou bien presque partout nulles, ou bien presque partout égales à 1. Le cas le plus intéressant est celui des anneaux de Prüfer cohérents noethériens, que l'on décrit en mathématiques classiques comme les anneaux dans lesquels tout idéal est projectif de type fini. Notre définition pour un anneau de Dedekind (libéré de la contrainte d'intégrité) correspond exactement (en mathématiques classiques) à la notion d'anneau héréditaire noethérien.
Des exposés assez complets sur les anneaux arithmétiques et les anneaux de Prüfer écrits dans le style des mathématiques constructives se trouvent dans les articles [69, Ducos&al.] et [126, Lombardi].
Les « entiers d'Emmanuel » du lemme 4.7 sont très présents dans le mémoire de thèse d'Emmanuel Hallouin [97].
Le théorème 4.8 est de Gilmer et Hoffmann [92]. Le théorème 6.1 pour le cas d'un anneau de Prüfer intègre est donné par Heitman et Levy dans [100].
Le théorème 6.2 a été démontré en mathématiques classiques par Quentel dans [150]. La démonstration constructive est due à I. Yengui.
Le théorème 6.3 est classique (théorème de Steinitz) pour les anneaux de Dedekind. Il a été généralisé pour les domaines de Prüfer possédant la propriété un et demi dans [117, Kaplansky] et [100, Heitmann&Levy]. L'inspection détaillée de notre démonstration montrerait d'ailleurs que l'hypothèse « anneau de dimension inférieure ou égale à 1 » pourrait être affaiblie en « anneau possédant la propriété un et demi ».
On trouve le théorème 6.7 (voir aussi l'exercice 17) dans [24, Brewer&Klinger] pour le cas intègre. Il a été généralisé au cas quasi intègre dans [53, Couchot].
Le lemme 5.7 et le théorème 7.12 sont dus à Claire Tête et Lionel Ducos.
Le problème 3 est basé sur l'article [102, Hess].
Une démonstration alternative du théorème 8.1 se trouve dans l'article [45, Coquand & Lombardi, 2016].

Chapitre XIII

Dimension de Krull

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre on introduit la dimension de Krull dans sa version constructive élémentaire et on la compare à la notion classique correspondante. On établit ensuite les premières propriétés de cette dimension. La facilité avec laquelle on obtient la dimension de Krull d'un anneau de polynômes sur un corps discret montre que la version constructive de la dimension de Krull peut être vue comme une simplification conceptuelle de la version classique usuelle.
Nous appliquons ensuite le même type d'idées pour définir la dimension de Krull d'un treillis distributif, celle d'un morphisme d'anneaux commutatifs, puis la dimension valuative des anneaux commutatifs.
Nous établissons quelques théorèmes de base importants concernant ces notions.
Nous terminons en indiquant les versions constructives des notions classiques usuelles de Lying over, Going up, Going down et Incomparabilité, avec quelques applications.

1. Espaces spectraux

Dans cette section, nous décrivons l'approche de la dimension de Krull en mathématiques classiques.
Pour nous il s'agit avant tout d'une heuristique. C'est la raison pour laquelle nous ne donnons aucune démonstration. Cela n'aura aucune incidence dans la suite de l'ouvrage. En effet, l'aspect constructif des espaces spectraux est entièrement concentré dans les treillis distributifs obtenus par dualité. En particulier, l'aspect constructif de la dimension de Krull est entièrement concentré dans la dimension de Krull des treillis distributifs et elle peut être définie de manière complètement indépendante des espaces spectraux.
Néanmoins l'heuristique donnée par les espaces spectraux est essentielle à la compréhension du petit miracle qui va advenir avec l'introduction des notions constructives duales. Petit miracle dont on ne prendra pleinement conscience que dans les chapitres suivants, quand on verra tant de beaux théorèmes abstraits se transformer en algorithmes.

Treillis et spectre de Zariski

Rappelons que l'on note $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ le nilradical de l'idéal $\mathfrak{a}$ dans l'anneau $\mathbf{A}$ et que le treillis de Zariski $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ est l'ensemble des $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ (pour $n\in\mathbb{N}$ et $x_1,\ldots,x_n\in\mathbf{A}$). On a donc $x\in\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1,\ldots,x_n)$ si, et seulement si, une puissance de x appartient à $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$. L'ensemble $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$, ordonné par la relation d'inclusion, est un treillis distributif avec

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1)\vee\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2)=\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2)\ \text{ et }\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1)\wedge\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2)=\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{a}_2).$$

1.1. Définition. On appelle *spectre de Zariski* de l'anneau $\mathbf{A}$ et l'on note $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ l'ensemble des idéaux premiers stricts de $\mathbf{A}$. On le munit de la topologie possédant pour base d'ouverts les $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a) = \{\,\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \mid a \notin \mathfrak{p}\,\}$. On note $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ pour $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1) \cup \cdots \cup \mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_n)$.
Pour $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ et $S = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$ on note $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ pour $\mathbf{A}_S$ (l'ambigüité entre les deux notations contradictoires $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}$ et $\mathbf{A}_S$ est levée en pratique par le contexte).

En mathématiques classiques, on obtient alors le résultat suivant.

1.2. Théorème*.

1. *Les ouverts quasi-compacts de* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ *sont les ouverts* $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$.
2. *L'application* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n)$ *est bien définie, c'est un isomorphisme de treillis distributifs.*

Spectre d'un treillis distributif

Le spectre de Zariski est l'exemple paradigmatique d'un *espace spectral*. Les espaces spectraux ont été introduits par Stone [178] en 1937.
Ils peuvent être caractérisés comme les espaces topologiques vérifiant les propriétés suivantes :

— l'espace est quasi-compact,
— tout ouvert est réunion d'ouverts quasi-compacts,
— l'intersection de deux ouverts quasi-compacts est un ouvert quasi-compact,
— pour deux points distincts, il y a un ouvert contenant l'un mais pas l'autre,
— tout fermé irréductible est l'adhérence d'un point.

Les ouverts quasi-compacts forment alors un treillis distributif, le sup et le inf étant la réunion et l'intersection. Une application continue entre espaces spectraux est dite *spectrale* si l'image réciproque de tout ouvert quasi-compact est un ouvert quasi-compact. Le résultat fondamental de Stone peut être énoncé comme suit.
En mathématiques classiques la catégorie des espaces spectraux et applications spectrales est antiéquivalente à la catégorie des treillis distributifs.

Voici comment cela fonctionne.
Tout d'abord si $\mathbf{T}$ est un treillis distributif, un *idéal premier* est un idéal $\mathfrak{p}$ qui vérifie

$$x \wedge y \in \mathfrak{p} \;\Rightarrow\; (x \in \mathfrak{p} \text{ ou } y \in \mathfrak{p}), \qquad 1_{\mathbf{T}} \notin \mathfrak{p}$$

Le *spectre* de $\mathbf{T}$, noté $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est alors défini comme l'espace dont les points sont les idéaux premiers de $\mathbf{T}$ et dont une base d'ouverts est donnée par les parties $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}}(a) := \{\,\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{T} \mid a \notin \mathfrak{p}\,\}$ pour $a \in \mathbf{T}$.
Si $\varphi : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ est un morphisme de treillis distributifs, on définit l'application

$$\mathsf{Spec}\,\varphi : \mathsf{Spec}\,\mathbf{V} \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}, \quad \mathfrak{p} \mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{p}).$$

C'est une application spectrale et tout ceci définit Spec comme foncteur contravariant.

On montre que les $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}}(a)$ sont tous les ouverts quasi-compacts de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$. En fait le théorème* 1.2 s'applique à tout treillis distributif $\mathbf{T}$:

1. *Les ouverts quasi-compacts de* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ *sont exactement les* $\mathfrak{D}_{\mathbf{T}}(u)$.
2. *L'application* $u \mapsto \mathfrak{D}_{\mathbf{T}}(u)$ *est bien définie et c'est un isomorphisme de treillis distributifs.*

Dans l'autre sens, si X est un espace spectral on note $\mathsf{Oqc}(X)$ le treillis distributif formé par ses ouverts quasi-compacts. Si $\xi : X \to Y$ est une application spectrale, l'application

$$\mathsf{Oqc}(\xi) : \mathsf{Oqc}(Y) \to \mathsf{Oqc}(X), \quad U \mapsto \xi^{-1}(U)$$

est un homomorphisme de treillis distributifs. Ceci définit Oqc comme foncteur contravariant.

L'antiéquivalence de catégories qui était annoncée est définie par les foncteurs Spec et Oqc. Elle généralise l'antiéquivalence donnée dans le cas fini au théorème XI-5.6.

Notez que l'espace spectral vide correspond au treillis $\mathbf{1}$, et qu'un espace spectral réduit à un point correspond au treillis $\mathbf{2}$.

Sous-espaces spectraux

Par définition, un sous-ensemble Y d'un espace spectral X est un *sous-espace spectral* si la topologie induite fait de Y un espace spectral et si l'injection canonique $Y \to X$ est spectrale.

Cette notion est en fait exactement la notion duale de la notion de treillis distributif quotient. Autrement dit une application spectrale $\alpha : Y \to X$ identifie Y à un sous-espace spectral de X si, et seulement si, l'homomorphisme de treillis distributifs $\mathsf{Oqc}(\alpha)$ identifie $\mathsf{Oqc}(Y)$ à un treillis distributif quotient de $\mathsf{Oqc}(X)$.

Les sous-espaces fermés de X sont spectraux et correspondent aux quotients par les idéaux. Plus précisément un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathsf{Oqc}(X) = \mathbf{T}$ définit le fermé $\mathfrak{V}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a}) = \{\, \mathfrak{p} \in X \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \,\}$, (à condition d'identifier les points de X avec les idéaux premiers de $\mathsf{Oqc}(X)$) et l'on a alors un isomorphisme canonique

$$\mathsf{Oqc}\big(\mathfrak{V}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a})\big) \simeq \mathsf{Oqc}(X)/(\mathfrak{a} = 0)\ .$$

Les fermés irréductibles correspondent aux idéaux premiers de $\mathsf{Oqc}(X)$.

Enfin les ouverts quasi-compacts correspondent aux quotients par des filtres principaux :

$$\mathsf{Oqc}\big(\mathfrak{D}_{\mathbf{T}}(u)\big) \simeq \mathsf{Oqc}(X)/(\uparrow u = 1)\ .$$

Une approche heuristique pour la dimension de Krull

Notons par ailleurs que le spectre de Zariski d'un anneau commutatif s'identifie de façon naturelle avec le spectre de son treillis de Zariski.
En mathématiques classiques, la notion de dimension de Krull peut être définie, pour un espace spectral arbitraire X, comme la longueur maximale des chaînes strictement croissantes de fermés irréductibles.
Une manière intuitive d'appréhender cette notion de dimension est la suivante. La dimension peut être caractérisée par récurrence en disant que d'une part, la dimension -1 correspond à l'espace vide, et d'autre part, pour $k \geqslant 0$, un espace X est de dimension $\leqslant k$ si, et seulement si, pour tout ouvert quasi-compact Y, le bord de Y dans X est de dimension $\leqslant k-1$ (ce bord est fermé donc c'est un sous-espace spectral de X).
Voyons par exemple, pour un anneau commutatif $\mathbf{A}$, comment on peut définir le bord de l'ouvert $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$ dans $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$. Le bord est l'intersection de l'adhérence de $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$ et du fermé complémentaire de $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$, que nous notons $\mathfrak{V}_{\mathbf{A}}(a)$. L'adhérence de $\mathfrak{D}(a)$ c'est l'intersection de tous les $\mathfrak{V}(x)$ qui contiennent $\mathfrak{D}(a)$, c'est-à-dire tels que $\mathfrak{D}(x) \cap \mathfrak{D}(a) = \emptyset$.
Comme $\mathfrak{D}(x) \cap \mathfrak{D}(a) = \mathfrak{D}(xa)$, et comme on a $\mathfrak{D}(y) = \emptyset$ si, et seulement si, y est nilpotent, on obtient une approche heuristique de l'idéal « bord de Krull de a », qui est l'idéal engendré par a d'une part (ce qui correspond à $\mathfrak{V}(a)$), et par tous les x tels que xa est nilpotent d'autre part (ce qui correspond à l'adhérence de $\mathfrak{D}(a)$).

2. Définition constructive et premières conséquences

En mathématiques classiques, la dimension de Krull d'un anneau commutatif est définie comme le maximum (éventuellement infini) des longueurs des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers stricts (attention, une chaîne $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$ est dite de longueur ℓ). Puisque le complémentaire d'un idéal premier est un filtre premier, la dimension de Krull est aussi le maximum des longueurs des chaînes strictement croissantes de filtres premiers.
Comme cette définition est impossible à manipuler d'un point de vue algorithmique, on la remplace en mathématiques constructives par une définition équivalente (en mathématiques classiques) mais de nature plus élémentaire. La quantification sur l'ensemble des idéaux premiers de l'anneau est alors remplacée par une quantification sur les éléments de l'anneau et les entiers naturels. Depuis cette découverte (de manière surprenante elle est très récente) les théorèmes qui font intervenir la dimension de Krull ont pu rentrer à part entière dans le domaine des mathématiques constructives et du Calcul Formel.

2.1. Définition. Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, $x \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini.

(1) Le *bord supérieur de Krull* de $\mathfrak{a}$ dans $\mathbf{A}$ est l'anneau quotient

$$\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{\mathfrak{a}} := \mathbf{A}/\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(\mathfrak{a}) \quad \text{où} \quad \mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(\mathfrak{a}) := \mathfrak{a} + (\sqrt{0} : \mathfrak{a}). \tag{1}$$

On note $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$ pour $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x}$ pour $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x\mathbf{A}}$. Cet anneau est appelé le *bord supérieur de x dans $\mathbf{A}$*.
On dira que $\mathcal{J}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(\mathfrak{a})$ est *l'idéal bord de Krull de $\mathfrak{a}$ dans $\mathbf{A}$*.

(2) Le *bord inférieur de Krull* de x dans $\mathbf{A}$ est l'anneau localisé

$$\mathbf{A}_{x}^{\mathrm{K}} := \mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)^{-1}\mathbf{A} \quad \text{où} \quad \mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x) = x^{\mathbb{N}}(1 + x\mathbf{A}). \tag{2}$$

On dira que $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$ est le *monoïde bord de Krull de x* dans $\mathbf{A}$.

Rappelons qu'en mathématiques classiques la dimension de Krull d'un anneau est -1 si, et seulement si, l'anneau n'admet pas d'idéal premier, ce qui signifie qu'il est trivial.
Le théorème suivant donne alors en mathématiques classiques une caractérisation inductive élémentaire de la dimension de Krull d'un anneau commutatif.

2.2. Théorème*. *Pour un anneau commutatif $\mathbf{A}$ et un entier $k \geqslant 0$ les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La dimension de Krull de $\mathbf{A}$ est $\leqslant k$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbf{A}$ la dimension de Krull de $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x}$ est $\leqslant k-1$.*
3. *Pour tout $x \in \mathbf{A}$ la dimension de Krull de $\mathbf{A}_{x}^{\mathrm{K}}$ est $\leqslant k-1$.*

NB. Ceci est un théorème de mathématiques classiques qui ne peut pas admettre de preuve constructive. ∎

Dans la démonstration qui suit, tous les idéaux et filtres premiers ou maximaux sont pris au sens usuel en mathématiques classiques : ils sont stricts.

▷ Montrons d'abord l'équivalence des points *1* et *3*. Rappelons que les idéaux premiers de $S^{-1}\mathbf{A}$ sont de la forme $S^{-1}\mathfrak{p}$ où $\mathfrak{p}$ est un idéal premier de $\mathbf{A}$ qui ne coupe pas S (fait XI-4.17). L'équivalence résulte alors clairement des deux affirmations suivantes.
(a) Soit $x \in \mathbf{A}$, si $\mathfrak{m}$ est un idéal maximal de $\mathbf{A}$ il coupe toujours $\mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$. En effet, si $x \in \mathfrak{m}$ c'est clair et sinon, x est inversible modulo $\mathfrak{m}$ ce qui signifie que $1 + x\mathbf{A}$ coupe $\mathfrak{m}$.
(b) Soient $\mathfrak{a}$ un idéal, $\mathfrak{p}$ un idéal premier avec $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$ et $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$; si $\mathfrak{p} \cap \mathcal{S}_{\mathbf{A}}^{\mathrm{K}}(x)$ est non vide, alors $1 \in \mathfrak{a}$. En effet, soit $x^n(1 + xy) \in \mathfrak{p}$; puisque $x \notin \mathfrak{p}$, on a $1 + xy \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$, ce qui donne avec $x \in \mathfrak{a}$, $1 \in \mathfrak{a}$.
Ainsi, si $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_\ell$ est une chaîne avec $\mathfrak{p}_\ell$ maximal, elle est raccourcie

d'au moins son dernier terme quand on localise en $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$, et elle n'est raccourcie que de son dernier terme si $x \in \mathfrak{p}_\ell \setminus \mathfrak{p}_{\ell-1}$.
L'équivalence des points *1* et *2* se démontre de manière duale, en remplaçant les idéaux premiers par les filtres premiers. Soit $\pi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ la projection canonique. On remarque que les filtres premiers de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ sont exactement les $\pi(S)$, où S est un filtre premier de $\mathbf{A}$ qui ne coupe pas $\mathfrak{a}$ (fait XI-4.16). Il suffit alors de démontrer les deux affirmations duales de (a) et (b) qui sont les suivantes.
(a') Soit $x \in \mathbf{A}$, si S est un filtre maximal de $\mathbf{A}$ il coupe toujours $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$. En effet, si $x \in S$ c'est clair et sinon, puisque S est maximal, $Sx^{\mathbb{N}}$ contient 0, ce qui signifie qu'il y a un entier n et un élément s de S tels que $sx^n = 0$. Alors $(sx)^n = 0$ et $s \in (\sqrt{0} : x) \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$.
(b') Soient S' un filtre premier contenu dans un filtre S et $x \in S \setminus S'$. Si $S' \cap \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$ est non vide, alors $S = \mathbf{A}$. En effet, soit $ax + b \in S'$ avec $(bx)^n = 0$. Alors, puisque $x \notin S'$, on a $ax \notin S'$ et, vu que S' est premier, $b \in S' \subseteq S$. Et comme $x \in S$, on obtient $(bx)^n = 0 \in S$. □

En mathématiques constructives on remplace la définition usuellement donnée en mathématiques classiques par la définition plus élémentaire suivante.

2.3. Définition. La *dimension de Krull* (notée Kdim) d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$ est définie par récurrence comme suit :

1. $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = -1$ si, et seulement si, $\mathbf{A}$ est trivial.
2. Pour $k \geqslant 0$, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$ signifie : $\forall x \in \mathbf{A}$, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}^{\mathrm{K}}_x) \leqslant k-1$.

Naturellement $\mathbf{A}$ sera dit de dimension infinie si, et seulement si, pour tout entier $k \geqslant 0$ on a l'implication $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k \Rightarrow 1 =_{\mathbf{A}} 0$.

Le lemme suivant résulte immédiatement des définitions.

2.4. Lemme. *Un anneau est zéro-dimensionnel si, et seulement si, il est de dimension inférieure ou égale à* 0.

Notez que la terminologie «anneau zéro-dimensionnel» constitue donc un léger abus de langage car affirmer que la dimension est inférieure ou égale à 0 laisse ouverte la possibilité de dimension égale à -1, ce qui signifie que l'anneau est trivial.

Exemples.
1) Si x est nilpotent ou inversible dans $\mathbf{A}$, l'idéal et le monoïde bords de x dans $\mathbf{A}$ sont tous deux égaux à $\mathbf{A}$. Les deux anneaux bords sont triviaux.
2) Pour $x \neq 0$, 1, -1 dans $\mathbb{Z}$, les anneaux bords $\mathbb{Z}^x_{\mathrm{K}} = \mathbb{Z}/x\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^{\mathrm{K}}_x = \mathbb{Q}$ sont zéro-dimensionnels. On retrouve donc que $\mathsf{Kdim}\,\mathbb{Z} \leqslant 1$.
3) Soit $\mathbf{K}$ un corps contenu dans un corps algébriquement clos discret $\mathbf{L}$. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ et $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$.

Soient V la variété affine correspondant à $\mathfrak{a}$ dans $\mathbf{L}^n$, W la sous-variété de V définie par f. Alors le « bord de W dans V », défini comme l'intersection de W avec la clôture de Zariski de son complémentaire dans V, est la variété affine correspondant à l'anneau $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{f}$. De manière abrégée :

$$\mathrm{bord}_V\, \mathcal{Z}(f) = \mathcal{Z}_V(\text{bord de } f).$$

4) Soit $\mathbf{A}$ intègre et $k \geqslant 0$: $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant k$ équivaut à $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/a\mathbf{A}) \leqslant k-1$ pour tout a régulier (utiliser les idéaux bords de Krull).
5) Soit $\mathbf{A}$ local résiduellement discret et $k \geqslant 0$: $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant k$ équivaut à $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}[1/a] \leqslant k-1$ pour tout $a \in \mathrm{Rad}\, \mathbf{A}$ (utiliser les monoïdes bords de Krull). ∎

Commentaires. 1) L'avantage de la définition constructive de la dimension de Krull par rapport à la définition usuelle est qu'elle est plus simple (pas de quantification sur l'ensemble des idéaux premiers) et plus générale (pas besoin de supposer l'axiome du choix). Cependant nous avons seulement défini la phrase « $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $\leqslant k$ ».
2) Situons nous en mathématiques classiques. La dimension de Krull de $\mathbf{A}$ peut être définie comme un élément de $\{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ en posant

$$\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} = \inf \{\, k \in \mathbb{Z},\, k \geqslant -1 \mid \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant k \,\},$$

(avec $\inf \emptyset_{\mathbb{Z}} = +\infty$). Cette définition basée sur la définition constructive 2.3 est équivalente à la définition donnée usuellement via les chaînes d'idéaux premiers (cf. le théorème* 2.2).
3) Du point de vue constructif la méthode précédente ne définit pas la dimension de Krull de $\mathbf{A}$ comme un élément de $\{-1\} \cup \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. En fait il s'avère que le concept en question n'est en général pas nécessaire (mais le lecteur doit nous croire sur parole).
Le point de vue le plus proche des mathématiques classiques serait de regarder $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}$ comme une partie de $\mathbb{N} \cup \{-1\}$, définie par

$$\{\, k \in \mathbb{Z},\, k \geqslant -1 \mid \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant k \,\}.$$

On raisonne alors avec des parties finales (éventuellement vides) de $\mathbb{N} \cup \{-1\}$, la relation d'ordre est donnée par l'inclusion renversée, la borne supérieure par l'intersection et la borne inférieure par la réunion.
Cette approche trouve sa limite avec le « contre-exemple » du corps des nombres réels (voir le commentaire page 784). ∎

On utilise en mathématiques constructives les *notations* suivantes, pour se rapprocher du langage classique :

2.5. Notation. Soient $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $(\mathbf{A}_i)_{i\in I}$, $(\mathbf{B}_j)_{j\in J}$ des anneaux commutatifs (avec I, J finis).

- $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}$ signifie : $\forall \ell \geqslant -1$ ($\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant \ell \;\Rightarrow\; \mathsf{Kdim}\, \mathbf{B} \leqslant \ell$).
- $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{B} = \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}$ signifie : $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}$ et $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{B} \geqslant \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}$.

– $\sup_{j\in J} \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_j \leqslant \sup_{i\in I} \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_i$ signifie :
$$\forall \ell \geqslant -1 \quad \big(\&_{i\in I}\ \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_i \leqslant \ell \ \Rightarrow\ \&_{j\in J}\ \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_j \leqslant \ell\big).$$
– $\sup_{j\in J} \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_j = \sup_{i\in I} \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_i$ signifie :
$$\forall \ell \geqslant -1 \quad \big(\&_{i\in I}\ \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_i \leqslant \ell \ \Leftrightarrow\ \&_{j\in J}\ \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_j \leqslant \ell\big).$$

Bords itérés, suites singulières, suites complémentaires

La définition 2.3 peut être réécrite en terme d'identités algébriques. Pour cela, nous introduisons la notion de *suite singulière*.

2.6. Définition. Pour une suite $(\underline{x}) = (x_0, \dots, x_k)$ dans $\mathbf{A}$ on définit les *bords de Krull itérés* de la manière suivante.
1. Une version « itérée » du monoïde $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$: l'ensemble
$$\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_k) := x_0^{\mathbb{N}}(x_1^{\mathbb{N}} \cdots (x_k^{\mathbb{N}}(1 + x_k\mathbf{A}) + \cdots) + x_1\mathbf{A}) + x_0\mathbf{A} \qquad (3)$$
est un monoïde. Pour une suite vide, on définit $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}() = \{1\}$.
2. On définit deux variantes pour l'idéal bord de Krull itéré.
— 2a) L'idéal $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_k) = \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ est défini comme suit :
$$\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}() = \{0\}\,,\ \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_k) = \big(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_{k-1})\big) : x_k\big) + \mathbf{A}x_k. \quad (4)$$
— 2b) L'idéal $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_k) = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ est défini comme suit :
$$\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}) := \big\{\, y \in \mathbf{A} \mid 0 \in x_0^{\mathbb{N}}\big(\cdots\big(x_k^{\mathbb{N}}(y + x_k\mathbf{A}) + \cdots\big) + x_0\mathbf{A}\big)\,\big\} \qquad (5)$$
Pour une suite vide, on définit $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}() = \{0\}$.

On montrera (lemme 2.13) que les deux idéaux « bord itéré » définis ci-dessus ont même nilradical.

2.7. Proposition et définition.

1. *Une suite $(x_0, \dots, x_k)$ dans $\mathbf{A}$ est dite* singulière *si* $0 \in \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_k)$, i.e. *si* $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \dots, x_k)$, *c'est-à-dire encore s'il existe* $a_0, \dots, a_k \in \mathbf{A}$ *et* $m_0, \dots, m_k \in \mathbb{N}$ *tels que*
$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1}(\cdots(x_k^{m_k}(1 + a_kx_k) + \cdots) + a_1x_1) + a_0x_0) = 0 \qquad (6)$$
2. *La propriété « la suite $(x_0, \dots, x_k)$ est singulière dans $\mathbf{A}$ » est une propriété de caractère fini.*
3. *(Principe local-global pour les suites singulières) Soient $S_1, \dots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, la suite $(x_0, \dots, x_k)$ est singulière dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, elle est singulière dns chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$*

D *2.* Soit S un monoïde de $\mathbf{A}$. Par la technique usuelle de calcul dans un anneau $\mathbf{A}_S$, dire que la suite $(x_0, \dots, x_k)$ est singulière dans $\mathbf{A}_S$ revient à

dire qu'il existe $s \in S$, $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$ et $m_0, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ tels que

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1}(\cdots(x_k^{m_k}(s+a_kx_k)+\cdots)+a_1x_1)+a_0x_0)=0,$$

ce qui implique que, dans $\mathbf{A}[1/s]$

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1}(\cdots(x_k^{m_k}(1+\tfrac{a_k}{s}x_k)+\cdots)+\tfrac{a_1}{s}x_1)+\tfrac{a_0}{s}x_0)=0.$$

3. Une fois les exposants m_i fixés, on peut regarder l'égalité (6) comme une équation linéaire en les a_j. On note par ailleurs que si l'équation est satisfaite pour un système d'exposants, elle est aussi satisfaite pour un système d'exposants supérieurs. Donc en prenant un système d'exposants qui majore chacun de ceux obtenus séparément pour chaque $\mathbf{A}_{S_i}$, on obtient une unique équation linéaire en les a_j qui a une solution dans chaque $\mathbf{A}_{S_i}$. On peut donc appliquer le principe local-global de base II-2.3. □

Remarque. En mathématiques classiques on déduit des points *2* et *3* qu'une suite est singulière si, et seulement si, elle est singulière après localisation en tout idéal maximal. ∎

2.8. Proposition. *Pour un anneau commutatif* $\mathbf{A}$ *et un entier* $k \geqslant 0$*, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La dimension de Krull de* $\mathbf{A}$ *est* $\leqslant k$.

2. *Pour tout* $x \in \mathbf{A}$ *la dimension de Krull de* $\mathbf{A}_{\mathrm{K}}^{x}$ *est* $\leqslant k-1$.

3. *Toute suite* $(x_0, \ldots, x_k)$ *dans* $\mathbf{A}$ *est singulière.*

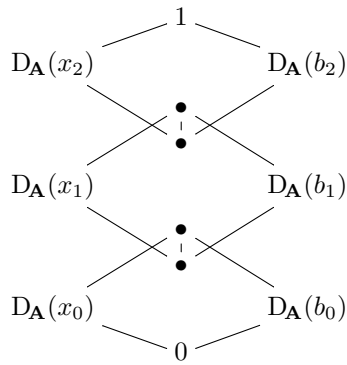
4. *Pour tous* $x_0, \ldots, x_k \in \mathbf{A}$ *il existe* $b_0, \ldots, b_k \in \mathbf{A}$ *tels que*

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0x_0) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1x_1) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0,x_0) \\ \vdots \quad & \vdots & \quad \vdots \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_kx_k) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_{k-1},x_{k-1}) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_k,x_k) \end{array}\right\} \tag{7}$$

5. *Pour tous* $x_0, \ldots, x_k \in \mathbf{A}$*, en posant* $\pi_i = \prod_{j<i} x_j$ *pour* $i \in [\![0..k+1]\!]$ *(donc* $\pi_0 = 1$*), il existe* $n \in \mathbb{N}$ *tel que*

$$\pi_{k+1}^n \in \left\langle \pi_k^n x_k^{n+1},\ \pi_{k-1}^n x_{k-1}^{n+1},\ \ldots,\ \pi_1^n x_1^{n+1},\ \pi_0^n x_0^{n+1} \right\rangle.$$

Par exemple pour $k = 2$ le point *4* correspond au dessin suivant dans $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$.



D Les équivalences pour la dimension 0 sont immédiates par application des définitions.

1 $\iff$ *3.* Supposons l'équivalence établie pour la dimension $\leqslant k$ et pour tout anneau commutatif. On voit alors que $S^{-1}\mathbf{A}$ est de dimension $\leqslant k$ si, et seulement si, l'on a :

pour tous $x_0, \ldots, x_k \in \mathbf{A}$ *il existe* $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$, $s \in S$ *et* $m_0, \ldots, m_k \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$x_0^{m_0}(x_1^{m_1} \cdots (x_k^{m_k}(s + a_k x_k) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0. \tag{8}$$

Notez que par rapport à l'équation (6), un $s \in S$ a remplacé le 1 au centre de l'expression du premier membre.

Il reste donc à remplacer s par un élément arbitraire de $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_{k+1})$, c'est-à-dire un élément de la forme $x_{k+1}^{m_{k+1}}(1 + a_{k+1}x_{k+1})$.

L'équivalence entre *2* et *3* se prouve de manière analogue.

3 $\Rightarrow$ *4.* On prend $b_k = 1 + a_k x_k$, puis $b_{\ell-1} = x_\ell^{m_\ell} b_\ell + a_{\ell-1} x_{\ell-1}$, successivement pour $\ell = k, \ldots, 1$.

4 $\Rightarrow$ *2.* Preuve par récurrence. L'implication pour la dimension $\leqslant 0$ est claire. Supposons la chose établie pour la dimension $< k$. Supposons la propriété *4* et montrons que pour tout x_0 la dimension de $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{x_0}_{\mathrm{K}}$ est $< k$. Par hypothèse de récurrence, il suffit de trouver, pour tous $x_1, \ldots, x_k$ des éléments $b_1, \ldots, b_k$ tels que

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(b_1 x_1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(b_k x_k) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(b_{k-1}, x_{k-1}) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(b_k, x_k). \end{array}\right\}$$

Or, par hypothèse, on a des éléments b_0, …, b_k tels que

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0x_0) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1x_1) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0,x_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_kx_k) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_{k-1},x_{k-1}) \\ \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_k,x_k). \end{array}\right\}$$

et les inégalités avec $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}$ impliquent les mêmes avec $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}$. La deuxième inégalité signifie que $(b_1x_1)^m \in \langle b_0,x_0\rangle$ (pour un certain m) ; la première nous dit que b_0x_0 est nilpotent donc $\langle b_0,x_0\rangle \subseteq \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0)$. Bilan : b_1x_1 est nilpotent dans $\mathbf{B}$.
On pourrait aussi démontrer *4* $\Rightarrow$ *3* par un calcul direct un peu fastidieux.
3 $\Leftrightarrow$ *5*. Dans la définition d'une suite singulière, on peut remplacer tous les exposants m_i par leur maximum n. Une fois ceci acquis, le point *5* est une simple reformulation du point *3*. □

Nous aurions donc pu donner une définition par récurrence de la dimension de Krull basée sur les bords supérieurs $\mathbf{A}^x_{\mathrm{K}}$ plutôt que sur les bords inférieurs $\mathbf{A}^{\mathrm{K}}_x$: nous venons d'obtenir une preuve constructive directe (sans utiliser le théorème* 2.2) de l'équivalence entre les deux définitions par récurrence possibles.

Remarque. Le système d'inégalités (7) dans le point *4* de la proposition 2.8 établit une relation intéressante et symétrique entre les deux suites $(b_0,\dots,b_k)$ et $(x_0,\dots,x_k)$.
Lorsque $k=0$, cela signifie $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0)\wedge\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0)=0$ et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0)\vee\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0)=1$, c'est-à-dire que les deux éléments $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0)$ et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0)$ sont compléments l'un de l'autre dans le treillis $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$. Dans $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ cela signifie que les ouverts de base correspondants sont complémentaires.
Nous introduisons donc la terminologie suivante : lorsque les suites $(b_0,\dots,b_k)$ et $(x_0,\dots,x_k)$ vérifient les inégalités (7) nous dirons que ce sont deux *suites complémentaires.* ∎

2.9. Fait. *Soient* $(\underline{x})=(x_1,\dots,x_n)$, $(\underline{y})=(y_1,\dots,y_m)$ *deux suites d'éléments de* $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}\to\mathbf{A}'$ *un morphisme et* $(\underline{x'})$ *l'image de* $(\underline{x})$ *dans* $\mathbf{A}'$.

1. *On a les équivalences :*
$$\exists z\in\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})\cap\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{y}) \iff 1\in\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x},\underline{y}) \iff 0\in\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x},\underline{y}).$$
2. *Si* $\mathbf{A}\to\mathbf{A}'$ *est surjectif, l'image de* $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ *est* $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(\underline{x'})$.
3. *Si* $\mathbf{A}'=S^{-1}\mathbf{A}$, *avec* S *un monoïde de* $\mathbf{A}$, *alors* $S^{-1}\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})=\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(\underline{x'})$.

2.10. Fait. *Soient* $\mathfrak{a}$ *un idéal de* $\mathbf{A}$, $Z\subseteq\mathbf{A}$ *une partie quelconque et* $x\in\mathbf{A}$.
$x^{\mathbb{N}}(Z+\mathbf{A}x)$ *rencontre* $\mathfrak{a}$ $\iff$ Z *rencontre* $(\mathfrak{a}:x^\infty)+\mathbf{A}x$.

2.11. Lemme. (Idéaux bords de Krull à la Richman)
Pour une suite $(\underline{x}) = (x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $\mathbf{A}$, l'idéal bord itéré $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ peut être défini de manière récursive comme suit :

$$\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}() = \{0\}, \qquad \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = \big(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_{n-1}) : x_n^\infty\big) + \mathbf{A}x_n.$$

Par exemple :

$$\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_1) = (0 : x_1^\infty) + \mathbf{A}x_1,\ \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_1, x_2) = \big(\big((0 : x_1^\infty) + \mathbf{A}x_1\big) : x_2^\infty\big) + \mathbf{A}x_2.$$

▷ On définit provisoirement

$$N() = \{0\}, \quad N(x_1, \dots, x_n) = \big(N(x_1, \dots, x_{n-1}) : x_n^\infty\big) + \mathbf{A}x_n$$

Prenons $n = 3$ pour fixer les idées. Alors, pour $y \in \mathbf{A}$, on a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&0 \in x_1^{\mathbb{N}}\big(x_2^{\mathbb{N}}\big(x_3^{\mathbb{N}}(y + \mathbf{A}x_3) + \mathbf{A}x_2\big) + \mathbf{A}x_1\big) && \iff\\
&x_2^{\mathbb{N}}\big(x_3^{\mathbb{N}}(y + \mathbf{A}x_3) + \mathbf{A}x_2\big) \text{ rencontre } N(x_1) && \iff\\
&x_3^{\mathbb{N}}(y + \mathbf{A}x_3) \text{ rencontre } \big(N(x_1) : x_2^\infty\big) + \mathbf{A}x_2 \overset{\text{def}}{=} N(x_1, x_2) && \iff\\
&y \in \big(N(x_1, x_2) : x_3^\infty\big) + \mathbf{A}x_3 \overset{\text{def}}{=} N(x_1, x_2, x_3),
\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_1, x_2, x_3) = N(x_1, x_2, x_3)$. □

2.12. Lemme. (Enchaînement de bords itérés, coté idéal)
Soient $(\underline{x}) = (x_1, \dots, x_n)$ et $(\underline{y}) = (y_1, \dots, y_m)$ deux suites d'éléments de $\mathbf{A}$. On pose $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ et l'on note $(\underline{y'}) = (y'_1, \dots, y'_m)$ l'image de $(\underline{y})$ dans $\mathbf{A}'$.

1. *Le noyau du morphisme canonique (surjectif) $\mathbf{A} \to \mathbf{A}'/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(\underline{y'})$ est l'idéal $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}, \underline{y})$.*
2. *On définit $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$ et $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{i-1}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}_{i-1}}(x_i)$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. Alors le noyau du morphisme canonique (surjectif) $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_n$ est l'idéal $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$.*

▷ Il suffit de montrer le premier point pour $n = 1$. Notons $x = x_1$.
Soit $z \in \mathbf{A}$ et z' son image dans $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x)$. On a les équivalences :

$$\begin{aligned}
&z = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{A}'/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(\underline{y'}) && \iff\\
&0 \in {y'_1}^{\mathbb{N}}\big(\cdots\big({y'_m}^{\mathbb{N}}(z' + y'_m\mathbf{A}') + \cdots\big) + y'_1\mathbf{A}'\big) && \iff\\
&{y_1}^{\mathbb{N}}\big(\cdots\big({y_m}^{\mathbb{N}}(z + y_m\mathbf{A}) + \cdots\big) + y_1\mathbf{A}\big) \text{ rencontre } \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x) && \iff\\
&0 \in x^{\mathbb{N}}({y_1}^{\mathbb{N}}\big(\cdots\big({y_m}^{\mathbb{N}}(z + y_m\mathbf{A}) + \cdots\big) + y_1\mathbf{A}\big) + x\mathbf{A}\big) && \iff\\
&z \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x, \underline{y}).
\end{aligned}$$

□

2.13. Fait. *Pour toute suite $(\underline{x})$ d'éléments de $\mathbf{A}$, les idéaux $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ et $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ ont même nilradical.*

▷ Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ et tout $x \in \mathbf{A}$, on vérifie facilement que la racine de l'idéal $(\mathfrak{a} : x^\infty)$ est $(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) : x)$. En utilisant $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b} + \mathfrak{c}) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) + \mathfrak{c})$, on en déduit que les idéaux $(\mathfrak{a} : x^\infty) + \mathbf{A}x$ et $(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) : x) + \mathbf{A}x$ ont même racine. Le résultat annoncé s'en déduit par récurrence sur la longueur de la suite $(\underline{x})$ en utilisant la définition récursive des deux idéaux bord itérés. □

2.14. Lemme. *Soient S un monoïde de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}' = S^{-1}\mathbf{A}$, $x \in \mathbf{A}$, x' son image dans $\mathbf{A}'$ et $V = \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(x')$. Alors le morphisme canonique $\mathbf{A} \to V^{-1}\mathbf{A}'$ est un morphisme de localisation*[1] *et induit un isomorphisme de $T^{-1}\mathbf{A}$ sur $V^{-1}\mathbf{A}'$, où T est le monoïde $x^{\mathbb{N}}(S + \mathbf{A}x)$.*

▷ L'image dans $V^{-1}\mathbf{A}'$ de l'élément $s + ax \in S + \mathbf{A}x$ est inversible puisque l'on peut écrire $s + ax = s(1 + ax/s)$ (avec quelques abus de notations). D'où un morphisme (canonique) $\varphi : T^{-1}\mathbf{A} \to V^{-1}\mathbf{A}'$.
Par ailleurs, puisque $S \subseteq T$, on a un morphisme $\mathbf{A}' \to T^{-1}\mathbf{A}$. L'image par ce morphisme de $1 + xa/s \in 1 + x\mathbf{A}'$ est inversible car $1 + xa/s = (s + xa)/s$, d'où un morphisme $\varphi' : V^{-1}\mathbf{A}' \to T^{-1}\mathbf{A}$.
On vérifie sans peine que φ et φ' sont inverses l'un de l'autre. □

2.15. Corollaire. (Enchaînement de bords itérés, coté monoïde)
Soient $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ et $(\underline{y}) = (y_1, \ldots, y_m)$ dans $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}' = \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{y})^{-1}\mathbf{A}$, et $(\underline{x'}) = (x'_1, \ldots, x'_n)$ l'image de $(\underline{x})$ dans $\mathbf{A}'$.
Alors, le morphisme $\mathbf{A} \to \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(\underline{x'})^{-1}\mathbf{A}'$ donne par factorisation un isomorphisme $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}, \underline{y})^{-1}\mathbf{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(\underline{x'})^{-1}\mathbf{A}'$.

Une suite régulière «n'est pas» singulière

Le point *4* de la proposition qui suit implique qu'une suite régulière qui n'engendre pas l'idéal $\langle 1 \rangle$ est non singulière, ce qui explique le titre du paragraphe.
Un avantage des bords de Krull itérés à la Richman est que sur un anneau noethérien cohérent ce sont des idéaux de type fini (voir le lemme 2.11). Un autre avantage est donné par le point *1* dans la proposition qui suit.

2.16. Proposition. (Suites régulières et dimension de Krull)
Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une suite régulière dans $\mathbf{A}$ et $(y_1, \ldots, y_r)$ une autre suite.

1. *On a $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_1, \ldots, x_n) = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*
2. *La suite $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_r)$ est singulière dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, la suite $(y_1, \ldots, y_r)$ est singulière dans $\mathbf{A}/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$.*
3. *L'implication suivante est satisfaite pour tout $k \geqslant -1$:*
$$\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A} \leqslant n + k \implies \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \leqslant k.$$
Et si $1 \notin \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, on a $n + \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}/\langle x_1, \ldots, x_n \rangle \leqslant \mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}$.

1. Voir éventuellement la définition XV-4.5.

4. Si la suite $(x_1, \ldots, x_n)$ *est également singulière, on a* $1 \in \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. *En conséquence si* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant n-1$ *toute suite régulière de longueur* n *engendre l'idéal* $\langle 1 \rangle$.

D *1.* Calcul immédiat en tenant compte de la définition récursive donnée dans le lemme 2.12 (point *2*).
2. On applique le point *1* du lemme 2.12.
3. Résulte du point *2*.
4. Cas particulier du point *2*, avec la suite $(y_1, \ldots, y_r)$ vide. □

Minorer la dimension de Krull

Il peut être confortable, voire parfois utile, de définir la phrase « $\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $\geqslant k$ ».
Tout d'abord $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \geqslant 0$ doit signifier $1 \neq 0$. Et une possibilité, pour $k \geqslant 1$, sera de demander : « il existe une suite $(x_1, \ldots, x_k)$ qui n'est pas singulière ». Notez que du point de vue constructif cette affirmation est plus forte que la négation de « toute suite $(x_1, \ldots, x_k)$ est singulière ».
Un anneau a alors une dimension de Krull bien définie s'il existe un entier k tel que l'anneau soit à la fois de dimension de Krull $\geqslant k$ et de dimension de Krull $\leqslant k$.
La chose ennuyeuse est le caractère trop compliqué de l'assertion

« la suite $(x_1, \ldots, x_k)$ n'est pas singulière ».

Il semble de toute manière ici impossible d'éviter l'usage de la négation, car on ne voit pas comment on pourrait définir $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \geqslant 0$ autrement que par la négation $1 \neq 0$. Même dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau fortement discret, la phrase « il existe une suite $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_k)$ telle que $1 \notin \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ » reste problématique d'un point de vue constructif car on doit tester tous les éléments de l'idéal $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$, qui n'est pas a priori de type fini. Dans le cas où l'anneau est en plus noethérien, le lemme 2.11 montre que l'idéal est de type fini et l'on peut tester si la suite $(\underline{x})$ est singulière.
La définition de $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$ qui correspond à une assertion de type $\forall\exists$ est plus sympathique que celle de $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \geqslant k$, qui correspond, lorsque l'anneau est discret, à une assertion de type $\exists\forall$. Cependant même la définition de $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$ ne peut généralement pas être certifiée par un simple calcul : il faut une preuve.
Notons que pour l'anneau $\mathbb{R}$, si l'on utilise la négation forte (de caractère positif), pour laquelle $x \neq 0$ signifie « x est inversible », pour définir la phrase $\mathsf{Kdim}\,\mathbb{R} \geqslant k$, alors il est absurde que $\mathsf{Kdim}\,\mathbb{R} \geqslant 1$. Mais on ne peut prouver constructivement que $\mathsf{Kdim}\,\mathbb{R} \leqslant 0$ (commentaire page 784).

3. Quelques propriétés élémentaires de la dimension de Krull

Les faits énoncés dans la proposition suivante sont faciles (notez que l'on utilise les notations 2.5).

3.1. Proposition. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau,* $\mathfrak{a}$ *un idéal,* S *un monoïde.*

1. *Une suite singulière reste singulière dans* $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ *et* $\mathbf{A}_S$.
2. $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_S \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.
3. $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \sup(\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}, \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B})$.
4. $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$.
5. *Si* a *est régulier dans* $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ *(a fortiori s'il est régulier dans* $\mathbf{A}$*), alors* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/a\mathbf{A} \leqslant \sup(\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}, 0) - 1$.
6. *Si* $a \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$, *alors* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[1/a] \leqslant \sup(\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}, 0) - 1$.

Exemple. On donne un anneau $\mathbf{B}$ pour lequel $\mathrm{Frac}(\mathbf{B})$ est de dimension de Krull $n > 0$, mais $\mathbf{B}_{\mathrm{red}} = \mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{red}})$ est zéro-dimensionnel.
Considérons $\mathbf{B} = \mathbf{A}/x\mathfrak{m}$, où $\mathbf{A}$ est local résiduellement discret, $\mathfrak{m} = \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ et $x \in \mathfrak{m}$. L'anneau $\mathbf{B}$ est local, $\mathrm{Rad}\,\mathbf{B} = \mathfrak{m}' = \mathfrak{m}/x\mathfrak{m}$ et $\mathbf{B}/\mathfrak{m}' = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$.
Si $\overline{x} = 0$, alors $x \in x\mathfrak{m}$, i.e. $x(1-m) = 0$ avec $m \in \mathfrak{m}$, ce qui implique $x = 0$.
Pour $y \in \mathfrak{m}$ on a $\overline{y}\,\overline{x} = 0$. Donc si $\overline{y} \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{B} \cap \mathfrak{m}'$, on obtient $x = 0$.
Or on a $\overline{y} \in \mathfrak{m}'$ ou $\overline{y} \in \mathbf{B}^\times$, donc si $x \neq 0$ et $\overline{y} \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{B}$, on obtient $\overline{y} \in \mathbf{B}^\times$.
Autrement dit, si $x \neq 0$, $\mathbf{B} = \mathrm{Frac}(\mathbf{B})$.
Prenons $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_0, \ldots, x_n]_{\langle x_0,\ldots,x_n\rangle}$ où $\mathbf{k}$ est un corps discret non trivial, et $x = x_0$. On a alors $\mathbf{A}/\langle x_0\rangle \simeq \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]_{\langle x_1,\ldots,x_n\rangle}$ et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\langle x_0\rangle = n$.
Comme $\overline{x_0}^2 = 0$ dans $\mathbf{B}$, on a $\mathbf{B}_{\mathrm{red}} \simeq \mathbf{A}/\langle x_0\rangle$ et donc $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} = n$.
Enfin $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{red}}) = \mathbf{k}(x_1, \ldots, x_n)$ est un corps discret, zéro-dimensionnel.
Géométriquement : on a considéré l'anneau d'une variété « avec multiplicités » consistant en un point immergé dans un hyperplan de dimension n, et on a localisé en ce point immergé.
NB. En mathématiques classiques, si $\mathbf{C}$ est noethérien et réduit, $\mathrm{Frac}(\mathbf{C})$ est un produit fini de corps, donc zéro-dimensionnel. Pour une version constructive on peut se reporter au problème 1 et à [49, Coquand&al.]. ∎

3.2. Principe local-global concret. (Pour la dimension de Krull)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ *des monoïdes comaximaux d'un anneau* $\mathbf{A}$ *et* $k \in \mathbb{N}$.

1. *Une suite est singulière dans* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, elle est singulière dans chacun des* $\mathbf{A}_{S_i}$.
2. *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est de dimension inférieure ou égale à* k *si, et seulement si, les* $\mathbf{A}_{S_i}$ *sont de dimension inférieure ou égale à* k.

On aurait pu écrire : $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \sup_i \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{S_i} = \mathsf{Kdim}\prod_i \mathbf{A}_{S_i}$.

▷ Le point *2* résulte du point *1*, qui a été démontré en 2.7. □

Remarque. Comme la propriété pour une suite d'être singulière est de caractère fini, on déduit en mathématiques classiques du résultat précédent le principe local-global abstrait correspondant : *un anneau est de dimension inférieure ou égale à k si, et seulement si, il est de dimension inférieure ou égale à k après localisation en tout idéal maximal.* ■

De même on note que le point *1* dans le principe local-global concret précédent s'applique en fait toujours avec une famille d'éléments comaximaux, ce qui correspond à un recouvrement fini du spectre de Zariski par des ouverts de base.

Dans le cas d'un recouvrement fini par des fermés, le résultat tient encore.

3.3. Principe de recouvrement fermé. (Dimension de Krull)
Soit $\mathbf{A}$ un anneau, k un entier $\geqslant 0$, et $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$ des idéaux de $\mathbf{A}$.
On suppose tout d'abord que les $\mathfrak{a}_i$ forment un recouvrement fermé de $\mathbf{A}$.

1. *Une suite $(x_0, \ldots, x_k)$ est singulière dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, elle est singulière dans chacun des $\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i$.*
2. *L'anneau $\mathbf{A}$ est de dimension inférieure ou égale à k si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i$ est de dimension inférieure ou égale à k.*

Plus généralement, sans hypothèse sur les $\mathfrak{a}_i$ on a

3. *L'anneau $\mathbf{A}/\bigcap_i \mathfrak{a}_i$ est de dimension inférieure ou égale à k si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i$ est de dimension inférieure ou égale à k.*
   Ceci peut s'écrire sous forme abrégée
$$\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\textstyle\prod_i \mathfrak{a}_i = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\bigcap_i \mathfrak{a}_i = \sup_i \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i = \mathsf{Kdim}\prod_i \mathbf{A}/\mathfrak{a}_i\ .$$

▷ Il suffit de montrer le point *1*. La suite $(x_0, \ldots, x_k)$ est singulière si, et seulement si, le monoïde $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}(x_0, \ldots, x_k)$ contient 0.
En outre, $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i}(x_0, \ldots, x_k)$ n'est autre que $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \ldots, x_k)$ vu modulo $\mathfrak{a}_i$.
On conclut par le principe de recouvrement fermé XI-4.18. □

3.4. Théorème. (Théorème un et demi)

1. a. *Si $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, ou plus généralement si $\mathbf{A}$ est local-global, tout module localement monogène est monogène.*
   b. *Si $\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, tout idéal projectif de type fini est engendré par un idempotent.*
2. *Soit $\mathbf{A}$ de dimension inférieure ou égale à k, soit $(x_1, \ldots, x_k)$ une suite régulière et $\mathfrak{b}$ un idéal localement principal contenant $\mathfrak{a} = \langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ alors il existe $y \in \mathfrak{b}$ tel que*

$$\mathfrak{b} = \langle y, x_1, \dots, x_k\rangle = \langle y\rangle + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \langle y\rangle + \mathfrak{a}^m$$

pour n'importe quel exposant $m \geqslant 1$.

3. *Soit* $\mathbf{A}$ *tel que* $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ *est de dimension inférieure ou égale à* k, *soit* $(x_1, \dots, x_k)$ *une suite régulière dans* $\mathbf{A}/\operatorname{Rad}\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{b}$ *un idéal projectif de type fini de* $\mathbf{A}$ *contenant* $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_k\rangle$ *alors il existe* $y \in \mathfrak{b}$ *tel que*

$$\mathfrak{b} = \langle y, x_1, \dots, x_k\rangle = \langle y\rangle + \mathfrak{b}\mathfrak{a} = \langle y\rangle + \mathfrak{a}^m$$

pour n'importe quel exposant $m \geqslant 1$.

▷ Le point *1a* est un rappel (voir le point *4* du théorème V-3.1 pour les anneaux zéro-dimensionnels et le point *2* du théorème IX-6.10 pour les anneaux local-globals).

1b. Rappelons que dans un anneau arbitraire un idéal projectif de type fini $\mathfrak{a}$ a pour annulateur un idempotent h. Dans $\mathbf{A}/\langle h\rangle$, $\mathfrak{a}$ est fidèle, donc $\mathfrak{a}^k$ aussi, pour tout $k \geqslant 1$. Dans $\mathbf{A}[1/h]$, $\mathfrak{a} = 0$. Donc $\operatorname{Ann}(\mathfrak{a}^k) = \operatorname{Ann}(\mathfrak{a}) = \langle h\rangle$ pour $k \geqslant 1$.

Dans le cas zéro-dimensionnel, puisqu'un idéal projectif de type fini est localement principal, il est principal d'après le point *1a*, notons le $\langle x\rangle$. On sait que pour k assez grand, $\langle x\rangle^k = \langle e\rangle$ avec e idempotent. D'après la remarque préliminaire $\operatorname{Ann}(x) = \operatorname{Ann}(e) = \langle 1-e\rangle$. Dans $\mathbf{A}/\langle 1-e\rangle$, x est inversible, donc $\langle x\rangle = \langle 1\rangle$; dans $\mathbf{A}/\langle e\rangle$, x est nul ; ainsi dans $\mathbf{A}$, $\langle x\rangle = \langle e\rangle$.

3. Résulte de *2* par le lemme de Nakayama.

2. L'idéal $\mathfrak{b}$ vu comme $\mathbf{A}$-module, après extension des scalaires à $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, devient le module $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ et il reste localement monogène. Puisque l'anneau quotient $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est zéro-dimensionnel, le point *1a* nous dit que $\mathfrak{b}/\mathfrak{b}\mathfrak{a}$ est engendré par un élément y. Cela signifie $\mathfrak{b} = \langle y\rangle + \mathfrak{b}\mathfrak{a}$ et les autres égalités suivent immédiatement. □

Remarque. Dans le cas de la dimension 1 et d'un idéal inversible, le point *2* du théorème précédent est souvent appelé « théorème un et demi ». Voir le corollaire V-3.2 et le théorème XII-5.2. ■

4. Extensions entières

4.1. Proposition. *Soit des anneaux* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *avec* $\mathbf{B}$ *entier sur* $\mathbf{A}$. *Toute suite finie d'éléments de* $\mathbf{A}$ *qui est singulière dans* $\mathbf{B}$ *est singulière dans* $\mathbf{A}$. *En particulier,* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$.

NB : l'inégalité opposée est prouvée un peu plus loin (théorème 7.16).

▷ Supposons par exemple que la suite $(x, y) \in \mathbf{A}$ soit singulière dans $\mathbf{B}$, i.e.

$$\exists a, b \in \mathbf{B},\ \exists m, \ell \in \mathbb{N},\ x^\ell\big(y^m(1+ay) + bx\big) = 0.$$

On veut réaliser le même type d'égalité, avec des éléments a', b' de $\mathbf{A}$ au lieu des éléments a, b dans $\mathbf{B}$. L'idée intuitive est de transformer l'égalité précédente par l'opération « norme ». Considérons des polynômes unitaires f, $g \in \mathbf{A}[T]$ qui annulent a et b. Soit $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}[T,T']/\langle f(T), g(T')\rangle$. Notons α et β les classes de T et T' dans $\mathbf{B}_1$. Le sous-anneau $\mathbf{A}[a,b]$ de $\mathbf{B}$ est un quotient de $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}[\alpha,\beta]$, via un $\mathbf{A}$-homomorphisme qui envoie α et β sur a et b. En outre, $\mathbf{B}_1$ est un module libre de rang fini sur $\mathbf{A}$ ce qui permet de définir la norme et l'élément cotransposé d'un élément de $\mathbf{B}_1[X,Y]$ arbitraire. Soit alors

$$U(\alpha,\beta,X,Y) = X^\ell\big(Y^m(1+\alpha Y)+\beta X\big) \text{ et}$$
$$V(X,Y) = \mathrm{N}_{\mathbf{B}_1[X,Y]/\mathbf{A}[X,Y]}(U).$$

D'après le lemme 4.2, $V(X,Y)$ est de la forme

$$X^p\big(Y^q\big(1+A(Y)Y\big)+B(X,Y)X\big),$$

avec $A \in \mathbf{A}[Y]$, $B \in \mathbf{A}[X,Y]$. Soit par ailleurs $W(\alpha,\beta,X,Y) \in \mathbf{B}_1[X,Y]$ l'élément cotransposé de $U(\alpha,\beta,X,Y)$. En spécialisant X,Y,α,β en x,y dans $\mathbf{A}$ et a,b dans $\mathbf{B}$, on obtient une égalité dans $\mathbf{B}$

$$V(x,y) = x^p\big(y^q\big(1+A(y)y\big)+B(x,y)x\big) = U(a,b,x,y)W(a,b,x,y),$$

ce qui termine la démonstration puisque $V(x,y)=0$ est une égalité dans $\mathbf{A}$: notez que l'on a $U(a,b,x,y)=0$ dans $\mathbf{B}$ mais que $U(\alpha,\beta,x,y)$ n'est peut-être pas nul dans $\mathbf{B}_1$. □

4.2. Lemme. *Soit* $\mathbf{C}$ *une* $\mathbf{A}$*-algèbre libre de rang fini sur* $\mathbf{A}$, $(c_0,\dots,c_n)$ *dans* $\mathbf{C}$ *et* $(X_0,\dots,X_n) = (\underline{X})$ *une liste d'indéterminées. Posons*

$$U(\underline{X}) = X_0^{k_0}\big(X_1^{k_1}\big(\cdots(X_n^{k_n}(1+c_nX_n)+\cdots)+c_1X_1\big)+c_0X_0\big) \in \mathbf{C}[\underline{X}].$$

Alors $V(\underline{X}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{N}_{\mathbf{C}[\underline{X}]/\mathbf{A}[\underline{X}]}\big(U(\underline{X})\big)$ *est de la forme*

$$V(\underline{X}) = X_0^{\ell_0}\big(X_1^{\ell_1}\big(\cdots(X_n^{\ell_n}(1+a_nX_n)+\cdots)+a_1X_1\big)+a_0X_0\big) \in \mathbf{A}[\underline{X}],$$

avec $a_n \in \mathbf{A}[X_n]$, $a_{n-1} \in \mathbf{A}[X_n,X_{n-1}]$, …, $a_0 \in \mathbf{A}[\underline{X}]$.

D Tout d'abord la norme $\mathrm{N}(1+c_nX_n)$ est un polynôme $h(X_n) \in \mathbf{A}[X_n]$ qui vérifie $h(0)=1$, donc qui s'écrit sous la forme $1+a_n(X_n)X_n$. Ensuite on utilise la multiplicativité de la norme, et une évaluation en $X_{n-1}=0$ pour montrer que $\mathrm{N}\big(X_n^{k_n}(1+c_nX_n)+c_{n-1}X_{n-1}\big)$ est de la forme

$$X_n^{\ell_n}\big(1+a_n(X_n)X_n\big)+a_{n-1}(X_n,X_{n-1})X_{n-1}.$$

Et ainsi de suite. La lectrice sceptique ou le lecteur pointilleux peut faire une preuve par récurrence en bonne et due forme. □

5. Dimension des anneaux géométriques

Anneaux de polynômes sur un corps discret

Un premier résultat important dans la théorie de la dimension de Krull est la dimension des anneaux de polynômes sur un corps discret.

5.1. Théorème. *Si* $\mathbf{K}$ *est un corps discret non trivial, la dimension de Krull de l'anneau de polynômes* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_\ell]$ *est égale à* ℓ.

Nous établissons d'abord le résultat suivant qui nécessite une définition précise. Des éléments x_1, …, x_ℓ d'une $\mathbf{K}$-algèbre avec $\mathbf{K}$ zéro-dimensionnel sont dits *algébriquement dépendants sur* $\mathbf{K}$ s'ils annulent un polynôme primitif[2] $f \in \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_\ell]$.

5.2. Proposition. *Soit* $\mathbf{K}$ *un corps discret, ou plus généralement un anneau zéro-dimensionnel,* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{K}$*-algèbre, et* x_1, …, $x_\ell \in \mathbf{A}$ *algébriquement dépendants sur* $\mathbf{K}$. *Alors la suite* $(x_1, \ldots, x_\ell)$ *est singulière.*

▷ On traite le cas d'un corps discret. Le cas général s'en déduit par application de la machinerie locale-globale élémentaire n°2.
Soit $Q(x_1, \ldots, x_\ell) = 0$ une relation de dépendance algébrique sur $\mathbf{K}$. Mettons un ordre lexicographique sur les monômes non nuls $\alpha_{p_1,\ldots,p_\ell} x_1^{p_1} x_2^{p_2} \cdots x_\ell^{p_\ell}$ de Q, en accord avec les « mots » $p_1\, p_2 \ldots p_\ell$. Nous pouvons supposer le coefficient du plus petit monôme non nul égal à 1 (ici on utilise l'hypothèse que le corps est discret, car on suppose que l'on peut déterminer pour chaque $\alpha_{p_1,\ldots,p_\ell}$ s'il est nul ou inversible). Soit $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_\ell^{m_\ell}$ ce monôme. En suivant l'ordre lexicographique, nous voyons que nous pouvons écrire Q sous la forme

$$\begin{aligned} Q = {} & x_1^{m_1} \cdots x_\ell^{m_\ell} + x_1^{m_1} \cdots x_\ell^{1+m_\ell} R_\ell + x_1^{m_1} \cdots x_{\ell-1}^{1+m_{\ell-1}} R_{\ell-1} \\ & + \cdots + x_1^{m_1} x_2^{1+m_2} R_2 + x_1^{1+m_1} R_1 \end{aligned}$$

où $R_j \in \mathbf{K}[x_k\,;\, k \geqslant j]$. Alors $Q = 0$ est l'égalité voulue. □

Preuve du théorème 5.1. Nous notons d'abord que la suite $(X_1, \ldots, X_\ell)$ est régulière, ce qui montre que la dimension de Krull de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_\ell]$ est $\geqslant \ell$. On peut voir aussi directement qu'elle est non singulière : dans l'égalité (6) page 773 avec $x_i = X_i$ le membre de gauche est non nul (considérer le coefficient de $X_1^{m_1} X_2^{m_2} \cdots X_\ell^{m_\ell}$).
Pour prouver que la dimension de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_\ell]$ est $\leqslant \ell$, il suffit, vu la proposition 5.2, de montrer que $\ell + 1$ éléments de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_\ell]$ sont toujours algébriquement dépendants sur $\mathbf{K}$. Voici une preuve élémentaire de ce résultat classique. Soient $y_1, \ldots, y_{\ell+1}$ ces éléments, et d une borne sur leurs degrés. Pour un entier $k \geqslant 0$ considérons la liste L_k de tous

2. Ceci généralise pour ℓ éléments la notion d'élément primitivement algébrique introduite page 715. Pour un anneau $\mathbf{K}$ arbitraire, il serait plus raisonnable d'utiliser une terminologie plus contraignante du style « relation de dépendance primitivement algébrique ». Il est clair aussi que le principe local-global XII-4.6 se généralise dans le cas de ℓ éléments.

les $y_1^{\delta_1} \cdots y_{\ell+1}^{\delta_{\ell+1}}$ tels que $\sum_{i=1}^{\ell+1} \delta_i \leqslant k$. Le nombre d'éléments de la liste L_k est égal à $\binom{k+\ell+1}{k}$: ceci est un polynôme de degré $\ell+1$ en k. Les éléments de L_k vivent dans l'espace vectoriel $E_{\ell,kd}$ des éléments de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_\ell]$ de degré $\leqslant k\,d$, qui a pour dimension $\binom{d\,k+\ell}{d\,k}$: ceci est un polynôme de degré ℓ en k. Ainsi pour k assez grand, le cardinal de L_k est plus grand que la dimension de l'espace vectoriel $E_{\ell,kd}$ où se trouvent les éléments de L_k, donc il y a une relation de dépendance linéaire entre les éléments de L_k. Ceci fournit une relation de dépendance algébrique entre les y_i. □

Commentaire. La preuve de la proposition 5.2 ne peut pas fournir constructivement le même résultat pour le corps des réels $\mathbb{R}$ (qui *n'est pas* discret). En fait il est impossible de réaliser pour $\mathbb{R}$ le test de zéro-dimensionnalité :

$$\forall x \in \mathbb{R} \;\; \exists a \in \mathbb{R} \;\; \exists n \in \mathbb{N},\; x^n\,(1-ax) = 0.$$

Cela signifierait en effet que pour tout nombre réel x, on sache trouver un réel a tel que $x(1-ax) = 0$. Si l'on a trouvé un tel a, on obtient :

- si ax est inversible alors x est inversible,
- si $1-ax$ est inversible alors $x = 0$.

Or l'alternative « ax ou $1-ax$ inversible » est explicite sur $\mathbb{R}$. Ainsi fournir le test de zéro-dimensionnalité revient à fournir le test pour « x est nul ou inversible ? ». Mais ceci n'est pas possible du point de vue constructif.
Par ailleurs, on peut montrer qu'il est impossible d'avoir une suite non singulière de longueur 1, si l'on prend $y \neq 0$ au sens fort de « y est inversible » (dans la définition de « non singulière »). En effet, si l'on a un x tel que

$$\forall a \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \;\; x^n\,(1-ax) \text{ est inversible,}$$

cela donne une contradiction : avec $a = 0$ on obtient x inversible, donc il existe un b tel que $1 - bx = 0$. ∎

Un corollaire intéressant

5.3. Lemme. *Un anneau engendré par k éléments est de dimension de Krull finie.*

D Puisque la dimension ne peut que diminuer par passage à un quotient, il suffit de montrer que $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k]$ est de dimension de Krull $\leqslant 2k+1$ (en fait cet anneau est de dimension de Krull $k+1$ d'après le théorème 8.20).
Soit $(h_1, \ldots, h_{2k+2})$ une suite de $2k+2$ éléments dans $\mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_k] = \mathbb{Z}[\underline{X}]$. Nous devons montrer qu'elle est singulière.
La suite $(h_1, \ldots, h_{k+1})$ est singulière dans $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_k] = \mathbb{Q}[\underline{X}]$. Cela signifie que l'idéal bord itéré $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbb{Q}[\underline{X}]}(h_1, \ldots, h_{k+1})$ contient 1.
En chassant les dénominateurs on obtient que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbb{Z}[\underline{X}]}(h_1, \ldots, h_{k+1})$ contient un entier $d > 0$. Donc l'anneau $\mathbf{B} = \mathbb{Z}[\underline{X}]/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbb{Z}[\underline{X}]}(h_1, \ldots, h_{k+1})$ est un quotient de l'anneau $\mathbf{C} = (\mathbb{Z}/\langle d\rangle)[\underline{X}]$. Comme $\mathbb{Z}/\langle d\rangle$ est zéro-dimensionnel, la

suite $(h_{k+2},\dots,h_{2k+2})$ est singulière dans $\mathbf{C}$ (proposition 5.2), autrement dit l'idéal $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{C}}(h_{k+2},\dots,h_{2k+2})$ contient 1. A fortiori $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(h_{k+2},\dots,h_{2k+2})$ contient 1. Finalement l'anneau

$$\mathbb{Z}[\underline{X}]\Big/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbb{Z}[\underline{X}]}(h_1,\dots,h_{2k+2}) = \mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(h_{k+2},\dots,h_{2k+2})$$

est trivial. □

Anneaux géométriques

Nous appelons *anneau géométrique* un anneau $\mathbf{A}$ qui est une $\mathbf{K}$-algèbre de présentation finie avec $\mathbf{K}$ un corps discret non trivial.
Le théorème VII-1.5 de mise en position de Noether affirme qu'un tel anneau quotient est une extension entière finie d'un anneau $\mathbf{B} = \mathbf{K}[Y_1,\dots,Y_r]$ contenu dans $\mathbf{A}$ (ici, Y_1, …, Y_r sont des éléments de $\mathbf{A}$ algébriquement indépendants sur $\mathbf{K}$).

5.4. Théorème. *Sous les hypothèses précédentes, la dimension de Krull de l'anneau* $\mathbf{A}$ *est égale à* r.

▷ La dimension de Krull est $\leqslant r$ par application de la proposition 5.2. On peut d'ailleurs donner une preuve du fait que $r+1$ éléments de $\mathbf{A}$ sont algébriquement dépendants sur $\mathbf{K}$ dans le même style que celle donnée page 783 pour une algèbre de polynômes.
Enfin la dimension de Krull est $\geqslant r$ d'après la proposition 4.1.
Notons que le théorème 7.16 nous donne une autre démonstration, via l'égalité $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$. □

6. Dimension de Krull des treillis distributifs

Comme nous l'avons déjà signalé, la dimension de Krull d'un anneau commutatif $\mathbf{A}$ n'est autre que la dimension de Krull de l'espace spectral $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$, du moins en mathématiques classiques.
En mathématiques constructives on introduit la dimension de Krull d'un treillis distributif $\mathbf{T}$ de façon à ce qu'elle soit égale, en mathématiques classiques, à la dimension de Krull de son spectre $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$. La démonstration de cette égalité est à très peu près identique à celle que nous avons donnée pour les anneaux commutatifs. Nous ne la répéterons pas, puisque de toute manière, nous utiliserons toujours la dimension de Krull d'un treillis distributif via la définition constructive qui suit.

6.1. Définition.

1. Deux suites $(x_0,\dots,x_n)$ et $(b_0,\dots,b_n)$ dans un treillis distributif $\mathbf{T}$

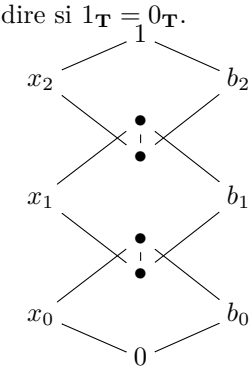
sont dites *complémentaires* si

$$\left.\begin{array}{rcl} b_0 \wedge x_0 & = & 0 \\ b_1 \wedge x_1 & \leqslant & b_0 \vee x_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_n \wedge x_n & \leqslant & b_{n-1} \vee x_{n-1} \\ 1 & = & b_n \vee x_n \end{array}\right\} \tag{9}$$

Une suite qui possède une suite complémentaire sera dite *singulière*.

2. Pour $n \geqslant 0$ on dira que le treillis distributif $\mathbf{T}$ est *de dimension de Krull inférieure ou égale à* n si toute suite $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{T}$ est singulière. Par ailleurs, on dira que le treillis distributif $\mathbf{T}$ est de dimension de Krull -1 s'il est trivial, c'est-à-dire si $1_{\mathbf{T}} = 0_{\mathbf{T}}$.

Par exemple pour $k = 2$ le point 1 correspond au dessin suivant dans $\mathbf{T}$.



On notera $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{T} \leqslant n$ lorsque la dimension de Krull est $\leqslant n$.

Il est évident qu'un treillis a la même dimension de Krull que le treillis opposé. On voit aussi tout de suite qu'un treillis est zéro-dimensionnel si, et seulement si, c'est une algèbre de Boole. Également : un ensemble totalement ordonné de n éléments a pour dimension de Krull $n - 2$.

6.2. Fait. *Soit S une partie de $\mathbf{T}$ qui engendre $\mathbf{T}$ en tant que treillis distributif. Alors $\mathbf{T}$ est de dimension de Krull $\leqslant n$ si, et seulement si, toute suite $(x_0, \ldots, x_n)$ dans S admet une suite complémentaire dans $\mathbf{T}$.*

▷ Illustrons les calculs sur un exemple suffisamment général dans le cas $n = 4$.

On vérifie que si $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$ admet $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$ pour suite complémentaire, et si $(x_0, x_1, y_2, x_3, x_4)$ admet $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4)$ pour suite complémentaire, alors la suite $(x_0, x_1, x_2 \vee y_2, x_3, x_4)$ admet la suite complémentaire $(a_0 \vee b_0, a_1 \vee b_1, a_2 \wedge b_2, a_3 \wedge b_3, a_4 \wedge b_4)$.

Et dualement, la suite $(x_0, x_1, x_2 \wedge y_2, x_3, x_4)$ admet la suite complémentaire $(a_0 \vee b_0, a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, a_3 \wedge b_3, a_4 \wedge b_4)$.

Le même calcul fonctionnerait pour un x_i arbitraire (au lieu de x_2 ci-dessus) dans une suite finie arbitraire. Ainsi si chaque suite $(z_0, \ldots, z_n)$ dans S admet une suite complémentaire dans $\mathbf{T}$, il en sera de même pour toute suite de $n + 1$ termes dans le treillis engendré par S. □

6.3. Fait. *Un anneau commutatif a même dimension de Krull que son treillis de Zariski.*

$\mathbb{D}$ La démonstration, basée sur le fait 6.2, est laissée à la lectrice. Une autre démonstration sera donnée plus loin sous la forme du lemme XIV-4.7. □

On peut aussi accéder à la dimension de Krull via les idéaux bords de Krull comme pour les anneaux commutatifs.

6.4. Définition.

1. Le treillis $\mathbf{T}^x_{\mathrm{K}} = \mathbf{T}/(\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x) = 0)$, où
$$\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x) \;=\; {\downarrow}x \vee (0 : x)_{\mathbf{T}} \tag{10}$$
est appelé *le bord supérieur (de Krull) de x dans* $\mathbf{T}$. On dit aussi que l'idéal $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x)$ est *l'idéal bord de Krull de x dans* $\mathbf{T}$.
2. Plus généralement, pour une suite $(\underline{x})$ dans $\mathbf{T}$, l'idéal bord de Krull itéré $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(\underline{x})$ est défini par récurrence comme suit : $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}() = \{0\}$, et
$$\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x_0, \ldots, x_k) = \big(\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x_0, \ldots, x_{k-1}) : x_k\big)_{\mathbf{T}} \vee {\downarrow}x_k\,. \tag{11}$$

6.5. Fait. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\mathbf{T}$ un treillis distributif .*

1. *Une suite $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{T}$ est singulière si, et seulement si, l'idéal bord itéré $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x_0, \ldots, x_n)$ contient 1.*
2. *On a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{T} \leqslant n$ si, et seulement si, pour tout x, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{T}^x_{\mathrm{K}} \leqslant n-1$.*

6.6. Fait. *Dans une algèbre de Heyting, tout idéal bord de Krull itéré est principal : $\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x) = {\downarrow}\big(x \vee \neg x\big)$ et plus généralement,*

$$\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{T}}(x_0, \ldots, x_n) = {\downarrow}\big(x_n \vee \big(x_n \to (\cdots(x_1 \vee (x_1 \to (x_0 \vee \neg x_0)))\cdots)\big)\big) \tag{12}$$

6.7. Lemme. *Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ deux idéaux de type fini d'un anneau $\mathbf{A}$.*
Dans le treillis $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$, l'élément $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b})$ existe si, et seulement si, l'idéal $(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}^\infty)$ a même radical qu'un idéal de type fini.

$\mathbb{D}$ Dans un treillis distributif, l'élément $u \to v$ existe si l'idéal $(v : u)$ est principal (son générateur est alors noté $u \to v$). Or pour un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini, $\big(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) : \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}^\infty)$. D'où le résultat annoncé. □

6.8. Lemme. *Supposons que $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ soit une algèbre de Heyting.*
Pour $(x_0, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{A}$, on a l'égalité
$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(x_0, \ldots, x_n)\big) = \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}}\big(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0), \ldots, \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_n)\big).$$
$\mathbb{D}$ La démonstration est laissée au lecteur. □

6.9. Proposition. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau cohérent noethérien.*

1. *Si $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ sont deux idéaux de type fini, l'idéal $(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}^\infty)$ est de type fini.*
2. *$\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ est une algèbre de Heyting, avec $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) \to \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b} : \mathfrak{a}^\infty)$.*

3. *Les idéaux bords de Krull itérés définis page 772 ont même radical que des idéaux de type fini.*
4. *Si en outre* $\mathbf{A}$ *est fortement discret,* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ *est discret et l'on dispose d'un test pour décider si une suite dans* $\mathbf{A}$ *admet une suite complémentaire.*

▷ *1.* Soient $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b} \in \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$. Notons $\mathfrak{J}_k = (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}^k)$. Puisque $\mathbf{A}$ est cohérent, chaque idéal $\mathfrak{J}_k$ est de type fini. Puisque $\mathbf{A}$ est noethérien, la suite admet deux termes consécutifs égaux, par exemple d'indices p et $p+1$, à partir desquels il est clair qu'elle devient stationnaire. On a alors $\mathfrak{J}_p = (\mathfrak{b} : \mathfrak{a}^\infty)$.
2. Conséquence de *1* vu le lemme 6.7.
3. Résulte par récurrence de *2* vu le fait 6.6 et le lemme 6.8.
4. Résulte de *2*, du fait 6.6 et du lemme 6.8. □

7. Dimension des morphismes

Définition et premières propriétés

7.1. Définition. Si $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un homomorphisme d'anneaux, *la dimension de Krull du morphisme* ρ est par définition la dimension de Krull de l'anneau $\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ obtenu par le changement d'anneau de base qui remplace $\mathbf{A}$ par sa clôture zéro-dimensionnelle réduite $\mathbf{A}^\bullet$ (définie dans le paragraphe page 665).

Exemples.
1) Si $\mathbf{k}$ est zéro-dimensionnel, on a vu que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant n$. On en déduit que la dimension de Krull du morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ est $\leqslant n$, avec égalité si $\mathbf{A}$ est non trivial.
2) Si $\mathbf{B}$ est une $\mathbf{A}$-algèbre entière, après extension des scalaires l'algèbre est entière sur $\mathbf{A}^\bullet$, donc zéro-dimensionnelle. Ainsi, le morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel. ■

7.2. Lemme. *Soit* $\mathbf{B}$ *et* $\mathbf{C}$ *deux* $\mathbf{A}$*-algèbres. Alors par extension des scalaires on obtient* $\mathsf{Kdim}(\mathbf{C} \to \mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}) \leqslant \mathsf{Kdim}(\mathbf{A} \to \mathbf{B})$ *dans les cas suivants.*

1. $\mathbf{C}$ *est un quotient de* $\mathbf{A}$*, ou un localisé de* $\mathbf{A}$*, ou le quotient d'un localisé de* $\mathbf{A}$*.*
2. $\mathbf{C}$ *est un produit fini d'anneaux du type précédent.*
3. $\mathbf{C}$ *est une limite inductive filtrante d'anneaux du type précédent.*

▷ On utilise la constatation $\mathbf{C}^\bullet \otimes_{\mathbf{C}} (\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}) \simeq \mathbf{C}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B} \simeq \mathbf{C}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}^\bullet} (\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B})$. On vérifie ensuite que le foncteur $\mathbf{B} \mapsto \mathbf{B}^\bullet$ transforme un quotient en un quotient, un localisé en un localisé (proposition XI-4.27), un produit fini en un produit fini, et une limite inductive filtrante en une limite inductive filtrante. Par ailleurs, l'extension des scalaires commute aussi avec toutes

ces constructions. Enfin la dimension de Krull ne peut que diminuer par ces constructions. □

Remarque. Il n'est pas vrai que $\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ soit zéro-dimensionnel dès que les trois anneaux le sont. Par exemple on peut prendre $\mathbf{A}$ un corps discret et $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{A}(X)$. Alors $\mathsf{Kdim}(\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}) = 1$ (voir l'exercice 13). Il s'ensuit que l'extension des scalaires, même dans le cas d'une extension fidèlement plate, peut augmenter strictement la dimension de Krull des morphismes. A contrario on a le principe local-global concret suivant. ∎

7.3. Principe local-global concret. *Soient S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$, un entier $k \geqslant -1$ et $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre. La dimension de Krull du morphisme $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est $\leqslant k$ si, et seulement si, la dimension de Krull de chacun des morphismes $\mathbf{A}_{S_i} \to \mathbf{B}_{S_i}$ est $\leqslant k$.*

▷ Comme $(\mathbf{A}_{S_i})^\bullet \simeq (\mathbf{A}^\bullet)_{S_i}$ (proposition XI-4.27), on obtient

$$(\mathbf{A}_{S_i})^\bullet \otimes_{\mathbf{A}_{S_i}} \mathbf{B}_{S_i} \simeq (\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B})_{S_i},$$

et l'on est ramené au principe local-global 3.2. □

Le but de cette section est de montrer, pour un morphisme $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$, l'inégalité

$$\boxed{1 + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant (1 + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A})(1 + \mathsf{Kdim}\,\rho)}.$$

Notons que pour $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$ on a trivialement $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} = \mathsf{Kdim}\,\rho$. Nous traitons ensuite un cas simple mais non trivial pour y voir clair. Le cas vraiment simple serait celui où $\mathbf{A}$ est intègre et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$. Comme la démonstration est inchangée, nous supposerons seulement $\mathbf{A}$ quasi intègre, ce qui facilitera la suite.

7.4. Proposition. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme, avec $\mathbf{A}$ quasi intègre. Si $\mathsf{Kdim}\,\rho \leqslant n$ et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant 2n + 1$.*

▷ Soit $\underline{h} = (h_0, \dots, h_{2n+1})$ une suite de $2n + 2$ éléments dans $\mathbf{B}$. On doit montrer qu'elle est singulière.
Par hypothèse l'anneau $\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ est de dimension de Krull $\leqslant n$.
Soit $\mathbf{K} = \operatorname{Frac}\mathbf{A}$ l'anneau total des fractions, il est zéro-dimensionnel réduit et engendré par $\mathbf{A}$ comme anneau zéro-dimensionnel réduit, donc c'est un quotient de $\mathbf{A}^\bullet$. On en conclut que la suite $(h_0, \dots, h_n)$ est singulière dans $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$.
Cela signifie que l'idéal bord itéré $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\widetilde{\mathbf{B}}}(h_0, \dots, h_n)$ contient 1, et en chassant les dénominateurs que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(h_0, \dots, h_n)$ contient un $a \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$.
Donc $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(h_0, \dots, h_n)$ est un quotient de $\mathbf{B}/a\mathbf{B} = \mathbf{A}/a\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$. Puisque a est régulier et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$, le quotient $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel, donc $(\mathbf{A}/a\mathbf{A})_{\mathrm{red}}$ est un quotient de $\mathbf{A}^\bullet$ et l'anneau $(\mathbf{B}_0)_{\mathrm{red}}$ est un quotient de $\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$. On en déduit que la suite $(h_{n+1}, \dots, h_{2n+1})$ est

singulière dans $(\mathbf{B}_0)_{\mathrm{red}}$, donc aussi dans $\mathbf{B}_0$.
Donc l'anneau $\mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(\underline{h}) = \mathbf{B}_0/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}_0}(h_{n+1},\dots,h_{2n+1})$ est trivial. □

Pour passer du cas quasi intègre au cas général on a envie de dire que tout anneau réduit peut se comporter dans les calculs comme un anneau intègre à condition de remplacer $\mathbf{A}$ par

$$\mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a) \times \mathbf{A}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a))$$

lorsqu'un algorithme demande de savoir si l'annulateur de a est égal à 0 ou 1. La chose importante dans cette construction est que le principe de recouvrement fermé pour les suites singulières s'applique puisque le produit des deux idéaux $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a)$ et $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(a))$ est nul.
Ce type de démonstration sera sans doute plus facile à saisir quand on sera familiarisé avec la machinerie locale-globale de base expliquée page 887. Ici nous ne procédons pas par localisations comaximales successives mais par «recouvrements fermés» successifs.

En fait nous n'allons pas introduire d'arbre de calcul dynamique en tant que tel, nous construirons plutôt un objet universel qui en tient lieu. Cet objet universel est une «approximation finitaire constructive» du produit de tous les quotients de $\mathbf{A}$ par ses idéaux premiers minimaux, un objet des mathématiques classiques un peu trop idéal pour pouvoir être considéré constructivement, du moins sous la forme que l'on vient de définir : en fait, si $\mathbf{B}$ est ce produit et si $\mathbf{A}_1$ est l'image naturelle de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$, alors l'anneau universel que nous construisons devrait être égal à la clôture quasi intègre de $\mathbf{A}_1$ dans $\mathbf{B}$, du moins en mathématiques classiques.

Clôture quasi intègre minimale d'un anneau réduit

Dans la suite nous notons $a^\perp$ l'idéal annulateur de l'élément a lorsque le contexte est clair (ici le contexte est simplement l'anneau dans lequel on doit considérer a). Nous utiliserons aussi la notation $\mathfrak{a}^\perp$ pour l'annulateur d'un idéal $\mathfrak{a}$.
Les faits énoncés ci-après sont immédiats.

$$\mathfrak{a} \subseteq (\mathfrak{a}^\perp)^\perp \tag{13}$$

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \Longrightarrow \mathfrak{b}^\perp \subseteq \mathfrak{a}^\perp \tag{14}$$

$$\mathfrak{a}^\perp = \big((\mathfrak{a}^\perp)^\perp\big)^\perp \tag{15}$$

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^\perp = \mathfrak{a}^\perp \cap \mathfrak{b}^\perp \tag{16}$$

$$\mathfrak{a}^\perp \subseteq \mathfrak{b}^\perp \Longleftrightarrow (\mathfrak{a}+\mathfrak{b})^\perp = \mathfrak{a}^\perp \tag{17}$$

$$\mathfrak{a}^\perp \subseteq \mathfrak{b}^\perp \Longleftrightarrow (\mathfrak{b}^\perp)^\perp \subseteq (\mathfrak{a}^\perp)^\perp \tag{18}$$

$$(\mathfrak{a}^\perp : \mathfrak{b}) = (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\perp \tag{19}$$

$$(\mathbf{A}/\mathfrak{a}^\perp)/\ \overline{\mathfrak{b}}^{\,\perp} \;=\; \mathbf{A}/(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\perp \tag{20}$$

Remarques. 1) Un idéal $\mathfrak{a}$ est un annulateur (d'un autre idéal) si, et seulement si, $\mathfrak{a} = (\mathfrak{a}^\perp)^\perp$.
2) L'inclusion $\mathfrak{a}^\perp + \mathfrak{b}^\perp \subseteq (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^\perp$ peut être stricte, même si $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^\perp$ et $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1^\perp$. Prenons par exemple $\mathbf{A} = \mathbb{Z}[x,y] = \mathbb{Z}[X,Y]/\langle XY\rangle$, $\mathfrak{a}_1 = \langle x\rangle$ et $\mathfrak{b}_1 = \langle y\rangle$. Alors, $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1^\perp = \langle y\rangle$, $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1^\perp = \langle x\rangle$, $\mathfrak{a}^\perp + \mathfrak{b}^\perp = \langle x,y\rangle$, et $(\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^\perp = \langle 0\rangle^\perp = \langle 1\rangle$. ∎

Si nous supposons $\mathbf{A}$ réduit, nous avons en plus les résultats suivants.

$$\sqrt{\mathfrak{a}^\perp} \;=\; \mathfrak{a}^\perp \;=\; (\sqrt{\mathfrak{a}})^\perp \;=\; (\mathfrak{a}^2)^\perp \tag{21}$$

$$(\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\perp \;=\; (\mathfrak{a}\cap\mathfrak{b})^\perp \tag{22}$$

$$\mathfrak{a}^\perp \subseteq \mathfrak{b}^\perp \Longleftrightarrow (\mathfrak{a}\mathfrak{b})^\perp = \mathfrak{b}^\perp \tag{23}$$

7.5. Lemme. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau réduit et $a \in \mathbf{A}$. On définit*

$$\mathbf{A}_{\{a\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}/a^\perp \times \mathbf{A}/(a^\perp)^\perp$$

et l'on note $\psi_a : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\{a\}}$ l'homomorphisme canonique.

1. *$\psi_a(a)^\perp$ est engendré par l'idempotent $(\overline{0},\widetilde{1})$, donc $\psi_a(a)^\perp = (\overline{1},\widetilde{0})^\perp$.*
2. *ψ_a est injectif (on peut identifier $\mathbf{A}$ à un sous-anneau de $\mathbf{A}_{\{a\}}$).*
3. *Soit $\mathfrak{b}$ un idéal dans $\mathbf{A}_{\{a\}}$, alors l'idéal $\psi_a^{-1}(\mathfrak{b}^\perp) = \mathfrak{b}^\perp \cap \mathbf{A}$ est un idéal annulateur dans $\mathbf{A}$.*
4. *L'anneau $\mathbf{A}_{\{a\}}$ est réduit.*

▷ *1.* On a $\psi_a(a) = (\overline{a},\widetilde{0})$, où $\overline{x}$ est la classe modulo $a^\perp$ et $\widetilde{x}$ est la classe modulo $(a^\perp)^\perp$. Si $c = (\overline{y},\widetilde{z})$, l'égalité $\psi_a(a)c = 0$ signifie $\overline{ya} = 0$, i.e. $ya^2 = 0$, ou encore $ya = 0$, c'est-à-dire $\overline{y} = \overline{0}$.
2. Si $xa = 0$ et $xy = 0$ pour tout $y \in a^\perp$ alors $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
3. Notons $\psi_1 : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/a^\perp$ et $\psi_2 : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/(a^\perp)^\perp$ les deux projections. On a $\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2$. Si $x \in \mathbf{A}$ on a

$$\psi_a(x) \in \mathfrak{b}^\perp \iff \psi_1(x)\mathfrak{b}_1 = 0 \quad\text{et}\quad \psi_2(x)\mathfrak{b}_2 = 0,$$

i.e. $x \in \psi_1^{-1}(\mathfrak{b}_1^\perp) \cap \psi_2^{-1}(\mathfrak{b}_2^\perp)$. L'égalité (20) nous dit que chaque $\psi_i^{-1}(\mathfrak{b}_i^\perp)$ est un idéal annulateur. On conclut avec l'égalité (16).
4. Dans un anneau réduit, tout idéal annulateur $\mathfrak{b}^\perp$ est radical : en effet, si $x^2\mathfrak{b} = 0$, alors $x\mathfrak{b} = 0$. □

7.6. Lemme. *Soit $\mathbf{A}$ réduit et $a, b \in \mathbf{A}$. Alors avec les notations du lemme 7.5 les deux anneaux $(\mathbf{A}_{\{a\}})_{\{b\}}$ et $(\mathbf{A}_{\{b\}})_{\{a\}}$ sont canoniquement isomorphes.*

▷ L'anneau $(\mathbf{A}_{\{a\}})_{\{b\}}$ peut être décrit de manière symétrique comme suit :

$$\mathbf{A}_{\{a,b\}} = \mathbf{A}/(ab)^\perp \times \mathbf{A}/(ab^\perp)^\perp \times \mathbf{A}/(a^\perp b)^\perp \times \mathbf{A}/(a^\perp b^\perp)^\perp\ ,$$

et si $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_{\{a,b\}}$ est l'homomorphisme canonique, il est clair que l'on a $\psi(a)^\perp = (1,1,0,0)^\perp$ et $\psi(b)^\perp = (1,0,1,0)^\perp$. □

Remarque. Le cas où $ab = 0$ est typique : quand on le rencontre, on voudrait bien scinder l'anneau en composantes où les choses sont «claires». La construction précédente donne alors les trois composantes

$$\mathbf{A}/(ab^\perp)^\perp \ , \ \mathbf{A}/(a^\perp b)^\perp \ \text{ et } \ \mathbf{A}/(a^\perp b^\perp)^\perp \ .$$

Dans la première, a est régulier et $b = 0$, dans la seconde b est régulier et $a = 0$, et dans la troisième $a = b = 0$. ∎

Le lemme suivant qui concerne les anneaux quasi intègres est recopié du lemme XI-4.22 qui concernait les anneaux zéro-dimensionnels réduits (la lectrice pourra aussi à très peu près recopier la démonstration).

7.7. Lemme. *Si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{C}$ avec $\mathbf{C}$ quasi intègre, le plus petit sous-anneau quasi intègre de $\mathbf{C}$ contenant $\mathbf{A}$ est égal à $\mathbf{A}[(e_a)_{a\in\mathbf{A}}]$, où e_a est l'idempotent de $\mathbf{C}$ tel que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{C}}(a) = \langle 1 - e_a\rangle_{\mathbf{C}}$. Plus généralement si $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B}$ réduit, et si tout élément a de $\mathbf{A}$ admet un annulateur dans $\mathbf{B}$ engendré par un idempotent $1 - e_a$, alors le sous-anneau $\mathbf{A}[(e_a)_{a\in\mathbf{A}}]$ de $\mathbf{B}$ est quasi intègre.*

7.8. Théorème et définition. (Clôture quasi intègre minimale)
Soit $\mathbf{A}$ un anneau réduit. On peut définir un anneau $\mathbf{A}_{\min}$ comme limite inductive filtrante en itérant la construction de base qui consiste à remplacer $\mathbf{E}$ (l'anneau «en cours», qui contient $\mathbf{A}$) par

$$\mathbf{E}_{\{a\}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{E}/a^\perp \times \mathbf{E}/(a^\perp)^\perp = \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a) \times \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a)) \ ,$$

lorsque a parcourt $\mathbf{A}$.

1. *Cet anneau $\mathbf{A}_{\min}$ est quasi intègre, contient $\mathbf{A}$ et est entier sur $\mathbf{A}$.*
2. *Pour tout $x \in \mathbf{A}_{\min}$, $x^\perp \cap \mathbf{A}$ est un idéal annulateur dans $\mathbf{A}$.*

Cet anneau $\mathbf{A}_{\min}$ est appelé la clôture quasi intègre minimale de $\mathbf{A}$.
Lorsque $\mathbf{A}$ n'est pas nécessairement réduit, on prendra $\mathbf{A}_{\min} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{A}_{\mathrm{red}})_{\min}$.

D *1.* D'après le lemme 7.7, il suffit de rajouter un idempotent e_a pour chaque $a \in \mathbf{A}$ pour obtenir un anneau quasi intègre. La limite inductive est bien définie grâce à la relation de commutation donnée par le lemme 7.6.
Pour le point *2* on note que x est obtenu à un étage fini de la construction, et que $x^\perp \cap \mathbf{A}$ ne change plus à partir du moment où x est atteint parce que les homomorphismes successifs sont des injections. On peut donc faire appel au point *3* du lemme 7.5. □

Remarque. On peut se demander si $\mathbf{A}_{\min}$ ne pourrait pas être caractérisé par une propriété universelle liée au point *2.* ∎

En « itérant » la description de $(\mathbf{A}_{\{a\}})_{\{b\}}$ donnée dans la démonstration du lemme 7.6 on obtient la description suivante de chaque anneau obtenu à un étage fini de la construction de $\mathbf{A}_{\min}$ (voir l'exercice 18).

7.9. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau réduit et* $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ *une suite de* n *éléments de* $\mathbf{A}$. *Pour* $I \in \mathcal{P}_n$, *on note* $\mathfrak{a}_I$ *l'idéal*

$$\mathfrak{a}_I = \big(\textstyle\prod_{i\in I} \langle a_i\rangle^\perp \prod_{j\notin I} a_j\big)^\perp = \big(\langle a_i, i \in I\rangle^\perp \prod_{j\notin I} a_j\big)^\perp.$$

Alors $\mathbf{A}_{\min}$ *contient l'anneau suivant, produit de* 2^n *anneaux quotients de* $\mathbf{A}$ *(certains éventuellement nuls) :*

$$\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}} = \textstyle\prod_{I\in\mathcal{P}_n} \mathbf{A}/\mathfrak{a}_I\ .$$

7.10. Fait.

1. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau quasi intègre.*
   a. $\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{A}$.
   b. $\mathbf{A}[X]$ *est quasi intègre, et* $\mathbb{B}(\mathbf{A}) = \mathbb{B}(\mathbf{A}[X])$.
2. *Pour tout anneau* $\mathbf{A}$ *on a un isomorphisme canonique*
$$\mathbf{A}_{\min}[X_1, \ldots, X_n] \simeq (\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n])_{\min}.$$

▷ *1a.* Résulte de la construction de $\mathbf{A}_{\min}$.
1b. Le résultat est clair pour les anneaux intègres. On peut appliquer la machinerie locale-globale élémentaire page 217. On pourrait aussi utiliser le lemme de McCoy, corollaire III-2.3 *2.*
2. On suppose sans perte de généralité l'anneau $\mathbf{A}$ réduit. Il suffit aussi de traiter le cas d'une variable. Vu le lemme 7.6 on peut « commencer » la construction de $\mathbf{A}[X]_{\min}$ avec les constructions $\mathbf{E} \rightsquigarrow \mathbf{E}_{\{a\}}$ pour des $a \in \mathbf{A}$. Mais si $\mathbf{E} = \mathbf{B}[X]$ et $a \in \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ alors $\mathbf{E}_{\{a\}} = \mathbf{B}_{\{a\}}[X]$. Ainsi $\mathbf{A}_{\min}[X]$ peut être vu comme une première étape de la construction de $\mathbf{A}[X]_{\min}$. Mais puisque d'après le point *1* $\mathbf{A}_{\min}[X]$ est quasi intègre et que pour un anneau quasi intègre $\mathbf{C}$ on a $\mathbf{C} = \mathbf{C}_{\min}$, la construction de $\mathbf{A}[X]_{\min}$ est terminée avec $\mathbf{A}_{\min}[X]$. □

Commentaire. En pratique, pour utiliser l'anneau $\mathbf{A}_{\min}$, on n'a besoin que des étages finis de la construction. On peut noter cependant que même un seul étage de la construction est un peu mystérieux, dans la mesure où les idéaux $a^\perp$ et $(a^\perp)^\perp$ sont difficiles à maîtriser. C'est seulement dans le cas des anneaux cohérents que l'on sait les décrire par des systèmes générateurs finis. En fait si l'anneau est noethérien, la construction doit s'arrêter en un nombre fini d'étapes (au moins du point de vue des mathématiques classiques), et elle remplace l'anneau par le produit de ses quotients par les idéaux premiers minimaux. Nous sommes ici dans une situation où la construction de $\mathbf{A}_{\min}$ répondant aux standards des mathématiques constructives semble plus compliquée que le résultat en mathématiques classiques (au moins si l'anneau est noethérien). Néanmoins, puisque nous n'avons

pas besoin de connaître les idéaux premiers minimaux, notre méthode est plus générale (elle ne nécessite pas le principe du tiers exclu). En outre, sa complication est surtout apparente. Quand nous utilisons $\mathbf{A}/a^\perp$ par exemple, nous faisons en fait des calculs dans $\mathbf{A}$ en forçant a à être régulier, c'est-à-dire en annulant par force tout x qui se présente et qui annule a. Quand nous utilisons $\mathbf{A}/(a^\perp)^\perp$, la chose est moins facile, car a priori, nous avons besoin d'une preuve (et non du simple résultat d'un calcul) pour certifier qu'un élément x est dans $(a^\perp)^\perp$.
C'est un fait que l'utilisation des idéaux premiers minimaux dans un raisonnement de mathématiques classiques peut en général être rendue inoffensive (c'est-à-dire constructive) par l'utilisation de $\mathbf{A}_{\min}$ (ou d'un autre anneau universel du même type [3]), même si l'on ne dispose pas d'autre moyen pour «décrire un idéal $(a^\perp)^\perp$» que celui d'appliquer la définition. ∎

Application

7.11. Corollaire. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme de dimension de Krull finie. On «étend les scalaires» de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}_{\min}$: on obtient $\mathbf{B}' = \mathbf{A}_{\min} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ et l'on note $\rho' : \mathbf{A}_{\min} \to \mathbf{B}'$ le morphisme naturel.*
Alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{\min} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}' = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$ *et* $\mathsf{Kdim}\,\rho' \leqslant \mathsf{Kdim}\,\rho$.

▷ Les deux premiers points résultent du fait que dans la construction de l'anneau $\mathbf{A}_{\min}$, à chaque étape élémentaire

$$\mathbf{E} \quad \rightsquigarrow \quad \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(a) \times \mathbf{E}/\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}(\mathrm{Ann}_{\mathbf{E}}a)\ ,$$

le produit des deux idéaux est nul, ce qui se retrouve après tensorisation par $\mathbf{B}$. Donc, le principe de recouvrement fermé pour la dimension de Krull 3.3 s'applique. Enfin l'inégalité $\mathsf{Kdim}\,\rho' \leqslant \mathsf{Kdim}\,\rho$ résulte du lemme 7.2. □

Remarque. De manière générale l'anneau $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}_{\min}$ semble un meilleur concept que $\mathbf{A}^\bullet$ pour remplacer le corps des fractions dans le cas d'un anneau réduit non intègre. Dans le cas où $\mathbf{A}$ est quasi intègre, on a en effet $\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{A}$, donc $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}_{\min} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$, tandis que $\mathbf{A}^\bullet$ est en général nettement plus encombrant (comme le montre l'exemple $\mathbf{A} = \mathbb{Z}$). ∎

7.12. Corollaire. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme.*
Si $\mathsf{Kdim}\,\rho \leqslant n$ *et* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$, *alors* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant 2n+1$.

▷ Cela résulte clairement de la proposition 7.4 et du corollaire 7.11. □

3. $\mathbf{A}_{\min}$ correspond à l'utilisation de tous les quotients par les idéaux premiers minimaux, $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}_{\min})$ correspond à l'utilisation de tous les corps de fractions de ces quotients.

7.13. Théorème. *Soit $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ un morphisme.*
Si $\mathsf{Kdim}\,\rho \leqslant n$ et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant m$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant mn + m + n$.

▷ On fait une démonstration par récurrence sur m. Le cas $m = 0$ est trivial. La preuve donnée pour $m = 1$ dans le cas où $\mathbf{A}$ est quasi intègre (proposition 7.4), qui s'appuyait sur la dimension 0 pour prouver le résultat en dimension $m = 1$, s'adapte sans problème pour passer de la dimension m à la dimension $m + 1$. Nous recopions la démonstration dans le cas où $\mathbf{A}$ est quasi intègre.
Pour passer au cas d'un anneau arbitraire on utilise le corollaire 7.11.
On suppose donc $\mathbf{A}$ quasi intègre et on considère une suite $(\underline{h}) = (h_0, \ldots, h_p)$ dans $\mathbf{B}$ avec $p = (m+1)(n+1) - 1$. On doit montrer qu'elle est singulière. Par hypothèse l'anneau $\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ est de dimension de Krull $\leqslant n$. L'anneau total des fractions $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel réduit, et il est engendré par $\mathbf{A}$ comme anneau zéro-dimensionnel réduit, donc c'est un quotient de $\mathbf{A}^\bullet$. On en conclut que la suite $(h_0, \ldots, h_n)$ est singulière dans l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}} = \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$.
Cela signifie que l'idéal bord itéré $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\widetilde{\mathbf{B}}}(h_0, \ldots, h_n)$ contient 1, et en chassant les dénominateurs que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(h_0, \ldots, h_n)$ contient un $a \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$. Donc l'anneau $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(h_0, \ldots, h_n)$ est un quotient de $\mathbf{B}/a\mathbf{B} = \mathbf{A}/a\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$. Puisque a est régulier et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant m$, le quotient $\mathbf{A}/a\mathbf{A}$ est de dimension de Krull $\leqslant m - 1$. L'homomorphisme naturel $\mathbf{A}/a\mathbf{A} \to \mathbf{B}/a\mathbf{B}$ reste de dimension de Krull $\leqslant n$ (lemme 7.2). Donc, par hypothèse de récurrence, la suite $(h_{n+1}, \ldots, h_p)$ est singulière dans $\mathbf{B}/a\mathbf{B}$. Donc la suite $(h_{n+1}, \ldots, h_p)$ est singulière dans $\mathbf{B}_0$.
En conclusion, l'anneau $\mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(\underline{h}) = \mathbf{B}_0/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}_0}(h_{n+1}, \ldots, h_p)$ est trivial. □

7.14. Corollaire. *Supposons $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant m$. Alors*

$$\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant mn + m + n.$$

▷ On sait que si $\mathbf{K}$ est zéro-dimensionnel réduit, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant n$. Ainsi $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A} \to \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]) \overset{\text{def}}{=} \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}^\bullet[X_1, \ldots, X_n] \leqslant n$. On applique le théorème 7.13. □

On dispose également d'une minoration de $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$.

7.15. Lemme. *Pour tout anneau $\mathbf{A}$ non trivial et tout $n > 0$ on a*

$$n + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n].$$

Plus précisément, l'implication suivante est satisfaite pour tout $k \geqslant -1$ et pour tout anneau :

$$\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n] \leqslant n + k \implies \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$$

▷ Conséquence immédiate de la proposition 2.16. □

7.16. Théorème. *On considère une algèbre* $\rho : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$.

1. *Supposons que* $\mathbf{B}$ *est engendrée par des éléments primitivement algébriques sur* $\mathbf{A}$, *alors* $\mathsf{Kdim}\,\rho \leqslant 0$ *et donc* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.
2. *Si* ρ *est injectif et* $\mathbf{B}$ *entier sur* $\mathbf{A}$, *alors* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.

D *1.* Vu le fait VII-1.3, l'anneau $\mathbf{A}^\bullet \otimes_{\mathbf{A}} \mathbf{B}$ est zéro-dimensionnel, autrement dit $\mathsf{Kdim}\,\rho \leqslant 0$. On conclut par le théorème 7.13.
2. D'après le point *1* et la proposition 4.1. □

Pour une démonstration plus directe de l'inégalité $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$, voir l'exercice 10.

8. Dimension valuative

Dimension des anneaux de valuation

Rappelons qu'un anneau de valuation est un anneau réduit dans lequel on a, pour tous a, b : a divise b ou b divise a. Autrement dit c'est un anneau local de Bézout et réduit. Un anneau de valuation est un anneau normal, local et sans diviseur de zéro. Il est intègre si, et seulement si, il est cohérent.
Il est clair que le treillis de Zariski d'un anneau de valuation est un ensemble totalement ordonné.

8.1. Fait. *Dans un treillis distributif si une sous-suite de* $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ *est singulière, la suite* $(\underline{x})$ *est singulière.*

D On considère une suite singulière $(y_1, \ldots, y_r)$, avec une suite complémentaire $(b_1, \ldots, b_r)$. Rajoutons un terme z à $(y_1, \ldots, y_r)$. Pour en obtenir une suite complémentaire, on procède comme suit. Si z est mis à la fin, on rajoute 1 à la fin de $(b_1, \ldots, b_r)$. Si z est mis au début, on rajoute 0 au début de $(b_1, \ldots, b_r)$. Si z est intercalé entre y_i et y_{i+1} on intercale b_i entre b_i et b_{i+1}. □

8.2. Fait. *Dans un treillis distributif, si* $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ *et si l'on a* $x_1 = 0$, *ou* $x_n = 1$, *ou* $x_{i+1} \leqslant x_i$ *pour un* $i \in [\![1..n-1]\!]$, *alors la suite* $(\underline{x})$ *est singulière.*

D On applique le fait précédent en notant que (0) et (1) sont deux suites complémentaires et que la suite (x_i, x_{i+1}) avec $x_{i+1} \leqslant x_i$ admet $(0, 1)$ pour suite complémentaire. □

Un rappel : la signification constructive de la phrase « le nombre d'éléments de E est borné par k » (ce que l'on note $\#E \leqslant k$) est que pour toute liste finie de $k+1$ éléments dans E, il y en a deux égaux.

8.3. Lemme. *Pour une suite* croissante $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ *dans un treillis totalement ordonné les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *La suite est singulière.*
2. $a_1 = 0$, *ou* $a_n = 1$, *ou il existe* $i \in [\![1..n-1]\!]$ *tel que* $a_i = a_{i+1}$.
3. *Le nombre d'éléments dans* $(0, a_1, \ldots, a_n, 1)$ *est borné par* $n+1$

▷ *1* $\Rightarrow$ *2.* Faisons le calcul pour le cas $n = 3$ en laissant la récurrence au lecteur sceptique. On considère une suite complémentaire (b_1, b_2, b_3). On a

$$\begin{array}{rcl} 1 & \leqslant & a_3 \vee b_3 \\ a_3 \wedge b_3 & \leqslant & a_2 \vee b_2 \\ a_2 \wedge b_2 & \leqslant & a_1 \vee b_1 \\ a_1 \wedge b_1 & \leqslant & 0 \end{array}$$

Ainsi, $a_1 = 0$ ou $b_1 = 0$.
Si $b_1 = 0$, alors $a_1 \vee b_1 = a_1 \geqslant a_2 \wedge b_2$. Donc $a_2 \leqslant a_1$ ou $b_2 \leqslant a_1$. Dans le premier cas, $a_1 = a_2$. Dans le deuxième cas, $b_2 \leqslant a_1 \leqslant a_2$ donc $a_2 \vee b_2 = a_2$. Ceci implique $a_3 \leqslant a_2$ ou $b_3 \leqslant a_2$. Dans le premier cas, $a_2 = a_3$. Dans le deuxième cas, $b_3 \leqslant a_2 \leqslant a_3$, donc $a_3 \vee b_3 = a_3 = 1$.
2 $\Rightarrow$ *1.* D'après le fait 8.2.
3 $\Rightarrow$ *2.* Si l'on a deux éléments égaux dans une suite croissante, alors il y a aussi deux éléments consécutifs égaux. □

Le théorème suivant donne une interprétation constructive précise et élémentaire de la dimension de Krull d'un ensemble totalement ordonné. Il résulte directement du fait 8.2 et du lemme 8.3.

8.4. Théorème. *Pour un treillis distributif totalement ordonné* $\mathbf{T}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{T}$ *est de dimension inférieure ou égale à* n.
2. *Le nombre d'éléments de* $\mathbf{T}$ *est borné par* $n+2$ *(*$\#\mathbf{T} \leqslant n+2$*).*
3. *Pour toute suite croissante* $(x_0, \ldots, x_n)$ *dans* $\mathbf{T}$, *on a* $x_0 = 0$, *ou* $x_n = 1$, *ou* $x_{i+1} = x_i$ *pour un* $i \in [\![0, n-1]\!]$.

Notez que le théorème précédent s'applique au treillis de Zariski d'un anneau de valuation. Nous présentons maintenant deux faits fort simples et utiles concernant les anneaux de valuation.

8.5. Fait. *Soient dans un anneau de valuation des éléments* $u_1, \ldots, u_m$ *avec* $\sum_i u_i = 0$ *(et* $m \geqslant 2$*). Alors il existe* $j \neq k$ *et un élément inversible* v *tels que* $\langle u_1, \ldots, u_m \rangle = \langle u_j \rangle = \langle u_k \rangle$ *et* $vu_j = u_k$.

▷ Tout d'abord il existe j tel que $\langle u_1, \ldots, u_m \rangle = \langle u_j \rangle$. Soit alors pour chaque k un élément v_k tel que $u_k = v_k u_j$, avec $v_j = 1$.
On obtient l'égalité $u_j(1 + \sum_{k \neq j} v_k) = 0$. Donc $u_j = 0$ ou $1 + \sum_{k \neq j} v_k = 0$.

Si $u_j = 0$, on peut prendre tous les v_k égaux à 1.
Si $1 + \sum_{k\neq j} v_k = 0$, l'un des v_k est inversible puisque $\mathbf{V}$ est local. □

8.6. Fait. *Soit* $\mathbf{V}$ *un anneau de valuation et une suite* $(a_1, \dots, a_n)$ *dans* $\mathbf{V}^*$. *Pour des exposants* p_i *tous* > 0, *posons* $a = \prod_{i=1}^n a_i^{p_i}$. *Alors il existe un* $j \in [\![1..n]\!]$ *tel que* $\mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_j)$.

▷ Considérons un j tel que a_i divise a_j pour tous les $i \in [\![1..n]\!]$. Alors a_j divise a qui divise a_j^p, où $p = \sum_{i=1}^n p_i$. □

Nous aurons besoin du lemme combinatoire suivant.

8.7. Lemme. *Soient deux ensembles* $E \subseteq F$. *On suppose que pour toute suite* $(x_0, \dots, x_m)$ *dans* F, *une des deux alternatives suivantes a lieu :*
— *il existe* $i < j \in [\![0..m]\!]$ *tels que* $x_i = x_j$,
— *il existe* $i \in [\![0..m]\!]$ *tel que* $x_i \in E$.
Alors $\#E \leqslant \ell$ *implique* $\#F \leqslant \ell + m$.

▷ On considère une suite $(y_0, \dots, y_{\ell+m})$ dans F. On doit montrer qu'il y a deux termes égaux. On considère les $m+1$ premiers termes. Ou bien il y en a deux égaux, et l'affaire est entendue, ou bien l'un des termes est dans E. Dans ce cas, on supprime ce terme qui est dans E de la suite $(y_0, \dots, y_{\ell+m})$ et l'on considère les $m+1$ premiers termes de cette nouvelle suite. Ou bien il y en a deux égaux, et l'affaire est entendue, ou bien l'un des termes est dans E ... Dans le cas pire, on poursuit le processus jusqu'au bout et l'on obtient à la fin $\ell + 1$ termes dans E et deux d'entre eux sont égaux. □

8.8. Théorème. *Soient* $\mathbf{V}$ *un anneau de valuation intègre,* $\mathbf{K}$ *son corps des fractions,* $\mathbf{L} \supseteq \mathbf{K}$ *un corps discret de degré de transcendance* $\leqslant m$ *sur* $\mathbf{K}$, *et* $\mathbf{W} \supseteq \mathbf{V}$ *un anneau de valuation de* $\mathbf{L}$. *Alors* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{W} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{V} + m$.

▷ On doit montrer que si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{V} \leqslant n$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{W} \leqslant n + m$.
Puisqu'il s'agit d'anneaux de valuation, on doit simplement montrer que

$$\#\,\mathsf{Zar}\,\mathbf{V} \leqslant n+2 \ \text{ implique } \ \#\,\mathsf{Zar}\,\mathbf{W} \leqslant n+m+2.$$

(Voir le théorème 8.4.) Il suffit donc de montrer que les hypothèses du lemme 8.7 sont satisfaites pour les entiers $\ell = n + 2$ et m, et pour les ensembles $E = \mathsf{Zar}\,\mathbf{V}$ et $F = \mathsf{Zar}\,\mathbf{W}$.
Soit $\mathbf{V}' = \mathbf{W} \cap \mathbf{K}$. Puisque $\mathbf{V}'$ est un localisé de $\mathbf{V}$, on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{V}' \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{V}$. On se ramène ainsi au cas où $\mathbf{V} = \mathbf{W} \cap \mathbf{K}$, ce qui implique $\mathsf{Zar}\,\mathbf{V} \subseteq \mathsf{Zar}\,\mathbf{W}$.
Soient maintenant x_0, ..., $x_m \in \mathrm{Reg}\,\mathbf{W}$, noté $\mathbf{W}^*$.
Considérons une relation de dépendance algébrique sur $\mathbf{K}$ entre $(x_0, \dots, x_m)$. On peut supposer que les coefficients du polynôme $P \in \mathbf{K}[X_0, \dots, X_m]$ qui donne cette relation de dépendance algébrique sont dans $\mathbf{V} \cap \mathbf{K}^\times = \mathbf{V}^*$. En notant, pour $p \in \mathbb{N}^{m+1}$, $x^p = x_0^{p_0} \cdots x_m^{p_m}$, le fait 8.5 nous donne p et q distincts dans $\mathbb{N}^{m+1}$ tels que ax^p et bx^q sont associés dans $\mathbf{W}$, avec $a, b \in \mathbf{V}^*$. En simplifiant par $x^{p\wedge q}$, on peut supposer $p \wedge q = 0$. Puisque a divise b

ou b divise a, on peut supposer $b = 1$. On a donc ax^p associé à x^q dans $\mathbf{W}$. Si $q = 0$, alors chaque x_j qui figure dans x^p (il y en a au moins un) est inversible dans $\mathbf{W}$, i.e. $\mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x_j) = \mathrm{D}_{\mathbf{W}}(1)$. Sinon, le fait 8.6 appliqué à x^q nous donne un x_j présent dans x^q tel que $\mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x^q) = \mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x_j)$; appliqué à ax^p, il nous fournit, $\mathrm{D}_{\mathbf{W}}(ax^p) = \mathrm{D}_{\mathbf{W}}(a)$ ou $\mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x_k)$ avec x_k présent dans x^p ; on a donc $\mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x_j) = \mathrm{D}_{\mathbf{W}}(a)$, ou bien $\mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x_j) = \mathrm{D}_{\mathbf{W}}(x_k)$. La démonstration est complète. □

Dimension valuative d'un anneau commutatif

8.9. Définition.

1. Si $\mathbf{A}$ est un anneau quasi intègre, la *dimension valuative* est définie comme suit. Soit $d \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$, on dit que la dimension valuative de $\mathbf{A}$ est inférieure ou égale à d et l'on écrit $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$ si pour toute suite finie $(\underline{x})$ dans $\mathbf{K}$ on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[\underline{x}] \leqslant d$.
2. Dans le cas général on définit « $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$ » par « $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}_{\min} \leqslant d$ ».

On a immédiatement :

— $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$,
— $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} = -1$ si, et seulement si, $\mathbf{A}$ est trivial,
— $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$ si, et seulement si, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$,
— si $\mathbf{A}$ est quasi intègre alors
  — $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$ si, et seulement si, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ pour tout anneau $\mathbf{B}$ intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$,
  — si $\mathbf{B}$ est intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$, on a $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$.

Le fait suivant résulte directement de la construction de $\mathbf{A}_{\min}$.

8.10. Fait. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique, alors* $\mathbf{A}_{\min}$ *également.*

8.11. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique, on a* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$.

▷ Puisque $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{\min}$, et puisque $\mathbf{A}_{\min}$ est un anneau arithmétique si $\mathbf{A}$ en est un, il suffit de traiter le cas où $\mathbf{A}$ est quasi intègre. On applique alors le théorème XII-4.8 qui dit que tout élément de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$, et le théorème 7.16 qui dit que dans un tel cas $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ pour tout anneau $\mathbf{B}$ intermédiaire entre $\mathbf{A}$ et $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$. □

Remarque. Voici une fin de preuve (cas où $\mathbf{A}$ est un anneau arithmétique quasi intègre) moins savante. On suppose d'abord que $\mathbf{A}$ est local, i.e. que c'est un anneau de valuation intègre. Pour tout $x = a/b \in \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$, on a l'alternative : b divise a, auquel cas $x \in \mathbf{A}$, ou a divise b, i.e., $ac = b$ auquel cas c est régulier et $x = 1/c$ de sorte que $\mathbf{A}[x]$ est un anneau de valuation localisé de $\mathbf{A}$, donc $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[x] \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$. On termine par récurrence sur le nombre d'éléments de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ que l'on rajoute à $\mathbf{A}$. Enfin, dans le cas

général, on reprend la démonstration précédente. On remplace l'alternative «b divise a ou a divise b» par la création de deux localisations comaximales de $\mathbf{A}$. Dans la première b divise a, dans la seconde a divise b. ∎

8.12. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau intègre,* $n \geqslant 1$ *et* $k \geqslant -1$.
Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant n+k$, *alors pour tous* $x_1, \dots, x_n$ *dans* $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$, *on a* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[x_1,\dots,x_n] \leqslant k$.

▷ On introduit les anneaux intermédiaires
$\mathbf{B}_0 = \mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}[x_1, X_2,\dots,X_n]$, $\dots$, $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}[x_1,\dots,x_n]$.
Pour $i \in [\![1..n]\!]$, on note φ_i l'homomorphisme d'évaluation $\mathbf{B}_{i-1} \to \mathbf{B}_i$ défini par $X_i \mapsto x_i$. Si $x_i = a_i/b_i$, le noyau $\operatorname{Ker}\varphi_i$ contient $f_i = b_i X_i - a_i$.
Soit $i \in [\![0..n-1]\!]$. Puisque $b_{i+1} \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}[(x_j)_{1\leqslant j\leqslant i}]$, on a $f_{i+1} \in \operatorname{Reg}\mathbf{B}_i$ (lemme de McCoy, corollaire III-2.3). Donc, d'après le point *5* de la proposition 3.1, on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_i/\langle f_{i+1}\rangle \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_i - 1$. Enfin, puisque $\mathbf{B}_{i+1}$ est un quotient de $\mathbf{B}_i/\langle f_{i+1}\rangle$, on obtient $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_{i+1} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}_i - 1$. □

Dans la proposition suivante, comme nous le verrons un peu plus loin, les trois propriétés sont en fait équivalentes (théorème 8.19 point *2*).

8.13. Proposition. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau intègre et* $n \geqslant 1$, *on a pour les points suivants les implications 1* $\Rightarrow$ *2* $\Rightarrow$ *3.*

1. *On a* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant 2n$.
2. *Pour tous* $x_1, \dots, x_n$ *dans* $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$, *on a* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[x_1,\dots,x_n] \leqslant n$.
3. *On a* $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant n$.

▷ *1*$\Rightarrow$ *2.* Cas particulier du lemme 8.12.
2 $\Rightarrow$ *3.* On considère une suite arbitraire $(y_1,\dots,y_r)$ dans $\operatorname{Frac}\mathbf{A}$, puis une suite $(x_0,\dots,x_n)$ arbitraire dans $\mathbf{B} = \mathbf{A}[y_1,\dots,y_r]$. On doit démontrer que la suite $(x_0,\dots,x_n)$ est singulière dans $\mathbf{B}$. Il suffit de montrer qu'elle est singulière dans $\mathbf{C} = \mathbf{A}[x_0,\dots,x_n]$, ou encore, que la suite $(x_1,\dots,x_n)$ est singulière dans $\mathbf{C}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{C}}(x_0)$.
On écrit $x_0 = a_0/b_0$ avec $b_0 \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$. Si $a_0 = 0$, c'est terminé.
Si a_0 est régulier, alors $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{C}}(x_0) = x_0\mathbf{C} \supseteq a_0\mathbf{C}$. Donc $\mathbf{C}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{C}}(x_0)$ est un quotient de $\mathbf{C}/\langle a_0\rangle$ qui est égal à $\mathbf{A}[x_1,\dots,x_n]/\langle a_0\rangle$, lequel est dimension de Krull $\leqslant n-1$. Ainsi $\mathbf{C}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{C}}(x_0)$ est de dimension de Krull $\leqslant n-1$, et la suite $(x_1,\dots,x_n)$ est singulière dans $\mathbf{C}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{C}}(x_0)$. □

Dimension valuative d'un anneau de polynômes

Le but de ce paragraphe est de démontrer l'égalité :

$$\boxed{\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] = n + \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}},$$

pour tout $n \geqslant 1$. On en déduit la même égalité pour les dimensions de Krull dans le cas d'un anneau arithmétique.

Par définition, cette égalité de dimensions signifie l'équivalence suivante

$$\boxed{\forall k \geqslant -1,\ \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant k \iff \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant n+k}. \qquad (24)$$

Ainsi la première égalité encadrée ne colle pas vraiment pour l'anneau trivial (il faudrait dire que la dimension de l'anneau trivial est $-\infty$ plutôt que -1).
Remarque préliminaire. Étant donné que $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}_{\min}$ par définition, et que $\mathbf{A}_{\min}[X_1,\dots,X_n] \simeq (\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n])_{\min}$ (fait 7.10), il suffit de traiter le cas où $\mathbf{A}$ est quasi intègre, et par la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres, il suffit de traiter le cas intègre. Dans la suite du paragraphe, nous utiliserons donc parfois la phrase salvatrice «on peut sans perte de généralité supposer l'anneau intègre», ou parfois, si nous voulons donner une explication sur le fonctionnement de la machinerie locale-globale élémentaire, «on peut sans perte de généralité supposer l'anneau quasi intègre». ∎

8.14. Fait. *Dans* (24)*, l'implication réciproque (de droite à gauche) est correcte.*

◗ On suppose sans perte de généralité $\mathbf{A}$ intègre. On note $[\underline{X}] = [X_1,\dots,X_n]$. On suppose $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\underline{X}] \leqslant n+k$. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}[y_1,\dots,y_r]$, avec $y_i \in \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. On veut démontrer que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant k$.
Or $\mathbf{B}[\underline{X}] = \mathbf{A}[\underline{X}][y_1,\dots,y_r]$ avec les y_i dans $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}[\underline{X}])$.
Donc $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}[\underline{X}] \leqslant n+k$, et par le lemme 7.15, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant k$. □

On étudie maintenant l'implication directe difficile dans (24). En mathématiques classiques on a le résultat suivant :
(∗) *la dimension valuative d'un anneau intègre* $\mathbf{A}$ *est aussi le maximum des dimensions des anneaux de valuation contenant* $\mathbf{A}$ *et contenus dans son corps des fractions.*
Cette affirmation (∗) n'est plus vraie en général d'un point de vue constructif (par manque d'anneaux de valuation), mais elle est une conséquence directe (en mathématiques classiques) du corollaire 8.17, qui est donc une version constructive de (∗).

8.15. Lemme. *Soient* x_0*,* x_1*, …,* x_ℓ*,* u*,* v*,* α *des indéterminées sur un anneau* $\mathbf{A}$*,* $P_0(\alpha)$*, …,* $P_\ell(\alpha) \in \mathbf{A}[\alpha]$ *et* $Q_0(\alpha^{-1})$*, …,* $Q_\ell(\alpha^{-1}) \in \mathbf{A}[\alpha^{-1}]$*. Pour des* m_i*,* $n_i \in \mathbb{N}$*, on définit* $P = P(\alpha)$ *et* $Q = Q(\alpha^{-1})$ *comme suit :*

$$P = x_0^{m_0}(x_1^{m_1}(\cdots(x_\ell^{m_\ell}(u+P_\ell(\alpha)x_\ell)+\cdots)+P_1(\alpha)x_1)+P_0(\alpha)x_0),$$
$$Q = x_0^{n_0}(x_1^{n_1}(\cdots(x_\ell^{n_\ell}(v+Q_\ell(\alpha^{-1})x_\ell)+\cdots)+Q_1(\alpha^{-1})x_1)+Q_0(\alpha^{-1})x_0).$$

Si P *est de degré formel* p *(en* α*),* Q *de degré formel* q *(en* α^{-1}*), on considère le résultant :*

$$R = \mathrm{Res}_\alpha(\alpha^q Q, q, P, p) \in \mathbf{A}[x_0,\dots,x_\ell,u,v].$$

Alors, en posant $r_i = qm_i + pn_i$ *et* $w = u^q v^p$*,* R *est de la forme*

$$R = x_0^{r_0}(x_1^{r_1}(\cdots(x_\ell^{r_\ell}(w+a_\ell x_\ell)+\cdots)+a_1x_1)+a_0x_0) \quad \text{avec } a_i \in \mathbf{A}[\underline{x},u,v].$$

▷ On note $\mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(U,V)$ à la place de $\mathrm{Res}_\alpha(U,q,V,p)$, on suppose $n=1$ et l'on note $x=x_0$, $y=x_1$, de sorte que $P=x^{m_0}S$, $\alpha^q Q=x^{n_0}T$, avec :

$$S=y^{m_1}(u+P_1(\alpha)y)+P_0(\alpha)x,\quad T=y^{n_1}(v\alpha^q+T_1(\alpha)y)+T_0(\alpha)x.$$

On obtient $R=x^{r_0}\mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(T,S)$, $r_0=qm_0+pn_0$. En faisant $x:=0$ on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(T,S)_{x:=0} &= \mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(T_{x:=0},S_{x:=0})\\ &= \mathrm{Res}_{\alpha,q,p}\big(y^{n_1}(v\alpha^q+T_1(\alpha)y),y^{m_1}(u+P_1(\alpha)y)\big)\\ &= y^{r_1}\mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(v\alpha^q+T_1(\alpha)y,u+P_1(\alpha)y),\end{aligned}$$

avec $r_1=qm_1+pn_1$. En faisant $y:=0$ on a :

$$\mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(v\alpha^q+T_1(\alpha)y,u+P_1(\alpha)y)_{y:=0}=\mathrm{Res}_{\alpha,q,p}(v\alpha^q,u)=u^qv^p,$$

ce qui donne le résultat annoncé. □

8.16. Proposition. *Soient* $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$, $(\underline{x})=(x_0,\dots,x_n)$ *une suite dans* $\mathbf{A}$ *et* α_0, β_0 *dans* $\mathbf{B}$ *tels que* $\alpha_0\beta_0=1$. *Supposons que la suite soit singulière dans* $\mathbf{A}[\alpha_0]$ *et* $\mathbf{A}[\beta_0]$, *alors elle est singulière dans* $\mathbf{A}$.

▷ On applique le lemme précédent en spécialisant u et v en 1. Les polynômes $P(\alpha)$ et $\alpha^qQ(\alpha^{-1})$ ayant la racine commune α_0 dans $\mathbf{B}$, leur résultant est nul (lemme III-7.2). □

8.17. Corollaire. *Soient* a *et* b *des éléments réguliers d'un anneau quasi intègre* $\mathbf{A}$. *Alors* $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}=\sup\big(\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{a}{b}],\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{b}{a}]\big)$.

▷ Les inégalités $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{a}{b}]\leqslant\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$ et $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{b}{a}]\leqslant\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$ résultent de la définition de la dimension valuative.
Supposons enfin que $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{a}{b}]\leqslant n$ et $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{b}{a}]\leqslant n$ pour un $n\in\mathbb{N}$. Soit $(x_0,\dots,x_n)$ une suite dans $\mathbf{A}$. Elle est singulière dans $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{a}{b}]$ et $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[\frac{b}{a}]$, donc elle est singulière dans $\mathbf{A}$ par la proposition 8.16. □

8.18. Proposition. *Pour tout anneau* $\mathbf{A}$ *et tout* $n\geqslant 1$, *on a*

$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]\leqslant n+\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}.$$

▷ On doit montrer que si $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}\leqslant k$ alors $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_m]\leqslant k+m$. D'après le fait 7.10, il suffit de traiter le cas $\mathbf{A}$ quasi intègre.
On suppose d'abord $\mathbf{A}$ intègre. On reprend la preuve du théorème 8.8 et l'on utilise la méthode dynamique. Chaque fois que l'on a une disjonction du type «a divise b ou b divise a» on introduit les anneaux $\mathbf{C}[\frac{a}{b}]$ et $\mathbf{C}[\frac{b}{a}]$, où $\mathbf{C}$ est l'anneau «en cours». À chaque feuille de l'arbre ainsi construit on a un anneau $\mathbf{A}[u_1,\dots,u_\ell]\subseteq\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ dans lequel la suite considérée est singulière. On conclut par la proposition 8.16 que la suite est singulière dans l'anneau $\mathbf{A}$.
Dans le cas où $\mathbf{A}$ est quasi intègre on peut faire appel à la machinerie locale-globale élémentaire des anneaux quasi intègres. On peut aussi raisonner plus directement : la donnée de a et b produit la décomposition de «l'anneau en cours» $\mathbf{C}$ en un produit de 4 composantes. Dans trois d'entre elles, a ou b

est nul et tout est facile. Dans la quatrième, a et b sont réguliers et l'on est ramené au cas intègre. □

Comme corollaires on obtient les théorèmes suivants.

8.19. Théorème. *Pour un anneau* $\mathbf{A}$*, on a les équivalences suivantes.*

1. *Si* $n \geqslant 1$ *et* $k \geqslant -1$*, alors*
$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant k \iff \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant n+k.$$
Autrement dit, $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] = n + \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$.
2. *Si* $n \geqslant 0$*, alors*
$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant n \iff \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant 2n.$$
Dans le cas où $\mathbf{A}$ *est quasi intègre, c'est aussi équivalent à : pour tous* $x_1, \dots, x_n$ *dans* $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$*, on a* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[x_1,\dots,x_n] \leqslant n$.

▷ *1.* Démontré dans le fait 8.14 et la proposition 8.18.
2. Le cas $n = 0$ a déjà été noté. Voyons le cas $n \geqslant 1$. L'implication directe résulte du point *1* parce que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant \mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]$. L'implication réciproque est donnée (dans le cas intègre, mais ce n'est pas restrictif) dans la proposition 8.13. □

8.20. Théorème.

1. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique de dimension de Krull finie on a*
$$\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n] \leqslant n + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}.$$
avec égalité si $\mathbf{A}$ *est non trivial.*
2. $\mathsf{Vdim}\,\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n] = \mathsf{Kdim}\,\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n] = 1+n$.
3. *Tout anneau engendré par* n *éléments est de dimension valuative (donc de dimension de Krull)* $\leqslant 1+n$.
4. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau quasi intègre engendré par* n *éléments et* $\mathbf{B}$ *un anneau intermédiaire entre* $\mathbf{A}$ *et* $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$*. Alors* $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{B} \leqslant 1+n$.

▷ Le point *1* résulte du théorème plus général 8.21 et le point *2* est un cas particulier.
3. L'anneau $\mathbf{A}$ est un quotient de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n]$, donc $\mathbf{A}[Y_1,\dots,Y_{n+1}]$ est un quotient de $\mathbb{Z}[X_1,\dots,X_n][Y_1,\dots,Y_{n+1}]$ qui est de dimension de Krull $2n+2$ par le point *2*. Donc $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant n+1$ par le point *2* du théorème 8.19.
4. Conséquence du point *3* puisque $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant n+1$. □

8.21. Théorème. *Pour un anneau* $\mathbf{A}$ *de dimension de Krull* $\leqslant n$ *(*$n \geqslant 1$*) les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.
2. *Pour tout* $k \geqslant 1$, $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_k]) \leqslant k + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.

3. $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]) \leqslant n + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$

Si $\mathbf{A}$ *est non trivial, on peut remplacer* $\leqslant$ *par* $=$ *dans les points 2. et 3.*
Si $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$*, pour tout* $k \geqslant 1$*, on a l'égalité*

$$\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_k]) = \mathsf{Vdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_k]).$$

D Notons que l'on ne suppose pas connue de manière exacte la dimension de Krull de $\mathbf{A}$.
1 $\Rightarrow$ *2.* On fixe un $k \geqslant 1$ et l'on doit montrer que pour tout $m \geqslant -1$, on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant m \Rightarrow \mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_k]) \leqslant m+k$.
On a $\mathsf{Vdim}(\mathbf{A}) \leqslant m$, donc $\mathsf{Vdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_k]) \leqslant m+k$ d'après 8.18, donc $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_k]) \leqslant m+k$ car on a toujours $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Vdim}\,\mathbf{B}$.
2 $\Rightarrow$ *3.* C'est le cas particulier où $k = n$.
3 $\Rightarrow$ *1.* On suppose $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant m$ et on doit montrer $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A} \leqslant m$. Sans perte de généralité $0 \leqslant m \leqslant n$. Si $m = n$ on conclut par le point *2* du théorème 8.19. Si $n = m + r$, on a $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_n]) \leqslant n+m$ par hypothèse. Comme $(X_{m+1},\dots,X_n)$ est singulière de longueur r, le point *3* de la proposition 2.16 nous donne $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[X_1,\dots,X_m]) \leqslant n+m-r = 2m$ et on conclut par le point *2* du théorème 8.19.
Le dernier point est laissé à la lectrice. □

9. Lying over, Going up et Going down

Nous sommes intéressés dans cette section pour comprendre en termes constructifs certaines propriétés des anneaux commutatifs et de leurs morphismes qui sont introduites en mathématiques classiques via les notions de spectre de Zariski ou de morphisme spectral (correspondant à un homomorphisme d'anneaux).
Comme le but du présent ouvrage est de développer le cadre constructif nous n'allons pas démontrer que les définitions élémentaires que nous proposons sont équivalentes aux définitions données usuellement en mathématiques classiques.
En faisant fonctionner nos définitions constructives nous espérons obtenir des versions constructives de nombreux théorèmes de mathématiques classiques, réellement utilisables en pratique. En fait, c'est ce qui se passera de manière systématique dans les chapitres suivants.

Relèvement des idéaux premiers (lying over)

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ de treillis distributifs « possède la propriété de relèvement des idéaux premiers » lorsque l'homomorphisme dual $\mathsf{Spec}\,\alpha : \mathsf{Spec}\,\mathbf{V} \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est surjectif, autrement dit lorsque tout idéal premier de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est l'image réciproque d'un idéal premier de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{V}$. Pour abréger on dit aussi que le morphisme est « lying over ». Nous allons donner une définition constructivement pertinente

sans utiliser l'homomorphisme dual. Pour l'équivalence en mathématiques classiques avec la définition via les spectres, voir l'exercice 23.

9.1. Définition.

1. Un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ de treillis distributifs est dit *lying over* lorsque pour tous $a, b \in \mathbf{T}$ on a l'implication : $\alpha(a) \leqslant \alpha(b) \implies a \leqslant b$.
   Il revient au même de dire que α est injectif.
2. Un homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ d'anneaux commutatif est dit *lying over* lorsque l'homomorphisme $\mathsf{Zar}\,\varphi : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$ est injectif.

Remarque. On a aussi les formulations équivalentes suivantes pour les morphismes lying over.

— Pour les treillis distributifs :
  — Pour tout $b \in \mathbf{T}$, $\alpha^{-1}(\downarrow\alpha(b)) = \downarrow b$.
  — Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{T}$, $\alpha^{-1}\big(\mathcal{I}_{\mathbf{V}}(\alpha(\mathfrak{a}))\big) = \mathfrak{a}$.
— Pour les anneaux commutatifs :
  — Pour tous idéaux de type fini $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$ on a l'implication
  $$\varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \varphi(\mathfrak{b})\mathbf{B} \implies \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}).$$
  — Pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ on a $\varphi^{-1}(\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
  — Pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ on a $\varphi^{-1}\big(\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle)\big) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$. ∎

9.2. Fait. *Soit $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ une extension. Si $\mathbf{B}$ est entière ou fidèlement plate (sur $\mathbf{A}$), le morphisme d'inclusion $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est lying over.*

▷ Le premier cas est une simple reformulation du lemme VI-3.12 (lying over). Dans le deuxième cas, pour tout idéal de type fini $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, on a $\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{a}$.□

Montée (going up)

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ de treillis distributifs « possède la propriété de montée pour les chaînes d'idéaux premiers » lorsque l'on a la propriété suivante.
Si $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{V}$ et $\alpha^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$, toute chaîne $\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ d'idéaux premiers de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ avec $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}$ est l'image réciproque d'une chaîne $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ d'idéaux premiers de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{V}$ avec $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}$.

Naturellement on pourrait se limiter au cas $n = 2$. Voici les définitions constructives en termes de treillis distributifs et d'anneaux commutatifs.

9.3. Définition.

1. Un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ de treillis distributifs est dit *going up* lorsque pour tous $a, c \in \mathbf{T}$ et $y \in \mathbf{V}$ on a
   $$\alpha(a) \leqslant \alpha(c) \vee y \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in \mathbf{T}\ (a \leqslant c \vee x \quad \text{et} \quad \alpha(x) \leqslant y).$$
2. Un homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ d'anneaux commutatifs est dit *going up* lorsque l'homomorphisme $\mathsf{Zar}\,\varphi : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$ est going up.

Remarques. 1) Pour le point *1*, si $\mathfrak{a} = \alpha^{-1}(0_{\mathbf{V}})$ et $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$, alors α est going up si, et seulement si, $\alpha_1 : \mathbf{T}_1 \to \mathbf{V}$ est going up.
Pour le point *2*, si $\mathbf{T} = \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$, alors $\mathbf{T}_1 \simeq \mathsf{Zar}(\varphi(\mathbf{A}))$. On en déduit en posant $\mathbf{A}_1 = \varphi(\mathbf{A})$, que φ est going up si, et seulement si, $\varphi_1 : \mathbf{A}_1 \to \mathbf{B}$ est going up.
2) Pour les treillis distributifs, si $\alpha^{-1}(0) = 0$ et si α est going up, alors il est lying over. Pour les anneaux commutatifs, si $\operatorname{Ker}\varphi \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ et si φ est going up, alors il est lying over. ∎

9.4. Proposition. *Si* $\mathbf{B}$ *est une* $\mathbf{A}$*-algèbre entière, le morphisme* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *est going up.*

D'après la remarque précédente on peut supposer $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. On sait alors que l'homomorphisme est lying over, i.e. que $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$ est injectif, donc on identifie $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ à un sous-treillis de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$. On doit montrer qu'étant donnés $a_1, \ldots, a_n, c_1, \ldots, c_q$ dans $\mathbf{A}$ et $y_1, \ldots, y_p$ dans $\mathbf{B}$ vérifiant

$$\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{a}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{c}) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{y}),$$

on peut trouver une suite $(\underline{x})$ dans $\mathbf{A}$ telle que

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{c}) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{x}) \quad \text{et} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{x}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{y}).$$

Soit $\mathfrak{b} = \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{y})$, $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} \cap \mathbf{A}$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}/\mathfrak{b}$ et $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$. On considère l'extension entière $\mathbf{B}_1 \supseteq \mathbf{A}_1$. L'hypothèse est maintenant que $\mathrm{D}_{\mathbf{B}_1}(\underline{a}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{B}_1}(\underline{c})$. Par le lying over on sait que cela implique que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}_1}(\underline{a}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}_1}(\underline{c})$. Cela signifie que pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$ on a un $x_i \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_i) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{c}) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_i)$. On a donc réalisé le but recherché avec $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$. □

Descente (going down)

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ de treillis distributifs « possède la propriété de descente pour les chaînes d'idéaux premiers » lorsque l'on a la propriété suivante.
Si $\mathfrak{q} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{V}$ *et* $\alpha^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$*, toute chaîne* $\mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$ *d'idéaux premiers de* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ *avec* $\mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ *est l'image réciproque d'une chaîne* $\mathfrak{q}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{q}_n$ *d'idéaux premiers de* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{V}$ *avec* $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}$.

Naturellement on pourrait se limiter au cas $n = 2$.

9.5. Définition.

1. Un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{V}$ de treillis distributifs est dit *going down* lorsque le même homomorphisme pour les treillis opposés $\mathbf{T}^\circ$ et $\mathbf{V}^\circ$ est going up. Autrement dit pour tous $a, c \in \mathbf{T}$ et $y \in \mathbf{V}$ on a
$$\alpha(a) \geqslant \alpha(c) \wedge y \quad \Longrightarrow \quad \exists x \in \mathbf{T}\ (a \geqslant c \wedge x \quad \text{et} \quad \alpha(x) \geqslant y).$$
2. Un homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ d'anneaux commutatifs est dit *going down* lorsque l'homomorphisme $\mathsf{Zar}\,\varphi : \mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$ est going down.

Remarques. 1) La définition *1* revient à dire que l'image par α de l'idéal transporteur $(a : c)_{\mathbf{T}}$ engendre l'idéal $(\alpha(a) : \alpha(c))\big._{\mathbf{V}}$. Si donc les treillis distributifs sont des algèbres de Heyting cela signifie que l'homomorphisme de treillis est aussi un homomorphisme d'algèbres de Heyting.
2) Mêmes remarques que pour le going up.
Si $\mathfrak{f} = \alpha^{-1}(1_{\mathbf{V}})$ et $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}/(\mathfrak{f} = 1)$, alors α est going down si, et seulement si, $\alpha_2 : \mathbf{T}_2 \to \mathbf{V}$ est going down.
Ceci donne pour les anneaux commutatifs : si $S = \varphi^{-1}(\mathbf{B}^\times)$ et $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_S$, alors φ est going down si, et seulement si, $\varphi_2 : \mathbf{A}_2 \to \mathbf{B}$ est going down.
Pour les treillis distributifs, si $\alpha^{-1}(1) = 1$ et α est going down, alors il est lying over. Pour les anneaux commutatifs, si $\varphi^{-1}(\mathbf{B}^\times) \subseteq \mathbf{A}^\times$ et φ est going down, alors il est lying over. ∎

9.6. Théorème. *Si un homomorphisme $\alpha : X \to Y$ (de treillis distributifs ou d'anneaux commutatifs) est lying over et going up, ou s'il est lying over et going down, on a* $\mathsf{Kdim}\, X \leqslant \mathsf{Kdim}\, Y$.

Remarque. C'est par exemple le cas lorsque l'anneau $\mathbf{B}$ est une extension entière de $\mathbf{A}$. On retrouve ainsi la proposition 4.1. Pour les extensions plates, voir la proposition 9.8. ∎

▷ Il suffit de traiter le cas avec going up avec les treillis.
On suppose $\mathsf{Kdim}\, Y \leqslant n$ et l'on considère une suite $(a_0, \ldots, a_n)$ dans X. On a dans Y une suite $(y_0, \ldots, y_n)$ complémentaire de $\alpha(\underline{a})$:

$$\alpha(a_0) \wedge y_0 \leqslant 0,\ \ldots,\ \alpha(a_n) \wedge y_n \leqslant \alpha(a_{n-1}) \vee y_{n-1},\ 1 \leqslant \alpha(a_n) \vee y_n.$$

On va construire une suite $(x_0, \ldots, x_n)$ complémentaire de $(\underline{a})$ dans X. À l'étage n, par going up, il existe $x_n \in X$ tel que

$$1 \leqslant a_n \vee x_n \text{ et } \alpha(x_n) \leqslant y_n.$$

Ceci donne à l'étage $n-1$ l'inégalité : $\alpha(a_n \wedge x_n) \leqslant \alpha(a_{n-1}) \vee y_{n-1}$.
Par going up il existe $x_{n-1} \in X$ tel que

$$a_n \wedge x_n \leqslant a_{n-1} \vee x_{n-1} \text{ et } \alpha(x_{n-1}) \leqslant y_{n-1}.$$

On continue de la même manière jusqu'à l'étage 0, où cette fois-ci il faut utiliser le lying over. □

9.7. Lemme. *Pour qu'un homomorphisme d'anneaux $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ soit going down il faut et suffit que pour tous c, a_1, …, $a_q \in \mathbf{A}$ et $y \in \mathbf{B}$ tels que $\varphi(c)y \in \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\varphi(\underline{a}))$, il existe des éléments x_1, …, $x_m \in \mathbf{A}$ tels que :*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{x}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) \quad \textit{et} \quad \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(y) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{B}}\big(\varphi(\underline{x})\big).$$

▷ Nous avons remplacé dans la définition un élément arbitraire $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{c})$ de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ et un élément arbitraire $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{y})$ de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$ par des générateurs $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c)$ et $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(y)$. Comme les générateurs $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c)$ (resp. $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(y)$) engendrent $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ (resp. $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$) par sups finis, les règles de distributivité impliquent que la restriction à ces générateurs est suffisante (calculs laissés au lecteur). □

9.8. Proposition. *Un homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ d'anneaux commutatifs est going down dans les deux cas suivants.*

1. $\mathbf{B}$ *est une* $\mathbf{A}$*-algèbre plate.*
2. $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ *est intègre et entier sur* $\mathbf{A}$*, et* $\mathbf{A}$ *est intégralement clos.*

▷ On se place dans les hypothèses du lemme 9.7, avec une égalité dans $\mathbf{B}$:

$$\varphi(c)^\ell y^\ell + \sum\nolimits_{i=1}^{q} b_i \varphi(a_i) = 0 \qquad (*)$$

1. On regarde $(*)$ comme une relation de dépendance $\mathbf{B}$-linéaire entre les éléments c^ℓ, a_1, …, a_q. On exprime qu'elle est une combinaison $\mathbf{B}$-linéaire de relations de dépendance $\mathbf{A}$-linéaires.
Ces relations s'écrivent $x_j c^\ell + \sum_{i=1}^{q} u_{j,i} a_i = 0$ pour $j \in [\![1..m]\!]$, avec les x_j et les $u_{j,i}$ dans $\mathbf{A}$. D'où $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(cx_j) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$, et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{x}) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$. Enfin, y^ℓ est une combinaison $\mathbf{B}$-linéaire des $\varphi(x_j)$, d'où $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(y) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{B}}\big(\varphi(\underline{x})\big)$.
2. D'après $(*)$, $(cy)^\ell \in \langle \underline{a} \rangle\, \mathbf{B}$. Par le lying over XII-2.8, $(cy)^\ell$, et a fortiori cy, est entier sur $\langle \underline{a} \rangle_{\mathbf{A}}$. On écrit une relation de dépendance intégrale pour cy sur l'idéal $\langle \underline{a} \rangle_{\mathbf{A}}$ sous la forme $f(cy) = 0$ avec

$$f(X) = X^k + \sum\nolimits_{j=1}^{k} \mu_j X^{k-j} \qquad \text{où } \mu_j \in \langle \underline{a} \rangle_{\mathbf{A}}^{\,j}.$$

Par ailleurs, y annule un polynôme unitaire $g(X) \in \mathbf{A}[X]$. Considérons dans $(\mathrm{Frac}\,\mathbf{A})[X]$ le pgcd unitaire $h(X) = X^m + x_1 X^{m-1} + \cdots + x_m$ des deux polynômes $f(cX)$ et $g(X)$. Puisque $\mathbf{A}$ est intégralement clos, le théorème de Kronecker dit que $x_j \in \mathbf{A}$, et l'égalité $h(y) = 0$ donne $y \in \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(\underline{x})$.
Il reste à voir que $cx_j \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$ pour $j \in [\![1..m]\!]$. En remplaçant formellement X par Y/c, on obtient que le polynôme

$$h_c(Y) = Y^m + cx_1 Y^{m-1} + \cdots + c^m x_m$$

divise $f(Y)$ dans $(\mathrm{Frac}\,\mathbf{A})[Y]$. Le théorème de Kronecker (sous la forme du lemme XII-2.7) nous dit que $cx_j \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mu_1, \ldots, \mu_k)$.
Enfin, comme $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mu_1, \ldots, \mu_k) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$, on a bien $cx_j \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\underline{a})$. □

Incomparabilité

En mathématiques classiques on dit qu'un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ de treillis distributifs « possède la propriété d'incomparabilité » lorsque les fibres de l'homomorphisme dual $\mathsf{Spec}\,\alpha : \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}' \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ sont constituées d'éléments deux à deux incomparables. Autrement dit, pour $\mathfrak{q}_1$ et $\mathfrak{q}_2$ dans $\mathsf{Spec}\,\mathbf{T}'$, si $\alpha^{-1}(\mathfrak{q}_1) = \alpha^{-1}(\mathfrak{q}_2)$ et $\mathfrak{q}_1 \subseteq \mathfrak{q}_2$, alors $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{q}_2$.
La définition constructive correspondante est que le morphisme $\mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ est zéro-dimensionnel.
Nous avons déjà donné la définition de la dimension d'un morphisme dans le cas des anneaux commutatifs. Une définition analogue peut être fournie pour les treillis distributifs, mais nous n'en aurons pas l'usage.
La principale conséquence de la situation d'incomparabilité pour un homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est le fait que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$. Ceci est un cas particulier du théorème 7.13 avec l'important théorème 7.16.

Exercices et problèmes

Exercice 1. Il est recommandé de faire les démonstrations non données, esquissées, laissées à la lectrice, etc... On pourra notamment traiter les cas suivants.

— Démontrer la proposition 3.1.
— Démontrer ce qui est affirmé dans les exemples page 771.
— Démontrer le fait 6.3.
— Démontrer les faits 6.5 et 6.6.
— Vérifier les détails dans la démonstration de la proposition 6.9.
— Démontrer le lemme 7.7 en vous inspirant de la preuve du lemme XI-4.22.
— Vérifier les détails dans la démonstration du lemme 9.7.

Exercice 2. Si $\mathfrak{f}$ est un filtre de l'anneau $\mathbf{A}$, définissons son *complément* $\widetilde{\mathfrak{f}}$ comme étant $\{\, x \in \mathbf{A} \mid x \in \mathfrak{f} \Rightarrow 0 \in \mathfrak{f} \,\}$. En particulier, on a toujours $0 \in \widetilde{\mathfrak{f}}$, même si $0 \in \mathfrak{f}$. De même, si $\mathfrak{a}$ est un idéal de l'anneau $\mathbf{A}$, définissons son *complément* $\bar{\mathfrak{a}}$ comme étant $\{\, x \in \mathbf{A} \mid x \in \mathfrak{a} \Rightarrow 1 \in \mathfrak{a} \,\}$. Montrer que si $\mathfrak{f}$ est filtre premier son complément est un idéal. Si en outre $\mathfrak{f}$ est détachable, alors $\mathfrak{a}$ est un idéal premier détachable. Montrer aussi les affirmations duales.

Exercice 3. *1.* Si la suite $(X_1, \ldots, X_n)$ est singulière dans l'anneau $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$, alors $\mathbf{A}$ est trivial.
2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Démontrer que si $\mathbf{A}[X]$ est un anneau de dimension inférieure ou égale à k alors $\mathbf{A}$ est de dimension inférieure ou égale à $k-1$. Retrouver ainsi le point *1.*

Exercice 4. Démontrer que si $\mathbf{K}$ est un anneau de dimension de Krull exactement égale à 0 alors, $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ est de dimension de Krull exactement égale à n.

Exercice 5. *(Partition de l'unité associée à un recouvrement ouvert du spectre)* Soit $\mathbf{A}$ un anneau et $(U_i)_i$ un recouvrement ouvert de $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$. Montrer en mathématiques classiques qu'il existe une famille $(f_i)_i$ d'éléments de $\mathbf{A}$ avec $f_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices i et

$$(\star) \qquad \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(f_i) \subseteq U_i, \qquad \sum_i f_i = 1.$$

Remarque : ainsi, on remplace tout recouvrement ouvert de $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$ par un système fini d'éléments de $\mathbf{A}$ qui « recouvrent » $\mathbf{A}$ (puisque leur somme vaut 1), sans « perdre d'information » puisque $(\star)$ confirme de nouveau que $(U_i)_i$ est un recouvrement.

Exercice 6. Pour une algèbre de présentation finie $\mathbf{A}$ sur un corps discret non trivial appelons « dimension de Noether de $\mathbf{A}$ » le nombre de variables algébriquement indépendantes après une mise un position de Noether.
1. Soit $f \in \mathbf{A} \supseteq \mathbf{K}[Y_1, \ldots, Y_r] = \mathbf{K}[\underline{Y}]$ ($\mathbf{A}$ entière sur $\mathbf{K}[\underline{Y}]$).
1a. Montrer que l'idéal bord de f contient un $g \in \mathbf{K}[\underline{Y}] \setminus \{0\}$.
1b. En déduire que l'anneau bord de Krull $\mathbf{A}\big/\mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(f)$ est un quotient d'une algèbre de présentation finie dont la dimension de Noether est $\leqslant r-1$.
2. En déduire une démonstration directe de l'égalité des dimensions de Krull et de Noether des algèbres de présentation finie sur un corps discret non trivial.

Exercice 7. *1.* Soient $\mathbf{K}$ un corps discret non trivial, $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n]$ et $f \in \mathbf{K}[\underline{X}] \setminus \{0\}$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{K}[\underline{X}][1/f] = n$.
2. Plus généralement, donner une condition suffisante sur le polynôme $\delta \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ pour que l'on ait $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}[\underline{X}][1/\delta]) = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$ (voir la démonstration du lemme X-4.6).

Exercice 8. *(Caractérisation des anneaux de Prüfer intègres de dimension $\leqslant 1$)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau intégralement clos.
1. Montrer que si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X] \leqslant 2$, alors $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer, en montrant que tout élément de $\mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$.
2. Montrer que $\mathbf{A}$ est un anneau de Prüfer de dimension inférieure ou égale à 1 si, et seulement si, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[X] \leqslant 2$.
3. Peut-on généraliser à un anneau normal ?

Exercice 9. *(Une propriété de multiplicativité des idéaux bord)*
1. Pour $a, b \in \mathbf{A}$ et deux suites $(\underline{x})$, $(\underline{y})$ d'éléments de $\mathbf{A}$, montrer que

$$\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}, a, \underline{y})\, \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}, b, \underline{y}) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}, ab, \underline{y}).$$

2. En déduire que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$ contient le produit $\prod_{\underline{c}} \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{c})$, dans lequel la suite $(\underline{c}) = (c_1, \ldots, c_n)$ parcourt l'ensemble des 2^n suites telles que $c_i = a_i$ ou $c_i = b_i$ pour chaque i.

Exercice 10. *(Idéaux bord et relations algébriques)*
1. On considère l'ordre lexicographique sur $\mathbb{N}^n$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Vérifier, pour $\beta > \alpha$, que

$$\underline{X}^{\beta} \in \left\langle X_1^{1+\alpha_1},\ X_1^{\alpha_1} X_2^{1+\alpha_2},\ X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} X_3^{1+\alpha_3},\ \cdots,\ X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} X_n^{1+\alpha_n} \right\rangle.$$

2. Soit $\mathbf{A}$ un anneau réduit, $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ une suite dans $\mathbf{A}$ et $P = \sum_{\beta} a_\beta \underline{X}^{\beta}$ dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$, qui annule $\underline{x}$.

a. Montrer, pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, que $a_\alpha \prod_{\beta<\alpha} \mathrm{Ann}(a_\beta) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(\underline{x})$.

b. En déduire :

$$\prod_{\beta} \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(a_\beta) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(\underline{x}) + \prod_{\beta} \mathrm{Ann}(a_\beta)$$

3. Soient une algèbre $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ avec $\mathbf{B}$ réduit et $x \in \mathbf{B}$ primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$: $\sum_{i=0}^{d} a_i x^i = 0$ avec $a_i \in \mathbf{A}$ et $1 \in \langle a_i, i \in [\![0..d]\!] \rangle$. Déduire de la question précédente que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(x)$ contient l'image de $\prod_{i=0}^{d} \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_i)$.
4. En déduire une nouvelle preuve du théorème 7.16 : si tout élément de $\mathbf{B}$ est primitivement algébrique sur $\mathbf{A}$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.

Exercice 11. *(Extension entière de l'idéal bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}$)*
Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ une extension entière d'anneaux.
1. Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{A}$, $\mathfrak{b}$ un idéal de $\mathbf{B}$, montrer que

$$\mathbf{A} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathbf{B}) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a} + \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}).$$

2. En déduire, pour $a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{A}$:

$$\mathbf{A} \cap \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_0, \ldots, a_d) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_0, \ldots, a_d)\big).$$

3. Donner une nouvelle démonstration du fait que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$, cf. la proposition 4.1 et le théorème 9.6. Comparer à l'exercice 12.

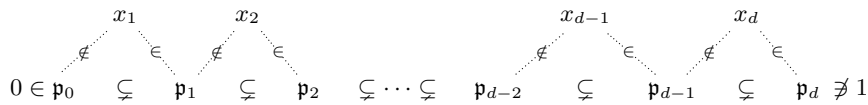
Exercice 12. *(Extension entière du monoïde bord $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}$)*
Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ une extension entière d'anneaux.
1. Soient $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$ et $S \subseteq \mathbf{A}$ un monoïde. Montrer que
$$S + \mathfrak{a}\mathbf{B} \subseteq (S + \mathfrak{a})^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}}.$$
2. En déduire, pour $a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{A}$:
$$\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_0, \ldots, a_d) \subseteq \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_0, \ldots, a_d)^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}}.$$
3. Donner une nouvelle démonstration du fait que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$.

Exercice 13. Soit $\mathbf{K}$ un corps discret non trivial. On note $(\underline{X})$ pour $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(\underline{Y})$ pour $(Y_1, \ldots, Y_m)$. On note $\mathbf{A} = \mathbf{K}(\underline{X}) \otimes_{\mathbf{K}} \mathbf{K}(\underline{Y})$. On se propose de déterminer la dimension de Krull de $\mathbf{A}$.

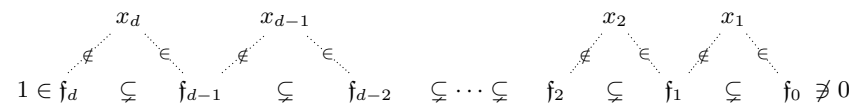
1. $\mathbf{A}$ est la localisation de $\mathbf{K}[\underline{X}, \underline{Y}]$ en $S = (\mathbf{K}[\underline{X}])^*(\mathbf{K}[\underline{Y}])^*$. Il est aussi une localisation de $\mathbf{K}(\underline{X})[\underline{Y}]$ et de $\mathbf{K}(\underline{Y})[\underline{X}]$. En conséquence $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \inf(m, n)$.
2. Supposons $n \leqslant m$. Montrer que la suite $(X_1 - Y_1, \ldots, X_n - Y_n)$ est une suite régulière dans $\mathbf{A}$.

Conclure que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \inf(n, m)$.

Exercice 14. *(Idéaux premiers, bords et dualité)*
Soit $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \mathfrak{p}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathfrak{p}_{d-1} \subsetneq \mathfrak{p}_d \subsetneq \mathbf{A}$ une chaîne d'idéaux premiers détachables avec $x_1 \in \mathfrak{p}_1 \setminus \mathfrak{p}_0$, $x_2 \in \mathfrak{p}_2 \setminus \mathfrak{p}_1$, …, $x_d \in \mathfrak{p}_d \setminus \mathfrak{p}_{d-1}$, selon le schéma suivant :



1. Montrer que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_i) \subseteq \mathfrak{p}_i$ pour $i \in [\![0..d]\!]$. Donc $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_d) \subseteq \mathfrak{p}_d$. De plus, si $x_{d+1} \notin \mathfrak{p}_d$, alors $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1}) \subseteq \mathfrak{p}_d + \mathbf{A}x_{d+1}$. En conséquence, si $x_{d+1} \notin \mathfrak{p}_d$ et $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_d, x_{d+1})$, alors $1 \in \mathfrak{p}_d + \mathbf{A}x_{d+1}$.
2. On considère les filtres premiers complémentaires $\mathfrak{f}_i = \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}_i$ pour $i \in [\![0..d]\!]$. On a le schéma dual du précédent :



Montrer que $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}(x_{i+1}, \ldots, x_d) \subseteq \mathfrak{f}_i$ pour $i \in [\![0..d]\!]$. Donc $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_d) \subseteq \mathfrak{f}_0$. De plus, si $x_0 \notin \mathfrak{f}_0$, i.e. si $x_0 \in \mathfrak{p}_0$, alors $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}(x_0, x_1, \ldots, x_d) \subseteq x_0^{\mathbb{N}}\mathfrak{f}_0$. En conséquence, si $x_0 \notin \mathfrak{f}_0$ et $0 \in \mathcal{S}^{\mathrm{K}}(x_0, x_1, \ldots, x_d)$, alors $0 \in x_0^{\mathbb{N}}\mathfrak{f}_0$.
NB : $\mathfrak{p}_d + \mathbf{A}x_{d+1}$ est l'idéal engendré par $\mathfrak{p}_d$ et x_{d+1}, dualement $x_0^{\mathbb{N}}\mathfrak{f}_0$ est le monoïde engendré par $\mathfrak{f}_0$ et x_0.

Exercice 15. *(Élimination et idéaux bord dans les anneaux de polynômes)*
Voici une démonstration détaillée de l'inégalité $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[T] \leqslant 1 + 2\,\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ (section 7), avec quelques précisions. Sans perte de généralité $\mathbf{A}$ est supposé réduit.
1. Soit $f \in \mathbf{A}[T]$ un polynôme tel que l'annulateur de chaque coefficient soit engendré par un idempotent. Pour $g \in \mathbf{A}[T]$, définir $R \in \mathbf{A}[X, Y]$ tel que $\mathrm{Ann}(R) = 0$ et $R(f, g) = 0$: noter que le polynôme $\mathrm{Res}_T\big(f(T) - X, Y - g(T)\big)$ résout la question lorsque f est unitaire de degré $\geqslant 1$ (pourquoi ?), et utiliser le lemme IV-6.4.
2. En utilisant l'exercice 10, montrer que si $R = \sum_{i,j} r_{ij} X^i Y^j$, on a :

$$\prod_{i,j} \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(r_{ij}) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(f,g).$$

3. En utilisant un anneau de type $\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}}$ (lemme 7.9 et exercice 18), retrouver l'inégalité $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[T] \leqslant 1 + 2\,\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.

4. Montrer le résultat plus précis suivant : pour un anneau réduit $\mathbf{A}$ et $f,\, g \in \mathbf{A}[T]$, l'idéal $\mathrm{D}_{\mathbf{A}[T]}\left(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(f,g)\right)$ contient un produit fini d'idéaux bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a)$, $a \in \mathbf{A}$.

5. Plus généralement : si $\mathbf{A}[\underline{T}] = \mathbf{A}[T_1, \ldots, T_r]$ et $f_0, \ldots, f_r \in \mathbf{A}[\underline{T}]$, alors la racine de l'idéal bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[\underline{T}]}(f_0, \ldots, f_r)$ contient un produit fini d'idéaux bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_i)$, avec les $a_i \in \mathbf{A}$. On en déduit de nouveau que $1+\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[\underline{T}] \leqslant (1+r)(1+\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A})$.

Exercice 16. *(Idéaux bord de polynômes)* Suite de l'exercice 15.

1. Soient $x,\, y \in \mathbf{B}$ et (z_j) une famille finie dans $\mathbf{B}$ vérifiant $\prod_j \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(z_j) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x,y)$. Montrer que pour $(b_1, \ldots, b_n)$ dans $\mathbf{B}$, $\prod_j \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(z_j, b_1, \ldots, b_n) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x, y, b_1, \ldots, b_n)$.

2. Soit T une indéterminée sur un anneau $\mathbf{A}$.

a. Pour $(a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbf{A}$, vérifier que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)\mathbf{A}[T] = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(a_1, \ldots, a_n)$.

b. Montrer que l'idéal bord de $2d$ polynômes de $\mathbf{A}[T]$ contient, à radical près, un produit d'idéaux bord de d éléments de $\mathbf{A}$.
En conséquence $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < d \Rightarrow \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[T] < 2d$: ceci est une autre forme de l'inégalité $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[T] \leqslant 1 + 2\,\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.

3. Comment peut-on généraliser le premier point ? le second ?

Exercice 17. *(Une autre définition de la dimension de Krull des treillis distributifs, cf. [80, Español])* Dans un ensemble ordonné, une suite $(x_0, \ldots, x_n)$ est appelée une *chaîne de longueur* n si l'on a $x_0 \leqslant x_1 \leqslant \cdots \leqslant x_n$. Dans un treillis distributif deux chaînes $(x_0, \ldots, x_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$ sont dites *liées*, s'il existe une chaîne $(c_1, \ldots, c_n)$ avec

$$\left.\begin{array}{rcccl} x_0 \wedge b_0 &=& 0 & & \\ x_1 \wedge b_1 &=& c_1 &=& x_0 \vee b_0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n \wedge b_n &=& c_n &=& x_{n-1} \vee b_{n-1} \\ & & 1 &=& x_n \vee b_n \end{array}\right\} \tag{25}$$

On pourra comparer avec la définition 6.1 pour les suites complémentaires. Noter aussi que si des suites $(x_0, \ldots, x_n)$, $(b_0, \ldots, b_n)$ et $(c_1, \ldots, c_n)$ satisfont les équations (25), alors ce sont des chaînes.

1. Si dans un treillis distributif on a $x \leqslant y$ et $x \vee a \geqslant y \wedge b$, alors on peut expliciter a' et b' tels que

$$x \wedge a' = x \wedge a, \qquad y \vee b' = y \vee b, \qquad x \vee a' = y \wedge b'.$$

Donc à partir d'une configuration de gauche (en supposant toujours $x \leqslant y$), on peut construire une configuration de droite :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x \wedge a &=& p \\ x \vee a &\geqslant& y \wedge b \\ q &=& y \vee b \end{array}\right. \qquad\qquad \left\{\begin{array}{rcl} x \wedge a' &=& p \\ x \vee a' &=& y \wedge b' \\ q &=& y \vee b' \end{array}\right.$$

2. Dans un treillis distributif une chaîne $(x_0, \ldots, x_n)$ possède une suite complémentaire si, et seulement si, il existe une chaîne qui lui est liée.

3. Pour un treillis distributif $\mathbf{T}$ les propriétés suivantes sont équivalentes.

a. $\mathbf{T}$ est de dimension de Krull $\leqslant n$.

b. Toute chaîne de longueur n admet une suite complémentaire.

c. Toute chaîne de longueur n admet une chaîne qui lui est liée.

Exercice 18. *(Quelques précisions sur les étages finis de $\mathbf{A}_{\min}$)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau réduit. Pour $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ idéaux de $\mathbf{A}$ on note $\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b} = (\mathfrak{a}^\perp\mathfrak{b})^\perp = (\mathfrak{a}^{\perp\perp} : \mathfrak{b})$.
1. Vérifier que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}\diamond\mathfrak{b}$ est un anneau réduit dans lequel $\mathfrak{a}$ est nul et $\mathfrak{b}$ fidèle.
2. Vérifier que $(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_1\diamond\mathfrak{b}_1)\big/(\overline{\mathfrak{a}_2}\diamond\overline{\mathfrak{b}_2}) \simeq \mathbf{A}/\mathfrak{a}_3\diamond\mathfrak{b}_3$ avec $\mathfrak{a}_3 = \mathfrak{a}_1+\mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2$.
3. Soit $(\underline{a}) = (a_1,\dots,a_n)$ dans $\mathbf{A}$. Dans le lemme 7.9 on a défini (pour $I\in\mathcal{P}_n$) :
$$\mathfrak{a}_I = \langle a_i, i\in I\rangle\diamond\textstyle\prod_{j\notin I} a_j \qquad \mathbf{A}_{\{\underline{a}\}} = \prod_{I\in\mathcal{P}_n}\mathbf{A}/\mathfrak{a}_I\ .$$
Ainsi, modulo $\mathfrak{a}_I$, a_i est nul pour $i\in I$ et régulier pour $i\notin I$. On notera ε_i l'idempotent de $\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}}$ dont la coordonnée dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}_I$ est 1 si $i\in I$ et 0 si $i\notin I$.

a. Vérifier que l'intersection (et a fortiori le produit) des idéaux $\mathfrak{a}_I$ est nulle ; en conséquence, le morphisme $\mathbf{A}\to\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}}$ est injectif et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}}$.

b. Vérifier que $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}}}(a_i) = \langle\varepsilon_i\rangle_{\mathbf{A}_{\{\underline{a}\}}}$.

Exercice 19. *(Quelques précisions sur $\mathbf{A}_{\min}$)*
Voir le problème XI-4 pour ce qui concerne $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$.
Un homomorphisme d'anneaux $\mathbf{A}\to\mathbf{B}$ est dit *régulier* lorsque l'image de tout élément régulier est un élément régulier.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau réduit.

1. Soit $\theta : \mathbf{A}\to\mathbf{B}$ un homomorphisme régulier et $a\in\mathbf{A}$. Si $a^\perp$ est engendré par un idempotent e, alors $\theta(a)^\perp$ est engendré par l'idempotent $\theta(e)$.
   En particulier, comme déjà noté dans le problème XI-4, un homomorphisme entre anneaux quasi intègres est quasi intègre si, et seulement si, il est régulier.
2. L'homomorphisme naturel $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}\to\mathbf{A}_{\min}$ est régulier et surjectif.
3. Pour $a\in\mathbf{A}$, l'homomorphisme naturel $\psi_a : \mathbf{A}\to\mathbf{A}_{\{a\}}$ est régulier.
4. L'homomorphisme naturel $\psi : \mathbf{A}\to\mathbf{A}_{\min}$ est régulier et l'homomorphisme naturel $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{\mathrm{qi}}$ n'est pas régulier.

Exercice 20. Expliciter la démonstration du lemme 8.12 en termes de suites singulières.

Exercice 21. *(Une généralisation du théorème 8.19)*
Pour $\mathbf{A}\subseteq\mathbf{B}$ et $\ell\in\mathbb{N}$, si pour toute suite $(\underline{x}) = (x_0,\dots,x_\ell)$ dans $\mathbf{B}$, on a un polynôme primitif de $\mathbf{A}[\underline{X}]$ qui annule $(\underline{x})$, alors $\mathsf{Vdim}\,\mathbf{B}\leqslant\ell+\mathsf{Vdim}\,\mathbf{A}$.

Exercice 22. *(Morphisme lying over)*
Démontrer ce qui est affirmé dans la remarque qui suit la définition du lying over page 805.

Exercice 23. *(Morphisme lying over, 2)*
Dans la catégorie des ensembles ordonnés finis, il est clair qu'un morphisme est surjectif si, et seulement si, c'est un épimorphisme. Cela correspond donc pour les treillis distributifs duaux à un monomorphisme, ce qui signifie ici un homomorphisme injectif, c'est-à-dire lying over.

Donner une preuve en mathématiques classiques de l'équivalence, pour un homomorphisme $\alpha : \mathbf{T} \to \mathbf{T}'$ de treillis distributifs, entre : α est lying over d'une part, et $\mathsf{Spec}\,\alpha : \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}' \to \mathsf{Spec}\,\mathbf{T}$ est surjectif, d'autre part.
Idée. Utiliser le *lemme de Krull*, qui se démontre par une zornette : *si dans un treillis distributif on a un idéal* $\mathfrak{a}$ *et un filtre* $\mathfrak{f}$ *qui ne se coupent pas, il existe un idéal premier contenant* $\mathfrak{a}$ *dont le complémentaire est un filtre contenant* $\mathfrak{f}$. Voir également la remarque qui suit le lemme VI-3.12.

Exercice 24. *(Morphisme going up, going down)*
Démontrer ce qui est affirmé dans la remarque qui suit la définition du going up page 805 (utiliser la description du treillis quotient $\mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$ donnée page 636). Même chose avec le going down.

Problème 1. *(Annulateur d'un idéal dans un anneau noethérien réduit)*
On considère un anneau réduit $\mathbf{A}$ tel que toute suite croissante d'idéaux de la forme $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x)$ possède deux termes consécutifs égaux.
1. Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$ tel que l'on sache tester pour $y \in \mathbf{A}$ si $\mathrm{Ann}(y)\mathfrak{a} = 0$ (et en cas de réponse négative fournir le certificat correspondant).
1a. Si un $x \in \mathfrak{a}$ vérifie $\mathrm{Ann}(x)\mathfrak{a} \neq 0$, déterminer un $x' \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x) \subsetneq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x')$.
1b. En déduire l'existence d'un $x \in \mathfrak{a}$ tel que $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}(\mathfrak{a})$.
2. On suppose de plus que tout élément régulier de $\mathbf{A}$ est inversible, et que pour tous y, z on sait tester si $\mathrm{Ann}(y)\mathrm{Ann}(z) = 0$. Montrer que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$.
3. Soit $\mathbf{B}$ un anneau noethérien cohérent fortement discret. Montrer que $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{red}})$ est un anneau zéro-dimensionnel.
NB. En mathématiques classiques $\mathbf{B}$ admet un nombre fini d'idéaux premiers minimaux $\mathfrak{p}_1$, …, $\mathfrak{p}_k$ et $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{red}})$ est isomorphe au produit fini de corps correspondant : $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}_1) \times \cdots \times \mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}_k)$. En général cependant, on n'a pas accès aux $\mathfrak{p}_i$ de façon algorithmique.

Problème 2. *(Lying over, going up, going down, exemples)*
1. Soit une inclusion d'anneaux $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ telle que, en tant que $\mathbf{A}$-module, $\mathbf{A}$ soit facteur direct dans $\mathbf{B}$. Montrer que $\mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A} = \mathfrak{a}$ pour tout idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$. En particulier, $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ est lying over.
2. Soit G un groupe fini agissant sur un anneau $\mathbf{B}$ avec $|G|\,1_{\mathbf{B}}$ inversible dans $\mathbf{B}$. On note $\mathbf{A} = \mathbf{B}^G$ le sous-anneau des points fixes et l'on définit l'*opérateur de Reynolds* $R_G : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$:

$$R_G(b) = \tfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(b).$$

Vérifier que R_G est un $\mathbf{A}$-projecteur d'image $\mathbf{A}$; en particulier, $\mathbf{A}$ est facteur direct (comme $\mathbf{A}$-module) dans $\mathbf{B}$.
3. Soit $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ avec $\mathbf{A}$ facteur direct (comme $\mathbf{A}$-module) dans $\mathbf{B}$. Fournir une preuve directe de $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B}$.
4. Soient $\mathbf{k}$ un corps discret non trivial et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[XZ, YZ] \subset \mathbf{B} = \mathbf{k}[X, Y, Z]$. Alors $\mathbf{A}$ est facteur direct dans $\mathbf{B}$, donc $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ est lying over. Mais $\mathbf{A} \hookrightarrow \mathbf{B}$ n'est ni going up ni going down.

Problème 3. *(Chaînes potentielles d'idéaux premiers)*
Sur un anneau $\mathbf{A}$ on appelle *chaîne potentielle d'idéaux premiers*, ou encore *chaîne potentielle* une liste $[(I_0, U_0), \ldots, (I_n, U_n)]$, où les I_j et U_j sont des parties de $\mathbf{A}$ (i.e., chaque (I_j, U_j) est un idéal premier potentiel de $\mathbf{A}$). Une chaîne potentielle est dite *finie* si les I_j et U_j sont des parties finiment énumérées.
Une chaîne potentielle est dite *complète* si les conditions suivantes sont satisfaites :

— les I_j sont des idéaux et les U_j sont des monoïdes,
— $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \cdots \subseteq I_n$ et $U_0 \supseteq U_1 \supseteq \cdots \supseteq U_n$,
— $I_j + U_j = U_j$ pour chaque j.

On dit que la chaîne potentielle $[(I_0, U_0), \ldots, (I_n, U_n)]$ *raffine* la chaîne $[(J_0, V_0), \ldots, (J_n, V_n)]$ si l'on a les inclusions $J_k \subseteq I_k$ et $V_k \subseteq U_k$ pour chaque k.
1. Toute chaîne potentielle engendre une chaîne potentielle complète (au sens de la relation de raffinement). Plus précisément, à partir de $[(I_0, U_0), \ldots, (I_n, U_n)]$, on construit successivement

— $\mathfrak{a}_j = \langle I_j \rangle$, $\mathfrak{b}_j = \sum_{i \leqslant j} \mathfrak{a}_i$ $(j \in [\![0..n]\!])$,
— $\mathfrak{f}_n = \mathcal{M}(U_n) + \mathfrak{b}_n$ [4], $\mathfrak{f}_{n-1} = \mathcal{M}(U_{n-1} \cup \mathfrak{f}_n) + \mathfrak{b}_{n-1}$, …, $\mathfrak{f}_0 = \mathcal{M}(U_0 \cup \mathfrak{f}_1) + \mathfrak{b}_0$.

Et l'on considère $[(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{f}_0), \ldots, (\mathfrak{b}_n, \mathfrak{f}_n)]$.
2. On dit qu'une chaîne potentielle $\mathcal{C}$ *collapse* si dans la chaîne complète qu'elle engendre $[(\mathfrak{b}_0, \mathfrak{f}_0), \ldots]$ on a $0 \in \mathfrak{f}_0$. Montrer qu'une suite $(x_1, \ldots, x_n)$ est singulière si, et seulement si, la chaîne potentielle $[(0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_{n-1}, x_n), (x_n, 1)]$ collapse.
3. En mathématiques classiques, une chaîne potentielle $\mathcal{C}$ de $\mathbf{A}$ collapse si, et seulement si, il est impossible de trouver des idéaux premiers $\mathfrak{p}_0 \subseteq \mathfrak{p}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_n$, tels que la chaîne $[(\mathfrak{p}_0, \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}_0), \ldots, (\mathfrak{p}_n, \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}_n)]$ raffine la chaîne $\mathcal{C}$.
4. Étant donnée une chaîne potentielle $\mathcal{C} = [(I_0, U_0), \ldots, (I_n, U_n)]$, on la *sature* en rajoutant dans I_k (resp. dans U_k) tout $x \in \mathbf{A}$ qui, rajouté à U_k (resp. à I_k) conduirait à un collapsus. Ainsi une chaîne potentielle collapse si, et seulement si, sa saturée est $[(\mathbf{A}, \mathbf{A}), \ldots, (\mathbf{A}, \mathbf{A})]$.
Montrer que l'on obtient ainsi une chaîne potentielle $[(J_0, V_0), \ldots, (J_n, V_n)]$ qui raffine la chaîne complète engendrée par $\mathcal{C}$.
Montrer en mathématiques classiques que J_k est l'intersection des idéaux premiers qui s'insèrent en position k dans une chaîne d'idéaux premiers qui raffine $\mathcal{C}$ (comme dans la question précédente). Démontrer aussi l'affirmation duale pour V_k.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 3. *2.* On considère une suite de longueur k dans $\mathbf{A}$, on lui rajoute X au début, et elle devient singulière dans $\mathbf{A}[X]$. On se débarrasse ensuite de X dans l'égalité (6) page 773 correspondante.
NB : on peut aussi invoquer le point *3* de la proposition 2.16.

4. Rappelons que $\mathcal{M}(A)$ est le monoïde engendré par la partie A.

Exercice 4. On peut supposer $\mathbf{K}$ réduit ($\mathbf{K}_{\mathrm{red}}[X_1,\dots,X_n] = \mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]_{\mathrm{red}}$ a même dimension que $\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]$). Deux possibilités s'offrent alors. La première est de réécrire la preuve donnée dans le cas d'un corps discret en utilisant l'exercice IV-13 et le principe local-global 3.2. La deuxième est d'appliquer la machinerie locale-globale élémentaire n°2.

Exercice 5. On écrit chaque U_i sous la forme $U_i = \bigcup_{j\in J_i} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(g_{ij})$. Dire que les $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(g_{ij})$ recouvrent $\mathsf{Spec}(\mathbf{A})$, signifie que $1 \in \langle \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(g_{ij}) \mid j \in J_i,\ i \in I\rangle$, d'où une égalité $1 = \sum_{j,i} u_{ji}g_{ij}$, les u_{ji} étant nuls sauf un nombre fini d'entre eux (i.e., $i \in I_0$, $j \in J_i$, I_0 et les J_i finis).
On pose $f_i = \sum_{j\in J_i} u_{ji}g_{ij}$. On obtient $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(f_i) \subseteq U_i$ car pour $\mathfrak{p} \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(f_i)$, on a $f_i \notin \mathfrak{p}$, donc un indice j tel que $g_{ij} \notin \mathfrak{p}$, i.e. $\mathfrak{p} \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(g_{ij}) \subseteq U_i$. Et $\sum_{i\in I_0} f_i = 1$.

Exercice 6.
1a. On écrit une relation de dépendance intégrale de f sur $\mathbf{K}[Y_1,\dots,Y_r]$

$$f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \cdots + a_k f^k = 0,$$

avec $n \geqslant 1$, les $a_i \in \mathbf{K}[Y_1,\dots,Y_r]$ et $a_k \neq 0$. L'égalité $(a_k + bf)f^k = 0$ montre que $a_k + bf \in (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) : f)$ (même si $k = 0$). Donc $a_k \in \mathcal{J}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(f)$.

Exercice 7. *1.* On écrit $\mathbf{K}[\underline{X}][1/f] = \mathbf{K}[\underline{X},T]/\langle 1 - fT\rangle$.
Alors, une mise en position de Noether du polynôme non constant $1 - fT$ nous ramène à une extension entière de $\mathbf{K}[Y_1,\dots,Y_n]$.
2. On écrit $\mathbf{A}[\underline{X}][1/\delta] = \mathbf{A}[\underline{X},T]/\langle 1 - \delta T\rangle$. On cherche à appliquer le théorème 7.16 sur les extensions entières. On veut d'une part que δ soit régulier, pour que l'homomorphisme $\mathbf{A}[\underline{X}] \to \mathbf{A}[\underline{X}][1/\delta]$ soit injectif, et d'autre part que l'on puisse faire une mise en position de Noether du polynôme $1 - \delta T$, pour que $\mathbf{A}[\underline{X}][1/\delta]$ soit entier sur un anneau $\mathbf{A}[Y_1,\dots,Y_n]$.
La première condition signifie que l'idéal $\mathrm{c}(\delta)$ est fidèle (McCoy, corollaire III-2.3).
La deuxième condition est réalisée si l'on se trouve dans la même situation que pour le lemme X-4.6 :

- δ est de degré formel d,
- un des monômes de degré d, portant sur un sous-ensemble de variables $(X_i)_{i\in I}$, a pour coefficient un élément de $\mathbf{A}^\times$,
- et c'est le seul monôme de degré d en les variables $(X_i)_{i\in I}$ présent dans δ.

En effet, le changement de variables « $X'_i = X_i + T$ si $i \in I$, $X'_i = X_i$ sinon », rend alors le polynôme $1 - \delta T$ unitaire en T (à un inversible près). Notons que dans ce cas le polynôme δ est primitif et la première condition est également réalisée.

Exercice 8. *1.* On considère $s = a/b \in \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ avec b régulier.
La suite $(bX - a, b, X)$ est singulière dans $\mathbf{A}[X]$. Cela donne une égalité dans $\mathbf{A}[X]$ du type suivant

$$(bX - a)^{k_1}\big(b^{k_2}\big(X^{k_3}\big(1 + Xp_3(X)\big) + bp_2(X)\big) + (bX - a)p_1(X)\big) = 0.$$

Puisque $\mathbf{A}[X]$ est intègre, on peut supprimer le facteur $(bX - a)^{k_1}$, à la suite de quoi on spécialise X en s. Il vient

$$b^{k_2}\big(s^{k_3}\big(1 + sp_3(s)\big) + bp_2(s)\big) = 0,$$

et puisque b est régulier :

$$s^{k_3}\big(1 + sp_3(s)\big) + bp_2(s) = 0.$$

Ainsi s annule $g(X) = X^{k_3}\big(1 + Xp_3(X)\big) + bp_2(X)$ et $f(X) = bX - a$.
Enfin, puisque le coefficient de X^{k_3} dans g est de la forme $1 + bc$, on obtient que $1 \in \mathrm{c}(f) + \mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f + X^2 g)$.
2. Résulte de *1* et des résultats généraux sur la dimension de $\mathbf{A}[X]$, pour un anneau arbitraire et pour un anneau de Prüfer.
3. Il semble bien que oui.

Exercice 9. *1.* Il suffit de montrer, pour deux idéaux $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ et deux éléments u, $v \in \mathbf{A}$, que :

$$\big((\mathfrak{a} : u^\infty) + \mathbf{A}u\big)\big((\mathfrak{b} : u^\infty) + \mathbf{A}u\big) \subseteq (\mathfrak{ab} : u^\infty) + \mathbf{A}u \quad \text{et}$$
$$\big((\mathfrak{a} : u^\infty) + \mathbf{A}u\big)\big((\mathfrak{a} : v^\infty) + \mathbf{A}v\big) \subseteq (\mathfrak{a} : (uv)^\infty) + \mathbf{A}uv.$$

La première inclusion découle de $(\mathfrak{a} : u^\infty)(\mathfrak{b} : u^\infty) \subseteq (\mathfrak{ab} : u^\infty)$ et la seconde de $(\mathfrak{a} : u^\infty) + (\mathfrak{a} : v^\infty) \subseteq (\mathfrak{a} : (uv)^\infty)$.

Exercice 10. *1.* Comme $\beta > \alpha$, $\underline{X}^\beta$ est multiple de l'un des monômes suivants :
$X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{\alpha_{n-1}} X_n^{1+\alpha_n}$, $X_1^{\alpha_1} X_2^{\alpha_2} \cdots X_{n-1}^{1+\alpha_{n-1}}$, …, $X_1^{\alpha_1} X_2^{1+\alpha_2}$, $X_1^{1+\alpha_1}$.
2a. Soit $y \in \prod_{\beta<\alpha} \mathrm{Ann}(a_\beta)$; en posant $Q(\underline{X}) = yP(\underline{X})$, on a

$$Q(\underline{X}) = ya_\alpha \underline{X}^\alpha + \textstyle\sum_{\beta>\alpha} ya_\beta \underline{X}^\beta \quad \text{et} \quad Q(\underline{x}) = 0.$$

Pour montrer que $ya_\alpha \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(\underline{x})$, on peut donc supposer que l'on a $y = 1$ et $P(\underline{X}) = a_\alpha \underline{X}^\alpha + \sum_{\beta>\alpha} a_\beta \underline{X}^\beta$. En utilisant l'égalité $P(\underline{x}) = 0$ et la première question, on obtient $a_\alpha \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(\underline{x})$.
2b. D'abord, puisque $\mathbf{A}$ est réduit, on a $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(a) = \mathrm{Ann}(a) + \mathbf{A}a$, $\forall a \in \mathbf{A}$. Ensuite, on utilise la remarque suivante : soit $\mathfrak{c}$ un idéal et $2m$ idéaux $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1$, …, $\mathfrak{a}_m$, $\mathfrak{b}_m$ tels que $\mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{k-1}\mathfrak{b}_k \subseteq \mathfrak{c}$ pour tout $k \in [\![1..m]\!]$. Alors on obtient l'inclusion :

$$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) \cdots (\mathfrak{a}_m + \mathfrak{b}_m) \subseteq \mathfrak{c} + \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_m.$$

En effet, par récurrence sur m, si $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) \cdots (\mathfrak{a}_{m-1} + \mathfrak{b}_{m-1}) \subseteq \mathfrak{c} + \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{m-1}$, on déduit :
$(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{b}_1) \cdots (\mathfrak{a}_m + \mathfrak{b}_m) \subseteq \mathfrak{c} + \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{m-1}\mathfrak{a}_m + \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{m-1}\mathfrak{b}_m \subseteq \mathfrak{c} + \mathfrak{a}_1 \cdots \mathfrak{a}_{m-1}\mathfrak{a}_m + \mathfrak{c}$
d'où l'inclusion annoncée.
Appliquons cela à $\mathfrak{c} = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(\underline{x})$ et aux idéaux $\mathfrak{a}_\beta = \mathrm{Ann}(a_\beta)$, $\mathfrak{b}_\beta = \mathbf{A}a_\beta$.
Comme $\mathrm{Ann}(a_\beta) + \mathbf{A}a_\beta = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(a_\beta)$, on obtient l'inclusion désirée.
3. Application directe avec $n = 1$.
4. On peut supposer $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ réduits quitte à remplacer $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ par $\mathbf{A}_{\mathrm{red}} \to \mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ (tout $z \in \mathbf{B}_{\mathrm{red}}$ reste primitivement algébrique). On peut aussi supposer $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ quitte à remplacer $\mathbf{A}$ par son image dans $\mathbf{B}$.
Montrons alors l'implication $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant m \Rightarrow \mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant m$ par récurrence sur m. Il suffit de montrer pour $x \in \mathbf{B}$ arbitraire que $\mathsf{Kdim}(\mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(x)) \leqslant m-1$; mais $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(x)$ contient un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ produit fini d'idéaux bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a)$, $a \in \mathbf{A}$.
On a donc une algèbre $\mathbf{A}/\mathfrak{a} \to \mathbf{B}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(x)$ à laquelle on peut appliquer l'hypothèse de récurrence puisque $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant m-1$.

Exercice 11. *1.* On utilise l'extension entière $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} \hookrightarrow \overline{\mathbf{B}} = \mathbf{B}/\mathfrak{b}$.
Soit $a \in \mathbf{A} \cap (\mathfrak{b} + \mathfrak{a}\mathbf{B})$; le lying over (VI-3.12) avec $\overline{\mathbf{A}} \subseteq \overline{\mathbf{B}}$, donne $\overline{a}^n \in \overline{\mathfrak{a}}$, i.e. $a^n \in \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ et comme $a \in \mathbf{A}$, $a^n \in \mathfrak{a} + \mathbf{A} \cap \mathfrak{b}$.
2. Par récurrence sur d. On pose
$\mathfrak{a} = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_0, \ldots, a_{d-1})$, $\mathfrak{a}' = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_0, \ldots, a_d)$, $\mathfrak{b} = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_0, \ldots, a_{d-1})$, $\mathfrak{b}' = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_0, \ldots, a_d)$.

On a donc par définition $\mathfrak{a}' = (\mathfrak{a} : a_d^\infty)_{\mathbf{A}} + \mathbf{A}a_d$ et $\mathfrak{b}' = (\mathfrak{b} : a_d^\infty)_{\mathbf{B}} + \mathbf{B}a_d$.
On veut montrer que $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}' \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}')$. Le point *1*, donne $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}' \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{c})$ avec $\mathfrak{c} = \mathbf{A}a_d + \mathbf{A} \cap (\mathfrak{b} : a_d^\infty)_{\mathbf{B}} = \mathbf{A}a_d + (\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} : a_d^\infty)_{\mathbf{A}}$.
Par récurrence, $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$, donc

$$\mathfrak{c} \subseteq \mathbf{A}a_d + (\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) : a_d^\infty)_{\mathbf{A}} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}a_d + (\mathfrak{a} : a_d^\infty)_{\mathbf{A}}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}'),$$

d'où $\mathbf{A} \cap \mathfrak{b}' \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}')$.

Exercice 12. *1.* Soit $t \in S + \mathfrak{a}\mathbf{B}$; i.e. $t + s \in \mathfrak{a}\mathbf{B}$ avec $s \in S$.
Alors $t + s$ est entier sur $\mathfrak{a}$, donc zéro d'un polynôme unitaire

$$P(X) \in X^n + \mathfrak{a}X^{n-1} + \cdots + \mathfrak{a}^{n-1}X + \mathfrak{a}^n.$$

On écrit que $P(T + s) = TQ(T) + P(s)$ et l'on remarque que $P(s) \in s^n + \mathfrak{a}$.
Ainsi, $tQ(t) \in S + \mathfrak{a}$.
2. Par récurrence sur d. Soit $V = \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_0, \ldots, a_d) = a_0^{\mathbb{N}}(\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_1, \ldots, a_d) + a_0\mathbf{B})$; la récurrence fournit $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{B}}(a_1, \ldots, a_d) \subseteq \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_d)^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}}$ donc

$$V \subseteq a_0^{\mathbb{N}}(\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_d)^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}} + a_0\mathbf{B}) \subseteq a_0^{\mathbb{N}}(\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_d) + a_0\mathbf{B})^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}}.$$

La première question fournit :

$$V \subseteq a_0^{\mathbb{N}}(\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_d) + a_0\mathbf{A})^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}} \subseteq \big(a_0^{\mathbb{N}}(\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_d) + a_0\mathbf{A})\big)^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}},$$

c'est-à-dire $V \subseteq \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_0, \ldots, a_d)^{\mathrm{sat}_{\mathbf{B}}}$.

Exercice 13. *2.* L'anneau quotient $\mathbf{A}/\langle X_1 - Y_1\rangle$ peut être vu comme la localisation de $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n, Y_2, \ldots, Y_m]$ en

$$S_1 = (\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_n])^*(\mathbf{K}[X_1, Y_2, \ldots, Y_m])^*.$$

Il est donc intègre. On décrit de la même façon les quotients successifs.

Exercice 14. *1.* Soit $\mathfrak{a}_i := \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x_1, \ldots, x_i)$, avec $\mathfrak{a}_{i+1} = (\mathfrak{a}_i : x_{i+1}^\infty) + \mathbf{A}x_{i+1}$. Par récurrence, $\mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p}_i : x_{i+1} \notin \mathfrak{p}_i$ donne $(\mathfrak{p}_i : x_{i+1}^\infty) \subseteq \mathfrak{p}_i$, puis $\mathfrak{a}_{i+1} \subseteq \mathfrak{p}_i + \mathbf{A}x_{i+1}$, donc $\mathfrak{a}_{i+1} \subseteq \mathfrak{p}_{i+1}$. Le reste ne pose pas de problème.
2. En posant $S_i = \mathcal{S}^{\mathrm{K}}(x_{i+1}, \ldots, x_d)$, on a $S_d = 1$ et $S_{i-1} = x_i^{\mathbb{N}}(S_i + \mathbf{A}x_i)$. De proche en proche on montre $S_i \subseteq \mathfrak{f}_i$, en utilisant $x_i \in \mathfrak{p}_i$ et $x_i \in f_{i-1}$:

$$S_{i-1} = x_i^{\mathbb{N}}(S_i + \mathbf{A}x_i) \subseteq x_i^{\mathbb{N}}(\mathfrak{f}_i + \mathfrak{p}_i) = x_i^{\mathbb{N}}\mathfrak{f}_i \subseteq x_i^{\mathbb{N}}\mathfrak{f}_{i-1} \subseteq \mathfrak{f}_{i-1}.$$

Le reste ne pose pas de problème.

Exercice 15. Si f est unitaire de degré $n \geqslant 1$, le polynôme $R(X, Y)$ de l'énoncé est Y-unitaire de degré n, donc $\mathrm{Ann}(R) = 0$.
Et $R(f, g) = 0$ car $R \in \langle f(T) - X, Y - g(T)\rangle_{\mathbf{A}[T,X,Y]}$.
1. Soit $f = \sum_{k=0}^n a_k T^k$. D'après le lemme IV-6.4 il existe un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(t_n, t_{n-1}, \ldots, t_0, t_{-1})$ tel que :
– dans la composante $t_k = 1$ pour $k \in [\![0..n]\!]$, on a $a_i = 0$ pour $i > k$ et a_k régulier ;
– dans la composante $t_{-1} = 1$, on a $f = 0$, i.e. $t_{-1}f = 0$ et même $\mathrm{Ann}(f) = \langle t_{-1}\rangle$.
Soit m le degré formel de g. Pour $1 \leqslant k \leqslant n$, on pose :

$$R_k(X, Y) = t_k \mathrm{Res}_T(t_k f(T) - X, k, Y - g(T), m).$$

On définit $R_0(X, Y) = t_0(t_0 f(T) - X)$ et $R_{-1}(X, Y) = t_{-1}X$. Pour $k \in [\![-1..n]\!]$, on a $\mathrm{Ann}(R_k) = \langle 1 - t_k\rangle$ et $R_k(f, g) = 0$. Ainsi en posant $R = \sum_{k=-1}^n R_k(X, Y)$, on a $\mathrm{Ann}(R) = 0$ et $R(f, g) = 0$.
2. Application directe de l'exercice référencé.
3. Par récurrence sur la dimension de Krull de $\mathbf{A}$. On peut remplacer $\mathbf{A}$ par un anneau $\mathbf{A}' := \mathbf{A}_{\{a\}}$ de façon à ce que l'annulateur (dans $\mathbf{A}'$) de chaque coefficient de f soit engendré par un idempotent (rappelons que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}'$).

Alors, si $\mathfrak{a} = \prod_{i,j} \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(r_{ij})$, l'anneau $\mathbf{A}[T]/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(f,g)$ est un quotient de $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})[T]$. Comme $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) < \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$, on obtient par hypothèse de récurrence :

$$\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})[T] \leqslant 1 + 2\,\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \leqslant 1 + 2(\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} - 1), \text{ puis}$$

$$\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[T] \leqslant 2 + \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[T]/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(f,g) \leqslant 2 + 1 + 2(\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} - 1) = 1 + 2\,\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}.$$

4. On conserve les notations des questions précédentes. Chaque $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(r_{ij})$ contient un produit fini d'idéaux bord de $\mathbf{A}$ (exercice 10) donc le produit des $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'}(r_{ij})$ contient un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$, produit fini d'idéaux bord de $\mathbf{A}$.
Ainsi, $\mathfrak{a} \subset \mathbf{A}[T] \cap \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}'[T]}(f,g) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}[T]}\big(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(f,g)\big)$ (exercice 11).

Exercice 16. *1.* Par récurrence sur n, le cas $n = 0$ étant l'hypothèse. Ajoutons un élément b à $b_1, \dots, b_n$ et posons $\mathfrak{b}'_j = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(z_j, b_1, \dots, b_n, b)$.
Par définition $\mathfrak{b}'_j = \mathbf{B}b + (\mathfrak{b}_j : b^\infty)$ avec $\mathfrak{b}_j = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(z_j, b_1, \dots, b_n)$; le produit des $\mathfrak{b}_j$ est contenu dans $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x, y, b_1, \dots, b_n)$ (par récurrence). En utilisant des inclusions du type $(\mathfrak{b} : b^\infty)(\mathfrak{b}' : b^\infty) \subseteq (\mathfrak{b}\mathfrak{b}' : b^\infty)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\textstyle\prod_j \mathfrak{b}'_j \;&\subseteq\; \mathbf{B}b + \textstyle\prod_j (\mathfrak{b}_j : b^\infty) \subseteq \mathbf{B}b + \Big(\prod_j \mathfrak{b}_j : b^\infty\Big) \\ &\subseteq\; \mathbf{B}b + (\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x, y, b_1, \dots, b_n) : b^\infty) = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(x, y, b_1, \dots, b_n, b)\end{aligned}.$$

2a. Résulte du fait que pour deux idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}$, on a $(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\mathbf{A}}\mathbf{A}[T] = (\mathfrak{a} : \mathfrak{b})_{\mathbf{A}[T]}$.
2b. Pour deux idéaux $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, notons $\mathfrak{a} \Subset \mathfrak{b}$ pour $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{b})$. On raisonne par récurrence sur d, le cas $d = 1$ figurant dans l'exercice 15.
Considérons $2(d+1)$ polynômes p, q, g_1, …, $g_{2d} \in \mathbf{A}[T]$. Il existe des $a_j \in \mathbf{A}$ tels que $\prod_j \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_j) \Subset \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(p, q)$ (le cas $d = 1$). D'après la première question :

$$\textstyle\prod_j \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(a_j, g_1, \dots, g_{2d}) \Subset \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(p, q, g_1, \dots, g_{2d}).$$

Il suffit donc de montrer, pour $a \in \mathbf{A}$, qu'un idéal bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(a, g_1, \dots, g_{2d})$ contient, à radical près, un produit d'idéaux bord de $d+1$ éléments de $\mathbf{A}$. On pose $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{A}/\mathcal{I}^{\mathrm{K}}(a)$ et $\varphi : \mathbf{A}[T] \to \overline{\mathbf{A}}[T] \simeq \mathbf{A}[T]/\big(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(a)\big)$ l'homomorphisme de passage au quotient. Par récurrence, l'idéal bord $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\overline{\mathbf{A}}[T]}(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_{2d}})$ contient, à radical près, un produit $\prod_j \mathfrak{a}_j$ où chaque $\mathfrak{a}_j$ est un idéal bord de d éléments de $\overline{\mathbf{A}}$. En prenant l'image réciproque par φ, on obtient

$$\textstyle\prod_i \varphi^{-1}(\mathfrak{a}_i) \subseteq \varphi^{-1}\big(\prod_i \mathfrak{a}_i\big) \Subset \varphi^{-1}\big(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\overline{\mathbf{A}}[T]}(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_{2d}})\big).$$

En utilisant le lemme 2.12, on a d'une part

$$\varphi^{-1}\big(\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\overline{\mathbf{A}}[T]}(\overline{g_1}, \dots, \overline{g_{2d}})\big) = \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(a, g_1, \dots, g_{2d}),$$

et d'autre part $\varphi^{-1}(\mathfrak{a}_i)$ est un idéal bord de $d+1$ éléments de $\mathbf{A}$ (le premier élément étant a). Ceci montre que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}[T]}(a, g_1, \dots, g_{2d})$ contient à radical près, un produit d'idéaux bord de $d+1$ éléments de $\mathbf{A}$.
3. Si $\mathbf{A}[\underline{T}] = \mathbf{A}[T_1, \dots, T_r]$, l'idéal bord de $(r+1)d$ polynômes de $\mathbf{A}[\underline{T}]$ contient, à radical près, un produit d'idéaux bord de d éléments de $\mathbf{A}$.
En conséquence, $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < d \Longrightarrow \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[\underline{T}] < (r+1)d$, i.e.

$$\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[\underline{T}] + 1 \;\leqslant\; (r+1)(\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} + 1).$$

Exercice 17. *1.* On prend $a' = y \wedge a$ et $b' = x \vee b \vee a'$. Alors $x \wedge a' = x \wedge y \wedge a = x \wedge a$ (car $x \leqslant y$). Puis $y \vee b' = y \vee x \vee b \vee a' = (x \vee a') \vee (y \vee b) = y \vee b$ (la dernière égalité utilise $x \vee a' \leqslant y$ qui découle de $x \leqslant y$ et $a' \leqslant y$, a fortiori $x \vee a' \leqslant y \vee b$). Reste à voir que $y \wedge b' = x \vee a'$; on a l'identité pour tous y, b, z, $y \wedge (b \vee z) = y \wedge z'$ avec $z' = (y \wedge b) \vee z$ que l'on utilise avec $z = x \vee a'$. Mais on a $y \wedge b \leqslant x \vee a'$ car l'hypothèse est $y \wedge b \leqslant x \vee a$, donc $y \wedge b \leqslant (x \vee a) \wedge y = (x \wedge y) \vee (y \wedge a) \leqslant x \vee a'$.

Donc $z' = x \vee a'$ et $y \wedge b' = y \wedge (x \vee a')$. Enfin, $y \wedge (x \vee a') = x \vee a'$ car $x \vee a' \leqslant y$ (en utilisant $x \leqslant y$ et $a' \leqslant y$).
2. D'après *1* par récurrence sur n.
3. Le point *3a* implique le point *3c* d'après le point *2*. Le point *3c* implique le point *3b* parce qu'une chaîne liée est un cas particulier de suite complémentaire. Pour voir que *3b* implique *3a*, soit $y_0, \dots, y_n$ une suite arbitraire.
On définit alors $x_0 = y_0$, $x_i = y_i \vee x_{i-1}$ ($i \in [\![1..n]\!]$). Soit $(a_0, \dots, a_n)$ une suite complémentaire de $(x_0, \dots, x_n)$.
On définit $b_0 = a_0$ et $b_i = a_i \vee x_{i-1}$ pour $i \in [\![1..n]\!]$. On a alors $x_i \vee a_i = y_i \vee b_i$ pour $i \in [\![0..n]\!]$. Donc $0 = x_0 \wedge a_0 = y_0 \wedge b_0$ et $1 = x_n \vee a_n = y_n \vee b_n$. Voyons maintenant les inégalités intermédiaires. Pour $i \in [\![1..n]\!]$ on a $x_i \wedge a_i \leqslant x_{i-1} \vee a_{i-1}$, et donc

$$y_i \wedge a_i \leqslant x_i \wedge a_i \leqslant x_{i-1} \vee a_{i-1} = y_{i-1} \vee b_{i-1},$$

d'où

$$y_i \wedge b_i = y_i \wedge (a_i \vee x_{i-1}) = (y_i \wedge a_i) \vee (y_i \wedge x_{i-1}) \leqslant (y_i \wedge a_i) \vee x_{i-1}.$$

Comme les deux derniers termes après $\leqslant$ sont majorés par $x_{i-1} \vee a_{i-1} = y_{i-1} \vee b_{i-1}$, on obtient bien l'inégalité $y_i \wedge b_i \leqslant y_{i-1} \vee b_{i-1}$.

Exercice 18. Tout d'abord, pour tout idéal $\mathfrak{c}$, l'anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{c}^\perp$ est réduit.
Montrons que $(\mathfrak{a}_1^\perp \mathfrak{a}_2^\perp)^\perp = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^{\perp\perp}$: l'égalité $\mathfrak{a}_1^\perp \cap \mathfrak{a}_2^\perp = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^\perp$ implique que les idéaux $\mathfrak{a}_1^\perp \cap \mathfrak{a}_2^\perp$, $\mathfrak{a}_1^\perp \mathfrak{a}_2^\perp$ et $(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^\perp$ ont même racine donc même annulateur. On en déduit que

$$(\mathfrak{a}_1^\perp \mathfrak{a}_2^\perp \mathfrak{b})^\perp = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \diamond \mathfrak{b}.$$

En effet :

$$(\mathfrak{a}_1^\perp \mathfrak{a}_2^\perp \mathfrak{b})^\perp = \big((\mathfrak{a}_1^\perp \mathfrak{a}_2^\perp)^\perp : \mathfrak{b}\big) = \big((\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2)^{\perp\perp} : \mathfrak{b}\big) = (\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \diamond \mathfrak{b}.$$

1. Comme $\mathfrak{a}^\perp \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a}^\perp$, on a $\mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b} \supseteq \mathfrak{a}^{\perp\perp} \supseteq \mathfrak{a}$. Soit $x \in \mathbf{A}$ tel que dans le quotient on ait $\overline{x}\,\overline{\mathfrak{b}} = 0$, i.e. $x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}$, i.e. $x\mathfrak{b}\mathfrak{a}^\perp \mathfrak{b} = 0$. On a donc $x\mathfrak{b}\mathfrak{a}^\perp = 0$, i.e. $x \in \mathfrak{a} \diamond \mathfrak{b}$, i.e. $\overline{x} = 0$.
2. On a :

$$(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_1 \diamond \mathfrak{b}_1)\big/(\overline{\mathfrak{a}_2} \diamond \overline{\mathfrak{b}_2}) \simeq \mathbf{A}\big/(\mathfrak{a}_1^\perp \mathfrak{a}_2^\perp \mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)^\perp = \mathbf{A}\big/\big((\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2) \diamond (\mathfrak{b}_1 \mathfrak{b}_2)\big)\ .$$

Exercice 19. *1.* Soit $y \in \mathbf{B}$ et supposons $y\theta(a) = 0$. Posons $e' = \theta(e)$. On doit montrer que $y = ye'$. Puisque $e + a$ est régulier, $e' + \theta(a)$ est régulier. Or $y(e' + \theta(a)\big) = ye' = ye'(e' + \theta(a)\big)$ parce que e' est idempotent.
2. L'homomorphisme $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}} \to \mathbf{A}_{\min}$ provient de la propriété universelle de $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}}$. Il est surjectif parce que $\mathbf{A}_{\min} = \mathbf{A}[(e_x)_{x \in \mathbf{A}}]$ et que le morphisme $\mathbf{A}_{\mathrm{qi}} \to \mathbf{A}_{\min}$ est quasi intègre.
3. Soit x régulier dans $\mathbf{A}$ et $u = (\overline{y}, \widetilde{z}) \in \mathbf{A}_{\{a\}} = \mathbf{A}/a^\perp \times \mathbf{A}/(a^\perp)^\perp$, avec $ux = 0$. On doit montrer que $u = 0$, i.e. $\overline{y} = \overline{0}$ et $\widetilde{z} = \widetilde{0}$.
On a $xy \in a^\perp$, i.e. $xay = 0$, donc $ay = 0$, puis $\overline{y} = \overline{0}$.
Pour voir que $\widetilde{z} = \widetilde{0}$ on considère un élément t arbitraire de $a^\perp$ et l'on doit montrer que $zt = 0$. Or $\widetilde{x}\widetilde{z} = \widetilde{0}$, donc $xzt = 0$, puis $zt = 0$.
4. Si $a \in \mathbf{A}$ est régulier, il reste régulier aux étages finis de la construction de $\mathbf{A}_{\min}$ d'après le point *3* et cela suffit pour qu'il soit régulier dans $\mathbf{A}_{\min}$. Si l'homomorphisme naturel $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\mathrm{qi}}$ était régulier tous les homomorphismes de $\mathbb{Z}$

vers des anneaux quasi intègres seraient réguliers vue la propriété universelle de $\mathbb{Z}_{\mathrm{qi}}$. Or la surjection $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\langle n\rangle$ n'est pas un homomorphisme régulier pour $n \geqslant 2$. Notez que l'argument s'applique à tout anneau $\mathbf{A}$ pour lequel il existe un élément régulier x tel que $\mathbf{A}/\langle x\rangle$ est quasi intègre et non trivial.

Exercice 20. Écrivons le calcul pour $n = k = 2$.
Soient $x_1 = \frac{a_1}{b_1}$, $x_2 = \frac{a_2}{b_2} \in \operatorname{Frac}\mathbf{A}$ et $s = \big(P(x_1,x_2),(Q(x_1,x_2),(R(x_1,x_2)\big)$ une suite dans $\mathbf{A}[x_1,x_2]$, avec P, Q, $R \in \mathbf{A}[X_1,X_2]$. On doit montrer que la suite s est singulière. On note $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}[x_1]$. On sait que la suite

$$(b_1X_1 - a_1, b_2X_2 - a_2, P, Q, R) = (f_1, f_2, P, Q, R)$$

est singulière dans $\mathbf{A}[X_1,X_2]$, ce qui donne une égalité

$$f_1^m(f_2^m(P^m(Q^m(R^m(1+AR)+BQ)+CP)+Df_2)+Ef_1) = 0$$

dans $\mathbf{A}[X_1,X_2]$. Puisque $b_1 \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}$, on a $f_1 \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}[X_1,X_2]$ (lemme de McCoy, corollaire III-2.3). On simplifie donc l'égalité par f_1^m, puis on l'évalue dans $\mathbf{A}_1[X_2]$ par le morphisme $X_1 \mapsto x_1$. On obtient l'égalité suivante dans $\mathbf{A}_1[X_2]$:

$$f_2^m(p^m(q^m(r^m(1+ar)+bq)+cp)+df_2) = 0,$$

avec $p = P(x_1,X_2)$, $q = Q(x_1,X_2)$, …, $d = D(x_1,X_2)$.
Puisque $b_2 \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}_1$, on a $f_2 \in \operatorname{Reg}\mathbf{A}_1[X_2]$. On peut donc simplifier l'égalité par f_2^m, puis l'évaluer dans $\mathbf{A}[x_1,x_2]$ par le morphisme $X_2 \mapsto x_2$. On obtient une égalité qui dit que la suite s est singulière.

Exercice 22. Notons a, b et c les trois propriétés pour les anneaux commutatifs. L'équivalence de a et b est facile. L'implication $a \Rightarrow c$ a été donnée en remarque après le lemme lying over VI-3.12.
$c \Rightarrow a$. En mathématiques classiques $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ est l'intersection des idéaux premiers qui contiennent $\mathfrak{a}$. On veut donc montrer que pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, on a $\varphi^{-1}(\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle) \subseteq \mathfrak{p}$. Soit $\mathfrak{q}$ un idéal premier de $\mathbf{B}$ au dessus de $\mathfrak{p}$, i.e. $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$. Alors, $\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle \subseteq \langle\varphi(\mathfrak{p})\rangle \subseteq \mathfrak{q}$, d'où $\varphi^{-1}(\langle\varphi(\mathfrak{a})\rangle) \subseteq \mathfrak{p}$.

Problème 1. *1a.* On a un $a \in \operatorname{Ann}(x)\mathfrak{a}$ non nul, en particulier $ax = 0$.
Montrons que $a \notin \mathrm{D}(x)$: si $a^n \in \langle x\rangle$, alors $a^{n+1} \in \langle ax\rangle = 0$, et donc $a = 0$.
Donc $\mathrm{D}(x) \subsetneq \mathrm{D}(x,a) = \mathrm{D}(ax, a+x) = \mathrm{D}(a+x)$: on prend $x' = a + x$ (qui est bien dans $\mathfrak{a}$).
1b. On pose $x_0 = 0$. Si $\operatorname{Ann}(x_0)\mathfrak{a} = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{a} = 0$, alors $\operatorname{Ann}(x_0) \subseteq \operatorname{Ann}(\mathfrak{a})$, donc $\operatorname{Ann}(x_0) = \operatorname{Ann}(\mathfrak{a})$. Dans ce cas on pose $x_i = x_0$ pour tout $i \geqslant 0$. Sinon, il y a un $x_1 \in \mathfrak{a}$ avec $\mathrm{D}(x_0) \subsetneq \mathrm{D}(x_1)$. Si $\operatorname{Ann}(x_1)\mathfrak{a} = 0$, alors $\operatorname{Ann}(x_1) \subseteq \operatorname{Ann}(\mathfrak{a})$, donc $\operatorname{Ann}(x_1) = \operatorname{Ann}(\mathfrak{a})$. Dans ce cas on pose $x_i = x_1$ pour tout $i \geqslant 1$. Sinon, il y a un $x_2 \in \mathfrak{a}$ avec $\mathrm{D}(x_1) \subsetneq \mathrm{D}(x_2)$ ……
On construit de cette manière une suite infinie croissante d'idéaux $\mathrm{D}(x_i)$, qui est stationnaire dès que deux termes consécutifs sont égaux, auquel cas le problème initial est résolu [5].

5. La preuve de terminaison de l'algorithme sous hypothèse noethérienne constructive qui vient d'être donnée est un peu déroutante. Spontanément on aurait préféré dire : il faut bien que l'algorithme termine un jour car sinon, on aurait une suite infinie strictement croissante. L'ennuyeux dans ce dernier argument est qu'il est un argument par l'absurde. Ici on a utilisé l'hypothèse noethérienne sous forme constructive et cela nous a fourni le moyen de savoir a priori quand l'algorithme terminera. Ce point délicat renvoie à la discussion sur le principe de Markov (annexe page 992).

2. Soit $y \in \mathbf{A}$. D'après l'hypothèse, on applique le point *1* avec l'idéal $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(y)$ et l'on sait déterminer un $x \in \mathrm{Ann}(y)$ tel que $\mathrm{Ann}(x) = \mathrm{Ann}\big(\mathrm{Ann}(y)\big)$, i.e. $xy = 0$ et $\mathrm{Ann}(x)\mathrm{Ann}(y) = 0$. On a alors $\big(\mathrm{Ann}(y) \cap \mathrm{Ann}(x)\big)^2 \subseteq \mathrm{Ann}(x)\mathrm{Ann}(y) = 0$, donc $\mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) = 0$ (l'anneau est réduit). Montrons que $x + y$ est régulier ; supposons $z(x + y) = 0$. En multipliant par y, $zy^2 = 0$, donc $zy = 0$, puis $zx = 0$, donc $z \in \mathrm{Ann}(x) \cap \mathrm{Ann}(y) = 0$. En conséquence, $x + y$ est inversible et cet élément est dans l'idéal bord de y puisque $x \in \mathrm{Ann}(y)$.
3. Pour tout anneau $\mathbf{C}$, tout élément régulier de $\mathrm{Frac}(\mathbf{C})$ est inversible. Nous pouvons appliquer le résultat du point *2* à l'anneau $\mathbf{C} = \mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{red}})$.
En effet, la première hypothèse à vérifier est que toute suite croissante d'idéaux de la forme $\mathrm{D}_{\mathbf{C}}(x_n/y_n)$ ($x_n \in \mathbf{B}_{\mathrm{red}}$, $y_n \in \mathrm{Reg}(\mathbf{B}_{\mathrm{red}})$) admet deux termes consécutifs égaux. Or, dans $\mathbf{C}$ on a l'égalité $\mathrm{D}_{\mathbf{C}}(x_n/y_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{C}}(x_n)$, et l'on conclut par le fait que dans $\mathbf{B}$, la suite croissante $\langle x_0, \ldots, x_n\rangle_{\mathbf{B}}$ admet deux termes consécutifs égaux.
La deuxième hypothèse est que l'on sache tester, pour $\frac{x}{u}, \frac{y}{v} \in \mathbf{C}$,

$$\mathrm{Ann}\Big(\tfrac{x}{u}\Big)\mathrm{Ann}\Big(\tfrac{y}{v}\Big) = 0\ ?$$

ce qui est la même chose que $\mathrm{Ann}(x)\mathrm{Ann}(y) = 0$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{red}}$. Or, dans $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$, on a l'égalité $\mathrm{Ann}_{\mathbf{B}_{\mathrm{red}}}(x) = \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(x) \to \mathrm{D}_{\mathbf{B}}(0)$, et l'on sait que $\mathsf{Zar}\,\mathbf{B}$ est une algèbre de Heyting discrète (proposition 6.9).

Problème 2. *1.* Soit $\pi : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ un $\mathbf{A}$-projecteur d'image $\mathbf{A}$.
Soit $a \in \mathfrak{a}\mathbf{B} \cap \mathbf{A}$, $a = \sum_i a_i b_i$ avec $a_i \in \mathfrak{a}$, $b_i \in \mathbf{B}$; donc $a = \pi(a) = \sum_i a_i \pi(b_i) \in \mathfrak{a}$.
2. Il est clair que R_G est $\mathbf{A}$-linéaire et que $R_G(a) = a$ pour tout $a \in \mathbf{A}$. Le reste en découle.
3. Supposons $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{B} \leqslant d$ et montrons $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$.
Soient $a_0, \ldots, a_d \in \mathbf{A}$; comme $\mathsf{Kdim} \leqslant d$, il existe $n \geqslant 0$ tels que :

$$(a_0 \ldots a_d)^n \in \langle c_d, c_{d-1}, \cdots, c_0\rangle_{\mathbf{B}} \quad \text{avec} \quad c_i = (a_0 \ldots a_{i-1})^n a_i^{n+1}.$$

Mais $\langle c_d, c_{d-1}, \cdots, c_0\rangle_{\mathbf{B}} \cap \mathbf{A} = \langle c_d, c_{d-1}, \cdots, c_0\rangle_{\mathbf{A}}$. Donc $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$.
4. (Démonstration en mathématiques classiques)
On gradue $\mathbf{B}$ par $\deg X = \deg Y = 1$ et $\deg Z = -1$. Alors $\mathbf{A}$ est la composante homogène de degré 0, donc est facteur direct dans $\mathbf{B}$.
Soit $\mathfrak{q}' = \langle Z\rangle_{\mathbf{B}}$ (c'est un idéal premier) et $\mathfrak{p}' := \mathbf{A} \cap \mathfrak{q}' = \langle XZ, YZ\rangle$.
On pose $\mathfrak{p} = \langle XZ\rangle_{\mathbf{A}}$; c'est un idéal premier avec $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ mais il n'existe pas d'idéal premier $\mathfrak{q}$ de $\mathbf{B}$ contenu dans $\mathfrak{q}'$ et au dessus de $\mathfrak{p}$. Ainsi $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ n'est pas going down.
Soit $\mathfrak{q} = \big\langle X, Y^2Z - 1\big\rangle_{\mathbf{B}}$ (c'est un idéal premier) et $\mathfrak{p} := \mathbf{A} \cap \mathfrak{q} = \langle XY\rangle$.
On pose $\mathfrak{p}' = \langle XZ, YZ\rangle_{\mathbf{A}}$; c'est un idéal premier avec $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{p}'$ mais il n'existe pas d'idéal premier $\mathfrak{q}'$ de $\mathbf{B}$ contenant $\mathfrak{q}$ et au dessus de $\mathfrak{p}'$ (un idéal premier au dessus de $\mathfrak{p}'$ doit contenir Z, ou X et Y). Ainsi $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ n'est pas going up.

Commentaires bibliographiques

Un très bon exposé de la dimension de Krull du point de vue des mathématiques classiques se trouve dans [Eisenbud].

Les espaces spectraux ont été introduits par Stone [178] en 1937. La théorie des espaces spectraux est au cœur du livre [Johnstone].
Un théorème important de Hochster [105] affirme que tout espace spectral est homéomorphe au spectre d'un anneau commutatif. Une version sans point du théorème de Hochster est : tout treillis distributif est isomorphe au treillis de Zariski d'un anneau commutatif (pour une preuve non constructive voir [5, Banaschewski]). Le point délicat est de savoir construire un anneau dont le treillis de Zariski est un ensemble ordonné fini donné.
La définition constructive de la dimension de Krull des treillis distributifs et anneaux commutatifs remonte aux travaux d'André Joyal [113, 114] et de Luis Español [75, 76, 77, 78, 79, 80]. L'idée de Joyal était de construire pour chaque entier $\ell \geqslant 1$, à partir du treillis distributif $\mathbf{T}$, un treillis distributif $\mathbf{T}_\ell$, qui vérifie une propriété universelle adéquate de façon que, en mathématiques classiques, les idéaux premiers de $\mathbf{T}_\ell$ s'identifient aux chaînes $\mathfrak{p}_0 \subseteq \cdots \subseteq \mathfrak{p}_\ell$ d'idéaux premiers de $\mathbf{T}$ (les inclusions n'étant pas nécessairement strictes). Ceci permet ensuite de définir $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{T} \leqslant \ell$ au moyen d'une propriété reliant $\mathbf{T}_{\ell+1}$ et $\mathbf{T}_\ell$. Enfin la dimension de Krull d'un anneau commutatif peut être définie comme celle de son treillis de Zariski. Pour plus de détails à ce sujet, voir les articles [43, 44, 47, Coquand&al.].
Le théorème 2.2 qui donne une caractérisation inductive élémentaire de la dimension de Krull d'un anneau commutatif se trouve dans [48, Coquand&al.]. La caractérisation en terme d'identités algébriques donnée dans la proposition 2.8 se trouve dans [43, Coquand&Lombardi] et [127, Lombardi].
Bien que la caractérisation en terme de suites complémentaires soit déjà présente pour les treillis distributifs dans [43], elle apparaît pour les anneaux commutatifs seulement dans [47, Coquand&al.].
Des précisions supplémentaires sur le traitement de la dimension de Krull dans les extensions entières se trouvent dans [41, Coquand&al.]
La dimension valuative des anneaux intègres a été introduite par Jaffard [Jaffard] (voir aussi [Gilmer, Chap. 5, §30]) et généralisée aux anneaux commutatifs par Cahen [26]. Un traitement constructif très élégant est donné dans le cas intègre par T. Coquand dans [38].
Le résultat de l'exercice 10 est dû à Lionel Ducos. Le problème 1 est en rapport direct avec l'article [49, Coquand&al.]. Le problème 3 est tiré des articles [21, Brenner], [44, Coquand&Lombardi] et [127]. Une variante pour les treillis distributifs se trouve dans [43].

Chapitre XIV

Nombre de générateurs d'un module

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre on établit la version élémentaire, non noethérienne et constructive de « grands » théorèmes d'algèbre commutative.

Ces théorèmes, dus dans leur version originale à Kronecker, Bass, Serre, Forster et Swan, concernent le nombre de générateurs radicaux d'un idéal de type fini, le nombre de générateurs d'un module, la possibilité de produire un sous-module libre en facteur direct dans un module, et la possibilité de simplifier des isomorphismes, dans le style suivant : si $M \oplus N \simeq M' \oplus N$, alors $M \simeq M'$.
Un progrès décisif a été accompli par Heitmann [99] qui a montré comment se débarrasser des hypothèses noethériennes.
Un autre progrès décisif a été accompli par T. Coquand qui a montré dans plusieurs articles comment obtenir tous les résultats classiques (parfois sous une forme plus forte) au moyen de démonstrations à la fois constructives et élémentaires.
Les preuves données ici sont essentiellement celles de [35, 37, Coquand] et de [46, 47, Coquand&al.].

1. Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass (versions non noethériennes de Heitmann)

Le théorème de Kronecker

Le théorème de Kronecker [1] est usuellement énoncé sous la forme suivante ([121]) : une variété algébrique dans $\mathbb{C}^n$ peut toujours être définie par $n+1$ équations.
Pour Kronecker il s'agissait plutôt de remplacer un système d'équations arbitraires dans $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ par un système « équivalent » ayant au plus $n+1$ équations. L'équivalence de deux systèmes vue par Kronecker se traduit dans le langage actuel par le fait que les deux idéaux ont même nilradical. C'est en utilisant le Nullstellensatz que l'on obtient la formulation « variétés algébriques » ci-dessus.
Dans la version démontrée dans cette section, on donne la formulation à la Kronecker en remplaçant l'anneau $\mathbb{Q}[X_1, \ldots, X_n]$ par un anneau de dimension de Krull $\leqslant n$ arbitraire.
Le lemme suivant, bien que terriblement anodin, est une clef essentielle.

1.1. Lemme. *Pour $u, v \in \mathbf{A}$ on a*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v, uv) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(uv) \ .$$

En particulier, si $uv \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$, alors $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v)$.

▷ On a évidemment $\langle u+v, uv\rangle \subseteq \langle u, v\rangle$, donc $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v, uv) \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v)$. Par ailleurs, $u^2 = (u+v)u - uv \in \langle u+v, uv\rangle$, donc $u \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v, uv)$. □

1. Il s'agit d'un autre théorème de Kronecker que celui donné au chapitre III.

Rappelons que deux suites qui vérifient les inégalités (7) dans la proposition XIII-2.8 sont dites complémentaires.

1.2. Lemme. *Soit $\ell \geqslant 1$. Si $(b_1, \dots, b_\ell)$ et $(x_1 \dots, x_\ell)$ sont deux suites complémentaires dans $\mathbf{A}$ alors pour tout $a \in \mathbf{A}$ on a :*

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_\ell) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_\ell + ax_\ell),$$

c'est-à-dire encore : $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_\ell + ax_\ell)$.

$\mathbb{D}$ On a les inégalités

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1x_1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_2x_2) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, x_1) \\
\vdots \quad & \vdots & \quad \vdots \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_\ell x_\ell) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_\ell, x_\ell).
\end{array}$$

On en déduit celles-ci

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1b_1) & = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_2b_2) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1, b_1) \\
\vdots \quad & \vdots & \quad \vdots \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_\ell b_\ell) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1}, b_{\ell-1}) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_\ell, b_\ell).
\end{array}$$

On a donc d'après le lemme 1.1

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_\ell + b_\ell) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_\ell b_\ell) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_\ell b_\ell) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1} + b_{\ell-1}) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_{\ell-1}b_{\ell-1}) \\
\vdots \quad & \vdots & \quad \vdots \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_3b_3) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_2 + b_2) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_2b_2) \\
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_2b_2) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1b_1) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1).
\end{array}$$

Donc finalement

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) & \leqslant & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_2 + b_2) \vee \cdots \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_\ell + b_\ell) \\
& = & \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(ax_1 + b_1, ax_2 + b_2, \dots, ax_\ell + b_\ell).
\end{array}$$

□

1.3. Théorème. (Théorème de Kronecker-Heitmann, avec la dimension de Krull, non noethérien)

1. *Soit $n \geqslant 0$. Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$ et b_1, …, $b_n \in \mathbf{A}$, il existe x_1, …, x_n tels que pour tout $a \in \mathbf{A}$, $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$.*
2. *En conséquence, dans un anneau de dimension de Krull $\leqslant n$, tout idéal de type fini a même nilradical qu'un idéal engendré par au plus $n + 1$ éléments.*

▷ *1.* Clair d'après le lemme 1.2 et la proposition XIII-2.8 (si $n = 0$, l'anneau est trivial et $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\emptyset)$).
2. Découle de *1* car il suffit d'itérer le processus. En fait, si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant n$ et $\mathfrak{a} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_{n+r})$ $(r \geqslant 2)$, on obtient en fin de compte

$$\mathfrak{a} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + c_1, \ldots, b_{n+1} + c_{n+1})$$

avec les $c_i \in \langle b_{n+2}, \ldots, b_{n+r}\rangle$. □

Le théorème «stable range» de Bass, 1

1.4. Théorème. (Théorème de Bass, avec la dimension de Krull, sans noethérianité) *Soit $n \geqslant 0$. Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$, alors $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$.*
En abrégé : $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$. *En particulier, si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} < n$, tout $\mathbf{A}$-module stablement libre de rang $\geqslant n$ est libre (voir le théorème V-4.10).*
▷ Rappelons que $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$ signifie que pour tous $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{A}$, il existe des x_i tels que l'implication suivante soit satisfaite :

$$\forall a \in \mathbf{A} \quad (1 \in \langle a, b_1, \ldots, b_n\rangle \Rightarrow 1 \in \langle b_1 + ax_1, \ldots, b_n + ax_n\rangle).$$

Cela résulte directement du premier point dans le théorème 1.3. □

Le théorème de Kronecker local

1.5. Proposition et définition. *Dans un anneau on considère deux suites $(a_0, \ldots, a_d)$ et $(x_0, \ldots, x_d)$ telles que*

$$\begin{cases} a_0x_0 \in \mathrm{D}(0) \\ a_1x_1 \in \mathrm{D}(a_0, x_0) \\ a_2x_2 \in \mathrm{D}(a_1, x_1) \\ a_3x_3 \in \mathrm{D}(a_2, x_2) \\ \qquad\vdots \\ a_dx_d \in \mathrm{D}(a_{d-1}, x_{d-1}) \end{cases}$$

On dira que ces deux suites sont disjointes. *Alors pour $0 \leqslant i < d$, on a*

$$\mathrm{D}(a_0, \ldots, a_i, x_0, \ldots, x_i, a_{i+1}x_{i+1}) = \mathrm{D}(a_0 + x_0, \ldots, a_i + x_i).$$

▷ Une inclusion est évidente. Pour démontrer l'inclusion réciproque, on utilise les égalités $\mathrm{D}(a_i, x_i) = \mathrm{D}(a_ix_i, a_i + x_i)$.
Il vient alors successivement

$$\begin{array}{rcccccc}
a_0x_0 \in & \mathrm{D}(0) & = & \mathrm{D}() & = \mathrm{D}() & & \\
 & & & & \cap\mid & & \\
a_0, x_0, a_1x_1 \in \mathrm{D}(a_0, x_0) & = & \mathrm{D}(a_0x_0, a_0+x_0) & & = \mathrm{D}(a_0+x_0) & & \\
 & & & & \cap\mid & & \\
a_1, x_1, a_2x_2 \in \mathrm{D}(a_1, x_1) & = & \mathrm{D}(a_1x_1, a_1+x_1) & \subseteq & \mathrm{D}(a_0+x_0, a_1+x_1) & & \\
 & & & & & \cap\mid & \\
a_2, x_2, a_3x_3 \in \mathrm{D}(a_2, x_2) & = & \mathrm{D}(a_2x_2, a_2+x_2) & \subseteq & \mathrm{D}(a_0+x_0, a_1+x_1, a_2+x_2) & & \\
\vdots \quad \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
a_i, x_i, a_{i+1}x_{i+1} \in \mathrm{D}(a_i, x_i) & = & \mathrm{D}(a_ix_i, a_i+x_i) & \subseteq & \mathrm{D}(a_0+x_0, \ldots, a_i+x_i). & &
\end{array}$$

□

Notons que les suites $(a_0, \ldots, a_d)$ et $(x_0, \ldots, x_d)$ sont complémentaires si, et seulement si, elles sont disjointes et $1 \in \langle a_d, x_d \rangle$.

1.6. Théorème. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau local résiduellement discret de dimension inférieure ou égale à* d*, de radical de Jacobson* $\mathfrak{m}$*. On suppose que* $\mathfrak{m}$ *est* radicalement de type fini*, i.e., qu'il existe* $z_1, \ldots, z_n \in \mathbf{A}$ *tels que* $\mathfrak{m} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(z_1, \ldots, z_n)$*. Alors* $\mathfrak{m}$ *est radicalement engendré par* d *éléments.*

▷ Puisque $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$ et $\mathfrak{m}$ est radicalement de type fini, le théorème de Kronecker 1.3 nous dit que $\mathfrak{m} = \mathrm{D}(x_0, \ldots, x_d)$. En outre, il existe une suite $(\underline{a}) = (a_0, \ldots, a_d)$ complémentaire de $(\underline{x}) = (x_0, \ldots, x_d)$. En particulier (suites disjointes), pour tout $i \leqslant d$, on a

$$\mathrm{D}(a_0, \ldots, a_{i-1}, x_0, \ldots, x_{i-1}, a_ix_i) = \mathrm{D}(a_0 + x_0, \ldots, a_{i-1} + x_{i-1}),$$

mais aussi (suites complémentaires) $1 \in \langle a_d, x_d \rangle$. Ceci montre que a_d est inversible puisque $x_d \in \mathfrak{m}$. Soit i le plus petit indice tel que a_i soit inversible (ici on utilise l'hypothèse que $\mathfrak{m}$ est détachable).

Il vient alors a_0, …, $a_{i-1} \in \mathfrak{m}$, puis

$$\mathrm{D}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i) \subseteq \mathrm{D}(a_0 + x_0, \ldots, a_{i-1} + x_{i-1}) \subseteq \mathfrak{m},$$

et enfin

$$\mathfrak{m} = \mathrm{D}(x_0, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_d) \subseteq \mathrm{D}(\underbrace{a_0 + x_0, \ldots, a_{i-1} + x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_d}_{d \text{ éléments}}) \subseteq \mathfrak{m}.$$

□

Remarque. Pour une généralisation voir les exercices XV-7 et XV-8. ■

2. Dimension de Heitmann et théorème de Bass

Nous allons introduire une nouvelle dimension, que nous appellerons la dimension de Heitmann d'un anneau commutatif. Sa définition sera calquée sur la définition inductive de la dimension de Krull, et nous la noterons Hdim. Auparavant, nous introduisons la dimension Jdim définie par Heitmann.

2.1. Définition et notation.

- Si $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathbf{A}$ on note $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ son *radical de Jacobson*, c'est-à-dire l'image réciproque de $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$ par la projection canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$.
- Si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ on notera $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ pour $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$. En particulier, $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0) = \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$.
- On note $\mathsf{Heit}\,\mathbf{A}$ l'ensemble des idéaux $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$. On l'appelle le *treillis de Heitmann* de l'anneau $\mathbf{A}$.
- On définit $\mathsf{Jdim}\,\mathbf{A}$ comme égale à $\mathsf{Kdim}(\mathsf{Heit}\,\mathbf{A})$.

On a donc $x \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ si, et seulement si, pour tout $y \in \mathbf{A}$, $1 + xy$ est inversible modulo $\mathfrak{a}$. Autrement dit encore

$$x \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) \iff 1 + x\mathbf{A} \subseteq (1 + \mathfrak{a})^{\mathrm{sat}},$$

et $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ est le plus grand idéal $\mathfrak{b}$ tel que $1 + \mathfrak{b} \subseteq (1 + \mathfrak{a})^{\mathrm{sat}}$.
On a donc $\big(1 + \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big)^{\mathrm{sat}} = (1 + \mathfrak{a})^{\mathrm{sat}}$ et $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$.
En particulier $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)\big) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$ et l'anneau $\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ a son radical de Jacobson réduit à 0.

2.2. Lemme.

1. *Pour un idéal arbitraire* $\mathfrak{a}$ *on a* $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big)$.
   En conséquence, $\mathsf{Heit}\,\mathbf{A}$ *est un treillis distributif quotient de* $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$.
2. *Pour* $u, v \in \mathbf{A}$ *on a*
$$\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u, v) \;=\; \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u + v, uv) \;=\; \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u + v) \vee \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(uv).$$
   En particulier, si $uv \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$, *alors* $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u + v)$.

▷ On a $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$, donc $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})\big)$.
L'égalité $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(u+v, uv)$ implique donc $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u, v) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(u+v, uv)$.□

Commentaire. La Jdim introduite par Heitmann dans [99] correspond à l'espace spectral $\mathsf{Jspec}\,\mathbf{A}$ suivant : c'est le plus petit sous-espace spectral de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ contenant l'ensemble $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$ des idéaux maximaux de $\mathbf{A}$. Cet espace peut être décrit comme l'adhérence de $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$ dans $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ pour la topologie constructible, topologie ayant pour système générateur d'ouverts les $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a)$ et leurs complémentaires $\mathfrak{V}_{\mathbf{A}}(a)$. Heitmann remarque que la dimension utilisée dans le théorème de Swan ou dans le Splitting Off de Serre, à savoir la dimension de $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$, ne fonctionne bien que dans le cas

où cet espace est noethérien. En outre, dans ce cas, la dimension de $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$ est celle d'un espace spectral, l'espace $\mathsf{jspec}\,\mathbf{A}$ formé par les idéaux premiers qui sont intersections d'idéaux maximaux. Par contre, dans le cas général, le sous-espace $\mathsf{jspec}\,\mathbf{A}$ de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ n'est plus spectral, et donc, selon une remarque qu'il qualifie de philosophique, $\mathsf{jspec}\,\mathbf{A}$ doit être remplacé par l'espace spectral qui s'offre naturellement comme solution de rechange, à savoir $\mathsf{Jspec}\,\mathbf{A}$. En fait, $\mathsf{Jspec}\,\mathbf{A}$ s'identifie au spectre du treillis distributif $\mathsf{Heit}\,\mathbf{A}$ (voir [47, Théorème 2.11]). Et les ouverts quasi-compacts de $\mathsf{Jspec}\,\mathbf{A}$ forment un treillis quotient de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$, canoniquement isomorphe à $\mathsf{Heit}\,\mathbf{A}$. En mathématiques constructives, on définit donc $\mathsf{Jdim}\,\mathbf{A}$ comme égale à $\mathsf{Kdim}(\mathsf{Heit}\,\mathbf{A})$. ∎

La définition de la dimension de Heitmann qui est donnée ci-après est assez naturelle, dans la mesure où elle mime la définition constructive de la dimension de Krull en remplaçant $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}$ par $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}$.

2.3. Définition. Soit $\mathbf{A}$ un anneau commutatif, $x \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini. Le *bord de Heitmann de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathbf{A}$ est l'anneau quotient $\mathbf{A}^{\mathfrak{a}}_{\mathrm{H}} := \mathbf{A}/\mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$ avec

$$\mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) := \mathfrak{a} + (\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0) : \mathfrak{a}).$$

Cet idéal est appelé le *l'idéal bord de Heitmann de* $\mathfrak{a}$ *dans* $\mathbf{A}$.
On notera aussi $\mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(x) := \mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(x\mathbf{A})$ et $\mathbf{A}^{x}_{\mathrm{H}} := \mathbf{A}/\mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(x)$.

2.4. Définition. La *dimension de Heitmann* de $\mathbf{A}$ est définie par récurrence comme suit :

- $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} = -1$ si, et seulement si, $1_{\mathbf{A}} = 0_{\mathbf{A}}$.
- Soit $\ell \geqslant 0$, on a l'équivalence :
$$\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} \leqslant \ell \iff \text{pour tout } x \in \mathbf{A},\ \mathsf{Hdim}(\mathbf{A}^{x}_{\mathrm{H}}) \leqslant \ell - 1.$$

Cette dimension est inférieure ou égale à la Jdim définie par Heitmann dans [99], c'est-à-dire la dimension de Krull du treillis distributif $\mathsf{Heit}(\mathbf{A})$.

2.5. Fait.

1. *La dimension de Heitmann ne peut que diminuer par passage à un anneau quotient.*
2. *La dimension de Heitmann est toujours inférieure ou égale à la dimension de Krull.*
3. *Plus précisément* $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\left(\mathbf{A}/\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)\right) \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$.
4. *Enfin* $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$ *si, et seulement si,* $\mathsf{Kdim}\left(\mathbf{A}/\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)\right) \leqslant 0$ *(i.e.,* $\mathbf{A}$ *est résiduellement zéro-dimensionnel).*

▷ *1.* Par récurrence sur $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}$([2]) en remarquant que pour tout $x \in \mathbf{A}$, l'anneau $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})^x_{\mathrm{H}}$ est un quotient de $\mathbf{A}^x_{\mathrm{H}}$.
2. Par récurrence sur $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ (en utilisant *1*) en remarquant que $\mathbf{A}^x_{\mathrm{H}}$ est un quotient de $\mathbf{A}^x_{\mathrm{K}}$.
3 et *4.* Soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$. Alors $\mathrm{J}_{\mathbf{B}}(0) = \langle 0\rangle$, et l'on a $\mathbf{A}^x_{\mathrm{H}} \simeq \mathbf{B}^{\overline{x}}_{\mathrm{H}} = \mathbf{B}^{\overline{x}}_{\mathrm{K}}$ pour tout $x \in \mathbf{A}$. □

Le théorème «stable range» de Bass, 2

2.6. Théorème. (Théorème de Bass, avec la dimension de Heitmann, sans noethérianité) *Soit* $n \geqslant 0$. *Si* $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} < n$, *alors* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$.
En abrégé : $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}$. *En particulier si* $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} < n$, *tout* $\mathbf{A}$*-module stablement libre de rang* $\geqslant n$ *est libre.*

▷ La même démonstration donnerait le théorème 1.4 en remplaçant le bord de Heitmann par le bord de Krull. Rappelons que $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$ signifie que pour tous $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{A}$, il existe des x_i tels l'implication suivante soit satisfaite :

$$\forall a \in \mathbf{A} \quad (1 \in \langle a, b_1, \ldots, b_n\rangle \Rightarrow 1 \in \langle b_1 + ax_1, \ldots, b_n + ax_n\rangle).$$

On rappelle que $1 \in \langle L\rangle$ équivaut à $1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L)$ pour toute liste L. On raisonne par récurrence sur n.
Lorsque $n = 0$ l'anneau est trivial et $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(1) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(\emptyset)$.
Supposons $n \geqslant 1$. Posons $\mathfrak{j} = \mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(b_n)$. L'hypothèse de récurrence nous donne $x_1, \ldots, x_{n-1} \in \mathbf{A}$ tels que

$$1 \in \langle b_1 + x_1 a, \ldots, b_{n-1} + x_{n-1}a\rangle \quad \text{dans} \quad \mathbf{A}/\mathfrak{j}. \tag{1}$$

Notons $L = (b_1 + x_1 a, \ldots, b_{n-1} + x_{n-1}a)$. Un élément arbitraire de $\mathfrak{j}$ s'écrit sous la forme $b_n y + x$ avec $xb_n \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$. L'appartenance (1) signifie donc qu'il existe un x_n tel que

$$x_n b_n \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0) \quad \text{et} \quad 1 \in \langle L, b_n, x_n\rangle\,.$$

A fortiori

$$1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n) \vee \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(x_n). \tag{2}$$

Notons que par hypothèse $1 \in \langle a, b_1, \ldots, b_n\rangle = \langle L, b_n, a\rangle$. Donc

$$1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n, a) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n) \vee \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(a). \tag{3}$$

Comme $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(x_n a) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(a) \wedge \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(x_n)$, (2) et (3) donnent par distributivité

$$1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n) \vee \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(x_n a) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a).$$

Puisque $b_n\, x_n\, a \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$, le lemme 2.2 donne $\mathrm{J}_{\mathbf{A}}(b_n, x_n a) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(b_n + x_n a)$,

2. En fait par récurrence sur n si $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} \leqslant n$.

et donc

$$1 \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a) = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a),$$

ce qui était le but recherché. □

Variante «améliorée» du théorème de Kronecker

2.7. Lemme.
Soient a, c_1, …, c_m, u, v, $w \in \mathbf{A}$ et notons $Z = (c_1, \dots, c_m)$.

1. $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z) \iff 1 \in \langle Z \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$.
2. $\big(w \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}[a^{-1}])$ *et* $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, w)\big) \Longrightarrow a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z)$.
3. $\big(uv \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}[a^{-1}])$ *et* $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, u, v)\big) \Longrightarrow a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, u + v)$.

▷ *1.* Immédiat.
2. Supposons $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, w)$ et travaillons dans l'anneau $\mathbf{A}[a^{-1}]$.
On a $1 \in \langle Z \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]} + \langle w \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$, et comme w est dans $\mathrm{Rad}(\mathbf{A}[a^{-1}])$, cela implique que $1 \in \langle Z \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$, i.e. $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z)$.
3. Résulte du point *2* car $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, u, v) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, u + v, uv)$ (lemme 1.1). □

Remarque. On peut se demander si l'idéal $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}[a^{-1}]$ est le meilleur possible. La réponse est oui. L'implication du point *2* est vérifiée (pour tout Z) en remplaçant $\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}[a^{-1}]$ par $\mathfrak{J}$ si, et seulement si, $\mathfrak{J} \subseteq \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}[a^{-1}]$. ■

2.8. Lemme.
Supposons que $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}[1/a] < n$, $L \in \mathbf{A}^n$ *et* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b, L)$. *Alors il existe* $X \in \mathbf{A}^n$ *tel que* $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b, L)$, *ce qui équivaut à* $b \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX)$, *ou encore à* $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX)$. *En outre, nous pouvons prendre* $X = aY$ *avec* $Y \in \mathbf{A}^n$.

▷ *Remarque préliminaire.* Si $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b, L)$, on a $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX)$ car $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b, L)$. Réciproquement, si $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX)$, on a $b \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX)$ (puisque $b \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$), donc $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b, L)$.
On raisonne par récurrence sur n. Le cas $n = 0$ est trivial.
On pose $L = (b_1, \dots, b_n)$ et on commence par chercher $X \in \mathbf{A}^n$.
Soient $\mathfrak{j} = \mathcal{J}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}[1/a]}(b_n)$ et $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/(\mathfrak{j} \cap \mathbf{A})$, où $\mathfrak{j} \cap \mathbf{A}$ est mis pour «l'image réciproque de $\mathfrak{j}$ dans $\mathbf{A}$». On a une identification $\mathbf{A}[1/a]/\mathfrak{j} = \mathbf{A}'[1/a]$.
Comme $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}'[1/a] < n - 1$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathbf{A}'$ et $(a, b, b_1, \dots, b_{n-1})$, en remarquant que $b_n = 0$ dans $\mathbf{A}'$. On obtient alors x_1, …, $x_{n-1} \in \mathbf{A}$ tels que, en notant $Z = (b_1 + bx_1, \dots, b_{n-1} + bx_{n-1})$, on ait $\mathrm{D}(Z) = \mathrm{D}(b, b_1, \dots, b_{n-1})$ dans $\mathbf{A}'$. D'après la remarque préliminaire, cette dernière égalité équivaut à $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}'}(Z)$, ce qui, d'après le lemme 2.7 *1*, signifie $1 \in \langle Z \rangle$ dans $\mathbf{A}'[1/a]$, i.e. $1 \in \langle Z \rangle + \mathfrak{j}$ dans $\mathbf{A}[1/a]$. Par définition du bord de Heitmann, cela veut dire qu'il existe x_n, que l'on peut choisir dans $\mathbf{A}$, tel que $x_n b_n \in \mathrm{Rad}\,\mathbf{A}[1/a]$ et $1 \in \langle Z, b_n, x_n \rangle_{\mathbf{A}[1/a]}$.
On a donc $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, b_n, x_n)$. Mais on a aussi $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, b_n, b)$, puisque

$$\langle Z, b_n, b\rangle = \langle b_1, , \dots, b_{n-1}, b_n, b\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle L, b\rangle,$$

et que $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L, b)$ par hypothèse. Bilan : $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, b_n, x_n)$, $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, b_n, b)$ donc $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, b_n, bx_n)$. L'application du lemme 2.7 *3* avec $u = b_n$, $v = bx_n$ fournit $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(Z, b_n + bx_n)$, i.e. $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + bX)$ où $X = (x_1, \dots, x_n)$.
Enfin, si $b^p \in \langle a\rangle_{\mathbf{A}}$, nous pouvons appliquer le résultat avec b^{p+1} à la place de b puisque $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b^{p+1})$. Alors $L + b^{p+1}X$ se réécrit $L + baY$. □

Pour $a \in \mathbf{A}$, on a toujours $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}[1/a] \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[1/a] \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$. Par conséquent le théorème suivant améliore le théorème de Kronecker.

2.9. Théorème. (Théorème de Kronecker, dimension de Heitmann)

1. *Soit $n \geqslant 0$. Si a, b_1, …, $b_n \in \mathbf{A}$ et $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}[a^{-1}] < n$, alors il existe x_1, …, $x_n \in \mathbf{A}$ tels que*
$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n).$$
2. *En conséquence, si a_1, …, a_r, b_1, …, $b_n \in \mathbf{A}$ et $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}[1/a_i] < n$ pour $i \in [\![1..r]\!]$, alors il existe y_1, …, $y_n \in \langle a_1, \dots, a_r\rangle$ tels que*
$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + y_1, \dots, b_n + y_n).$$

D *1.* Conséquence directe du lemme 2.8 en faisant $a = b$.
2. Se déduit de *1* par récurrence sur r :

$$\begin{aligned}\mathfrak{a} &= \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_{r-1}, b_1, \dots, b_n) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_r)\\ &= \mathfrak{b} \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_r), \quad \text{avec}\\ \mathfrak{b} &= \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + z_1, \dots, b_n + z_n)\end{aligned}$$

où z_1, …, $z_n \in \langle a_1, \dots, a_{r-1}\rangle$, donc $\mathfrak{a} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_r, b_1 + z_1, \dots, b_n + z_n)$, et l'on applique une nouvelle fois le résultat. □

3. Le Splitting-off de Serre, le théorème de Forster-Swan, et le théorème de simplification de Bass

Dans cette section, nous expliquons quelles sont les propriétés matricielles d'un anneau qui permettent de faire fonctionner les théorèmes de Serre (Splitting-off) et de Forster-Swan (contrôle du nombre de générateurs d'un module de type fini en fonction du nombre de générateurs local).
Les sections suivantes consisteront à développer des résultats qui montrent que certains anneaux satisfont les propriétés matricielles en question. Les premiers anneaux qui sont apparus (grâce à Serre et Forster) étaient les anneaux noethériens avec certaines propriétés de dimension (la dimension de Krull pour Forster et la dimension du spectre maximal pour Serre et Swan). Plus tard Heitmann a montré comment se débarrasser de la noethérianité concernant la dimension de Krull, et a donné les idées directrices pour faire le même travail avec la dimension du spectre maximal. En outre Bass a

aussi introduit une généralisation dans laquelle il remplaçait la dimension de Krull par le maximum des dimensions de Krull pour les anneaux associés à une partition du spectre de Zariski en sous-ensembles constructibles. Enfin, Coquand apporta une lumière « définitive » sur ces questions en généralisant les résultats et en les traitant de manière constructive grâce à deux notions sous-jacentes aux preuves antérieures : la n-stabilité d'une part, la dimension de Heitmann d'autre part. L'aspect purement matriciel des problèmes à résoudre a été clairement mis en évidence dans un article de synthèse d'Eisenbud-Evans. La section ici peut être considérée comme une approche non noethérienne et constructive de ces derniers travaux.

3.1. Définition. Soit un anneau $\mathbf{A}$ et un entier $n \geqslant 0$.

1. On écrit $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < n$ si, pour toute matrice F de rang $\geqslant n$, il y a une combinaison linéaire des colonnes qui est unimodulaire.
   Autrement dit $1 = \mathcal{D}_n(F) \Rightarrow \exists X,\ 1 = \mathcal{D}_1(FX)$
2. On écrit $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ lorsque la propriété suivante est satisfaite. Pour toute matrice $F = [\,C_0 \,|\, C_1 \,|\, \dots \,|\, C_p\,]$ (les C_i sont les colonnes, et on note $G = [\,C_1 \,|\, \dots \,|\, C_p\,]$) telle que $1 = \mathcal{D}_1(C_0) + \mathcal{D}_n(G)$, il y a une combinaison linéaire des colonnes, avec le premier coefficient égal à 1, qui est unimodulaire.

Dans l'acronyme Sdim, S fait allusion à « splitting » ou à « Serre » et est justifié par le théorème 3.4. De même, dans Gdim, G fait allusion à « générateurs » et est justifié par le théorème 3.6.
Les notations $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < n$ et $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ sont justifiées par les implications évidentes, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < n \Rightarrow \mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < n+1 \text{ et } \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n \Rightarrow \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n+1.$$

Notez que $\mathcal{D}_n(F) \subseteq \mathcal{D}_1(C_0) + \mathcal{D}_n(G)$, et par conséquent l'hypothèse pour F dans $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < n$ implique l'hypothèse pour F dans $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$. Par ailleurs la conclusion dans $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ est plus forte. Cela donne le point *2* qui suit.

3.2. Fait.

1. $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < 0 \iff \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < 0 \iff$ *l'anneau* $\mathbf{A}$ *est trivial.*
2. *Pour tout* $n \geqslant 0$, *on a* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n \implies \mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < n$.
   On note en abrégé $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A}$.
3. *Si* $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$, *on a* $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Sdim}\,\mathbf{A}$ *et* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{B} \leqslant \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A}$.
4. *On a* $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Sdim}\,\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$ *et* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A}/\mathrm{Rad}\,\mathbf{A}$.
5. *Si* $\mathbf{A}$ *est* n*-stable (section 4), alors* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ *(théorème 5.3).*
   En abrégé, $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}$.
6. *Si* $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} < n$, *alors* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ *(théorème 5.7).*
   En abrégé, $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}$.

▷ Il faut seulement démontrer les points *3* et *4*. Le point *4* est clair parce qu'un élément de $\mathbf{A}$ est inversible dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, il est inversible dans $\mathbf{A}/(\operatorname{Rad}\mathbf{A})$.
3 pour Sdim. Soit $F \in \mathbf{A}^{m\times r}$ avec $\mathcal{D}_n(F) = 1$ modulo $\mathfrak{a}$. Si $n > \inf(m, r)$ on obtient $1 \in \mathfrak{a}$ et tout va bien. Sinon, soit $a \in \mathfrak{a}$ tel que $1 - a \in \mathcal{D}_n(F)$.
On considère la matrice $H \in \mathbf{A}^{(m+n)\times r}$ obtenue en superposant F et la matrice $a\mathrm{I}_n$ suivie de $r - n$ colonnes nulles.
On a $1 - a^n \in \mathcal{D}_n(F)$, donc $1 \in \mathcal{D}_n(H)$. Une combinaison linéaire des colonnes de H est unimodulaire. La même combinaison linéaire des colonnes de F est unimodulaire modulo $\mathfrak{a}$.
3 pour Gdim. La même technique fonctionne, mais il suffit ici de considérer la matrice $H \in \mathbf{A}^{(m+1)\times r}$ obtenue en insérant la ligne $[\,a\ 0\ \cdots\ 0\,]$ en dessous de F. □

La démonstration du fait suivant aide à justifier la définition un peu étonnante choisie pour $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$.

3.3. Fait. *Pour tout $n \geqslant 0$, on a $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n \Rightarrow \mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$.*
En abrégé, $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A}$.

▷ Par exemple avec $n = 3$. On considère (a, b_1, b_2, b_3) avec $1 = \langle a, b_1, b_2, b_3\rangle$. On veut des x_i tels que $1 = \langle b_1 + ax_1, b_2 + ax_2, b_3 + ax_3\rangle$. On considère la matrice $F = \begin{bmatrix} b_1 & a & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & a & 0 \\ b_3 & 0 & 0 & a \end{bmatrix} = [\,C_0 \mid G\,]$ avec $G = a\mathrm{I}_3$. On a

$$1 = \mathcal{D}_1(C_0) + \mathcal{D}_3(G), \quad \text{i.e. } 1 = \langle b_1, b_2, b_3\rangle + \left\langle a^3\right\rangle,$$

car $1 = \langle b_1, b_2, b_3\rangle + \langle a\rangle$. En appliquant la définition de $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < 3$ à F, on obtient un vecteur unimodulaire ${}^{\mathrm{t}}[\,b_1 + ax_1\ b_2 + ax_2\ b_3 + ax_3\,]$. □

Le théorème Splitting Off de Serre

La version suivante du théorème de Serre est relativement facile, la partie délicate étant d'établir que $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < k$ pour un anneau $\mathbf{A}$. Modulo les théorèmes 5.3 et 5.7 on obtient les vraies versions fortes du théorème.

3.4. Théorème. (Théorème Splitting Off de Serre, pour la Sdim)
Soit $k \geqslant 1$ et soit M un $\mathbf{A}$-module projectif de rang $\geqslant k$, ou plus généralement isomorphe à l'image d'une matrice de rang $\geqslant k$.
Supposons que $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < k$. *Alors $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$ pour un certain module N isomorphe à l'image d'une matrice de rang $\geqslant k - 1$.*

▷ Soit $F \in \mathbf{A}^{n\times m}$ une matrice avec $\mathcal{D}_k(F) = 1$. Par définition, on a un vecteur $u = {}^{\mathrm{t}}[\,u_1\ \cdots\ u_n\,] \in \operatorname{Im} F$ qui est unimodulaire dans $\mathbf{A}^n$. Donc $\mathbf{A}u$ est un sous-module libre de rang 1 en facteur direct dans $\mathbf{A}^n$, et a fortiori dans M. Précisément, si $P \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$ est un projecteur d'image $\mathbf{A}u$, on obtient $M = \mathbf{A}u \oplus N$ avec

$$N = \mathrm{Ker}(P) \cap M = (\mathrm{I}_n - P)(M) = \mathrm{Im}\big((\mathrm{I}_n - P)\,F\big).$$

Il nous reste à voir que $(\mathrm{I}_n - P)\,F$ est de rang $\geqslant k-1$. Quitte à localiser et à faire un changement de base, on peut supposer que P est la projection standard $\mathrm{I}_{1,n}$. Alors la matrice $G = (\mathrm{I}_n - P)\,F$ est la matrice F dans laquelle on a remplacé sa première ligne par 0, et il est clair que $\mathcal{D}_k(F) \subseteq \mathcal{D}_{k-1}(G)$. □

Ainsi, précisément, si M est l'image de $F \in \mathbf{A}^{n\times m}$ de rang $\geqslant k$, on obtient une décomposition $M = N \oplus L$ où L est libre de rang 1 en facteur direct dans $\mathbf{A}^n$ et N isomorphe à l'image d'une matrice de rang $\geqslant k-1$. Si maintenant F est de rang plus grand, on peut itérer le processus et on a le corollaire suivant (avec la correspondance $h \leftrightarrow k-1$).

3.5. Corollaire. *Soit un anneau* $\mathbf{A}$ *tel que* $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant h$ *et soit* M *un* $\mathbf{A}$*-module isomorphe à l'image d'une matrice de rang* $\geqslant h+s$*. Alors* M *contient en facteur direct un sous-module libre de rang* s*. Précisément, si* M *est l'image d'une matrice* $F \in \mathbf{A}^{n\times m}$ *de rang* $\geqslant h+s$*, on a* $M = N \oplus L$ *où* L *est libre de rang* s *en facteur direct dans* $\mathbf{A}^n$*, et* N *est l'image d'une matrice de rang* $\geqslant h$*.*

Le théorème de Forster-Swan

Rappelons qu'un module de type fini M est dit localement engendré par r éléments si $\mathcal{F}_r(M) = 1$. Voir à ce sujet le lemme du nombre de générateurs local IX-2.4.

Le théorème de Forster-Swan ci-dessous a d'abord été établi pour la dimension de Krull (Kdim à la place de Gdim). La version présentée ici est relativement facile, et la partie délicate est d'établir que $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ pour tout anneau $\mathbf{A}$. Modulo les théorèmes 5.3 et 5.7 on obtient les meilleures versions connues du théorème, sous forme entièrement constructive.

3.6. Théorème. (Théorème de Forster-Swan pour la Gdim) *Soit* $k \geqslant 0$ *et* $r \geqslant 1$*. Si* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$*, ou même si* $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$ *et* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} \leqslant k+r$*, et si un* $\mathbf{A}$*-module de type fini* M *est localement engendré par* r *éléments, alors il est engendré par* $k+r$ *éléments. Dans le premier cas, plus précisément, si* $M = \langle y_1, \ldots, y_{k+r+s}\rangle$*, on peut calculer*

$$z_1, \ldots, z_{k+r} \in \langle y_{k+r+1}, \ldots, y_{k+r+s}\rangle$$

tels que M *soit engendré par* $(y_1 + z_1, \ldots, y_{k+r} + z_{k+r})$*.*

▷ Puisque M est de type fini et $\mathcal{F}_r(M) = 1$, M est le quotient d'un module de présentation finie M' vérifiant $\mathcal{F}_r(M') = 1$. On peut donc supposer que M est de présentation finie.

On part d'un système générateur à plus que $k+r$ éléments et on va le remplacer par un système générateur de la forme annoncée avec un élément de moins. Soit donc $(y_0, y_1, \ldots, y_p)$ un système générateur de M avec $p \geqslant k+r$, et F une matrice de présentation de M pour ce système.

Alors par hypothèse $1 = \mathcal{F}_r(M) = \mathcal{D}_{p+1-r}(F)$, et puisque $p+1-r \geqslant k+1$ on a $1 = \mathcal{D}_{k+1}(F)$.
Premier cas. Notons $L_0, \ldots, L_p$ les lignes de F. Nous appliquons la définition de $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < k+1$ avec la matrice transposée de F (qui est de rang $\geqslant k+1$). Nous obtenons des t_i tels que la ligne $L_0 + t_1 L_1 + \cdots + t_p L_p$ soit unimodulaire. Remplacer la ligne L_0 par la ligne $L_0 + t_1 L_1 + \cdots + t_p L_p$ revient à remplacer le système générateur $(y_0, y_1, \ldots, y_p)$ par

$$(y_0, y_1 - t_1 y_0, \ldots, y_p - t_p y_0) = (y_0, y'_1, \ldots, y'_p).$$

Puisque la nouvelle ligne L_0 est unimodulaire, une combinaison linéaire convenable des colonnes est de la forme ${}^{\mathrm{t}}[\,1\ y_1\ \cdots\ y_p\,]$. Cela signifie que l'on a $y_0 + y_1 y'_1 + \cdots + y_p y'_p = 0$ dans M, et donc que $(y'_1, \ldots, y'_p)$ engendre M.
Deuxième cas. Nous appliquons la définition de $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} < k+1$ avec la matrice F. Nous obtenons une combinaison linéaire de colonnes qui est unimodulaire, et nous rajoutons cette colonne en première position devant F. Puis, en appliquant le fait V-4.9 avec $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < k+r+1 \leqslant p+1$, par manipulation élémentaire de lignes, nous obtenons une nouvelle matrice de présentation de M (pour un autre système générateur) avec la première colonne égale à ${}^{\mathrm{t}}[\,1\,0\,\cdots\,0\,]$. Cela signifie que le premier élément du nouveau système générateur est nul. □

Le théorème 3.6 est évidemment valable en remplaçant l'anneau $\mathbf{A}$ par l'anneau $\mathbf{A}/\mathrm{Ann}(M)$ ou $\mathbf{A}/\mathcal{F}_0(M)$. Nous proposons en 3.8 un raffinement un peu plus subtil.

3.7. Proposition. *Notons $F = [\,C_0 \,|\, C_1 \,|\, \ldots \,|\, C_p\,] \in \mathbf{A}^{n\times(p+1)}$ (les C_i sont les colonnes) et $G = [\,C_1 \,|\, \ldots \,|\, C_p\,]$, de sorte que $F = [\,C_0 \,|\, G\,]$.*
Si $1 \in \mathcal{D}_1(F)$ et si l'on a $\mathsf{Gdim}(\mathbf{A}/\mathcal{D}_{k+1}(F)) < k$ pour $k \in [\![1..q]\!]$, alors il existe $t_1, \ldots, t_p$ tels que le vecteur $C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p$ est unimodulaire modulo $\mathcal{D}_{q+1}(F)$.
▷ On considère d'abord l'anneau $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}/\mathcal{D}_2(F)$. Puisque $1 = \mathcal{D}_1(F)$ et $\mathsf{Gdim}(\mathbf{A}_2) < 1$, on obtient des $t_{1,i}$ et $C_{1,0} = C_0 + t_{1,1} C_1 + \cdots + t_{1,p} C_p$ tels que $1 = \mathcal{D}_1(C_{1,0})$ modulo $\mathcal{D}_2(F)$, c'est-à-dire $1 = \mathcal{D}_1(C_{1,0}) + \mathcal{D}_2(G)$. On change F en F_1 en remplaçant C_0 par $C_{1,0}$ sans changer G. Notons que l'on a $\mathcal{D}_i(F_1) = \mathcal{D}_i(F)$ pour tout i.
On considère ensuite l'anneau $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}/\mathcal{D}_3(F_1)$ avec $\mathsf{Gdim}(\mathbf{A}_3) < 2$.
Puisque $1 = \mathcal{D}_1(C_{1,0}) + \mathcal{D}_2(G)$, on obtient $C_{2,0} = C_{1,0} + t_{2,1} C_1 + \cdots + t_{2,p} C_p$ tel que $1 = \mathcal{D}_1(C_{2,0})$ modulo $\mathcal{D}_3(F)$, c'est-à-dire $1 = \mathcal{D}_1(C_{2,0}) + \mathcal{D}_3(G)$. On change F_1 en F_2 en remplaçant $C_{1,0}$ par $C_{2,0}$ sans changer G. On a de nouveau $\mathcal{D}_i(F_2) = \mathcal{D}_i(F)$ pour tout i.
On continue de la même manière jusqu'à obtenir un vecteur $C_{q,0}$ de la forme $C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p$ unimodulaire modulo $\mathcal{D}_{q+1}(F)$. □

3.8. Théorème. (Théorème de Forster-Swan, plus général, pour la Gdim) *Soit M un module de type fini sur $\mathbf{A}$. Notons $\mathfrak{f}_k = \mathcal{F}_k(M)$ ses idéaux de Fitting. Supposons que $1 \in \mathfrak{f}_m$ (i.e., M est localement engendré par m éléments) et que pour $k \in [\![0..m-1]\!]$, on a $\mathsf{Gdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{f}_k) < m-k$. Alors M est engendré par m éléments. Plus précisément, si $M = \langle y_1, \dots, y_{m+s}\rangle$, on peut calculer des z_i, dans $\langle y_{m+1}, \dots, y_{m+s}\rangle$ tels que $M = \langle y_1 + z_1, \dots, y_m + z_m\rangle$.*

▷ Puisque $\mathfrak{f}_0$ annule M, on peut remplacer $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}/\mathfrak{f}_0$, ou, ce qui revient au même, supposer que $\mathfrak{f}_0 = \mathcal{F}_0(M) = 0$, ce que nous faisons désormais.

On considère un système générateur de M avec plus que m éléments et on va le remplacer par un système générateur de la forme annoncée avec un élément de moins. Soit donc $(y_0, y_1, \dots, y_p)$ un système générateur de M avec $p \geqslant m$.

Lorsque le module est de présentation finie on raisonne comme pour le théorème 3.6.

Soit F une matrice de présentation de M pour le système générateur considéré. On a $\mathfrak{f}_{k+1} = \mathcal{D}_{p-k}(F)$, et en particulier $1 \in \mathfrak{f}_p = \mathcal{D}_1(F)$. Les hypothèses de la proposition 3.7 sont alors satisfaites avec $q = p$ pour la matrice transposée de F. Si L_0, …, L_p sont les lignes de F, nous obtenons des t_i avec $L_0 + t_1 L_1 + \cdots + t_p L_p$ unimodulaire modulo $\mathcal{D}_{p+1}(F) = \mathfrak{f}_0 = 0$. On conclut comme au théorème 3.6.

Le raisonnement dans le cas où M est seulement supposé de type fini consiste à montrer que M est le quotient d'un module de présentation finie qui possède une matrice de présentation supportant avec succès la démonstration de la proposition 3.7. Notons $\underline{y} = [\, y_0 \ \cdots \ y_p \,]$. Toute syzygie entre les y_i s'écrit $\underline{y}\, C = 0$ pour un $C \in \mathbf{A}^{p+1}$.

L'idéal de Fitting $\mathfrak{f}_{p+1-i}$ de M est l'idéal Δ_i somme des idéaux déterminantiels $\mathcal{D}_i(F)$, pour les $F \in \mathbf{A}^{(p+1)\times n}$ qui vérifient $\underline{y}\, F = 0$, c'est-à-dire pour les matrices qui sont des « matrices de relations pour $(y_0, \dots, y_p)$ ».

D'après les hypothèses, on a $\Delta_1 = 1$ et $\mathsf{Gdim}(\mathbf{A}/\Delta_{k+1}) < k$ pour $k \in [\![1..p]\!]$.

Le fait que $\Delta_1 = 1$ se constate sur une matrice de syzygies F_1.

On considère la matrice ${}^{\mathrm{t}}F_1$ et l'anneau $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}/\Delta_2$. Comme $\mathsf{Gdim}(\mathbf{A}_2) < 1$, on obtient une combinaison linéaire $C_{1,0}$ des colonnes de ${}^{\mathrm{t}}F_1$ unimodulaire modulo Δ_2, c'est-à-dire encore telle que $1 = \mathcal{D}_1(C_{1,0}) + \Delta_2$. Précisément, on obtient $C_{1,0} = {}^{\mathrm{t}}F_1 X_1$ avec $X_1 = {}^{\mathrm{t}}[\, 1 \ x_{1,1} \ \cdots \ x_{1,p} \,]$.

L'égalité $1 = \mathcal{D}_1(C_{1,0}) + \Delta_2$ fournit un élément $a \in \Delta_2$ obtenu comme combinaison linéaire d'un nombre fini de mineurs d'ordre 2 de matrices de syzygies, et donc $a \in \mathcal{D}_2(F_2)$ pour une matrice de syzygies F_2. On considère alors la matrice $F_2' = [\, F_1 \,|\, F_2 \,]$. Pour la transposée de F_2' on obtient d'abord que la colonne $C_2 = {}^{\mathrm{t}}F_2' X_1$ est unimodulaire. On remplace la première colonne de ${}^{\mathrm{t}}F_2'$ par C_2, ce qui donne une matrice ${}^{\mathrm{t}}F_2''$ qui convient pour les hypothèses de $\mathsf{Gdim}\, \mathbf{A}_3 < 2$ (où $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}/\Delta_3$), i.e. $1 = \mathcal{D}_1(C_2) + \mathcal{D}_2(F_2'')$.

On obtient en définitive une combinaison linéaire $C_{2,0}$ des colonnes de ${}^{\mathrm{t}}F_2'$

unimodulaire modulo Δ_3, c'est-à-dire encore telle que $1 = \mathcal{D}_1(C_{2,0}) + \Delta_3$. Précisément, $C_{2,0} = {}^{\mathrm{t}}F_2' X_2$ avec $X_2 = {}^{\mathrm{t}}[\,1\ x_{2,1}\ \cdots\ x_{2,p}\,]$. Et ainsi de suite. On obtient au bout du compte une matrice de syzygies pour $\underline{y}$,

$$F = [\,F_1 \mid \cdots \mid F_p\,]$$

et un vecteur $X_p = {}^{\mathrm{t}}[\,1\ x_{p,1}\ \cdots\ x_{p,p}\,]$ avec la combinaison linéaire ${}^{\mathrm{t}}F\,X_p$ unimodulaire (car unimodulaire modulo $\Delta_{p+1} = \mathfrak{f}_0 = 0$).
On conclut comme au théorème 3.6. □

Commentaire. Le théorème 3.8 avec Hdim ou Kdim à la place de Gdim a pour conséquence facile en mathématiques classiques des énoncés beaucoup plus abstraits et qui ont l'air beaucoup plus savants. Par exemple l'énoncé usuel du théorème de Forster-Swan [3] (énoncé dans le cas où $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$ est noethérien) utilise le maximum [4], pour $\mathfrak{p} \in \mathsf{jspec}\,\mathbf{A}$ de $\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$: ici $\mu_{\mathfrak{p}}(M)$ est le nombre minimum de générateurs de $M_{\mathfrak{p}}$. Ce genre d'énoncé laisse croire que les idéaux premiers qui sont intersections d'idéaux maximaux jouent un rôle essentiel dans le théorème. En réalité, ce n'est pas nécessaire de faire peur aux enfants avec $\mathsf{jspec}\,\mathbf{A}$. Car ce théorème abstrait est exactement équivalent (dans le cas envisagé, et en mathématiques classiques) au théorème 3.8 pour la Jdim, qui dans le cas envisagé est égale à la Hdim. En outre, d'un strict point de vue pratique on voit mal comment avoir accès au bien mystérieux maximum des $\mu_{\mathfrak{p}}(M) + \mathsf{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$. Par contraste, les hypothèses du théorème 3.8 sont susceptibles d'être certifiées par une démonstration constructive, ce qui conduira dans ce cas à un algorithme permettant d'expliciter la conclusion. ■

Le théorème de simplification de Bass

3.9. Définition. Étant donnés deux modules M et L on dira que M *est simplifiable pour* L si $M \oplus L \simeq N \oplus L$ implique $M \simeq N$.

3.10. Lemme. *Soient M et L deux $\mathbf{A}$-modules. Dans les énoncés suivants on a 1 $\Leftrightarrow$ 2 et 3 $\Rightarrow$ 2.*

1. *M est simplifiable pour L.*
2. *Pour toute décomposition $M \oplus L = M' \oplus L'$ avec $L' \simeq L$, il existe un automorphisme σ de $M \oplus L$ tel que $\sigma(L') = L$.*
3. *Pour toute décomposition $M \oplus L = M' \oplus L'$ avec $L' \simeq L$, il existe un automorphisme θ de $M \oplus L$ tel que $\theta(L') \subseteq M$.*

3. Corollaire 2.14 page 108 dans [Kunz] ou théorème 5.8 page 36 dans [Matsumura]. En outre, les auteurs remplacent $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}/\mathrm{Ann}(M)$, ce qui ne mange pas de pain.

4. Rappelons que $\mathsf{jspec}\,\mathbf{A}$ désigne le sous-espace de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ formé par les idéaux premiers qui sont intersections d'idéaux maximaux.

▷ L'équivalence de *1* et *2* est un jeu de photocopies.
1 ⇒ *2*. On suppose $M \oplus L = M' \oplus L'$. Puisque $L \xrightarrow{\sim} L'$, on obtient un isomorphisme $M \oplus L \xrightarrow{\sim} M' \oplus L$, donc $M \xrightarrow{\sim} M'$. Et l'on obtient en faisant la somme un isomorphisme $M \oplus L \xrightarrow{\sim} M' \oplus L'$, c'est-à-dire un automorphisme de $M \oplus L$ qui envoie L sur L'.
2 ⇒ *1*. On suppose $N \oplus L \xrightarrow{\sim} M \oplus L$. Cet isomorphisme envoie N sur M' et L sur L', de sorte que $M \oplus L = M' \oplus L'$. Il y a donc un automorphisme σ de $M \oplus L$ qui envoie L sur L', et disons M sur M_1. Alors :

$$N \simeq M' \simeq (M' \oplus L')/L' = (M \oplus L)/L' = (M_1 \oplus L')/L' \simeq M_1 \simeq M.$$

3 ⇒ *2*. Puisque $\theta(L')$ est facteur direct dans $M \oplus L$, il est en facteur direct dans M, que l'on écrit $M_1 \oplus \theta(L')$. Soit λ l'automorphisme de $M \oplus L$ qui échange L et $\theta(L')$ en fixant M_1. Alors $\sigma = \lambda \circ \theta$ envoie L' sur L. □

Rappelons qu'un élément x d'un module *arbitraire* M est dit unimodulaire lorsqu'il existe une forme linéaire $\lambda \in M^\star$ telle que $\lambda(x) = 1$. Il revient au même de dire que $\mathbf{A}x$ est libre (de base x) et en facteur direct dans M (proposition II-5.1).

3.11. Théorème. (Théorème de simplification de Bass, pour la Gdim)
Soit M un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini de rang $\geqslant k$. Si $\operatorname{Gdim}\mathbf{A} < k$, alors M est simplifiable pour tout $\mathbf{A}$-module projectif de type fini : si Q est projectif de type fini et $M \oplus Q \simeq N \oplus Q$, alors $M \simeq N$.
▷ Supposons avoir montré que M est simplifiable pour $\mathbf{A}$.
Alors, puisque $M \oplus \mathbf{A}^\ell$ vérifie aussi l'hypothèse, on montre par récurrence sur ℓ que M est simplifiable pour $\mathbf{A}^{\ell+1}$. Par suite M est simplifiable pour tout facteur direct dans $\mathbf{A}^{\ell+1}$.
Enfin, M est simplifiable pour $\mathbf{A}$ parce qu'il vérifie le point *3* du lemme 3.10 pour $L = \mathbf{A}$. En effet, supposons que $M = \operatorname{Im} F \subseteq \mathbf{A}^n$, où F est une matrice de projection (de rang $\geqslant k$), et soit L' facteur direct dans $M \oplus \mathbf{A}$, isomorphe à $\mathbf{A} : L' = \mathbf{A}(x, a)$ avec (x, a) unimodulaire dans $M \oplus \mathbf{A}$. Puisque toute forme linéaire sur M se prolonge à $\mathbf{A}^n$, il existe une forme $\nu \in (\mathbf{A}^n)^\star$ telle que $1 \in \langle \nu(x), a \rangle$. D'après le lemme 3.12 ci-après, avec $x = C_0$, il existe un $y \in M$ tel que $x' = x + ay$ est unimodulaire dans M. Considérons une forme $\mu \in M^\star$ telle que $\mu(x') = 1$. On définit alors un automorphisme θ de $M \oplus \mathbf{A}$ comme suit :

$$\theta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a\mu & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ i.e., } \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} m + by \\ \mu(x)b - a\mu(m) \end{bmatrix}.$$

Alors $\theta(x, a) = (x', 0)$, donc $\theta(L') \subseteq M$. On conclut avec le lemme 3.10. □

Dans le lemme suivant, qui termine la démonstration du théorème 3.11, nous reprenons les notations de la proposition 3.7, la matrice $F = [\, C_0 \,|\, C_1 \,|\, \dots \,|\, C_p \,]$ étant celle du théorème précédent.

3.12. Lemme. *Si* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < k$ *et* $\mathcal{D}_k(F) = 1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$*, alors il existe* $t_1, \ldots, t_p$ *tels que*

$$1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + at_1C_1 + \cdots + at_pC_p).$$

▷ On considère la matrice $[\,C_0 \,|\, aC_1 \,|\, \ldots \,|\, aC_p\,]$, obtenue en remplaçant G par aG dans F. Comme $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \vee \mathcal{D}_k(G) = 1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a)$, on a bien par distributivité $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0) \vee \mathcal{D}_k(aG) = 1$. On conclut avec $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < k$. □

Une propriété caractéristique simple pour $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$

Pour démontrer $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ pour un anneau $\mathbf{A}$, il suffit de vérifier la conclusion (dans la définition de $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$) pour des matrices particulièrement simples. Cela fait l'objet de la proposition qui suit.

3.13. Proposition. *Pour un anneau* $\mathbf{A}$ *on a* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ *si, et seulement si, pour toute matrice* $V \in \mathbb{M}_{n+1}(\mathbf{A})$ *de la forme*

$$V = \begin{bmatrix} b & c_1 & \cdots & \cdots & c_n \\ b_1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix} = [\,V_0 \mid V_1 \mid \ldots \mid V_n\,],$$

et pour tout $d \in \mathbf{A}$ *tel que* $1 = \langle b, a, d\rangle$*, il existe des* $x_i \in \mathbf{A}$ *tels que*

$$1 = \mathcal{D}_1(V_0 + x_1V_1 + \cdots + x_nV_n) + \langle d\rangle\,.$$

Remarque. Au lieu d'utiliser un élément d soumis à la contrainte $1 = \langle a, b, d\rangle$, on aurait pu utiliser un couple (u, v) soumis à aucune contrainte et remplacer d par $1 + au + bv$ dans la conclusion. Sous cette forme, il est particulièrement évident que si la condition ci-dessus est satisfaite pour l'anneau $\mathbf{A}$, elle est satisfaite pour tout quotient de $\mathbf{A}$. ∎

▷ Pour montrer que la condition est nécessaire, nous raisonnons avec l'anneau quotient $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle d\rangle$ et nous considérons la matrice

$$F = V = [\,V_0 \mid V_1 \mid \ldots \mid V_n\,].$$

Avec les notations de la définition 3.1 on a $p = n$, $F = [\,C_0 \mid G\,]$, et $C_i = V_i$ pour $i \in [\![0..n]\!]$. Puisque $1 = \langle b, a, d\rangle$ dans $\mathbf{A}$, on a

$$1 = \langle b, a^n\rangle \subseteq \mathcal{D}_1(C_0) + \mathcal{D}_n(G) \text{ dans } \mathbf{B},$$

et l'hypothèse de la définition est satisfaite. Puisque $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{B} < n$, on obtient des x_i dans $\mathbf{A}$ tels que

$$1 = \mathcal{D}_1(C_0 + x_1C_1 + \cdots + x_nC_n) \text{ dans } \mathbf{B}.$$

D'où la conclusion souhaitée dans $\mathbf{A}$.

Pour démontrer la réciproque nous procédons en deux étapes. Rappelons tout d'abord que si la condition est vérifiée pour l'anneau $\mathbf{A}$, elle est

vérifiée pour tout quotient de $\mathbf{A}$. Nous allons en fait utiliser cette condition avec $d = 0$ (l'hypothèse sur V devient alors du même type que celle qui sert à définir $\mathsf{Gdim} < n$), avec l'anneau $\mathbf{A}$ et certains de ses quotients.

Première étape : le cas où la matrice F possède $n+1$ colonnes, i.e. $p = n$.

Avec $F \in \mathbf{A}^{m\times(n+1)}$, on a par hypothèse une forme linéaire $\varphi_0 : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}$ et une forme n-linéaire alternée $\psi : (\mathbf{A}^m)^n \to \mathbf{A}$ telles que

$$1 = \varphi_0(C_0) + \psi(C_1, \dots, C_n).$$

Pour $j \in [\![1..n]\!]$ notons $\varphi_j : \mathbf{A}^m \to \mathbf{A}$ la forme linéaire

$$X \mapsto \psi(C_1, \dots, C_{j-1}, X, C_j, \dots, C_n).$$

En notant $a = \psi(C_1, \dots, C_n)$, on a alors :

— $\varphi_1(C_1) = \cdots = \varphi_n(C_n) = a$,

— $\varphi_i(C_j) = 0$ si $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$

Nous considérons la matrice des $\varphi_i(C_j)$, nous obtenons :

$$V = [\, V_0 \mid \dots \mid V_n \,] := \begin{bmatrix} \varphi_0(C_0) & \varphi_0(C_1) & \cdots & \cdots & \varphi_0(C_n) \\ \varphi_1(C_0) & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \varphi_n(C_0) & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire $V = [\, \varphi(C_0) \mid \dots \mid \varphi(C_n) \,]$ en notant $\varphi(Z) = \begin{bmatrix} \varphi_0(Z) \\ \vdots \\ \varphi_n(Z) \end{bmatrix}$.

On peut appliquer l'hypothèse avec $d = 0$. On trouve $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$ tels que le vecteur $V_0 + x_1V_1 + \cdots + x_nV_n$ est unimodulaire. Ce vecteur est égal à $\varphi(C_0 + x_1C_1 + \cdots + x_nC_n) = \varphi(C)$. Puisque ce vecteur est unimodulaire et que φ est linéaire, le vecteur C est lui-même unimodulaire.

Deuxième étape : le cas général.

Comme $1 = \mathcal{D}_1(C_0) + \mathcal{D}_n(G)$, on a une famille $(\alpha_i)_{i\in[\![1..q]\!]}$ de parties à n éléments de $[\![1..p]\!]$ telle que $1 = \mathcal{D}_1(C_0) + \sum_i \mathcal{D}_n(G_{\alpha_i})$, où G_{α_i} est la matrice extraite de G en considérant uniquement les colonnes dont l'indice est dans α_i. On note $C_{0,0} = C_0$ et $J_\ell = \sum_{i>\ell} \mathcal{D}_n(G_{\alpha_i})$. On applique alors le cas de la première étape successivement avec $\ell = 1, \dots, q$ pour obtenir

$$1 = \mathcal{D}_1(C_{0,\ell}) = \mathcal{D}_1(C_{0,\ell-1}) + \mathcal{D}_n(G_{\alpha_\ell}) \text{ dans } \mathbf{A}/J_\ell$$

et donc $\mathcal{D}_1(C_{0,q}) = 1$ dans $\mathbf{A}$.

Notez que dans cette deuxième étape, nous utilisons le résultat de la première étape avec des anneaux quotients de $\mathbf{A}$. □

4. Supports et n-stabilité

Dans la section 5 nous établirons des théorèmes concernant les manipulations élémentaires de matrices. Ils auront comme corollaires de grands théorèmes dus à Serre, Forster, Bass et Swan.
Nous les donnerons en deux versions similaires mais néanmoins différentes. Nous ne pensons pas qu'elles puissent être ramenées à une forme unique.
La première version est basée sur la notion de n-stabilité. Cette version aboutit notamment à un résultat sophistiqué dû à Bass dans lequel intervient une partition du spectre de Zariski en un nombre fini de parties qui sont toutes de dimension petite (plus petite que la dimension de Krull de l'anneau). Ce résultat sera utilisé dans le chapitre XVI pour démontrer le théorème XVI-6.8 de Bass concernant les modules étendus.
La deuxième version utilise la dimension de Heitmann, introduite dans la section 2, inférieure ou égale à la dimension de Krull, mais pour laquelle on ne connaît pas d'analogue de la version sophistiquée de Bass.
La section 4 donne quelques préliminaires nécessaires pour la première version basée sur la n-stabilité.

Supports, dimension, stabilité

4.1. Définition. Un *support* sur un anneau $\mathbf{A}$ dans un treillis distributif $\mathbf{T}$ est une application $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$, qui vérifie les axiomes suivants :

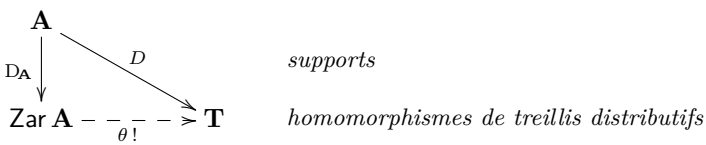
- $D(0_{\mathbf{A}}) = 0_{\mathbf{T}}, \quad D(1_{\mathbf{A}}) = 1_{\mathbf{T}}$,
- $D(ab) = D(a) \wedge D(b)$,
- $D(a+b) \leqslant D(a) \vee D(b)$.

On notera $D(x_1, \dots, x_n) = D(x_1) \vee \cdots \vee D(x_n)$.

Il est clair que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ est un support, appelé *support de Zariski*.
Le lemme suivant montre que le support de Zariski est le support « libre ».

4.2. Lemme. *Pour tout support D on a :*

1. $D(a^m) = D(a)$ *pour* $m \geqslant 1$, $D(ax) \leqslant D(x)$, $D(a,b) = D(a+b, ab)$.
2. $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle y_1, \dots, y_r \rangle$ *implique* $D(x_1, \dots, x_n) = D(y_1, \dots, y_r)$.
3. $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(y) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ *implique* $D(y) \leqslant D(x_1, \dots, x_n)$.
4. *Il existe un unique homomorphisme θ de treillis distributifs qui fait commuter le diagramme suivant :*



▷ La démonstration est laissée au lecteur. □

Ainsi tout support $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ tel que $D(\mathbf{A})$ engendre $\mathbf{T}$ en tant que treillis distributif est obtenu en composant le support de Zariski avec un passage au quotient $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}/\!\sim$ par une relation d'équivalence compatible avec la structure de treillis.
On notera $D(\mathfrak{a})$ pour $D(x_1, \dots, x_n)$ si $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$. On dira qu'un vecteur $X \in \mathbf{A}^n$ est *D-unimodulaire* si $D(X) = 1$.

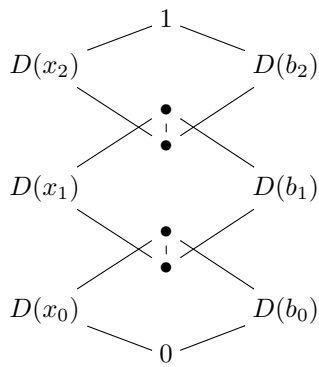
Dimension d'un support, théorème de Kronecker

4.3. Définition. Étant données deux suites $(x_0, \dots, x_n)$ et $(b_0, \dots, b_n)$ dans $\mathbf{A}$ et un support D sur $\mathbf{A}$, on dit que les deux suites sont *D-complémentaires* si l'on a les inégalités suivantes :

$$\left.\begin{array}{rcl} D(b_0x_0) & = & D(0) \\ D(b_1x_1) & \leqslant & D(b_0, x_0) \\ \vdots \quad & \vdots & \quad \vdots \\ D(b_nx_n) & \leqslant & D(b_{n-1}, x_{n-1}) \\ D(1) & = & D(b_n, x_n) \end{array}\right\} \tag{4}$$

Le support D est dit *de dimension de Krull* $\leqslant n$ si toute suite $(x_0, \dots, x_n)$ dans $\mathbf{A}$ admet une suite D-complémentaire. On notera $\mathsf{Kdim}(D) \leqslant n$.

Par exemple pour $n = 2$ les suites complémentaires correspondent au dessin suivant dans $\mathbf{T}$.



Remarque. Notons que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} = \mathsf{Kdim}(\mathrm{D}_{\mathbf{A}})$. ■

La preuve du lemme suivant peut être recopiée sur celle du lemme 1.2 en remplaçant $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}$ par D. Le théorème de Kronecker est ensuite une conséquence directe.

4.4. Lemme. *Soit $\ell \geqslant 1$. Si $(b_1, \dots, b_\ell)$ et $(x_1, \dots, x_\ell)$ sont deux suites*

D-complémentaires dans $\mathbf{A}$*, alors pour tout* $a \in \mathbf{A}$ *on a :*

$$D(a, b_1, \dots, b_\ell) = D(b_1 + ax_1, \dots, b_\ell + ax_\ell),$$

c'est-à-dire encore : $D(a) \leqslant D(b_1 + ax_1, \dots, b_\ell + ax_\ell)$.

4.5. Théorème. (Théorème de Kronecker, pour les supports)
Si D *est un support de dimension de Krull* $\leqslant n$*, pour tout idéal de type fini* $\mathfrak{a}$ *il existe un idéal* $\mathfrak{b}$ *engendré par* $n+1$ *éléments tels que* $D(\mathfrak{a}) = D(\mathfrak{b})$*. En fait, pour tous* $b_1, \dots, b_{n+r}$ *(*$r \geqslant 2$*), il existe des* $c_j \in \langle b_{n+2}, \dots, b_{n+r}\rangle$ *tels que* $D(b_1 + c_1, \dots, b_{n+1} + c_{n+1}) = D(b_1, \dots, b_{n+r})$.

Supports fidèles

Dans ce paragraphe on démontre en particulier que la dimension de Krull d'un anneau (que l'on sait déjà égale à la dimension de son support de Zariski) est égale à celle de son treillis de Zariski : on tient ici la promesse faite en XIII-6.3.

4.6. Définition. Un support $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ est dit *fidèle* si $\mathbf{T}$ est engendré par l'image de D et si, pour tout $a \in \mathbf{A}$ et $L \in \mathbf{A}^m$, l'inégalité $D(a) \leqslant D(L)$ implique l'existence d'un $b \in \langle L\rangle$ tel que $D(a) \leqslant D(b)$.

Par exemple le support de Zariski $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}$ est toujours fidèle.

Soit $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ un support. Si l'image de $\mathbf{A}$ engendre $\mathbf{T}$, puisqu'on a l'égalité $D(a_1) \wedge \dots \wedge D(a_n) = D(a_1 \cdots a_n)$, tout élément de $\mathbf{T}$ peut s'écrire sous forme $D(L)$ pour une liste L d'éléments de $\mathbf{A}$.

4.7. Lemme. *Si* D *est fidèle et* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{T} < k$ *alors* $\mathsf{Kdim}(D) < k$*. En particulier la dimension de Krull d'un anneau est égale à celle de son treillis de Zariski.*

D Soit la suite $(a_1, \dots, a_k)$ dans $\mathbf{A}$. Nous devons démontrer qu'elle admet une suite D-complémentaire.
Puisque $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{T} < k$, la suite $\big(D(a_1), \dots, D(a_k)\big)$ possède une suite complémentaire $\big(D(L_1), \dots, D(L_k)\big)$ dans $\mathbf{T}$, avec pour L_i des listes dans $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
D(a_1) \wedge D(L_1) &= D(0)\\
D(a_2) \wedge D(L_2) &\leqslant D(a_1, L_1)\\
\vdots \qquad\quad &\vdots \qquad \vdots\\
D(a_k) \wedge D(L_k) &\leqslant D(a_{k-1}, L_{k-1})\\
D(1) &= D(a_k, L_k).
\end{aligned}$$

Puisque D est fidèle, il existe c_k dans $\langle a_k, L_k\rangle$ tel que $D(1) \leqslant D(c_k)$, ce qui donne $b_k \in \langle L_k\rangle$ tel que $D(1) \leqslant D(a_k, b_k)$.

Notons que l'on a

$$D(a_k b_k) = D(a_k) \wedge D(b_k) \leqslant D(a_k) \wedge D(L_k) \leqslant D(a_{k-1}, L_{k-1}).$$

Puisque D est fidèle, on a $c_{k-1} \in \langle a_{k-1}, L_{k-1}\rangle$ avec $D(a_k b_k) \leqslant D(c_{k-1})$, ce qui donne $b_{k-1} \in \langle L_{k-1}\rangle$ tel que $D(a_k b_k) \leqslant D(a_{k-1}, b_{k-1})$.
Et ainsi de suite. Au bout du compte on a construit une suite $(b_1, \dots, b_k)$ qui est D-complémentaire de $(a_1, \dots, a_k)$. □

Supports n-stables

On abstrait maintenant la propriété décrite au lemme 4.4 pour les suites complémentaires sous la forme suivante.

4.8. Définition.

1. Soit $n \geqslant 1$. Un support $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ est dit *n-stable* lorsque, pour tout $a \in \mathbf{A}$ et $L \in \mathbf{A}^n$, il existe $X \in \mathbf{A}^n$ tel que $D(L, a) = D(L + aX)$, c'est-à-dire $D(a) \leqslant D(L + aX)$.
2. L'anneau $\mathbf{A}$ est dit *n-stable* si son support de Zariski $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}$ est n-stable. On notera $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A} < n$ pour dire que $\mathbf{A}$ est n-stable.
3. L'anneau $\mathbf{A}$ est dit 0-stable s'il est trivial.

Dans l'acronyme Cdim, C fait allusion à « Coquand ».
Naturellement si $\mathsf{Kdim}(D) < n$ alors D est n-stable. En particulier, avec le support libre $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}$, on obtient $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$. Par ailleurs, le théorème de Kronecker s'applique (presque par définition) à tout support n-stable.
La notation $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A} < n$ est justifiée par le fait que si D est n-stable, il est $(n+1)$-stable. Enfin, le point *3* dans la définition a été donné pour plus de clarté, mais il n'est pas vraiment nécessaire : en lisant le point *1* pour $n = 0$, on obtient que pour tout $a \in \mathbf{A}$, $D(a) \leqslant D(0)$.

Exemples.

1) Un anneau de valuation, ou plus généralement un anneau $\mathbf{V}$ qui vérifie « $a \mid b$ ou $b \mid a$ pour tous a, b», est 1-stable, même en dimension de Krull infinie. Pour tout (a, b) il suffit de trouver un x tel que $\langle a, b\rangle = \langle b + xa\rangle$. Si $a = qb$, on a $\langle a, b\rangle = \langle b\rangle$ et l'on prend $x = 0$. Si $b = qa$, on a $\langle a, b\rangle = \langle a\rangle$ et l'on prend $x = 1 - q$.
2) Un anneau de Bézout intègre est 2-stable. Plus généralement, un anneau de Bézout strict (cf. la section IV-7 page 220 et l'exercice IV-7) est 2-stable. Plus précisément, pour a, b_1, $b_2 \in \mathbf{A}$, il existe x_1, x_2 tels que $a \in \langle b_1 + x_1 a, b_2 + x_2 a\rangle$, i.e. $\langle a, b_1, b_2\rangle = \langle b_1 + x_1 a, b_2 + x_2 a\rangle$.
En effet, d'après la question *1c* de l'exercice, il existe u_1 et u_2 comaximaux tels que $u_1 b_1 + u_2 b_2 = 0$. On prend x_1, x_2 tels que $u_1 x_1 + u_2 x_2 = 1$ et l'on obtient l'égalité

$$a = u_1 b_1 + a + u_2 b_2 = u_1(b_1 + x_1 a) + u_2(b_2 + x_2 a).$$ ∎

4.9. Fait. *On a toujours* $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}$.

▷ Si $\mathbf{A}$ est n-stable, alors $\mathsf{Bdim}\,\mathbf{A} < n$: en effet, on applique la définition avec $(a, a_1, \ldots, a_n)$ dans $\mathbf{A}$ vérifiant $1 \in \langle a, a_1, \ldots, a_n\rangle$. □

4.10. Fait. *Si D est n-stable, pour tout $a \in \mathbf{A}$ et $L \in \mathbf{A}^n$, il existe $X \in \mathbf{A}^n$ tel que $D(L, a) = D(L + a^2X)$, c'est-à-dire $D(a) \leqslant D(L + a^2X)$.*

En effet, $D(a) = D(a^2)$ et $D(L, a) = D(L, a^2)$.

Constructions et recollements de supports

4.11. Définition.

L'application $\mathrm{J}_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathsf{Heit}\,\mathbf{A}$ définit le *support de Heitmann.*

Remarque. A priori $\mathsf{Kdim}\,\mathrm{D}_{\mathbf{A}} = \mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \geqslant \mathsf{Kdim}\,\mathrm{J}_{\mathbf{A}} \geqslant \mathsf{Jdim}\,\mathbf{A}$. On manque d'exemples qui montreraient que les deux inégalités peuvent être strictes. ■

4.12. Lemme. (Variante du lemme de Gauss-Joyal II-2.6)
Si D est un support sur $\mathbf{A}$, on obtient un support $D[X]$ sur $\mathbf{A}[X]$ en posant

$$D[X](f) = D\big(\mathrm{c}(f)\big).$$

▷ Le lemme II-2.6 donne $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(fg)\big) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(f)\big) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(\mathrm{c}(g)\big)$. □

4.13. Lemme. (Support et quotient) *Soit $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ un support et $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$. On obtient un support*

$$D/\mathfrak{a} : \mathbf{A} \to \mathbf{T}/\mathfrak{a} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}/(D(\mathfrak{a}) = 0)\ ,$$

en composant D avec la projection $\Pi_{D(\mathfrak{a})} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}/(D(\mathfrak{a}) = 0)$.

1. *$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}/\mathfrak{a}$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathbf{A}/\mathfrak{a}} \circ \mathsf{Zar}(\pi_{\mathfrak{a}})$, où $\pi_{\mathfrak{a}}$ est l'application canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$.*
2. *Si D est fidèle, alors $D/\mathfrak{a}$ également.*
3. *Si D est n-stable, alors $D/\mathfrak{a}$ également.*
   En particulier $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant \mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}$.

▷ Rappelons que $\Pi_{D(\mathfrak{a})}(x) \leqslant \Pi_{D(\mathfrak{a})}(y) \iff x \vee D(\mathfrak{a}) \leqslant y \vee D(\mathfrak{a})$.
1. Résulte du fait XI-4.5.
2. Notons $D' = D/\mathfrak{a}$. Soient $a \in \mathbf{A}$ et L un vecteur tels que $D'(a) \leqslant D'(L)$. On cherche un $b \in \langle L\rangle$ tel que $D'(a) \leqslant D'(b)$. Par définition de D' on a $D(a) \leqslant D(L, \mathfrak{a})$, et puisque D est fidèle, il existe $c \in \langle L\rangle + \mathfrak{a}$ tel que $D(a) \leqslant D(c)$, ce qui donne un $b \in L$ tel que $D(a) \leqslant D(b, \mathfrak{a})$, autrement dit $D'(a) \leqslant D'(b)$.
3. Soient $a \in \mathbf{A}$, et $L \in \mathbf{A}^n$. On cherche $X \in \mathbf{A}^n$ tel que $D'(a) \leqslant D'(L + aX)$, i.e. $D(a) \vee D(\mathfrak{a}) \leqslant D(L + aX) \vee D(\mathfrak{a})$. Or on a un X qui convient pour D, i.e. $D(a) \leqslant D(L + aX)$, donc il convient pour D'. □

De manière duale on a le lemme suivant.

4.14. Lemme. (Support et localisation) *Soit $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ un support et un élément u de $\mathbf{A}$. On obtient un support*

$$D[1/u] : \mathbf{A} \to \mathbf{T}[1/u] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}/(D(u) = 1)\ ,$$

en composant D avec $j_{D(u)} : \mathbf{T} \to \mathbf{T}/(D(u) = 1)$.

1. *$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}[1/u]$ est canoniquement isomorphe à $\mathrm{D}_{\mathbf{A}[1/u]} \circ \mathsf{Zar}(\iota_u)$, où ι_u est l'application canonique $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/u]$.*
2. *Si D est fidèle, alors $D[1/u]$ également.*
3. *Si D est n-stable, alors $D[1/u]$ également.*
   En particulier $\mathsf{Cdim}\, \mathbf{A}[1/u] \leqslant \mathsf{Cdim}\, \mathbf{A}$.

▷ Rappelons que $j_{D(u)}(x) \leqslant j_{D(u)}(y) \iff x \wedge D(u) \leqslant y \wedge D(u)$.
1. Résulte du fait XI-4.5.
2. Notons $D' = D[1/u]$. Soit $a \in \mathbf{A}$ et L un vecteur tels que $D'(a) \leqslant D'(L)$. Par définition de D' on a $D(au) = D(a) \wedge D(u) \leqslant D(L)$. Puisque D est fidèle, il existe $b \in \langle L \rangle$ tel que $D(au) \leqslant D(b)$, c'est-à-dire $D'(a) \leqslant D'(b)$.
3. Comme pour le lemme 4.13 en remplaçant $D/\mathfrak{a}$ et $\vee$ par $D[1/u]$ et $\wedge$. □

4.15. Lemme.

1. *Soit un support $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ et $b \in \mathbf{A}$.*
   a. *D/b et $D[1/b]$ sont n-stables si, et seulement si, D est n-stable.*
   b. *Si D est fidèle et si $\mathbf{T}/b$ et $\mathbf{T}[1/b]$ sont de dimension de Krull $< n$, alors D est n-stable.*
2. *Soit un anneau $\mathbf{A}$ et $b \in \mathbf{A}$. Alors $\mathbf{A}/\langle b \rangle$ et $\mathbf{A}[1/b]$ sont n-stables si, et seulement si, $\mathbf{A}$ est n-stable.*
   De manière abrégée : $\mathsf{Cdim}\, \mathbf{A} = \sup\big(\mathsf{Cdim}\, \mathbf{A}/\langle b \rangle, \mathsf{Cdim}\, \mathbf{A}[1/b]\big)$.

▷ Il suffit de montrer l'implication directe dans le point *1a.*
Soient $a \in \mathbf{A}$ et $L \in \mathbf{A}^n$. Puisque D/b est n-stable, on a un $Y \in \mathbf{A}^n$ tel que $D(a) \leqslant D(L + aY)$ dans $\mathbf{T}/\big(D(b) = 0\big)$, c'est-à-dire dans $\mathbf{T}$:

$$D(a) \leqslant D(b) \vee D(L + aY). \qquad (*)$$

Ensuite on applique la n-stabilité de $D[1/b]$ avec ab et $L + aY$ ce qui fournit un $Z \in \mathbf{A}^n$ tel que $D(ab) \leqslant D(L + aY + abZ)$ dans $\mathbf{T}/\big(D(b) = 1\big)$.
Dans $\mathbf{T}$, en posant $X = Y + bZ$, cela s'écrit :

$$D(ab) \wedge D(b) \leqslant D(L + aX), \quad \text{i.e.} \quad D(ab) \leqslant D(L + aX). \qquad (\#)$$

Mais on a $\langle b, L + aX \rangle = \langle b, L + aY \rangle$, donc $D(b, L + aX) = D(b, L + aY)$.
Les inégalités $(*)$ et $(\#)$ s'écrivent alors

$$D(a) \leqslant D(b) \vee D(L + aX) \quad \text{et} \quad D(a) \wedge D(b) \leqslant D(L + aX).$$

Ceci implique (par «coupure», cf. page 670) que $D(a) \leqslant D(L + aX)$. □

Partitions constructibles du spectre de Zariski

Une partie *constructible* de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ est une combinaison booléenne d'ouverts de base $\mathfrak{D}(a)$. En mathématiques classiques, si l'on munit l'ensemble $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ de la « topologie constructible » ayant pour base d'ouverts les parties constructibles, on obtient un espace spectral, le *spectre constructible de l'anneau* $\mathbf{A}$, que l'on peut identifier à $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}^\bullet$.

D'un point de vue constructif, on a vu que l'on peut remplacer $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ (un objet un peu trop idéal) par le treillis $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ (un objet concret), isomorphe en mathématiques classiques au treillis des ouverts quasi-compacts de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$. Lorsque l'on passe de la topologie de Zariski à la topologie constructible en mathématiques classiques, on passe de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}$ à $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}) \simeq \mathsf{Zar}(\mathbf{A}^\bullet)$ en mathématiques constructives (pour ce dernier isomorphisme, voir le théorème XI-4.26).

Hyman Bass s'est intéressé aux partitions constructibles du spectre de Zariski. Une étape élémentaire de la construction d'une telle partition consiste en le remplacement d'un anneau $\mathbf{B}$ par les deux anneaux $\mathbf{B}/\langle b\rangle$ et $\mathbf{B}[1/b]$, pour un élément b de $\mathbf{B}$. Une remarque importante qu'a faite Bass est que ces deux anneaux peuvent avoir chacun une dimension de Krull strictement plus petite que celle de $\mathbf{B}$, alors que certaines propriétés de l'anneau n'ont besoin, pour être vérifiées dans $\mathbf{B}$, que d'être vérifiées dans chacun de ses deux fils. C'est le cas pour la n-stabilité du support libre. Telle est en tout cas l'analyse qu'a faite T. Coquand de quelques pages de [Bass].

En mathématiques classiques, de tout recouvrement de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ par des ouverts de la topologie constructible, on peut extraire un recouvrement fini, que l'on peut raffiner en une partition finie par des ouverts quasi-compacts (c'est-à-dire des combinaisons booléennes finies d'ouverts de base $\mathfrak{D}(a)$). C'est beaucoup d'abstractions de haute volée, mais le résultat est extrêmement concret, et c'est ce résultat qui nous intéresse en pratique.

Nous définissons en mathématiques constructives une *partition constructible du spectre de Zariski* par sa version duale, qui est un système fondamental d'idempotents orthogonaux dans l'algèbre de Boole $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}^\bullet = \mathbb{B}\mathrm{o}(\mathsf{Zar}\,\mathbf{A})$.

En pratique, un élément de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}^\bullet$ est donné par une liste double dans l'anneau $\mathbf{A}$

$$(a_1,\dots,a_\ell;u_1,\dots,u_m) = (I;U)$$

qui définit l'élément suivant de $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A}^\bullet$:

$$\textstyle\bigwedge_i \neg \mathrm{D}_{\mathbf{A}^\bullet}(a_i) \wedge \bigwedge_j \mathrm{D}_{\mathbf{A}^\bullet}(u_j) = \neg \mathrm{D}_{\mathbf{A}^\bullet}(a_1,\dots,a_\ell) \wedge \mathrm{D}_{\mathbf{A}^\bullet}(u),\ \text{où } u = \textstyle\prod_j u_j.$$

À cet élément $(I;U)$, est associé l'anneau $(\mathbf{A}/\langle I\rangle)[1/u]$([5]). Un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbb{B}\mathrm{o}(\mathsf{Zar}\,\mathbf{A})$ peut alors être obtenu

5. En mathématiques classiques $\mathsf{Spec}(\mathbf{A}/\langle I\rangle)[1/u] = \bigcap_{a\in I}\mathfrak{V}(a)\cap\bigcap_{v\in U}\mathfrak{D}(v)$, où $\mathfrak{V}(a)$ désigne le complémentaire de $\mathfrak{D}(a)$.

comme résultat d'une construction arborescente qui démarre avec la liste double $(0;1)$ et qui autorise le remplacement d'une liste $(I;U)$ par deux listes doubles $(I,a;U)$ et $(I;a,U)$ pour un $a \in \mathbf{A}$.
Le théorème crucial qui suit est un corollaire du point *2* du lemme 4.15.

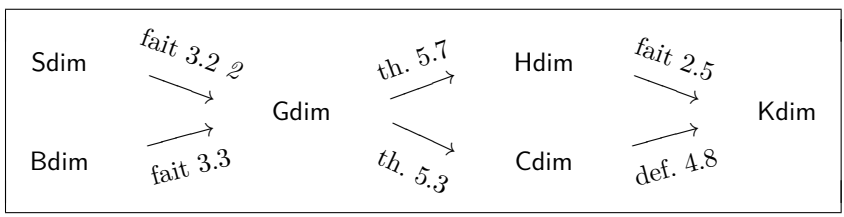
4.16. Théorème. *On considère une partition constructible de* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$*, décrite comme ci-dessus par une famille* $(I_k;U_k)_{k\in[\![1..m]\!]}$*. On note* $\mathfrak{a}_k$ *l'idéal* $\langle I_k\rangle$ *et* u_k *le produit des éléments de* U_k*.*

1. *Si* $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ *est un support, et si tous les* $(D/\mathfrak{a}_k)[1/u_k]$ *sont n-stables, alors D est n-stable.*
2. *En particulier, si chaque anneau* $\mathbf{A}[1/u_k]/\mathfrak{a}_k$ *est n-stable (par exemple si sa dimension de Krull est* $< n$*), alors* $\mathbf{A}$ *est n-stable.*

Remarques.
1) Le cas paradigmatique d'anneau n-stable est donné dans le théorème précédent lorsque chaque anneau $\mathbf{A}[1/u_i]/\mathfrak{a}_i$ est de dimension de Krull $< n$.
2) Toute partition constructible de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ peut être raffinée en la partition décrite par les 2^n couples complémentaires formés à partir d'une liste finie $(a_1,\dots,a_n)$ dans $\mathbf{A}$.
3) Des constructions arborescentes analogues apparaissent au chapitre XV dans le cadre du principe local-global concret de base, mais ce sont d'autres anneaux, des localisés notés $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;U)}$, qui interviennent alors. ∎

5. Manipulations élémentaires de colonnes

Dans cette section nous établissons des théorèmes analogues dans deux contextes différents. Le premier utilise la stabilité d'un support, le deuxième utilise la dimension de Heitmann.
La lectrice peut visualiser l'essentiel des résultats du chapitre sur le dessin suivant, en gardant en mémoire les théorèmes 3.4, 3.6, 3.8 et 3.11.
Une flèche telle que $\mathsf{Sdim} \longrightarrow \mathsf{Gdim}$ est mise pour $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Gdim}\,\mathbf{A}$.



Avec la stabilité d'un support

Dans ce paragraphe, $D : \mathbf{A} \to \mathbf{T}$ est un support fixé

Nous fixons les notations suivantes, analogues à celles qui sont utilisées pour définir $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ dans la définition 3.1.

5.1. Notation. Soit $F = [\,C_0 \,|\, C_1 \,|\, \dots \,|\, C_p\,]$ une matrice dans $\mathbf{A}^{m\times(p+1)}$ (les C_i sont les colonnes) et $G = [\,C_1 \,|\, \dots \,|\, C_p\,]$, de sorte que $F = [\,C_0 \,|\, G\,]$.

Remarquons que pour tout n on a $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(C_0, \mathcal{D}_n(F)\big) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big(C_0, \mathcal{D}_n(G)\big)$, et a fortiori $D\big(C_0, \mathcal{D}_n(F)\big) = D\big(C_0, \mathcal{D}_n(G)\big)$.

5.2. Lemme. *On suppose que D est n-stable et on prend la notation 5.1 avec $m = p = n$. On note $\delta = \det(G)$. Il existe x_1, …, x_n tels que*

$$D(C_0, \delta) \leqslant D\big(C_0 + \delta(x_1C_1 + \cdots + x_nC_n)\big).$$

▷ Il suffit de réaliser $D(\delta) \leqslant D\big(C_0 + \delta(x_1C_1 + \cdots + x_nC_n)\big)$, c'est-à-dire

$$D(\delta) \leqslant D(C_0 + \delta GX) \text{ pour un } X \in \mathbf{A}^n.$$

Soit $\widetilde{G}$ la matrice adjointe de G et $L = \widetilde{G}C_0$. Pour n'importe quel $X \in \mathbf{A}^n$, on a $\widetilde{G}(C_0 + \delta GX) = L + \delta^2 X$, donc $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(L + \delta^2 X) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(C_0 + \delta GX)$, et a fortiori $D(L + \delta^2 X) \leqslant D(C_0 + \delta GX)$. Puisque D est n-stable, d'après le fait 4.10, on a un $X \in \mathbf{A}^n$ tel que $D(\delta) \leqslant D(L + \delta^2 X)$.
Donc $D(\delta) \leqslant D(C_0 + \delta GX)$, comme demandé. □

5.3. Théorème. (Théorème de Coquand, 1 : Forster-Swan et autres avec la n-stabilité) *On a* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}$. *En conséquence, les théorèmes Splitting Off de Serre, de Forster-Swan et de simplification de Bass (3.4, 3.6, 3.8, 3.11) s'appliquent avec la* Cdim.

▷ On suppose que $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A} < n$ et on montre que $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$. On utilise la caractérisation de $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ donnée dans la proposition 3.13. Le lemme 5.2, avec le support $D = \mathrm{D}_{\mathbf{A}/\langle d\rangle}$, nous dit que la propriété équivalente décrite en 3.13 est satisfaite si $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}/\langle d\rangle < n$. On conclut en notant que $\mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}/\langle d\rangle \leqslant \mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}$. □

5.4. Théorème. (Théorème de Coquand, 2 : manipulations élémentaires de colonnes, support et n-stabilité) *Avec les notations 5.1.*
Soit $n \in [\![1..p]\!]$. Si D est n-stable il existe t_1, …, $t_p \in \mathcal{D}_n(G)$ tels que

$$D\big(C_0, \mathcal{D}_n(G)\big) \leqslant D(C_0 + t_1C_1 + \cdots + t_pC_p).$$

La démonstration de ce théorème comme conséquence du lemme 5.2 est analogue à la démonstration de l'implication difficile dans la proposition 3.13, dans un contexte légèrement différent. Le résultat est ici plus fort car la proposition 3.13 ne s'intéresse qu'au cas particulier donné dans le corollaire 5.5, avec en outre $D = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}$.

▷ On doit trouver t_1, …, t_p dans $\mathcal{D}_n(G)$ tels que, pour tout mineur ν d'ordre n de G, on ait $D(C_0, \nu) \leqslant D(C_0 + t_1C_1 + \cdots + t_pC_p)$.
En fait il suffit de savoir réaliser

$$D(C_0, \delta) \leqslant D\big(C_0 + \delta(x_1C_1 + \cdots + x_pC_p)\big)$$

pour *un* mineur δ d'ordre n de G, et comme on l'a déjà remarqué, il suffit pour cela que $D(\delta) \leqslant D\big(C_0 + \delta(x_1C_1 + \cdots + x_pC_p)\big)$.
En effet dans ce cas, nous remplaçons C_0 par $C_0' = C_0 + \delta(x_1C_1 + \cdots + x_pC_p)$

dans F (sans changer G), et nous pouvons passer à un autre mineur δ' de G pour lequel nous obtiendrons $x'_1, \ldots, x'_p$ vérifiant

$$D(C_0, \delta, \delta') \leqslant D(C'_0, \delta') \leqslant D\big(C'_0 + \delta'(x'_1C_1 + \cdots + x'_pC_p)\big) = D(C''_0)$$

avec $C''_0 = C_0 + t''_1C_1 + \cdots + t''_pC_p$ et ainsi de suite.
Pour réaliser l'inégalité

$$D(\delta) \leqslant D\big(C_0 + \delta(x_1C_1 + \cdots + x_pC_p)\big)$$

pour un mineur δ d'ordre n de G, on utilise le lemme 5.2 avec la matrice extraite Γ correspondant au mineur δ, et on se limite pour C_0 aux lignes de Γ, ce qui nous donne un vecteur Γ_0. On obtient un $X \in \mathbf{A}^n$ tel que

$$D(\delta) \leqslant D(\Gamma_0 + \delta\Gamma X) \leqslant D(C_0 + \delta GZ).$$

où $Z \in \mathbf{A}^p$ est obtenu en complétant X par des 0. □

Toujours avec les notations 5.1, nous obtenons comme corollaire le résultat suivant, qui signifie, lorsque $D = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}$, que $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Cdim}\,\mathbf{A}$.

5.5. Corollaire. *Soit $n \in [\![1..p]\!]$. Si D est n-stable et si $1 = D\big(C_0, \mathcal{D}_n(G)\big)$, il existe $t_1, \ldots, t_p$ tels que le vecteur $C_0 + t_1C_1 + \cdots + t_pC_p$ est D-unimodulaire.*

Avec la dimension de Heitmann

5.6. Lemme. *On considère une matrice de la forme*

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_1 & \cdots & \cdots & c_n \\ b_1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_n & 0 & \cdots & 0 & a \end{bmatrix},$$

dont nous notons les colonnes par V_0, V_1, …, V_n.
Si $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A} < n$ et $1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0, a)$, alors il existe $x_1, \ldots, x_n \in a\mathbf{A}$ tels que

$$1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(V_0 + x_1V_1 + \cdots + x_nV_n).$$

D La preuve est par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est clair.
Si $n > 0$, soit $\mathfrak{j} = \mathcal{I}^{\mathrm{H}}_{\mathbf{A}}(b_n)$. On a $b_n \in \mathfrak{j}$ et $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{j} < n - 1$, donc par hypothèse de récurrence, on peut trouver $y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbf{A}$ tels que

$$1 = \mathrm{D}(U_0 + ay_1U_1 + \cdots + ay_{n-1}U_{n-1}) \quad \text{dans } \mathbf{A}/\mathfrak{j}, \tag{α}$$

où U_i désigne le vecteur V_i privé de sa dernière coordonnée.
Posons $U'_0 = U_0 + ay_1U_1 + \cdots + ay_{n-1}U_{n-1}$, on a $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0, a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U_0, a)$. L'égalité ($\alpha$) signifie qu'il existe y_n tel que $b_ny_n \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$ et

$$1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_n, y_n). \tag{β}$$

Posons $V'_0 = V_0 + ay_1V_1 + \cdots + ay_{n-1}V_{n-1} + ay_nV_n$. Le lemme est prouvé si $1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(V'_0)$. Remarquons que V'_0 privé de sa dernière coordonnée est le

vecteur $U'_0 + a_n y_n U_n$ et que sa dernière coordonnée est $b_n + a^2 y_n$, d'où le jeu serré qui vient avec b_n, a, y_n. On a

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0 + a y_n U_n) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0, a) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U_0, a) \supseteq \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_0, a) = 1, \quad (\gamma)$$

et, d'après (β),

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0 + a y_n U_n) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_n, y_n) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_n, y_n) = 1. \quad (\delta)$$

Ensuite (γ) et (δ) impliquent

$$\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(U'_0 + a y_n U_n) \vee \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_n, a^2 y_n) = 1 = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(U'_0 + a y_n U_n, b_n, a^2 y_n), \quad (\eta)$$

et d'après le lemme 2.2, puisque $b_n a^2 y_n \in \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(0)$,

$$1 = \mathrm{J}_{\mathbf{A}}(U'_0 + a y_n U_n, b_n + a^2 y_n),$$

c'est-à-dire $1 = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(V'_0)$. □

5.7. Théorème. (Théorème de Coquand, 3 : Forster-Swan et autres avec la dimension de Heitmann) *On a* $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} \leqslant \mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}$. *En conséquence, les théorèmes Splitting Off de Serre, de Forster-Swan et de simplification de Bass s'appliquent avec la* Hdim *(théorèmes 3.4, 3.6, 3.8, 3.11).*

▷ On utilise la caractérisation de $\mathsf{Gdim}\,\mathbf{A} < n$ donnée dans la proposition 3.13. Le lemme 5.6 nous dit que la propriété équivalente décrite en 3.13 est satisfaite si $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}/\langle d\rangle < n$. Enfin, on note que $\mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}/\langle d\rangle \leqslant \mathsf{Hdim}\,\mathbf{A}$.□

Remarque finale. Tous les théorèmes d'algèbre commutative que nous avons démontrés dans ce chapitre se ramènent en fin de compte à des théorèmes concernant les matrices et leurs manipulations élémentaires. ■

Exercices et problèmes

Exercice 1. Expliciter le calcul que donne la preuve du théorème 1.3 dans le cas $n = 1$.

Exercice 2. *(Une propriété des suites régulières)*
Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une suite régulière de $\mathbf{A}$ et $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle$ $(n \geqslant 1)$.
1. Montrer que $(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$ est une $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$-base de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$.
2. En déduire, lorsque $1 \notin \mathfrak{a}$, que n est le nombre minimum de générateurs de l'idéal $\mathfrak{a}$. Par exemple, si $\mathbf{k}$ est un anneau non trivial et $\mathbf{A} = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_m]$, alors pour $n \leqslant m$, le nombre minimum de générateurs de l'idéal $\langle X_1, \ldots, X_n\rangle$ est n.

Exercice 3. *(Nombre de générateurs de $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ et de $\mathfrak{a}$)*
Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de type fini de $\mathbf{A}$ avec $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 = \langle \overline{a_1}, \cdots, \overline{a_n}\rangle$.
1. Montrer que $\mathfrak{a}$ est engendré par $n + 1$ éléments.
2. Montrer que $\mathfrak{a}$ est localement engendré par n éléments au sens précis suivant : il existe $s \in \mathbf{A}$ tel que sur les deux localisés $\mathbf{A}_s$ et $\mathbf{A}_{1-s}$, $\mathfrak{a}$ est engendré par n éléments.

3. En déduire que si $\mathbf{A}$ est local-global (par exemple si $\mathbf{A}$ est résiduellement zéro-dimensionnel), alors $\mathfrak{a}$ est engendré par n éléments.

Exercice 4. *1.* Soient E un $\mathbf{A}$-module et F un $\mathbf{B}$-module. Si E et F sont engendrés par m éléments, il en est de même du $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$-module $E\times F$.
2. Soit $\mathfrak{a}\subseteq\mathbf{A}[X]$ un idéal contenant un polynôme $P=\prod_{i=1}^{s}(X-a_i)$ séparable. On note $\mathrm{ev}_{a_i}:\mathbf{A}[X]\twoheadrightarrow\mathbf{A}$ le morphisme d'évaluation qui spécialise X en a_i. On suppose que chaque $\mathfrak{a}_i:=\mathrm{ev}_{a_i}(\mathfrak{a})$ est engendré par m éléments. Montrer que $\mathfrak{a}$ est engendré par $m+1$ éléments.
3. Soit $\mathbf{K}$ un corps discret et $V\subset\mathbf{K}^n$ un ensemble fini. Montrer que l'idéal
$$\mathfrak{a}(V)=\{\,f\in\mathbf{K}[X_1,\dots,X_n]\,|\,\forall\ w\in V,\ f(w)=0\,\}$$
est engendré par n éléments (notez que cette borne ne dépend pas de $\#V$ et que le résultat est clair pour $n=1$).

Exercice 5. *(La cubique gauche de $\mathbb{P}^3$, image de $\mathbb{P}^1$ par le plongement de Veronese de degré 3)* L'anneau de base $\mathbf{k}$ est quelconque, sauf dans la première question où c'est un corps discret. On définit le morphisme de Veronese $\psi:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^3$ par
$$\psi:(u:v)\mapsto(x_0:x_1:x_2:x_3)\quad\text{avec}\quad x_0=u^3,\ x_1=u^2v,\ x_2=uv^2,\ x_3=v^3.$$
1. Montrer que $\operatorname{Im}\psi=\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$ où $\mathfrak{a}=\langle D_1,D_2,D_3\rangle=\mathcal{D}_2(M)$ avec
$$M=\begin{bmatrix}X_0&X_1&X_2\\X_1&X_2&X_3\end{bmatrix},$$
$$D_1=X_1X_3-X_2^2,\ D_2=-X_0X_3+X_1X_2\text{ et }D_3=X_0X_2-X_1^2.$$
2. Montrer que $\mathfrak{a}$ est le noyau de $\varphi:\mathbf{k}[X_0,X_1,X_2,X_3]\to\mathbf{k}[U,V]$, $X_i\mapsto U^{3-i}V^i$. En particulier, si $\mathbf{k}$ est intègre, $\mathfrak{a}$ est premier et si $\mathbf{k}$ est réduit, $\mathfrak{a}$ est radical. On pourra montrer qu'en posant :
$$\mathfrak{a}^\bullet=\mathbf{A}\oplus\mathbf{A}X_1\oplus\mathbf{A}X_2\quad\text{avec}\quad\mathbf{A}=\mathbf{k}[X_0,X_3],$$
on a $\mathbf{k}[X_0,X_1,X_2,X_3]=\mathfrak{a}+\mathfrak{a}^\bullet$ et $\operatorname{Ker}\varphi\cap\mathfrak{a}^\bullet=0$.
3. Montrer que $\mathfrak{a}$ ne peut pas être engendré par deux générateurs.
4. Expliciter un polynôme homogène F_3 de degré 3 tel que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})=\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(D_1,F_3)$. En particulier, si $\mathbf{k}$ est réduit, $\mathfrak{a}=\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(D_1,F_3)$.

Exercice 6. Montrer que si deux suites sont disjointes (voir page 828) elles restent disjointes lorsque l'on multiplie une des suites par un élément de l'anneau.

Exercice 7. *(Transitivité de l'action de $\mathbb{GL}_2(\mathbf{k}[x,y])$ sur les systèmes de deux générateurs de $\langle x,y\rangle$)* Le résultat de la question *1* est dû à Jean-Philippe Furter, de l'Université de La Rochelle.
Soient $\mathbf{k}$ un anneau, $\mathbf{A}=\mathbf{k}[x,y]$ et $p,\,q\in\mathbf{A}$ vérifiant $\langle p,q\rangle=\langle x,y\rangle$.
1. Construire une matrice $A\in\mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$ telle que $A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}$ et $\det(A)\in\mathbf{k}^\times$.
2. On écrit $p=\alpha x+\beta y+\dots$, $q=\gamma x+\delta y+\dots$ avec $\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,\delta\in\mathbf{k}$.

a. Montrer que $\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{bmatrix}\in\mathbb{GL}_2(\mathbf{k})$.

b. Soit $G\subset\mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$ l'intersection de $\mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ et du noyau de l'homomorphisme « réduction modulo $\langle x,y\rangle$ » $\mathbb{GL}_2(\mathbf{A})\to\mathbb{GL}_2(\mathbf{k})$. Le sous-groupe G est distingué dans $\mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$. Le sous-groupe $G\,\mathbb{GL}_2(\mathbf{k})=\mathbb{GL}_2(\mathbf{k})\,G$ de $\mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$ opère transitivement sur les systèmes de deux générateurs de $\langle x,y\rangle$.

3. Soient $p = x + \sum_{i+j=2} p_{ij}x^iy^j$, $q = y + \sum_{i+j=2} q_{ij}x^iy^j$. On a $\langle x, y\rangle = \langle p, q\rangle$ si, et seulement si, les équations suivantes sont satisfaites :

$$p_{20}p_{02} + p_{02}q_{11} + q_{02}^2 = p_{20}p_{11} + p_{02}q_{20} + p_{11}q_{11} - p_{20}q_{02} + q_{11}q_{02} =$$
$$p_{20}^2 + p_{11}q_{20} + q_{20}q_{02} = 0$$

4. Généraliser le résultat de la question précédente.

Exercice 8. *(Autour des anneaux de Smith et de la* Sdim*)*
Pour les notions d'anneau de Bézout strict et de Smith, voir la section IV-7 page 220 et les exercices IV-7 et IV-8. L'exercice IV-8 donne une solution directe du point *5* ci-dessous.
1. Si $\mathbf{A}$ est un anneau de Smith, on a $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$.
En déduire $\mathsf{Sdim}\,\mathbb{Z}$, $\mathsf{Bdim}\,\mathbb{Z}$, $\mathsf{Gdim}\,\mathbb{Z}$ et $\mathsf{Cdim}\,\mathbb{Z}$.
Dans les questions *2* et *3*, l'anneau $\mathbf{A}$ est quelconque.
2. Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ et $u \in \mathbf{A}^2$ un vecteur unimodulaire. Montrer que $u \in \operatorname{Im} A$ si, et seulement si, il existe $Q \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{A})$ telle que u soit la première colonne de AQ.
3. Soit $A \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ de rang $\geqslant 1$. Alors A est équivalente à une matrice diagonale si, et seulement si, $\operatorname{Im} A$ contient un vecteur unimodulaire.
4. Soit $\mathbf{A}$ un anneau de Bézout strict. Montrer que $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$ si, et seulement si, $\mathbf{A}$ est un anneau de Smith.
5. En déduire qu'un anneau $\mathbf{A}$ est de Smith si, et seulement si, il est de Bézout strict et si pour a, b, c comaximaux la matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ possède un vecteur unimodulaire dans son image. Cette dernière condition peut s'exprimer par la condition dite de Kaplansky :

$$1 \in \langle a, b, c\rangle \Rightarrow \text{ il existe } p, q \text{ tels que } 1 \in \langle pa, pb + qc\rangle.$$

Remarque : on dispose de la caractérisation élémentaire : $\mathbf{A}$ est de Bézout strict si, et seulement si, pour $a, b \in \mathbf{A}$, il existe d et (a', b') comaximaux avec $a = da'$ et $b = db'$. Si l'on ajoute la condition de Kaplansky ci-dessus, on obtient une caractérisation élémentaire des anneaux de Smith.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 1. La preuve donnée dit ceci. Puisque $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$, il existe un x_1 tel que $b_1x_1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ et $1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, x_1)$. A fortiori $b_1ax_1 \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)$ et $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1)$. Le lemme 1.1 nous dit que $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$, donc $a \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$.

Exercice 2. *1.* Soient $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{A}$ tels que $\sum_i \overline{b_i}\overline{a_i} = 0$ dans $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$. Autrement dit $\sum_i b_ia_i = \sum_i c_ia_i$ avec $c_i \in \mathfrak{a}$. D'après le lemme IV-2.4, il existe une matrice alternée $M \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ telle que $[\,b_1 - c_1\ \cdots\ b_n - c_n\,] = [\,a_1\ \cdots\ a_n\,]M$.
D'où $b_i - c_i \in \mathfrak{a}$, et donc $b_i \in \mathfrak{a}$.
Même chose, présentée de façon plus abstraite. On sait qu'une matrice de présentation du $\mathbf{A}$-module $\mathfrak{a}$ pour le système générateur $(a_1, \ldots, a_n)$ est $R_{\underline{a}}$. Par le changement d'anneau de base $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{a}$, cela donne une matrice de présentation nulle ($R_{\underline{a}}$ mod $\mathfrak{a}$) du $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$ pour $(\overline{a_1}, \ldots, \overline{a_n})$, ce qui signifie que ce système est une base.
2. Si $(y_1, \ldots, y_p)$ est un système générateur de l'idéal $\mathfrak{a}$, $(\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_p})$ est un système générateur du $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})$-module $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2$, libre de rang n. Donc, si $p < n$, $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est trivial.

Exercice 3. *1.* En posant $\mathfrak{b} = \langle a_1, \cdots, a_n\rangle$, l'égalité $\mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 = \langle \overline{a_1}, \cdots, \overline{a_n}\rangle$ signifie que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \mathfrak{a}^2$. On a alors $(\mathfrak{a}/\mathfrak{b})^2 = (\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b})/\mathfrak{b} = \mathfrak{a}/\mathfrak{b}$, et l'idéal de type fini $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ de $\mathbf{A}/\mathfrak{b}$ est idempotent, donc engendré par un idempotent. Il existe donc un $e \in \mathfrak{a}$, idempotent modulo $\mathfrak{b}$, tel que $\mathfrak{a} = \mathfrak{b} + \langle e\rangle : \mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n, e\rangle$.
2. Avec les mêmes notations on voit que $(1-e)\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} + \left\langle e^2 - e\right\rangle \subseteq \mathfrak{b}$.
Donc dans $\mathbf{A}_{1-e}$, $(a_1, \ldots, a_n)$ engendre $\mathfrak{a}$ tandis que dans $\mathbf{A}_e$, $1 \in \mathfrak{a}$.
Variante. On introduit $S = 1 + \mathfrak{a}$ et l'on travaille sur $\mathbf{A}_S$: $\mathfrak{a}\mathbf{A}_S \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A}_S)$ et donc, par Nakayama, un système générateur de $\mathfrak{a}_S\big/\mathfrak{a}_S^2$ est aussi un système générateur de $\mathfrak{a}_S$. On a donc $\mathfrak{a}_S = \mathfrak{b}_S$, d'où l'existence d'un $s \in S$ tel que $s\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$. Dans $\mathbf{A}_s$, $(a_1, \ldots, a_n)$ engendre $\mathfrak{a}$, tandis que dans $\mathbf{A}_{1-s}$, $1 \in \mathfrak{a}$ ($s \in 1 + \mathfrak{a}$, donc $1 - s \in \mathfrak{a}$).

Exercice 4. *1.* Évident, et l'on en déduit *2* puisque $\mathfrak{a}/\langle P\rangle \simeq \mathfrak{a}_1 \times \cdots \times \mathfrak{a}_s$. On en déduit *3* par récurrence sur n. On peut remarquer que le théorème chinois utilisé dans le point *2* est réalisé concrètement par l'interpolation à la Lagrange. NB : voir aussi l'exercice III-2.

Exercice 5. *1.* ψ est homogène de degré 3. Soit $p = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3)$ dans $\mathcal{Z}(\mathfrak{a})$. Si $x_0 \neq 0$, on est ramené à $x_0 = 1$, donc $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (1, x_1, x_1^2, x_1^3) = \psi(1 : x_1)$. Si $x_0 = 0$, alors $x_1 = 0$, puis $x_2 = 0$, donc $p = \psi(0 : 1)$.
2. Soit $\mathbf{k}[\underline{x}] = \mathbf{k}[\underline{X}]/\mathfrak{a}$ et $\overline{\mathbf{A}} = \mathbf{k}[x_0, x_3]$. Montrer l'égalité $\mathbf{k}[\underline{X}] = \mathfrak{a} + \mathfrak{a}^\bullet$ revient à montrer que $\mathbf{k}[\underline{x}] = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}}x_1 + \overline{\mathbf{A}}x_2$. On a les relations $x_1^3 = x_0^2 x_3 \in \overline{\mathbf{A}}$, et $x_2^3 = x_0 x_3^2 \in \overline{\mathbf{A}}$, donc $\overline{\mathbf{A}}[x_1, x_2]$ est le $\overline{\mathbf{A}}$-module engendré par les $x_1^i x_2^j$ pour les i, $j \in [\![0..2]\!]$. Mais on a aussi $x_1 x_2 = x_0 x_3$, $x_1^2 = x_0 x_2$, $x_2^2 = x_1 x_3$, ce qui achève de montrer que $\overline{\mathbf{A}}[x_1, x_2] = \overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{A}}x_1 + \overline{\mathbf{A}}x_2$.
Soit $h = a + bX_1 + cX_2 \in \mathfrak{a}^\bullet$ vérifiant $\varphi(h) = 0$ ($a, b, c \in \mathbf{A} = \mathbf{k}[X_0, X_3]$). On a donc

$$a(U^3, V^3) + b(U^3, V^3)U^2V + c(U^3, V^3)UV^2 = 0.$$

En posant $p(T) = a(U^3, T)$, $q(T) = b(U^3, T)U^2$, $r(T) = c(U^3, T)U$, on obtient l'égalité $p(V^3) + q(V^3)V + r(V^3)V^2 = 0$, et un examen modulo 3 des exposants en V de p, q, r fournit $p = q = r = 0$. D'où $a = b = c = 0$, i.e. $h = 0$. Maintenant, si $f \in \operatorname{Ker}\varphi$, en écrivant $f = g + h$ avec $g \in \mathfrak{a}$, $h \in \mathfrak{a}^\bullet$, on obtient $h \in \operatorname{Ker}\varphi \cap \mathfrak{a}^\bullet = 0$, donc $f = g \in \mathfrak{a}$.
3. Posons $E = \mathfrak{a}/\langle \underline{X}\rangle\,\mathfrak{a}$. C'est un $\mathbf{k}[\underline{X}]/\langle \underline{X}\rangle$-module engendré par les $d_i = \overline{D_i}$. Autrement dit $E = \mathbf{k}d_1 + \mathbf{k}d_2 + \mathbf{k}d_3$. De plus, d_1, d_2, d_3 sont $\mathbf{k}$-linéairement indépendants. En effet, si $ad_1 + bd_2 + cd_3 = 0$, alors $aD_1 + bD_2 + cD_3 \in \langle \underline{X}\rangle\,\mathfrak{a}$, qui pour des raisons d'homogénéité donne $aD_1 + bD_2 + cD_3 = 0$, puis $a = b = c = 0$. Donc E est libre de rang 3 sur $\mathbf{k}$. Si G est un système générateur de $\mathfrak{a}$, alors $\overline{G}$ est un système générateur du $\mathbf{k}$-module E, donc $\#\overline{G} \geqslant 3$, a fortiori $\#G \geqslant 3$.
4. Posons $F_3 = X_0D_2 + X_1D_3 = -X_0^2X_3 + 2X_0X_1X_2 - X_1^3 \in \langle D_2, D_3\rangle$. On a

$$D_2^2 = -(X_3F_3 + X_1^2D_1) \in \langle D_1, F_3\rangle\,, \quad D_3^2 = -(X_1F_3 + X_0^2D_1) \in \langle D_1, F_3\rangle\,,$$
$$D_2D_3 = X_0X_1D_1 + X_2F_3 \in \langle D_1, F_3\rangle \quad \text{puis}$$
$$\langle D_1, D_2, D_3\rangle^2 \subseteq \langle D_1, F_3\rangle \subseteq \langle D_1, D_2, D_3\rangle\,, \text{ d'où } \sqrt{\langle D_1, D_2, D_3\rangle} = \sqrt{\langle D_1, F_3\rangle}.$$

Exercice 7. *1.* Remarquons d'abord que pour $m_{ij} \in \mathbf{A} = \mathbf{k}[x,y]$, une égalité

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

entraîne $m_{ij} \in \langle x,y \rangle$. Par ailleurs, on va utiliser les identités suivantes pour des matrices 2×2 : $\det(A+B) = \det(A) + \det(B) + \mathrm{Tr}(\widetilde{A}B)$ et :

$$\text{pour } H = \begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix} [\, y \ -x \,], \quad \mathrm{Tr}(\widetilde{A}H) = [\, u \, v \,] \, A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Par hypothèse, on a A, $B \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ telles que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \text{ et } B \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

donc $(BA - \mathrm{I}_2) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Ainsi, modulo $\langle x,y \rangle = \langle p,q \rangle$, on a $BA \equiv \mathrm{I}_2$. Donc $a = \det(A)(0,0) \in \mathbf{k}^\times$ et l'on peut écrire, avec u, $v \in \mathbf{A}$, $\det(A) = a + up + vq$. On pose $H = \begin{bmatrix} v \\ -u \end{bmatrix} [\, y \ -x \,]$. On a $H \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\det(H) = 0$, et l'on corrige A en $A' = A - H$. Alors $A' \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ et

$$\det(A') = \det(A) + \det(H) - \mathrm{Tr}(\widetilde{A}H) = a + up + vq - [\, u \, v \,] \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = a.$$

2. On décompose A en composantes homogènes : $A = A_0 + A_1 + \ldots$, et l'on examine l'égalité $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$.

L'examen de la composante homogène de degré 1 donne $A_0 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$, et l'on sait que $\det(A) = \det(A_0) \in \mathbf{k}^\times$. On peut alors écrire $A_0(A_0^{-1}A) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ avec $A_0 \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{k})$ et $A_0^{-1}A \in G$.

3. On écrit $A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ avec $A \in G$. Pour des raisons de degré, on obtient une égalité $A = \mathrm{I}_2 + xB + yC$ avec B, $C \in \mathbb{M}_2(\mathbf{k})$. On a alors :

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} x^2 \\ xy \end{bmatrix} + C \begin{bmatrix} xy \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + b_{11}x^2 + (c_{11}+b_{12})xy + c_{12}y^2 \\ y + b_{21}x^2 + (c_{21}+b_{22})xy + c_{22}y^2 \end{bmatrix} \qquad (\star)$$

Par ailleurs, on remarque que le coefficient de $\det(A) - 1$ en $x^i y^j$ est un polynôme homogène de degré $i+j$ en les coefficients de B et C :

$$\det(A) - 1 = \mathrm{Tr}(B)x + \mathrm{Tr}(C)y + \det(B)x^2 + \mathrm{Tr}(\widetilde{B}C)xy + \det(C)y^2.$$

Si $\mathbf{k}$ était un corps algébriquement clos, on pourrait tenir le discours suivant. L'égalité $\det(A) = 1$ définit une sous-variété projective $V \subset \mathbb{P}^{8-1}$ (2×4 coefficients pour (B, C)) ; d'autre part $(\star)$ définit un morphisme $V \to \mathbb{P}^{6-1}$ (6 pour les coefficients de $p - x$, $q - y$). L'image de ce morphisme est l'ensemble W défini par les équations de l'énoncé.
L'anneau $\mathbf{k}$ étant quelconque, on examine attentivement les équations $(\star)$; en utilisant $\mathrm{Tr}(B) = \mathrm{Tr}(C) = 0$, on peut exprimer B et C en fonction des coefficients de p et q

$$B = \begin{bmatrix} p_{20} & p_{11} + q_{02} \\ q_{20} & -p_{20} \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} -q_{02} & p_{02} \\ p_{20} + q_{11} & q_{02} \end{bmatrix}.$$

On construit ainsi une section $s : W \to G$ de l'application $(\star)$, et en fait les trois équations de W figurant dans l'énoncé sont, au signe près, $\det(C)$, $\mathrm{Tr}(\widetilde{B}C)$ et $\det(B)$.

Exercice 8. *1.* Une matrice rectangulaire « diagonale » de rang $\geqslant 1$ possède dans son image un vecteur unimodulaire (ceci pour tout anneau). Soit A une matrice de rang $\geqslant 1$, si $\mathbf{A}$ est de Smith, A est équivalente à une matrice « diagonale » D, donc $\mathrm{Im}\, D$ contient un vecteur vecteur unimodulaire, et également $\mathrm{Im}\, A$.
On a donc $\mathsf{Sdim}\,\mathbb{Z} = 0$. Par ailleurs, $\mathsf{Cdim}\,\mathbb{Z} \leqslant 1$ ($\mathbb{Z}$ est 2-stable car $\mathbb{Z}$ est un anneau de Bézout intègre). Enfin, $\mathsf{Bdim}\,\mathbb{Z} > 0$ car $1 \in \langle 2, 5\rangle$ sans que l'on puisse trouver un $x \in \mathbb{Z}$ tel que $1 \in \langle 2 + 5x\rangle$.
Bilan : $\mathsf{Bdim}\,\mathbb{Z} = \mathsf{Gdim}\,\mathbb{Z} = \mathsf{Cdim}\,\mathbb{Z} = 1$ mais $\mathsf{Sdim}\,\mathbb{Z} = 0$.
2. Si $u = Av$, alors v est unimodulaire. Donc $v = Q \cdot e_1$ avec $Q \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ et u est la première colonne de AQ. L'autre sens est immédiat.
3. Supposons que $\mathrm{Im}\, A$ contienne un vecteur unimodulaire. D'après le point *2*, on a $A \sim B$ avec $B \cdot e_1$ unimodulaire. Donc l'espace des lignes de B contient un vecteur de la forme $[\,1\ *\,]$. Le point *2* pour ${}^{\mathrm{t}}B$ nous donne :

$${}^{\mathrm{t}}B \sim \begin{bmatrix} 1 & * \\ * & * \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & * \end{bmatrix}, \text{ diagonale.}$$

Bilan : A est équivalente à une matrice diagonale. L'autre sens est immédiat.
4. Soit $\mathbf{A}$ de Bézout strict avec $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$. On montre que toute matrice triangulaire $M \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ est équivalente à une matrice diagonale.
On peut écrire $M = dA$ avec A de rang $\geqslant 1$ (car $\mathbf{A}$ est de Bézout strict).
Puisque $\mathsf{Sdim}\,\mathbf{A} \leqslant 0$, $\mathrm{Im}\, A$ contient un vecteur unimodulaire donc est équivalente à une matrice diagonale D. En définitive $M \sim dD$.
5. Facile maintenant.

Commentaires bibliographiques

Si l'on s'en tient à l'aspect constructif des résultats, l'ensemble du chapitre est essentiellement dû à T. Coquand, avec parfois l'aide des auteurs du livre que vous tenez entre les mains. Il s'agit ici d'un succès remarquable de l'approche constructive de la théorie de la dimension de Krull. Sans cette approche, il était simplement impensable d'obtenir sous forme constructive générale les « grands » théorèmes classiques démontrés ici. En outre, cette

approche a guidé la mise au point d'une nouvelle dimension, que nous appelons dimension de Heitmann, grâce à laquelle ont pu être encore un peu améliorés les remarquables résultats non noethériens de Heitmann, notamment la version générale non noethérienne du Splitting Off de Serre et du théorème de Forster-Swan.

Le théorème de Kronecker est usuellement énoncé sous la forme suivante : une variété algébrique dans $\mathbb{C}^n$ peut toujours être définie par $n+1$ équations. Il a été étendu au cas des anneaux noethériens par van der Waerden [193] sous la forme suivante : dans un anneau noethérien de dimension de Krull n, tout idéal a même nilradical qu'un idéal engendré par au plus $n+1$ éléments. La version de Kronecker a été améliorée par divers auteurs dans les articles [179, Storch] et [73, Eisenbud&Evans] qui ont montré que n équations suffisent en général. Une preuve constructive de ce dernier théorème est dans [49, Coquand&al.]. Par ailleurs, on ne sait toujours pas si toute courbe dans l'espace complexe de dimension 3 est ou non intersection de deux surfaces (voir [Kunz], chapitre 5).
Le lemme 2.8 est le corollaire 2.2 de Heitmann [99], (chez nous, la Hdim remplace la Jdim) qui débouche sur le théorème 2.9 (amélioration par Heitmann du théorème de Kronecker).
Le théorème de Kronecker local 1.6 est dû à Lionel Ducos [67].

Note concernant le «stable range». Le théorème 2.6 est dû à Bass dans le cas noethérien (avec la dimension du spectre maximal, qui dans ce cas coïncide avec la Jdim et la Hdim) et à Heitmann dans le cas non noethérien avec la Jdim. Le théorème 1.4 est une version non noethérienne, mais avec la dimension de Krull, du théorème 2.6.

Note concernant la Jdim*.* Dans [99] Heitmann introduit la Jdim pour un anneau non nécessairement noethérien comme le bon substitut à la dimension du spectre maximal $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$. C'est la dimension de $\mathsf{Jspec}\,\mathbf{A}$, le plus petit sous-espace spectral de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ contenant $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$. Il établit le théorème «stable range» de Bass pour cette dimension. Par contre pour les théorèmes de Serre et de Forster-Swan, il doit utiliser une dimension ad hoc, la borne supérieure des $\mathsf{Jdim}(\mathbf{A}[1/x])$ pour $x \in \mathbf{A}$. Comme cette dimension ad hoc est de toute manière majorée par la dimension de Krull, il obtient en particulier une version non noethérienne des grands théorèmes cités avec la dimension de Krull.

Note concernant les théorèmes de Serre et Forster-Swan. Le théorème de Serre est dans [171, Serre]. Le théorème de Forster-Swan (version noethérienne) est dans [86, Forster] pour la dimension de Krull et dans [184, Swan] pour la dimension du spectre maximal. Des versions non-noethériennes pour la dimension de Krull sont dues à Heitmann [98, 99]. Enfin l'article d'Eisenbud-Evans [72] a beaucoup aidé à clarifier les choses concernant les théorèmes de Serre, Forster et Swan.

Les sections 3 et 5 (deuxième partie : dimension de Heitmann) s'inspirent des grandes lignes des articles [72, Eisenbud&Evans] et [99, Heitmann]. Elles donnent des versions constructives des théorèmes de Serre (Splitting-off), Forster-Swan, et Bass (théorème de simplification). Ceci améliore (même sans tenir compte de l'aspect constructif de la démonstration) tous les théorèmes connus sur la question, en répondant positivement pour la dimension de Heitmann (et a fortiori pour la Jdim), à une question laissée ouverte par Heitmann.

Note concernant la Hdim. La dimension de Heitmann, notée Hdim, a été introduite dans [46] (voir aussi [47]). C'est elle au fond qui fait fonctionner les démonstrations dans l'article de Heitmann [99]. Le fait qu'elle soit meilleure a priori que la Jdim n'est pas le point essentiel. C'est bien plutôt le fait que les théorèmes de Serre et de Forster-Swan passent pour la Hdim, et donc a fortiori pour la Jdim, ce qui donne la version non noethérienne complète de ces théorèmes, laquelle avait été conjecturée par Heitmann.
Dans le cas d'un anneau noethérien, la Hdim, la Jdim de Heitmann ainsi que la dimension du spectre maximal $\mathsf{Max}\,\mathbf{A}$ qui intervient dans les théorèmes de Serre et de Swan [184] sont les mêmes (cf. [47, 99]).

Note concernant la n-stabilité. La notion de support remonte à Joyal [114] et Español [75], qui l'utilisent pour donner une caractérisation constructive de la dimension de Krull des anneaux commutatifs. Elle est utilisée de manière systématique dans les articles récents de T. Coquand. Dans la section 4 et dans la première partie de la section 5 la notion de support n-stable est décisive. Elle a été inventée par T. Coquand [37] pour mettre à jour le contenu constructif du discours de Bass sur les partitions finies de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ dans [Bass].

La version du théorème de simplification de Bass pour la Hdim a d'abord été démontrée par L. Ducos [66]. La preuve que nous donnons est plutôt basée sur [47].

En ce qui concerne l'exercice 7, Murthy, dans [140], a prouvé le résultat général suivant. Soient $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_m]$ un anneau de polynômes ($\mathbf{k}$ anneau commutatif) et $r \geqslant 1$ fixés. Supposons, pour tout $n \in [\![1..r]\!]$, que tout vecteur unimodulaire de $\mathbf{A}^n$ soit complétable et considérons, pour $n \leqslant \inf(r, m)$, l'ensemble des systèmes de r générateurs de l'idéal $\langle x_1, \ldots, x_n\rangle$ de $\mathbf{A}$, comme par exemple $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ où il y a $r - n$ zéros. Alors le groupe $\mathbb{GL}_r(\mathbf{A})$ opère transitivement sur cet ensemble (le résultat de Murthy est en fait bien plus précis).

Chapitre XV

Le principe local-global

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous discutons quelques méthodes importantes directement reliées à ce qu'il est convenu d'appeler le principe local-global en algèbre commutative.

Dans la section 2 nous le développons sous la forme de principes local-globals concrets. Il s'agit de dire que certains propriétés sont vraies globalement dès qu'elles le sont localement. Ici localement est pris au sens constructif : après localisation en un nombre fini de monoïdes comaximaux.

Dans la section 3, nous établissons les principes local-globals abstraits correspondants, en utilisant, de manière inévitable, des preuves non constructives : ici localement est pris au sens abstrait, c'est-à-dire après localisation en n'importe quel idéal premier.

Dans la section 4, nous expliquons la construction d'objets « globaux » à partir d'objets de même nature définis uniquement de manière locale.

Les sections 5, 6 et 7 sont consacrées au « décryptage dynamique et constructif » de méthodes utilisées en algèbre abstraite. Rappelons que nous avons présenté dans la section VII-2 la philosophie générale de cette méthode dynamique.

Dans la section 5, nous discutons le décryptage constructif de méthodes abstraites qui rentrent dans un cadre général du type « principe local-global ». Nous donnons un énoncé général (mais inévitablement un peu informel) pour cela, et nous donnons des exemples simples, qui pourraient être traités de manière plus directe. Les exemples vraiment pertinents arriveront dans le chapitre XVI.

Cette méthode dynamique est un outil fondamental de l'algèbre constructive. On aurait pu écrire l'ouvrage présent en commençant par cette explication préliminaire et en utilisant de manière systématique ce décryptage. Nous avons préféré commencer par développer tout ce qu'il était possible de faire de manière directe, en établissant les principes local-globals concrets qui permettent la plupart du temps d'éviter l'utilisation du décryptage dynamique en tant que tel. Bref, plutôt que mettre en avant la magie à l'œuvre dans l'algèbre classique nous avons préféré faire voir d'abord un autre type de magie, à l'œuvre en algèbre constructive, sous le slogan général : « pourquoi faire compliqué quand on peut faire simple ? ».

Dans la section 6, nous analysons la méthode d'algèbre abstraite, qui consiste à « aller voir ce qui se passe lorsque l'on quotiente par un idéal maximal arbitraire ».

Dans la section 7, nous analysons la méthode qui consiste à « aller voir ce qui se passe lorsque l'on localise en un idéal premier minimal arbitraire ». Dans les sections 8 et 9, nous examinons dans quelle mesure certains principes local-globals restent valides lorsque l'on remplace dans les énoncés les listes d'éléments comaximaux par des listes de profondeur $\geqslant 1$ ou de profondeur $\geqslant 2$.

1. Monoïdes comaximaux, recouvrements

Nous traiterons dans la section 2 des versions concrètes de principes du type local-global. Pour ces versions concrètes, la localisation peut être réclamée en un nombre fini d'éléments comaximaux (ou de monoïdes comaximaux) de $\mathbf{A}$: *si la propriété considérée est vraie après localisation en un nombre fini d'éléments comaximaux, alors elle est vraie.*
Nous introduisons une généralisation.

1.1. Définition. On dit que *les monoïdes S_1, …, S_n de l'anneau $\mathbf{A}$ recouvrent le monoïde S* si S est contenu dans le saturé de chaque S_i et si un idéal de $\mathbf{A}$ qui coupe chacun des S_i coupe toujours S, autrement dit si l'on a :

$$\forall s_1 \in S_1 \ \ldots \ \forall s_n \in S_n \ \ \exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i s_i \in S.$$

Des monoïdes sont comaximaux s'ils recouvrent le monoïde $\{1\}$.
En mathématiques classiques (avec l'axiome de l'idéal premier [1]) on a la caractérisation donnée dans le lemme qui suit. Pour un monoïde S, nous notons U_S la partie de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ définie par

$$U_S = \{\, \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset \,\}.$$

Si S est le monoïde engendré par l'élément s, nous notons U_s pour U_S. Du point de vue constructif, $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ est un espace topologique connu via ses ouverts de base $U_s = \mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(s)$ mais dont les points sont souvent difficilement accessibles.
Rappelons que l'on note S^{sat} le saturé du monoïde S.

1.2. Lemme*.

1. *Pour tout monoïde S on a $S^{\mathrm{sat}} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in U_S} (\mathbf{A} \setminus \mathfrak{p})$. En conséquence pour deux monoïdes S et T, $S^{\mathrm{sat}} \subseteq T^{\mathrm{sat}} \Leftrightarrow U_T \subseteq U_S$.*

1. L'axiome de l'idéal premier affirme que tout idéal strict d'un anneau est contenu dans un idéal premier. Il s'agit d'une version affaiblie de l'axiome du choix. Dans la théorie des ensembles classique ZF, l'axiome du choix équivaut à l'axiome de l'idéal maximal, qui affirme que tout idéal strict d'un anneau est contenu dans un idéal maximal. Il est un peu plus fort que l'axiome de l'idéal premier. Ce dernier équivaut au fait que toute théorie formelle cohérente admet un modèle (c'est le théorème de compacité en logique classique). Dans la théorie des ensembles avec axiome du choix, l'axiome de l'idéal premier devient un théorème et s'appelle « lemme de Krull ».

2. $S_1, \ldots, S_n$ *sont comaximaux si, et seulement si,* $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A} = \bigcup_i U_{S_i}$.

3. $S_1, \ldots, S_n$ *recouvrent le monoïde* S *si, et seulement si,* $U_S = \bigcup_i U_{S_i}$.

▷ *1.* Résulte du lemme de Krull : si un idéal $\mathfrak{a}$ ne coupe pas un monoïde S, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ et $\mathfrak{p} \cap S = \emptyset$.
2. On peut supposer que $\mathbf{A}$ n'est pas trivial. Si les monoïdes sont comaximaux et si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier n'appartenant à aucun des U_{S_i}, il y a dans chaque S_i un élément s_i de $\mathfrak{p}$, donc par la définition des monoïdes comaximaux, $1 \in \mathfrak{p}$, ce qui est absurde. Réciproquement, supposons que l'on ait $\mathsf{Spec}\,\mathbf{A} = \bigcup_i U_{S_i}$, et soient $s_1 \in S_1, \ldots, s_n \in S_n$. Si $\langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ ne contient pas 1, il est contenu dans un idéal premier $\mathfrak{p}$. Donc $\mathfrak{p}$ n'est dans aucun des U_{S_i}, ce qui est absurde. □

Le lemme ci-après est une variation sur le thème : *un recouvrement de recouvrements est un recouvrement*. C'est aussi une généralisation du fait V-7.2. Les calculs correspondants sont immédiats. En mathématiques classiques ce serait encore plus rapide via le lemme* 1.2.

1.3. Lemme. (Lemme des localisations successives, 2)

1. (Associativité) *Si les monoïdes* $S_1, \ldots, S_n$ *de l'anneau* $\mathbf{A}$ *recouvrent le monoïde* S *et si chaque* S_ℓ *est recouvert par des monoïdes* $S_{\ell,1}, \ldots, S_{\ell,m_\ell}$, *alors les* $S_{\ell,j}$ *recouvrent* S.

2. (Transitivité)

a. Soit S *un monoïde de l'anneau* $\mathbf{A}$ *et* $S_1, \ldots, S_n$ *des monoïdes de l'anneau* $\mathbf{A}_S$. *Pour* $\ell \in [\![1..n]\!]$ *soit* V_ℓ *le monoïde de* $\mathbf{A}$ *formé par les numérateurs des éléments de* S_ℓ. *Alors les monoïdes* $V_1, \ldots, V_n$ *recouvrent* S *si, et seulement si, les monoïdes* $S_1, \ldots, S_n$ *sont comaximaux.*

b. Plus généralement soient $S_0, \ldots, S_n$ *des monoïdes de l'anneau* $\mathbf{A}_S$ *et pour* $\ell = 0, \ldots, n$ *soit* V_ℓ *le monoïde de* $\mathbf{A}$ *formé par les numérateurs des éléments de* S_ℓ. *Alors les monoïdes* $V_1, \ldots, V_n$ *recouvrent* V_0 *si, et seulement si,* $S_1, \ldots, S_n$ *recouvrent* S_0 *dans* $\mathbf{A}_S$.

1.4. Définition et notation. Soient U et I des parties de l'anneau $\mathbf{A}$. Nous notons $\mathcal{M}(U)$ le monoïde engendré par U, et $\mathcal{S}(I,U)$ est le monoïde :

$$\mathcal{S}(I,U) = \langle I \rangle_{\mathbf{A}} + \mathcal{M}(U).$$

Le couple $\mathfrak{q} = (I,U)$ est encore appelé un *idéal premier potentiel*, et l'on note (par abus) $\mathbf{A}_\mathfrak{q}$ pour $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}$. De la même manière on note :

$$\mathcal{S}(a_1, \ldots, a_k; u_1, \ldots, u_\ell) = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle_{\mathbf{A}} + \mathcal{M}(u_1, \ldots, u_\ell).$$

Nous disons qu'un tel monoïde *admet une description finie*. Le couple

$$(\{a_1, \ldots, a_k\}, \{u_1, \ldots, u_\ell\})$$

est appelé un *idéal premier potentiel fini*.

Il est clair que pour $u = u_1 \cdots u_\ell$, les monoïdes $\mathcal{S}(a_1, \ldots, a_k; u_1, \ldots, u_\ell)$ et $\mathcal{S}(a_1, \ldots, a_k; u)$ sont équivalents, i.e. qu'ils ont même saturé.

Remarque. L'idéal premier potentiel $\mathfrak{q} = (I, U)$ est fabriqué dans le but suivant : *lorsqu'on localise en* $\mathcal{S}(I, U)$*, on obtient* $U \subseteq \mathbf{A}_\mathfrak{q}^\times$ *et* $I \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A}_\mathfrak{q})$. De même, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ tel que $I \subseteq \mathfrak{p}$ et $U \subseteq \mathbf{A} \setminus \mathfrak{p}$, on a $U \subseteq \mathbf{A}_\mathfrak{p}^\times$ et $I \subseteq \mathrm{Rad}(\mathbf{A}_\mathfrak{p})$. Le couple $\mathfrak{q} = (I, U)$ représente donc une information partielle sur un tel idéal premier. Il peut être considéré comme une approximation de $\mathfrak{p}$. Ceci explique la terminologie d'idéal premier potentiel et la notation $\mathbf{A}_\mathfrak{q}$.
On peut comparer les approximations de $\mathfrak{p}$ par des idéaux premiers potentiels finis aux approximations d'un nombre réel par des intervalles rationnels.
∎

1.5. Lemme. (Lemme des localisations successives, 3)
Soient U *et* I *des parties de l'anneau* $\mathbf{A}$ *et* $a \in \mathbf{A}$*, alors les monoïdes*

$$\mathcal{S}(I; U, a) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(I, U \cup \{a\}) \quad \textit{et} \quad \mathcal{S}(I, a; U) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}(I \cup \{a\}, U)$$

recouvrent le monoïde $\mathcal{S}(I, U)$.
En particulier, les monoïdes $S = \mathcal{M}(a) = \mathcal{S}(0; a)$ *et* $S' = \mathcal{S}(a; 1) = 1 + a\mathbf{A}$ *sont comaximaux.*
▷ Soient $x \in \mathcal{S}(I; U, a)$, $y \in \mathcal{S}(I, a; U)$. Il faut voir que $\langle x, y\rangle$ rencontre $\langle I\rangle + \mathcal{M}(U)$, ou encore que $\langle x, y\rangle + \langle I\rangle$ rencontre $\mathcal{M}(U)$.
On a $k \geqslant 0$, $u, v \in \mathcal{M}(U)$ et $z \in \mathbf{A}$ tels que $x \in ua^k + \langle I\rangle$ et $y \in v - az + \langle I\rangle$.
Modulo $\langle x, y\rangle + \langle I\rangle$, $ua^k \equiv 0$, $v \equiv az$ donc $uv^k \equiv 0$, i.e. $uv^k \in \langle x, y\rangle + \langle I\rangle$ avec $uv^k \in \mathcal{M}(U)$. □

Commentaire. Le lemme précédent est fondamental. Il est la contrepartie constructive de la constatation banale suivante en mathématiques classiques : après que l'on ait localisé en un idéal premier tout élément se retrouve être inversible ou bien dans le radical. Quand on a affaire à ce genre d'argument dans une preuve classique, on peut la plupart du temps l'interpréter constructivement au moyen de ce lemme. Sa preuve est très simple, à l'image de la banalité de la constatation faite dans la preuve classique. Mais ici il y a un vrai calcul. On peut d'ailleurs se demander si la preuve classique évite ce calcul. Une analyse détaillée montre que non : il se trouve dans la preuve du lemme* 1.2.
∎

Les exemples donnés dans le lemme suivant sont fréquents.

1.6. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau,* U *et* I *des parties de* $\mathbf{A}$*, et* $S = \mathcal{S}(I, U)$.

1. *Si* $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{A}$ *sont des éléments comaximaux, les monoïdes* $\mathcal{M}(s_i)$ *sont comaximaux. Plus généralement, si* $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{A}$ *sont des éléments comaximaux dans* $\mathbf{A}_S$*, les monoïdes* $\mathcal{S}(I; U, s_i)$ *recouvrent le monoïde* S.

2. Soient $s_1, \ldots, s_n \in \mathbf{A}$. Les monoïdes :

$$S_1 = \mathcal{S}(0; s_1),\ S_2 = \mathcal{S}(s_1; s_2),\ S_3 = \mathcal{S}(s_1, s_2; s_3), \ldots,$$
$$S_n = \mathcal{S}(s_1, \ldots, s_{n-1}; s_n) \text{ et } S_{n+1} = \mathcal{S}(s_1, \ldots, s_n; 1)$$

sont comaximaux.
Plus généralement, les monoïdes :

$$V_1 = \mathcal{S}(I; U, s_1),\ V_2 = \mathcal{S}(I, s_1; U, s_2),\ V_3 = \mathcal{S}(I, s_1, s_2; U, s_3),\ \ldots,$$
$$V_n = \mathcal{S}(I, s_1, \ldots, s_{n-1}; U, s_n) \text{ et } V_{n+1} = \mathcal{S}(I, s_1, \ldots, s_n; U)$$

recouvrent le monoïde $S = \mathcal{S}(I, U)$.

3. Si S, S_1, …, $S_n \subseteq \mathbf{A}$ sont des monoïdes comaximaux et si $a \in \mathbf{A}$, alors les monoïdes $\mathcal{S}(I; U, a)$, $\mathcal{S}(I, a; U)$, S_1, …, S_n sont comaximaux.

D Les points *2* et *3* résultent immédiatement des lemmes 1.3 et 1.5.
1. Le premier cas résulte du fait que pour $k_1, \ldots, k_n \geqslant 1$, on a, pour k assez grand, $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle^k \subseteq \langle s_1^{k_1}, \ldots, s_n^{k_n}\rangle$; on peut prendre $k = \sum_i (k_i - 1) + 1$.
Pour le cas général, soient $t_1, \ldots, t_n$ avec $t_i \in \mathcal{S}(I; U, s_i)$; on veut montrer que $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ rencontre $S = \mathcal{S}(I, U)$. Par définition, il y a un $u_i \in \mathcal{M}(U)$ et $k_i \geqslant 0$ tels que $t_i \in u_i s_i^{k_i} + \langle I\rangle$; en posant $u = u_1 \cdots u_n \in \mathcal{M}(u)$, on obtient $u s_i^{k_i} \in \langle t_i\rangle + \langle I\rangle \subseteq \langle t_1, \ldots, t_n\rangle + \langle I\rangle$. Donc pour k assez grand :

$$u\,\langle s_1, \ldots, s_n\rangle^k \subseteq u\langle s_1^{k_1}, \ldots, s_n^{k_n}\rangle \subseteq \langle t_1, \ldots, t_n\rangle + \langle I\rangle\,.$$

Mais comme s_1, …, s_n sont des éléments comaximaux dans $\mathbf{A}_S$, il y a un $s \in S$ tel que $s \in \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$; donc $us^k \in \langle t_1, \ldots, t_n\rangle + \langle I\rangle$, c'est-à-dire encore $\langle t_1, \ldots, t_n\rangle$ rencontre $us^k + \langle I\rangle \subseteq S$. □

2. Quelques principes local-globals concrets

Systèmes linéaires

Le principe local-global concret suivant est une légère généralisation du principe local-global II-2.3 (principe local-global concret de base), qui ne concernait que le point *4* ci-dessous dans le cas de modules libres de rang fini. En fait l'essentiel a déjà été donné dans le principe local-global II-6.7 (principe local-global concret pour les modules). Nous redonnons les démonstrations pour insister sur leur grande simplicité.
Soient M_1, …, M_ℓ, P des $\mathbf{A}$-modules. Nous disons qu'une application $\Phi : M_1 \times \cdots \times M_\ell \to P$ est *homogène* s'il existe des entiers $r_1, \ldots, r_\ell$ tels que l'on ait identiquement $\Phi(a_1 x_1, \ldots, a_\ell x_\ell) = a_1^{r_1} \cdots a_\ell^{r_\ell} \Phi(x_1, \ldots, x_\ell)$.
Dans un tel cas, l'application Φ « passe aux localisations » : elle peut être étendue naturellement en une application

$$\Phi_S : S^{-1}M_1 \times \cdots \times S^{-1}M_\ell \to S^{-1}P$$

pour n'importe quel monoïde S. Le prototype d'une application homogène est une application donnée par des polynômes homogènes en les coordonnées lorsque les modules sont libres de rang fini.

2.1. Principe local-global concret. *Soient S_1, ..., S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, M, N, P des $\mathbf{A}$-modules, φ, ψ des applications linéaires de M dans N, $\theta : N \to P$ une application linéaire, et x, y des éléments de N. On note $\mathbf{A}_i$ pour $\mathbf{A}_{S_i}$, M_i pour M_{S_i} etc. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *Recollement concret des égalités :*
$$x = y \quad \text{dans} \quad N \iff \forall i \in [\![1..n]\!] \ x/1 = y/1 \quad \text{dans} \quad N_i.$$
2. *Recollement concret des égalités d'applications linéaires :*
$$\varphi = \psi \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) \iff$$
$$\forall i \in [\![1..n]\!] \ \varphi/1 = \psi/1 \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}_{\mathbf{A}_i}(M_i,N_i).$$
3. *Recollement concret des éléments réguliers :*
$$x \text{ est régulier dans } N \iff$$
$$\forall i \in [\![1..n]\!] \ x/1 \text{ est régulier dans } N_i.$$
4. *Recollement concret des solutions de systèmes linéaires :*
$$x \in \operatorname{Im}\varphi \iff \forall i \in [\![1..n]\!] \ x/1 \in \operatorname{Im}\varphi_i$$
5. *Recollement concret des solutions de systèmes linéaires sous conditions homogènes. Soit (Φ_ℓ) une famille finie d'applications homogènes*
$$\Phi_\ell : \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) \times N \to Q_\ell, \text{ ou } \Phi_\ell : \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) \to Q_\ell, \text{ ou } \Phi_\ell : N \to Q_\ell.$$
Alors :
$$\big(\&_\ell \ \Phi_\ell(\varphi,y) = 0\big) \ \Rightarrow \ y \in \operatorname{Im}\varphi\big) \iff$$
$$\forall i \in [\![1..n]\!] \ \big(\&_\ell \ \Phi_\ell(\varphi,y) =_{Q_{\ell,i}} 0\big) \ \Rightarrow \ y/1 \in \operatorname{Im}\varphi_i\big).$$
où l'on a noté $Q_{\ell,i}$ pour $(Q_\ell)_{S_i}$.
6. *Recollement concret des suites exactes. La suite*
$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\theta} P$$
est exacte si, et seulement si, les suites
$$M_i \xrightarrow{\varphi_{S_i}} N_i \xrightarrow{\theta_{S_i}} P_i$$
sont exactes pour $i \in [\![1..n]\!]$.
7. *Recollement concret de facteurs directs dans les modules de présentation finie. Ici M est un sous-module de type fini d'un module de présentation finie N.*
$$M \text{ est facteur direct dans } N \iff$$
$$\forall i \in [\![1..n]\!], \ M_i \text{ est facteur direct dans } N_i.$$

D Les conditions sont nécessaires en raison du fait II-6.4. Une vérification directe est d'ailleurs immédiate. Prouvons que les conditions locales sont suffisantes.
1. Supposons que $x/1 = 0$ dans chaque N_i. Pour des $s_i \in S_i$ convenables on a donc $s_i x = 0$ dans N. Comme $\sum_{i=1}^{n} a_i s_i = 1$, on obtient $x = 0$ dans N.
2. Conséquence immédiate de *1.*
3. Supposons que $x/1$ soit régulier dans chaque N_i. Soit $a \in \mathbf{A}$ avec $ax = 0$ dans $\mathbf{A}$, donc aussi $ax/1 = 0$ dans chaque N_i. On a donc $a/1 = 0$ dans chaque $\mathbf{A}_i$, donc aussi dans $\mathbf{A}$.
4. Supposons que l'équation $\varphi(z) = x$ admette une solution z_i dans chaque M_i. On peut écrire $z_i = y_i/s_i$ avec $y_i \in M$ et $s_i \in S_i$. On a donc $u_i\varphi(y_i) = s_i u_i x$ dans N avec $u_i \in S_i$. Comme $\sum_{i=1}^{n} a_i s_i u_i = 1$, on pose $z = \sum_{i=1}^{n} a_i u_i y_i$ et l'on obtient $\varphi(z) = x$ dans N.
5. C'est une simple variante de *4*, l'homogénéité des Φ_ℓ intervient pour que la propriété locale soit bien définie, et pour qu'elle résulte de la propriété globale.
6. C'est un cas particulier du point précédent.
7. Soit $\rho : N \to N/M$ la projection canonique. Le module N/M est également un module de présentation finie. Le module M est facteur direct dans N si, et seulement si, ρ est inversible à droite, on peut donc conclure par le principe local-global IV-3.1. □

Remarque. On peut voir que le point *5*, simple variante du point *4*, implique tous les autres comme cas particuliers. Par ailleurs, le point *4* résulte du point *1* avec $y = 0$ en considérant le module $\big(N/\varphi(M)\big)_{S_i} \simeq N_{S_i}/\varphi_{S_i}(M_{S_i})$. On aurait donc pu énoncer le point *1* comme seul principe de base et en déduire les points *2* à *6* comme corollaires. Enfin le point *7* résulte aussi directement du point *4* (voir la démonstration du principe local-global IV-3.1) ∎

Propriétés de finitude pour les modules

Les propriétés de finitude usuelle des modules ont un caractère local. La plupart ont déjà été démontrées, nous récapitulons.

2.2. Principe local-global concret. (Recollement concret de propriétés de finitude pour les modules) *Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et M un $\mathbf{A}$-module. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *M est de type fini si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module de type fini.*
2. *M est de présentation finie si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module de présentation finie.*
3. *M est plat si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module plat.*

4. *M est projectif de type fini si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module projectif de type fini.*
5. *M est projectif de rang k si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module projectif de rang k.*
6. *M est cohérent si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module cohérent.*
7. *M est noethérien si, et seulement si, chacun des M_{S_i} est un $\mathbf{A}_{S_i}$-module noethérien.*

D *1.* Voir le principe local-global II-3.6.
2. Voir le principe local-global IV-4.13.
3. Voir le principe local-global VIII-1.7.
4. Voir le principe local-global V-2.4. On peut aussi utiliser le fait qu'un module de présentation finie est projectif si, et seulement si, il est plat (et appliquer les points *2* et *3*).
5. Résulte du point *4* et du fait que le polynôme rang peut-être calculé localement (il est égal à X^k si, et seulement si, il est égal à X^k après localisation en des monoïdes comaximaux).
6. Voir le principe local-global II-3.5.
7. Nous faisons la preuve pour la noethérianité définie constructivement à la Richman-Seidenberg. Limitons nous au cas de deux localisations comaximales en S_1 et S_2. Considérons, une suite croissante $(M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de sous-modules de type fini de M. Elle admet une sous-suite infinie $\big(M_{\sigma(k)}\big)_{k\in\mathbb{N}}$, où $\sigma(k) < \sigma(k+1)\,\forall\, k$, avec : $M_{\sigma(k)} = M_{\sigma(k)+1}$ après localisation en S_1 pour tout k. Considérons la suite infinie $M_{\sigma(k)}$ vue dans M_{S_2}. Elle admet deux termes consécutifs égaux $M_{\sigma(k)}$ et $M_{\sigma(k+1)}$. Donc $M_{\sigma(k)}$ et $M_{\sigma(k)+1}$ sont égaux à la fois dans M_{S_1} et M_{S_2}. Ils sont donc égaux dans M. □

Propriétés des anneaux commutatifs

Nous rappelons quelques résultats déjà établis concernant le caractère local de quelques propriétés intéressantes pour les anneaux commutatifs, au sens de la localisation en des monoïdes comaximaux.

2.3. Principe local-global concret. (Recollement concret de propriétés des anneaux commutatifs) *Soient S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *$\mathbf{A}$ est cohérent si, et seulement si, chaque $\mathbf{A}_{S_i}$ est cohérent.*
2. *$\mathbf{A}$ est localement sans diviseur de zéro si, et seulement si, chaque $\mathbf{A}_{S_i}$ est localement sans diviseur de zéro.*
3. *$\mathbf{A}$ est quasi intègre si, et seulement si, chaque $\mathbf{A}_{S_i}$ est quasi intègre.*
4. *$\mathbf{A}$ est réduit si, et seulement si, chaque $\mathbf{A}_{S_i}$ est réduit.*

5. *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est localement principal si, et seulement si, chaque* $\mathfrak{a}_{S_i}$ *est localement principal.*
6. $\mathbf{A}$ *est arithmétique si, et seulement si, chaque* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est arithmétique.*
7. $\mathbf{A}$ *est de Prüfer si, et seulement si, chaque* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est de Prüfer.*
8. *L'idéal* $\mathfrak{a}$ *est intégralement clos si, et seulement si, chaque* $\mathfrak{a}_{S_i}$ *est intégralement clos.*
9. $\mathbf{A}$ *est normal si, et seulement si, chaque* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est normal.*
10. $\mathbf{A}$ *est de dimension de Krull* $\leqslant k$ *si, et seulement si, chaque* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est de dimension de Krull* $\leqslant k$.
11. $\mathbf{A}$ *est noethérien si, et seulement si, chaque* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est noethérien.*

Rappelons également que, pour des localisations en des éléments comaximaux, le principe local-global concret s'applique aussi pour les notions d'anneau de Dedekind et d'anneau cohérent noethérien fortement discret (principe local-global XII-7.14).

Principes local-globals concrets pour les algèbres

Localisation en bas

2.4. Principe local-global concret. *Soient* $S_1, \ldots, S_n$ *des monoïdes comaximaux d'un anneau* $\mathbf{k}$ *et* $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est de type fini (resp. plate, fidèlement plate, de présentation finie, finie, entière, strictement finie, séparable, strictement étale) sur* $\mathbf{k}$.
2. *Chacune des algèbres* $\mathbf{A}_{S_i}$ *est de type fini (resp. plate, fidèlement plate, de présentation finie, finie, entière, strictement finie, séparable, strictement étale) sur* $\mathbf{k}_{S_i}$.

De même si $\mathbf{A}$ *est strictement finie et si* $\lambda \in \mathbf{A}^\star$*, alors* λ *est dualisante si, et seulement si, chacune des formes* λ_{S_i} *est dualisante.*

D *1* $\Leftrightarrow$ *2.* On introduit la $\mathbf{k}$-algèbre fidèlement plate $\prod_i \mathbf{k}_{S_i}$. Il suffit alors d'appliquer le théorème VIII-6.8.
La question de la forme dualisante (lorsque $\mathbf{A}$ est strictement finie) est une question d'isomorphisme de modules et relève des principes local-globals concrets pour les modules (en tenant compte du fait VI-6.11). □

Localisation en haut

Il y a aussi des principes local-globals qui correspondent à des propriétés dites « locales dans $\mathbf{A}$ ». Ici nous avons besoin de localisations en des éléments comaximaux (les monoïdes comaximaux ne suffisent pas).

2.5. Principe local-global concret.
Soit $\mathbf{A}$ *une* $\mathbf{k}$*-algèbre et* $s_1, \ldots, s_m$ *des éléments comaximaux de* $\mathbf{A}$*. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathbf{A}$ *est de type fini (resp. de présentation finie, plate) sur* $\mathbf{k}$*.*
2. *Chacune des algèbres* $\mathbf{A}_{s_i}$ *est de type fini (resp. de présentation finie, plate) sur* $\mathbf{k}$*.*

$\mathbb{D}$ Tout d'abord si $\mathbf{A} = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n] = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$ et $s = S(\underline{x})$ (où $S \in \mathbf{k}[\underline{X}]$), alors $\mathbf{A}_s = \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n, t]$ avec $t = 1/s$ dans $\mathbf{A}_s$, ce qui donne aussi

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{k}[X_1, \ldots, X_n, T]/(\mathfrak{a} + \langle TS(\underline{X}) - 1\rangle)\ .$$

Ainsi la propriété d'être de type fini ou de présentation finie est stable par localisation en un élément (mais elle ne l'est pas pour une localisation en un monoïde arbitraire).
Concernant la platitude, comme $\mathbf{A}_s$ est plate sur $\mathbf{A}$, si $\mathbf{A}$ est plate sur $\mathbf{k}$, $\mathbf{A}_s$ est plate sur $\mathbf{k}$ (fait VIII-6.4).
Supposons maintenant que $\sum_i s_i u_i = 1$ dans $\mathbf{A}$.
Voyons tout d'abord ce que l'on obtient si chacune des $\mathbf{k}$-algèbres $\mathbf{A}_{s_i}$ est de type fini. On peut supposer que les générateurs proviennent d'éléments de $\mathbf{A}$ (en considérant la fraction correspondante de dénominateur 1). Faisons une seule liste $(x_1, \ldots, x_n)$ avec tous ces éléments de $\mathbf{A}$. Le lecteur constatera alors par un petit calcul que $\mathbf{A}$ est engendrée par

$$(x_1, \ldots, x_n, s_1, \ldots, s_m, u_1, \ldots, u_m) = (y_1, \ldots, y_p), \text{ avec } p = n + 2m.$$

Voyons maintenant le cas où toutes les algèbres $\mathbf{A}_{s_i}$ sont de présentation finie. On considère des indéterminées Y_i correspondant à la liste $(y_1, \ldots, y_p)$ définie ci-dessus. On écrit $s_i = S_i(\underline{x})$, $u_i = U_i(\underline{x})$ avec des polynômes à coefficients dans $\mathbf{k}$.
Pour le système générateur commun $(x_1, \ldots, x_n)$ que nous venons de considérer, et pour chaque $i \in [\![1..m]\!]$, nous avons un système polynomial correspondant, disons F_i, dans $\mathbf{k}[\underline{X}, Y_{n+i}, T_i]$, qui permet de définir l'isomorphisme

$$\mathbf{k}[\underline{X}, Y_{n+i}, T_i]/\mathfrak{a}_i \to \mathbf{A}_{s_i},$$

avec $\mathfrak{a}_i = \langle F_i, Y_{n+i} - S_i(\underline{X}), Y_{n+i}T_i - 1\rangle$. Pour chaque $f \in F_i$ il y a un exposant k_f tel que $s_i^{k_f} f(\underline{x}) = 0$ dans $\mathbf{A}$. On peut prendre tous les k_f égaux, disons à k.
On considère alors le système polynomial suivant dans $\mathbf{k}[Y_1, \ldots, Y_p]$, avec $Y_j = X_j$ pour $j \in [\![1..n]\!]$. On prend tout d'abord tous les $Y_{n+i}^k f(\underline{X})$ pour $f \in F_i$ et $i \in [\![1..m]\!]$.
Ensuite on écrit les relations $Y_{n+i} - S_i(\underline{X})$ et $Y_{n+m+i} - U_i(\underline{X})$ pour les indices $i \in [\![1..m]\!]$. Enfin, on prend la relation qui correspond à $\sum_i u_i s_i = 1$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^m Y_{n+i}Y_{n+m+i} - 1$.
La lectrice fera le calcul pour se convaincre que l'on a bien ainsi une description sans faille de la $\mathbf{k}$-algèbre $\mathbf{A}$. Le contraire eût été étonnant, voire

immoral, puisque l'on a transcrit tout ce que l'on pouvait savoir de la situation. L'important était que cela puisse s'exprimer par un système fini de relations sur un système fini d'indéterminées. En fait on a procédé exactement comme dans la démonstration du principe local-global IV-4.13 pour les modules de présentation finie.
Concernant la platitude, considérons $(a_1, \dots, a_n)$ dans $\mathbf{k}$ et $(x_1, \dots, x_n)$ dans $\mathbf{A}$ tels que $\sum_i x_i a_i = 0$. Nous voulons montrer que $(x_1, \dots, x_n)$ est combinaison $\mathbf{A}$-linéaire de relations de dépendance linéaire dans $\mathbf{k}$. Nous savons que ceci est vrai après localisation en chacun des s_k. On a donc un exposant N tel que pour chaque k on ait une égalité

$$s_k^N(x_1, \dots, x_n) = \sum\nolimits_{j=1}^{p_j} b_{k,j}(x_{1,k,j}, \dots, x_{n,k,j}),$$

($x_{i,k,j} \in \mathbf{k}$, $b_{k,j} \in \mathbf{A}$) avec $\sum_i x_{i,k,j} a_i = 0$. On termine en prenant une combinaison $\mathbf{A}$-linéaire des s_k^N égale à 1. □

3. Quelques principes local-globals abstraits

Un outil essentiel en algèbre commutative classique est la localisation en un idéal premier. Cet outil est a priori difficile à utiliser constructivement parce que l'on ne sait pas fabriquer les idéaux premiers qui interviennent dans les démonstrations classiques, et dont l'existence repose sur l'axiome du choix. Cependant, on peut remarquer que ces idéaux premiers sont en général utilisés à l'intérieur de démonstrations par l'absurde, et ceci donne une explication du fait que le recours à ces objets « idéaux » peut être contourné et même interprété constructivement (voir section 5).

Principe local-global abstrait pour les propriétés de caractère fini

Le principe local-global abstrait en algèbre commutative est un principe informel selon lequel certaines propriétés concernant les modules sur les anneaux commutatifs sont vraies si et seulement si elles sont vraies après localisation en n'importe quel idéal premier.
Nous rappelons maintenant quelques cas où le principe local-global abstrait s'applique en mathématiques classiques, en expliquant le lien avec les principes concrets correspondants.
Une version abstraite du principe local-global concret 2.1 est la suivante.

3.1. Principe local-global abstrait*. *Soient φ, ψ des applications linéaires $M \to N$, θ une application linéaire $N \to P$, et x, y des éléments de N. Alors on a les équivalences suivantes.*

1. *Recollement abstrait des égalités :*

$$x = y \quad \text{dans} \quad N \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \;\; x/1 = y/1 \quad \text{dans} \quad N_{\mathfrak{p}}$$

2. *Recollement abstrait des égalités d'applications linéaires :*
$$\varphi = \psi \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \;\; \varphi/1 = \psi/1 \quad \text{dans} \quad \mathrm{L}_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}, N_\mathfrak{p}).$$
3. *Recollement abstrait des éléments réguliers :*
$$x \text{ est régulier dans } N \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \quad x/1 \text{ est régulier dans } N_\mathfrak{p}.$$
4. *Recollement abstrait des solutions de systèmes linéaires :*
$$x \in \mathrm{Im}\,\varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \;\; x/1 \in \mathrm{Im}\,\varphi_\mathfrak{p}.$$
5. *Recollement abstrait des solutions de systèmes linéaires sous conditions homogènes. Soit* (Φ_ℓ) *une famille finie d'applications homogènes*
$$\Phi_\ell : \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) \times N \to Q_\ell, \text{ ou } \Phi_\ell : \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N) \to Q_\ell, \text{ ou } \Phi_\ell : N \to Q_\ell.$$
Alors :
$$\big((\&_\ell\, \Phi_\ell(\varphi, y) = 0) \;\Rightarrow\; y \in \mathrm{Im}\,\varphi\big) \qquad \Longleftrightarrow$$
$$\forall \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \;\; \big((\&_\ell\, \Phi_\ell(\varphi, y) =_{Q_{\ell,\mathfrak{p}}} 0) \;\Rightarrow\; y/1 \in \mathrm{Im}\,\varphi_\mathfrak{p}\big),$$
où l'on a noté $Q_{\ell,\mathfrak{p}}$ *pour* $(Q_\ell)_\mathfrak{p}$.
6. *Recollement abstrait des suites exactes. La suite*
$$M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\theta} P$$
est exacte si, et seulement si, la suite
$$M_\mathfrak{p} \xrightarrow{\varphi_\mathfrak{p}} N_\mathfrak{p} \xrightarrow{\theta_\mathfrak{p}} P_\mathfrak{p}$$
est exacte pour tout $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$.
7. *Recollement abstrait de facteurs directs dans les modules de présentation finie. Ici* M *est un sous-module de type fini d'un module de présentation finie* N.
$$M \text{ est facteur direct dans } N \iff$$
$$\forall \mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A} \; M_\mathfrak{p} \text{ est facteur direct dans } N_\mathfrak{p}$$

Démonstrations (non constructives). Les conditions sont nécessaires en raison du fait II-6.4. Une vérification directe est d'ailleurs immédiate. Pour les réciproques, nous supposons sans perte de généralité que l'anneau $\mathbf{A}$ est non trivial. Il suffit de traiter le point *4* (voir la remarque page 867). En fait nous avons déjà établi le point *6*, qui implique le point *4*, dans le principe local-global abstrait II-6.8 page 60, mais nous pensons qu'il n'est pas inutile de redonner deux démonstrations classiques distinctes (la seconde est celle donnée au chapitre II) et de comparer leur degré d'effectivité.

Première démonstration.

Supposons $x \notin \mathrm{Im}\,\varphi$, cela revient à dire que $x \neq 0$ dans $N/\varphi(M)$. Puisque pour un idéal premier $\mathfrak{p}$ on a $\big(N/\varphi(M)\big)_\mathfrak{p} \simeq N_\mathfrak{p}/\varphi_\mathfrak{p}(M_\mathfrak{p})$, il suffit de prouver le point *1* avec $y = 0$. On raisonne par l'absurde en supposant $x \neq 0$ dans N. Autrement dit $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x) \neq \langle 1\rangle$, et il existe $\mathfrak{p} \in \mathsf{Spec}\,\mathbf{A}$ qui contient $\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x)$. Alors, puisque $\big(\mathrm{Ann}_{\mathbf{A}}(x)\big)_\mathfrak{p} = \mathrm{Ann}_{\mathbf{A}_\mathfrak{p}}(x/1)$, on obtient $x \neq_{N_\mathfrak{p}} 0$.

Deuxième démonstration.
La propriété $x \in \operatorname{Im}\varphi$ est de caractère fini, on peut donc appliquer le fait* II-2.12 qui dit (en mathématiques classiques) que pour une propriété de caractère fini, le principe local-global concret (localisation en des monoïdes comaximaux) est équivalent au principe local-global abstrait (localisation en tous les idéaux maximaux). □

Commentaires.
1) Il ne semble pas que la deuxième preuve, de caractère trop général, puisse jamais être rendue constructive. La première preuve n'est pas non plus « en général » constructive, mais il existe des cas où elle l'est. Il suffit pour cela que les conditions suivantes soient vérifiées, dans le cas du point *4.*

- Le module N est de présentation finie et le module M de type fini.
- L'anneau $\mathbf{A}$ est cohérent fortement discret.
- Pour tout idéal de type fini strict $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ on sait construire un idéal premier $\mathfrak{p}$ contenant $\mathfrak{a}$.

Les deux dernières conditions sont vérifiées lorsque $\mathbf{A}$ est une algèbre de présentation finie sur $\mathbb{Z}$ ou sur un corps « pleinement factoriel » (voir [MRR]).
2) Ceci nous permet, par exemple, de donner une autre preuve constructive du théorème matriciel X-1.7. Comme nous l'avons remarqué page 554, il nous suffit de traiter le cas générique et de montrer certaines égalités $r_i r_j = 0$ et $r_h u = 0$. Comme l'anneau $\mathbf{G}_n$ est une algèbre de présentation finie sur $\mathbb{Z}$, nous pouvons montrer ces égalités en appliquant le recollement abstrait des égalités. Nous sommes donc ramenés au cas d'un localisé local de $\mathbf{G}_n$, et dans ce cas les égalités sont vraies puisque le module est libre par application du lemme de la liberté locale.
3) En pratique, on peut comprendre le principe local-global abstrait 3.1 sous la forme intuitive suivante : pour démontrer un théorème d'algèbre commutative dont la signification est qu'un certain système linéaire sur un anneau commutatif $\mathbf{A}$ admet une solution, il suffit de traiter le cas où l'anneau est local. C'est un principe du même genre que le principe de Lefschetz : pour démontrer un théorème d'algèbre commutative dont la signification est qu'une certaine identité algébrique a lieu, il suffit de traiter le cas où l'anneau est le corps des complexes (ou n'importe quel sous-anneau qui nous arrange, d'ailleurs). Cette remarque est développée dans la section 5.
4) Dans l'article [10], Hyman Bass fait le commentaire suivant concernant une version noethérienne du principe local-global abstrait 3.1, point *7.*
Aussi élémentaire que ce résultat puisse paraître, il ne semble pas qu'aucune preuve puisse en être donnée sans utiliser, ou reconstruire pour l'essentiel, le foncteur Ext^1.
Ce commentaire est étonnant, au vu du caractère tout à fait anodin de

notre preuve du principe concret correspondant, laquelle ne calcule rien qui ressemble à un Ext^1. En fait, lorsque le but est de montrer le scindage d'une suite suite exacte courte, il semble que l'efficace machinerie calculatoire des Ext est souvent inutile, et qu'elle peut être court-circuitée par un argument plus élémentaire.
5) Le principe local-global abstrait ci-dessus fonctionne aussi en utilisant uniquement la localisation en n'importe quel idéal maximal, comme vu dans le principe local-global abstrait II-6.8 page 60. Mais ceci n'est pas vraiment utile car les localisations en les idéaux maximaux sont les moins poussées (parmi les localisations en les idéaux premiers). Il y a par contre des cas où le raisonnement classique utilise uniquement des localisations en des idéaux premiers minimaux. Ce sont des démonstrations plus subtiles et plus difficiles à décrypter constructivement. Nous en parlerons dans la section 7.
6) Comme nous l'avons remarqué page 30, le principe local-global abstrait pour les modules de type fini ne fonctionne pas. Nous revenons sur cette question dans le paragraphe qui suit. ∎

Localisation au voisinage de tout idéal premier

Le principe local-global informel en mathématiques classiques dit que les bonnes propriétés des anneaux ou des modules sont celles qui obéissent à la règle suivante :

• *La propriété est satisfaite si, et seulement si, elle est satisfaite après localisation en n'importe quel idéal premier.*

Il y a cependant des propriétés qui méritent d'être qualifiées de bonnes, comme le fait pour un module d'être de type fini ou cohérent, et qui n'obéissent pas à la règle ci-dessus, mais seulement à la règle suivante :

• Forme variante d'un principe local-global abstrait. *La propriété est satisfaite si, et seulement si, elle est satisfaite après localisation au voisinage de n'importe quel idéal premier.*

Dans cette règle, «après localisation au voisinage de l'idéal premier $\mathfrak{P}$» signifie qu'il existe un $s \notin \mathfrak{P}$ tel que la propriété est satisfaite pour le changement d'anneau de base $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/s]$.
Dans la forme variante, la vérification de la propriété locale est plus délicate, car l'anneau $\mathbf{A}[1/s]$ n'est pas local, mais l'implication du local au global est plus facile à établir, et plus souvent satisfaite.
En fait cette deuxième forme de principe local-global est «la meilleure». On démontre facilement en mathématiques classiques que cette règle est équivalente à la règle la plus stricte que nous utilisons en mathématiques constructives, celle où nous faisons appel à des éléments comaximaux plutôt qu'à des monoïdes comaximaux.

• Forme constructive stricte d'un principe local-global. *La propriété est satisfaite si, et seulement si, elle est satisfaite après localisation en des éléments comaximaux.*

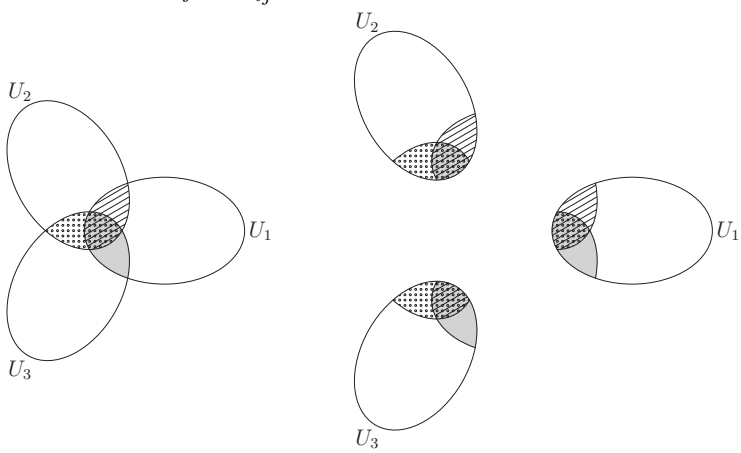
Enfin, sans doute le plus important, c'est cette règle qui permet de déclarer légitime le passage des « bonnes » propriétés des schémas affines aux schémas de Grothendieck. Par exemple la propriété pour un module d'être de présentation finie et cohérent vérifie la deuxième forme du principe local-global et c'est ce qui légitime la définition des « faisceaux de modules cohérents [2] ».

4. Recollement concret d'objets

La colle et les ciseaux

Nous faisons ici une brève discussion concernant les méthodes de recollement en géométrie différentielle et leurs traductions en algèbre commutative.

Tout d'abord nous examinons la possibilité de construire une variété lisse à partir de cartes locales, c'est-à-dire par recollement d'ouverts U_i de $\mathbb{R}^n$ au moyen de difféomorphismes (ou isomorphismes) $\varphi_{ij} : U_{ij} \to U_{ji} : U_{ij}$ est un ouvert de U_i et $\varphi_{ji} = \varphi_{ij}^{-1}$.



Nous allons considérer le cas simple où la variété est obtenue en recollant seulement un nombre fini d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Dans ce cas la condition à remplir est que les morphismes de recollements doivent être *compatibles entre eux trois par trois*. Cela signifie précisément la chose suivante. Pour chaque triplet d'indices distincts (i, j, k) on considère l'ouvert $U_{ijk} = U_{ij} \cap U_{ik}$ (avec donc $U_{ijk} = U_{ikj}$). La compatibilité

2. Les faisceaux algébriques cohérents de Serre, à l'origine de l'histoire, sont localement « cohérents » au sens de Serre et Bourbaki, c'est-à-dire de présentation finie et cohérents dans la terminologie actuelle.

signifie d'une part que, pour chaque (i,j,k), la restriction $\varphi_{ij}|_{U_{ijk}}$ établit un isomorphisme de U_{ijk} sur U_{jik}, et d'autre part que si l'on compose les isomorphismes

$$U_{ijk} \xrightarrow{\varphi_{ij}|_{U_{ijk}}} U_{jik} \quad \text{et} \quad U_{jki} \xrightarrow{\varphi_{jk}|_{U_{jki}}} U_{kji}$$

on obtient l'isomorphisme $U_{ijk} \xrightarrow{\varphi_{ik}|_{U_{ijk}}} U_{kij}$: $\varphi_{ik}|_\bullet = \varphi_{jk}|_\bullet \circ \varphi_{ij}|_\bullet$.

Si l'on essaie de faire la même chose en algèbre commutative, on va considérer des anneaux $\mathbf{A}_i$ (correspondant aux anneaux $C^\infty(U_i)$) et des éléments $f_{ij} \in \mathbf{A}_i$. L'anneau $C^\infty(U_{ij})$ correspondrait à $\mathbf{A}_i[1/f_{ij}]$ et le morphisme de recollement φ_{ij} à un isomorphisme $\omega_{ij} : \mathbf{A}_i[1/f_{ij}] \to \mathbf{A}_j[1/f_{ji}]$. On devra également formuler des conditions de compatibilité trois par trois.

On espère alors construire un anneau $\mathbf{A}$ et des éléments $f_i \in \mathbf{A}$, de telle sorte que $\mathbf{A}_i$ puisse s'identifier à $\mathbf{A}[1/f_i]$, f_{ij} à « f_j vu dans $\mathbf{A}[1/f_i]$ », et ω_{ij} à l'identité entre $\mathbf{A}[1/f_i][1/f_j]$ et $\mathbf{A}[1/f_j][1/f_i]$.

Malheureusement, cela ne fonctionne pas toujours bien. L'anneau $\mathbf{A}$ censé recoller les $\mathbf{A}_i$ n'existe pas toujours (cependant, s'il existe il est bien déterminé, à isomorphisme unique près).

Le premier exemple de cet échec patent du recollement est l'espace projectif. L'espace projectif complexe $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ est obtenu en recollant des cartes affines $\mathbb{C}^n$, mais les anneaux de fonctions correspondants, isomorphes à $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$ ne se recollent pas : il n'y a pas de fonctions polynomiales définies sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, à part les constantes. Et en localisant l'anneau $\mathbb{C}$ on ne risque pas d'obtenir l'anneau $\mathbb{C}[X_1,\dots,X_n]$.

Cela illustre le fait que la géométrie algébrique est beaucoup plus rigide que la géométrie C^∞.

Ce phénomène désagréable est à l'origine de la création des schémas par Grothendieck, qui sont les objets abstraits obtenus formellement en recollant des anneaux le long de morphismes de recollement lorsque les conditions de compatibilité trois par trois sont vérifiées, mais qu'aucun anneau ne veut bien réaliser le recollement.

Voyons maintenant la question du recollement des fibrés vectoriels définis localement sur une variété lisse fixée U, recouverte par un nombre fini d'ouverts U_i. On note $U_{ij} = U_i \cap U_j$. Le fibré $\pi : W \to U$ que l'on veut construire, dont toutes les fibres sont isomorphes à un espace vectoriel F donné, est connu a priori seulement par ses restrictions $\pi_i : W_i \to U_i$. Pour que l'on puisse recoller il faut donner des difféomorphismes de recollement $\psi_{ij} : W_{ij} \to W_{ji}$ où $W_{ij} = \pi_i^{-1}(U_{ij})$. Ces morphismes doivent tout d'abord respecter la structure d'espace vectoriel fibre par fibre. En outre, là aussi, on a besoin de conditions de compatibilité trois par trois, analogues à celles que nous avons définies dans le premier cas.

Si maintenant on passe au cas analogue en algèbre commutative, on doit partir d'un anneau $\mathbf{A}$ avec un système d'éléments comaximaux $(f_1,\dots,f_\ell)$.

On note $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/f_i]$ et $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}[1/f_if_j]$. Pour chaque indice i, on donne le « module des sections du fibré $\pi_i : W_i \to U_i$ », c'est-à-dire un $\mathbf{A}_i$-module M_i. Les ψ_{ij} sont maintenant représentés par des isomorphismes de $\mathbf{A}_{ij}$-modules

$$\mathbf{A}_{ij} \otimes_{\mathbf{A}_i} M_i \xrightarrow{\theta_{ij}} \mathbf{A}_{ji} \otimes_{\mathbf{A}_j} M_j \xrightarrow{\sim} M_{ij} = M_{ji}.$$

Nous allons voir dans les paragraphes qui suivent que cette fois-ci tout se passe bien : si les conditions de compatibilité trois par trois sont satisfaites, on a bien un $\mathbf{A}$-module M qui « recolle » les $\mathbf{A}_i$-modules M_i.

Un cas simple

4.1. Théorème. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau intègre de corps de fractions $\mathbf{K}$, N un $\mathbf{A}$-module sans torsion, S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$ un sous-$\mathbf{A}_{S_i}$-module M_i de $S_i^{-1}N \subseteq \mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} N$. On suppose que pour chaque $i, j \in [\![1..n]\!]$ on a $S_j^{-1}M_i = S_i^{-1}M_j$ (vus comme sous-$\mathbf{A}$-modules de $\mathbf{K} \otimes_{\mathbf{A}} N$). On a les résultats suivants.*

1. *Il existe un unique sous-$\mathbf{A}$-module M de N tel que l'on ait $S_i^{-1}M = M_i$ pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$.*
2. *Ce sous-module M est égal à l'intersection des M_i.*
3. *Si les M_i sont de type fini (resp. de présentation finie, cohérents, projectifs de type fini), il en va de même pour M.*

▷ *1* et *2*. Soit $P = \bigcap_i M_i$. Tout d'abord $P \subseteq N$ parce qu'un élément de l'intersection s'écrit

$$\frac{x_1}{s_1} = \cdots = \frac{x_n}{s_n} = \frac{\sum_i a_i x_i}{\sum_i a_i s_i} = \sum_i a_i x_i \quad \text{si} \quad \sum_i a_i s_i = 1 \text{ dans } \mathbf{A}$$

(avec $x_i \in N$, $s_i \in S_i$ pour $i \in [\![1..n]\!]$).
Montrons que le module P satisfait les conditions requises.
Tout d'abord $P \subseteq M_i$ donc $S_i^{-1}P \subseteq M_i$ pour chaque i. Inversement soit par exemple $x_1 \in M_1$, nous voulons voir qu'il est dans $S_1^{-1}P$.
Puisque $S_j^{-1}M_1 = S_1^{-1}M_j$, il existe $u_{1,j} \in S_1$ tel que $u_{1,j}x_1 \in M_j$. En posant $s_1 = \prod_{j\neq 1} u_{1,j}$, on obtient bien $s_1x_1 \in \bigcap_i M_i$.
Voyons maintenant l'unicité.
Soit Q un module satisfaisant les conditions requises. On a $Q \subseteq S_i^{-1}Q = M_i$ et ainsi $Q \subseteq P$. Considérons alors la suite $Q \to P \to 0$. Puisqu'elle est exacte après localisation en des monoïdes comaximaux, elle est exacte (principe local-global II-6.7), i.e., l'homomorphisme d'inclusion est surjectif : $Q = P$.
Enfin le point *3* résulte de principes local-globals concrets déjà établis. □

Si l'on ne suppose pas l'anneau intègre et le module sans torsion, le théorème précédent est un peu plus délicat. Cela sera l'objet du principe local-global 4.4.

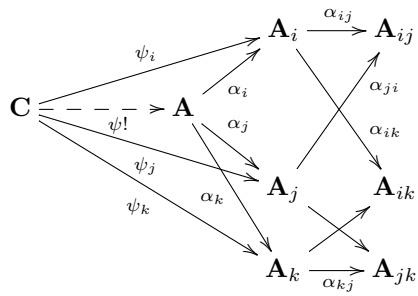
Recollement d'objets dans les modules

Soient $\mathbf{A}$ un anneau commutatif et $(S_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$. Notons $\mathbf{A}_i := \mathbf{A}_{S_i}$ et $\mathbf{A}_{ij} := \mathbf{A}_{S_iS_j}$ $(i \neq j)$ de sorte que $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$. Notons $\alpha_i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ et $\alpha_{ij} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_{ij}$ les homomorphismes naturels.
Dans la suite, des notations comme $(M_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}$ et $(\varphi_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}$ signifient que l'on a $M_{ij} = M_{ji}$ mais pas (a priori) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$.

4.2. Principe local-global concret. (Recollement concret d'éléments dans un module, et d'homomorphismes entre modules)

1. *Soit un élément $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ de $\prod_{i\in[\![1..n]\!]}\mathbf{A}_i$. Pour qu'il existe un $x \in \mathbf{A}$ vérifiant $\alpha_i(x) = x_i$ dans chaque $\mathbf{A}_i$, il faut et suffit que pour chaque $i < j$ on ait $\alpha_{ij}(x_i) = \alpha_{ji}(x_j)$ dans $\mathbf{A}_{ij}$. En outre, cet x est alors déterminé de manière unique. En d'autres termes l'anneau $\mathbf{A}$ (avec les homomorphismes α_i) est la limite projective du diagramme :*

$$\big((\mathbf{A}_i)_{i\in[\![1..n]\!]}, (\mathbf{A}_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}; (\alpha_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}\big)$$

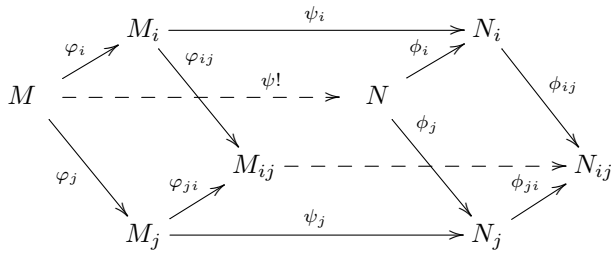


2. *Soit M un $\mathbf{A}$-module. Notons $M_i := M_{S_i}$ et $M_{ij} := M_{S_iS_j}$ $(i \neq j)$ de sorte que $M_{ij} = M_{ji}$. Notons $\varphi_i : M \to M_i$ et $\varphi_{ij} : M_i \to M_{ij}$ les applications linéaires naturelles. Alors le $\mathbf{A}$-module M (avec les applications linéaires $\varphi_i : M \to M_i$) est la limite projective du diagramme*

$$\big((M_i)_{i\in[\![1..n]\!]}, (M_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}; (\varphi_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}\big).$$

3. *Soit un autre module N, posons $N_i := N_{S_i}$, $N_{ij} := N_{S_iS_j}$. Soit pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$ une application $\mathbf{A}_i$-linéaire $\psi_i : M_i \to N_i$. Pour qu'il existe une application $\mathbf{A}$-linéaire $\psi : M \to N$ vérifiant $\psi_{S_i} = \psi_i$ pour chaque i, il faut et suffit que pour chaque $i < j$, les deux applications linéaires $(S_j)^{-1}\psi_i$ et $(S_i)^{-1}\psi_j$ de M_{ij} vers N_{ij} soient égales. En outre, l'application linéaire ψ est alors déterminée de manière*

unique.



En d'autres termes le $\mathbf{A}$*-module* $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)$ *est la limite projective du diagramme formé par les* $\mathrm{L}_{\mathbf{A}_i}(M_i,N_i)$*, les* $\mathrm{L}_{\mathbf{A}_{ij}}(M_{ij},N_{ij})$ *et les applications linéaires naturelles.*

▷ *1.* Cas particulier de *2.*

2. Soit un élément $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ de $\prod_{i\in[\![1..n]\!]} M_i$. On doit montrer que pour qu'il existe un $x \in M$ vérifiant $\varphi_i(x) = x_i$ dans chaque M_i il faut et suffit que pour chaque $i < j$ on ait $\varphi_{ij}(x_i) = \varphi_{ji}(x_j)$ dans M_{ij}. En outre, cet x doit être unique.

La condition est clairement nécessaire. Voyons qu'elle est suffisante.

Montrons l'existence de x. Il existe des $s_i \in S_i$ et des y_i dans M tels que l'on ait $x_i = y_i/s_i$ dans chaque M_i. Si $\mathbf{A}$ est intègre, M sans torsion et les $s_i \neq 0$, on a dans le module obtenu par extension des scalaires au corps des fractions :

$$\frac{y_1}{s_1} = \frac{y_2}{s_2} = \cdots = \frac{y_n}{s_n} = \frac{\sum_i a_i y_i}{\sum_i a_i s_i} = \textstyle\sum_i a_i y_i = x \in M,$$

avec $\sum_i a_i s_i = 1$. Dans le cas général on fait à peu près la même chose. Pour chaque couple (i,j) avec $i \neq j$, le fait que $x_i/1 = x_j/1$ dans M_{ij} signifie que pour certains $u_{ij} \in S_i$ et $u_{ji} \in S_j$ on a $s_j u_{ij} u_{ji} y_i = s_i u_{ij} u_{ji} y_j$. Posons $u_i = \prod_{k\neq i} u_{ik} \in S_i$. On a $s_j u_i u_j y_i = s_i u_i u_j y_j$. Soient (a_i) des éléments de $\mathbf{A}$ tels que $\sum_i a_i s_i u_i = 1$. Posons $x = \sum a_i u_i y_i$. Nous devons montrer que $x/1 = x_i$ dans M_i pour chaque i. Par exemple pour $i = 1$, on écrit les égalités suivantes dans M :

$$\begin{aligned} s_1 u_1 x \;&=\; s_1 u_1 \textstyle\sum_i a_i u_i y_i \;=\; \sum_i a_i s_1 u_1 u_i y_i \;= \\ &\textstyle\sum_i a_i s_i u_1 u_i y_1 \;=\; \big(\sum_i a_i s_i u_i\big) u_1 y_1 \;=\; u_1 y_1. \end{aligned}$$

Ainsi $s_1 u_1 x = u_1 y_1$ dans M et $x = y_1/s_1$ dans M_{S_1}.

Enfin, l'unicité de x résulte du principe de recollement concret des égalités.

3. Les applications linéaires composées $M \to M_i \to N_i$ sont compatibles avec les applications linéaires naturelles $N_i \to N_{ij}$. On conclut avec le fait que N est la limite projective du diagramme des N_i et N_{ij} (point *2*). □

Un point délicat (au sujet du point *3*). Si M est un $\mathbf{A}$-module de présentation finie ou si $\mathbf{A}$ est intègre et M de type fini, les applications $\mathbf{A}_i$-linéaires

naturelles $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)_{s_i} \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}_i}(M_i,N_i)$ sont des isomorphismes (voir les propositions V-9.3 et VIII-5.7).
Dans le cas général, la notation ψ_{s_i} est ambiguë car cela peut représenter, au choix, un élément de $\mathrm{L}_{\mathbf{A}_i}(M_i,N_i)$ ou un élément de $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)_{s_i}$. Et l'application linéaire naturelle $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)_{s_i} \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}_i}(M_i,N_i)$ n'est a priori injective que si M est de type fini. Cette ambiguïté peut être une source d'erreur. D'autant plus que $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)$ apparaît alors comme limite projective de deux diagrammes essentiellement distincts. Celui basé sur les $\mathrm{L}_{\mathbf{A}_i}(M_i,N_i)$ (le plus intéressant des deux) et celui basé sur les $\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)_{s_i}$. ∎

Un exemple d'application de recollement d'éléments. Vu que les déterminants d'endomorphismes de modules libres se comportent bien par localisation, vu le théorème qui affirme que les modules projectifs de type fini sont localement libres (au sens fort) et vu le principe local-global concret précédent, on obtient la possibilité de *définir* le déterminant d'un endomorphisme d'un module projectif de type fini en utilisant seulement des déterminants d'endomorphismes entre modules libres, après des localisations comaximales convenables. Autrement dit, le fait suivant peut être établi indépendamment de la théorie des déterminants développée aux chapitres V et X.

Fait. *Pour un endomorphisme φ d'un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini M, il existe un unique élément* $\det\varphi$ *vérifiant la propriété suivante : si $s \in \mathbf{A}$ est tel que le module M_s soit libre, alors* $(\det\varphi)_s = \det(\varphi_s)$ *dans* $\mathbf{A}_s$. ∎

Recollement de modules

Le principe de recollement 4.4 qui suit précise sous quelles conditions la limite projective d'un système de modules analogue rentre dans le cadre indiqué dans le principe local-global 4.2.

4.3. Définition. Soient S un monoïde de $\mathbf{A}$, M un $\mathbf{A}$-module et N un $\mathbf{A}_S$-module. Une application $\mathbf{A}$-linéaire $\alpha : M \to N$ est appelée un *morphisme de localisation en S* si c'est un morphisme d'extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}_S$ pour M (voir page 209).

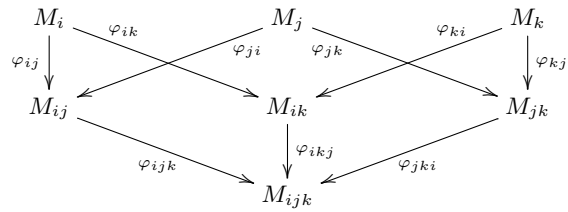
Autrement dit, si $\alpha : M \to N$ est un morphisme de localisation en S, et si $\beta_{M,S} : M \to M_S$ est l'application linéaire naturelle, l'unique application $\mathbf{A}_S$-linéaire $\varphi : M_S \to N$ telle que $\varphi \circ \beta_{M,S} = \alpha$ est un isomorphisme. Un morphisme de localisation en S peut être caractérisé par les conditions suivantes :

- $\forall x, x' \in M,\ \big(\alpha(x) = \alpha(x') \iff \exists s \in S,\ sx = sx'\big)$,
- $\forall y \in N,\ \exists x \in M,\ \exists s \in S,\ sy = \alpha(x)$.

4.4. Principe local-global concret. (Recollement concret de modules)
Soient $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$.
Notons $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{S_i}$, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{S_iS_j}$ et $\mathbf{A}_{ijk} = \mathbf{A}_{S_iS_jS_k}$. On donne dans la catégorie des $\mathbf{A}$-modules un diagramme commutatif $\mathfrak{D}$:

$$\big((M_i)_{i\in I}, (M_{ij})_{i<j\in I}, (M_{ijk})_{i<j<k\in I}; (\varphi_{ij})_{i\neq j}, (\varphi_{ijk})_{i<j, i\neq k, j\neq k}\big)$$

comme dans la figure ci-après.

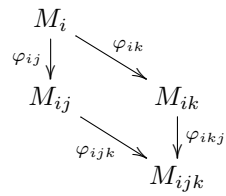


On fait les hypothèses suivantes.

- *Pour tous i, j, k (avec $i < j < k$), M_i est un $\mathbf{A}_i$-module, M_{ij} est un $\mathbf{A}_{ij}$-module et M_{ijk} est un $\mathbf{A}_{ijk}$-module. Rappelons que selon nos conventions de notation on pose $M_{ji} = M_{ij}$, $M_{ijk} = M_{ikj} = \ldots$*
- *Pour $i \neq j$, $\varphi_{ij} : M_i \to M_{ij}$ est un morphisme de localisation en S_j (vu dans $\mathbf{A}_i$).*
- *Pour $i \neq k$, $j \neq k$ et $i < j$, $\varphi_{ijk} : M_{ij} \to M_{ijk}$ est un morphisme de localisation en S_k (vu dans $\mathbf{A}_{ij}$).*

Alors, en notant $\big(M, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ la limite projective du diagramme, chaque morphisme $\varphi_i : M \to M_i$ est un morphisme de localisation en S_i. En outre $\big(M, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ est, à isomorphisme unique près, l'unique système qui rend le diagramme commutatif et qui fait de chaque φ_i un morphisme de localisation en S_i.

D Le premier point ne dépend pas du fait que les S_i sont comaximaux. En effet la construction d'une limite projective de $\mathbf{A}$-modules pour un diagramme arbitraire est stable par extension des scalaires plate (parce qu'il s'agit du noyau d'une application linéaire entre deux produits).
Or si l'on prend comme extension des scalaires le morphisme de localisation $\mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$, le diagramme se simplifie comme suit



et il admet trivialement la limite projective M_i.
Pour démontrer l'unicité, nous raisonnons sans perte de généralité avec un système d'éléments comaximaux $(s_1, \ldots, s_n)$. Soit $\big(N, (\psi_i)\big)$ un concurrent.

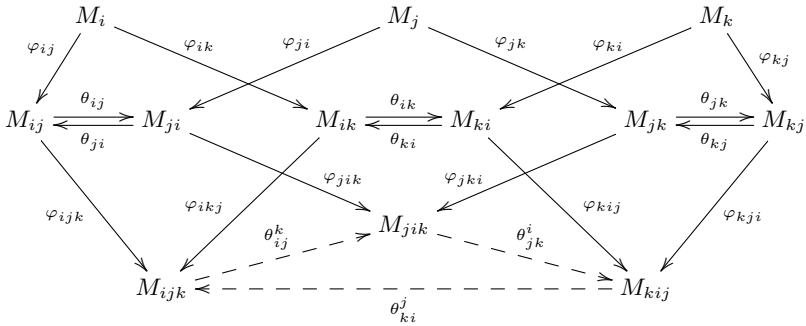
Puisque M est la limite projective du diagramme, il y a une unique application $\mathbf{A}$-linéaire $\lambda : N \to M$ telle que $\psi_i = \varphi_i \circ \lambda$ pour tout i. En fait on a $\lambda(v) = \big(\psi_1(v), \ldots, \psi_n(v)\big)$. Montrons que λ est injective. Si $\lambda(v) = 0$ tous les $\psi_i(v)$ sont nuls, et puisque ψ_i est un morphisme de localisation en s_i, il existe des exposants m_i tels que $s_i^{m_i} v = 0$.
Puisque les s_i sont comaximaux, on a $v = 0$. Comme λ est injective on peut supposer $N \subseteq M$ et $\psi_i = \varphi_i|_N$. Montrons que $N = M$. Soit $x \in M$. Comme ψ_i et φ_i sont deux morphismes de localisation en s_i, il y a un exposant m_i tel que $x s_i^{m_i} \in N$. Puisque les s_i sont comaximaux, $x \in N$. □

Remarque. Pour comprendre pourquoi la condition de comaximalité est vraiment nécessaire pour l'unicité, examinons l'exemple « trop simple » suivant. Avec l'anneau $\mathbb{Z}$, et l'unique élément $s = 2$, prenons pour M un $\mathbb{Z}[1/2]$-module libre de base (a) (où a est un objet individuel arbitraire). Pour y voir clair, nous notons M' le $\mathbb{Z}$-module M.
Considérons aussi le $\mathbb{Z}$-module N libre de base (a). Considérons deux morphismes de localisation en $2^{\mathbb{N}}$, $\varphi : M' \to M$ et $\psi : N \to M$. Ils envoient tous deux a sur a. Ainsi M' et N ne sont pas isomorphes comme $\mathbb{Z}$-modules et l'unicité est en défaut.
Si l'on avait pris $s = 1$ on pourrait définir deux morphismes de localisation en 1 distincts, à savoir $\phi_1 : N \to N,\ a \mapsto a$, et $\phi_2 : N \to N,\ a \mapsto -a$, et l'unicité serait assurée au sens demandé dans l'énoncé. ∎

En pratique, on construit souvent un module en donnant des $\mathbf{A}_i$-modules M_i et en les recollant via leurs localisations $M_{ij} = M_i[1/s_j]$. Dans ce cas les modules M_{ij} et M_{ji} sont distincts, et l'on doit donner pour chaque (i, j) un isomorphisme de $\mathbf{A}_{ij}$-modules $\theta_{ij} : M_{ij} \to M_{ji}$. Cela donne la variante suivante, dans laquelle on ne donne pas les modules M_{ijk} en hypothèse, mais où l'on indique les conditions de compatibilité que doivent satisfaire les θ_{ij}.

Principe local-global concret 4.4 bis (Recollement concret de modules)
Soient S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$.
Notons $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{S_i}$, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{S_i S_j}$ et $\mathbf{A}_{ijk} = \mathbf{A}_{S_i S_j S_k}$.
On suppose donnés des $\mathbf{A}_i$-modules M_i et l'on note
$M_{j\ell} = M_j[1/s_\ell]$ *et* $M_{jk\ell} = M_j[1/s_k s_\ell]$ *pour tous* j, k, ℓ *distincts* $\in [\![1..n]\!]$,
de sorte que $M_{jk\ell} = M_{j\ell k}$, avec les morphismes de localisation
$$\varphi_{j\ell} : M_j \to M_{j\ell} \quad \text{et} \quad \varphi_{j\ell k} : M_{j\ell} \to M_{j\ell k}.$$
On suppose donnés aussi des morphismes de $\mathbf{A}_{ij}$-modules $\theta_{ij} : M_{ij} \to M_{ji}$.
On note $\theta_{ij}^k : M_{ijk} \to M_{jik}$ le morphisme de $\mathbf{A}_{ijk}$-modules obtenu par

localisation en s_k à partir de θ_{ij}.



On suppose enfin que les relations de compatibilité suivantes sont satisfaites :

— $\theta_{ji} \circ \theta_{ij} = \mathrm{Id}_{M_{ij}}$ *pour* $i \neq j \in [\![1..n]\!]$,

— *pour i, j, k distincts dans $[\![1..n]\!]$, en composant circulairement*

$$M_{ijk} \xrightarrow{\theta^k_{ij}} M_{jik} = M_{jki} \xrightarrow{\theta^i_{jk}} M_{kji} = M_{kij} \xrightarrow{\theta^j_{ki}} M_{ikj}$$

on doit obtenir l'identité de M_{ijk}.

Alors, si $\big(M, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ est la limite projective du diagramme

$$\big((M_i)_{i\in[\![1..n]\!]}), (M_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}; (\varphi_{ij})_{i\neq j}, (\theta_{ij})_{i\neq j}\big),$$

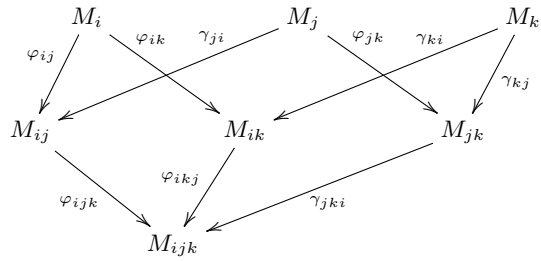
chaque morphisme $\varphi_i : M \to M_i$ est un morphisme de localisation en S_i. En outre, $\big(M, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ est, à isomorphisme unique près, l'unique système qui rend le diagramme commutatif et qui fait de chaque φ_i un morphisme de localisation en S_i.

D Notez que le diagramme ci-dessus est commutatif par construction, sauf éventuellement le triangle du bas en trait-tirets, chaque fois qu'il est possible de joindre deux modules par deux chemins différents : par exemple $\varphi_{ij} \circ \varphi_{ijk} = \varphi_{ik} \circ \varphi_{ikj}$ et $\theta^k_{ij} \circ \varphi_{ijk} = \varphi_{jik} \circ \theta_{ij}$.
Nous devons ici nous convaincre que les conditions de compatibilité indiquées sont exactement ce qui est nécessaire et suffisant pour se ramener à la situation décrite au principe local-global 4.4.
Pour cela, lorsque $i < j < k$ nous conserverons seulement M_{ij}, M_{ik}, M_{jk} et $M_{ijk} = M_{ikj}$.
Ceci nous force à remplacer

$$\begin{array}{rcllcrcl}
\varphi_{ji} & : & M_j \to M_{ji} & \text{par} & \gamma_{ji} = \theta_{ji} \circ \varphi_{ji} & : & M_j \to M_{ij}, \\
\varphi_{ki} & : & M_k \to M_{ki} & \text{par} & \gamma_{ki} = \theta_{ki} \circ \varphi_{ki} & : & M_k \to M_{ik}, \\
\varphi_{kj} & : & M_k \to M_{kj} & \text{par} & \gamma_{kj} = \theta_{kj} \circ \varphi_{kj} & : & M_k \to M_{jk}, \\
\varphi_{jki} & : & M_{jk} \to M_{jik} & \text{par} & \gamma_{jki} = \theta^k_{ji} \circ \varphi_{jki} & : & M_{jk} \to M_{ijk}.
\end{array}$$

Jusqu'ici, tout se passe sans encombre (en relation avec les modules à deux et trois indices que l'on a décidé de conserver) : les carrés $(M_i, M_{ij}, M_{ijk}, M_{ik})$ et $(M_j, M_{ij}, M_{ijk}, M_{jk})$ sont commutatifs et les flèches sont des morphismes

de localisation.
C'est seulement avec les deux morphismes de localisation $M_k \to M_{ijk}$ que l'on va voir le problème.



Ces deux morphismes de localisation sont maintenant imposés, à savoir, celui qui passe par M_{ik}, qui doit être

$$\varphi_{ikj} \circ \gamma_{ki} = \varphi_{ikj} \circ \theta_{ki} \circ \varphi_{ki} = \theta^j_{ki} \circ \varphi_{kij} \circ \varphi_{ki},$$

et celui qui passe par M_{jk}, qui doit être

$$\gamma_{jki} \circ \gamma_{kj} = \theta^k_{ji} \circ \varphi_{jki} \circ \theta_{kj} \circ \varphi_{kj} = \theta^k_{ji} \circ \theta^i_{kj} \circ \varphi_{kji} \circ \varphi_{kj}.$$

Comme $\varphi_{kij} \circ \varphi_{ki} = \varphi_{kji} \circ \varphi_{kj}$, la fusion a réussi si l'on a $\theta^j_{ki} = \theta^k_{ji} \circ \theta^i_{kj}$.
En fait la condition est aussi nécessaire parce que « tout morphisme de localisation est un épimorphisme » : si $\psi_1 \circ \varphi = \psi_2 \circ \varphi$ avec φ un morphisme de localisation, alors $\psi_1 = \psi_2$. □

Recollement d'homomorphismes entre anneaux

4.5. Définition. Soit S un monoïde de $\mathbf{A}$. Un morphisme $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est appelé un *morphisme de localisation en S* si tout morphisme $\psi : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ tel que $\psi(S) \subseteq \mathbf{C}^\times$ se factorise de manière unique par α.

Remarque. Si $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est un homomorphisme de localisation, et si $S = \alpha^{-1}(\mathbf{B}^\times)$, alors $\mathbf{B}$ est canoniquement isomorphe à $\mathbf{A}_S$. Par ailleurs, un morphisme de localisation peut aussi être caractérisé comme suit :

- $\forall x, x' \in \mathbf{A}\ (\alpha(x) = \alpha(x') \iff \exists s \in S\ sx = sx')$
- $\forall y \in \mathbf{B},\ \exists x \in \mathbf{A},\ \exists s \in S\ \ sy = \alpha(x)$. ∎

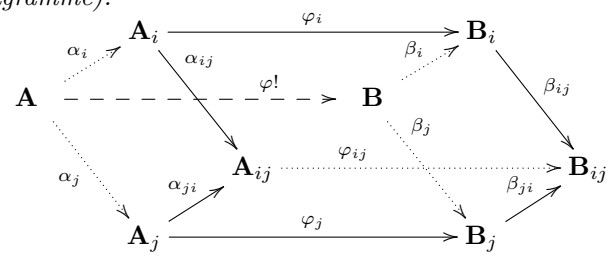
Dans la théorie des schémas développée par Grothendieck, les morphismes de localisation $\mathbf{A} \to \mathbf{A}[1/s]$ jouent un rôle prépondérant.
Nous avons déjà discuté au début de cette section 4 l'impossibilité de recoller en général des anneaux, avec l'exemple de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$, ce qui conduit à la définition des schémas.
La possibilité de définir une catégorie des schémas comme « recollements d'anneaux » repose en dernière analyse sur le principe de recollement concret suivant pour les homomorphismes entre anneaux. La démonstration du

principe est très simple. La chose importante est que le morphisme est défini uniquement à travers des localisations et que les conditions de compatibilité sont elles-mêmes décrites via des localisations plus poussées.

4.6. Principe local-global concret. (Recollement de morphismes d'anneaux) *Soient* $\mathbf{A}$ *et* $\mathbf{B}$ *deux anneaux,* $s_1, \ldots, s_n$ *des éléments comaximaux de* $\mathbf{A}$ *et* $t_1, \ldots, t_n$ *des éléments comaximaux de* $\mathbf{B}$*. Posons*

$$\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/s_i],\ \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}[1/s_is_j],\ \mathbf{B}_i = \mathbf{B}[1/t_i] \text{ et } \mathbf{B}_{ij} = \mathbf{B}[1/t_it_j].$$

Pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$*, soit* $\varphi_i : \mathbf{A}_i \to \mathbf{B}_i$ *un homomorphisme. Supposons que les conditions de compatibilité suivantes soient satisfaites : pour* $i \neq j$ *les deux homomorphismes* $\beta_{ij} \circ \varphi_i : \mathbf{A}_i \to \mathbf{B}_{ij}$ *et* $\beta_{ji} \circ \varphi_j : \mathbf{A}_j \to \mathbf{B}_{ij}$ *se factorisent via* $\mathbf{A}_{ij}$ *et donnent un même homomorphisme* $\varphi_{ij} : \mathbf{A}_{ij} \to \mathbf{B}_{ij}$ *(voir le diagramme).*



Alors il existe un unique homomorphisme $\varphi : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ *tel que pour chaque* i*, on ait* $\varphi_i \circ \alpha_i = \beta_i \circ \varphi$*.*

D Les conditions de compatibilité sont clairement nécessaires. Montrons qu'elles sont suffisantes. D'après le principe local-global 4.2, $\mathbf{B}$ est la limite projective du diagramme des $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{B}_{ij}$ et β_{ij}. Les conditions de compatibilité impliquent que l'on a aussi les égalités

$$\beta_{ij} \circ (\varphi_i \circ \alpha_i) = \beta_{ji} \circ (\varphi_j \circ \alpha_j)$$

qui sont les conditions pour assurer l'existence et l'unicité de φ. □

5. La machinerie locale-globale constructive de base

Localisez donc en n'importe quel idéal premier.
Une mathématicienne classique

Rappelons que nous avons présenté dans la section VII-2 la philosophie générale de la méthode dynamique en algèbre constructive.
Nous indiquons maintenant comment de nombreuses preuves utilisant le principe local-global en algèbre abstraite peuvent être décryptées en des preuves constructives conduisant aux mêmes résultats sous forme explicite. Dans la section 6 nous nous occuperons du décryptage de preuves abstraites qui utilisent les quotients par tous les idéaux maximaux et dans la section 7

nous nous occuperons du décryptage de preuves abstraites qui utilisent des localisations en tous les idéaux premiers minimaux.

Décryptage de démonstrations classiques qui utilisent la localisation en tout idéal premier

Un argument de localisation typique fonctionne comme suit en mathématiques classiques. Lorsque l'anneau est local une certaine propriété P est vérifiée en vertu d'une démonstration assez concrète. Lorsque l'anneau n'est pas local, la même propriété est encore vraie (d'un point de vue classique non constructif) car il suffit de la vérifier localement. Ceci en vertu d'un principe local-global abstrait.

Nous examinons avec un peu d'attention la première preuve. Nous voyons alors apparaître certains calculs qui sont faisables en vertu du principe suivant :

$$\forall x \in \mathbf{A} \quad x \in \mathbf{A}^{\times} \text{ ou } x \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}),$$

principe qui est appliqué à des éléments x provenant de la preuve elle-même. Autrement dit, la preuve classique donnée dans le cas local nous fournit une preuve constructive sous l'hypothèse d'un anneau local résiduellement discret. Voici maintenant notre décryptage dynamique constructif. Dans le cas d'un anneau arbitraire, nous répétons la même preuve, en remplaçant chaque disjonction « x est inversible ou x est dans le radical », par la considération des deux anneaux $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,x;U)}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;x,U)}$, où $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}$ est la localisation « courante » de l'anneau $\mathbf{A}$ de départ, à l'endroit de la preuve où l'on se trouve. Lorsque la preuve initiale est ainsi déployée, on a construit à la fin un certain nombre, fini parce que la preuve est finie, de localisés $\mathbf{A}_{S_i}$, pour lesquels la propriété est vraie. D'un point de vue constructif, nous obtenons au moins le résultat « quasi global », c'est-à-dire après localisation en des monoïdes comaximaux, en vertu du lemme 1.5. On fait alors appel à un principe local-global concret pour conclure.

Notre décryptage de la preuve classique est rendu possible par le fait que la propriété P étudiée est de caractère fini : elle est conservée par localisation, et si elle est vraie après localisation en un monoïde S, elle est également vraie après localisation en un $s \in S$ (voir la section II-2 pages 23 et suivantes, ainsi que la section V-9).

Le décryptage complet contient donc deux ingrédients essentiels. Le premier est le décryptage de la preuve donnée dans le cas local qui permet d'obtenir un résultat quasi global (parce que la propriété est de caractère fini). Le deuxième est la preuve constructive du principe local-global concret correspondant au principe local-global abstrait utilisé en mathématiques classiques. Dans tous les exemples que nous avons rencontré, cette preuve constructive n'offre aucune difficulté parce que la démonstration que nous trouvons dans la littérature classique donne déjà l'argument concret, au

moins sous forme télégraphique (sauf parfois dans Bourbaki, lorsqu'il réussit à dissimuler habilement les arguments concrets).
La conclusion générale est que les démonstrations classiques « par principe local-global abstrait » sont déjà constructives, si l'on veut bien se donner la peine de les lire en détail. C'est une bonne nouvelle, outre le fait que cela confirme que les mathématiques ne sont le lieu d'aucun miracle surnaturel.

La méthode indiquée ci-dessus donne donc, comme corollaire du lemme 1.5, le principe général de décryptage suivant, qui *permet d'obtenir automatiquement une version constructive globale (ou au moins quasi globale) d'un théorème à partir de sa version locale.*

Machinerie locale-globale à idéaux premiers.
Lorsque l'on relit une preuve constructive, donnée pour le cas d'un anneau local résiduellement discret, avec un anneau $\mathbf{A}$ *arbitraire, que l'on considère au départ comme* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\mathcal{S}(0;1)}$ *et qu'à chaque disjonction (pour un élément* a *qui se présente au cours du calcul dans le cas local)*

$$a \in \mathbf{A}^\times \text{ ou } a \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}),$$

on remplace l'anneau « en cours » par les deux anneaux $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;U)}$ *et* $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,a;U)}$ *(dans chacun desquels le calcul peut se poursuivre), on obtient à la fin de la relecture, une famille finie d'anneaux* $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I_j,U_j)}$ *avec les monoïdes* $\mathcal{S}(I_j, U_j)$ *comaximaux et* I_j, U_j *finis. Dans chacun de ces anneaux, le calcul a été poursuivi avec succès et a donné le résultat souhaité.*

On notera que si « l'anneau en cours » est $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;U)}$ et si la disjonction porte sur

$$b \in \mathbf{A}'^\times \text{ ou } b \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}'),$$

avec $b = a/(u+i)$, $a \in \mathbf{A}$, $u \in \mathcal{M}(U)$ et $i \in \langle I \rangle_{\mathbf{A}}$, alors il faut considérer les localisés $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;U,a)}$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,a;U)}$.
Dans la suite nous parlerons de la machinerie locale-globale à idéaux premiers comme de la « machinerie locale-globale de base ».

Exemples d'applications de la machinerie locale-globale de base

Nous donnons dans ce paragraphe deux exemples significatifs. Le lecteur pourra aussi consulter l'exercice 14.

Premier exemple
On veut démontrer le résultat suivant.

5.1. Lemme. *Soit* $f \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme primitif et* $r \in \mathbf{A}$ *un élément régulier avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$. *Alors l'idéal* $\langle f, r\rangle$ *contient un polynôme unitaire.*

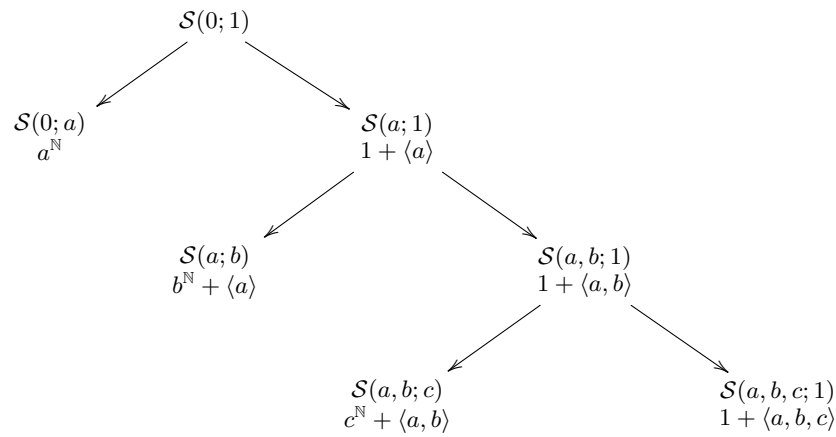
▷ On commence par montrer le lemme dans le cas où $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret. On peut écrire $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in (\mathrm{Rad}\,\mathbf{A})[X]$

et f_2 pseudo unitaire. Par ailleurs, pour tout $e \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$ on a une égalité $r^m(e^m(1+ye)+zr)=0$, donc r divise e^m. Par suite r divise une puissance de f_1, disons d'exposant N. On a ${f_2}^N = (f-f_1)^N \in \langle f, f_1^N\rangle \subseteq \langle f, r\rangle$. Alors, f_2^N fournit le polynôme unitaire cherché.
Pour un anneau arbitraire on reprend la preuve précédente de manière dynamique. Par exemple si $f = aX^2+bX+c$, on explicite le raisonnement précédent sous la forme suivante.
Ou bien a est inversible, ou bien il est dans le radical. Si a est inversible, alors on prend $f_2 = f$, $f_1 = 0$.
Sinon, ou bien b est inversible, ou bien il est dans le radical. Si b est inversible, alors on prend $f_2 = bX+c$, $f_1 = aX^2$.
Sinon, ou bien c est inversible, ou bien il est dans le radical. Si c est inversible, alors on prend $f_2 = c$, $f_1 = aX^2+bX$.
Sinon $\langle 1\rangle = \langle a,b,c\rangle \in \operatorname{Rad}\mathbf{A}$ donc l'anneau est trivial.
Voir plus loin le dessin de l'arbre des localisations successives. Les monoïdes comaximaux se trouvent aux feuilles de l'arbre, le dernier contient 0 et n'intervient pas dans le calcul.
Terminons en indiquant comment on construit un polynôme unitaire dans l'idéal $\langle f, r\rangle$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}[X]$ à partir de deux polynômes unitaires g et h dans les idéaux $\langle f, r\rangle$ de $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,y;U)}[X]$ et $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I;y,U)}[X]$. On a d'une part

$$sg = sX^m + g_1 \text{ avec } \deg g_1 < m,\ s \in \mathcal{S}(I,y;U) \text{ et } sg \in \langle f, r\rangle_{\mathbf{A}[X]}\,,$$

et d'autre part

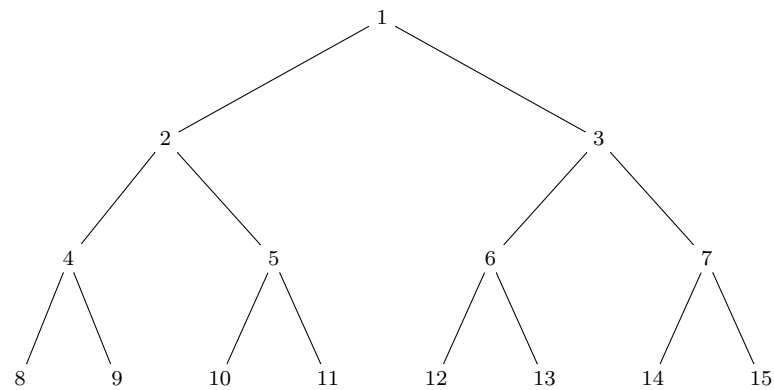
$$th = tX^n + h_1 \text{ avec } \deg h_1 < n,\ t \in \mathcal{S}(I;y,U) \text{ et } th \in \langle f, r\rangle_{\mathbf{A}[X]}\,.$$



Les polynômes sX^ng et tX^mh de degré formel $n+m$ ont pour coefficients formellement dominants s et t. En prenant $us+vt \in \mathcal{S}(I,U)$, le travail est terminé avec $usX^ng + vtX^mh$. □

Deuxième exemple : un résultat quasi global obtenu à partir d'une démonstration donnée pour un anneau local

Relecture dynamique du lemme de la liberté locale. La relecture dynamique de la « preuve par Azumaya » page 499 du lemme de la liberté locale donne une nouvelle preuve du théorème qui affirme que les modules projectifs de type fini sont localement libres, avec la formulation précise suivante.
Si $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ est une matrice de projection, il existe 2^n éléments comaximaux s_i tels que sur chaque $\mathbf{A}_{s_i}$, la matrice est semblable à une matrice de projection standard. Plus précisément, pour chaque $k = 0, \ldots, n$ il y a $\binom{n}{k}$ localisations où la matrice est semblable à $\mathrm{I}_{k,n}$.
Rappelons d'abord (voir le dessin un peu plus loin) comment se présente l'arbre du calcul pour un anneau local avec une matrice F dans $\mathbb{M}_3(\mathbf{A})$.
Au point 1 le calcul démarre par le test « f_{11} ou $1-f_{11}$ est inversible » (notez que la disjonction n'est en général pas exclusive, et le test doit seulement certifier que l'une des deux possibilités a bien lieu). Si le test certifie que f_{11} est inversible, on suit la branche de gauche, on va en 2 où l'on fait un changement de base qui permet de ramener la matrice à la forme $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix}$ avec $G \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$ et $G^2 = G$. Si le test certifie que $1 - f_{11}$ est inversible, on suit la branche de droite, on va en 3 où l'on fait un changement de base qui permet de ramener la matrice à la forme $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H \end{bmatrix}$ avec $H^2 = H$.



Si l'on est arrivé en 2, on teste l'élément g en position $1,1$ dans G. Selon le résultat, on se dirige en 4 ou 5 pour faire un changement de base qui nous ramène à l'une des deux formes $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ avec $a^2 = a$, ou $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}$ avec $b^2 = b$. Si l'on est arrivé en 3, on teste l'élément h en position $1,1$ dans H. Selon le résultat, on se dirige en 6 ou 7 pour faire un changement

de base qui nous ramène à l'une des deux formes $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$ avec $c^2 = c$, ou $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{bmatrix}$ avec $d^2 = d$.

Dans tous les cas, on termine avec un test d'inversibilité qui certifie que l'idempotent est égal à 1 ou à 0, ce qui donne l'une des 8 matrices de projection diagonales possible (avec uniquement des 0 et 1 sur la diagonale).

Si l'on relit ce calcul de manière dynamique avec un anneau arbitraire, on obtient les localisations comaximales suivantes.

Au départ en 1, on a l'anneau $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$. En 2 et 3 on a les localisations comaximales $\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1[1/f_{11}]$ et $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_1[1/(1-f_{11})]$. En 4 et 5 on a les localisations comaximales de $\mathbf{A}_2$ suivantes : $\mathbf{A}_4 = \mathbf{A}_2[1/g]$ et $\mathbf{A}_5 = \mathbf{A}_2[1/(1-g)]$. En 6 et 7 on a les localisations comaximales de $\mathbf{A}_3$ suivantes : $\mathbf{A}_6 = \mathbf{A}_3[1/h]$ et $\mathbf{A}_7 = \mathbf{A}_3[1/(1-h)]$.

On passe au dernier étage. En 8 et 9 on crée les localisations comaximales de $\mathbf{A}_4$ suivantes : $\mathbf{A}_8 = \mathbf{A}_4[1/a]$ et $\mathbf{A}_9 = \mathbf{A}_4[1/(1-a)]$. En 10 et 11 on crée les localisations comaximales de $\mathbf{A}_5$ suivantes : $\mathbf{A}_{10} = \mathbf{A}_5[1/b]$ et $\mathbf{A}_{11} = \mathbf{A}_5[1/(1-b)]$ etc.

Au bout du compte, en considérant les dénominateurs d_i ($i = 8, \ldots, 15$) des fractions créées dans les différentes branches (par exemple d_{11} est le dénominateur dans $\mathbf{A}$ de la fraction $1/f_{11}(1-g)(1-b)$, où $g \in \mathbf{A}_2$ et $b \in \mathbf{A}_5$), on obtient huit éléments comaximaux de $\mathbf{A}$. Et pour chacune des localisations on obtient la réduite diagonale correspondante de la matrice de départ F.

Autrement dit, la relecture dynamique de la preuve donnée dans le cas d'un anneau local crée huit éléments comaximaux, là où la preuve classique abstraite nous enjoindrait de localiser en tous les idéaux maximaux, ce qui risquerait de prendre un certain temps.

6. Quotienter par tous les idéaux maximaux

Un anneau qui n'a pas d'idéaux maximaux est réduit à 0.
Un mathématicien classique

On trouve dans la littérature un certain nombre de preuves dans lesquelles l'auteur démontre un résultat en considérant « le passage au quotient par un idéal maximal arbitraire ». L'analyse de ces preuves montre que le résultat peut être compris comme le fait qu'un anneau obtenu à partir de constructions plus ou moins compliquées est en fait réduit à 0. Par exemple, si l'on veut démontrer qu'un idéal $\mathfrak{a}$ de $\mathbf{A}$ contient 1, on raisonne par l'absurde, on considère un idéal maximal $\mathfrak{m}$ qui contiendrait $\mathfrak{a}$, et l'on trouve une contradiction en faisant un calcul dans le corps résiduel $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$.

Cela revient à appliquer le principe donné en exergue : un anneau qui n'a pas d'idéaux maximaux est réduit à 0.
Le fait de présenter le raisonnement comme une preuve par l'absurde est le résultat d'une déformation professionnelle. Car prouver qu'un anneau est réduit à 0 est un fait de nature concrète (on doit prouver que $1 = 0$ dans l'anneau considéré), et non pas une absurdité. Et le calcul fait dans le corps $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ ne conduit à une absurdité que parce que l'on a décidé un jour que dans un corps, il est interdit que $1 = 0$. Mais le calcul n'a rien à voir avec une telle interdiction. Le calcul dans un corps utilise le fait que tout élément est nul ou inversible, mais pas le fait que cette disjonction serait exclusive.
En conséquence, la relecture dynamique de la preuve par l'absurde en une preuve constructive est possible selon la méthode suivante. Suivons le calcul que l'on nous demande de faire comme si l'anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ était vraiment un corps. Chaque fois que le calcul exige de savoir si un élément x_i est nul ou inversible modulo $\mathfrak{a}$, parions sur $x_i = 0$ et rajoutons le à $\mathfrak{a}$. Au bout d'un certain temps, on trouve que $1 = 0$ modulo l'idéal construit. Au lieu de perdre courage devant une telle absurdité, voyons le bon coté des choses. Nous venons par exemple de constater que $1 \in \mathfrak{a} + \langle x_1, x_2, x_3\rangle$. Ceci est un fait positif et non une absurdité. Nous venons en fait de calculer un inverse y_3 de x_3 dans $\mathbf{A}$ modulo $\mathfrak{a} + \langle x_1, x_2\rangle$. Nous pouvons donc examiner le calcul que nous demande de faire la preuve classique lorsque $x_1, x_2 \in \mathfrak{m}$ et x_3 est inversible modulo $\mathfrak{m}$. À ceci près que nous n'avons pas besoin de $\mathfrak{m}$ puisque nous venons d'établir que x_3 est inversible modulo $\mathfrak{a} + \langle x_1, x_2\rangle$.
Contrairement à la stratégie qui correspondait à la localisation en n'importe quel idéal premier, nous n'essayons pas de déployer tout l'arbre du calcul qui semble se présenter à nous. Nous n'utilisons que des quotients, et pour cela nous suivons systématiquement la branche «être nul» (modulo $\mathfrak{m}$) plutôt que la branche «être inversible». Ceci crée des quotients successifs de plus en plus poussés. Lorsqu'une soi-disant contradiction apparaît, c'est-à-dire lorsqu'un calcul a abouti à un certain résultat de nature positive, nous revenons en arrière en profitant de l'information que nous venons de récolter : un élément a été certifié inversible dans le quotient précédent.
Par exemple, avec un arbre déployé du type de celui de la page 889 et en prenant pour contexte général l'anneau $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, si à chaque fois la branche de droite correspond à $x = 0$ et celle de gauche à x inversible, il faut commencer par suivre le chemin $1 \to 3 \to 7 \to 15$ et considérer les quotients successifs. En 15 le calcul nous a donné un résultat positif qui nous permet de remonter en 7 pour suivre la branche $7 \to 14$. En 14 un résultat positif nous permet de remonter au point 3 (par le chemin $14 \to 7 \to 3$) en sachant que l'élément a_3 qui produit la disjonction en ce point est en fait inversible. Nous pouvons alors suivre le calcul proposé pour la branche $3 \to 6 \to 13$. En 13 la preuve

classique nous donne une soi-disant contradiction, en fait un résultat positif dans le quotient considéré en 6.
On aura suivi en fin de compte le chemin

$$1 \to 3 \to 7 \to 15 \to 7 \to 14 \to 3 \to 6 \to 13 \to 6 \to 12 \to 1 \to 2 \to 5 \to 11 \to 5 \to 10 \to 2 \to 4 \to 9 \to 4 \to 8 \to 1.$$

On aura calculé uniquement dans des quotients de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ et le résultat final est que $1 = 0$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$, c'est-à-dire que $\mathfrak{a} = \mathbf{A}$, qui était le but poursuivi.
Notez que lors du premier passage au point 7, on travaille avec l'anneau $\mathbf{A}_{1,3,7} = \mathbf{A}/(\mathfrak{a} + \langle a_1, a_3, a_7\rangle)$. En arrivant en 15, on apprend que cet anneau est trivial donc que a_7 est inversible dans $\mathbf{A}_{1,3} = \mathbf{A}/(\mathfrak{a} + \langle a_1, a_3\rangle)$. En 14, on apprend que $\mathbf{A}_{1,3}$ est trivial, i.e., que a_3 est inversible dans l'anneau $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/(\mathfrak{a} + \langle a_1\rangle)$. On part donc vers le point 6 avec l'anneau $\mathbf{A}_1$ et un inverse de a_3 en mains ... Ainsi lors des différents passages à un même point nous ne travaillons pas avec le même anneau, car nous accumulons des informations au fur et à mesure des calculs.
L'argument de passage au quotient par tous les idéaux maximaux de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ (supposé par l'absurde non réduit à 0), qui semblait un peu magique, est ainsi remplacé par un calcul bien concret, donné en filigrane par la preuve classique. Résumons la discussion précédente.

Machinerie locale-globale à idéaux maximaux.
Pour relire une preuve classique qui démontre par l'absurde qu'un anneau $\mathbf{A}$ *est trivial en supposant le contraire, puis en considérant un idéal maximal* $\mathfrak{m}$ *de cet anneau, en faisant un calcul dans le corps résiduel et en trouvant la contradiction* $1 = 0$*, procéder comme suit. Premièrement s'assurer que la preuve devient une preuve constructive que* $1 = 0$ *sous l'hypothèse supplémentaire que* $\mathbf{A}$ *est un corps discret. Deuxièmement, supprimer l'hypothèse supplémentaire et suivre pas à pas la preuve précédente en privilégiant la branche* $x = 0$ *chaque fois que la disjonction «*$x = 0$ *ou* x *inversible*» *est requise pour la suite du calcul. Chaque fois que l'on prouve* $1 = 0$ *on a en fait montré que dans l'anneau quotient précédemment construit, le dernier élément à avoir subi le test était inversible, ce qui permet de remonter à ce point pour suivre la branche «*x *inversible*» *conformément à la preuve proposée pour le cas inversible (qui est maintenant certifié). Si la preuve considérée est suffisamment uniforme (l'expérience montre que c'est toujours le cas), le calcul obtenu dans son ensemble est fini et aboutit à la conclusion souhaitée.*

Exemple.
Le lemme crucial suivant était le seul ingrédient vraiment non constructif dans la solution par Suslin du problème de Serre. Nous exposerons cette solution page 937 et suivantes (voir notamment la démonstration du théorème XVI-5.10). Ici, nous donnons la démonstration du lemme crucial par Suslin en mathématiques classiques, puis son décryptage constructif.

6.1. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau,* n *un entier* $\geqslant 2$ *et* $U = {}^{t}[\, v_1 \ \cdots \ v_n \,]$ *un vecteur unimodulaire dans* $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$ *avec* v_1 *unitaire.*
Notons $V = {}^{t}[\, v_2 \ \cdots \ v_n \,]$. *Il existe des matrices* $E_1, \ldots, E_\ell \in \mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{A}[X])$, *telles que, en notant* w_i *la première coordonnée du vecteur* E_iV, *l'idéal* $\mathfrak{a}$ *ci-après contient 1 :*

$$\mathfrak{a} = \langle \mathrm{Res}_X(v_1, w_1), \mathrm{Res}_X(v_1, w_2), \ldots, \mathrm{Res}_X(v_1, w_\ell) \rangle_{\mathbf{A}} .$$

▷ Si $n = 2$, on a $u_1v_1+u_2v_2 = 1$ et puisque v_1 est unitaire, $\mathrm{Res}(v_1, v_2) \in \mathbf{A}^\times$: $\mathrm{Res}(v_1, v_2)\mathrm{Res}(v_1, u_2) = \mathrm{Res}(v_1, u_2v_2) = \mathrm{Res}(v_1, u_2v_2 + u_1v_1) = \mathrm{Res}(v_1, 1) = 1$.
Si $n \geqslant 3$, soit $d_1 = \deg v_1$. On suppose sans perte de généralité que les v_i sont des polynômes formels de degrés $d_i < d_1$ ($i \geqslant 2$). On a au départ des polynômes u_i tels que $u_1v_1 + \cdots + u_nv_n = 1$.

Démonstration classique de Suslin. On montre que pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, on peut trouver une matrice $E_\mathfrak{m} \in \mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{A}[X])$ telle que, en notant $w_\mathfrak{m}$ la première coordonnée de $E_\mathfrak{m}V$ on ait $1 \in \langle \mathrm{Res}_X(v_1, w_\mathfrak{m}) \rangle$ modulo $\mathfrak{m}$. Pour cela on se place sur le corps $\mathbf{k} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$. En utilisant l'algorithme d'Euclide, le pgcd $w_\mathfrak{m}$ des v_i ($i \geqslant 2$) est la première coordonnée d'un vecteur obtenu par manipulations élémentaires sur V. On relève la matrice élémentaire qui a été calculée dans $\mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{k}[X])$ en une matrice $E_\mathfrak{m} \in \mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{A}[X])$. Alors, puisque v_1 et $w_\mathfrak{m}$ sont premiers entre eux, le résultant $\mathrm{Res}_X(v_1, w_\mathfrak{m})$ est non nul dans le corps $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$.

Démonstration constructive (par décryptage).
Nous faisons une preuve par récurrence sur le plus petit des degrés formels d_i, que nous notons m (rappelons que $i \geqslant 2$). Supposons pour fixer les idées que ce soit d_2.
Initialisation : si $m = -1$, $v_2 = 0$ et par une transformation élémentaire on met $u_3v_3 + \cdots + u_nv_n$ en position 2, ce qui nous ramène au cas $n = 2$.
Récurrence : de $m - 1$ à m. Soit a le coefficient de v_2 de degré m et $\mathbf{B}$ l'anneau $\mathbf{A}/\langle a \rangle$. Dans cet anneau l'hypothèse de récurrence est vérifiée. Ainsi, on a des matrices $E_1, \ldots, E_\ell \in \mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{B}[X])$, telles que, en notant $\widetilde{w_i}$ la première coordonnée de E_iV, on a l'égalité

$$\langle \mathrm{Res}_X(v_1, \widetilde{w_1}), \mathrm{Res}_X(v_1, \widetilde{w_2}), \ldots, \mathrm{Res}_X(v_1, \widetilde{w_\ell}) \rangle_{\mathbf{B}} = \langle 1 \rangle .$$

Ceci signifie, en relevant les matrices dans $\mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{A}[X])$ sans les changer de nom, et en notant w_i la première coordonnée de E_iV que l'on a :

$$\langle a, \mathrm{Res}_X(v_1, w_1), \mathrm{Res}_X(v_1, w_2), \ldots, \mathrm{Res}_X(v_1, w_\ell) \rangle_{\mathbf{A}} = \langle 1 \rangle .$$

Considérons alors $\mathfrak{b} = \langle \mathrm{Res}_X(v_1, w_1), \mathrm{Res}_X(v_1, w_2), \ldots, \mathrm{Res}_X(v_1, w_\ell) \rangle_{\mathbf{A}}$, et $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathfrak{b}$. Puisque a est inversible dans $\mathbf{C}$, on peut par une manipulation élémentaire remplacer v_3 par un polynôme $v_3' = v_3 - qv_2$ avec $\deg v_3' \leqslant m-1$. On applique l'hypothèse de récurrence avec l'anneau $\mathbf{C}$, on a des matrices élémentaires $E_1', \ldots, E_q' \in \mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{C}[X])$ que l'on relève dans $\mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{A}[X])$ sans les changer de noms. Si $w_1', \ldots, w_q'$ sont les polynômes correspondants (pour chaque j, w_j' est la première coordonnée de $E_j'V$), on obtient

$$1 \in \langle \mathrm{Res}_X(v_1, w_1), \ldots, \mathrm{Res}_X(v_1, w_\ell), \mathrm{Res}_X(v_1, w_1'), \ldots, \mathrm{Res}_X(v_1, w_q') \rangle_{\mathbf{A}} .$$

□

Commentaire. Voyons maintenant pourquoi cette élégante démonstration est bien un décryptage de celle de Suslin selon la méthode indiquée auparavant. Posons $a_2 = u_2v_2 + \cdots + u_nv_n$.
Lorsque l'on veut traiter sur un corps discret le vecteur V par l'algorithme d'Euclide, on doit faire des divisions. Une division dépend du degré du dividende (le polynôme par lequel on divise). Dans le décryptage dynamique, on a donc des tests à faire sur les coefficients du dividende pour déterminer son degré. Si l'on choisit de commencer par la division de v_3 par v_2, la méthode indiquée demande donc de considérer en premier le cas où v_2 est identiquement nul. Notez que cela correspond à l'initialisation de la récurrence.
Soit $\mathfrak{a}_1 = \big\langle (v_{2,i})_{i\in[\![0..d_2]\!]} \big\rangle$ l'idéal engendré par les coefficients de v_2.
Si v_2 est identiquement nul, on a le résultant $r_1 = \mathrm{Res}(v_1, a_2) = \mathrm{Res}(v_1, w_1)$ (inversible) avec w_1 qui est du type première cooordonnée de E_1V pour une matrice $E_1 \in \mathbb{E}_{n-1}$ explicite.
Naturellement, ceci n'est vrai que modulo $\mathfrak{a}_1$, ce qui donne $\mathfrak{a}_1 + \langle r_1\rangle = \langle 1\rangle$.
Soit $\mathfrak{a}_2 = \big\langle (v_{2,i})_{i\in[\![1..d_2]\!]} \big\rangle$. On a établi que $\mathfrak{a}_2 + \langle r_1\rangle + \langle v_{2,0}\rangle = \langle 1\rangle$.
On raisonne maintenant modulo $\mathfrak{b}_2 = \mathfrak{a}_2 + \langle r_1\rangle$. Puisque $v_{2,0}$ est inversible et $v_2 = v_{2,0}$, on peut réduire à 0 le vecteur v_3 par manipulations élémentaires puis mettre en position 3 un élément égal à a_2 modulo $\mathfrak{b}_2$, puis le ramener en position 2. On a donc une matrice $E_2 \in \mathbb{E}_{n-1}$ avec w_2 première coordonnée de E_2V et $\mathrm{Res}(v_1, w_2) = r_2$ inversible dans $\mathbf{A}/\mathfrak{b}_2$, c'est-à-dire $\mathfrak{a}_2 + \langle r_1\rangle + \langle r_2\rangle = \langle 1\rangle$. Soit $\mathfrak{a}_3 = \big\langle (v_{2,i})_{i\in[\![2..d_2]\!]} \big\rangle$. On vient d'établir que $\mathfrak{a}_3 + \langle r_1, r_2\rangle + \langle v_{2,1}\rangle = \langle 1\rangle$.
On raisonne maintenant modulo $\mathfrak{b}_3 = \mathfrak{a}_3 + \langle r_1, r_2\rangle$. Puisque $v_{2,1}$ est inversible et $\mathfrak{a}_3 = 0$, on peut réduire à une constante le vecteur v_3 par manipulations élémentaires (correspondant à la division de v_3 par v_2), puis l'emmener en position 2. Nous nous retrouvons dans la situation précédemment étudiée (où v_2 était réduit à une constante). On sait donc calculer deux nouvelles matrices élémentaires E_3 et E_4 telles que, en notant w_3 et w_4 leurs premières coordonnées, et $r_i = \mathrm{Res}(v_1, w_i)$, on obtient $\mathfrak{a}_3 + \langle r_1, r_2, r_3, r_4\rangle = \langle 1\rangle$.
Soit $\mathfrak{a}_4 = \big\langle (v_{2,i})_{i\in[\![3..d_2]\!]} \big\rangle$. On a établi que $\mathfrak{a}_4 + \langle r_1, r_2, r_3, r_4\rangle + \langle v_{2,2}\rangle = \langle 1\rangle$.
On raisonne maintenant modulo $\mathfrak{b}_4 = \mathfrak{a}_4 + \langle r_1, r_2, r_3, r_4\rangle$. Puisque $v_{2,2}$ est inversible et $\mathfrak{a}_4 = 0$, on peut réduire au degré 1 le vecteur v_3 par manipulations élémentaires (correspondant à la division de v_3 par v_2), puis l'emmener en position 2. Nous nous retrouvons dans la situation précédemment étudiée (où v_2 était de degré 1). ..... On obtient $\mathfrak{a}_4 + \langle r_1, r_2, \ldots, r_8\rangle = \langle 1\rangle$.
Soit $\mathfrak{a}_5 = \big\langle (v_{2,i})_{i\in[\![4..d_2]\!]} \big\rangle$. On a établi que $\mathfrak{a}_5 + \langle r_1, r_2, \ldots, r_8\rangle + \langle v_{2,3}\rangle = \langle 1\rangle$.
Et ainsi de suite .....

L'important est que les inverses de coefficients dominants de v_2 successifs qui apparaissent dans l'algorithme sont toujours calculés en tant qu'éléments de l'anneau et non pas par un procédé de localisation. À chaque fois ils ne sont inversibles que modulo un certain idéal spécifié, mais ce n'est pas grave, l'idéal grandit en incorporant les résultants autorisés mais diminue en expulsant les intrus que sont les coefficients de v_2. ∎

7. Localiser en tous les idéaux premiers minimaux

Un anneau qui n'a pas d'idéaux premiers minimaux est réduit à 0.
Une mathématicienne classique

La lectrice est maintenant mise à contribution pour se convaincre de la justesse de la méthode suivante, en remplaçant dans la section précédente l'addition par la multiplication et le passage au quotient par la localisation.

Machinerie locale-globale à idéaux premiers minimaux.
Pour relire une preuve classique qui démontre par l'absurde qu'un anneau **A** *est trivial en supposant le contraire, puis en considérant un idéal premier minimal de cet anneau, en faisant un calcul dans l'anneau localisé (qui est local et zéro-dimensionnel, donc un corps dans le cas réduit) et en trouvant la contradiction* $1 = 0$*, procéder comme suit.*
Premièrement s'assurer que la preuve devient une preuve constructive de l'égalité $1 = 0$ *sous l'hypothèse supplémentaire que* **A** *est local et zéro-dimensionnel. Deuxièmement, supprimer l'hypothèse supplémentaire et suivre pas à pas la preuve précédente en privilégiant la branche «*x *inversible*» *chaque fois que la disjonction «*x *nilpotent ou* x *inversible*» *est requise pour la suite du calcul. Chaque fois que l'on prouve* $1 = 0$ *on a en fait montré que dans l'anneau localisé précédemment construit, le dernier élément à avoir subi le test était nilpotent, ce qui permet de remonter à ce point pour suivre la branche «*x *nilpotent*» *conformément à la preuve proposée pour le cas nilpotent (qui est maintenant certifié). Si la preuve considérée est suffisamment uniforme (l'expérience montre que c'est toujours le cas), le calcul obtenu dans son ensemble est fini et aboutit à la conclusion souhaitée.*

Exemple. Un exemple assez spectaculaire est donné dans le chapitre suivant avec le décryptage constructif d'une preuve abstraite du théorème de Traverso concernant les anneaux seminormaux.

8. Principes local-globals en profondeur 1

Jusqu'à maintenant les différentes variantes du principe local-global étaient basées sur les familles d'éléments comaximaux, c'est-à-dire les familles finies qui engendrent l'idéal $\langle 1\rangle$. Une notion plus faible est suffisante pour les questions de régularité : il s'agit des familles finies qui engendrent un idéal fidèle, ou plus généralement un idéal E-régulier. On dit que ce sont des familles de profondeur $\geqslant 1$. Dans la section suivante, on examinera ce qu'on appelle les familles de profondeur $\geqslant 2$.

8.1. Définition.

1. Une famille finie $(a_1,\dots,a_n)$ d'un anneau $\mathbf{A}$ est appelé un *système d'éléments coréguliers* si l'idéal $\langle a_1,\dots,a_n\rangle$ est fidèle [3].
   On dit aussi que *l'idéal* $\mathfrak{a}$*, ou la liste* $(a_1,\dots,a_n)$*, est de profondeur* $\geqslant 1$, et l'on note ceci sous la forme $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n)\geqslant 1$.
2. Soit E un $\mathbf{A}$-module.
   — On dit qu'un élément $a\in\mathbf{A}$ est *E-régulier* (ou *régulier pour E*) si :
   $$\forall x\in E,\ (ax=0\implies x=0).$$
   — Une famille finie $(a_1,\dots,a_n)$ est dire une fois *E-régulière* si :
   $$\forall x\in E,\ \big((a_1x=0,\ \dots,\ a_nx=0)\implies x=0\big).$$
   On dit aussi que les a_i sont *coréguliers pour E*.
   On note ceci sous la forme $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(a_1,\dots,a_n,E)\geqslant 1$.
   — Un idéal de type fini $\mathfrak{a}\subseteq\mathbf{A}$ est dit *E-régulier* si un (tout) système générateur de $\mathfrak{a}$ est une fois E-régulier. On dit aussi que *la profondeur de E relativement à $\mathfrak{a}$ est supérieure ou égale à* 1, et l'on note ceci sous la forme $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a},E)\geqslant 1$.

Ainsi $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a})\geqslant 1$ signifie $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a},\mathbf{A})\geqslant 1$. Dans la suite on donnera souvent uniquement l'énoncé avec $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a},E)\geqslant 1$.

8.2. Fait.

— *Le produit de deux idéaux de type fini E-réguliers est E-régulier.*
— *Si $\mathfrak{a}\subseteq\mathfrak{a}'$ avec $\mathfrak{a}$ E-régulier, alors $\mathfrak{a}'$ est E-régulier.*

8.3. Lemme. (Astuce (a,b,ab) pour la profondeur 1)
On suppose que les idéaux $\langle a,c_2,\dots,c_n\rangle$ et $\langle b,c_2,\dots,c_n\rangle$ sont E-réguliers. Alors l'idéal $\langle ab,c_2,\dots,c_n\rangle$ est E-régulier.

▷ Soit $x\in E$ tel que $abx=c_1x=\cdots=c_nx=0$.
Alors $abx=c_1bx=\cdots=c_nbx=0$, donc $bx=0$, donc $x=0$. □

On a le corollaire immédiat suivant [4].

3. À ne pas confondre avec la notion de suite corégulière introduite par Bourbaki, comme notion duale de celle de suite régulière.

4. On aurait pu aussi remarquer que pour q assez grand, l'idéal $\langle a_1,\dots,a_n\rangle^q$, qui est E-régulier, est contenu dans l'idéal $\left\langle a_1^p,\dots,a_n^p\right\rangle$.

8.4. Lemme. *Soient $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ un idéal E-régulier et des $p_i \in \mathbb{N}$.*
Alors l'idéal $\left\langle a_1^{p_1}, \dots, a_n^{p_n}\right\rangle$ est E-régulier.

On peut comparer le principe local-global suivant aux points *1* et *3* du principe local-global 2.1.
Notons que l'affirmation « $\mathfrak{b}$ est E-régulier » est stable par localisation lorsque $\mathfrak{b}$ est de type fini. Ceci donne l'implication dans le sens direct pour le point *c* dans le principe local-global qui suit.

8.5. Principe local-global concret. (Localisations en profondeur $\geqslant 1$)
Soient b, a_1, …, $a_n \in \mathbf{A}$, et $\mathfrak{b}$ un idéal de type fini. On note $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[1/a_i]$.

1. *On suppose que les a_i sont coréguliers.*
   a. *On a $x = 0$ dans $\mathbf{A}$ si, et seulement si, $x = 0$ dans chaque $\mathbf{A}_i$.*
   b. *L'élément b est régulier si, et seulement si, il est régulier dans $\mathbf{A}_i$ pour chaque i.*
   c. *L'idéal $\mathfrak{b}$ est fidèle si, et seulement si, il est fidèle dans $\mathbf{A}_i$ pour chaque i.*
2. *Soit E un $\mathbf{A}$-module, on note $E_i = E[1/a_i]$.*
   On suppose que l'idéal $\langle a_1, \dots, a_n\rangle$ est E-régulier.
   a. *On a $x = 0$ dans E si, et seulement si, $x = 0$ dans chaque E_i.*
   b. *L'élément b est E-régulier si, et seulement si, il est E_i-régulier pour chaque i.*
   c. *L'idéal $\mathfrak{b}$ est E-régulier si, et seulement si, il est E_i-régulier pour chaque i.*

▷ Il suffit de traiter le point *2.*
2a. Si $x = 0$ dans E_i il y a un exposant k_i tel que $a_i^{k_i} x = 0$ dans E. On conclut par le lemme 8.4 (avec le module $\mathbf{A}x$) que $x = 0$.
2c. Supposons que $\mathfrak{b}$ est E_i-régulier pour chaque i, et $\mathfrak{b}\, x = 0$. Alors $x = 0$ dans chaque E_i, donc $x = 0$ par le point *2a.* □

On utilisera souvent de manière implicite le lemme suivant, qui est une variante du lemme V-7.2 énoncé pour les systèmes d'éléments comaximaux.

8.6. Fait. (Lemme des localisations corégulières successives)
Si $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(s_1, \dots, s_n, E) \geqslant 1$ et si pour chaque i, on a des éléments $s_{i,j}$, ($j \in [\![1..k_i]\!]$) coréguliers pour $E\,[1/s_i]$, alors les $s_i s_{i,j}$ sont coréguliers pour E.

▷ Soit $\mathfrak{b}$ l'idéal engendré par les $s_i s_{i,j}$. D'après le point *2c* du principe local-global 8.5, il suffit de démontrer qu'il est E-régulier après localisation en des éléments coréguliers pour E. Les s_i conviennent. □

Un théorème de McCoy

Comme application du principe local-global 8.5, nous donnons une nouvelle démonstration d'un théorème de McCoy (II-5.22 point *2*).

8.7. Théorème de McCoy. *Une matrice $M \in \mathbf{A}^{m\times n}$ est injective si, et seulement si, l'idéal déterminantiel $\mathcal{D}_n(M)$ est fidèle.*

D L'implication « si » est simple. Montrons que si la matrice M est injective, l'idéal $\mathcal{D}_n(M)$ est fidèle. On fait un récurrence sur le nombre de colonnes. Puisque M est injective, les coefficients de la première colonne (qui représente l'image du premier vecteur de base), engendrent un idéal fidèle. Par le principe local-global 8.5, il suffit donc de démontrer que $\mathcal{D}_n(M)$ est fidèle sur l'anneau $\mathbf{A}_a = \mathbf{A}[1/a]$, où a est un coefficient de la première colonne.
Sur cet anneau il est clair que la matrice M est équivalente à une matrice de la forme $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 0 \\ \hline 0 & N \\ \hline \end{array}$. En outre N est injective donc par hypothèse de récurrence l'idéal $\mathcal{D}_{n-1}(N)$ est fidèle sur $\mathbf{A}_a$. Enfin $\mathcal{D}_{\mathbf{A}_a,n-1}(N) = \mathcal{D}_{\mathbf{A}_a,n}(M)$. □

Remarques.
1) La démonstration donne aussi que si $m < n$ et M est injective, alors l'anneau est trivial. En effet à chaque étape de récurrence, quand on remplace M par N la différence $m-n$ reste constante. Donc si $m < n$ on obtient « à l'initialisation » une application injective de $\mathbf{A}^0$ dans $\mathbf{A}^{n-m}$ ce qui implique $1 = 0$ dans $\mathbf{A}$. Ceci est conforme à l'énoncé général du théorème 8.7, car pour $m < n$, $\mathcal{D}_n(M) = 0$, et si 0 est un élément régulier, l'anneau est trivial.
2) On trouve souvent dans la littérature le théorème de McCoy énoncée comme suit, sous forme contraposée (en apparence).
Si l'idéal n'est pas fidèle, l'application n'est pas injective.
Ou encore de manière plus précise.
Si un élément $x \in \mathbf{A}$ non nul annule $\mathcal{D}_n(M)$, il existe un vecteur colonne non nul $C \in \mathbf{A}^{m\times 1}$ tel que $MC = 0$.
Malheureusement, cet énoncé ne peut être démontré qu'avec la logique classique, et l'existence du vecteur C ne peut pas résulter d'un algorithme général. Voici un contre-exemple, bien connu des numériciens. Si M est une matrice à coefficients réels avec $m < n$, on ne sait pas produire un vecteur non nul dans son noyau tant que l'on ne connaît pas le rang de la matrice. Par exemple pour $m = 1$ et $n = 2$, on donne deux réels (a, b), et l'on cherche un couple $(c, d) \neq (0, 0)$ tels que $ac + bd = 0$. Si le couple (a, b) est a priori indiscernable du couple $(0, 0)$, il est impossible de fournir un couple (c, d) convenable tant que l'on n'a pas élucidé si $|a| + |b|$ est nul ou non.
Des variantes constructives de la contraposée sont proposées dans les exercices 11 et 12. ∎

9. Principes local-globals en profondeur 2

9.1. Définition. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbf{A}$ et E un $\mathbf{A}$-module.

— La liste $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ est dite *de profondeur* $\geqslant 2$ si elle est de profondeur $\geqslant 1$ et si, pour toute liste $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ dans $\mathbf{A}$ proportionnelle[5] à $(\underline{a})$, il existe $x \in \mathbf{A}$ tel que $(\underline{x}) = x(\underline{a})$.
On note ceci sous la forme $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a}) \geqslant 2$ ou $\mathsf{Gr}(\underline{a}) \geqslant 2$.

— La liste $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ est dite 2 *fois E-régulière* si $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a}, E) \geqslant 1$ et si, pour toute liste $(\underline{x}) = (x_1, \ldots, x_n)$ dans E proportionnelle à $(\underline{a})$ il existe $x \in E$ tel que $(\underline{x}) = (\underline{a})x$.
On note ceci sous la forme $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n, E) \geqslant 2$ ou $\mathsf{Gr}(\underline{a}, E) \geqslant 2$.
On dit aussi[6] que *la profondeur de E relativement à $(a_1, \ldots, a_n)$ est supérieure ou égale à* 2.

Remarque. La notation $\mathsf{Gr}(\mathfrak{a}, E)$ est prise dans [Northcott]. Dans ce merveilleux livre, Northcott definit le « true grade » à la Hochster comme le bon substitut non noethérien pour la profondeur. ∎

Exemples. 1) Dans un anneau intègre une liste (a, b) avec $a, b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{A})$ est de profondeur $\geqslant 2$ si, et seulement si, $\langle a\rangle \cap \langle b\rangle = \langle ab\rangle$, i.e. ab est le ppcm de a et b au sens de la divisibilité.
2) Dans un anneau intègre à pgcd une liste $(a_1, \ldots, a_n)$ est de profondeur $\geqslant 2$ si, et seulement si, 1 est le pgcd de la liste.
3) Si $n = 1$ et la liste est réduite au seul terme a, $\mathsf{Gr}(a, E) \geqslant 2$ signifie que tout $y \in E$ s'écrit $y = ax$, i.e. $aE = E$.
En particulier $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(a) \geqslant 2$ signifie $a \in \mathbf{A}^\times$.
4) Toute liste d'éléments comaximaux est de profondeur $\geqslant 2$ (d'après le principe local-global de base). ∎

Il est clair que $\mathsf{Gr}(\underline{a}) \geqslant 2$ signifie $\mathsf{Gr}(\underline{a}, \mathbf{A}) \geqslant 2$. Cela dispense dans la suite de dédoubler les énoncés : on les présente avec $\mathsf{Gr}(\underline{a}, E) \geqslant 2$ pour un module E arbitraire chaque fois que c'est possible.

9.2. Proposition et définition.
Soient $(\underline{a}) = (a_1, \ldots, a_n)$ et $(\underline{b}) = (b_1, \ldots, b_r)$ dans $\mathbf{A}$ et E un $\mathbf{A}$-module. Si $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a}, E) \geqslant 2$ et $\langle \underline{a}\rangle \subseteq \langle \underline{b}\rangle$, alors $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{b}, E) \geqslant 2$.
*En conséquence, on dit qu'*un idéal de type fini $\mathfrak{a}$ est 2 fois E-régulier *si tout système générateur fini de $\mathfrak{a}$ est 2 fois E-régulier (il suffit de le vérifier pour un seul). On note ceci sous la forme $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}, E) \geqslant 2$.*

◗ Il suffit de montrer les deux faits suivants :

— $\mathsf{Gr}(\underline{a}, E) \geqslant 2 \Rightarrow \mathsf{Gr}(\underline{a}, b, E) \geqslant 2$.

— Si $c \in \langle \underline{a}\rangle$ et $\mathsf{Gr}(\underline{a}, c, E) \geqslant 2$ alors $\mathsf{Gr}(\underline{a}, E) \geqslant 2$.

5. Rappelons que cela signifie que les déterminants $\begin{vmatrix} a_i & a_j \\ x_i & x_j \end{vmatrix}$ sont tous nuls.

6. Eisenbud parle de la profondeur de $\mathfrak{a}$ sur E, et Matsumura de la $\mathfrak{a}$-profondeur de E. La terminologie adoptée ici est celle de Bourbaki.

Cela montre en effet d'abord qu'on peut remplacer un système générateur d'un idéal de type fini par un autre sans changer « la profondeur $\geqslant 2$ » et ensuite que lorsqu'on remplace $\mathfrak{a}$ par un idéal de type fini plus grand, la profondeur $\geqslant 2$ se conserve.
Voyons le premier point. On a une liste $(x_1, \dots, x_n, y)$ dans E proportionnelle à $(a_1, \dots, a_n, b)$. On trouve un x (d'ailleurs unique) tel que $(\underline{x}) = (\underline{a})x$. On doit montrer que $bx = y$. Or $a_i y = bx_i$ et $bx_i = ba_i x$ pour $i \in [\![1..n]\!]$.
Donc $a_i(y - bx) = 0$ et l'on conclut que $y = bx$ parce que $\mathsf{Gr}(\underline{a}, E) \geqslant 1$.
Le deuxième point est laissé au lecteur. □

9.3. Lemme. (Astuce (a, b, ab) pour la profondeur 2)
On suppose que les listes $(a_1, \dots, a_n, a)$ et $(a_1, \dots, a_n, b)$ sont deux fois E-régulières. Alors la liste $(a_1, \dots, a_n, ab)$ est deux fois E-régulière.
En conséquence, si $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n, E) \geqslant 2$, alors $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(a_1^m, \dots, a_n^m, E) \geqslant 2$ pour $m > 0$.
▷ On sait déjà que $(a_1, \dots, a_n, ab)$ est une fois E-régulière.
Soit $(x_1, \dots, x_n, y)$ une liste dans E proportionnelle à $(a_1, \dots, a_n, ab)$. La suite $(x_1 b, \dots, x_n b, y)$ est proportionnelle à $(a_1, \dots, a_n, a)$. Il existe donc un $z \in E$ tel que

$$x_1 b = a_1 z,\ \dots,\ x_n b = a_n z,\ y = az$$

Cela implique que la liste $(x_1, \dots, x_n, z)$ est proportionnelle à $(a_1, \dots, a_n, b)$. Il existe donc un $x \in E$ tel que

$$x_1 = a_1 x,\ \dots,\ x_n = a_n x,\ z = bx \ \text{ et a fortiori } y = abx$$ □

9.4. Principe local-global concret. (Pour la divisibilité et les anneaux intégralement clos, localisations en profondeur 2)
On considère une famille $(\underline{s}) = (s_1, \dots, s_n)$ dans $\mathbf{A}$ avec $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{s}, E) \geqslant 2$. On note $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}[\frac{1}{s_i}]$ et $E_i = E[\frac{1}{s_i}]$.

1. *Soit $a \in \mathbf{A}$ un élément E-régulier et $y \in E$. Alors a « divise » y dans E si, et seulement si, a divise y après localisation en chaque s_i.*
2. *Soit $(b_1, \dots, b_m)$ dans $\mathbf{A}$. Alors $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_m, E) \geqslant 2$ si, et seulement si, $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}_i}(b_1, \dots, b_m, E_i) \geqslant 2$ pour chaque i.*
3. *Supposons $\mathbf{A}$ intègre et $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{s}) \geqslant 2$, alors $\mathbf{A}$ est intégralement clos si, et seulement si, chaque anneau $\mathbf{A}_i$ est intégralement clos.*

▷ *1.* Supposons que a divise y après localisation en s_i. On a $ax_i = u_i y$ dans E pour un $u_i = s_i^{n_i}$ et un $x_i \in E$. La liste des u_i est 2 fois E-régulière (lemme 9.3).
On a $au_j x_i = u_i u_j y = au_i x_j$ et comme a est E-régulier, $u_j x_i = u_i x_j$. Donc on a un $x \in E$ tel que $x_i = u_i x$ pour chaque i. Ceci donne $u_i ax = u_i y$ et comme $\mathsf{Gr}(u_1, \dots, u_n, E) \geqslant 1$, on obtient $ax = y$.

2. Considérons dans $\mathbf{A}$ une suite $(x_1, \dots, x_m)$ proportionnelle à $(b_1, \dots, b_m)$. On cherche un $x \in E$ tel que $x_\ell = xc_\ell$ pour tout $\ell \in [\![1..m]\!]$. Dans chaque E_i on trouve un y_i tel que $x_\ell = y_i c_\ell$ pour tout $\ell \in [\![1..m]\!]$. Cela signifie qu'on a un $u_i \in s_i^{\mathbb{N}}$ et un $z_i \in E$ tels que $u_i x_\ell = z_i c_\ell$ dans E pour tout $\ell \in [\![1..m]\!]$. Il nous suffit de montrer qu'il existe un $z \in E$ tel que $z_i = u_i z$ pour chaque i, car alors $u_i(x_\ell - zc_\ell) = 0$ pour chaque i (et les u_i sont coréguliers pour E). Il suffit donc de montrer que les z_i forment une famille proportionnelle aux u_i, i.e. que $u_i z_j = u_j z_i$ pour tous $i, j \in [\![1..n]\!]$. Or on sait que les c_ℓ sont coréguliers pour E (d'après le principe local-global 8.5). Donc il suffit de montrer que l'on a les égalités $u_i z_j c_\ell = u_j z_i c_\ell$, or les deux membres sont égaux à $u_i u_j x_\ell$.
3. Soient x et y dans $\mathbf{A}$ avec y entier sur l'idéal $x\mathbf{A}$. Ceci reste vrai pour chaque localisé $\mathbf{A}_i$, lequel est intégralement clos. Donc x divise y dans chaque $\mathbf{A}_i$. Donc par le point *1* avec $E = \mathbf{A}$, x divise y dans $\mathbf{A}$. □

9.5. Fait. (Lemme des localisations successives, avec la profondeur 2)
Si $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(s_1, \dots, s_n, E) \geqslant 2$ *et si pour chaque* i *on a une liste* $(s_{i,1}, \dots, s_{i,k_i})$ *dans* $\mathbf{A}$ *qui est* 2 *fois* $E[1/s_i]$*-régulière, alors le système des* $s_i s_{i,j}$ *est* 2 *fois* E*-régulier.*

▷ D'après le principe local-global 9.4, il suffit de vérifier que les $s_i s_{ij}$ sont 2 fois E-réguliers après localisation en des éléments qui forment une liste 2 fois E-régulière. Cela fonctionne avec la liste des s_i. □

9.6. Lemme. *Soient* $(\underline{a}) = (a_1, \dots, a_n)$ *et* $(\underline{b}) = (b_1, \dots, b_r)$ *dans* $\mathbf{A}$ *et* E *un* $\mathbf{A}$*-module. On note* $(\underline{a} \star \underline{b})$ *la famille finie des* $a_i b_j$*.*
Si $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a}, E) \geqslant 2$ *et* $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{b}, E) \geqslant 2$ *alors* $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\underline{a} \star \underline{b}, E) \geqslant 2$.
En termes d'idéaux de type fini :
— *si* $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}, E) \geqslant 2$ *et* $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}, E) \geqslant 2$ *alors* $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{ab}, E) \geqslant 2$.

▷ D'après le principe local-global 9.4, il suffit de montrer que la famille des $a_i b_j$ est 2 fois E-régulière après localisation en chacun des a_i. Or, lorsqu'on localise en a_1 par exemple, la suite des $a_1 b_j$ engendre le même idéal que la suite des b_j, et cet idéal est 2 fois E-régulier. □

Recollements en profondeur 2

La définition suivante permet de simplifier un peu la rédaction de certaines démonstrations.

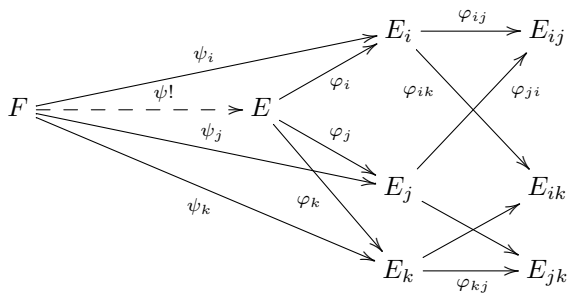
9.7. Définition. *(Sustème de monoïdes* 2 *fois* E*-régulier)*
Un système $(S_1, \dots, S_n) = (\underline{S})$ de monoïdes de $\mathbf{A}$ est dit 2 *fois* E*-régulier* si pour tous $s_1 \in S_1$, …, $s_n \in S_n$, on a $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(s_1, \dots, s_n, E) \geqslant 2$.

Le cas le plus important est le système des monoïdes $(s_1^{\mathbb{N}}, \dots, s_n^{\mathbb{N}})$ lorsque $\mathsf{Gr}_{\mathbf{A}}(s_1, \dots, s_n, E) \geqslant 2$.

Nous reprenons maintenant le principe local-global 4.2 en remplaçant l'hypothèse selon laquelle les monoïdes sont comaximaux par une hypothèse plus faible (système de monoïdes deux fois régulier).
Le contexte est le suivant. On considère $(\underline{S}) = (S_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ un système de monoïdes.
Nous notons $\mathbf{A}_i := \mathbf{A}_{S_i}$ et $\mathbf{A}_{ij} := \mathbf{A}_{S_iS_j}$ $(i \neq j)$ de sorte que $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji}$.
Nous notons $\varphi_i : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ et $\varphi_{ij} : \mathbf{A}_i \to \mathbf{A}_{ij}$ les homomorphismes naturels.
Dans la suite des notations comme $(E_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}$ et $(\varphi_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}$ signifient que l'on a $E_{ij} = E_{ji}$ mais pas (a priori) $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$.

9.8. Principe local-global concret. (Recouvrement un module par des localisés en profondeur 2) *On considère le contexte décrit ci-dessus.*

1. *On suppose $(\underline{S})$ deux fois régulier. On considère un élément $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ de $\prod_{i\in[\![1..n]\!]} \mathbf{A}_i$. Pour qu'il existe un $x \in \mathbf{A}$ vérifiant $\varphi_i(x) = x_i$ dans chaque $\mathbf{A}_i$, il faut et suffit que pour chaque $i < j$ on ait $\varphi_{ij}(x_i) = \varphi_{ji}(x_j)$ dans $\mathbf{A}_{ij}$. En outre, cet x est alors déterminé de manière unique.*
   En d'autres termes l'anneau $\mathbf{A}$ (avec les homomorphismes φ_i) est la limite projective du diagramme :
$$\big((\mathbf{A}_i)_{i\in[\![1..n]\!]}, (\mathbf{A}_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}; (\varphi_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}\big)$$
2. *Soit E un $\mathbf{A}$-module. On suppose $(\underline{S})$ deux fois E-régulier.*
   Notons $E_i := E_{S_i}$ et $E_{ij} := E_{S_iS_j}$ $(i \neq j)$ de sorte que $E_{ij} = E_{ji}$.
   Notons $\varphi_i : E \to E_i$ et $\varphi_{ij} : E_i \to E_{ij}$ les applications linéaires naturelles. Alors le couple $\big(E, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ donne la limite projective du diagramme suivant dans la catégorie des $\mathbf{A}$-modules :
$$\big((E_i)_{i\in[\![1..n]\!]}, (E_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}; (\varphi_{ij})_{i\neq j\in[\![1..n]\!]}\big)$$



D *1.* Cas particulier de *2.*
2. Soit un élément $(x_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ de $\prod_{i\in[\![1..n]\!]} E_i$. On doit montrer l'équivalence suivante : il existe un $x \in E$ vérifiant $\varphi_i(x) = x_i$ dans chaque E_i si, et seulement si, pour chaque $i < j$ on a $\varphi_{ij}(x_i) = \varphi_{ji}(x_j)$ dans E_{ij}. En outre, cet x doit être unique.
La condition est clairement nécessaire. Voyons qu'elle est suffisante.

Montrons l'existence de x. Notons tout d'abord qu'il existe des $s_i \in S_i$ et des y_i dans E tels que l'on ait $x_i = y_i/s_i$ dans chaque E_i.
Si $\mathbf{A}$ est intègre, E sans torsion et les $s_i \neq 0$, on a dans l'espace vectoriel obtenu par extension des scalaires au corps des fractions les égalités

$$\frac{y_1}{s_1} = \frac{y_2}{s_2} = \cdots = \frac{y_n}{s_n},$$

et vue l'hypothèse concernant les s_i il existe un $x \in E$ tel que $xs_i = y_i$ pour chaque i.
Dans le cas général on fait à peu près la même chose.
Pour chaque couple (i, j) avec $i \neq j$, le fait que $x_i/1 = x_j/1$ dans E_{ij} signifie que pour certains $u_{ij} \in S_i$ et $u_{ji} \in S_j$ on a $s_j u_{ij} u_{ji} y_i = s_i u_{ij} u_{ji} y_j$. Pour chaque i, soit $u_i \in S_i$ un multiple commun des u_{ik} (pour $k \neq i$).
On a alors $(s_j u_j)(u_i y_i) = (s_i u_i)(u_j y_j)$. Ainsi le vecteur des $u_i y_i$ est proportionnel au vecteur des $s_i u_i$. Puisque le système $(\underline{S})$ est deux fois E-régulier, il existe un $x \in E$ tel que $u_i y_i = s_i u_i x$ pour tout i, ce qui donne les égalités $\varphi_i(x) = \frac{u_i y_i}{s_i u_i} = \frac{y_i}{s_i} = x_i$.
Enfin cet x est unique parce que les S_i sont E-coréguliers. □

Voici maintenant une variante du principe local-global 4.4. Cette variante apparaît cette fois-ci comme une réciproque du principe local-global précédent.

9.9. Principe local-global concret. (Recollement concret de modules)
Soit $(\underline{S}) = (S_1, \ldots, S_n)$ un système de monoïdes de $\mathbf{A}$.
On note $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}_{S_i}$, $\mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{S_i S_j}$ et $\mathbf{A}_{ijk} = \mathbf{A}_{S_i S_j S_k}$. Supposons donné dans la catégorie des $\mathbf{A}$-modules un diagramme commutatif
$\big((E_i)_{i\in[\![1..n]\!]}, (E_{ij})_{i<j\in[\![1..n]\!]}, (E_{ijk})_{i<j<k\in[\![1..n]\!]}; (\varphi_{ij})_{i\neq j}, (\varphi_{ijk})_{i<j,i\neq k,j\neq k}\big)$
(comme dans la figure ci-après) avec les propriétés suivantes.

- *Pour tous i, j, k (avec $i < j < k$), E_i est un $\mathbf{A}_i$-module, E_{ij} est un $\mathbf{A}_{ij}$-module et E_{ijk} est un $\mathbf{A}_{ijk}$-module. Rappelons que selon nos conventions de notation on pose $E_{ji} = E_{ij}$, $E_{ijk} = E_{ikj} = \ldots$*
- *Pour $i \neq j$, $\varphi_{ij} : E_i \to E_{ij}$ est un morphisme de localisation en S_j (vu dans $\mathbf{A}_i$).*
- *Pour $i \neq k$, $j \neq k$ et $i < j$, $\varphi_{ijk} : E_{ij} \to E_{ijk}$ est un morphisme de localisation en S_k (vu dans $\mathbf{A}_{ij}$).*

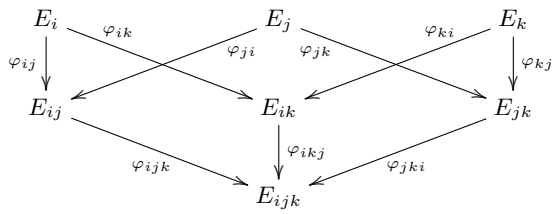
Alors, si $\big(E, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ est la limite projective du diagramme, on a les résultats suivants.

1. *Chaque morphisme $\varphi_i : E \to E_i$ est un morphisme de localisation en S_i.*
2. *Le système $(\underline{S})$ est deux fois E-régulier.*
3. *Le système $\big(E, (\varphi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ est, à isomorphisme unique près, l'unique système $\big(F, (\psi_i)_{i\in[\![1..n]\!]}\big)$ avec les $\psi_i \in \mathrm{L}_{\mathbf{A}}(F, E_i)$ vérifiant les points suivants :*

— *le diagramme est commutatif,*

— *chaque ψ_i un morphisme de localisation en S_i,*

— *le système $(\underline{S})$ est deux fois F-régulier.*



D *1.* Cette propriété est valable sans aucune hypothèse sur le système de monoïdes considéré (voir la démonstration du principe local-global 4.4).

2. On considère des $s_i \in S_i$ et une suite $(\boldsymbol{x}_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$ dans E proportionnelle à $(s_i)_{i\in[\![1..n]\!]}$. Notons $\boldsymbol{x}_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$. La proportionalité des deux suites signifie que $s_i x_{jk} = s_j x_{ik}$ dans E_k pour tous i, j, k. On pose $\boldsymbol{x} = (\frac{x_{ii}}{s_i})_{i\in[\![1..n]\!]}$. On vérifie ensuite que $s_i\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_i$: i.e., que $s_i\frac{x_{jj}}{s_j} = x_{ij}$ dans chaque E_j. En effet, cela résulte de l'égalité de proportionalité $s_i x_{jk} = s_j x_{ik}$ pour $k = j$.

3. Puisque E est la limite projective du diagramme, il y a une unique application $\mathbf{A}$-linéaire $\psi : F \to E$ telle que $\psi_i = \varphi_i \circ \psi$ pour tout i.

En fait on a $\psi(y) = \big(\psi_1(y), \dots, \psi_n(y)\big)$.

Montrons d'abord que ψ est injective. Si $\psi(y) = 0$ tous les $\psi_i(y)$ sont nuls, et puisque ψ_i est un morphisme de localisation en S_i, il existe des $s_i \in S_i$ tels que $s_i y = 0$. Puisque $(\underline{S})$ est un système F-régulier, on a $y = 0$.

Comme ψ est injective on peut supposer $F \subseteq E$ et $\psi_i = \varphi_i|_F$.

Dans ce cas montrer que ψ est bijective revient à montrer que $F = E$.

Soit $\boldsymbol{x} \in E$. Comme ψ_i et φ_i sont deux morphismes de localisation en S_i, il y a des $u_i \in S_i$ tels que $u_i\boldsymbol{x} \in F$. Puisque $(\underline{S})$ est deux fois F-régulier, et que la suite des $u_i\boldsymbol{x}$ est proportionnelle à la suite des u_i, il existe un $y \in F$ tel que $u_i\boldsymbol{x} = u_i y$ pour tout i, donc $y = \boldsymbol{x} \in F$. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Soient $S_1, \ldots, S_n$, S des monoïdes de $\mathbf{A}$ tels que S est contenu dans le saturé de chaque S_i. Les propriétés suivantes sont équivalentes.
1. Les S_i recouvrent S.
2. Les S_i sont comaximaux dans $\mathbf{A}_S$.

Exercice 2. Soit I un idéal et U un monoïde de $\mathbf{A}$. Posons $S = \mathcal{S}(I, U)$.
1. Dans $\mathbf{A}_S$, le monoïde $\mathcal{S}(I; U, a)$ est équivalent à $\mathcal{S}(I; a) = I + a^{\mathbb{N}}$.
2. Dans $\mathbf{A}_S$, le monoïde $\mathcal{S}(I, a; U)$ est équivalent à $\mathcal{S}(a; 1) = 1 + \langle a \rangle$.

Exercice 3. Donner une démonstration du lemme 1.5 basée sur les deux exercices précédents.

Exercice 4. Soit $\mathbf{A}$ un anneau.
1. Pour $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbf{A}$, si $a_1 \cdots a_n \in \operatorname{Rad} \mathbf{A}$, les monoïdes $1 + \langle a_i \rangle$ sont comaximaux.
2. Si $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_\ell$ sont des idéaux de $\mathbf{A}$, les monoïdes $1 + \mathfrak{a}_i$ recouvrent le monoïde $1 + \prod_i \mathfrak{a}_i$.

Exercice 5. *(Conformément à la définition des idéaux premiers, si un produit de facteurs est dans un idéal premier potentiel, on peut ouvrir des branches de calcul dans chacune desquelles un au moins des facteurs est dans le nouvel idéal premier potentiel)*
On reprend les notations de la définition 1.4. On considère deux parties I et U de $\mathbf{A}$ et le monoïde correspondant $\mathcal{S}(I, U)$. Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$ pour lesquels on a

$$\textstyle\prod_{i=1}^{k} a_i \in \langle I \rangle_{\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}} .$$

1. Montrez que les monoïdes $\mathcal{S}(I \cup \{a_i\}, U)$ recouvrent le monoïde $\mathcal{S}(I, U)$.
2. Si l'on a $a_i - a_j \in \mathcal{S}(I, U)$, alors a_j est inversible dans $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I \cup \{a_i\}, U)}$.
3. Supposons que pour chaque $j \in [\![1..k]\!]$, on a un automorphisme de $\mathbf{A}$ qui fixe le monoïde $\mathcal{S}(I, U)^{\mathrm{sat}}$ et qui envoie a_1 sur a_j, et que chacun des $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I \cup \{a_i\}, U)}$ est trivial, alors $\mathbf{A}_{\mathcal{S}(I,U)}$ est trivial.

Exercice 6. Soit $S = (S_1, \ldots, S_n)$ une famille de monoïdes de $\mathbf{A}$.
1. On considère la famille S' obtenue à partir de S en répétant chaque S_i un certain nombre de fois (au moins une) :

$$S' = (S_1, S_1, \ldots, S_2, S_2, \ldots, S_n, S_n, \ldots)$$

Montrer que S est une famille de monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ si et seulement si il en est de même de S'.
2. On considère une seconde famille $U = (U_1, \ldots, U_m)$ de monoïdes de $\mathbf{A}$. On suppose que pour chaque $i \in [\![1..n]\!]$, il existe $j \in [\![1..m]\!]$ tel que $S_i \subseteq U_j$ et pour chaque $j \in [\![1..m]\!]$ il existe $i \in [\![1..n]\!]$ tel que $U_j \supseteq S_i$. Montrer que si U est une famille de monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, il en est de même de S.

Exercice 7. *(Variation sur le théorème de Kronecker local page 828)*
Pour résoudre l'exercice, on peut remarquer que le résultat souhaité est un énoncé « quasi global » que l'on peut obtenir par relecture de la démonstration du théorème de Kronecker local.
Soient $x_0, \ldots, x_d \in \mathbf{A}$ et $\mathfrak{a} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(x_0, \ldots, x_d)$. Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$ et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant 0$, il existe des éléments $s_0, \ldots, s_d \in \mathbf{A}$ et des idéaux $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d$, chacun engendré par d éléments, tels que [7]

$$(s_0, \ldots, s_d) \text{ est un s.f.i.o. de } \mathbf{A}/\mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \forall i, \quad s_i\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}_i} \subseteq \mathfrak{a}$$

(localement, $\mathfrak{a}$ est maximal et radicalement engendré par d éléments).

Exercice 8. *(Deuxième variation sur le théorème de Kronecker local)*
Soit $\mathbf{A}$ un anneau et un idéal $\mathfrak{a}$ de type fini. Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant 0$ et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{1+\mathfrak{a}} \leqslant d$, il existe des éléments $s_0, \ldots, s_d \in \mathbf{A}$ et des idéaux $\mathfrak{b}_0, \ldots, \mathfrak{b}_d \subseteq \mathfrak{a}$, chacun engendré par d éléments, tels que

$$(s_0, \ldots, s_d) \text{ est un s.f.i.o. de } \mathbf{A}/\mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \forall i, \quad s_i\mathfrak{a} \subseteq \sqrt{\mathfrak{b}_i}.$$

Exercice 9. Vu le principe de recollement concret des modules (principe local-global concret 4.4), et vu l'isomorphisme canonique

$$\big(\mathrm{L}_{\mathbf{A}}(M,N)\big)_S \to \mathrm{L}_{\mathbf{A}_S}(M_S, N_S)$$

dans le cas de modules de présentation finie (proposition V-9.3), on a des caractérisations locales pour le déterminant d'un module projectif de type fini et celui d'un homomorphisme entre modules projectifs de type fini (cf. exercice X-19).
1. Le module $\det(M)$ est caractérisé à isomorphisme unique près par la propriété suivante : si $s \in \mathbf{A}$ est tel que M_s est libre, alors $\det(M)_s \simeq \det(M_s)$, avec des isomorphismes compatibles lorsque l'on fait une localisation plus poussée [8].
2. Si $\varphi : M \to N$ est un homomorphisme de $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini, l'homomorphisme $\det(\varphi)$ est caractérisé par la propriété suivante : si $s \in \mathbf{A}$ est tel que M_s et N_s sont libres, alors $\det(\varphi)_s = \det(\varphi_s)$ (modulo les isomorphismes canoniques).

Exercice 10. Soit $n \geqslant 3$, s_1, s_2 deux éléments comaximaux de $\mathbf{A}$. On se propose de recoller concrètement deux modules projectifs de type fini P_1 et P_2 définis respectivement sur $\mathbf{A}_{s_1}$ et $\mathbf{A}_{s_2}$ qui ont des extensions à $\mathbf{A}_{s_1 s_2}$ isomorphes. En utilisant le lemme d'élargissement, on peut supposer qu'ils sont images de matrices de projection conjugées F_1 et F_2 sur $\mathbf{A}_{s_1 s_2}$ au moyen d'un produit de matrices élémentaires.
1. Soit $E \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_1 s_2})$. Montrer qu'il existe $E_1 \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_1})$ et $E_2 \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_2})$ tels que $E = E_1 E_2$ sur $\mathbf{A}_{s_1 s_2}$.
2. Soient $F_1 \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}_{s_1})$ et $F_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}_{s_2})$ deux matrices de projection conjuguées sur $\mathbf{A}_{s_1 s_2}$ au moyen d'une matrice $E \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_1 s_2})$. Que faire ?

Exercice 11. *(Théorème de McCoy contraposé, version pénible)*
Soient $\mathbf{A}$ un anneau discret non trivial et une matrice $M \in \mathbf{A}^{m\times n}$.
1. Si $\mathcal{D}_n(M)$ est fidèle, M est injective.

---

7. s.f.i.o. : système fondamental d'idempotents orthogonaux.

8. Cela signifie précisément : si $s'' = ss'$, alors l'isomorphisme $(\det(M))_{s''} \simeq \det(M_{s''})$ est donné par la localisation de l'isomorphisme $(\det(M))_s \simeq \det(M_s)$.

2. Si l'on connaît un entier $k < n$ et un $x \in \mathbf{A}$ non nul, tels que
$$x\mathcal{D}_{k+1}(M) = 0 \text{ et } \mathcal{D}_k(M) \text{ est fidèle,}$$
alors on peut construire un vecteur non nul dans le noyau de M.

Exercice 12. *(Théorème de McCoy contraposé, version digeste)*
Soient $\mathbf{A}$ un anneau cohérent discret non trivial et une matrice $M \in \mathbf{A}^{m\times n}$.

1. Ou bien $\mathcal{D}_n(M)$ est fidèle, et M est injective.
2. Ou bien on peut construire dans le noyau de M un vecteur avec au moins une coordonnée dans $\mathbf{A}^*$.

Exercice 13. *(Un autre résultat de McCoy : le lemme de McCoy)* Le résultat suivant est pour l'essentiel une reprise du corollaire III-2.3. *Soient E un $\mathbf{A}$-module et f un polynôme de $\mathbf{A}[\underline{Y}]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'élément f est $E[\underline{Y}]$-régulier, i.e.* $(0_{E[\underline{Y}]} : f)_{E[\underline{Y}]} = 0_{E[\underline{Y}]}$.
2. *L'idéal* $\mathrm{c}(f)$ *est E-régulier, i.e.* $\big(0_E : \mathrm{c}(f)\big)_E = 0_E$.
3. *Pour tout $x \in E$, $x\,f = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$, i.e.* $(0_{E[\underline{Y}]} : f)_E = 0_E$.

Un tel polynôme est appelé un polynôme de Kronecker attaché à $\mathfrak{a} = \mathrm{c}_{\mathbf{A}}(f)$.
Les points *2* et *3* ont la même signification, et il est clair que le point *3* est un cas particulier du point *1*. Ce qui est vraiment l'objet du lemme est l'implication *3* $\Rightarrow$ *1*.
Il suffit de démontrer le lemme dans le cas des polynômes en une seule variable (le cas général peut s'en déduire en utilisant l'astuce de Kronecker).
a. Donner une démonstration inspirée de celle du corollaire III-2.3.
b. Donner une démonstration directe.

Exercice 14. *(Un exemple d'application de la machinerie locale-globale constructive de base)* Nous reprenons l'exercice III-29 et nous proposons une solution complète fondée sur le principe local-global de base. Il s'agit ici de généraliser au cas d'un anneau commutatif arbitraire un résultat utile en théorie des corps discrets : *si l'on divise un polynôme $f(x)$ par le pgcd de f et f', on obtient un polynôme séparable.* Pour un anneau arbitraire, on devra supposer que le pgcd de f et f' existe en un sens fort.
Les points *1* et *2a* sont des rappels du points *2* et *3a* de l'exercice III-29.
1. Soit $\mathbf{K}$ un corps discret, x une indéterminée, $f \in \mathbf{K}[x]$ un polynôme non nul de degré $n \geqslant 0$, $h = \mathrm{pgcd}(f, f')$ et $f_1 = f/h$. Alors $\mathrm{Res}_x(f_1, f_1') \in \mathbf{K}^\times$, ou, ce qui revient au même, $1 \in \langle f_1, f_1'\rangle \subseteq \mathbf{K}[x]$. Si en outre $\deg(f) = n$ et $n! \in \mathbf{K}^\times$, alors f divise ${f_1}^n$.
2. Soit $\mathbf{k}$ un anneau commutatif, x une indéterminée, et $f \in \mathbf{k}[x]$ primitif de degré formel $n \geqslant 0$. On suppose que l'idéal $\langle f, f'\rangle$ est engendré par un polynôme h (nécessairement primitif).

a. Montrer qu'il existe des polynômes u, v, f_2, $f_1 \in \mathbf{k}[x]$, satisfaisant les égalités
$$uf_1 + vf_2 = 1 \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} u & v \\ -f_2 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h \\ 0 \end{bmatrix}.$$
En outre, on a $f_1 h = f$ et $f_2 h = f'$, de sorte que f_1 est nécessairement primitif.

b. On suppose que $\mathbf{k}$ est un anneau local résiduellement discret. Montrer que $1 \in \langle f_1, f_1' \rangle \subseteq \mathbf{k}[x]$. Si en outre $n! \in \mathbf{k}^\times$, montrer que f divise f_1^n.

c. Montrer les mêmes résultats qu'au point *2b*, mais pour un anneau commutatif arbitraire. Utiliser la machinerie locale-globale de base.

3. Question subsidiaire. Donner une démonstration directe du point *2c* qui n'utilise pas la machinerie locale-globale de base.

Problème 1. *(Éviter les idéaux premiers)*
Dans ce problème, on examine comment décrypter constructivement une démonstration classique qui utilise comme outil de base « aller voir ce qui se passe dans les corps $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$ pour tous les idéaux premiers $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$ ».
1. Soit t une indéterminée, a, b, c_1, …, $c_n \in \mathbf{A}$ tels que $(at+b, c_1, \ldots, c_n)$ soit un vecteur unimodulaire sur $\mathbf{A}[t, t^{-1}]$. On veut montrer que $ab \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c_1, \ldots, c_n)$. La démonstration suivante, typique en mathématiques classiques, utilise le principe du tiers exclu et l'axiome du choix. Si $ab \notin \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c_1, \ldots, c_n)$, il existe un idéal premier $\mathfrak{p}$ avec $c_i \in \mathfrak{p}$ pour $i \in [\![1..n]\!]$ et $ab \notin \mathfrak{p}$. Sur le corps $\mathbf{K} = \mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$, puisque $\overline{a}$ est non nul, l'équation $at+b=0$ a une unique solution $t = -\overline{b}/\overline{a}$, qui est non nulle car $\overline{b}$ est non nul ; on peut alors définir un morphisme $\varphi : \mathbf{A}[t, t^{-1}] \to \mathbf{K}$ par $t \mapsto -\overline{b}/\overline{a}$; φ transforme le vecteur unimodulaire $(at+b, c_1 t, \ldots, c_n t)$ en le vecteur nul de $\mathbf{K}^{n+1}$. Absurde.
Qu'en pensez vous ?
2. Si $\mathbf{B}$ est un anneau réduit décrire les unités de $\mathbf{B}[t, 1/t]$.
On pourra montrer que si p, $q \in \mathbf{B}[t]$ vérifient $pq = t^m$ (avec $p = \sum_k p_k t^k$ et $q = \sum_k q_k t^k$), alors $1 \in \mathrm{c}(p)$, $1 \in \mathrm{c}(q)$ et :

$$p_k p_\ell = q_k q_\ell = 0 \text{ si } k \neq \ell, \quad p_k q_\ell = 0 \text{ si } k + \ell \neq m, \quad p_i = q_i = 0 \text{ si } i > m.$$

En conséquence, pour $k \in [\![0..m]\!]$, $\langle p_k \rangle$ est engendré par un idempotent e_k. On dispose alors d'un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_0, \ldots, e_m)$ dans $\mathbf{B}$ tel que $\langle e_k \rangle = \langle p_k \rangle = \langle q_{m-k} \rangle$ pour $k \in [\![0..m]\!]$ et :

$$e_k p = e_k p_k t^k, \ e_k q = e_k q_{m-k} t^{m-k} \ \text{ et } \ e_k = e_k p_k q_{m-k}.$$

Le résultat est clair lorsque l'anneau est intègre, donc le réflexe en mathématiques classiques est d'utiliser des idéaux premiers. Une solution possible pour décrypter constructivement ce raisonnement est d'utiliser le Nullstellensatz formel (théorème III-9.9).

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 1. *2* $\Rightarrow$ *1.* Soient $s_1, \ldots, s_n$ avec $s_i \in S_i$. On veut des $b_i \in \mathbf{A}$ tels que $b_1 s_1 + \cdots + b_n s_n \in S$. Le fait que les S_i soient comaximaux dans $\mathbf{A}_S$ fournit un $s \in S$ et des $a_i \in \mathbf{A}$ tels que $a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n = s$ dans $\mathbf{A}_S$; il existe donc un $t \in S$ tel que, dans $\mathbf{A}$, $(ta_1)s_1 + \cdots + (ta_n)s_n = ts \in S$.

Exercice 2.
1. Un élément s de $\mathcal{S}(I; U, a)$ est de la forme $x + ua^k$. On voit que s divise dans $\mathbf{A}_S$ l'élément $xu^{-1} + a^k \in \mathcal{S}(I; a)$.

2. Un élément s de $\mathcal{S}(I,a;U)$ est de la forme $x+ya+u$. On pose $x'=u^{-1}x$ et $y'=u^{-1}$. Alors s divise dans $\mathbf{A}_S$ l'élément $x'+y'a+1$, qui divise $1+y''a$, où $y''=(1+x')^{-1}y'$.

Exercice 3. Posons $S=\mathcal{S}(I,U)$, $S_1=\mathcal{S}(I;U,a)$, $S_2=\mathcal{S}(I,a;U)$. Il faut vérifier que S_1 et S_2 sont comaximaux dans $\mathbf{A}_S$. Dans $\mathbf{A}_S$, S_1 est équivalent à $I+a^{\mathbb{N}}$, et S_2 est équivalent à $1+\langle a\rangle$. Utilisons l'identité suivante :

$$y^k(x+a^k)+\left(\textstyle\sum_{j<k}y^ja^j\right)(1-ya)=y^k(x+a^k)+1-y^ka^k=1+y^kx.$$

Appliquée a $x\in I$, elle prouve que $x+a^k$ et $1-ya$ sont comaximaux dans $\mathbf{A}_S$ (puisque $1+y^kx\in 1+I$ et que I est contenu dans le radical de $\mathbf{A}_S$).

Exercice 4. *1.* Pour $j\in[\![1..n]\!]$ soit $b_j=1-a_jx_j$ dans le monoïde $1+a_j\mathbf{A}$. Soit $a=\prod_i a_i$. On doit montrer que l'idéal $\mathfrak{m}=\langle b_1,\dots,b_n\rangle$ contient 1.
Or, modulo $\mathfrak{m}$ on a $1=a_jx_j$, donc $1=a\prod_i x_i=ax$. Ainsi $1-ax\in\mathfrak{m}$, mais $1-ax\in\mathbf{A}^\times$ car $a\in\operatorname{Rad}\mathbf{A}$.
2. Il est clair que $S=1+\prod_i\mathfrak{a}_i\subseteq 1+\mathfrak{a}_j=S_j$ pour chaque j. On doit donc vérifier (exercice 1) que les $1+\mathfrak{a}_j$ vus dans $\mathbf{A}_S$ sont comaximaux. Or le produit $\prod_i\mathfrak{a}_i$, vu dans $\mathbf{A}_S$, est dans $\operatorname{Rad}\mathbf{A}_S$. Donc il suffit d'appliquer le point *1.*

Exercice 5. L'hypothèse signifie que l'on a un $u\in\mathcal{M}(U)$ et un $j\in\langle I\rangle_{\mathbf{A}}$ tels que $(u+j)\prod_{i=1}^k a_i\in\langle I\rangle_{\mathbf{A}}$, ou encore : $u\prod_{i=1}^k a_i\in\langle I\rangle_{\mathbf{A}}$.
1. Première solution, par calcul direct.
On considère des $x_i\in S_i=\mathcal{S}(I\cup\{a_i\},U)$ et on cherche une combinaison linéaire qui se trouve dans $S=\mathcal{S}(I,U)$. Pour chaque i on écrit

$$x_i=u_i+j_i+a_iz_i \text{ avec } u_i\in\mathcal{M}(U),\ j_i\in\langle I\rangle_{\mathbf{A}} \text{ et } z_i\in\mathbf{A}.$$

Dans le produit

$$u\prod_{i=1}^k(x_i-(u_i+j_i))=u\prod_{i=1}^k a_iz_i\in\langle I\rangle_{\mathbf{A}},$$

on réécrit le premier membre sous forme

$$\textstyle\sum_{i=1}^k c_ix_i\pm u\prod_{i=1}^k(u_i+j_i),$$

et l'on obtient, en faisant passer $\pm u\prod_{i=1}^k(u_i+j_i)$ dans le second membre, l'appartenance souhaitée $\sum_{i=1}^k c_ix_i\in\mathcal{S}(I,U)$.
Deuxième solution, conceptuelle.
Il est clair que $S\subseteq S_i$. Il suffit donc (exercice 1) de montrer que les S_i sont comaximaux dans $\mathbf{A}_S$. Dans $\mathbf{A}_S$, (exercice 2) les monoïdes S_i et $1+\langle a_i\rangle$ ont même saturé. Il suffit donc de voir que les monoïdes $1+\langle a_i\rangle$ sont comaximaux dans $\mathbf{A}_S$. Par ailleurs, on sait que, vu dans $\mathbf{A}_S$, I est contenu dans $\operatorname{Rad}(\mathbf{A}_S)$. On applique donc le point *1* de l'exercice 4.
2. Clair puisque $a_j\in\mathcal{S}(I,U)+\langle a_i\rangle\subseteq\mathcal{S}(I\cup\{a_i\},U)$.
3. Si l'un des $\mathbf{A}_{S_i}$ est trivial, ils le sont tous car ils sont deux à deux isomorphes. Puisque les S_i recouvrent S, $\mathbf{A}_S$ est lui même trivial.

Exercice 6. *1.* Il suffit de le montrer pour $S'=(S_1,S_1,S_2,\dots,S_n)$.
Supposons la famille S comaximale. Soient s_1', $s_1''\in S_1$, et $s_i\in S_i$ pour $i\in[\![2..n]\!]$. Les éléments $s_1's_1''$, s_2, …, s_n sont comaximaux, et puisque $s_1's_1''\in\langle s_1',s_1''\rangle$, il en est de même de s_1', s_1'', s_2, …, s_n. Dans l'autre sens, supposons S' comaximale et soient $s_i\in S_i$ pour $i\in[\![1..n]\!]$; alors s_1, s_1, s_2, …, s_n sont comaximaux donc il en est de même de s_1, s_2, …, s_n.

2. En répétant certains des S_i et des U_j, on obtient deux familles S', U' de monoïdes de $\mathbf{A}$, indexées par le même intervalle $[\![1..p]\!]$ et vérifiant $S'_k \subseteq U'_k$ pour $k \in [\![1..p]\!]$. Puisque U est comaximale, il en est de même de U' donc de S' puis de S.

Exercice 7. Comme $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d$, il existe une suite $(\underline{a}) = (a_0, \dots, a_d)$ complémentaire à $(\underline{x}) = (x_0, \dots, x_d)$. Donc (suites disjointes), pour tout $i \leqslant d$, on a

$$\mathrm{D}(a_0, \dots, a_{i-1}, x_0, \dots, x_{i-1}, a_i x_i) = \mathrm{D}(a_0 + x_0, \dots, a_{i-1} + x_{i-1}).$$

Comme $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\mathfrak{a} \leqslant 0$ et $\mathfrak{a} = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$, on a également $\mathbf{A} = \mathbf{A}a_i + (\mathfrak{a} : a_i)$ pour tout i. On construit alors le triangle :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}\\
=\ &\mathbf{A}a_0 + (\mathfrak{a} : a_0)\\
=\ &\mathbf{A}a_0 + (\mathfrak{a} : a_0)a_1 + (\mathfrak{a} : a_0)(\mathfrak{a} : a_1)\\
&\ \ \vdots\\
=\ &\mathbf{A}a_0 + (\mathfrak{a} : a_0)a_1 + \cdots + (\mathfrak{a} : a_0)\cdots(\mathfrak{a} : a_{d-1})a_d + (\mathfrak{a} : a_0)\cdots(\mathfrak{a} : a_d).
\end{aligned}$$

Maintenant, on écrit

$$1 = b_0 a_0 + b_1 a_1 + \cdots + b_d a_d + t$$

avec $b_i \in (\mathfrak{a} : a_0)\cdots(\mathfrak{a} : a_{i-1})$ et $t \in (\mathfrak{a} : a_0)\cdots(\mathfrak{a} : a_d)$. Pour $i \leqslant d$, on a d'une part

$$\begin{aligned}
b_i \langle x_0, \dots, x_{i-1}\rangle &\subseteq \mathrm{D}\big(b_i(a_0 + x_0), \dots, b_i(a_{i-1} + x_{i-1})\big)\\
&\subseteq \mathrm{D}(b_i a_0, x_0, \dots, b_i a_{i-1}, x_{i-1}) \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a},
\end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
b_i a_i x_i &\in b_i \mathrm{D}(a_0 + x_0, \dots, a_{i-1} + x_{i-1})\\
&\subseteq \mathrm{D}\big(b_i(a_0 + x_0), \dots, b_i(a_{i-1} + x_{i-1})\big) \subseteq \mathfrak{a}.
\end{aligned}$$

Posons maintenant $s_i = b_i a_i$. On arrive ainsi à

$$s_i \langle x_0, \dots, x_{i-1}, x_i\rangle \subseteq \mathrm{D}\big(b_i(a_0 + x_0), \dots, b_i(a_{i-1} + x_{i-1})\big) \subseteq \mathfrak{a},$$

puis

$$s_i \langle x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_d\rangle \subseteq \mathrm{D}\Big(\underbrace{b_i(a_0 + x_0), \dots, b_i(a_{i-1} + x_{i-1}), s_i x_{i+1}, \dots, s_i x_d}_{\text{engendrent } \mathfrak{b}_i \text{ (def.)}}\Big) \subseteq \mathfrak{a}.$$

Il existe donc un idéal $\mathfrak{b}_i$ engendré par d éléments vérifiant

$$s_i\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{D}(s_i\mathfrak{a}) \subseteq \mathrm{D}(\mathfrak{b}_i) \subseteq \mathfrak{a}.$$

On termine la démonstration en utilisant $1 \in \langle a_d, x_d\rangle$, il vient

$$t \in t\langle a_d, x_d\rangle \subseteq \langle t a_d, x_d\rangle \subseteq \mathfrak{a},$$

si bien que la somme des s_i vaut 1 mod $\mathfrak{a}$. Par ailleurs, pour $i > j$,

$$s_i s_j \in b_i a_j \mathbf{A} \subseteq \mathfrak{a},$$

ce qui permet de conclure que $(s_0, \dots, s_d)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$.

Exercice 8. Pour commencer, le théorème de Kronecker donne que $\sqrt{\mathfrak{a}}$ est radicalement engendré par $d + 1$ éléments. Ensuite on applique le résultat de l'exercice 7 à $\sqrt{\mathfrak{a}}$ dans le localisé $(1 + \mathfrak{a})^{-1}\mathbf{A}$. Cela fournit des s_i formant un système fondamental d'idempotents orthogonaux modulo $\sqrt{\mathfrak{a}}$ et des $\mathfrak{b}_i \subseteq \sqrt{\mathfrak{a}}$. Quitte à prendre des multiples de puissances des s_i, on peut imposer que $(s_0, \dots, s_d)$ est un système fondamental d'idempotents orthogonaux de $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$. Quitte à prendre des puissances des générateurs des $\mathfrak{b}_i$, on peut imposer $\mathfrak{b}_i \subseteq \mathfrak{a}$.

Exercice 10. *1.* [Lam06, page 208 proposition 1.14].
2. On a $F_1E = EF_2$, on écrit $E = E_1E_2$, donc $F_1E_1E_2 = E_1E_2F_2$ et

$$\widetilde{E_1}F_1E_1 =_{\mathbf{A}_{s_1s_2}} E_2F_2\widetilde{E_2}.$$

La matrice $\widetilde{E_1}F_1E_1$ (resp. $E_2F_2\widetilde{E_2}$) est une matrice de projection sur $\mathbf{A}_{s_1}$ (resp. sur $\mathbf{A}_{s_2}$) car $\widetilde{E_1}E_1 = \mathrm{I}_n$ (resp. $\widetilde{E_2}E_2 = \mathrm{I}_n$). Par le principe local-global de recollement des éléments dans un module (ici $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$), il existe une unique matrice $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$ qui est égale à $\widetilde{E_1}F_1E_1$ sur $\mathbf{A}_{s_1}$ et à $E_2F_2\widetilde{E_2}$ sur $\mathbf{A}_{s_2}$. Pour vérifier que $F^2 = F$, il suffit de le vérifier sur $\mathbf{A}_{s_1}$ et $\mathbf{A}_{s_2}$. Soit $P = \operatorname{Im} F \subseteq \mathbf{A}^n$. Par construction, pour $i = 1, 2$ on obtient

$$P_{s_i} =_{\mathbf{A}^n_{s_i}} \operatorname{Im} F_{s_i} \simeq_{\mathbf{A}^n_{s_i}} \operatorname{Im} F_i \simeq_{\mathbf{A}^n_{s_i}} P_i.$$

Exercice 11. *(Théorème de McCoy contraposé, version pénible)*
1. Déjà vu.
2. On a $x \neq 0$, $\mathcal{D}_k(M)$ est fidèle et l'anneau est discret, donc il existe un mineur μ d'ordre k de M tel que $x\mu \neq 0$. Supposons par exemple que μ soit le mineur nord-ouest et notons $C_1, \ldots, C_{k+1}$ les premières colonnes de M, notons μ_i ($i \in [\![1..k]\!]$) les déterminants convenablement signés des matrices extraites sur les lignes $[\![1..k]\!]$ et les colonnes précédentes, sauf la colonne d'indice $i+1$. Alors les formules de Cramer donnent l'égalité $\sum_{i=1}^{k} x\mu_i C_i + x\mu C_{k+1} = 0$. Comme $x\mu \neq 0$, ceci donne un vecteur non nul dans le noyau de M.
Commentaire. En mathématiques classiques, si $\mathcal{D}_n(M)$ n'est pas fidèle, comme $\mathcal{D}_0(M) = \langle 1 \rangle$ est fidèle, il existe un $k < n$ tel que $\mathcal{D}_k(M)$ est fidèle et $\mathcal{D}_{k+1}(M)$ n'est pas fidèle. Toujours en mathématiques classiques, si $\mathcal{D}_{k+1}(M)$ n'est pas fidèle, il existe un $x \neq 0$ tel que $x\mathcal{D}_{k+1}(M) = 0$. Pour que ces choses deviennent explicites, il faut par exemple disposer d'un test pour la fidélité des idéaux de type fini, en un sens assez fort. ∎

Exercice 12. *(Théorème de McCoy contraposé, version digeste)*
Puisque les idéaux déterminantiels sont des idéaux de type fini, et l'anneau est cohérent, leurs annulateurs sont également des idéaux de type fini. Et l'on peut tester la nullité d'un idéal de type fini parce que l'anneau est discret. Les hypothèses de l'exercice 11 sont donc satisfaites.
NB : l'alternative « *1* ou *2* » est exclusive car l'anneau est non nul, ceci justifie le « ou bien, …, ou bien » de l'énoncé.

Exercice 13. *a.* Comme indiqué dans le corollaire III-2.3, c'est une conséquence facile du lemme de Dedekind-Mertens III-2.1.
En fait nous utilisons la variante « pour les modules » du lemme de Dedekind-Mertens : *Pour* $f \in \mathbf{A}[T]$ *et* $g \in E[T]$ *avec* $m \geqslant \deg g$ *on a*

$$\mathrm{c}(f)^{m+1}\mathrm{c}(g) = \mathrm{c}(f)^m\mathrm{c}(fg).$$

Ici le contenu $\mathrm{c}(g)$ du polynôme $g \in E[T]$ est le sous-$\mathbf{A}$-module de E engendré par les coefficients de g. La variante pour les modules est une conséquence du lemme lui-même. En effet ce lemme peut être vu comme une famille d'identités algébriques reliant les coefficients de f et de g. Ces identités algébriques sont toutes linéaires par rapport aux coefficients de g. Or toute identité algébrique linéaire par rapport à certaines des indéterminées peut être évaluée en spécialisant les indéterminées dans un anneau arbitraire $\mathbf{A}$, sauf certaines des indéterminées « linéaires » qui peuvent être spécialisées en des éléments d'un $\mathbf{A}$-module arbitraire E.

b. On a $f \in \mathbf{A}[T]$ et $g \in E[T]$. On suppose $fg = 0$ et on veut montrer $g = 0$. On fait une récurrence sur le degré formel m de g. Pour $m = 0$ le résultat est clair. Passons de $m-1$ à m. Appelons f_i les coefficients de f et g_j ceux de g. On va montrer que $f_i g$ est nul pour chaque i. Cela implique alors que tous les $f_i g_j$ sont nuls, et puisque $\mathrm{Ann}_E(\mathrm{c}(f)) = 0$ que tous les g_j sont nuls. Pour montrer que $f_i g$ est nul on fait une récurrence descendante sur i, qui s'initialise avec $i = n+1$ sans problème (n est le degré formel de f). Supposons donc avoir montré que $f_i g = 0$ pour tous les $i > i_0$ et montrons le pour i_0. On a

$$fg = \left(\sum_{i \leqslant i_0} f_i X^i\right) g$$

Le coefficient de degré $m + i_0$ de ce polynôme est égal à $g_m f_{i_0}$ et donc $g_m f_{i_0} = 0$. Donc le polynôme $\tilde{g} = f_{i_0} g$ est de degré $\leqslant m-1$ et, évidemment, $f\tilde{g} = f_{i_0} fg = 0$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence avec $\tilde{g}$, on conclut $f_{i_0} g = 0$, et on a gagné.

Exercice 14. *1* et *2a.* Voir la solution des points *2* et *3a* de l'exercice III-29.
2b. Dans le point *2a*, le degré formel de f_1 est le même que celui de f. Sur un corps discret $\mathbf{K}$, un polynôme f_1 non nul de degré $\leqslant n$ vérifie $1 \in \langle f_1, f_1' \rangle$ si, et seulement si, $1 \in M$, où M est le sous-$\mathbf{K}$-espace vectoriel [9]

$$M = \sum_{k \in [\![0..n-2]\!]} X^k f_1 \mathbf{K} \; + \sum_{\ell \in [\![0..n-1]\!]} X^\ell f_1' \mathbf{K} \; \subseteq \; \{\, g \in \mathbf{K}[x] \mid \deg(g) \leqslant 2n-1 \,\} \simeq \mathbf{K}^{2n}.$$

Si maintenant $\mathbf{k}$ est un anneau local résiduellement discret, on peut considérer le sous-$\mathbf{k}$-module $M \subseteq \{\, g \in \mathbf{k}[x] \mid \deg(g) \leqslant 2n-1 \,\} \simeq \mathbf{k}^{2n}$ analogue, ainsi que le sous-$\mathbf{k}$-module $N = \mathbf{k} + M$. On montre que $N = M$, donc que $1 \in \langle f_1, f_1' \rangle$, en appliquant le lemme de Nakayama. Le sous-module M de N est égal à N parce qu'il lui est résiduellement égal : résiduellement, on est ramené à la situation d'un corps discret, car le polynôme f_1 reste primitif, donc est résiduellement non nul. Si en outre $n! \in \mathbf{k}^\times$, on veut montrer que f divise f_1^n. On procède de la même manière. Dans le cas d'un corps discret $\mathbf{K}$, avec f et f_1 non nuls de degrés $\leqslant n$, f divise f_1^n si, et seulement si, $f_1^n \in P$, où

$$P = \sum_{k \in [\![0..n^2-n]\!]} X^k f \mathbf{K} \; \subseteq \; \left\{\, g \in \mathbf{K}[x] \;\middle|\; \deg(g) \leqslant n^2 \,\right\}.$$

Pour le cas d'un anneau local résiduellement discret, on termine de la même manière avec le lemme de Nakayama.
2c. Puisqu'il s'agit de démontrer des égalités $E = F$, où $E \subseteq F$, pour des $\mathbf{k}$-modules E et F, la machinerie locale-globale de base s'applique : il suffit de démontrer une telle égalité après localisation en des monoïdes comaximaux. Ces monoïdes comaximaux sont fournis par la relecture de la démonstration donnée dans le cas d'un anneau local résiduellement discret.
3. Merci à la lectrice qui nous indiquera une solution plus élémentaire de l'exercice.

Problème 1. *1.* Il n'y a pas de miracle : un certificat pour $ab \in \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c_1, \ldots, c_n)$ peut être obtenu à partir d'un certificat d'unimodularité de $(at+b, c_1 t, \ldots, c_n t)$ dans $\mathbf{A}[t, t^{-1}]$.
En remplaçant $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(c_1, \ldots, c_n)$, on se ramène à $\mathbf{A}$ réduit et $c_i = 0$.

9. En fait, si $1 \in \left\langle f_1, f_1' \right\rangle$, alors l'inclusion est une égalité.

L'hypothèse est alors $at+b$ inversible dans $\mathbf{A}[t,t^{-1}]$, et le résultat à montrer est $ab=0$ (résultat symétrique en a,b tout comme l'hypothèse).
On a $(at+b)g(t)=t^e$ pour un $g\in\mathbf{A}[t]$ et un $e\in\mathbb{N}$, donc le polynôme $at+b$ est primitif. Pour montrer $ab=0$, il suffit de localiser en a puis en b. Sur le localisé en a, on prend $t=-b/a$ dans $(at+b)g(t)=t^e$, on obtient $(-b/a)^e=0$. Ainsi, on a $b=0$, puis $ab=0$. Par symétrie, on obtient dans $\mathbf{A}_b$, $a=0$ donc $ab=0$.
En fait, si $ua+vb=1$, l'anneau $\mathbf{A}_1$ est cassé en deux par l'idempotent ua. Dans la première composante, $at+b=a$ avec a inversible, dans la seconde, $at+b=b$ avec b inversible.
2. En mathématiques classiques : si l'on passe au quotient par un idéal premier le résultat est clair. Par continuité, le spectre est partitionné en un nombre fini d'ouverts correspondant au système fondamental d'idempotents orthogonaux convoité.
Une démonstration constructive est donnée dans [195, Yengui]. Le lecteur pourra aussi s'inspirer de la démonstration du point *1.*
Une méthode que l'on peut utiliser de manière systématique consiste à faire appel au Nullstellensatz formel (théorème III-9.9).
Dans le cas présent, on note que le problème revient à démontrer que les p_kp_ℓ sont nuls pour $k\neq\ell$ et que les p_{m+r} sont nuls pour $r>0$. Une fois ceci constaté, puisque les p_k sont comaximaux, on obtient un système fondamental d'idempotents orthogonaux $(e_0,\dots,e_m)$ tel que $e_kp=e_kp_kt^k$ pour tout k, ce qui permet de conclure.
La philosophie est la suivante : si l'on prend tous les coefficients du problème comme des indéterminées sur $\mathbb{Z}$, l'hypothèse revient à passer au quotient par le radical $\mathfrak{a}$ d'un idéal de type fini, qui représente les hypothèses. Le but est alors de démontrer que les conclusions sont également dans $\mathfrak{a}$. Pour cela il suffit de vérifier que c'est bien le cas lorsque l'on évalue le problème dans un corps fini arbitraire. Ici les indéterminées sont $p_0,\dots,p_n,q_0,\dots,q_n$.
Pour $p=\sum_{k=0}^n p_kt^k$ et $q=\sum_{k=0}^n q_kt^k$; on définit le polynôme

$$\sum r_jt^j \stackrel{\text{def}}{=} pq-t^m$$

(avec les $r_j\in\mathbb{Z}[p_0,\dots,p_n,q_0,\dots,q_n]$) et l'idéal $\mathfrak{a}$ est $\mathrm{D}(r_0,\dots,r_{2n})$. On va montrer que les p_kp_ℓ et $q_kq_\ell\in\mathfrak{a}$ si $k\neq\ell$, que les $p_kq_\ell\in\mathfrak{a}$ pour $k+\ell\neq m$ et que les p_{m+r} et $q_{m+r}\in\mathfrak{a}$ pour $r>0$.
Or cela résulte directement du point *2* dans le Nullstellensatz formel (ou alors du point *4* dans le corollaire III-9.10).
En termes géométriques : si $n\geqslant m$, la variété des zéros de $pq-t^m$ sur un corps $\mathbf{K}$ est un espace formé de $m+1$ copies de $\mathbf{K}^\times$ isolées les unes des autres ; sur un anneau réduit la réponse est fondamentalement la même, mais les composantes isolées dans le cas des corps font ici apparaître un système fondamental d'idempotents orthogonaux.
Ainsi, le Nullstellensatz formel (théorème III-9.9) fournit une méthode constructive pour décrypter les algorithmes cachés dans certains raisonnements des mathématiques classiques, lorsque l'argument consiste à aller voir ce qui se passe dans tous les $\mathrm{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$ pour tous les idéaux premiers de $\mathbf{A}$.

Commentaires bibliographiques

La méthode dynamique telle qu'elle est expliquée dans la machinerie locale-globale à idéaux premiers (section 5) consiste pour l'essentiel à mettre à plat les calculs qui sont impliqués par la *méthode de l'évaluation dynamique* donnée dans [125, Lombardi], héritière de la méthode dynamique mise en œuvre dans [52, Coste&al.] pour des preuves du type Nullstellensatz, elle-même héritière de l'évaluation dynamique à la D5 en calcul formel [56, Duval&al.]. Par rapport à ce qui est proposé dans [52, 125], la différence dans le chapitre présent est surtout que nous avons évité la référence à la logique formelle.

En mathématiques classiques, on trouve le principe de recollement concret des modules projectifs de type fini (point *4* du principe local-global 2.2) par exemple dans [Knight, proposition 2.3.5 et lemme 3.2.3] (avec une démonstration presque entièrement constructive) et dans [Kunz, règle 1.14 du chapitre IV].

Le traitement constructif du lemme de Suslin 6.1 est dû à Ihsen Yengui [198], qui donne la clé de la machinerie locale-globale à idéaux maximaux.

La machinerie locale-globale à idéaux premiers minimaux est due à Thierry Coquand [36, On seminormality].

Les exercices 7 et 8 sont dus à Lionel Ducos [67].

La méthode dynamique a été appliquée pour le calcul de « bases de Gröbner dynamiques » par Yengui dans [196].

Chapitre XVI

Modules projectifs étendus

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre nous établissons de manière constructive quelques résultats importants concernant les situations où les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sont étendus depuis l'anneau de base.
Nous traitons notamment le théorème de Traverso-Swan (section 2), le recollement à la Vaserstein-Quillen (section 3), les théorèmes de Horrocks (section 4), le théorème de Quillen-Suslin (section 5), et dans la section 6, le théorème de Bass 6.2 et le théorème de Lequain-Simis 6.16.

1. Modules étendus

Étant donnée une algèbre $\mathbf{A} \xrightarrow{\rho} \mathbf{B}$, l'extension des scalaires de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{B}$ transforme un module M sur $\mathbf{A}$ en un module $\rho_\star(M) \simeq \mathbf{B} \otimes_{\mathbf{A}} M$ sur $\mathbf{B}$. Rappelons qu'un $\mathbf{B}$-module isomorphe à un tel module $\rho_\star(M)$ est dit étendu depuis $\mathbf{A}$. On dit aussi qu'il provient du $\mathbf{A}$-module M par extension des scalaires.
Dans le cas d'un module de présentation finie, du point de vue des matrices de présentation, cela correspond à considérer la matrice transformée par l'homomorphisme ρ.
Une condition nécessaire pour qu'un module de présentation finie soit étendu est que ses idéaux de Fitting soient de la forme $\rho(\mathfrak{a}_i)\mathbf{B}$ pour des idéaux de type fini $\mathfrak{a}_i$ de $\mathbf{A}$. Cette condition est réalisée pour les modules projectifs de type fini si, et seulement si, les idempotents de $\mathbf{B}$ sont tous images d'idempotents de $\mathbf{A}$.

Le problème de l'extension

Pour les modules projectifs de type fini, le problème suivant se pose naturellement au vu du morphisme $\mathsf{GK}_0\,\rho : \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} \to \mathsf{GK}_0\,\mathbf{B}$.

Problème n°1. Tout module projectif de type fini sur $\mathbf{B}$ provient-il d'un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}$? Ou encore : $\mathsf{GK}_0\,\rho$ est il surjectif ?

Rappelons que $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}} = \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}$ et $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{B}_{\mathrm{red}} = \mathsf{GK}_0\,\mathbf{B}$, de sorte que le problème de l'extension des modules projectifs de type fini peut être restreint au cas des anneaux réduits. Par ailleurs, si $\mathsf{H}_0\,\rho : \mathsf{H}_0\,\mathbf{A} \to \mathsf{H}_0\,\mathbf{B}$ n'est pas surjectif, la réponse au problème n°1 est négative « pour une mauvaise raison » et le problème suivant est alors plus naturel.

Problème n°2. Tout module projectif de rang constant sur $\mathbf{B}$ provient-il d'un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}$?

Pour les modules de présentation finie la généralisation naturelle du problème précédent est alors la suivante.

Problème n°3. Tout module de présentation finie sur $\mathbf{B}$ dont les idéaux de Fitting sont extensions d'idéaux de type fini de $\mathbf{A}$ provient-il d'un module de présentation finie sur $\mathbf{A}$?

Cas des anneaux de polynômes

Soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r] = \mathbf{A}[\underline{X}]$. Si $(\underline{a}) \in \mathbf{A}^r$ nous noterons $\mathrm{ev}_{\underline{a}}$ l'homomorphisme d'évaluation en $\underline{a}$:

$$\mathrm{ev}_{\underline{a}} : \mathbf{B} \to \mathbf{A},\ p \mapsto p(\underline{a}).$$

Les deux homomorphismes $\mathbf{A} \xrightarrow{j} \mathbf{B} \xrightarrow{\mathrm{ev}_{\underline{a}}} \mathbf{A}$ se composent selon l'identité. La plupart de ce qui suit dans ce paragraphe pourrait être écrit dans le cadre plus général d'une $\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}$ qui possède un caractère (cf. proposition IV-2.7). Pour les anneaux de polynômes on obtient les résultats suivants (avec une notation intuitive évidente pour $M(\underline{X})$).

1.1. Fait. *Avec* $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\underline{X}]$.

1. *Un* $\mathbf{B}$*-module* $M = M(\underline{X})$ *est étendu si, et seulement si, il est isomorphe à* $M(\underline{0})$.
2. *En particulier, si* M *est de présentation finie avec une matrice de présentation* $G(\underline{X}) \in \mathbf{B}^{q\times m}$*, vu le lemme IV-1.1,* M *est étendu depuis* $\mathbf{A}$ *si, et seulement si, les matrices* $H(\underline{X})$ *et* $H(\underline{0})$*, où* H *est dessinée ci-dessous, sont équivalentes sur l'anneau* $\mathbf{B}$

$$H(\underline{X}) = \begin{array}{|c|c|c|c|l} \multicolumn{1}{c}{m} & \multicolumn{1}{c}{q} & \multicolumn{1}{c}{q} & \multicolumn{1}{c}{m} & \\ \hline G(\underline{X}) & 0 & 0 & 0 & q \\ \hline 0 & \mathrm{I}_q & 0 & 0 & q \\ \hline \end{array}$$

Remarque. D'après le lemme IV-1.1 lorsque les matrices $H(\underline{X})$ et $H(\underline{0})$ sont équivalentes, elles sont élémentairement équivalentes. ∎

Concernant les modules projectifs de type fini on obtient des homomorphismes de semi-anneaux qui se composent selon l'identité :

$$\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} \xrightarrow{\mathsf{GK}_0\, j} \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}[\underline{X}] \xrightarrow{\mathsf{GK}_0\,\mathrm{ev}_{\underline{a}}} \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}.$$

En conséquence $\mathsf{GK}_0\, j$ est injectif, et la phrase « tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[\underline{X}]$ est étendu depuis $\mathbf{A}$ » signifie que $\mathsf{GK}_0\, j$ est un isomorphisme, ce que l'on écrit sous forme abrégée « $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} = \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}[\underline{X}]$ ».
De même pour les anneaux de Grothendieck :

$$\mathsf{K}_0\,\mathbf{A} \xrightarrow{\mathsf{K}_0\, j} \mathsf{K}_0\,\mathbf{A}[\underline{X}] \xrightarrow{\mathsf{K}_0\,\mathrm{ev}_{\underline{a}}} \mathsf{K}_0\,\mathbf{A}, \quad \text{avec} \quad \mathsf{K}_0(\mathrm{ev}_{\underline{a}}) \circ \mathsf{K}_0(j) = \mathrm{Id}_{\mathsf{K}_0\,\mathbf{A}}.$$

On a par ailleurs les résultats élémentaires suivants, dans lesquels chaque égalité a la signification qu'un morphisme naturel est un isomorphisme.

1.2. Fait. *Avec* $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\underline{X}]$.

1. $\mathrm{D}_{\mathbf{B}}(0) = \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)\mathbf{B}$ *(un polynôme est nilpotent si, et seulement si, tous ses coefficients le sont). En particulier,* $\mathbf{B}_{\mathrm{red}} = \mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}]$.
2. *Si* $\mathbf{A}$ *est réduit,* $\mathbf{B}^\times = \mathbf{A}^\times$. *Plus généralement,* $\mathbf{B}^\times = \mathbf{A}^\times + \mathrm{D}_{\mathbf{A}}(0)\,\langle \underline{X} \rangle$.
3. $\mathbb{B}(\mathbf{A}) = \mathbb{B}(\mathbf{A}[\underline{X}])$ *et* $\mathsf{H}_0\,\mathbf{A} = \mathsf{H}_0\,\mathbf{A}[\underline{X}]$.
4. $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} = \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$.
5. $\mathsf{GK}_0\,\mathbf{A} = \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}[\underline{X}] \iff \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}} = \mathsf{GK}_0\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}]$.
6. $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{B} \iff \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}]$.

D *1* et *2*. Voir le lemme II-2.6.
3. On doit montrer que tout polynôme idempotent est constant. Cela se fait (en une variable) par récurrence sur le degré formel du polynôme.
4. C'est le théorème X-5.10.
5 et *6*. Résultent des points *1* et *4*. □

2. Théorème de Traverso-Swan, anneaux seminormaux

Cette section est consacrée à l'étude des anneaux $\mathbf{A}$ pour lesquels l'homomorphisme naturel de $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ vers $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ est un isomorphisme (i.e., les modules projectifs de rang constant 1 sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ sont tous étendus depuis $\mathbf{A}$). La réponse est donnée par le théorème de Traverso-Swan-Coquand ([187, 185, 36]) :

Théorème (Traverso-Swan-Coquand)
Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. *L'anneau* $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}$ *est seminormal (définition 2.5)*
2. *L'homomorphisme naturel* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \xrightarrow{\mathsf{Pic}\,j} \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[X]$ *est un isomorphisme.*
3. $\forall r \geqslant 1$, *l'homomorphisme naturel* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ *est un isomorphisme.*
4. $\exists r \geqslant 1$, *l'homomorphisme naturel* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ *est un isomorphisme.*

On montrera *1* ⇒ *3* et *2* ⇒ *1*. Comme corollaire, $\mathbf{A}$ est seminormal si, et seulement si, $\mathbf{A}[X]$ est seminormal.

Préliminaires

Rappelons tout d'abord le résultat suivant (voir la proposition V-2.11).

2.1. Lemme. *Une matrice de projection de rang* 1, P, *a son image libre si, et seulement si, il existe un vecteur colonne* C *et un vecteur ligne* L *tels que* $LC = 1$ *et* $CL = P$. *En outre,* C *et* L *sont uniques, au produit par une unité près, sous la seule condition que* $CL = P$.

Par ailleurs rappelons que le morphisme naturel $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$ est un isomorphisme si, et seulement si, le morphisme naturel $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}]$ est un isomorphisme (fait 1.2 *6.*).
Les deux homomorphismes de groupe

$$\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \xrightarrow{\mathsf{Pic}\,j} \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}] \xrightarrow{\mathsf{Pic}\,\mathrm{ev}_0} \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$$

se composent selon l'identité. Le premier est injectif, le second surjectif. Ce sont des isomorphismes si, et seulement si, le premier est surjectif, si, et seulement si, le second est injectif.
Cette dernière propriété signifie : toute matrice carrée $P(\underline{X})$ idempotente de rang 1 sur $\mathbf{A}[\underline{X}]$ qui vérifie « $\mathrm{Im}\big(P(\underline{0})\big)$ est libre », vérifie elle-même « $\mathrm{Im}\big(P(\underline{X})\big)$ est libre ».
En fait, si $\mathrm{Im}\big(P(\underline{0})\big)$ est libre, la matrice $\mathrm{Diag}(P(\underline{0}), 0_1)$ est semblable à une matrice de projection standard $\mathrm{I}_{1,n} = \mathrm{Diag}(1, 0_{n-1,n-1})$ (lemme d'élargissement V-2.10). D'où le lemme suivant.

2.2. Lemme. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *L'homomorphisme naturel* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$ *est un isomorphisme,*
2. *Pour toute matrice* $M(\underline{X}) = (m_{i,j}) \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A}[\underline{X}])$ *telle que* $M(\underline{0}) = \mathrm{I}_{1,n}$, *il existe* $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ *tels que* $m_{i,j} = f_i g_j$ *pour tous* i, j.

Notez que l'hypothèse $M(\underline{0}) = \mathrm{I}_{1,n}$ implique $\mathrm{rg}(M) = 1$ parce que l'homomorphisme $\mathsf{H}_0(\mathbf{A}[\underline{X}]) \to \mathsf{H}_0(\mathbf{A})$ est un isomorphisme.

Convention. Nous abrégerons la phrase « le morphisme naturel de $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}$ vers $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$ est un isomorphisme » en écrivant : « $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$ ».

2.3. Lemme. *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *des anneaux réduits et* $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ *dans* $\mathbf{B}[\underline{X}]$ *qui vérifient les propriétés suivantes :*

$$(*) \qquad \begin{cases} f_1(\underline{0}) = g_1(\underline{0}) = 1, f_i(\underline{0}) = g_i(\underline{0}) = 0 \ \ (i = 2, \ldots, n), \\ m_{ij} \overset{\text{def}}{=} f_i g_j \in \mathbf{A}[\underline{X}] \ \ (i, j = 1, \ldots, n), \\ \sum_i f_i g_i = 1. \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, la matrice $M := (m_{ij})$ *est une matrice de projection de rang* 1, $M(\underline{0}) = \mathrm{I}_{1,n}$, *et les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. *Le module* $\mathrm{Im}\, M$ *est libre sur* $\mathbf{A}[\underline{X}]$, *i.e., étendu depuis* $\mathbf{A}$.
2. *Les* f_i *et les* g_i *sont dans* $\mathbf{A}[\underline{X}]$.
3. *Le polynôme* f_1 *est dans* $\mathbf{A}[\underline{X}]$.

D *3 ⇒ 2.* Les g_j s'obtiennent à partir de f_1 et des m_{1j} en faisant des divisions par puissances croissantes, car le coefficient constant de f_1 est égal à 1. De même, on obtient ensuite les f_i à partir de g_1 et des m_{i1}. L'implication réciproque est triviale.
2 ⇔ 1. D'après le lemme 2.1, le problème est de trouver des f_i et g_j convenables à partir de la matrice (m_{ij}). Or ces f_i et g_j existent dans $\mathbf{B}[\underline{X}]$, et la condition $f_1(\underline{0}) = 1$ force leur unicité parce que les anneaux sont réduits (donc les inversibles dans l'anneau des polynômes sont des constantes). □

Les lemmes 2.2 et 2.3 impliquent le résultat suivant.

2.4. Corollaire. *Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ deux anneaux réduits avec $\mathsf{Pic}\,\mathbf{B} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{B}[\underline{X}]$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$.
2. *Si des polynômes $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ dans $\mathbf{B}[\underline{X}]$ vérifient les conditions $(*)$ du lemme 2.3, alors les f_i et les g_i sont dans $\mathbf{A}[\underline{X}]$.*
3. *Si des polynômes $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n$ dans $\mathbf{B}[\underline{X}]$ vérifient les conditions $(*)$, alors $f_1 \in \mathbf{A}[\underline{X}]$.*

Anneaux seminormaux

Un anneau intègre $\mathbf{A}$ est dit *seminormal* si, chaque fois que $b^2 = c^3 \neq 0$, l'élément $a = b/c$ de $\mathrm{Frac}(\mathbf{A})$ est en fait dans $\mathbf{A}$. Dans ce cas, $a^3 = b$ et $a^2 = c$.

2.5. Définition. Un anneau quelconque $\mathbf{A}$ est dit *seminormal* si chaque fois que $b^2 = c^3$, il existe $a \in \mathbf{A}$ tel que $a^3 = b$ et $a^2 = c$.

2.6. Fait. *1. Un anneau seminormal est réduit.*
2. Dans un anneau réduit, $x^2 = y^2$ et $x^3 = y^3$ impliquent $x = y$.
D *1.* Si $b^2 = 0$, alors $b^2 = 0^3$, d'où $a \in \mathbf{A}$ avec $a^3 = b$ et $a^2 = 0$, donc $b = 0$.
2. Dans tout anneau, $(x-y)^3 = 4(x^3 - y^3) + 3(y^2 - x^2)(x + y)$. □

En conséquence l'élément a dans la définition 2.5 est toujours unique. En outre, $\mathrm{Ann}(b) = \mathrm{Ann}(c) = \mathrm{Ann}(a)$.

2.7. Fait. *Tout anneau normal est seminormal.*
D Un anneau est normal lorsque tout idéal principal est intégralement clos. Un tel anneau est réduit et localement sans diviseur de zéro : si $uv = 0$, il existe s tel que $su = (1-s)v = 0$ (lemme XII-2.3). Soient b et c tels que $b^3 = c^2$, alors c est entier sur l'idéal $\langle b \rangle$, d'où un x tel que $c = xb$, d'où $b^3 = c^2 = x^2b^2$ et $b^2(x^2 - b) = 0$. Donc il existe s tel que $s(x^2 - b) = 0$ et $b^2(1-s) = 0$. Ceci donne $b(1-s) = 0$, puis $(sx)^2 = s^2b = sb = b$. En posant $a = sx$, il vient $a^2 = b$, $a^3 = bsx = bx = c$. □

La condition est nécessaire : l'exemple de Schanuel

2.8. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est réduit et* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[X]$*, alors* $\mathbf{A}$ *est seminormal.*

▷ Soient $b, c \in \mathbf{A}$ avec $b^2 = c^3$. Soit $\mathbf{B} = \mathbf{A}[a] = \mathbf{A} + a\mathbf{A}$ un anneau réduit contenant $\mathbf{A}$, avec $a^3 = b$, $a^2 = c$.
Considérons les polynômes f_i et g_j $(i, j = 1, 2)$ définis comme suit :

$$f_1 = 1 + aX,\ f_2 = g_2 = cX^2 \text{ et } g_1 = (1 - aX)(1 + cX^2).$$

On a $f_1 g_1 + f_2 g_2 = 1$, $f_1(0) = g_1(0) = 1$, $f_2(0) = g_2(0) = 0$. Et chaque produit $m_{ij} = f_i g_j$ est dans $\mathbf{A}[X]$. On applique le lemme 2.3 : l'image de la matrice (m_{ij}) est libre si, et seulement si, $f_1 \in \mathbf{A}[X]$, i.e. $a \in \mathbf{A}$. □

NB. Pour $\mathbf{B}$ on peut prendre $\big(\mathbf{A}[T]/\langle T^2 - c, T^3 - b\rangle\big)_{\mathrm{red}}$. Si un élément a convenable est déjà présent dans $\mathbf{A}$, on obtient par unicité $\mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Cas des anneaux intègres

Nous traitons d'abord les anneaux à pgcd, puis les anneaux normaux et enfin les anneaux seminormaux.

Cas d'un anneau à pgcd

Rappelons qu'un anneau (intègre) à pgcd est un anneau dans lequel deux éléments arbitraires admettent un plus grand commun diviseur, c'est-à-dire une borne supérieure pour la relation de divisibilité. Rappelons aussi que si $\mathbf{A}$ est un anneau à pgcd, il en va de même pour l'anneau des polynômes $\mathbf{A}[\underline{X}]$.

2.9. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau intègre à pgcd, alors* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \{1\}$.

▷ On utilise la caractérisation donnée dans le lemme 2.1.
Soit $P = (m_{ij})$ une matrice idempotente de rang 1. Puisque $\sum_i m_{ii} = 1$, on peut supposer que $m_{1,1}$ est régulier. Soit f le pgcd des éléments de la première ligne. On écrit $m_{1j} = f g_j$ avec le pgcd des g_j égal à 1. L'égalité $m_{1,1} m_{ij} = m_{1j} m_{i1}$ donne, en simplifiant par f, $g_1 m_{ij} = m_{i1} g_j$. Ainsi, g_1 divise tous les $m_{i1} g_j$, donc aussi leur pgcd m_{i1}. On écrit $m_{i1} = g_1 f_i$. Puisque $g_1 f_1 = m_{1,1} = f g_1$, cela donne $f_1 = f$. Enfin, $m_{1,1} m_{ij} = m_{1j} m_{i1}$ donne l'égalité $f_1 g_1 m_{ij} = f_1 g_j g_1 f_i$, puis $m_{ij} = f_i g_j$. □

On a alors le corollaire suivant.

2.10. Proposition. *Si* $\mathbf{A}$ *est un corps discret ou un anneau zéro-dimensionnel réduit, alors* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}] = \{1\}$.

▷ Le lemme 2.9 donne le résultat pour les corps discrets. Il suffit ensuite d'appliquer la machinerie locale-globale élémentaire n°2 page 226. □

Cas d'un anneau intègre normal

2.11. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est intègre normal, alors* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$.

▷ On utilise la caractérisation donnée au corollaire 2.4 *3*, avec ici $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$, le corps des fractions de $\mathbf{A}$. Soient f_i et g_j, $(i, j \in [\![1..n]\!])$ les polynômes

convenables de $\mathbf{K}[\underline{X}]$. Alors, puisque $f_1 g_1 = m_{1,1} \in \mathbf{A}[\underline{X}]$ et $g_1(\underline{0}) = 1$, vu le théorème de Kronecker III-3.3, les coefficients de f_1 sont entiers sur l'anneau engendré par les coefficients de $m_{1,1}$. Ainsi $f_1 \in \mathbf{A}[X]$. □

Remarque. De même que pour la proposition 2.10, on peut étendre le résultat du lemme 2.11 au cas d'un anneau réduit $\mathbf{A}$ intégralement fermé dans un anneau zéro-dimensionnel réduit $\mathbf{K} \supseteq \mathbf{A}$. ∎

Cas d'un anneau intègre seminormal

2.12. Proposition. *Si* $\mathbf{A}$ *est intègre et seminormal, alors* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$.

Début de la démonstration. Comme dans la démonstration du lemme 2.11, on a au départ des polynômes $f_1(\underline{X}), \ldots, f_n(\underline{X}), g_1(\underline{X}), \ldots, g_n(\underline{X})$ dans $\mathbf{K}[\underline{X}]$ qui vérifient les conditions $(*)$ du lemme 2.3. On appelle $\mathbf{B}$ le sous-anneau de $\mathbf{K}$ engendré par $\mathbf{A}$ et par les coefficients des f_i et des g_j, ou encore, cela revient au même, engendré par $\mathbf{A}$ et par les coefficients de f_1. Alors, vu le théorème de Kronecker, $\mathbf{B}$ est une extension finie de $\mathbf{A}$. Notre but est de montrer que $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. On note $\mathfrak{a}$ le conducteur de $\mathbf{A}$ dans $\mathbf{B}$, c'est-à-dire l'ensemble $\{\, x \in \mathbf{B} \mid x\mathbf{B} \subseteq \mathbf{A} \,\}$. C'est à la fois un idéal de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Notre but est maintenant de montrer $\mathfrak{a} = \langle 1 \rangle$, c'est-à-dire encore que $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est trivial. □

Nous commençons par deux lemmes.

2.13. Lemme. *Si* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{A}$ *seminormal et* $\mathbf{B}$ *réduit, alors le conducteur* $\mathfrak{a}$ *de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$ *est un idéal radical de* $\mathbf{B}$.

▷ On doit montrer que si $u \in \mathbf{B}$ et $u^2 \in \mathfrak{a}$, alors $u \in \mathfrak{a}$. Soit donc $c \in \mathbf{B}$, on doit montrer que $uc \in \mathbf{A}$. On sait que u^2c^2 et $u^3c^3 = u^2(uc^3)$ sont dans $\mathbf{A}$ puisque $u^2 \in \mathfrak{a}$. Puisque $(u^3c^3)^2 = (u^2c^2)^3$, on a un $a \in \mathbf{A}$ tel que $a^2 = (uc)^2$ et $a^3 = (uc)^3$. Comme $\mathbf{B}$ est réduit, on obtient $a = uc$, et donc $uc \in \mathbf{A}$. □

Remarque. La *clôture seminormale* d'un anneau $\mathbf{A}$ dans un anneau réduit $\mathbf{B} \supseteq \mathbf{A}$ est obtenue en partant de $\mathbf{A}$ et en rajoutant les éléments x de $\mathbf{B}$ tels que x^2 et x^3 sont dans l'anneau préalablement construit. Notez que par le fait 2.6, x est uniquement déterminé par la donnée de x^2 et x^3. La preuve du lemme précédent peut alors être interprétée comme une démonstration de la variante suivante. ∎

2.14. Lemme. *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ *réduit,* $\mathbf{A}_1$ *la clôture seminormale de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$, *et* $\mathfrak{a}$ *le conducteur de* $\mathbf{A}_1$ *dans* $\mathbf{B}$. *Alors,* $\mathfrak{a}$ *est un idéal radical de* $\mathbf{B}$.

2.15. Lemme. *Soient* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $\mathbf{B} = \mathbf{A}[c_1, \ldots, c_q]$ *réduit fini sur* $\mathbf{A}$ *et* $\mathfrak{a}$ *le conducteur de* $\mathbf{A}$ *dans* $\mathbf{B}$. *On suppose que* $\mathfrak{a}$ *est un idéal radical, alors il est égal à* $\{\, x \in \mathbf{A} \mid xc_1, \ldots, xc_q \in \mathbf{A} \,\}$.

▷ En effet, si $xc_i \in \mathbf{A}$, alors $x^\ell c_i^\ell \in \mathbf{A}$ pour tout ℓ, et donc pour un N assez grand $x^N y \in \mathbf{A}$ pour tout $y \in \mathbf{B}$, donc x est dans le nilradical de $\mathfrak{a}$ (si d

majore les degrés des équations de dépendance intégrale des c_i sur $\mathbf{A}$, on pourra prendre $N = (d-1)q$). □

Fin de la démonstration de la proposition 2.12.
Nous la donnons d'abord en mathématiques classiques. Le raisonnement classique naturel procéderait par l'absurde : l'anneau $\mathbf{C}$ est trivial parce que sinon, il posséderait un idéal premier minimal et la localisation en cet idéal premier minimal mènerait à une contradiction.
Pour éviter le caractère non constructif du raisonnement par l'absurde, nous allons localiser en un filtre maximal, en rappelant notre définition « sans négation » selon laquelle un filtre est maximal si, et seulement si, l'anneau localisé est un anneau local zéro-dimensionnel. Autrement dit nous tolérons pour les filtres maximaux d'un anneau, non seulement les complémentaires des idéaux premiers minimaux mais aussi le filtre engendré par 0 qui donne par localisation l'anneau trivial. En mathématiques classiques un anneau est alors trivial si, et seulement si, son seul filtre maximal est l'anneau tout entier (autrement dit, le filtre engendré par 0).
Insistons sur le fait que c'est seulement dans l'affirmation précédente que se situe le caractère « classique » du raisonnement. Car la preuve de ce qui suit est parfaitement constructive : si S est un filtre maximal de $\mathbf{C}$, alors $0 \in S$ (donc $S = \mathbf{C}$).
On considère l'inclusion $\mathbf{C} = \mathbf{A}/\mathfrak{a} \subseteq \mathbf{B}/\mathfrak{a} = \mathbf{C}'$. Soit S un filtre maximal de $\mathbf{C}$, et S_1 le filtre maximal correspondant de $\mathbf{A}$ (l'image réciproque de S par la projection canonique). Puisque S est un filtre maximal, et puisque $\mathbf{C}$ est réduit, $S^{-1}\mathbf{C} = \mathbf{L}$ est un anneau local zéro-dimensionnel réduit, c'est-à-dire un corps discret, contenu dans l'anneau réduit $S^{-1}\mathbf{C}' = \mathbf{L}'$.
Si x est un objet défini sur $\mathbf{B}$, notons $\overline{x}$ ce qu'il devient après le changement de base $\mathbf{B} \to \mathbf{L}'$. Puisque $\mathbf{L}$ est un corps discret, $\mathbf{L}[\underline{X}]$ est un anneau intègre à pgcd, et les $\overline{f_i}$ et $\overline{g_j}$ sont dans $\mathbf{L}[\underline{X}]$. Cela signifie qu'il existe $s \in S_1$ tel que $sf_1 \in \mathbf{A}[X]$. D'après le lemme 2.15, ceci implique que $s \in \mathfrak{a}$. Ainsi $\overline{s} = 0$ et $\overline{s} \in S$. □

La démonstration donnée ci-dessus pour la proposition 2.12 est finalement assez simple. Elle n'est cependant pas totalement constructive et elle semble ne traiter que le cas intègre.

Démonstration constructive de la proposition 2.12.
Nous reprenons la démonstration donnée en mathématiques classiques en considérant que le filtre maximal S de $\mathbf{C}$ est un objet purement générique qui nous guide dans la preuve constructive.
Imaginons que l'anneau $\mathbf{C}$ soit un corps discret, c'est-à-dire que l'on ait déjà fait la localisation en un filtre maximal.
Alors, des polynômes F_i et G_j de $\mathbf{C}[\underline{X}]$ vérifiant $F_iG_j = \overline{m_{ij}}$ et $F_1(\underline{0}) = 1$ sont calculés à partir des $\overline{m_{ij}}$ selon un algorithme que l'on déduit des preuves constructives données auparavant pour le cas des corps discrets

(lemme 2.9). L'unicité de la solution force alors l'égalité $F_1 = \overline{f_1}$, ce qui montre que $\overline{f_1} \in \mathbf{C}[\underline{X}]$, et donc que $\mathbf{C}$ est trivial.
Cet algorithme utilise la disjonction « a est nul ou a est inversible », pour les éléments $a \in \mathbf{C}$ qui sont produits par l'algorithme à partir des coefficients des polynômes $\overline{m_{i,j}}$. Comme $\mathbf{C}$ est seulement un anneau réduit, sans test d'égalité à 0 ni test d'inversibilité, l'algorithme pour les corps discrets, si on l'exécute avec $\mathbf{C}$, doit être remplacé par un arbre dans lequel on ouvre deux branches chaque fois qu'une question « a est-il nul ou inversible ? » est posée par l'algorithme.
Nous voici en face d'un arbre, gigantesque, mais fini. Disons que systématiquement on a mis la branche « a inversible » à gauche, et la branche « $a = 0$ » à droite. Regardons ce qui se passe dans la branche d'extrême gauche.
On a inversé successivement $a_1, \ldots, a_p$ et l'on a obtenu un s qui montre que l'anneau $\mathbf{C}[1/(a_1 \cdots a_p)]$ est trivial.
Conclusion : dans l'anneau $\mathbf{C}$, *on a l'égalité* $a_1 \cdots a_p = 0$.
Remontons d'un cran.
Dans l'anneau $\mathbf{C}[1/(a_1 \cdots a_{p-1})]$, nous savons que $a_p = 0$.
La branche de gauche n'aurait pas dû être ouverte. Regardons le calcul dans la branche $a_p = 0$.
Suivons à partir de là la branche d'extrême gauche.
On a inversé $a_1, \ldots, a_{p-1}$, puis, disons $b_1, \ldots, b_k$ (éventuellement, $k = 0$). Nous obtenons un s qui montre que l'anneau $\mathbf{C}[1/(a_1 \cdots a_{p-1} b_1 \cdots b_k)]$ est trivial.
Conclusion : dans l'anneau $\mathbf{C}$, *on a l'égalité* $a_1 \cdots a_{p-1} b_1 \cdots b_k = 0$.
Remontons d'un cran : nous savons que $b_k = 0$ (ou, si $k = 0$, $a_{p-1} = 0$) dans l'anneau qui était là juste avant le dernier branchement : à savoir l'anneau $\mathbf{C}[1/(a_1 \cdots a_{p-1} b_1 \cdots b_{k-1})]$ (ou, si $k = 0$, $\mathbf{C}[1/(a_1 \cdots a_{p-2})]$). La branche de gauche n'aurait pas dû être ouverte. Regardons le calcul dans la branche $b_k = 0$ (ou, si $k = 0$, la branche $a_{p-1} = 0$)...
Et ainsi de suite. Quand on poursuit le processus jusqu'au bout, on se retrouve à la racine de l'arbre avec l'anneau $\mathbf{C} = \mathbf{C}[1/1]$ qui est trivial. □

En utilisant le lemme 2.14 à la place du lemme 2.13 on obtiendra le résultat suivant, plus précis que la proposition 2.12.

2.16. Proposition. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau intègre et* P *un module projectif de rang* 1 *sur* $\mathbf{A}[\underline{X}]$ *tel que* $P(\underline{0})$ *est libre, il existe* $c_1, \ldots, c_m$ *dans le corps des fractions de* $\mathbf{A}$ *tels que :*

1. c_i^2 *et* c_i^3 *sont dans* $\mathbf{A}[(c_j)_{j<i}]$ *pour* $i = 1, \ldots, m$,
2. P *est libre sur* $\mathbf{A}[(c_j)_{j \leqslant m}][X]$.

Remarque. En fait, seul intervient le corps de fractions du sous-anneau engendré par les coefficients présents dans une matrice de projection dont l'image est isomorphe à P. ∎

Cas général

2.17. Proposition. (Coquand) *Soit* $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{K}$ *avec* $\mathbf{K}$ *réduit.*

1. *Étant donnés* f *et* $g \in \mathbf{K}[\underline{X}]^n$ *qui vérifient les conditions* $(*)$ *du lemme 2.3, on peut construire* $c_1, \ldots, c_m$ *dans* $\mathbf{K}$ *tels que :*
   - c_i^2 *et* c_i^3 *sont dans* $\mathbf{A}[(c_j)_{j<i}]$ *pour* $i \in [\![1..m]\!]$,
   - f *et* g *ont leurs coordonnées dans* $\mathbf{A}[(c_k)_{k\in[\![1..m]\!]}][\underline{X}]$
2. *Si* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{K} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{K}[\underline{X}]$ *et si* P *est un module projectif de rang* 1 *sur* $\mathbf{A}[\underline{X}]$, *il existe* $c_1, \ldots, c_m$ *dans* $\mathbf{K}$ *tels que :*
   - c_i^2 *et* c_i^3 *sont dans* $\mathbf{A}[(c_j)_{j<i}]$ *pour* $i \in [\![1..m]\!]$,
   - $P \simeq P(\underline{0})$ *sur* $\mathbf{A}[(c_k)_{k\in[\![1..m]\!]}][\underline{X}]$.

D La démonstration de la proposition 2.12, ou de sa variante plus précise 2.16, est en fait une démonstration du point *1* ci-dessus. Le point *2* s'en déduit facilement. □

2.18. Théorème. (Traverso-Swan-Coquand)
Si $\mathbf{A}$ *est un anneau seminormal, alors* $\mathsf{Pic}\,\mathbf{A} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{A}[\underline{X}]$.

D On le déduit de la proposition précédente en utilisant le fait qu'il existe un suranneau $\mathbf{K}$ de $\mathbf{A}$ tel que $\mathsf{Pic}\,\mathbf{K} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{K}[\underline{X}]$. En effet, tout anneau réduit est contenu dans un anneau zéro-dimensionnel réduit (théorème XI-4.25 ou XIII-7.8) $\mathbf{K}$, lequel vérifie $\mathsf{Pic}\,\mathbf{K} = \mathsf{Pic}\,\mathbf{K}[\underline{X}] = \{1\}$ (proposition 2.10).□

Un calcul direct menant au résultat

Comme souvent lorsque l'on essaie d'implémenter sur machine un théorème constructif qui a une preuve élégante, on est amené à trouver certains raccourcis dans les calculs qui donnent en définitive une solution plus simple. Mais cette solution cache en partie, sinon le mécanisme profond de la preuve initiale, du moins la démarche de la pensée qui a élaboré la preuve. Voir par exemple comment l'exercice X-3 trivialise la preuve du théorème de structure locale des modules projectifs de type fini.

C'est ce qui s'est produit avec la proposition 2.17 qui a finalement été réalisée par un algorithme de nature assez élémentaire dans [7, Barhoumi&Lombardi], basé sur la théorie de l'idéal résultant (cf. section IV-10) et des modules sous-résultants.

3. Recollement à la Quillen-Vaserstein

Nous exposons dans cette section ce qu'en anglais on appelle le Quillen patching. C'est un résultat profond qui pourrait sembler a priori un peu trop abstrait (utilisation abusive d'idéaux maximaux) mais qui s'avère plein de bon sens constructif.

Les démonstrations que nous donnons sont (pour l'essentiel) recopiées de [Kunz]. Nous avons remplacé la localisation en n'importe quel idéal maximal par la localisation en des monoïdes comaximaux.

3.1. Lemme. *Soit S un monoïde de l'anneau $\mathbf{A}$ et $P \in \mathbf{A}[X]$ un polynôme tel que $P =_{\mathbf{A}_S[X]} 0$ et $P(0) = 0$. Alors, il existe $s \in S$ tel que $P(sX) = 0$.*

D La démonstration est laissée à la lectrice. □

Voici une légère variante.

3.2. Fait. *Soit S un monoïde de l'anneau $\mathbf{A}$ et $P \in \mathbf{A}_S[X]$ un polynôme tel que $P(0) = 0$. Alors, il existe $s \in S$ et $Q \in \mathbf{A}[X]$ tels que $P(sX) =_{\mathbf{A}_S[X]} Q$.*

3.3. Lemme. *Soit S un monoïde de l'anneau $\mathbf{A}$. On considère trois matrices à coefficients dans $\mathbf{A}[X]$, A_1, A_2, A_3 telles que le produit $A_1\,A_2$ a le même format que A_3. Si $A_1\,A_2 =_{\mathbf{A}_S[X]} A_3$ et $A_1(0)\,A_2(0) = A_3(0)$, il existe $s \in S$ tel que $A_1(sX)\,A_2(sX) = A_3(sX)$.*

D Appliquer le lemme 3.1 aux coefficients de la matrice $A_1\,A_2 - A_3$. □

3.4. Lemme. *Soit S un monoïde de l'anneau $\mathbf{A}$ et $C(X) \in \mathbb{GL}_p(\mathbf{A}_S[X])$. Il existe $s \in S$ et $U(X,Y) \in \mathbb{GL}_p(\mathbf{A}[X,Y])$ tels que $U(X,0) = \mathrm{I}_p$, et, sur l'anneau $\mathbf{A}_S[X,Y]$, $U(X,Y) = C(X+sY)C(X)^{-1}$.*

D Posons $E(X,Y) = C(X+Y)C(X)^{-1}$. Notons $F(X,Y) = E(X,Y)^{-1}$. On a $E(X,0) = \mathrm{I}_p$, donc $E(X,Y) = \mathrm{I}_p + E_1(X)Y + \cdots + E_k(X)Y^k$. Pour un $s_1 \in S$, les ${s_1}^j E_j$ peuvent se réécrire «sans dénominateur». On obtient ainsi une matrice $E'(X,Y) \in \mathbb{M}_p(\mathbf{A}[X,Y])$ telle que $E'(X,0) = \mathrm{I}_p$ et, sur $\mathbf{A}_S[X,Y]$, $E'(X,Y) = E(X,s_1Y)$. On procède de même avec F (et l'on peut choisir un s_1 commun). On a alors $E'(X,Y)F'(X,Y) = \mathrm{I}_p$ dans $\mathbb{M}_p(\mathbf{A}_S[X,Y])$ et $E'(X,0)F'(X,0) = \mathrm{I}_p$.
En appliquant le lemme 3.3 dans lequel on remplace X par Y et $\mathbf{A}$ par $\mathbf{A}[X]$, on obtient un $s_2 \in S$ tel que $E'(X,s_2Y)F'(X,s_2Y) = \mathrm{I}_p$.
D'où le résultat souhaité avec $U = E'(X,s_2Y)$ et $s = s_1s_2$. □

3.5. Lemme. *Soit S un monoïde de $\mathbf{A}$ et $G \in \mathbf{A}[X]^{q\times m}$. Si $G(X)$ et $G(0)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}_S[X]$, il existe $s \in S$ tel que $G(X+sY)$ et $G(X)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}[X,Y]$.*

D Écrivons $G = C\,G(0)\,D$ avec $C \in \mathbb{GL}_q(\mathbf{A}_S[X])$ et $D \in \mathbb{GL}_m(\mathbf{A}_S[X])$. On a donc

$$\begin{aligned} G(X+Y) &= C(X+Y)G(0)D(X+Y) \\ &= C(X+Y)C(X)^{-1}G(X)D(X)^{-1}D(X+Y). \end{aligned}$$

En appliquant le lemme 3.4, on obtient $s_1 \in S$, $U(X,Y) \in \mathbb{GL}_q(\mathbf{A}[X,Y])$

et $V(X,Y) \in \mathbb{GL}_m(\mathbf{A}[X,Y])$, tels que

$$U(X,0) = \mathrm{I}_q \quad , \quad V(X,0) = \mathrm{I}_m \ ,$$

et sur l'anneau $\mathbf{A}_S[X,Y]$:

$$U(X,Y) = C(X+s_1Y)C(X)^{-1} \quad \text{et} \quad V(X,Y) = D(X)^{-1}D(X+s_1Y).$$

Donc

$$G(X) = U(X,0)G(X)V(X,0),$$

et sur l'anneau $\mathbf{A}_S[X,Y]$:

$$G(X+s_1Y) = U(X,Y)G(X)V(X,Y).$$

En appliquant le lemme 3.3 (comme dans le lemme 3.4), on obtient $s_2 \in S$ tels que $G(X+s_1s_2Y) = U(X,s_2Y)G(X)V(X,s_2Y)$.
D'où le résultat avec $s = s_1s_2$. □

3.6. Principe local-global concret. (Recollement de Vaserstein)
Soit G une matrice sur $\mathbf{A}[X]$ et $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$.

1. *Les matrices $G(X)$ et $G(0)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}[X]$ si, et seulement si, elles sont équivalentes sur $\mathbf{A}_{S_i}[X]$ pour chaque i.*
2. *Même résultat pour « l'équivalence à gauche» : deux matrices M et N de même format sur un anneau commutatif sont dites* équivalentes à gauche *s'il existe une matrice carrée inversible H telle que $HM = N$.*

D *1.* On vérifie que l'ensemble des $s \in \mathbf{A}$ tels que la matrice $G(X+sY)$ soit équivalente à $G(X)$ sur $\mathbf{A}[X,Y]$ forme un idéal de $\mathbf{A}$. En appliquant le lemme 3.5, cet idéal contient un élément s_i dans S_i pour chaque i, donc il contient 1, et $G(X+Y)$ est équivalente à $G(X)$. Il reste à faire $X = 0$.
2. Dans toutes les démonstrations précédentes, on peut remplacer l'équivalence par l'équivalence à gauche. □

3.7. Principe local-global concret. (Recollement de Quillen)
Soit M un module de présentation finie sur $\mathbf{A}[X]$ et $S_1, \ldots, S_n$ des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$. Alors, M est un module étendu depuis $\mathbf{A}$ si, et seulement si, chaque M_{S_i} est étendu depuis $\mathbf{A}_{S_i}$.

D C'est un corollaire du théorème précédent car l'isomorphisme entre les modules $M(X)$ et $M(0)$ s'exprime par l'équivalence de deux matrices $H(X)$ et $H(0)$ construites à partir d'une matrice de présentation G de M (voir le fait 1.1). □

Commentaire. La formulation originale de Quillen, équivalente au principe local-global 3.7 en mathématiques classiques, est la suivante : *si $M_{\mathfrak{m}}$ est étendu depuis $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}}$ après localisation en tout idéal maximal $\mathfrak{m}$, alors M est étendu depuis $\mathbf{A}$.*
Pour faire façon d'une démonstration classique basée sur le recollement de Quillen dans la formulation originale, nous devrons faire appel à la machinerie locale-globale de base expliquée dans la section XV-5. ■

Un théorème de Roitman

Ce paragraphe est consacré à la démonstration du théorème suivant, qui constitue une sorte de réciproque du théorème de recollement de Quillen.

3.8. Théorème. (Théorème de Roitman)
Soit r un entier $\geqslant 1$ et $\mathbf{A}[\underline{X}] = \mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$. Si tout $\mathbf{A}[\underline{X}]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$, alors toute localisation $\mathbf{A}_S$ de $\mathbf{A}$ vérifie la même propriété.

En une variable

3.9. Lemme. *Si tout $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$, alors toute localisation $\mathbf{A}_S$ de $\mathbf{A}$ vérifie la même propriété.*

$\mathbb{D}$ *Cas spécial : $\mathbf{A}_S$ est un anneau local résiduellement discret.*
Notons $\rho : \mathbf{A}[X] \to \mathbf{A}_S[X]$ le morphisme naturel. Soit $M \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{A}_S[X])$. Puisque $\mathbf{A}_S$ est local, $M(0)$ est semblable à un projecteur standard $\mathrm{I}_{k,n}$. Nous pouvons donc supposer sans perte de généralité que $M(0) = \mathrm{I}_{k,n}$, i.e. que $M(X) = \mathrm{I}_{k,n} + M'(X)$ avec $M'(X) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}_S[X])$ et $M'(0) = 0$.
Soit v le «produit des dénominateurs» dans les coefficients des entrées de $M'(X)$. Puisque $M'(0) = 0$, on a une matrice $N' = N'(X) \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}[X])$ telle que $M'(vX) =_{\mathbf{A}_S[X]} N'(X)^\rho$ et $N'(0) = 0$.
Avec $N(X) = \mathrm{I}_{k,n} + N'(X)$ on obtient $N(0) = \mathrm{I}_{k,n}$ et $M(vX) = N(X)^\rho$.
Puisque $M^2 =_{\mathbf{A}_S[X]} M$, on a un $s \in S$ tel que $s(N^2 - N) = 0$.
Comme $(N^2 - N)(0) = 0$, on écrit $N^2 - N = XQ(X)$.
Maintenant $sXQ(X) = 0$ implique $sQ(X) = 0$. A fortiori $sQ(sX) = 0$, donc $N(sX)^2 = N(sX)$. Mais les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{A}[X]$ sont étendus depuis $\mathbf{A}$, donc la matrice de projection $N(sX)$ a un noyau et une image isomorphes au noyau et à l'image de $N(0) = \mathrm{I}_{k,n}$. Donc $N(sX)$ est semblable à $\mathrm{I}_{k,n}$: il existe $G = G(X) \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])$ telle que

$$G^{-1}(X)N(sX)G(X) = \mathrm{I}_{k,n}.$$

En posant $H(X) = G(X)^\rho \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_S[X])$, on obtient sur $\mathbf{A}_S[X]$ l'égalité

$$H^{-1}(X)M(svX)H(X) = \mathrm{I}_{k,n}$$

et par conséquent

$$H^{-1}(X/sv)M(X)H(X/sv) =_{\mathbf{A}_S[X]} \mathrm{I}_{k,n}$$

avec $H(X/sv) \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}_S[X])$.
Cas général. Soit P un $\mathbf{A}_S[X]$-module projectif de type fini arbitraire.
Posons $\mathbf{B} = \mathbf{A}_S$. Comme d'habitude, $P(0)$ note le $\mathbf{B}$-module obtenu par extension des scalaires via le morphisme $\mathrm{ev}_0 : \mathbf{B}[X] \to \mathbf{B}$. On applique la machinerie locale-globale de base page 887 à la démonstration constructive que nous venons de donner dans le cas spécial. On obtient des

monoïdes comaximaux $V_1, \ldots, V_m$ de $\mathbf{B}$ avec $P \simeq_{\mathbf{B}_{V_i}} P(0)$. On conclut avec le recollement de Quillen : $P \simeq_{\mathbf{B}} P(0)$. □

Remarque. Pour implémenter l'algorithme correspondant à cette démonstration. En fait la seule propriété particulière que nous avons utilisée dans la démonstration du cas spécial, c'est que les $\mathbf{A}_S$-modules projectifs de type fini sont libres. Donc la mise œuvre de la machinerie locale-globale de base est ici très élémentaire. Elle consiste à construire des localisations comaximales pour lesquelles la matrice $M(0)$ devient semblable à une matrice de projection standard, et à faire tourner l'algorithme donné par la démonstration du cas spécial dans chacune de ces localisations. Naturellement, on termine avec l'algorithme correspondant à la démonstration constructive du recollement de Quillen. ∎

En plusieurs variables

Démonstration du théorème de Roitman 3.8. On raisonne par récurrence sur r. Le cas $r = 1$ est déjà traité. Passons de $r \geqslant 1$ à $r + 1$. On considère un monoïde S d'un anneau $\mathbf{A}$. Notons $(X_1, \ldots, X_r) = (\underline{X})$.
On a $\mathbf{A}_S[\underline{X}, Y] = \mathbf{A}[\underline{X}, Y]_S = (\mathbf{A}[Y]_S)[\underline{X}]$. Soit P un $\mathbf{A}_S[\underline{X}, Y]$-module projectif de type fini. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée avec l'anneau $\mathbf{A}[Y]$, P est étendu depuis $\mathbf{A}[Y]_S = \mathbf{A}_S[Y]$, i.e., $P(\underline{X}, Y)$ est isomorphe à $P(\underline{0}, Y)$ comme $\mathbf{A}_S[\underline{X}, Y]$-module. Et d'après le cas $r = 1$ appliqué avec l'anneau $\mathbf{A}$, $P(\underline{0}, Y)$ est étendu depuis $\mathbf{A}_S$. □

Une question longtemps ouverte résolue par la négative

Il s'agit de la question suivante.
Si tout $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$, est-il toujours vrai que pour n'importe quel r tout $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$?
Une réponse négative est donnée dans [51, Cortiñas&al., (2011)].

Un principe local-global à la Roitman

3.10. Principe local-global concret. *Soient n et $r > 0$. On considère la propriété suivante pour un anneau $\mathbf{A}$. $\mathsf{P}_{n,r}(\mathbf{A})$: tout module projectif de rang constant r sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ est étendu depuis $\mathbf{A}$.*
Soient $S_1, \ldots, S_k$ des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$. Alors $\mathbf{A}$ satisfait la propriété $\mathsf{P}_{n,r}$ si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ la satisfait.
En particulier $\mathbf{A}$ est seminormal si, et seulement si, chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ est seminormal.

D La condition est nécessaire d'après le théorème de Roitman 3.8, dont la démonstration reste valable si l'on se limite aux modules projectifs de rang constant r.
La condition est suffisante d'après le recollement de Quillen 3.7. □

4. Le théorème de Horrocks

Le lemme suivant est un cas particulier de la proposition V-9.1 *4*.

4.1. Lemme. *Soit S un monoïde de $\mathbf{A}$ et P, Q des $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini tels que $P_S \simeq Q_S$. Alors, il existe $s \in S$ tel que $P_s \simeq Q_s$.*

4.2. Notation. On note $\mathbf{A}\langle X\rangle$ l'anneau $S^{-1}\mathbf{A}[X]$, où S est le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[X]$.

4.3. Théorème. (Théorème de Horrocks local)
Soit $\mathbf{A}$ un anneau local résiduellement discret et P un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X]$. Si P_S est libre sur $\mathbf{A}\langle X\rangle$, alors P est libre sur $\mathbf{A}[X]$ (donc étendu depuis $\mathbf{A}$).

Nous reprenons la preuve de [142, Nashier & Nichols] qui est presque constructive, telle qu'exposée dans [Lam06] ou [Ischebeck & Rao].
Nous avons besoin de quelques résultats préliminaires.

4.4. Lemme. *Soit $\mathbf{A}$ un anneau, $\mathfrak{m} = \operatorname{Rad}\mathbf{A}$ et $S \subseteq \mathbf{A}[X]$ le monoïde des polynômes unitaires. Les monoïdes S et $1+\mathfrak{m}[X]$ sont comaximaux.*

▷ Soit $f(X) \in S$ et $g(X) \in 1+\mathfrak{m}[X]$. Le résultant $\operatorname{Res}_X(f,g)$ appartient à l'idéal $\langle f, g\rangle$ de $\mathbf{A}[X]$. Puisque f est unitaire, le résultant subit avec succès la spécialisation $\mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathfrak{m}$. Donc $\operatorname{Res}_X(f,g) \equiv \operatorname{Res}_X(f,1) = 1 \bmod \mathfrak{m}$. □

4.5. Lemme. *Soit $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$, $s \in \operatorname{Reg}(\mathbf{B})$, et P, Q deux $\mathbf{B}$-modules projectifs de type fini avec $sQ \subseteq P \subseteq Q$. Si $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}/\langle s\rangle$ sont des $\mathbf{A}$-modules projectifs (non nécessairement de type fini), alors il en va de même pour le $\mathbf{A}$-module Q/P.*

▷ Puisque s est régulier et que Q et P sont des sous-modules d'un module libre, la multiplication par s (notée μ_s) est injective dans P et dans Q. On a les suites exactes de $\mathbf{A}$-modules suivantes.

$$\begin{aligned} 0 \to \quad Q \quad &\xrightarrow{\mu_s} \quad P \quad \longrightarrow P/sQ \to 0 \\ 0 \to sQ/sP &\longrightarrow P/sP \longrightarrow P/sQ \to 0 \end{aligned}$$

Le $\mathbf{A}$-module P est projectif par transitivité, le $\mathbf{B}/s\mathbf{B}$-module P/sP est projectif, donc par transitivité P/sP est un $\mathbf{A}$-module projectif. On peut alors appliquer le lemme de Schanuel (lemme V-2.7) : $(P/sP)\oplus Q \simeq (sQ/sP)\oplus P$ comme $\mathbf{A}$-modules. Puisque Q est un $\mathbf{A}$-module projectif, il en va de même pour sQ/sP. Mais puisque μ_s est injective, sQ/sP est isomorphe à P/Q.□

4.6. Lemme. (Murthy & Pedrini, [141])
Soient $\mathbf{A}$ un anneau, $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]$, S le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[X]$, P, Q deux modules projectifs de type fini sur $\mathbf{B}$, et $f \in S$.

1. *Si $fQ \subseteq P \subseteq Q$, alors P et Q sont stablement isomorphes.*

2. Si $P_S \simeq Q_S$, alors P et Q sont stablement isomorphes.

3. Si en plus P et Q sont de rang 1, alors $P \simeq Q$.

1. Puisque f est unitaire, l'$\mathbf{A}$-algèbre $\mathbf{B}/\langle f\rangle$ est un $\mathbf{A}$-module libre de rang $\deg f$. Le $\mathbf{B}/\langle f\rangle$-module Q/fQ est projectif de type fini sur $\mathbf{A}$. D'après le lemme précédent, le $\mathbf{A}$-module $M = Q/P$ est projectif. Et il est de type fini sur $\mathbf{B}/\langle f\rangle$, donc sur $\mathbf{A}$. Donc $M[X]$ est un $\mathbf{B}$-module projectif de type fini. Nous avons deux suites exactes (μ_X est la multiplication par X)

$$\begin{aligned} 0 \to \quad P \quad &\longrightarrow \quad Q \quad \longrightarrow M \to 0, \\ 0 \to M[X] &\xrightarrow{\mu_X} M[X] \longrightarrow M \to 0. \end{aligned}$$

D'après le lemme de Schanuel (lemme V-2.7) on a $P \oplus M[X] \simeq Q \oplus M[X]$ comme $\mathbf{B}$-modules. Puisque $M[X]$ est projectif de type fini sur $\mathbf{B}$, P et Q sont stablement isomorphes.

2. On sait que $P_f \simeq Q_f$ pour un $f \in S$.

Par hypothèse, on a $F \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{B})$ et $G \in \mathbb{GA}_n(\mathbf{B})$ avec $P \simeq \operatorname{Im} F$, et $Q \simeq \operatorname{Im} G$. Nous savons que $F' = \operatorname{Diag}(F, 0_m)$ et $G' = \operatorname{Diag}(G, 0_n)$ sont conjuguées sur $\mathbf{B}_f$ (lemme d'élargissement V-2.10). Ceci signifie qu'il existe une matrice $H \in \mathbb{M}_{m+n}(\mathbf{B})$ telle que $HF' = G'H$ et $\det(H) = \delta$ divise une puissance de f. On a alors $P_1 = \operatorname{Im}(HF') \subseteq \operatorname{Im} G'$. Puis, en postmultipliant par $\widetilde{H}$, $(HF')\widetilde{H} = \delta G'$, ce qui implique $\delta \operatorname{Im} G' \subseteq \operatorname{Im}(HF')$. Puisque H est injective, on a $P_1 \simeq P$, et par ailleurs $\operatorname{Im} G' = Q_1 \simeq Q$. On peut conclure d'après le point *1* puisque $\delta Q_1 \subseteq P_1 \subseteq Q_1$.

3. Les modules P et Q sont de rang 1 et stablement isomorphes, donc isomorphes (fait X-5.6). □

Démonstration du théorème 4.3.

Notations : $\mathfrak{m} = \operatorname{Rad} \mathbf{A}$, $\mathbf{k} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$ (corps discret), $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]$, $n = \operatorname{rg}(P)$ ($n \in \mathbb{N}$ car $\mathbf{B}$ est connexe), $U = 1 + \mathfrak{m}[X]$, et $\overline{E}$ l'objet E réduit modulo $\mathfrak{m}$.

1. On montre par récurrence sur n que l'on a un isomorphisme $P \simeq P_1 \oplus \mathbf{B}^{n-1}$. Pour $n = 1$ c'est trivial.

Petit lemme (voir la démonstration plus loin)

Il existe z, y_2, …, y_n, z_2, …, z_n dans P tels que $(z, y_2, \dots, y_n)$ est une base de P_S sur $\mathbf{B}_S$ et $(\overline{z}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n})$ est une base de $\overline{P}$ sur $\overline{\mathbf{B}} = \mathbf{k}[X]$.

Le $\mathbf{B}_U$-module P_U est libre de base $(z, z_2, \dots, z_n)$: en effet, $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Rad} \mathbf{B}_U$, et modulo $\mathfrak{m}$, $(\overline{z}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n})$ engendre $\overline{P} = \overline{P_U}$, donc $(z, z_2, \dots, z_n)$ engendre P_U par le lemme de Nakayama. Enfin un module projectif de type fini de rang n engendré par n éléments est libre.

On pose $P' = P/\mathbf{B}z$. Les deux modules P'_U et P'_S sont libres. Les monoïdes U et S sont comaximaux (lemme 4.4), donc P' est projectif de type fini sur $\mathbf{B}$, d'où $P \simeq P' \oplus \mathbf{B}z$. Par hypothèse de récurrence, $P' \simeq P_1 \oplus \mathbf{B}^{n-2}$, ce qui donne $P \simeq P_1 \oplus \mathbf{B}^{n-1}$

2. L'isomorphisme $P \simeq P_1 \oplus \mathbf{B}^{n-1}$ avec P_1 de rang 1 donne par localisation que $(P_1)_S$ est stablement libre. On applique le point *3* du lemme 4.6 : on obtient que P_1 est libre. □

Démonstration du petit lemme.
Soit, dans le module P, une $\mathbf{B}_S$-base $(y_1, \dots, y_n)$ de P_S. Il existe une base $(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n})$ de $\overline{P}$, avec les z_i dans P telle que $\overline{y_1} \in \mathbf{k}[X]\,\overline{z_2}$ (en divisant $\overline{y_1}$ par le pgcd de ses coefficients, on obtient un vecteur unimodulaire, et sur un anneau de Bézout, tout vecteur unimodulaire est complétable). On cherche z sous la forme $z_1 + X^r y_1$. Il est clair que, pour n'importe quel r, $(\overline{z}, \overline{z_2}, \dots, \overline{z_n})$ est une base de $\overline{P}$. Puisque $(y_1, \dots, y_n)$ est une base de P_S sur $\mathbf{B}_S$, il existe $s \in S$ tel que $sz_1 = \sum_{i=1}^n b_i y_i$, avec les b_i dans $\mathbf{B}$.
Alors, $sz = (b_1 + sX^r)y_1 + \sum_{i=2}^n b_i y_i$, et pour r assez grand, $b_1 + sX^r$ est un polynôme unitaire : $(z, y_2, \dots, y_n)$ est une base de P_S sur $\mathbf{B}_S$. □

On donne maintenant la version globale.

4.7. Théorème. (Théorème de Horrocks global)
Soit S le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[X]$ et P un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X]$. Si P_S est étendu depuis $\mathbf{A}$, alors P est étendu depuis $\mathbf{A}$.

D Nous appliquons la machinerie locale-globale de base page 887 avec la démonstration constructive du théorème 4.3. Nous obtenons une famille finie de monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$, $(U_i)_{i\in J}$, avec chaque localisé P_{U_i} étendu depuis $\mathbf{A}_{U_i}$. On conclut avec le recollement de Quillen (principe local-global concret 3.7). □

Cet important théorème peut être complété par le résultat subtil suivant, qui ne semble pas pouvoir être étendu aux modules de présentation finie.

4.8. Théorème. (Bass)
Soient P et Q deux $\mathbf{A}$-modules projectifs de type fini. S'ils sont isomorphes après extension des scalaires à $\mathbf{A}\langle X\rangle$, ils sont isomorphes.

D Nous raisonnons avec des matrices de projection et des similitudes entre ces matrices qui correspondent à des isomorphismes entre les modules images. Implicitement donc, nous utilisons de manière systématique le lemme d'élargissement V-2.10, sans le mentionner.
On démarre avec F et G dans $\mathbb{GA}_n(\mathbf{A})$, conjuguées sur l'anneau $\mathbf{A}\langle X\rangle$. Les modules projectifs de type fini sont $P \simeq \operatorname{Im} F$ et $Q \simeq \operatorname{Im} G$. Nous avons donc une matrice $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}[X])$, avec $\det(H) \in S$ (monoïde des polynômes unitaires), et $HF = GH$.
En posant $Y = 1/X$, pour N assez grand, la matrice $Y^N H = H'$ est dans $\mathbb{M}_n(\mathbf{A}[Y])$, avec $\det(H') = Y^r\big(1 + Yg(Y)\big) = Y^r h(Y)$ où $h(0) = 1$, et évidemment $H'F = GH'$. Autrement dit, $F \sim G$ sur l'anneau $\mathbf{A}[Y]_{Yh}$.
Les éléments Y et h sont comaximaux, donc, par application du théorème

de recollement des modules (principe local-global concret XV-4.4), il existe un $\mathbf{A}[Y]$-module M tel que M_Y est isomorphe à « P étendu à $\mathbf{A}[Y]_Y$ », et M_h est isomorphe à « Q étendu à $\mathbf{A}[Y]_h$ ». Et M est projectif de type fini puisqu'il a deux localisations comaximales qui sont des modules projectifs de type fini. Ceci nous fournit une matrice de projection E à coefficients dans $\mathbf{A}[Y]$ telle que $E \sim F$ sur $\mathbf{A}[Y]_Y$ et $E \sim G$ sur $\mathbf{A}[Y]_h$. Puisque Y est un polynôme unitaire, le théorème de Horrocks nous dit que $\operatorname{Im} E$ provient par extension des scalaires d'un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini M'. En conséquence, pour tous a, $b \in \mathbf{A}$ les matrices « évaluées » $E(a)$ et $E(b)$ sont conjuguées sur $\mathbf{A}$ (leurs images sont toutes deux isomorphes à M').
Enfin $F \sim E(1)$ et $G \sim E(0)$ sur $\mathbf{A}$, donc $F \sim G$ sur $\mathbf{A}$. □

Remarque. Pour le mathématicien qui désire implémenter l'algorithme sous-jacent à la démonstration précédente, on suggérera d'utiliser des matrices de présentation (des modules projectifs de type fini considérés) plutôt que des matrices de projection (dont les images sont isomorphes à ces modules). Cela évitera en particulier d'avoir à utiliser de manière répétée une implémentation du lemme d'élargissement. ∎

Nous terminons cette section avec un corollaire du lemme 4.6. Ce théorème est à comparer avec le théorème 5.4.

4.9. Théorème. (Induction de Quillen concrète, cas stablement libre)
Soit $\mathcal{F}$ une classe d'anneaux qui satisfait les propriétés suivantes.

1. *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}\langle X\rangle \in \mathcal{F}$.*
2. *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, tout $\mathbf{A}$-module de rang constant est stablement libre.*

Alors, pour $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et $r \in \mathbb{N}$, tout $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$-module de rang constant est stablement libre.

▷ On fait une preuve par récurrence sur r, le cas $r = 0$ est clair.
Nous passons de $r-1$ à r ($r \geqslant 1$). Soit $\mathbf{A}$ un anneau dans la classe $\mathcal{F}$, et P un module projectif de rang constant sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$.
On note $\mathbf{B} = \mathbf{A}[(X_i)_{i<r}]$, $\mathbf{C} = \mathbf{A}[X_r]$, et V est le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[X_r]$. Ainsi $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r] \simeq \mathbf{B}[X_r] \simeq \mathbf{C}[(X_i)_{i<r}]$.
L'anneau $\mathbf{A}\langle X_r\rangle = V^{-1}\mathbf{C}$ est dans la classe $\mathcal{F}$.
Le $\mathbf{A}\langle X_r\rangle[(X_i)_{i<r}]$-module P_V, qui est projectif de rang constant, est stablement libre par hypothèse de récurrence.
Si S est le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{B}[X_r]$, on a $V \subseteq S$, et donc P_S est stablement libre sur l'anneau $S^{-1}\mathbf{B}[X_r]$. Par le point *2* du lemme 4.6, P est stablement libre. □

4.10. Corollaire. *Si $\mathbf{K}$ est un corps discret, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$ est stablement libre.*

▷ On applique le résultat précédent avec la classe $\mathcal{F}$ des corps discrets : si $\mathbf{K}$ est un corps discret, alors $\mathbf{K}\langle X\rangle = \mathbf{K}(X)$ est aussi un corps discret.□

5. Solution de la conjecture de Serre

Dans cette section nous exposons plusieurs solutions constructives au problème de Serre, dans lequel $\mathbf{K}$ est un corps discret.

Les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$ sont libres

À la Quillen

La solution par Quillen du problème de Serre est basée sur le théorème de Horrocks local et sur l'*induction de Quillen* suivante (voir [Lam06]).

5.1. Induction de Quillen abstraite.
Soit $\mathcal{F}$ une classe d'anneaux qui satisfait les propriétés suivantes.

(Q1) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}\langle X\rangle \in \mathcal{F}$.*

(Q2) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}_{\mathfrak{m}} \in \mathcal{F}$ pour tout idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $\mathbf{A}$.*

(Q3) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ est local, tout $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$ (i.e., libre).*

Alors, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et tout $r \geqslant 1$, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ est étendu depuis $\mathbf{A}$.

En fait, les propriétés (Q1), (Q2) et (Q3) sont d'abord utilisées par Quillen pour obtenir le cas $r = 1$, en utilisant le théorème de Horrocks local et le recollement de Quillen. La partie « preuve par récurrence » est basée sur le cas $r = 1$, sur (Q1) et sur le théorème de Horrocks (local ou global).
Dans la suite nous isolons cette preuve par récurrence, que nous qualifions d'induction de Quillen « concrète ». Nous remplaçons (Q3) par une version plus forte (q3) qui est le cas $r = 1$.
Dans un commentaire postérieur, nous expliquons comment nous pouvons, en fait, remplacer d'une certaine manière (q3) par (Q3) sans pour autant perdre le caractère constructif de la démonstration.

La preuve par récurrence proprement dite

5.2. Théorème. (Induction de Quillen concrète)
Soit $\mathcal{F}$ une classe d'anneaux qui satisfait les propriétés suivantes.

(q1) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}\langle X\rangle \in \mathcal{F}$.*

(q3) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, tout $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$.*

Alors, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et tout $r \geqslant 1$, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ est étendu depuis $\mathbf{A}$.

▷ Passons de $r \geqslant 1$ à $r + 1$. On considère un $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r, Y]$-module projectif de type fini $P = P(X_1, \ldots, X_r, Y) = P(\underline{X}, Y)$. On note

– $P(\underline{X}, 0)$ le $\mathbf{A}[\underline{X}]$-module obtenu par l'homomorphisme $Y \mapsto 0$,

– $P(\underline{0}, Y)$ le $\mathbf{A}[Y]$-module obtenu par l'homomorphisme $\underline{X} \mapsto \underline{0}$,
– $P(\underline{0}, 0)$ le $\mathbf{A}$-module obtenu par l'homomorphisme $\underline{X}, Y \mapsto \underline{0}, 0$.

On doit montrer que $P(\underline{X}, Y) \simeq P(\underline{0}, 0)$ sur $\mathbf{A}[\underline{X}, Y]$.
On appelle S le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[Y]$, qui est contenu dans le monoïde S' des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[\underline{X}][Y]$. On a alors :

1. $P(\underline{X}, Y) \simeq P(\underline{0}, Y)$ sur $\mathbf{A}\langle Y\rangle[\underline{X}] = \mathbf{A}[\underline{X}, Y]_S$ par hypothèse de récurrence puisque $\mathbf{A}\langle Y\rangle \in \mathcal{F}$,
2. a fortiori $P(\underline{X}, Y) \simeq P(\underline{0}, Y)$ sur $\mathbf{A}[\underline{X}]\langle Y\rangle = \mathbf{A}[\underline{X}, Y]_{S'}$,
3. $P(\underline{0}, Y) \simeq P(\underline{0}, 0)$ sur $\mathbf{A}[Y]$ par le cas $r = 1$,
4. $P(\underline{0}, 0) \simeq P(\underline{X}, 0)$ sur $\mathbf{A}[\underline{X}]$ par hypothèse de récurrence,
5. en combinant 2, 3 et 4, on a $P(\underline{X}, Y) \simeq P(\underline{X}, 0)$ sur $\mathbf{A}[\underline{X}]\langle Y\rangle$,
6. donc, par le théorème de Horrocks global, $P(\underline{X}, Y) \simeq P(\underline{X}, 0)$ sur l'anneau $\mathbf{A}[\underline{X}, Y]$,
7. on combine ce dernier isomorphisme avec l'isomorphisme entre $P(\underline{X}, 0)$ et $P(\underline{0}, 0)$ sur l'anneau $\mathbf{A}[\underline{X}]$ obtenu par hypothèse de récurrence. □

5.3. Corollaire. (Théorème de Quillen-Suslin, preuve de Quillen)
Si $\mathbf{K}$ *est un corps discret (resp. un anneau zéro-dimensionnel), tout module projectif de type fini sur* $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$ *est libre (resp. quasi libre).*

▷ L'induction de Quillen concrète s'applique avec la classe $\mathcal{F}$ des corps discrets : on note que $\mathbf{K}[X]$ est un anneau de Bézout intègre, donc les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{K}[X]$ sont libres, et a fortiori étendus. On passe aux anneaux zéro-dimensionnels réduits par la machinerie locale-globale élémentaire n°2. Enfin, pour les anneaux zéro-dimensionnels, on utilise l'égalité $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}) = \mathsf{GK}_0(\mathbf{A}_{\mathrm{red}})$. □

Remarques. 1) On rappelle qu'un anneau zéro-dimensionnel est connexe si, et seulement si, il est local. Si $\mathbf{K}$ est un tel anneau, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$ est libre.
2) L'induction de Quillen concrète s'applique aux anneaux de Bézout intègres de dimension de Krull $\leqslant 1$ (voir l'exercice 5) et plus généralement aux anneaux de Prüfer de dimension $\leqslant 1$ (voir le théorème 6.11). Ceci généralise le cas des domaines de Dedekind obtenu par Quillen. Pour le cas des anneaux noethériens réguliers de dimension de Krull $\leqslant 2$ (que nous ne traiterons pas dans cet ouvrage), voir [Lam06]. ■

(Q3) versus (q3)
L'induction de Quillen abstraite (qui ne fournit pas de résultat sous forme constructive) présente l'avantage d'utiliser une hypothèse (Q3) plus faible que l'hypothèse (q3) utilisée dans l'induction concrète. Nous expliquons

maintenant comment nous pouvons récupérer constructivement la mise, même pour l'hypothèse (Q3).

Le cas libre.
Dans le cas où la classe $\mathcal{F}$ est telle que les modules projectifs de type fini sont libres, on remarque que l'hypothèse (q3) est en fait inutile. En effet, soient P un $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini et S le monoïde des polynômes unitaires de $\mathbf{A}[X]$. Alors, d'après (q1) le $\mathbf{A}\langle X\rangle$-module P_S est libre, donc étendu depuis $\mathbf{A}$. Mais alors, d'après le théorème de Horrocks global, le module P est étendu depuis $\mathbf{A}$. Autrement dit nous avons démontré la version suivante, adaptée au cas libre, et particulièrement simple.

5.4. Théorème. (Induction de Quillen concrète, cas libre)
Soit $\mathcal{F}$ une classe d'anneaux qui satisfait les propriétés suivantes.

(q0) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, tout $\mathbf{A}$-module projectif de type fini est libre.*

(q1) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}\langle X\rangle \in \mathcal{F}$.*

Alors, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et tout $r \geqslant 1$, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ est libre.

Le cas général.
On aura remarqué que la propriété (Q2) n'intervient pas dans l'induction de Quillen concrète : cette hypothèse est rendue inutile par l'hypothèse (q3). La propriété (Q2) intervient cependant lorsque nous voulons remplacer (q3) par (Q3), qui est une hypothèse a priori plus faible que (q3).
Nous pensons que cet affaiblissement de l'hypothèse est toujours possible en pratique, sans pour autant perdre le caractère constructif du résultat. Mais comme ceci est basé sur la machinerie locale-globale de base (machinerie locale-globale à idéaux premiers), et comme cette dernière est une méthode de démonstration et non pas un théorème à proprement parler, nous n'avons pas pu formuler notre induction concrète directement avec (Q3), car nous voulions un théorème en bonne et due forme.
Venons en à l'explication du remplacement de l'hypothèse forte (q3) par l'hypothèse faible (Q3).
Nous reprenons l'hypothèse (Q2) sous la forme plus générale suivante.
(q2) Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et S est un monoïde de $\mathbf{A}$, alors $\mathbf{A}_S \in \mathcal{F}$.
Nous supposons que (Q3) est satisfaite sous la forme suivante : sous l'hypothèse que $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret dans la classe $\mathcal{F}$ on a une démonstration constructive du fait que tout module projectif de type fini P sur $\mathbf{A}[X]$ est étendu, ce qui se traduit par un algorithme de calcul (pour l'isomorphisme entre P et $P(0)$) basé sur les propriétés de la classe $\mathcal{F}$ et sur la disjonction

$$a \in \mathbf{A}^\times \quad \text{ou} \quad a \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A})$$

pour les éléments a qui se présentent au cours de l'algorithme. Dans ces conditions la machinerie locale-globale de base s'applique. En conséquence

pour un module projectif de type fini P sur $\mathbf{A}[X]$ pour un anneau $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ arbitraire, la démonstration donnée dans le cas local résiduellement discret, suivie pas à pas, nous fournit des monoïdes comaximaux $S_1, \ldots, S_\ell$ tels que pour chacun d'entre eux, le module P_{S_i} (sur $\mathbf{A}_{S_i}[X]$) est étendu depuis $\mathbf{A}_{S_i}$. Notez que pour que cette méthode fonctionne, la classe d'anneaux considérée doit vérifier (q2), et que l'on peut se limiter aux localisations en des monoïdes $\mathcal{S}(a_1, \ldots, a_n; b)$. Il ne reste alors qu'à appliquer le recollement de Quillen (principe local-global concret 3.7) pour obtenir le résultat souhaité : le module P est étendu depuis $\mathbf{A}$.

À la Suslin, Vaserstein ou Rao

La solution par Suslin de la conjecture de Serre consiste à montrer que tout module stablement libre sur $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$ est libre (Serre avait déjà démontré que tout module projectif de type fini sur $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$ est stablement libre), autrement dit que le noyau de toute matrice surjective est libre, ou encore que tout vecteur unimodulaire est la première colonne d'une matrice inversible (cf. fait V-4.1 et proposition V-4.6).

Si $\mathcal{G}$ est un sous-groupe de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ et $A, B \in \mathbf{A}^{n\times 1}$, nous noterons $A \overset{\mathcal{G}}{\sim} B$ pour dire qu'il existe une matrice $H \in \mathcal{G}$ telle que $HA = B$. Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Rappelons qu'un vecteur unimodulaire $f \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ est dit complétable s'il est le premier vecteur colonne d'une matrice $G \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$. Cela revient à dire que l'on a

$$f \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1\ 0\ \cdots\ 0].$$

Le but dans ce paragraphe est donc d'obtenir une démonstration constructive du théorème suivant.

5.5. Théorème. (Suslin)
Tout vecteur unimodulaire f à coordonnées dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r] = \mathbf{K}[\underline{X}]$ (où $\mathbf{K}$ est un corps discret) est complétable.

Nous donnerons trois démonstrations distinctes, par ordre chronologique.

Première démonstration

Nous suivons ici de très près la démonstration originale de Suslin. Nous devons seulement nous débarrasser d'une utilisation non constructive d'un idéal maximal générique, et nous avons déjà fait ce travail lorsque nous avons donné une démonstration constructive du lemme de Suslin XV-6.1 au chapitre XV.

5.6. Fait. *Soient $M, N \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$. On a $\mathrm{Tr}(M)\,\mathrm{I}_2 = M + \widetilde{M}$ et*

$$\det(M+N) = \det(M) + \mathrm{Tr}(\widetilde{M}\,N) + \det(N).$$

D Pour les matrices dans $\mathbb{M}_2(\mathbf{A})$, l'application $M \mapsto \widetilde{M}$ est linéaire, donc

$$\begin{aligned}\det(M+N)\,\mathrm{I}_2 \;&=\; (\widetilde{M}+\widetilde{N})(M+N) \;=\; \widetilde{M}M+(\widetilde{M}N+\widetilde{N}M)+\widetilde{N}N\\ &=\; \big(\det(M)+\mathrm{Tr}(\widetilde{M}\,N)+\det(N)\big)\,\mathrm{I}_2.\end{aligned}$$

□

5.7. Lemme. *Soit $B \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A})$, $H = H(X) \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A}[X])$, $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre et $x \in \mathbf{B}$. On pose $C(X) = B + XH$. On suppose $\det C = \det B = a$. En notant $S = \mathrm{I}_2 + x\widetilde{H}(ax)\,B$, on a alors $S \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{A})$ et $S\widetilde{B} = \widetilde{C}(ax)$.*

▷ Le fait 5.6 donne $\det(C) = \det(B) + X\,(\mathrm{Tr}(\widetilde{H}\,B) + X\det H)$, et donc

$$E(X) = \mathrm{Tr}(\widetilde{H}\,B) + X\det H = 0.$$

Posons $H_1 = H(ax)$ et $C_1 = C(ax)$.
On a alors $S\widetilde{B} = \widetilde{B} + x\widetilde{H_1}B\widetilde{B} = \widetilde{B} + ax\widetilde{H_1} = \widetilde{C_1}$ et

$$\begin{aligned}\det(S) \;&=\; 1 + x\,\mathrm{Tr}(\widetilde{H_1}B) + \det(x\widetilde{H_1}B)\\ &=\; 1 + x\,\mathrm{Tr}(\widetilde{H_1}B) + x^2a\det(H_1) = 1 + xE(ax) = 1.\end{aligned}$$

□

5.8. Lemme. (Lemme de Suslin)
Soient $u, v \in \mathbf{A}[X]$, $a \in \mathbf{A} \cap \langle u, v\rangle$, $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre et $b, b' \in \mathbf{B}$.
Si $b \equiv b' \bmod a\mathbf{B}$, alors $\begin{bmatrix} u(b)\\ v(b)\end{bmatrix} \overset{\mathbb{SL}_2(\mathbf{B})}{\sim} \begin{bmatrix} u(b')\\ v(b')\end{bmatrix}$.

▷ Soient $p, q \in \mathbf{A}[X]$ tels que $up + vq = a$ et $x \in \mathbf{B}$ tel que $b' = b + ax$.
Considérons la matrice $M = \begin{bmatrix} p & q\\ -v & u\end{bmatrix} \in \mathbb{M}_2(\mathbf{A}[X])$. On applique le lemme 5.7 avec les matrices $B = M(b)$ et $C(X) = M(b + X)$.
Notez que la première colonne de $\widetilde{B}$ est $\begin{bmatrix} u(b)\\ v(b)\end{bmatrix}$ et que la première colonne de $\widetilde{C}(ax)$ est $\begin{bmatrix} u(b')\\ v(b')\end{bmatrix}$. □

5.9. Lemme. *Soient $f \in \mathbf{A}[X]^{n\times 1}$, $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre et $\mathcal{G}$ un sous-groupe de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{B})$, alors l'ensemble*

$$\mathfrak{a} = \big\{\, a \in \mathbf{A} \;\big|\; \forall b, b' \in \mathbf{B}, \big((b \equiv b' \bmod a\mathbf{B}) \;\Rightarrow\; f(b) \overset{\mathcal{G}}{\sim} f(b')\big) \,\big\}$$

est un idéal de $\mathbf{A}$.

▷ La démonstration est laissée à la lectrice. □

5.10. Théorème. *Soient $n \geqslant 2$, f un vecteur unimodulaire de $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$ avec f_1 unitaire, $\mathbf{B}$ une $\mathbf{A}$-algèbre, et $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{GL}_n(\mathbf{B})$ le sous-groupe engendré par $\mathbb{E}_n(\mathbf{B})$ et $\mathbb{SL}_2(\mathbf{B})$([1]). Alors, pour tous $b, b' \in \mathbf{B}$, on a $f(b) \overset{\mathcal{G}}{\sim} f(b')$.*

▷ Il nous suffit de montrer que l'idéal $\mathfrak{a}$ défini au lemme 5.9 contient 1. Pour une matrice élémentaire $E = E(X) \in \mathbb{E}_{n-1}(\mathbf{A}[X])$, nous considérons

1. $\mathbb{SL}_2(\mathbf{B})$ est plongé dans $\mathbb{GL}_n(\mathbf{B})$ par l'injection $A \mapsto \mathrm{Diag}(A, \mathrm{I}_{n-2})$.

le vecteur

$$\begin{bmatrix} g_2 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Nous allons montrer que le résultant $a = \mathrm{Res}_X(f_1, g_2)$, qui est bien défini puisque f_1 est unitaire, est un élément de $\mathfrak{a}$. Nous aurons donc terminé en invoquant le lemme de Suslin XV-6.1.
Montrons donc que $a \in \mathfrak{a}$. Nous utilisons juste le fait que $a \in \langle f_1, g_2\rangle \cap \mathbf{A}$. On prend b, $b' \in \mathbf{B}$ avec $b \equiv b' \bmod a\mathbf{B}$. On veut aboutir à $f(b) \overset{\mathcal{G}}{\sim} f(b')$. Notons que pour $i \geqslant 2$ on a :

$$\begin{gathered} g_i(b') - g_i(b) \in \langle b' - b\rangle \subseteq \langle a\rangle \subseteq \langle f_1(b), g_2(b)\rangle\,, \\ \text{i.e.,} \qquad g_i(b') \in g_i(b) + \langle f_1(b), g_2(b)\rangle\,. \end{gathered} \tag{1}$$

On a alors une suite d'équivalences

$$\begin{bmatrix} f_1(b) \\ f_2(b) \\ f_3(b) \\ \vdots \\ f_n(b) \end{bmatrix} \overset{E(b)}{\sim} \begin{bmatrix} f_1(b) \\ g_2(b) \\ g_3(b) \\ \vdots \\ g_n(b) \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{B})}{\sim} \begin{bmatrix} f_1(b) \\ g_2(b) \\ g_3(b') \\ \vdots \\ g_n(b') \end{bmatrix} \overset{\mathbb{SL}_2(\mathbf{B})}{\sim} \begin{bmatrix} f_1(b') \\ g_2(b') \\ g_3(b') \\ \vdots \\ g_n(b') \end{bmatrix} \overset{E(b')^{-1}}{\sim} \begin{bmatrix} f_1(b') \\ f_2(b') \\ f_3(b') \\ \vdots \\ f_n(b') \end{bmatrix}.$$

La seconde est donnée par l'équation (1), la troisième par le lemme 5.8 appliqué à $u = f_1$ et $v = g_2$. □

5.11. Corollaire. *Soient $n \geqslant 2$, f un vecteur unimodulaire de $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$ avec f_1 unitaire et $\mathcal{G}$ le sous-groupe de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])$ engendré par $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])$ et $\mathbb{SL}_2(\mathbf{A}[X])$. Alors $f \overset{\mathcal{G}}{\sim} f(0)$.*

▷ Dans le théorème 5.10, on prend $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]$, $b = X$ et $b' = 0$. □

5.12. Corollaire. *Soient $\mathbf{K}$ un corps discret, $n \geqslant 2$, f un vecteur unimodulaire de $\mathbf{K}[\underline{X}]^{n\times 1}$, où $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_r]$, et $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{GL}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ le sous-groupe engendré par $\mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ et $\mathbb{SL}_2(\mathbf{K}[\underline{X}])$. Alors $f \overset{\mathcal{G}}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1\ 0\ \cdots\ 0]$.*

▷ Si $f_1 = 0$, on transforme facilement par des manipulations élémentaires le vecteur f en ${}^{\mathrm{t}}[1\ 0\ \cdots\ 0]$. Sinon, un changement de variables permet de transformer f_1 en un polynôme pseudo unitaire en X_r (lemme VII-1.4). Nous pouvons donc supposer f_1 unitaire en X_r, nous appliquons le corollaire 5.11 avec l'anneau $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{r-1}]$, et nous obtenons $f \overset{\mathcal{G}}{\sim} f(X_1, \ldots, X_{r-1}, 0)$. On conclut par récurrence sur r. □

On a bien obtenu le théorème 5.5, en fait avec une précision intéressante sur le groupe $\mathcal{G}$.

Deuxième démonstration

Nous suivons maintenant de près une démonstration de Vaserstein [190] telle qu'elle est exposée dans [Lam06] mais en utilisant des arguments constructifs.

De manière plus générale nous sommes intéressés par la possibilité de trouver dans la classe d'équivalence d'un vecteur défini sur $\mathbf{A}[X]$ un vecteur défini sur $\mathbf{A}$, en un sens convenable.

Nous utiliserons le lemme suivant.

5.13. Lemme. *Soit* $\mathbf{A}$ *un anneau et* $f(X) = {}^t[\, f_1(X) \ \cdots \ f_n(X)\,]$ *un vecteur unimodulaire dans* $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$*, avec* f_1 *unitaire de degré* $\geqslant 1$*.*
Alors, l'idéal $\mathfrak{a} = \mathrm{c}(f_2) + \cdots + \mathrm{c}(f_n)$ *contient* 1*.*

▷ On a : $1 = u_1 f_1$ dans $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$. Cette égalité dans l'anneau $(\mathbf{A}/\mathfrak{a})[X]$, avec f_1 unitaire de degré $\geqslant 1$ implique que $\mathbf{A}/\mathfrak{a}$ est trivial (par récurrence sur le degré formel de u_1). □

5.14. Théorème. (Petit théorème de Horrocks local)
Soit un entier $n \geqslant 3$*,* $\mathbf{A}$ *un anneau local résiduellement discret et un vecteur unimodulaire dans* $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$ *:* $f(X) = {}^t[\, f_1(X) \ \cdots \ f_n(X)\,]$*, avec* f_1 *unitaire. Alors*

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \underset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \underset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} f_1(0) \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n(0) \end{bmatrix}.$$

▷ Soit d le degré de f_1. Par manipulations élémentaires de lignes, on ramène les polynômes f_2, …, f_n à être de degrés $< d$. Notons $f_{i,j}$ le coefficient de X^j dans f_i. Le vecteur ${}^t[\, f_1(X) \ \cdots \ f_n(X)\,]$ reste unimodulaire. Si $d = 0$, c'est terminé. Sinon vu le lemme 5.13 et puisque l'anneau est local, l'un des $f_{i,j}$ pour $i \in [\![2..n]\!]$ est une unité. Supposons par exemple que $f_{2,k}$ est inversible. On va voir que l'on peut trouver deux polynômes v_1 et v_2 tels que le polynôme $g_2 = v_1 f_1 + v_2 f_2$ soit unitaire de degré $d-1$. Si $k = d-1$, cela marche avec $v_1 = 0$ et v_2 constant. Si $k < d-1$, considérons la disjonction suivante

$$f_{2,d-1} \in \mathbf{A}^\times \ \vee \ f_{2,d-1} \in \mathrm{Rad}(\mathbf{A}).$$

Dans le premier cas, on est ramené à $k = d-1$. Dans le deuxième cas le polynôme $q_2 = Xf_2 - f_{2,d-1}f_1$ est de degré $\leqslant d-1$ et vérifie : $q_{2,k+1}$ est une unité. On a gagné un cran : il suffit d'itérer le processus.

Nous avons donc maintenant $g_2 = v_1 f_1 + v_2 f_2$ de degré $d-1$ et unitaire. On peut donc diviser f_3 par g_2 et l'on obtient $g_3 = f_3 - g_2 q$ de degré $< d-1$ ($q \in \mathbf{A}$), donc le polynôme

$$h_1 = g_2 + g_3 = f_3 + g_2(1-q) = f_3 + (1-q)v_1 f_1 + (1-q)v_2 f_2$$

est unitaire de degré $d-1$. Ainsi, par une manipulation élémentaire de lignes on a pu remplacer ${}^t[\,f_1\ f_2\ f_3\,]$ par ${}^t[\,f_1\ f_2\ h_1\,]$ avec h_1 unitaire de degré $d-1$. Nous pouvons donc par une suite de manipulations élémentaires de lignes ramener ${}^t[\,f_1(X)\ \dots\ f_n(X)\,]$, avec f_1 unitaire de degré d, à
${}^t[\,h_1(X)\ \dots\ h_n(X)\,]$ avec h_1 unitaire de degré $d-1$.
On obtient le résultat souhaité par récurrence sur d. □

Terminologie. Nous considérons un système de polynômes formels (f_i) avec $\deg f_i = d_i$. On appelle alors «idéal de tête du système (f_i)» l'idéal des coefficients formellement dominants des f_i.

5.15. Théorème. (Petit théorème de Horrocks global)
Soit un entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{A}$ un anneau et $f \in \mathbf{A}[X]^{n\times 1}$ un vecteur unimodulaire. On suppose que l'idéal de tête des f_i contient 1. *Alors*

$$f(X) = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} \begin{bmatrix} f_1(0) \\ \vdots \\ f_n(0) \end{bmatrix} = f(0).$$

▷ Le cas $n=2$ est à part : si $u_1f_1+u_2f_2=1$, l'égalité
$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ -f_2 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$
donne la matrice cherchée, dans $\mathbb{SL}_2(\mathbf{A}[X])$.
Pour $n \geqslant 3$, nous appliquons la machinerie locale-globale de base page 887 avec la démonstration constructive du théorème 5.14. Nous obtenons une famille finie de monoïdes comaximaux, $(S_i)_{i\in J}$ dans $\mathbf{A}$, de telle sorte que pour chaque i on a $f(X) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{S_i}[X])}{\sim} f(0)$. On conclut avec le recollement de Vaserstein pour les équivalences de matrices à gauche (point *2* du principe local-global 3.6). □

Conclusion. On vient d'obtenir une variante (légèrement plus faible) du corollaire 5.11. Et ceci donne la démonstration du théorème de Suslin 5.5 de la même manière que dans la première solution.

Commentaire. Le petit théorème de Horrocks global peut aussi être obtenu comme conséquence du «grand» théorème de Horrocks global 4.7.
On pose $P = \operatorname{Ker} {}^tf(X)$. En localisant en f_1, P devient libre.
Le théorème de Horrocks global nous dit que P est libre, ce qui signifie que $f(X) \sim {}^t[\,1\ 0\ \cdots\ 0\,]$ sur $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])$. ■

Troisième démonstration

Nous suivons maintenant de près une démonstration de Rao. Nous n'aurons cette fois-ci pas besoin de récurrence sur le nombre de variables pour aboutir au théorème de Suslin.

5.16. Lemme. *On considère un vecteur $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ et $s \in \mathbf{A}$. Si x est unimodulaire sur $\mathbf{A}/\langle s\rangle$ et sur $\mathbf{A}[1/s]$, il est unimodulaire.*

▷ Posons $\mathfrak{a} = \langle x_1, \dots, x_n\rangle$. On a $s^r \in \mathfrak{a}$ (pour un certain r) et $1 - as \in \mathfrak{a}$ (pour un certain a). On écrit $1 = a^r s^r + (1 - as)(1 + as + \cdots) \in \mathfrak{a}$. □

5.17. Lemme. *Soient un entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{A}$ un anneau, et un vecteur unimodulaire dans $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$: $f = {}^{\mathrm{t}}[\, f_1(X) \ \cdots \ f_n(X)\,]$. Pour chaque f_i de degré formel d_i, nous notons $f_i^\star$ le* polynôme formel réciproque $X^{d_i} f_i(1/X)$. *Nous notons $f^\star(X) = {}^{\mathrm{t}}[\, f_1^\star(X), \ \cdots \ f_n^\star(X)\,]$.*
Si $f^\star(0)$ est unimodulaire, il en va de même pour $f^\star$.

▷ D'après le lemme 5.16, il suffit de vérifier que $f^\star(0)$ est unimodulaire (c'est vrai par hypothèse) et que $f^\star$ est unimodulaire sur $\mathbf{A}[X, 1/X]$, ce qui vient de l'égalité $\sum_i u_i(1/X)X^{-d_i} f_i^\star = 1$ (où $\sum_i u_i f_i = 1$ dans $\mathbf{A}[X]$). □

5.18. Théorème. (Théorème de Rao, [154])
Soit un entier $n \geqslant 2$, $\mathbf{A}$ un anneau, et $f = {}^{\mathrm{t}}[\, f_1(X) \ \cdots \ f_n(X)\,]$ un vecteur unimodulaire dans $\mathbf{A}[X]^{n\times 1}$, avec 1 dans l'idéal de tête des f_i. Alors :

$$f \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} f(0) \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} f^\star(0) \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} f^\star.$$

Si en outre l'un des f_i est unitaire, on a $f \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[\,1\ 0\ \cdots\ 0\,]$.

▷ On sait que $f \sim f(0)$ par le petit théorème de Horrocks global, on en déduit $f \sim f(1)$. En outre, $f^\star(0)$ est unimodulaire donc $f^\star$ est unimodulaire (d'après le lemme 5.17). Par ailleurs, 1 est dans l'idéal de tête des $f_i^\star$, ce qui permet d'appliquer à $f^\star$ le petit théorème de Horrocks global.
On conclut : $f \sim f(0) \sim f(1) = f^\star(1) \sim f^\star$. □

Commentaire. Le même résultat est valable en remplaçant $\mathbb{GL}_n$ par $\mathbb{E}_n$, mais la démonstration est nettement plus délicate (voir le théorème XVII-4.7). ■

Conclusion. On obtient alors le théorème de Suslin 5.5 page 937 comme suit. On prend pour $\mathbf{A}$ l'anneau $\mathbf{K}[X_1, \dots, X_{r-1}]$ et l'on fait un changement de variables qui rend l'un des polynômes pseudo unitaire.
Ainsi,

— d'une part, la solution est beaucoup plus «efficace» que dans les deux premières démonstrations puisqu'il n'y a plus maintenant de récurrence sur le nombre de variables,
— et d'autre part, le théorème est beaucoup plus général.

6. Modules projectifs étendus depuis les anneaux de valuation ou arithmétiques

Rappelons qu'un anneau de valuation est un anneau réduit dans lequel on a, pour tous a, b : a divise b ou b divise a. C'est un anneau normal, local et sans diviseur de zéro.
Nous commençons par un résultat utile concernant les anneaux de valuation et la dimension de Krull (on peut aussi consulter l'exercice XII-3).

6.1. Lemme. *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau de valuation, alors* $\mathbf{A}(X)$ *également. Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau de valuation de dimension de Krull finie, alors* $\mathbf{A}(X)$ *a même dimension de Krull.*

D Si $\mathbf{A}$ est un anneau de valuation tout $f \in \mathbf{A}[X]$ s'écrit sous forme $f = ag$ avec $a \in \mathbf{A}$ et $g \in \mathbf{A}[X]$ qui admet un coefficient égal à 1. En particulier, g est inversible dans $\mathbf{A}(X)$. Si $F_1 = a_1 g_1/u_1$ et $F_2 = a_2 g_2/u_2$ sont deux éléments arbitraires de $\mathbf{A}(X)$ (avec $a_i \in \mathbf{A}$ et g_i, u_i primitifs dans $\mathbf{A}[X]$), alors F_1 divise F_2 dans $\mathbf{A}(X)$ si, et seulement si, a_1 divise a_2 dans $\mathbf{A}$. Donc «la divisibilité est identique dans $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}(X)$» et $\mathbf{A}(X)$ est un anneau de valuation. En outre, puisque les idéaux de type fini sont principaux, l'homomorphisme canonique $\mathsf{Zar}\,\mathbf{A} \to \mathsf{Zar}\,\mathbf{A}(X)$ est un isomorphisme de treillis distributifs (NB : ce sont des ensembles totalement ordonnés), ce qui implique que la dimension de Krull est la même. □

En une variable

Ce paragraphe est consacré pour l'essentiel à la démonstration constructive du théorème de Bass suivant.

6.2. Théorème. *Si* $\mathbf{V}$ *est un anneau de valuation de dimension de Krull finie, tout* $\mathbf{V}[X]$*-module projectif de type fini est libre.*

Nous démontrerons en fait des variantes un peu plus fortes : on peut se débarrasser de l'hypothèse sur la dimension de Krull, et l'on a une version avec des anneaux arithmétiques.
Nous commençons par un exemple simple.

Un exemple simple

6.3. Proposition. *Tout module projectif de type fini sur* $\mathbb{Z}[X]$ *est libre.*

D Soit M un $\mathbb{Z}[X]$-module projectif de type fini. Notons tout d'abord que si M est de rang 1, il est libre parce que $\mathbb{Z}[X]$ est un anneau à pgcd (lemme 2.9).
Supposons maintenant que M est de rang $r > 1$. Si nous étendons les scalaires à $\mathbb{Q}[X]$, le module devient libre. Il existe donc un entier $d > 0$ tel que M devient libre sur $\mathbb{Z}[1/d][X]$. Si $d = 1$, il n'y a rien à faire. Sinon,

soient $p_1, \ldots, p_k$ les facteurs premiers de d.
Les monoïdes $d^{\mathbb{N}}$, $1+p_1\mathbb{Z}, \ldots, 1+p_k\mathbb{Z}$ sont comaximaux (exemple fondamental page 18). Il nous suffit donc de montrer que les modules $M_{1+p_i\mathbb{Z}}$ sont libres (donc étendus), car alors le théorème de recollement de Quillen implique que M est étendu depuis $\mathbb{Z}$, donc libre.
Notons p l'un quelconque des p_i. Puisque $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X]$ est 2-stable (lemme ci-après), en application du splitting off de Serre (théorème XIV-3.4), on obtient $M_{1+p\mathbb{Z}} \simeq \mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X]^{r-1} \oplus N$, avec N un $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X]$-module projectif de rang constant 1. D'après la remarque initiale (qui s'applique en remplaçant $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}$), N est libre, donc M est libre. □

6.4. Lemme. *L'anneau $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X]$ est 2-stable.*

▷ On considère la partition de $\mathsf{Spec}(\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X])$ attachée à $\{p\}$: plus précisément, l'anneau $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X]$ est remplacé par les deux anneaux

$$\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X][1/p] \simeq \mathbb{Q}[X] \text{ et } (\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X])/\langle p\rangle \simeq \mathbb{F}_p[X],$$

qui sont de dimension de Krull 1.
Le théorème XIV-4.16 nous dit alors que $\mathbb{Z}_{1+p\mathbb{Z}}[X]$ est 2-stable. □

Remarque. En fait le recours aux facteurs premiers de d, bien qu'intuitivement naturel, introduit une complication inutile. En effet, les monoïdes $d^{\mathbb{N}}$ et $1+d\mathbb{Z}$ étant comaximaux, il suffit de démontrer que $M_{1+d\mathbb{Z}}$ est libre. Comme $\mathbb{Z}_{1+d\mathbb{Z}}[X]$ est un anneau à pgcd, le raisonnement précédent s'applique si l'on sait montrer que $\mathbb{Z}_{1+d\mathbb{Z}}[X]$ est 2-stable. Or la preuve du lemme 6.4 fonctionne en remplaçant p par d, car $\mathbb{Z}_{1+d\mathbb{Z}}[X][1/d] \simeq \mathbb{Q}[X]$, et $\mathbb{Z}_{1+d\mathbb{Z}}[X]/\langle d\rangle \simeq (\mathbb{Z}/\langle d\rangle)[X]$ qui sont de dimension de Krull 1 ($\mathbb{Z}/\langle d\rangle$ est zéro-dimensionnel). ■

Un exemple plus élaboré

Au vu de la remarque précédente nous laissons au lecteur la démonstration de la généralisation qui suit.

6.5. Proposition. *Soient $\mathbf{A}$ un anneau intègre de dimension de Krull $\leqslant 1$, un élément d de $\mathrm{Reg}(\mathbf{A})$, et M un $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini.*

1. *$\mathbf{A}_{1+d\mathbf{A}}[1/d] = \mathrm{Frac}\,\mathbf{A}$ est zéro-dimensionnel.*
2. *$\mathbf{A}_{1+d\mathbf{A}}/\langle d\rangle \simeq \mathbf{A}/\langle d\rangle$ est zéro-dimensionnel.*
3. *$\mathbf{A}_{1+d\mathbf{A}}[X]$ est 2-stable.*
4. *a. Si $\mathbf{A}$ est un anneau de Bézout, M est libre.*

   b. Si $\mathbf{A}$ est seminormal, M est étendu depuis $\mathbf{A}$.

Un exemple en dimension de Krull finie > 0

Soit $\mathbf{V}$ un anneau de valuation intègre avec des éléments $a_1, \ldots, a_k$. On suppose :

$$\mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_1) < \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_2) < \cdots < \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_k).$$

La partition en constructibles de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{V}$ associée à cette famille contient seulement $k+1$ éléments :

$$\mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_1),\ \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_2) \setminus \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_1),\ \ldots,\ \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_k) \setminus \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_{k-1}),\ \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(1) \setminus \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_k),$$

qui correspondent aux anneaux

$$\mathbf{V}[1/a_1],\ (\mathbf{V}/\langle a_1\rangle)[1/a_2],\ \ldots,\ (\mathbf{V}/\langle a_{k-1}\rangle)[1/a_k] \text{ et } \mathbf{V}/\langle a_k\rangle\,.$$

Supposons maintenant que ces anneaux sont tous *zéro-dimensionnels*. Alors, on a pareillement une partition en $k+1$ constructibles de $\mathsf{Spec}\,\mathbf{V}[X]$ et les anneaux correspondants

$$\mathbf{V}[1/a_1][X],\ (\mathbf{V}/\langle a_1\rangle)[1/a_2][X],\ \ldots,\ (\mathbf{V}/\langle a_{k-1}\rangle)[1/a_k][X] \text{ et } (\mathbf{V}/\langle a_k\rangle)[X]$$

sont tous de dimension de Krull $\leqslant 1$. Le théorème XIV-4.16 nous dit alors que $\mathbf{V}[X]$ est 2-stable. Donc si M est un $\mathbf{V}[X]$-module projectif de rang constant r, par le splitting off de Serre (version Cdim), on obtient $M \simeq \mathbf{V}[X]^{r-1} \oplus N$, avec N de rang constant 1.

Si $\mathbf{V}$ est en plus un anneau seminormal (resp. un anneau à pgcd), alors N est étendu depuis $\mathbf{V}$ (resp. alors N est libre), donc M est étendu depuis $\mathbf{V}$ (resp. M est libre).

Ainsi le résultat « $\mathbf{V}[X]$ est 2-stable » est vérifié lorsque $\mathbf{V}$ est un domaine de valuation de dimension de Krull k pour lequel on a une connaissance suffisamment précise du groupe de valuation : on connaît $a_1, \ldots, a_k$ tels que $\mathrm{D}_{\mathbf{V}}(0) < \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_1) < \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_2) < \cdots < \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(a_k) < \mathrm{D}_{\mathbf{V}}(1)$.

En mathématiques classiques (avec le principe du tiers exclu mais sans utiliser les idéaux premiers ni l'axiome du choix) on obtient donc déjà le théorème de Bass souhaité pour les anneaux de valuation de dimension de Krull finie.

Cependant le résultat n'est pas de nature algorithmique si l'on ne sait pas calculer des éléments a_i convenables.

Cette difficulté va être contournée de manière dynamique.

Démonstration constructive du théorème de Bass

Le plus important est d'établir le théorème suivant.

6.6. Théorème. *Si* $\mathbf{V}$ *est un anneau de valuation,* $\mathbf{V}[X]$ *est* 2*-stable.*

On commence par le lemme suivant (la démonstration du théorème est reportée page 947).

6.7. Lemme. *Soient* $\mathbf{V}$ *un anneau de valuation et* $\mathbf{V}'$ *le sous-anneau de valuation de* $\mathbf{V}$ *engendré par une famille finie d'éléments de* $\mathbf{V}$*. Alors,* $\mathbf{V}'[X]$ *est* 2*-stable.*

D Notons $\mathbf{V}_1$ le sous-anneau de $\mathbf{V}$ engendré par la famille finie. Notons

$$\mathbf{V}' = \{\, c/b \,|\, c, b \in \mathbf{V}_1,\ b \text{ régulier divise } c \text{ dans } \mathbf{V} \,\} \subseteq \mathrm{Frac}(\mathbf{V}_1).$$

On voit facilement que $\mathbf{V}'$ est un anneau de valuation. On sait que $\mathbf{V}_1$ est de dimension de Krull finie (lemme XIII-5.3), disons $\mathsf{Kdim}(\mathbf{V}_1) \leqslant m$. Montrons que l'on a aussi $\mathsf{Kdim}(\mathbf{V}') \leqslant m$. Le théorème XIII-8.4 nous dit le contrat à remplir pour cela. On doit considérer une suite $(y_0, \ldots, y_m)$ avec

$$\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_0) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_1) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_m).$$

On peut écrire $y_k = x_k/b$ pour un même dénominateur $b \in \mathrm{Reg}(\mathbf{V}_1)$ et des $x_k \in \mathbf{V}_1$. On a maintenant

$$\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_0) \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_1) \leqslant \ldots \leqslant \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_m),$$

Introduisons une suite $(a_0, \ldots, a_m)$ complémentaire de celle des x_i dans $\mathbf{V}_1$. A fortiori elle est complémentaire dans $\mathbf{V}'$. Puisque $\mathsf{Zar}\,\mathbf{V}'$ est totalement ordonné, le lemme XIII-8.3 nous dit que $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_0) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(0)$, ou $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_m) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(1)$, ou $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_i) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(x_{i+1})$ pour un $i \in [\![0..m-1]\!]$. Et l'on en déduit la même chose pour les $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_i)$: le contrat est rempli.
Soient ℓ_1, ℓ_2 et a dans $\mathbf{V}'[X]$. Nous posons $L = (\ell_1, \ell_2)$ et $Q = (q_1, q_2)$. Nous cherchons q_1, $q_2 \in \mathbf{V}'[X]$ qui vérifient $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'[X]}(a, L) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}'[X]}(L + aQ)$.
Si $\mathbf{V}'$ était un corps discret, on disposerait d'un algorithme pour calculer Q à partir de L. En exécutant cet algorithme, nous utiliserions le test « $y = 0$ ou y inversible ? » pour des éléments $y \in \mathbf{V}_1$ qui se présentent au cours du calcul (en effet, dans le cas où $\mathbf{V}'$ est un corps discret, un y/z dans $\mathbf{V}'$ est nul si y est nul, inversible si y est inversible, z ayant été déjà certifié inversible).
Nous pouvons transformer l'algorithme de façon dynamique en remplaçant chaque test « $y = 0$ ou y inversible ? » par le scindage de « l'anneau $\mathbf{A}$ en cours », qui donne les deux anneaux $\mathbf{A}[1/y]$ et $\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(y)$.
Au départ $\mathbf{A} = \mathbf{V}'$. Comme dans $\mathbf{V}'$ les éléments sont comparables pour la divisibilité, tous les anneaux introduits peuvent être ramenés à la forme standard $\mathbf{V}'/\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_i)\,[1/y_{i-1}]$ ($i \in [\![2..k]\!]$) pour une famille finie $(y_i)_{i \in [\![1..k]\!]}$ de $\mathbf{V}_1$, avec y_{i-1} divise y_i dans $\mathbf{V}'$ pour $i \in [\![2..k]\!]$.
Ici nous pourrions avoir l'impression d'avoir gagné dans la mesure où nous pourrions dire : nous appliquons maintenant le lemme XIV-4.15.
Mais en lisant la démonstration de ce lemme, nous voyons que lors d'un scindage $\mathbf{B} \mapsto (\mathbf{B}[1/b], \mathbf{B}/\langle b \rangle)$, d'abord les données L et a produisent un Q pour $\mathbf{B}/\langle b \rangle$, puis $L + aQ$ et ab produisent un R pour $\mathbf{B}[1/b]$, le résultat final étant que $Q + bR$ convient pour L et a dans $\mathbf{B}$.
Ainsi la dynamique de notre algorithme transformé doit être mieux contrôlée [2]. Ce qui nous sauve la mise, c'est que dans notre utilisation dynamique

2. Sinon, le lemme pourrait en fait être démontré sans aucune hypothèse sur $\mathbf{V}$.

du lemme XIV-4.15, les calculs qui démarrent avec L et a restent entièrement dans $\mathbf{V}' \subseteq \mathrm{Frac}(\mathbf{V}_1)$. En conséquence, nous pouvons être certains de ne pas entrer dans une boucle infinie où le nombre d'anneaux $\mathbf{V}'/\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_i)\,[1/y_{i-1}]$ croîtrait indéfiniment, ce qui empêcherait la terminaison de l'algorithme. En effet, puisque $\mathbf{V}'$ est de dimension de Krull $\leqslant m$, on dispose d'une procédure qui, étant donnée une famille finie (y_i) comme ci-dessus, permet de raccourcir la famille des $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_i)$ à au plus m éléments grâce au lemme XIII-8.3. Considérons en effet les $m+1$ premiers termes consécutifs dans la suite des y_i, nous savons que l'une des trois situations suivantes se produit

- $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_1) = 0$, auquel cas l'anneau $\mathbf{V}'/\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_2)\,[1/y_1]$ est trivial et la liste est raccourcie en supprimant y_1,
- $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_{m+1}) = 1$, auquel cas l'anneau $\mathbf{V}'/\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_{m+1})\,[1/y_m]$ est trivial et la liste est raccourcie en supprimant y_{m+1},
- pour un $i \in [\![2, m+1]\!]$, on a l'égalité $\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_{i-1}) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_i)$, auquel cas l'anneau $\mathbf{V}'/\mathrm{D}_{\mathbf{V}'}(y_i)\,[1/y_{i-1}]$ est trivial et la liste est raccourcie en supprimant y_i. □

Remarque. Ainsi, une fois $\mathbf{V}_1$ fixé, l'anneau $\mathbf{V}'$ se comporte, pour ce qui concerne la 2-stabilité de $\mathbf{V}'[X]$ comme l'anneau de dimension de Krull «finie > 0 mais entièrement contrôlée» qui était donné dans le paragraphe précédent : la suite des y_i, limitée à m termes, se comporte comme la suite des a_i du paragraphe précédent, à ceci près que les y_i sont produits de façon dynamique par l'exécution de l'algorithme alors que les a_i étaient donnés au départ. ∎

Démonstration du théorème 6.6. Soient ℓ_1, ℓ_2 et a dans $\mathbf{V}[X]$. Nous cherchons $q_1, q_2 \in \mathbf{V}[X]$ vérifiant $\mathrm{D}_{\mathbf{V}[X]}(a, L) = \mathrm{D}_{\mathbf{V}[X]}(L + aQ)$ (avec $L = (\ell_1, \ell_2)$ et $Q = (q_1, q_2)$). On applique le lemme 6.7 avec la famille finie constituée par les coefficients de ℓ_1, ℓ_2 et a. On trouve q_1, q_2 dans $\mathbf{V}'[X] \subseteq \mathbf{V}[X]$. □

6.8. Théorème. (Bass-Simis-Vasconcelos) *Si* $\mathbf{V}$ *est un anneau de valuation, tout* $\mathbf{V}[X]$*-module projectif de type fini est libre.*

D Soit M un module projectif de type fini sur $\mathbf{V}[X]$. Puisque $\mathbf{V}[X]$ est connexe, M a un rang constant $r \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathbf{V}[X]$ est 2-stable, le splitting off de Serre nous donne que $M \simeq \mathbf{V}[X]^{r-1} \oplus N$, où N est un $\mathbf{V}[X]$-module projectif de rang constant 1. Il reste à montrer que $N \simeq \mathbf{V}[X]$.
Si $\mathbf{V}$ est intègre nous terminons comme ceci : puisque $\mathbf{V}[X]$ est un anneau à pgcd, $N \simeq \mathbf{V}[X]$. En général nous pouvons dire : $\mathbf{V}$ est normal, donc tout module projectif de rang constant 1 sur $\mathbf{V}[X]$ est étendu depuis $\mathbf{V}$. Or $\mathbf{V}$ est local, en conclusion N est libre sur $\mathbf{V}[X]$. □

Le cas des anneaux arithmétiques

6.9. Théorème. (Bass-Simis-Vasconcelos) *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique, tout* $\mathbf{A}[X]$*-module projectif de type fini est étendu depuis* $\mathbf{A}$*.*

▷ Tout d'abord, puisque $\mathsf{GK}_0(\mathbf{A}) = \mathsf{GK}_0(\mathbf{A}_{\mathrm{red}})$ et $\mathbf{A}[X]_{\mathrm{red}} = \mathbf{A}_{\mathrm{red}}[X]$, il suffit de faire la démonstration dans le cas réduit, c'est-à-dire pour les anneaux de Prüfer.

On considère un $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini M.

En mathématiques classiques on appliquerait le théorème de recollement abstrait de Quillen : un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X]$ est étendu parce qu'il est étendu si on localise en un idéal premier arbitraire de $\mathbf{A}$ (l'anneau devient un anneau de valuation).

En mathématiques constructives, on relit la preuve constructive donnée dans le cas local (pour le théorème 6.8) en appliquant la machinerie locale-globale de base.

Précisément, supposons que dans le cas local (i.e., pour un anneau de valuation) on utilise la disjonction « a divise b ou b divise a ». Puisque l'on est avec un anneau de Prüfer, on connaît u, v, s, t tels que $s + t = 1$, $sa = ub$ et $tb = va$. Si $\mathbf{B}$ est l'anneau « en cours », on considère les deux localisations comaximales $\mathbf{B}[1/s]$ et $\mathbf{B}[1/t]$. Dans la première, a divise b, et dans la seconde, b divise a.

En fin de compte on obtient une famille finie (S_i) de monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ telle qu'après localisation en l'un quelconque des S_i, le module M devient libre, donc étendu. On conclut avec le recollement de Quillen (principe local-global concret 3.7). □

Remarques. 1) On n'a pas eu besoin de supposer que l'anneau de valuation était résiduellement discret pour faire fonctionner la démonstration constructive des théorèmes 6.6, 6.8 et 6.9. Cela se traduit notamment par le fait que dans la dernière démonstration, les monoïdes comaximaux sont basés sur la disjonction (dans un anneau local) « s ou $1 - s$ est inversible » et sont directement donnés par des éléments comaximaux.

2) Dans ce type de passage du local au global, pour être certain que l'algorithme termine, il faut s'assurer que la version donnée dans le cas local est « uniforme », cela veut dire que son exécution se fait en un nombre d'étapes qui est borné par une fonction des paramètres discrets de l'entrée : la taille de la matrice et les degrés de ses coefficients. C'est bien le cas ici, modulo la preuve du lemme XIII-5.3. Notons que le fait que l'algorithme dans le cas local n'utilise pas de test d'égalité à 0 nous simplifie beaucoup la vie pour apprécier la validité de sa mise en œuvre dynamique dans le passage du local au global. ■

En plusieurs variables

Ce paragraphe est consacré à la démonstration constructive du théorème de Lequain-Simis suivant.

Théorème (Lequain-Simis) *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique, tout module projectif de type fini sur* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ *est étendu depuis* $\mathbf{A}$.

Une comparaison dynamique entre les anneaux $\mathbf{A}(X)$ et $\mathbf{A}\langle X\rangle$

Dans le théorème suivant, nous démontrons que pour un anneau $\mathbf{A}$ de dimension inférieure ou égale à d, l'anneau $\mathbf{A}\langle X\rangle$ se comporte dynamiquement comme l'anneau $\mathbf{A}(X)$ ou comme une localisation d'un anneau $\mathbf{A}_S[X]$ pour un monoïde S de $\mathbf{A}$ avec $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_S \leqslant d-1$.

6.10. Théorème. (Comparaison dynamique de $\mathbf{A}(X)$ avec $\mathbf{A}\langle X\rangle$)
Soit un anneau $\mathbf{A}$, $f = \sum_{j=0}^{m} a_j X^j \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme primitif, et, pour* $j \in [\![1..m]\!]$, $S_j = \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a_j) = a_j^{\mathbb{N}}(1 + a_j\mathbf{A})$ *(le monoïde bord de Krull de* a_j *dans* $\mathbf{A}$*).*
Alors, les monoïdes $f^{\mathbb{N}}$, S_1, …, S_m *sont comaximaux dans* $\mathbf{A}\langle X\rangle$.
En particulier, si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}$ *et* $d \geqslant 0$, *chaque anneau* $\mathbf{A}\langle X\rangle_{S_j}$ *est une localisation d'un* $\mathbf{A}_{S_j}[X]$ *avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{S_j} \leqslant d-1$.

$\mathbb{D}$ Pour x_1, …, $x_m \in \mathbf{A}$ et n, d_1, …, $d_m \in \mathbb{N}$, on doit montrer que les éléments suivants de $\mathbf{A}[X]$

$$f^n,\ a_m^{d_m}(1 - a_m x_m),\ \ldots,\ a_1^{d_1}(1 - a_1 x_1),$$

engendrent un idéal de $\mathbf{A}[X]$ qui contient un polynôme unitaire. On raisonne par récurrence sur m ; c'est évident pour $m = 0$ car $a_m = a_0$ est inversible. Pour $m \geqslant 1$ et $j \in [\![1..m-1]\!]$, posons

$$a = a_m,\ \ x = x_m,\ \ d = d_m \ \text{ et } \ a'_j = a_j^{d_j}(1 - a_j x_j).$$

Considérons le quotient $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\langle a^d(1-ax)\rangle$; il faut montrer que la famille

$$\mathcal{F} = (f^n,\ a'_{m-1},\ \ldots,\ a'_1)$$

engendre un idéal de $\mathbf{B}[X]$ qui contient un polynôme unitaire.
Puisque $a^d(1-ax) = 0$, $e = a^d x^d$ est un idempotent et $\langle e\rangle = \langle a^d\rangle$.
Notons $\mathbf{B}_e \simeq \mathbf{B}/\langle 1-e\rangle$ et $\mathbf{B}_{1-e} \simeq \mathbf{B}/\langle e\rangle$. Il suffit de montrer que $\langle\mathcal{F}\rangle_{\mathbf{B}_e[X]}$ et $\langle\mathcal{F}\rangle_{\mathbf{B}_{1-e}[X]}$ contiennent un polynôme unitaire.
Dans $\mathbf{B}_e[X]$, c'est immédiat car a est inversible. Dans $\mathbf{B}_{1-e}[X]$, on a $a^d = 0$.
Écrivons $f = aX^m + r$ avec $r = \sum_{j=0}^{m-1} a_j X^j$. Dans $\mathbf{B}$, pour tout exposant δ, les éléments de $(a^\delta, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0)$ sont comaximaux. Pour $\delta = d$, on en déduit que dans $\mathbf{B}_{1-e}[X]$, le polynôme r est primitif. Puisque $r = f - aX^m$ et $a^d = 0$, on a $r^d \in \langle f\rangle$ donc $r^{dn} \in \langle f^n\rangle$.
On applique l'hypothèse de récurrence au polynôme $r \in \mathbf{B}_{1-e}[X]$ de degré (formel) $m-1$: l'idéal $\langle r^{dn}, a'_{m-1}, \cdots, a'_1\rangle$ de $\mathbf{B}_{1-e}[X]$ contient un polynôme unitaire ; il en est donc de même de l'idéal $\langle f^n, a'_{m-1}, \cdots, a'_1\rangle$. □

Remarque. Le théorème précédent semble tombé du ciel comme par miracle. En fait il est le résultat d'une histoire un peu compliquée. Dans l'article [74] était démontré le théorème suivant, en commençant par le cas spécial d'un anneau local résiduellement discret, puis en généralisant à un anneau arbitraire au moyen de la machinerie locale-globale de base. ∎

Théorème. *Soit un anneau* $\mathbf{A}$ *tel que* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant d \in \mathbb{N}$. *Soit* $f \in \mathbf{A}[X]$ *un polynôme primitif. Il existe des monoïdes comaximaux* $V_1, \ldots, V_\ell$ *de* $\mathbf{A}\langle X\rangle$ *tels que pour chaque* $i \in [\![1..\ell]\!]$, *ou bien* f *est inversible dans* $\mathbf{A}\langle X\rangle_{V_i}$, *ou bien* $\mathbf{A}\langle X\rangle_{V_i}$ *est une localisation d'un* $\mathbf{A}_{S_i}[X]$ *avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{S_i} < d$.
En explicitant l'algorithme contenu dans la preuve de ce théorème, on a obtenu le théorème 6.10. ∎

Machinerie dynamique avec $\mathbf{A}\langle X\rangle$ et $\mathbf{A}(X)$

Le théorème précédent permet de mettre en œuvre une machinerie dynamique d'un nouveau type.
On suppose que l'on a établi un théorème pour les anneaux de valuation de dimension de Krull $\leqslant n$. On veut le même théorème pour les anneaux $\mathbf{A}\langle X\rangle$ lorsque $\mathbf{A}$ est un anneau de valuation de dimension de Krull $\leqslant n$.
On suppose aussi que la propriété à démontrer est stable par localisation et qu'elle relève d'un principe local-global concret.
On fait une preuve par récurrence sur la dimension de Krull. Lorsque la dimension de Krull est nulle, $\mathbf{A}$ est un corps discret et l'on a $\mathbf{A}\langle X\rangle = \mathbf{A}(X)$, qui est aussi un corps discret, donc le théorème s'applique.
Voyons le passage de la dimension k à la dimension $k+1$ ($k < n$). Remarquons que $\mathbf{A}(X)$ est un anneau de valuation de même dimension de Krull que $\mathbf{A}$ (lemme 6.1). Nous supposons $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k+1$. Nous avons une preuve constructive du théorème pour les anneaux de valuation de dimension de Krull $\leqslant n$, en particulier elle fonctionne pour $\mathbf{A}(X)$. Nous essayons de faire fonctionner cette démonstration (i.e., cet algorithme) avec $\mathbf{A}\langle X\rangle$ au lieu de $\mathbf{A}(X)$. Cette preuve utilise le fait que dans $\mathbf{A}(X)$ les polynômes primitifs de $\mathbf{A}[X]$ sont inversibles. Chaque fois que la preuve initiale utilise l'inverse d'un tel polynôme f, nous faisons appel au théorème 6.10, qui remplace l'anneau «en cours» par des localisations comaximales. Dans la première localisation le polynôme f a été inversé, et la preuve peut se poursuivre comme si $\mathbf{A}\langle X\rangle$ était $\mathbf{A}(X)$. Dans chacune des autres localisations on a remplacé $\mathbf{A}\langle X\rangle$ par un localisé d'un anneau $\mathbf{A}_{S_i}[X]$ avec $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{S_i} \leqslant k$, et, *si nous avons de la chance*, l'hypothèse de récurrence permet de conclure.
Au bout du compte on a prouvé le théorème pour des localisations comaximales de $\mathbf{A}\langle X\rangle$. Puisque la conclusion relève d'un principe local-global concret, on a démontré le théorème pour $\mathbf{A}\langle X\rangle$.

Application au théorème de Maroscia et Brewer&Costa

La machinerie dynamique expliquée au paragraphe précédent s'applique pour le premier des résultats suivants.

(i) *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau de valuation avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$*, alors* $\mathbf{A}\langle X\rangle$ *est un anneau de Prüfer avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}\langle X\rangle \leqslant 1$*.*
En effet, il suffit de vérifier la conclusion localement (ici, après localisation de $\mathbf{A}\langle X\rangle$ en des monoïdes comaximaux). Or le théorème 6.10 nous permet de scinder l'anneau $\mathbf{A}\langle X\rangle$ en composantes qui se comportent (pour le calcul à faire), soit comme $\mathbf{A}(X)$, soit comme un localisé d'un $\mathbf{K}[X]$ où $\mathbf{K}$ est zéro-dimensionnel réduit. Dans les deux cas on obtient un anneau de Prüfer de dimension de Krull $\leqslant 1$.

(ii) *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau de Prüfer avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$*, alors* $\mathbf{A}\langle X\rangle$ *également.*
En effet, il suffit de vérifier la conclusion localement (ici, après localisation de $\mathbf{A}$ en des monoïdes comaximaux). On applique la machinerie locale-globale des anneaux arithmétiques à la démonstration du point (i) : l'anneau $\mathbf{A}$ subit des localisations comaximales, dans chacune desquelles il se comporte comme un anneau de valuation.

Comme conséquence on obtient une version particulière du théorème de Lequain-Simis en utilisant l'induction de Quillen concrète (théorème 5.2).

6.11. Théorème. (Maroscia, Brewer&Costa)
Si $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique avec* $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$*, tout module projectif de type fini sur* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ *est étendu depuis* $\mathbf{A}$*.*

▷ Puisque $\mathbf{A}_{\mathrm{red}}[\underline{X}] = \mathbf{A}[\underline{X}]_{\mathrm{red}}$ et $\mathsf{GK}_0(\mathbf{B}) = \mathsf{GK}_0(\mathbf{B}_{\mathrm{red}})$, il suffit de traiter le cas réduit, i.e., le cas des anneaux de Prüfer.
Vérifions que la classe des anneaux de Prüfer de dimension de Krull $\leqslant 1$ satisfait les hypothèses du théorème 5.2. La première condition est le point (ii) ci-avant que nous venons de démontrer.
La deuxième condition est que les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{A}[X]$ sont étendus depuis $\mathbf{A}$. C'est le théorème de Bass-Simis-Vasconcelos. □

L'induction de Lequain-Simis

Dans le but de généraliser le théorème de Quillen-Suslin aux domaines de Prüfer, et constatant que cette classe d'anneaux n'est pas stable pour le passage de $\mathbf{A}$ à $\mathbf{A}\langle X\rangle$, Lequain et Simis [124] ont trouvé un moyen habile pour contourner la difficulté en démontrant un nouveau théorème d'induction «à la Quillen», convenablement modifié.

6.12. Induction de Lequain-Simis abstraite.
Soit $\mathcal{F}$ une classe d'anneaux qui satisfait les propriétés suivantes.

(LS1) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, tout idéal premier $\mathfrak{p}$ non maximal de $\mathbf{A}$ a une hauteur finie*[3].

(LS2) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}[X]_{\mathfrak{p}[X]} \in \mathcal{F}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$.*

(LS3) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{F}$ pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de $\mathbf{A}$.*

(LS4) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ est local, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X]$ est libre.*

Alors, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et tout $r \geqslant 1$, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ est étendu depuis $\mathbf{A}$.

Notez ici que si $\mathbf{A}$ est local avec $\operatorname{Rad}\mathbf{A} = \mathfrak{m}$, alors $\mathbf{A}(X) = \mathbf{A}[X]_{\mathfrak{m}[X]}$.
Nous proposons une « variation constructive » sur le thème de l'induction de Lequain-Simis. Il s'agit d'une application importante de notre comparaison dynamique entre $\mathbf{A}(X)$ et $\mathbf{A}\langle X\rangle$. Cette induction constructive « à la Lequain-Simis » est due à I. Yengui.

6.13. Théorème. (Induction de Yengui)
Soit $\mathcal{F}$ une classe d'anneaux commutatifs de dimension de Krull finie (non nécessairement bornée) qui satisfait les propriétés suivantes.

(ls1) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}(X) \in \mathcal{F}$.*

(ls2) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{A}_S \in \mathcal{F}$ pour tout monoïde S de $\mathbf{A}$.*

(ls3) *Si $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$, alors tout $\mathbf{A}[X]$-module projectif de type fini est étendu depuis $\mathbf{A}$.*

Alors, pour tout $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$ et tout $r \geqslant 1$, tout module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ est étendu depuis $\mathbf{A}$.

NB : (ls1) remplace (LS2), (ls2) remplace (LS3) et (ls3) remplace (LS4).

D En raison du fait 1.2 *5*, nous nous limitons au cas des anneaux réduits. Nous raisonnons par récurrence double sur le nombre r de variables et sur la dimension de Krull d de $\mathbf{A}$.
L'initialisation pour $r = 1$ (d arbitraire) est donnée par (ls3), et pour $d = 0$ (avec r arbitraire) c'est le théorème de Quillen-Suslin.
Nous supposons le résultat prouvé en r variables pour les anneaux dans $\mathcal{F}$. Nous considérons le cas de $r+1$ variables et nous faisons une preuve par récurrence sur (un majorant d de) la dimension de Krull d'un anneau $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$. Soit donc un anneau $\mathbf{A}$ de dimension de Krull $\leqslant d+1$. Soit P un module projectif de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r, Y] = \mathbf{A}[\underline{X}, Y]$. Soit $G = G(\underline{X}, Y)$ une matrice de présentation de P à coefficients dans $\mathbf{A}[\underline{X}, Y]$. Soit $H(\underline{X}, Y)$ la matrice construite à partir de G comme dans le fait 1.1.

3. I.e., $\mathsf{Kdim}(\mathbf{A}_{\mathfrak{p}}) < \infty$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence pour r et (ls1), nous obtenons que les matrices $H(\underline{X}, Y)$ et $H(\underline{0}, Y)$ sont élémentairement équivalentes sur $\mathbf{A}(Y)[\underline{X}]$. Cela signifie qu'il existe des matrices Q_1, R_1 sur $\mathbf{A}[\underline{X}, Y]$ telles que

$$Q_1 H(\underline{X}, Y) = H(\underline{0}, Y) R_1$$
$$\text{avec} \quad \det(Q_1) \text{ et } \det(R_1) \text{ primitifs dans } \mathbf{A}[Y].$$

Nous montrons maintenant que $H(\underline{X}, Y)$ et $H(\underline{0}, Y)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}\langle Y\rangle[\underline{X}]$. D'après le recollement de Vaserstein il suffit de montrer qu'elles sont équivalentes sur $\mathbf{A}\langle Y\rangle_{S_i}[\underline{X}]$ pour des monoïdes comaximaux S_i de $\mathbf{A}\langle Y\rangle$.
Nous considérons le polynôme primitif $f = \det(Q_1)\det(R_1) \in \mathbf{A}[Y]$, et nous appliquons le théorème 6.10. Si f est de degré formel m, nous obtenons des monoïdes $(S_i)_{i\in[\![1..m]\!]}$ de $\mathbf{A}$ tels que les monoïdes $V = f^{\mathbb{N}}$ et $(S_i)_{i\in[\![1..m]\!]}$ sont comaximaux dans $\mathbf{A}\langle Y\rangle$. En outre, $\mathsf{Kdim}\, \mathbf{A}_{S_i} \leqslant d$ pour $i \in [\![1..m]\!]$.
Pour le localisé en V, $\det(Q_1)$ et $\det(R_1)$ sont inversibles dans $\mathbf{A}\langle Y\rangle_V$. Ceci implique que $H(\underline{X}, Y)$ et $H(\underline{0}, Y)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}\langle Y\rangle_V[\underline{X}]$.
Pour un localisé en S_i ($i \in [\![1..m]\!]$), par hypothèse de récurrence sur d et en utilisant (ls2), $H(\underline{X}, Y)$ et $H(\underline{0}, 0)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}_{S_i}[\underline{X}, Y]$. A fortiori $H(\underline{X}, Y)$ et $H(\underline{0}, Y)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}_{S_i}[\underline{X}, Y]$, donc aussi sur $\mathbf{A}\langle Y\rangle_{S_i}[\underline{X}]$, qui est une localisation de $\mathbf{A}_{S_i}[Y][\underline{X}] = \mathbf{A}_{S_i}[\underline{X}, Y]$.
Ainsi, nous avons rempli le contrat et nous obtenons des matrices inversibles Q et R sur $\mathbf{A}\langle Y\rangle[\underline{X}] \subseteq \mathbf{A}[\underline{X}]\langle Y\rangle$ telles que

$$Q\, H(\underline{X}, Y) = H(\underline{0}, Y)\, R.$$

Par ailleurs, nous savons par (ls3) que $H(\underline{0}, 0)$ et $H(\underline{0}, Y)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}[Y] \subseteq \mathbf{A}[\underline{X}]\langle Y\rangle$, et, par hypothèse de récurrence sur r, que $H(\underline{0}, 0)$ et $H(\underline{X}, 0)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}[\underline{X}] \subseteq \mathbf{A}[\underline{X}]\langle Y\rangle$. En conclusion $H(\underline{X}, 0)$ et $H(\underline{X}, Y)$ sont équivalentes sur $\mathbf{A}[\underline{X}]\langle Y\rangle$. Donc par le théorème de Horrocks global, P est étendu depuis $\mathbf{A}[\underline{X}]$.
Enfin, par hypothèse de récurrence sur r, $P(\underline{X}, 0)$ est étendu depuis $\mathbf{A}$. □

Remarque. Nous avons demandé dans (ls2) que la classe $\mathcal{F}$ soit stable par localisation pour n'importe quel monoïde. En fait dans la démonstration interviennent seulement des localisations en des monoïdes bords de Krull, ou par inversion d'un unique élément (ceci de manière itérée). ∎

Lequain-Simis en dimension finie

6.14. Corollaire.
Si $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique de dimension de Krull finie, tout module projectif de type fini sur* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ *est étendu depuis* $\mathbf{A}$.

D On montre que la classe des anneaux arithmétiques de dimension finie satisfait l'induction de Lequain-Simis concrète. La condition (ls1) est donnée

dans l'exercice XII-3, (ls3) par le théorème de Bass-Simis-Vasconcelos, et (ls2) est clair. □

Lequain-Simis local sans hypothèse de dimension

6.15. Corollaire. *Si* $\mathbf{V}$ *est un anneau de valuation, tout module projectif de type fini sur* $\mathbf{V}[X_1, \ldots, X_r]$ *est étendu depuis* $\mathbf{V}$ *(i.e., libre).*

D Soit M un module projectif de type fini sur $\mathbf{V}[X_1, \ldots, X_r]$. Nous devons montrer que M est libre. Soit $F = (f_{ij}) \in \mathbb{GA}_q(\mathbf{V}[X_1, \ldots, X_r])$ une matrice dont l'image est isomorphe au module M. Soit $\mathbf{V}_1$ le sous-anneau de $\mathbf{V}$ engendré par les coefficients des polynômes f_{ij} et $\mathbf{V}'$ le sous-anneau de valuation de $\mathbf{V}$ engendré par $\mathbf{V}_1$. Le point *4* du théorème XIII-8.20 nous dit que tout anneau compris entre $\mathbf{V}_1$ et $\operatorname{Frac}\mathbf{V}_1$, en particulier $\mathbf{V}'$, est de dimension de Krull finie. On applique le corollaire 6.14. □

Théorème de Lequain-Simis général

6.16. Théorème. (Lequain-Simis) *Si* $\mathbf{A}$ *est un anneau arithmétique, tout module projectif de type fini sur* $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$ *est étendu depuis* $\mathbf{A}$*.*

D Cela résulte du corollaire 6.14 (le cas local) avec la même démonstration que pour déduire le théorème 6.9 du théorème 6.8. □

Conclusion : quelques conjectures

La solution du problème de Serre a naturellement conduit à poser quelques conjectures sur de possibles généralisations.
Nous citerons les deux plus célèbres et renvoyons à [Lam06, chap.V,VIII] pour des informations détaillées sur le sujet.

La première, et la plus forte, est la *conjecture des anneaux de Hermite*, qui peut être énoncée sous deux formes équivalentes, une locale et une globale, vu le principe de recollement de Quillen. Rappelons qu'un anneau est appelé «anneau de Hermite» lorsque les modules de type fini stablement libres sont libres, ce qui revient à dire que les vecteurs unimodulaires sont complétables.
(H) Si $\mathbf{A}$ est un anneau de Hermite, alors $\mathbf{A}[X]$ également.
(H') Si $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret, alors $\mathbf{A}[X]$ est un anneau de Hermite.
Le «stable-range» de Bass donne une première approche du problème (voir la proposition V-4.4, le corollaire V-4.9 et le théorème V-4.10). Des cas particuliers sont traités par exemple dans [165, Roitman] et [199, 200, Yengui], qui traite le cas $n = 1$ de la conjecture suivante : sur un anneau $\mathbf{A}$ de dimension de Krull $\leqslant 1$, les $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$-modules stablement libres sont libres.

La deuxième est la *conjecture de Bass-Quillen.*
Un anneau cohérent est appelé un *anneau régulier* si tout module de présentation finie admet une résolution projective finie (pour la définition et un

exemple de résolution projective finie, voir le problème X-8). Ici aussi il y a une version locale et une version globale équivalentes.
(BQ) Si $\mathbf{A}$ est un anneau noethérien cohérent régulier [4], alors les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ sont étendus depuis $\mathbf{A}$.
(BQ') Si $\mathbf{A}$ est un anneau local résiduellement discret noethérien cohérent régulier [5], alors les modules projectifs de type fini sur $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_n]$ sont libres.
En fait, puisque $\mathbf{A}$ noethérien régulier implique $\mathbf{A}[X]$ noethérien régulier, il suffirait de démontrer le cas $n = 1$. Des résultats partiels ont été obtenus. Par exemple, la conjecture est démontrée en dimension de Krull $\leqslant 2$, pour n arbitraire (mais on ne dispose pas pour le moment de démonstration constructive). On peut a priori également envisager une version non noethérienne pour les anneaux cohérents réguliers de dimension de Krull $\leqslant k$ fixé.

Exercices et problèmes

Exercice 1. Soit $\mathfrak{A}$ un idéal de $\mathbf{A}[X]$ contenant un polynôme unitaire et $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathbf{A}$. Alors $\mathbf{A} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}[X])$ est contenu dans $\mathrm{D}_{\mathbf{A}}\big((\mathbf{A} \cap \mathfrak{A}) + \mathfrak{a}\big)$. En particulier, si $1 \in \mathfrak{A} + \mathfrak{a}[X]$, alors $1 \in (\mathbf{A} \cap \mathfrak{A}) + \mathfrak{a}$.

Exercice 2. *(top-bottom lemma)* Soit $\mathbf{A}$ un anneau, $\mathfrak{m} = \operatorname{Rad} \mathbf{A}$.

1. Soit $S \subseteq \mathbf{A}[X]$ le monoïde des polynômes unitaires. Les monoïdes S et $1 + \mathfrak{m}[X]$ sont comaximaux.
2. Soit $U \subseteq \mathbf{A}[X]$ le monoïde $\big\{ X^n + \sum_{k<n} a_k X^k \mid n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathfrak{m}\ (k < n) \big\}$. Les monoïdes U et $1 + \mathfrak{m} + X\mathbf{A}[X]$ sont comaximaux.

Exercice 3. Le but de l'exercice est de montrer un résultat analogue au recollement de Vaserstein (principe local-global 3.6) dans lequel on remplace $\mathbb{GL}_n$ par $\mathbb{SL}_n$.

1. Soit un anneau $\mathbf{B}$ et un monoïde S de $\mathbf{B}$.
   a. Soit $P \in \mathbf{B}[Y]$ tel que $P(0) = 0$ et $P = 0$ dans $\mathbf{B}_S[Y]$. Montrer qu'il existe $s \in S$ tel que $P(sY) = 0$.
   b. Soit $H \in \mathbb{M}_n(\mathbf{B}[Y])$ telle que $H(0) \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{B})$ et $H \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{B}_S[Y])$. Montrer qu'il existe $s \in S$ tel que $H(sY) \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{B}[Y])$.
2. Montrer le lemme 3.4 en remplaçant $\mathbb{GL}$ par $\mathbb{SL}$.
3. Montrer le principe local-global 3.6 en remplaçant $\mathbb{GL}$ par $\mathbb{SL}$.

---

4. Naturellement en mathématiques classiques l'hypothèse « cohérent » est superflue.

5. Naturellement en mathématiques classiques les hypothèses « cohérent » et « résiduellement discret » sont superflues.

Exercice 4. Soit $\mathbf{A}$ un anneau local résiduellement discret et soit $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}[X]$ un idéal inversible contenant un polynôme unitaire. On veut montrer que $\mathfrak{b}$ est un idéal principal.
Ceci constitue un cas particulier du théorème de Horrocks local (théorème 4.3) : en effet, d'une part $\mathfrak{b}$ est un $\mathbf{A}[X]$-module projectif, et d'autre part, si $f \in \mathfrak{b}$ est un polynôme unitaire, alors en localisant en f, $\mathfrak{b}_f = \mathbf{A}[X]_f$, et donc, par le théorème de Horrocks local, $\mathfrak{b}$ est un $\mathbf{A}[X]$-module libre. Cet exercice donne une démonstration indépendante de celle du cours. Dans le cas particulier étudié ici, on apporte la précision que $\mathfrak{b}$ est engendré par un polynôme unitaire.
Soit $\mathbf{A}$ un anneau, on note $\mathfrak{m} = \operatorname{Rad}\mathbf{A}$ et $\mathbf{k} = \mathbf{A}/\mathfrak{m}$. Soit $\mathfrak{b} \subseteq \mathbf{A}[X]$ un idéal contenant un polynôme unitaire. On note $\overline{a}$ la réduction de a modulo $\mathfrak{m}$.

1. Montrer que tout polynôme unitaire de $\overline{\mathfrak{b}} \subseteq \mathbf{k}[X]$ peut être relevé en un polynôme unitaire de $\mathfrak{b}$.

On suppose maintenant $\mathbf{A}$ local résiduellement discret.

2. Montrer l'existence d'un polynôme unitaire $f \in \mathfrak{b}$ tel que $\overline{\mathfrak{b}} = \langle \overline{f} \rangle$ dans $\mathbf{k}[X]$ et donc $\mathfrak{b} = \langle f \rangle + \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}[X]$.

On suppose maintenant que l'idéal $\mathfrak{b}$ est inversible.

3. Montrer que $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}[X] = \mathfrak{b}\mathfrak{m}[X]$.
4. On considère l'anneau $\mathbf{A}[X]/\langle f \rangle$. Montrer que $\mathfrak{m}(\mathfrak{b}/\langle f \rangle) = \mathfrak{b}/\langle f \rangle$. En déduire que $\mathfrak{b} = \langle f \rangle$.

On propose une généralisation.

5. La démonstration fonctionne-t-elle avec un anneau $\mathbf{A}$ résiduellement zéro-dimensionnel ?

Exercice 5. *(Théorème de Brewer&Costa : cas des anneaux de Bézout intègres de dimension $\leqslant 1$)* Voir aussi l'exercice XII-3 et le théorème 6.11.
Soit $\mathcal{F}$ la classe des anneaux intègres de Bézout de dimension $\leqslant 1$, et $\mathbf{A} \in \mathcal{F}$.
1. Montrer que $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}\langle X \rangle \leqslant 1$ (utiliser l'exercice XIII-9).
2. En déduire que $\mathbf{A}\langle X \rangle$ est un anneau de Bézout.
3. La classe $\mathcal{F}$ satisfait les hypothèses du théorème 5.4 (induction de Quillen concrète, cas libre). Ainsi, tout $\mathbf{A}[X_1, \ldots, X_r]$-module projectif de type fini est libre.

Exercice 6. *(Principe local-global pour les anneaux seminormaux)*
On donne une démonstration directe du principe 3.10 dans le cas particulier des anneaux localement sans diviseur de zéro seminormaux.
1. Dans un anneau localement sans diviseur de zéro, si $xc = b$ et $b^2 = c^3$, alors il existe z tel que $zc = b$ et $z^2 = c$, donc $z^3 = b$.
2. Soient S_1, …, S_n des monoïdes comaximaux d'un anneau $\mathbf{A}$. On suppose que chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ est localement sans diviseur de zéro et seminormal. Montrer que $\mathbf{A}$ est localement sans diviseur de zéro et seminormal.

Exercice 7. *(Anneaux vérifiant certaines des conditions de la section « Un exemple en dimension de Krull finie > 0» page 944)*
Soient $a_1, \ldots, a_k \in \mathbf{A}$, $a_0 = 0$, $a_{k+1} = 1$, et les anneaux $\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{k+1}$ suivants

$$\mathbf{A}_i = \big(\mathbf{A}/\langle a_{i-1}\rangle\big)[1/a_i] \quad \text{pour } i \in [\![1..k+1]\!]$$

On va montrer que si chaque $\mathbf{A}_i$ est zéro-dimensionnel, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$. Le même résultat vaut avec $\mathbf{A}_i = \big(\mathbf{A}/\mathrm{D}_{\mathbf{A}}(a_{i-1})\big)[1/a_i]$.
1. Soit $a \in \mathbf{A}$. Si $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[1/a] \leqslant n$ et $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}/\langle a\rangle \leqslant m$, alors $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant n+m+1$.
2. En déduire le résultat annoncé.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 1. Posons $\mathbf{B} = \mathbf{A}/\mathbf{A} \cap \mathfrak{A}$, $\mathbf{B}' = \mathbf{A}[X]/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} = \overline{\mathfrak{a}}$, $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}\,\mathbf{B}'$.
L'anneau $\mathbf{B}'$ est une extension entière de $\mathbf{B}$. On applique le lying over (VI-3.12).
Une autre solution. Soit $f \in \mathfrak{A}$ unitaire. Soit $a \in \mathbf{A} \cap (\mathfrak{A} + \mathfrak{a}[X])$, il existe $g \in \mathfrak{A}$ tel que $g \equiv a \bmod \mathfrak{a}$. Alors $\mathrm{Res}(f,g) \equiv \mathrm{Res}(f,a) \bmod \mathfrak{a}$. Mais $\mathrm{Res}(f,a) = a^{\deg f}$ et $\mathrm{Res}(f,g) \in \mathfrak{A} \cap \mathbf{A}$.

Exercice 2. Utiliser le résultant.

Exercice 3. *1b.* On pose $P(Y) = 1 - \det\big(H(Y)\big)$ et l'on applique le point *1a.*
2. Le lemme 3.4 nous fournit une matrice $U(X,Y) \in \mathbb{GL}_r(\mathbf{A}[X,Y])$ telle que

$$U(X,0) = \mathrm{I}_r \text{ et, sur } \mathbf{A}_S[X,Y],\ U(X,Y) = C(X+sY)C(X)^{-1}.$$

D'après le point *1*, il existe $t \in S$ tel que $U(X,tY) \in \mathbb{SL}_r(\mathbf{A}[X,Y])$.
On pose $V(X,Y) = U(X,tY)$ et l'on remplace s par st.
3. Le lemme 3.5 subit avec succès le remplacement de $\mathbb{GL}$ (implicite dans le mot «équivalente») par $\mathbb{SL}$. Même chose ensuite pour le recollement de Vaserstein.

Exercice 4. *1.* Montrons d'abord le résultat suivant : si l'on a g, $f \in \mathfrak{b}$ avec $\overline{g}$ unitaire de degré r et f unitaire de degré $r+1$, alors $\overline{g}$ peut être relevé en un polynôme unitaire de $\mathfrak{b}$ (de degré r). On écrit $g = aX^{r+\delta} + \ldots$, avec $\delta \in \mathbb{N}$ et l'on montre par récurrence sur δ que $\overline{g}$ peut être relevé en un polynôme unitaire de $\mathfrak{b}$. Si $\delta = 0$, on a $a \equiv 1 \bmod \mathfrak{m}$ (car $\overline{g}$ est unitaire), donc a est inversible et le polynôme unitaire $a^{-1}g \in \mathfrak{b}$ relève $\overline{g}$. Si $\delta \geqslant 1$, on a $a \in \mathfrak{m}$ (car $\overline{g}$ est unitaire), et l'on considère $h = g - aX^{\delta-1}f \in \mathfrak{b}$. Il est de la forme $bX^{r+\delta-1} + \ldots$, et il vérifie $\overline{h} = \overline{g}$. On applique l'hypothèse de récurrence.
Il suffit ensuite de montrer que pour tout $g \in \mathfrak{b}$ tel que $\overline{g}$ est unitaire de degré r, l'idéal $\mathfrak{b}$ contient un polynôme unitaire de degré $r+1$. Par hypothèse, $\mathfrak{b}$ contient un polynôme unitaire f. Si $\deg(f) \leqslant r+1$, alors le résultat est clair. Si $n = \deg(f) > r+1$, alors le polynôme $X^{n-(r+1)}\overline{g}$ est unitaire de degré $n-1$, et d'après la première étape, $\mathfrak{b}$ contient un polynôme unitaire de degré $n-1$. On conclut par récurrence sur $n-r$.
2. L'idéal $\overline{\mathfrak{b}}$ est un idéal de type fini de $\mathbf{k}[X]$, donc $\overline{\mathfrak{b}}$ est principal. Comme $\mathfrak{b}$ contient un polynôme unitaire on peut prendre le générateur $\overline{h}$ unitaire et l'on le relève en un polynôme unitaire de $\mathfrak{b}$ d'après la question précédente.
3. Soit f unitaire dans $\mathfrak{b}$, et $\mathfrak{b}_1$ l'idéal qui vérifie $\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1 = \langle f\rangle$.
On considère $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}_1(\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}[X])/f$ (c'est un idéal de $\mathbf{A}[X]$). Alors $\mathfrak{b}\mathfrak{b}' = \mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}[X]$. On a $f\mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{m}[X]$ et f unitaire donc $\overline{\mathfrak{b}'} = 0$, c'est-à-dire $\mathfrak{b}' \subseteq \mathfrak{m}[X]$. En multipliant par $\mathfrak{b}$, on obtient $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}[X] \subseteq \mathfrak{b}\mathfrak{m}[X]$, donc $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{m}[X] = \mathfrak{b}\mathfrak{m}[X]$.

4. On a

$\mathfrak{m}(\mathfrak{b}/\langle f\rangle) = \mathfrak{c}/\langle f\rangle$ avec $\mathfrak{c} = \mathfrak{m}\mathfrak{b} + \langle f\rangle = \mathfrak{m}[X]\mathfrak{b} + \langle f\rangle = \mathfrak{m}[X] \cap \mathfrak{b} + \langle f\rangle = \mathfrak{b}$.

Le $\mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$-module $\mathfrak{b}/\langle f\rangle$ est de type fini et comme f est unitaire, $\mathbf{A}[X]/\langle f\rangle$ est un $\mathbf{A}$-module de type fini. On en déduit que $\mathfrak{b}/\langle f\rangle$ est un $\mathbf{A}$-module de type fini. Par le lemme de Nakayama on obtient $\mathfrak{b}/\langle f\rangle = 0$, i.e. $\mathfrak{b} = \langle f\rangle$.

Exercice 5. *1.* Il faut montrer que pour f, $g \in \mathbf{A}[X]$, on a $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}\langle X\rangle}(f, g)$. Puisque $\mathbf{A}$ est de Bézout intègre, tout polynôme de $\mathbf{A}[X]$ est le produit d'un élément de $\mathbf{A}$ par un polynôme primitif. D'après l'exercice XIII-9, il suffit de montrer que $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}\langle X\rangle}(f, g)$, soit lorsque f ou g est primitif, soit lorsque f et g sont des constantes a, b. Dans ce dernier cas, cela découle, puisque $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant 1$, de $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(a, b) \subseteq \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}\langle X\rangle}(a, b)$.

On suppose donc que f ou g est primitif, par exemple f. Il suffit de montrer que $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}\langle X\rangle}(f, g)$ après localisation en des monoïdes comaximaux. Or le théorème 6.10 fournit des monoïdes bord S_j dans $\mathbf{A}$ tels que $f^{\mathbb{N}}$ et les S_j sont comaximaux dans $\mathbf{A}\langle X\rangle$. Pour la localisation en $f^{\mathbb{N}}$, il est clair que $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(f, g)$. Quant à $S_j^{-1}\mathbf{A}\langle X\rangle$, c'est une localisation de $\mathbf{A}_{S_j}[X]$ avec $\mathbf{A}_{S_j}$ zéro-dimensionnel, ce qui donne $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}_{S_j}[X] \leqslant 1$. Donc $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}(f, g)$ dans $\mathbf{A}_{S_j}[X]$, et a fortiori dans le localisé $S_j^{-1}\mathbf{A}\langle X\rangle$.

2. L'anneau $\mathbf{A}[X]$ est un anneau intègre à pgcd, donc il en est de même de son localisé $\mathbf{A}\langle X\rangle$. Comme $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}\langle X\rangle \leqslant 1$, le théorème XI-3.12 nous dit que $\mathbf{A}\langle X\rangle$ est un anneau de Bézout.

3. On a démontré la propriété (q1) et l'on sait déjà que la propriété (q0) est satisfaite (théorème X-5.4).

Exercice 6. On peut commencer par donner une démonstration directe que toute localisation d'un anneau seminormal est encore un anneau seminormal (implicitement supposé dans l'énoncé). Soit en effet $\mathbf{A}$ seminormal et S un monoïde. Supposons $(\frac{x}{s})^2 = (\frac{y}{s})^3$ dans $\mathbf{A}_S$. On a donc pour un $t \in S$, on a $tsx^2 = ty^3$ dans $\mathbf{A}$. D'où $t^6s^4x^2 = t^6s^3y^3$. Or $\mathbf{A}$ est seminormal, on a donc un $z \in \mathbf{A}$ tel que $t^3s^2x = z^3$ et $t^2sy = z^2$, ce qui donne dans $\mathbf{A}_S$ les égalités $\frac{x}{s} = (\frac{z}{st})^3$ et $\frac{y}{s} = (\frac{z}{st})^2$.

1. On a $x^2c^2 = b^2 = c^3$, donc $c^2(x^2 - c) = 0$, donc $c(x^2 - c) = 0$.

Soient alors s, t tels que $s + t = 1$, $sc = 0$ et $t(x^2 - c) = 0$. Posons $z = tx$.

On a $tc = c$, $z^2 = t^2c = c$ et $zc = xtc = xc = b$.

2. On suppose que chacun des $\mathbf{A}_{S_i}$ est localement sans diviseur de zéro et seminormal. Donc $\mathbf{A}$ est localement sans diviseur de zéro.

Soient b, $c \in \mathbf{A}$ avec $b^2 = c^3$. Si les $\mathbf{A}_{S_i}$ sont seminormaux, il existe $x_i \in \mathbf{A}_{S_i}$ tels que $x_i^2 = c$ et $x_i^3 = b$, et donc $x_ic = b$. Ceci implique qu'il existe $x \in \mathbf{A}$ tel que $xc = b$. On conclut par le point *1.*

NB : Il y a des anneaux seminormaux qui ne sont pas localement sans diviseur de zéro : par exemple $\mathbf{k}[x, y]$ avec $xy = 0$ où $\mathbf{k}$ est un corps discret.

Exercice 7.

1. Soient $n + m + 2$ éléments de $\mathbf{A}$, $(\underline{x}) = (x_0, \ldots, x_n)$, $(\underline{y}) = (y_0, \ldots, y_m)$. En considérant le monoïde bord itéré de $(\underline{y})$ dans $\mathbf{A}/\langle a\rangle$, on obtient que $\mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{y})$ contient un multiple de a, disons ba. En considérant l'idéal bord itéré de $(\underline{x})$ dans $\mathbf{A}[1/a]$, on obtient que $\mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x})$ contient une puissance de a, disons a^e.

Alors $(ba)^e \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}) \cap \mathcal{S}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{y})$, donc $1 \in \mathcal{I}^{\mathrm{K}}_{\mathbf{A}}(\underline{x}, \underline{y})$ d'après le fait XIII-2.9, point *1.*

2. En utilisant la question précédente, on montre par récurrence sur $i \in [\![0..k+1]\!]$, que l'on a $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A}[1/a_i] \leqslant i-1$; pour $i = k+1$, on obtient $\mathsf{Kdim}\,\mathbf{A} \leqslant k$.

Commentaires bibliographiques

Carlo Traverso a démontré dans [187] le théorème qui porte son nom pour un anneau noethérien réduit $\mathbf{A}$ (avec une restriction supplémentaire). Pour le cas intègre sans hypothèse noethérienne on peut consulter [151, Querré], [23, Brewer&Costa] et [91, Gilmer&Heitmann]. Le cas le plus général est donné par [185, Swan].

Le théorème de Traverso-Swan sur les anneaux seminormaux a été décrypté du point de vue constructif par Coquand dans [36]. Le décryptage a commencé par la démonstration élémentaire de la proposition 2.12 telle qu'elle est donnée ici. Cette démonstration est une simplification (assez spectaculaire) des preuves existantes dans la littérature. Il fallait ensuite contourner l'argument de la considération d'un idéal premier minimal pour obtenir une preuve constructive complète du résultat. Il est remarquable que par la même occasion, le cas d'un anneau non intègre ait pu être traité sans plus d'effort, contrairement à ce qui se passe avec la démonstration de Swan dans [185]. Pour une explication détaillée de [36] voir [130, Lombardi&Quitté]. Pour un algorithme «simple» qui réalise le théorème dans le cas univarié, voir [7, Barhoumi&Lombardi]. Une démonstration directe, dans le même esprit, pour l'implication «$\mathbf{A}$ seminormal implique $\mathbf{A}[X]$ seminormal» se trouve dans [6, Barhoumi].

Le théorème de Roitman 3.8 se trouve dans [164].

En ce qui concerne l'historique de la résolution du problème de Serre sur les anneaux de polynômes, le lecteur pourra consulter le chapitre III de l'ouvrage de Lam [Lam06] ainsi que l'exposé de Ferrand à Bourbaki [82].

Les démonstrations originales du théorème de Quillen-Suslin (solution du problème de Serre) se trouvent dans [152, Quillen] et [180, Suslin]. Les théorèmes de Horrocks ont leur source dans [106, Horrocks].

Le «Quillen patching» qui apparaît dans [152] est parfois appelé principe local-global de Quillen. Un survol remarquable des applications de ce principe et de ses extensions se trouve dans [9, Basu&al.]. À lire également [156, Rao&Selby].

L'anneau $\mathbf{A}\langle X\rangle$ a joué un grand rôle dans la solution du problème de Serre par Quillen et dans ses généralisations successives (théorèmes de Maroscia et Brewer&Costa, et de Lequain&Simis). L'anneau $\mathbf{A}(X)$ s'est avéré un outil efficace pour plusieurs résultats d'algèbre commutative. On pourra consulter l'article [93, Glaz] pour une bibliographie assez complète concernant ces deux anneaux.

Le livre de Lam [Lam06] (qui fait suite à [Lam]) est une mine d'or concernant les modules projectifs étendus. Il contient notamment plusieurs preuves

des théorèmes de Horrocks (local et global), avec tous les détails et toutes les références nécessaires, au moins du point de vue des mathématiques classiques.
Le théorème 4.7 de Horrocks global a été démontré constructivement, tout d'abord (pour une variante un peu plus faible) dans l'article [129, Lombardi&Quitté], puis dans [131, Lombardi,Quitté&Yengui]. La version que nous donnons page 932 reprend ce dernier article en précisant tous les détails. Elle s'appuie sur les livres de Kunz et Lam.
Le théorème 6.8 de Bass-Simis-Vasconcelos ([Bass, 172]) a été décrypté du point de vue constructif par Coquand dans [37].
Concernant le théorème de Maroscia et Brewer&Costa (théorème 6.11), voir les articles originaux [22, 133]. On en trouve une démonstration constructive dans [131]. Ce théorème est légèrement antérieur au théorème de Lequain&Simis. Ce dernier a été décrypté du point de vue constructif essentiellement par I. Yengui [8, 74].
De nombreux algorithmes pour le théorème de Quillen-Suslin (cas des corps) ont été proposés en calcul formel, en général basés sur la démonstration de Suslin.
Le théorème de Quillen-Suslin a été étudié du point de vue de sa complexité algorithmique dans [84, Fitchas&Galligo] et [27, Caniglia&al.] (pour des algorithmes efficaces, mais semble-t-il non encore implémentés).
Un nouvel algorithme, simple et efficace, pour le théorème de Suslin (compléter un vecteur unimodulaire (contenant un polynôme unitaire) de $\mathbf{A}[X]$) est donné dans [132, Lombardi&Yengui] et amélioré dans [138, Mnif&Yengui].

Chapitre XVII

Théorème de stabilité de Suslin, le cas des corps

Sommaire

Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons un traitement entièrement constructif du théorème de stabilité de Suslin pour le cas des corps discrets.

1. Le groupe élémentaire

Transvections

Concernant le groupe élémentaire $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ rappelons qu'il est engendré par les matrices élémentaires $\mathrm{E}_{i,j}^{(n)}(a) = \mathrm{E}_{i,j}(a)$.

Si l'on note $(e_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, on a :

$$\mathrm{E}_{i,j}(a) = \mathrm{I}_n + ae_{ij}, \quad \mathrm{E}_{i,j}(a)\, e_k = \begin{cases} e_k & \text{si } k \neq j \\ e_j + ae_i & \text{si } k = j \end{cases} \qquad (i \neq j),$$

avec par exemple

$$\mathrm{E}_{2,3}(a) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pour i fixé (resp. pour j fixé) les matrices $\mathrm{E}_{i,j}(\bullet)$ commutent, et forment un sous-groupe de $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ isomorphe à $(\mathbf{A}^{n-1}, +)$. Par exemple

$$\mathrm{E}_{2,1}(a) \cdot \mathrm{E}_{2,3}(b) \cdot \mathrm{E}_{2,4}(c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & b & c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a' & 1 & b' & c' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a+a' & 1 & b+b' & c+c' \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Plus généralement soit P un $\mathbf{A}$-module projectif de type fini. On dira qu'un couple $(\lambda, w) \in P^\star \times P$ est *unimodulaire* si $\lambda(w) = 1$. Dans ce cas w est un élément unimodulaire de P, λ est un élément unimodulaire de $P^\star$ et l'application $\mathbf{A}$-linéaire $\theta_P(\lambda \otimes w) : P \to P$ définie par $x \mapsto \lambda(x)w$ est la projection sur $L = \mathbf{A}w$ parallèlement à $K = \operatorname{Ker}\lambda$, représentée sur $K \times L$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0_{K\to K} & 0_{L\to K} \\ 0_{K\to L} & 1_{L\to L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{K\to K} & 0 \\ 0 & \mathrm{Id}_L \end{bmatrix}.$$

Si $u \in K$, l'application $\mathbf{A}$-linéaire $\tau_{\lambda,u} := \mathrm{Id}_P + \theta_P(\lambda \otimes u)$, $x \mapsto x + \lambda(x)u$ est appelée une *transvection*, elle est représentée sur $K \times L$ par la matrice

$$\begin{bmatrix} 1_{K\to K} & (\lambda \otimes u)|_L \\ 0_{K\to L} & 1_{L\to L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{Id}_K & (\lambda \otimes u)|_L \\ 0 & \mathrm{Id}_L \end{bmatrix}.$$

Par exemple, si $P = \mathbf{A}^n$, une matrice élémentaire définit une transvection.

On note $\mathbb{GL}(P)$ le groupe des automorphismes linéaires de P et $\mathbb{SL}(P)$ le sous-groupe des endomorphismes de déterminant 1. Le sous-groupe de $\mathbb{SL}(P)$ engendré par les transvections sera noté $\widetilde{\mathbb{E}}(P)$. L'application affine

$$u \mapsto \tau_{\lambda,u},\ \operatorname{Ker}\lambda \to \operatorname{End}_{\mathbf{A}}(P)$$

fournit un homomorphisme du groupe $(\operatorname{Ker}\lambda, +)$ dans le groupe $\widetilde{\mathbb{E}}(P)$.

Dans le cas où $P = \mathbf{A}^n$, si λ est une forme coordonnée, on trouve que la matrice de la transvection est un produit de matrices élémentaires. Par

exemple avec le vecteur $u = [\, u_1\, u_2\, u_3\, 0\,]$:

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_3 & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{3} \mathrm{E}_{i,4}(u_i).$$

Notez cependant qu'a priori $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ est seulement *contenu dans* $\widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{A}^n)$. Ceci montre que le groupe élémentaire est a priori dépourvu de signification géométrique claire. Comme point crucial, $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ n'est pas a priori stable par $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$-conjugaison.

Matrices spéciales

Soient $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ et $v = \begin{bmatrix} v_1 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \in \mathbf{A}^{1\times n}$ auxquels on associe la matrice $\mathrm{I}_n + uv \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$. On va fournir des résultats précisant l'appartenance de cette matrice au groupe élémentaire $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$.
Puisque $\det(\mathrm{I}_n + uv) = 1 + \mathrm{tr}(uv) = 1 + vu$, il est impératif de réclamer l'égalité $vu \overset{\text{def}}{=} v_1u_1 + \cdots + v_nu_n = 0$. Dans ce cas, on a $(\mathrm{I}_n + uv)(\mathrm{I}_n - uv) = \mathrm{I}_n$.
Les transvections admettent pour matrices les matrices de ce type, avec v unimodulaire. En outre, l'ensemble de ces matrices $\mathrm{I}_n + uv$ (avec $vu = 0$) est un ensemble stable par $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$-conjugaison.
Par exemple pour $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$, on obtient $A\,\mathrm{E}_{ij}(a)\,A^{-1} = \mathrm{I}_n + auv$, où u est la colonne i de A et v la ligne j de A^{-1}.
Prenons garde cependant que si l'on ne suppose pas v unimodulaire ces matrices ne représentent en général pas des transvections. Si ni u, ni v n'est unimodulaire la matrice ne représente même pas a priori un élément de $\widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{A}^n)$.

1.1. Lemme. *Supposons $u \in \mathbf{A}^{n\times 1}$, $v \in \mathbf{A}^{1\times n}$ et $vu = 0$.*
Alors $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + uv & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{E}_{n+1}(\mathbf{A})$.

▷ On a une suite d'opérations élémentaires à droite (la première utilise l'égalité $vu = 0$) :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + uv & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\alpha} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + uv & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\beta}$$
$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -u \\ v & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\gamma} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\delta} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ceci implique $\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + uv & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta^{-1}\gamma^{-1}\beta^{-1}\alpha^{-1}$, c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + uv & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -v & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

Un vecteur colonne u sera dit *spécial* si au moins une de ses coordonnées est nulle. Si $vu = 0$ et si u est spécial nous dirons que $\mathrm{I}_n + uv$ est une *matrice spéciale*.

1.2. Corollaire. *Soient $u \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ et $v \in \mathbf{A}^{1\times n}$ vérifiant $vu = 0$. Si u est spécial, alors $\mathrm{I}_n + uv \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$. Autrement dit toute matrice spéciale est dans $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$.*

▷ On peut supposer que $n \geqslant 2$ et $u_n = 0$.

Écrivons $u = \begin{bmatrix} \mathring{u} \\ 0 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} \mathring{v} & v_n \end{bmatrix}$, avec $\mathring{u} \in \mathbf{A}^{(n-1)\times 1}$ et $\mathring{v} \in \mathbf{A}^{1\times(n-1)}$.

Alors

$$\mathrm{I}_n + uv = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-1} + \mathring{u}\,\mathring{v} & v_n\mathring{u} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-1} & v_n\mathring{u} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_{n-1} + \mathring{u}\,\mathring{v} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque $\mathring{v}\,\mathring{u} = vu = 0$, le lemme 1.1 s'applique et $\mathrm{I}_n + uv \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$. □

Les matrices spéciales se «relèvent» facilement d'un localisé $\mathbf{A}_S$ à $\mathbf{A}$ lui-même. Précisément, on obtient ce qui suit.

1.3. Fait. *Soit $S \subseteq \mathbf{A}$ un monoïde, $u \in \mathbf{A}_S^{n\times 1}$, $v \in \mathbf{A}_S^{1\times n}$ avec $vu = 0$ et u spécial. Alors il existe $s \in S$, $\widetilde{u} \in \mathbf{A}^{n\times 1}$, $\widetilde{v} \in \mathbf{A}^{1\times n}$ avec $\widetilde{v}\widetilde{u} = 0$, $\widetilde{u}$ spécial et $u = \widetilde{u}/s$, $v = \widetilde{v}/s$ sur $\mathbf{A}_S$.*

▷ Par définition, $u = u'/s_1$, $v = v'/s_1$ avec $s_1 \in S$, $u' \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ et $v' \in \mathbf{A}^{1\times n}$. L'égalité $vu = 0$ fournit un $s_2 \in S$ tel que $s_2v'u' = 0$, et $u_i = 0$ fournit un $s_3 \in S$ tel que $s_3u'_i = 0$. Alors $s = s_1s_2s_3$, $\widetilde{u} = s_2s_3u'$ et $\widetilde{v} = s_2s_3v'$ remplissent les conditions requises. □

1.4. Théorème. *Si $n \geqslant 3$, alors $\widetilde{\mathbb{E}}(\mathbf{A}^n) = \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$. En particulier, $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ est stable par $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$-conjugaison.*

Précisions : *Soient $u \in \mathbf{A}^{n\times 1}$, $v \in \mathbf{A}^{1\times n}$ avec $vu = 0$ et v unimodulaire. Alors, on peut écrire u sous la forme $u = u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_N$, avec $vu'_k = 0$ et chaque u'_k a au plus deux composantes non nulles. La matrice $\mathrm{I}_n + uv$ s'écrit alors comme un produit de matrices spéciales :*

$$\mathrm{I}_n + uv = (\mathrm{I}_n + u'_1v)\ (\mathrm{I}_n + u'_2v)\ \cdots\ (\mathrm{I}_n + u'_Nv)$$

et par conséquent, elle appartient à $\mathbb{E}_n(\mathbf{A})$.

▷ La base canonique de $\mathbf{A}^n$ est notée $(e_1, \ldots, e_n)$. On a a_1, …, a_n dans $\mathbf{A}$ tels que $a_1v_1 + \cdots + a_nv_n = 1$.

Pour $i \leqslant j$, définissons $a_{ij} \in \mathbf{A}$ par $a_{ij} = u_ia_j - u_ja_i$. Alors :

$$u = \textstyle\sum_{i<j} a_{ij}(v_je_i - v_ie_j) = \sum_{i\leqslant j} a_{ij}(v_je_i - v_ie_j).$$

En effet, pour k fixé, le coefficient de e_k dans la somme de droite est

$$\sum_{j\geqslant k} a_{kj}v_j - \sum_{i<k} a_{ik}v_i = \sum_{j\geqslant k}(u_k a_j - u_j a_k)v_j - \sum_{i<k}(u_i a_k - u_k a_i)v_i$$
$$= u_k \sum_{j=1}^{n} a_j v_j - a_k \sum_{j=1}^{n} u_j v_j = u_k.$$

Pour $i<j$, on définit alors $u'_{ij} \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ par $u'_{ij} = a_{ij}(v_j e_i - v_i e_j)$. Il est clair que u'_{ij} a au plus deux composantes non nulles et que $vu'_{ij} = 0$. □

2. Le symbole de Mennicke

2.1. Lemme. *Soient des éléments a, b comaximaux dans $\mathbf{A}$. Alors la classe d'équivalence dans $\mathbb{SL}_3(\mathbf{A})/\mathbb{E}_3(\mathbf{A})$ de la matrice $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ne dépend pas du choix de c et d vérifiant $1 = ad - bc$.*
On notera $\{a, b\}$ l'élément de $\mathbb{SL}_3(\mathbf{A})/\mathbb{E}_3(\mathbf{A})$ ainsi obtenu. On l'appelle le symbole de Mennicke *de (a, b).*

▷ Soient $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A' = \begin{bmatrix} a & b \\ c' & d' \end{bmatrix}$ avec $ad - bc = ad' - bc' = 1$. Alors

$$AA'^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d' & -b \\ -c' & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ cd' - c'd & 1 \end{bmatrix},$$

et $\begin{bmatrix} A & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A' & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} AA'^{-1} & 0_{2,1} \\ 0_{1,2} & 1 \end{bmatrix}$ est dans $\mathbb{E}_3(\mathbf{A})$. □

2.2. Proposition. *Le symbole de Mennicke vérifie les propriétés suivantes.*

1. *Si $a \in \mathbf{A}^\times$, alors $\{a, b\} = 1$ pour tout $b \in \mathbf{A}$.*
2. *Si $\langle 1\rangle = \langle a, b\rangle = \langle a', b\rangle$ alors $1 \in \langle aa', b\rangle$ et $\{aa', b\} = \{a, b\}\{a', b\}$.*
3. *Si $1 \in \langle a, b\rangle$, alors $\{a, b\} = \{b, a\} = \{a + tb, b\}$ pour tout $t \in \mathbf{A}$.*

▷ *1.* La matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}$ appartient à $\mathbb{E}_2(\mathbf{A})$.

2. On a :

$$\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_3(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ c & 0 & d \end{bmatrix},$$

et

$$\begin{bmatrix} a' & b & 0 \\ c' & d' & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_3(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} a' & 0 & -b \\ c' & 0 & -d' \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_3(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} a' & 0 & -b \\ c' & 0 & -d' \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Le produit $\{a, b\}\{a', b\}$ est représenté par le produit des matrices de droite,

i.e. par

$$\begin{bmatrix} aa' & b & 0 \\ c' & 0 & -d' \\ ca' & d & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_3(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} aa' & b & 0 \\ * & * & 0 \\ ca' & d & 1 \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_3(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} aa' & b & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

et donc $\{a,b\}\{a',b\} = \{aa',b\}$.

3. Si $ad-bc=1$, alors $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_2(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} -b & a \\ -d & c \end{bmatrix}$, et donc

$$\{a,b\} = \{-b,a\} = \{-1,a\}\{b,a\} = \{b,a\}.$$

Enfin, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \overset{\mathbb{E}_2(\mathbf{A})}{\sim} \begin{bmatrix} a+tb & b \\ c+td & d \end{bmatrix}$, donc $\{a,b\} = \{a+tb,b\}$. □

2.3. Lemme. (Version locale)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau local résiduellement discret et* f, $g \in \mathbf{A}[X]$ *comaximaux avec* f *unitaire. Alors on a :*

$$\{f,g\} = \{f(0),g(0)\} = 1.$$

D Écrivons $af+bg=1$. Notons pour commencer que l'on peut diviser b par f et que l'on obtient alors une égalité $a_1f + b_1g = 1$ avec $\deg(b_1) < \deg(f)$, et donc, puisque f est unitaire, $\deg(a_1) < \deg(g)$. Nous supposerons donc sans perte de généralité que $\deg(b) < \deg(f)$ et $\deg(a) < \deg(g)$.
Soit r le reste de la division euclidienne de g par f. Alors $\{f,g\} = \{f,r\}$. En particulier, si $\deg(f) = 0$ on a terminé. Dans le cas contraire, on peut supposer $\deg(g) < \deg(f)$ et l'on raisonne par récurrence sur $\deg(f)$.
Puisque $\mathbf{A}$ est local résiduellement discret, $g(0) \in \mathbf{A}^\times$ ou $g(0) \in \mathfrak{m} = \operatorname{Rad}\mathbf{A}$.
Supposons tout d'abord $g(0)$ inversible. Alors

$$\{f,g\} = \{f - g(0)^{-1}f(0)g, g\},$$

si bien que nous pouvons supposer $f(0)=0$ et $f = Xf_1$. Alors

$$\{Xf_1,g\} = \{X,g\}\{f_1,g\} = \{X,g(0)\}\{f_1,g\} = \{f_1,g\}$$

et la preuve est terminée par récurrence puisque f_1 est unitaire.
Supposons maintenant que $g(0)$ est dans $\mathfrak{m}$. Comme $a(0)f(0)+b(0)g(0)=1$, on a $a(0)f(0) \in 1+\mathfrak{m} \subseteq \mathbf{A}^\times$, et donc $a(0) \in \mathbf{A}^\times$. Or

$$\begin{bmatrix} f & g & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f-b & g+a & 0 \\ -b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mod \mathbb{E}_3(\mathbf{A}[X]),$$

donc

$$\{f,g\} = \{f-b, g+a\},$$

avec $f-b$ unitaire, $\deg(f-b) = \deg(f)$, $\deg(g+a) < \deg(f)$ et $(g+a)(0)$ dans $\mathfrak{m} + \mathbf{A}^\times = \mathbf{A}^\times$. On est donc ramené au cas précédent. □

Notre machinerie locale-globale de base XV-663, appliquée à la démonstration locale précédente, donne le lemme quasi global suivant.

2.4. Lemme. (Version quasi globale)
Soit $\mathbf{A}$ *un anneau et* f, $g \in \mathbf{A}[X]$ *comaximaux avec* f *unitaire. Alors, il existe dans* $\mathbf{A}$ *un système d'éléments comaximaux* (s_i) *tels que dans chaque localisé* $\mathbf{A}[1/s_i]$, *on ait l'égalité des symboles de Mennicke suivante :*

$$\{f, g\} = \{f(0), g(0)\} = 1.$$

3. Vecteurs unimodulaires polynomiaux

3.1. Notation.
Si $\mathfrak{b}$ est un idéal de $\mathbf{B}$, on note $\mathbb{GL}_n(\mathbf{B}, \mathfrak{b})$ le sous-groupe de $\mathbb{GL}_n(\mathbf{B})$ noyau du morphisme naturel $\mathbb{GL}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{GL}_n(\mathbf{B}/\mathfrak{b})$. Notation analogue pour $\mathbb{SL}_n$. Mais attention pour le groupe $\mathbb{E}_n$! On note $\mathbb{E}_n(\mathbf{B}, \mathfrak{b})$ le sous-groupe normal engendré par les $\mathrm{E}_{ij}(b)$ avec $b \in \mathfrak{b}$.

Le groupe $\mathbb{E}_n(\mathbf{B}, \mathfrak{b})$ est un sous-groupe du noyau de $\mathbb{E}_n(\mathbf{B}) \to \mathbb{E}_n(\mathbf{B}/\mathfrak{b})$, et en général, c'est un sous-groupe strict. Cependant, dans le cas où $\mathbf{B} = \mathbf{A}[X]$ et $\mathfrak{b} = \langle X \rangle$, les deux groupes coïncident. Ce résultat est l'objet du lemme suivant.

3.2. Lemme. *Le groupe* $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X], \langle X \rangle)$ *est le noyau de l'homomorphisme canonique* $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X]) \to \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X]/\langle X \rangle) = \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$. *Il est engendré par les matrices du type* $\gamma\, \mathrm{E}_{ij}(Xg)\, \gamma^{-1}$ *avec* $\gamma \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$ *et* $g \in \mathbf{A}[X]$.

D Soit H ce noyau. On va utiliser la décomposition suivante, valide dans tout groupe, d'un produit $\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2 \cdots \alpha_m\beta_m$, par exemple avec $m = 3$:

$$\left(\alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\right)\left((\alpha_1\alpha_2)\beta_2(\alpha_1\alpha_2)^{-1}\right)\left((\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\beta_3(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)^{-1}\right)(\alpha_1\alpha_2\alpha_3).$$

Soit donc $E = E(X) \in H$, $E = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{E}_{i_k,j_k}(f_k)$ avec $f_k \in \mathbf{A}[X]$.
On écrit $f_k = c_k + Xg_k$ avec $c_k = f_k(0) \in \mathbf{A}$ et

$$\mathrm{E}_{i_k,j_k}(f_k) = \alpha_k\beta_k, \quad \text{avec} \quad \alpha_k = \mathrm{E}_{i_k,j_k}(c_k), \quad \beta_k = \mathrm{E}_{i_k,j_k}(Xg_k).$$

On termine en appliquant la décomposition donnée ci-dessus et en utilisant l'égalité $\alpha_1 \cdots \alpha_m = E(0) = \mathrm{I}_n$. □

3.3. Proposition. *Soient* $n \geqslant 3$, $s \in \mathbf{A}$ *et* $E = E(X) \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X], \langle X \rangle)$. *Il existe* $k \in \mathbb{N}$ *et* $E' = E'(X) \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X], \langle X \rangle)$ *vérifiant* $E'(X) = E(s^k X)$ *sur* $\mathbf{A}_s[X]$.

D On peut supposer $E = \gamma \mathrm{E}_{ij}(Xg)\gamma^{-1}$ avec $\gamma \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s)$ et $g \in \mathbf{A}_s[X]$. En notant $u \in \mathbf{A}_s^{n\times 1}$ la colonne i de γ et $v \in \mathbf{A}_s^{1\times n}$ la ligne j de γ^{-1}, on a :

$$E(X) = \gamma \mathrm{E}_{ij}(Xg)\gamma^{-1} = \mathrm{I}_n + (Xg)uv, \quad vu = 0, \quad v \text{ unimodulaire.}$$

Le théorème 1.4 permet d'écrire : $u = u'_1 + u'_2 + \cdots + u'_N$ avec $vu'_k = 0$ et $u'_k \in \mathbf{A}_s^{n\times 1}$ a au plus deux composantes non nulles. On a donc

$$E(X) = (\mathrm{I}_n + (Xg)u'_1v)\ (\mathrm{I}_n + (Xg)u'_2v)\ \cdots\ (\mathrm{I}_n + (Xg)u'_Nv).$$

En utilisant une méthode analogue au fait 1.3, on vérifie facilement qu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $\widetilde{g} \in \mathbf{A}[X]$, $\widetilde{u}_k \in \mathbf{A}^{n\times 1}$ et $\widetilde{v} \in \mathbf{A}^{1\times n}$ tels que l'on ait sur $\mathbf{A}_s$ les égalités $g = \widetilde{g}/s^k$, $u'_k = \widetilde{u}_k/s^k$, $v = \widetilde{v}/s^k$, $\widetilde{v}\widetilde{u}_k = 0$, et $\widetilde{u}_k$ a au plus deux composantes non nulles. On pose alors :

$$E'(X) = (\mathrm{I}_n + (X\widetilde{g})\widetilde{u}_1\widetilde{v})\ (\mathrm{I}_n + (X\widetilde{g})\widetilde{u}_2\widetilde{v})\ \cdots\ (\mathrm{I}_n + (X\widetilde{g})\widetilde{u}_N\widetilde{v}).$$

D'après le corollaire 1.2, chaque $\mathrm{I}_n + (X\widetilde{g})\widetilde{u}_k\widetilde{v}$ appartient à $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])$. On a donc $E'(X) \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])$, $E'(0) = \mathrm{I}_n$ et $E'(s^{3k}X) = E(X)$ sur $\mathbf{A}_s[X]$. □

3.4. Lemme. *Soit un entier $n \geqslant 3$, $s \in \mathbf{A}$ et $E = E(X) \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X])$. Il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que pour tous a, $b \in \mathbf{A}$ congrus modulo s^k, la matrice $E^{-1}(aX)E(bX)$ est dans l'image de l'homomorphisme naturel*

$$\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X], \langle X\rangle) \longrightarrow \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X], \langle X\rangle).$$

NB : en bref, mais de manière moins précise, si a et b sont suffisamment « proches », la matrice $E^{-1}(aX)\,E(bX)$ n'a plus de dénominateur.

D On introduit deux nouvelles indéterminées T, U et l'on pose

$$E'(X,T,U) = E^{-1}\big((T+U)X\big)\,E(TX).$$

On a $E'(X,T,0) = \mathrm{I}_n$. On applique la proposition 3.3 avec $F = E'$ en prenant $\mathbf{A}[X,T]$ au lieu de $\mathbf{A}$ et U au lieu de X : il existe une matrice G dans $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X,T,U], \langle U\rangle)$ et un entier $k \geqslant 0$ tels que

$$E'(X,T,s^kU) = G(X,T,U) \ \text{ dans } \ \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X,T,U], \langle U\rangle).$$

Donc $G(X,T,U) = E^{-1}\big((T+s^kU)X\big)\,E(TX)$ sur $\mathbf{A}_s$, et si $b = a + s^kc$:

$$E^{-1}(aX)\,E(bX) = G(X,a,c) \ \text{ sur } \ \mathbf{A}_s.$$

On a $G(0,T,U) = \mathrm{I}_n$ sur $\mathbf{A}_s$, mais pas nécessairement sur $\mathbf{A}$. On pose :

$$H(X,T,U) = G^{-1}(0,T,U)\,G(X,T,U).$$

On a alors $H(0,T,U) = \mathrm{I}_n$ sur $\mathbf{A}$ et $H(X,T,U) = G(X,T,U)$ sur $\mathbf{A}_s$. On obtient donc

$$E^{-1}(aX)\,E(bX) = H(X,a,c) \quad \text{dans} \quad \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X], \langle X\rangle),$$

avec $H(X,a,c) \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X], \langle X\rangle)$. □

3.5. Lemme. *Soit un entier $n \geqslant 3$, $s \in \mathbf{A}$ et*

$$E = E(X) \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X]) \cap \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X]).$$

Il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que pour tous a, $b \in \mathbf{A}$ congrus modulo s^k, la matrice $E^{-1}(aX)E(bX)$ est dans $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X], \langle X\rangle)$.

D La démonstration est laissée à la lectrice. □

3.6. Lemme. *Soit un entier $n \geqslant 3$, s, t comaximaux dans $\mathbf{A}$ et*

$$E \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X], \langle X \rangle) \cap \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X]) \cap \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_t[X]).$$

Alors $E \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])$.

▷ D'après le lemme 3.5, il existe un k tel que pour tous a, $b \in \mathbf{A}$ congrus modulo s^k, ou modulo t^k, la matrice $E^{-1}(aX)E(bX)$ est dans $\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X], \langle X \rangle)$.
Soit $c \in \mathbf{A}$ tel que $c \equiv 0 \bmod s^k$ et $c \equiv 1 \bmod t^k$.
Alors on écrit $E = E^{-1}(0 \cdot X)\, E(c \cdot X)\, E^{-1}(c \cdot X)\, E(1 \cdot X)$. □

4. Principes local-globals de Suslin et Rao

Maintenant nous démontrons [Gupta & Murthy, lemme I 5.9 page 26].

4.1. Théorème. *Soit $n \geqslant 3$ et $A = A(X) \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])$.*

1. *Si $A(0) = \mathrm{I}_n$, alors l'ensemble*
$$\mathfrak{a} = \{\, s \in \mathbf{A} \mid A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X]) \,\}$$
est un idéal de $\mathbf{A}$.
2. *L'ensemble $\mathfrak{a} = \left\{\, s \in \mathbf{A} \;\middle|\; A(X) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X])}{\sim} A(0) \,\right\}$ est un idéal de $\mathbf{A}$.*

▷ Les deux formulations sont équivalentes ; on démontre la seconde à partir de la première en considérant la matrice $A(X)A(0)^{-1}$.
1. Il est clair que $s \in \mathfrak{a} \Rightarrow as \in \mathfrak{a}$ pour tout $a \in \mathbf{A}$. Soient maintenant s, t dans $\mathfrak{a}$. On doit montrer que $s + t \in \mathfrak{a}$, ou encore que $1 \in \mathfrak{a}\mathbf{A}_{s+t}$. En bref, on suppose que s et $t = 1 - s$ sont dans $\mathfrak{a}$, et l'on doit montrer que $1 \in \mathfrak{a}$.
Par définition, on a $A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X])$ et $A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_t[X])$; d'après le lemme 3.6, on a $A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])$, i.e. $1 \in \mathfrak{a}$. □

Ce lemme aurait pu être écrit sous la forme du principe local-global concret suivant (à très peu près [Gupta & Murthy, lemme I 5.8]).

4.2. Principe local-global concret. *Soient $n \geqslant 3$, S_1, …, S_k des monoïdes comaximaux de $\mathbf{A}$ et $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A}[X])$, avec $A(0) = \mathrm{I}_n$. Alors :*

$$A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X]) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{pour } i \in [\![1..k]\!], \quad A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{S_i}[X]).$$

Le théorème suivant reprend [Gupta & Murthy, corollaire II 3.8].

4.3. Théorème. (Version globale du lemme 2.3)
Soient $n \geqslant 3$, et f, $g \in \mathbf{A}[X]$ comaximaux, avec f unitaire. Alors, on a l'égalité des symboles de Mennicke suivante : $\{f, g\} = \{f(0), g(0)\}$.

▷ Écrivons $af - bg = 1$. Soit $B = \begin{bmatrix} f & g & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.
L'égalité $\{f, g\} = \{f(0), g(0)\}$ signifie : $A = BB(0)^{-1} \in \mathbb{E}_3(\mathbf{A}[X])$. On a évidemment $A(0) = \mathrm{I}_3$. Le principe local-global concret 4.2 nous dit

qu'il suffit de vérifier l'assertion après localisation en des éléments comaximaux (s_i). Et le lemme 2.4 a construit une telle famille. □

4.4. Corollaire. (Trivialité du symbole de Mennicke sur $\mathbf{K}[\underline{X}]$)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret, et* f, $g \in \mathbf{K}[\underline{X}]$ *comaximaux. Alors* $\{f, g\} = 1$.

▷ On raisonne par récurrence sur le nombre r de variables dans $\underline{X}$.
Le cas $r = 0$, i.e. $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}$ découle de $\mathbb{E}_3(\mathbf{K}) = \mathbb{SL}_3(\mathbf{K})$ ($\mathbf{K}$ est un corps discret). Pour $r \geqslant 1$, on suppose sans perte de généralité que f est non nul. Un changement de variables permet de transformer f en un polynôme pseudo unitaire en X_r (lemme VII-1.4), disons $f = ah$ avec $a \in \mathbf{K}^*$ et h unitaire en X_r. Alors, en posant $h_0 = h(X_1, \ldots, X_{r-1}, 0)$ et $g_0 = g(X_1, \ldots, X_{r-1}, 0)$, qui sont dans $\mathbf{K}[X_1, \ldots, X_{r-1}]$, on a $\{f, g\} = \{h, g\} = \{h_0, g_0\}$. □

Dans la fin de cette section, les résultats sont démontrés dans le cas d'un anneau intègre. Ils sont en fait vrais pour un anneau arbitraire. Pour le cas général, il faut se reporter à [153, 154, 155].

4.5. Théorème. *Soit* $n \geqslant 3$, $\mathbf{A}$ *un anneau intègre et* $f(X)$ *un vecteur unimodulaire dans* $\mathbf{A}[X]^n$, *alors l'ensemble*

$$\mathfrak{a} = \left\{ s \in \mathbf{A} \;\middle|\; f(X) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X])}{\sim} f(0) \right\}$$

est un idéal.

On exprime la même chose dans le principe local-global concret suivant.

4.6. Principe local-global concret de Rao. *Soit* $n \geqslant 3$, $\mathbf{A}$ *un anneau intègre,* $f(X)$ *un vecteur unimodulaire dans* $\mathbf{A}[X]^n$, *et* S_1, …, S_k *des monoïdes comaximaux de* $\mathbf{A}$. *Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

1. $f(X) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} f(0)$.
2. $f(X) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{S_i}[X])}{\sim} f(0)$ *pour chaque* i.

Démonstration du théorème 4.5.
On doit montrer que l'ensemble

$$\mathfrak{a} = \left\{ s \in \mathbf{A} \;\middle|\; f(X) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}_s[X])}{\sim} f(0) \right\}$$

est un idéal. Puisque tous les calculs dans $\mathbf{A}_s$ sont valables dans $\mathbf{A}_{sa}$, on a : $s \in \mathfrak{a}$ implique $as \in \mathfrak{a}$. Soit maintenant s_1 et s_2 dans $\mathfrak{a}$. On doit montrer que $s_1 + s_2 \in \mathfrak{a}$, ou encore que $1 \in \mathfrak{a}\mathbf{A}_{s_1+s_2}$. En bref, on suppose que s_1 et $s_2 = 1 - s_1$ sont dans $\mathfrak{a}$, et l'on doit montrer que $1 \in \mathfrak{a}$.
Par définition, pour $i = 1, 2$, on a une matrice $E_i = E_i(X) \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_i}[X])$ telle que $E_i f(X) = f(0)$. Comme $E_i(0) f(0) = f(0)$, quitte à remplacer E_i par $E_i^{-1}(0) E_i$, on peut supposer que $E_i(0) = \mathrm{I}_n$.
On introduit $E = E_1 E_2^{-1} \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_1 s_2}[X], \langle X \rangle)$, ce qui donne un entier $k \geqslant 0$ satisfaisant la conclusion du lemme 3.4 pour la matrice E et pour les deux localisations $\mathbf{A}_{s_1} \to \mathbf{A}_{s_1 s_2}$ et $\mathbf{A}_{s_2} \to \mathbf{A}_{s_1 s_2}$.

Soit $c \in \mathbf{A}$ avec $c \equiv 1 \bmod s_1^k$ et $c \equiv 0 \bmod s_2^k$. On a donc deux matrices $E_1' \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_1}[X], \langle X\rangle)$, $E_2' \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}_{s_2}[X], \langle X\rangle)$ qui vérifient :

– $E^{-1}(cX)E(X) = E_2'$ sur $\mathbf{A}_{s_1s_2}$ (puisque $c \equiv 1 \bmod s_1^k$),

– $E(cX) = E(cX)E(0 \cdot X) = E_1'$ sur $\mathbf{A}_{s_1s_2}$ (puisque $c \equiv 0 \bmod s_2^k$).

On obtient $E = E_1'E_2' = E_1E_2^{-1}$ sur $\mathbf{A}_{s_1s_2}$, et ${E_1'}^{-1}E_1 = E_2'E_2$ sur $\mathbf{A}_{s_1s_2}$. Puisque ${E_1'}^{-1}E_1 = F_1$ est définie sur $\mathbf{A}_{s_1}$, que $E_2'E_2 = F_2$ est définie sur $\mathbf{A}_{s_2}$, qu'elles sont égales sur $\mathbf{A}_{s_1s_2}$, et que s_1 et s_2 sont comaximaux, il existe une unique matrice $F \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A}[X])$ qui donne F_1 sur $\mathbf{A}_{s_1}$ et F_2 sur $\mathbf{A}_{s_2}$. Il faut encore vérifier que $F \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])$ et $Ff = f(0)$.
Le premier point résulte du lemme 3.6. Pour vérifier $Ff = f(0)$, on va supposer $\mathbf{A}$ intègre, ce qui légitime les égalités suivantes sur $\mathbf{A}$

$$\begin{array}{ccccccc} Ff & = & {E_1'}^{-1}E_1 f & = & {E_1'}^{-1}f(0) & = \\ E^{-1}(cX)f(0) & = & E_2(cX)E_1^{-1}(cX)f(0) & = & E_2(cX)f(cX) & = & f(0). \end{array}$$

□

NB : dans cette démonstration la dernière vérification est le seul endroit où nous avons besoin de supposer l'anneau intègre.

4.7. Théorème. *Soit $n \geqslant 3$, $\mathbf{A}$ un anneau et $f = {}^{\mathrm{t}}\big(f_1(X), \dots, f_n(X)\big)$ un vecteur unimodulaire dans $\mathbf{A}[X]^n$, avec 1 dans l'idéal de tête des f_i. Alors :*

$$f \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} f(0) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A})}{\sim} f^\star(0) \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} f^\star.$$

Si l'un des f_i est unitaire, on a $f \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A}[X])}{\sim} {}^{\mathrm{t}}[1\ 0\ \cdots\ 0]$.

▷ Le petit théorème de Horrocks local (théorème XVI-5.14) et le principe local-global de Rao donnent la première équivalence. Ensuite on recopie la démonstration du théorème de Rao (théorème XVI-5.18) en remplaçant $\mathbb{GL}_n$ par $\mathbb{E}_n$. □

4.8. Corollaire. (Transitivité de $\mathbb{E}_n$ pour $n \geqslant 3$)
Si $\mathbf{K}$ est un corps discret et $\mathbf{K}[\underline{X}] = \mathbf{K}[X_1, \dots, X_r]$, alors $\mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs unimodulaires de $\mathbf{K}[\underline{X}]^n$ pour $n \geqslant 3$.

▷ On raisonne par récurrence sur r. Le cas $r = 0$ découle du fait que $\mathbf{K}$ est un corps discret.
Soit $r \geqslant 1$ et $f = {}^{\mathrm{t}}[\, f_1(\underline{X})\ \cdots\ f_n(\underline{X})\,]$ un vecteur unimodulaire de $\mathbf{K}[\underline{X}]^n$. Notons $\mathbf{A} = \mathbf{K}[X_1, \dots, X_{r-1}]$. L'un des f_i est non nul et un changement de variables permet de le transformer en un polynôme pseudo unitaire en X_r (lemme VII-1.4). Avec f_i unitaire en X_r, nous appliquons le théorème 4.7 pour obtenir

$$f \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])}{\sim} f(X_1, \dots, X_{r-1}, 0).$$

Ce dernier vecteur est un vecteur unimodulaire de $\mathbf{A}^n$. On applique l'hypothèse de récurrence. □

Enfin, la preuve que le théorème 4.3 implique le théorème de stabilité de Suslin est simple et constructive, comme dans [Gupta & Murthy].

4.9. Théorème. (Théorème de stabilité de Suslin, cas des corps discrets)
Soit $\mathbf{K}$ *un corps discret. Pour* $n \geqslant 3$, *on a* $\mathbb{SL}_n(\mathbf{K}[\underline{X}]) = \mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$.

▷ Montrons le résultat préliminaire suivant.
Pour $A \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$, *il existe* P, $Q \in \mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ *telles que*

$$P\,A\,Q \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{K}[\underline{X}]) \subseteq \mathbb{GL}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])\,(^1).$$

En effet, considérons la dernière ligne de A. C'est un vecteur unimodulaire, donc (corollaire 4.8), il existe $Q_n \in \mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ telle que la dernière ligne de $A\,Q_n$ soit $[\,0\ \cdots\ 0\ 1\,]$. D'où ensuite $P_n \in \mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ telle que la dernière colonne de $P_n(A\,Q_n)$ soit ${}^t[\,0\ \cdots\ 0\ 1\,]$, i.e. $P_n\,A\,Q_n \in \mathbb{GL}_{n-1}(\mathbf{K}[\underline{X}])$.
En itérant, on trouve des matrices P, $Q \in \mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$ de la forme

$$P = P_3 \cdots P_n,\ \ Q = Q_n \cdots Q_3,$$

telles que $P\,A\,Q \in \mathbb{GL}_2(\mathbf{K}[\underline{X}])$.
Si de plus $A \in \mathbb{SL}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$, on obtient $P\,A\,Q \in \mathbb{SL}_2(\mathbf{K}[\underline{X}]) \hookrightarrow \mathbb{SL}_3(\mathbf{K}[\underline{X}])$.
On peut alors considérer son image dans $\mathbb{SL}_3(\mathbf{K}[\underline{X}])/\mathbb{E}_3(\mathbf{K}[\underline{X}])$.
Comme le symbole de Mennicke correspondant vaut 1 (corollaire 4.4), on obtient $P\,A\,Q \in \mathbb{E}_3(\mathbf{K}[\underline{X}])$, et en fin de compte $A \in \mathbb{E}_n(\mathbf{K}[\underline{X}])$. □

Exercices et problèmes

Exercice 1. Soient $U \in \mathbf{A}^{n\times m}$ et $V \in \mathbf{A}^{m\times n}$.

1. Vérifier, pour $N \in \mathbb{M}_n(\mathbf{A})$, que
$$(\mathrm{I}_m - VNU)(\mathrm{I}_m + VU) = \mathrm{I}_m + V\big(\mathrm{I}_n - N(\mathrm{I}_n + UV)\big)U$$
En déduire que si $\mathrm{I}_n + UV$ est inversible d'inverse N, alors $\mathrm{I}_m + VU$ est inversible d'inverse $\mathrm{I}_m - VNU$.
2. En déduire que $\mathrm{I}_n + UV$ est inversible si et seulement si $\mathrm{I}_m + VU$ l'est et établir des formules symétriques pour leurs inverses.
3. Montrer que $\det(\mathrm{I}_n + VU) = \det(\mathrm{I}_m + UV)$ dans tous les cas.
4. On suppose que $\mathrm{I}_m + VU$ est inversible. Montrer l'appartenance suivante due à Vaserstein.
$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & 0 \\ 0 & (\mathrm{I}_m + VU)^{-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{E}_{n+m}(\mathbf{A}).$$
Que se passe-t-il lorsque $VU = 0$?

Exercice 2. Avec les notations du lemme 2.1, vérifier que la matrice $A'^{-1}A$ est de la forme $\mathrm{I}_2 + uv$ avec $u, v \in \mathbf{A}^{2\times 1}$, $vu = 0$ et v unimodulaire.

1. L'inclusion $\mathbb{GL}_r \hookrightarrow \mathbb{GL}_n$ est définie comme d'habitude par $B \mapsto \mathrm{Diag}(B, \mathrm{I}_{n-r})$.

Exercice 3. Soient a, b, u, $v \in \mathbf{A}$ vérifiant $1 = au + bv$. Montrer, en utilisant uniquement les propriétés du symbole de Mennicke figurant dans la proposition 2.2, que $\{a, b\} = \{u, v\} = \{a - v, b + u\}$.

Exercice 4. Un $\mathbf{A}$-module E stablement libre de rang r est dit *de type t* si $E \oplus \mathbf{A}^t \simeq \mathbf{A}^{r+t}$. On s'intéresse ici aux relations entre d'une part les classes d'isomorphisme des modules stablement libres de rang $n-1$, de type 1, et d'autre part le $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$-ensemble $\mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$ constitué des vecteurs unimodulaires de $\mathbf{A}^n$.

1. Soit $x \in \mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$. Vérifier que le module $\mathbf{A}^n/\mathbf{A}x$ est stablement libre de rang $n-1$, de type 1, et que pour $x' \in \mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$, on a $\mathbf{A}^n/\mathbf{A}x \simeq \mathbf{A}^n/\mathbf{A}x'$ si, et seulement si, $x \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$. Montrer que l'on obtient ainsi une (première) correspondance bijective : $x \longleftrightarrow \mathbf{A}^n/\mathbf{A}x$

$$\boxed{\frac{\mathrm{Um}_n(\mathbf{A})}{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})} \overset{(1)}{\simeq} \frac{\text{modules stablement libres de rang } n-1, \text{ de type 1}}{\text{isomorphisme}}}$$

   Quels sont les vecteurs unimodulaires qui correspondent à un module libre ?

2. Soit $x \in \mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$. Montrer que $x^\perp \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Ker}\ {}^t x$ est un module stablement libre de rang $n-1$, de type 1, et que pour $x' \in \mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$, on a $x^\perp \simeq x'^\perp$ si et seulement si $x \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$. Vérifier que l'on obtient ainsi une (deuxième) correspondance bijective : $x \longleftrightarrow x^\perp$

$$\boxed{\frac{\mathrm{Um}_n(\mathbf{A})}{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})} \overset{(2)}{\simeq} \frac{\text{modules stablement libres de rang } n-1, \text{ de type 1}}{\text{isomorphisme}}}$$

3. Si E est stablement libre de rang r, de type t, il en est de même de son dual $E^\star$. Pour $t = 1$, décrire l'involution de $\mathrm{Um}_n(\mathbf{A})/\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ induite par l'involution $E \leftrightarrow E^\star$.

4. Soient x, x', $y \in \mathbf{A}^n$ tels que ${}^t xy = {}^t x'y = 1$. Pourquoi a-t-on $x \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$? Expliciter $g \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ tel que $gx = x'$, g de la forme $\mathrm{I}_n + uv$ avec $vu = 0$ et v unimodulaire. En déduire que pour $n \geqslant 3$, $g \in \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$, et donc $x \overset{\mathbb{E}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$.

Exercice 5. *(Modules stablement libres de type 1 autoduaux)*

1. Soient a, $b \in \mathbf{A}$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n$ avec $n \geqslant 3$ et $ax_1 + bx_2$ inversible modulo $\langle x_3, \ldots, x_n \rangle$ (en particulier, x est unimodulaire).
   On pose $x' = (-b, a, x_3, \ldots, x_n)$. Expliciter $z \in \mathbf{A}^n$ tel que $\langle x \,|\, z \rangle = \langle x' \,|\, z \rangle = 1$. En déduire, pour $G = \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ (ou mieux pour $G = \mathbb{E}_n(\mathbf{A})$) que
   $$x \overset{G}{\sim} x' \overset{G}{\sim} (a, b, x_3, \ldots, x_n).$$

2. Soient $x, y \in \mathbf{A}^4$ tels que $\langle x \,|\, y \rangle = 1$. Montrer que $x \overset{\mathbb{E}_4(\mathbf{A})}{\sim} y$. En particulier, le module stablement libre $x^\perp = \mathrm{Ker}\ {}^t x$ est isomorphe à son dual.

3. Question analogue à la précédente en remplaçant 4 par n'importe quel nombre pair $n \geqslant 4$.

Quelques solutions, ou esquisses de solutions

Exercice 1. *2.* On établit les formules

$$N = (\mathrm{I}_n + UV)^{-1} = \mathrm{I}_n - UMV,\ M = (\mathrm{I}_m + VU)^{-1} = \mathrm{I}_m - VNU$$

4. On sait que $\mathrm{I}_n + UV$ est inversible ; on note $N = (\mathrm{I}_n + UV)^{-1}$, $M = (\mathrm{I}_m + VU)^{-1}$.
On a donc $N + UVN = \mathrm{I}_n = N + NUV$ et $M + VUM = \mathrm{I}_m = M + MVU$.
On réalise les opérations élémentaires suivantes :

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & 0 \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -NU \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & -U \\ 0 & M \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & -U \\ 0 & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ V & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -U \\ MV & M \end{bmatrix},$$

puis

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -U \\ MV & M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & U \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ MV & MVU + M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ MV & \mathrm{I}_m \end{bmatrix},$$

et enfin

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ MV & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -MV & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix}.$$

On a donc explicité des matrices α, β, γ, $\delta \in \mathbb{E}_{n+m}(\mathbf{A})$ telles que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & 0 \\ 0 & (\mathrm{I}_m + VU)^{-1} \end{bmatrix} \alpha\,\beta\,\gamma\,\delta = \mathrm{I}_{n+m},$$

d'où

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & 0 \\ 0 & (\mathrm{I}_m + VU)^{-1} \end{bmatrix} = \delta^{-1}\,\gamma^{-1}\,\beta^{-1}\,\alpha^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ MV & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & -U \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & 0 \\ -V & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathrm{I}_n & NU \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix}.$$

Dans le cas particulier où $VU = 0$, on a montré que

$$\begin{bmatrix} \mathrm{I}_n + UV & 0 \\ 0 & \mathrm{I}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{E}_{n+m}(\mathbf{A}).$$

Exercice 2. En utilisant $ad' = 1 + bc'$, $ad = 1 + bc$, on obtient pour $A'^{-1}A$

$$\begin{bmatrix} d' & -b \\ -c' & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad' - bc & bd' - bd \\ ac - ac' & ad - bc' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + b(c' - c) & b(d' - d) \\ a(c - c') & 1 + b(c' - c) \end{bmatrix}$$

En remplaçant $b(c' - c)$ par $a(d' - d)$, on voit que

$$A'^{-1}A = \mathrm{I}_2 + uv \text{ avec } u = \begin{bmatrix} d' - d \\ c - c' \end{bmatrix},\ v = \begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix},\ vu = 0, \text{ et } v \text{ unimodulaire.}$$

Exercice 3. On a $\{au, b\} = \{a, b\}\{u, b\}$.
Mais $au = 1 - bv$ donc $\{au, b\} = \{1 - bv, b\} = \{1, b\} = 1$. Bilan : $\{a, b\}\{u, b\} = 1$.
De la même manière, $\{u, b\}\{u, v\} = 1$, donc $\{a, b\} = \{u, v\}$.
Enfin, $(a - v)u + (b + u)v = 1$, donc $\{a - v, b + u\} = \{u, v\}$.

Exercice 4. *1.* Soit $y \in \mathbf{A}^n$ tel que ${}^t\!yx = 1$.
On a $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}x \oplus \mathrm{Ker}\ {}^t\!y$ et donc $\mathbf{A}^n/\mathbf{A}x \simeq \mathrm{Ker}\ {}^t\!y$ est stablement libre.
Si $x \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$, il est clair que $\mathbf{A}^n/\mathbf{A}x \simeq \mathbf{A}^n/\mathbf{A}x'$.

Réciproquement soit $\varphi : M = \mathbf{A}^n/\mathbf{A}x \to M' = \mathbf{A}^n/\mathbf{A}x'$ un isomorphisme. On a $\mathbf{A}^n \simeq M \oplus \mathbf{A}x \simeq M' \oplus \mathbf{A}x'$. On définit $\psi : \mathbf{A}x \to \mathbf{A}x'$, $ax \mapsto ax'$. Alors $\varphi \oplus \psi$ vu dans $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ transforme x en x', donc $x \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$.
Un vecteur unimodulaire $x \in \mathbf{A}^n$ fournit un module libre $\mathbf{A}^n/\mathbf{A}x$ si, et seulement si, x fait partie d'une base de $\mathbf{A}^n$.
2. Posons $M = x^\perp$, $M' = x'^\perp$ et supposons $M \simeq M'$. En désignant par $\mathring{M} \subseteq (\mathbf{A}^n)^\star$ l'orthogonal de $M \subseteq \mathbf{A}^n$, on a $\mathring{M} = \mathbf{A}\,{}^{\mathrm{t}}x$ et $\mathring{M}' = \mathbf{A}\,{}^{\mathrm{t}}x'$. Si $\langle x \,|\, y\rangle = 1$, $\langle x' \,|\, y'\rangle = 1$, on a $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus M = \mathbf{A}y' \oplus M'$, d'où un automorphisme de $\mathbf{A}^n$ transformant M en M' (envoyer y sur y'), puis par dualité, un automorphisme u de $(\mathbf{A}^n)^\star \simeq \mathbf{A}^n$ transformant $\mathbf{A}\,{}^{\mathrm{t}}x$ en $\mathbf{A}\,{}^{\mathrm{t}}x'$. On en déduit $u({}^{\mathrm{t}}x) = \varepsilon\,{}^{\mathrm{t}}x'$ avec $\varepsilon \in \mathbf{A}^\times$. Alors, $\varepsilon^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}u$ transforme x en x'.
3. Si $G = E \oplus F$, alors $G^\star \simeq E^\star \oplus F^\star$; avec $G = \mathbf{A}^{r+t} \simeq G^\star$, $F = \mathbf{A}^r \simeq F^\star$, on obtient le résultat. L'involution induite sur $\mathrm{Um}_n(\mathbf{A})/\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ est la suivante : à la classe modulo $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ de $x \in \mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$, on associe la classe modulo $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ d'un élément $y \in \mathrm{Um}_n(\mathbf{A})$ qui satisfait $\langle x \,|\, y\rangle = 1$. Naturellement, il y a plusieurs y qui conviennent mais leur classe modulo $\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ est bien définie.
4. On a $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}y \oplus x^\perp = \mathbf{A}y \oplus x'^\perp$ d'où $x^\perp \simeq x'^\perp \simeq \mathbf{A}^n/\mathbf{A}y$ donc $x \overset{\mathbb{GL}_n(\mathbf{A})}{\sim} x'$. Pour déterminer $g \in \mathbb{GL}_n(\mathbf{A})$ réalisant $gx = x'$, on utilise $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}x \oplus y^\perp = \mathbf{A}x' \oplus y^\perp$. De manière générale, soit $G = E \oplus F = E' \oplus F$; pour expliciter un automorphisme de G qui envoie E sur E', on procède comme suit. Soit π la projection sur E, π' celle sur E' et $p = \mathrm{I}_G - \pi$, $p' = \mathrm{I}_G - \pi'$.
Les projecteurs p et p' ont même image F. Notons $h = p' - p = \pi - \pi'$.
On obtient $h^2 = 0$ et $(\mathrm{I}_G - h)p(\mathrm{I}_G + h) = p'$, ou encore $(\mathrm{I}_G - h)\pi(\mathrm{I}_G + h) = \pi'$.
Donc $\mathrm{I}_G - h$ est un automorphisme de G transformant $\operatorname{Im}\pi = E$ en $\operatorname{Im}\pi' = E'$.
Ici $E = \mathbf{A}x$, $E' = \mathbf{A}x'$, $F = y^\perp$, donc

$$\pi(z) = \langle z \,|\, y\rangle x, \quad \pi'(z) = \langle z \,|\, y\rangle x', \quad h(z) = \langle z \,|\, y\rangle (x - x').$$

L'automorphisme cherché de $\mathbf{A}^n$ qui transforme x en x' est donc

$$\mathrm{I}_n - h : z \mapsto z + \langle z \,|\, y\rangle (x' - x) \quad \text{i.e.} \quad \mathrm{I}_n - h = \mathrm{I}_n + uv$$

avec $u = x' - x \in \mathbf{A}^{n\times 1}$, $v = {}^{\mathrm{t}}y \in \mathbf{A}^{1\times n}$; on a bien $vu = 0$ et v unimodulaire.

Exercice 5. *1.* La clef du problème se trouve dans la double égalité suivante pour un u dans $\mathbf{A}$: $z_1 = u(a + x_2)$, $z_2 = u(b - x_1)$, ce qui implique

$$z_1x_1 + z_2x_2 = u(ax_1 + bx_2) = z_1b + z_2(-a).$$

Soit u tel que $u(ax_1 + bx_2) + z_3x_3 + \cdots + z_nx_n = 1$ et $z = (z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n)$. On a alors $\langle z \,|\, x\rangle = \langle z \,|\, x'\rangle = 1$. D'après l'exercice 4, $x \overset{G}{\sim} x'$. Comme $(b, -a) \overset{\mathbb{E}_2(\mathbf{A})}{\sim} (a, b)$, on a $x \overset{G}{\sim} (a, b, x_3, \ldots, x_n)$.
2. Comme $x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_4y_4 = 1$, on a

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \overset{G}{\sim} (y_1, y_2, x_3, x_4) \overset{G}{\sim} (y_1, y_2, y_3, y_4)$$

Le reste de la question en découle aussitôt.
3. Méthode analogue à la question précédente.

Commentaires bibliographiques

La section 2 et la démonstration du théorème 4.9 suivent de très près l'exposé de [Gupta & Murthy]. Pour l'essentiel nous avons seulement transformé quelques arguments local-globals abstraits en arguments concrets via une utilisation de la machinerie locale-globale à idéaux premiers expliquée dans la section XV-5.

La section 3 est directement inspirée de [Lam06, chapitre VI, section 2].

Annexe

Logique constructive

Sommaire

Introduction

Cette annexe est consacrée à l'exposition de quelques concepts de base des mathématiques constructives dans le style de Bishop, illustré par les trois ouvrages fondateurs [Bishop, Bishop & Bridges, MRR].
Par logique constructive, nous entendons la logique des mathématiques constructives.

1. Objets de base, Ensembles, Fonctions

Entiers naturels et constructions sont deux notions primitives. Elles ne peuvent pas être définies.
D'autres notions primitives sont liées au langage usuel et difficiles à situer précisément. Par exemple l'égalité du nombre 2 en deux occurrences distinctes.
La formalisation d'un morceau de mathématiques peut être utilisée pour mieux comprendre ce que l'on est en train d'y faire. Mais pour parler à propos d'un formalisme il faut comprendre beaucoup de choses qui sont du même genre de complexité que les entiers naturels. Ainsi, le formalisme est seulement un outil et il ne peut pas remplacer les intuitions et les expériences de base (par exemple les entiers naturels, les constructions) : si puissant que soit un ordinateur, il ne comprendra jamais « ce qu'il fait », ou encore, comme le disait René Thom, « Tout ce qui est rigoureux est insignifiant ».

Ensembles

Un *ensemble* $(X, =_X, \neq_X)$ est défini en disant :
— comment on peut construire un élément de l'ensemble (nous disons que nous avons défini un *préensemble* X)
— quelle est la signification de l'*égalité* pour deux éléments de l'ensemble (nous avons à montrer que c'est bien une relation d'équivalence)
— quelle est la signification de la *distinction*[1] pour deux éléments de l'ensemble (on dit alors que les éléments sont *discernables* ou *distincts*). Nous avons à montrer les propriétés suivantes :

- $(x \neq_X y \ \wedge \ x =_X x' \ \wedge \ y =_X y') \ \Rightarrow \ x' \neq_X y'$,
- $x \neq_X x$ est impossible,
- $x \neq_X y \ \Rightarrow \ y \neq_X x$.

Ordinairement, on laisse tomber l'indice X pour les symboles $=$ et $\neq$. Si la distinction n'est pas précisée, elle est implicitement définie comme signifiant l'absurdité de l'égalité.

1. Cette terminologie *n'est pas* un hommage à Pierre Bourdieu. Tous comptes faits, nous préférons *distinction* à *non-égalité*, qui présente l'inconvénient d'une connotation négative, et à *inégalité* qui est plutôt utilisé dans le cadre des relations d'ordre. Pour les nombres réels par exemple, c'est l'égalité et non la distinction qui est une assertion négative.

Une relation de distinction est appelée une relation de *séparation* si elle vérifie la propriété de *cotransitivité* suivante (pour trois éléments x, y, z de X arbitraires) :

– $x \neq_X y \Rightarrow (x \neq_X z \vee y \neq_X z)$

Une relation de séparation $\neq_X$ est dite *étroite* si $x =_X y$ équivaut à l'absurdité de $x \neq_X y$. Dans un ensemble avec une séparation étroite, la distinction est souvent plus importante que l'égalité.

Un ensemble $(X, =_X, \neq_X)$ est dit *discret* si l'on a

$$\forall x, y \in X \ (x =_X y \vee x \neq_X y).$$

Dans ce cas la distinction est une séparation étroite et elle équivaut à l'absurdité de l'égalité.

Les entiers naturels

L'ensemble $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ des entiers naturels est considéré comme bien défini a priori. Notez cependant que constructivement il s'agit d'un *infini potentiel* et pas d'un *infini actuel*. On entend par l'idée d'infini potentiel que l'infinitude de $\mathbb{N}$ est appréhendée comme une notion essentiellement négative : on n'a jamais fini d'épuiser les entiers naturels. Au contraire, la sémantique de $\mathbb{N}$ en mathématiques classiques est celle d'un infini achevé, qui existe «quelque part» au moins de manière purement idéale.

Un entier naturel peut être codé d'une manière usuelle. La comparaison de deux entiers donnés sous forme codée peut être faite de manière sûre. En bref, l'ensemble des entiers naturels est un ensemble discret et la relation d'ordre est *décidable* :

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad (n < m \quad \vee \quad n = m \quad \vee \quad n > m)$$

Ensembles de couples

Quand deux ensembles sont définis, leur *produit cartésien* est également défini, de manière naturelle : la fabrication des couples d'objets est une construction élémentaire. L'égalité et la distinction sur un produit cartésien sont définis de manière naturelle.

Fonctions

L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des suites d'entiers naturels dépend de la notion primitive de construction. Un élément de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une construction qui prend en entrée un élément de $\mathbb{N}$ et donne en sortie un élément de $\mathbb{N}$. L'égalité de deux éléments dans $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est l'*égalité extensionnelle* :

$$(u_n) =_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (v_n) \quad \text{signifie} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ \ u_n = v_n.$$

Ainsi, l'égalité entre deux éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ demande a priori une infinité de «calculs élémentaires», en fait l'égalité réclame une preuve.

La distinction de deux éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est la relation de *distinction extensionnelle* :

$$(u_n) \neq_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} (v_n) \quad \overset{\text{def}}{\iff} \quad \exists n \in \mathbb{N} \;\; u_n \neq v_n.$$

Ainsi, la distinction de deux éléments de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ peut être constatée par un simple calcul.

1.1. Exemple. *La distinction de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est une relation de séparation étroite.*

L'argument diagonal de Cantor est constructif. Il montre que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est *beaucoup plus compliqué* que $\mathbb{N}$. D'un point de vue constructif, $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ sont seulement des infinis potentiels : cela n'a pas de signification de dire qu'un infini potentiel est *plus grand* qu'un autre.

Digression. Quand vous dites « Je vous donne une suite d'entiers naturels », vous devez prouver que la construction $n \mapsto u_n$ que vous proposez fonctionne pour n'importe quelle entrée n. Par ailleurs, quand vous dites « Considérons une suite arbitraire de nombres naturels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ », la seule chose que vous savez avec certitude est que pour tout $n \in \mathbb{N}$, vous avez $u_n \in \mathbb{N}$, et que cet u_n est non ambigu : vous pouvez par exemple concevoir la suite comme donnée par un oracle. En fait, vous pourriez a priori demander, de manière symétrique, ce qu'est exactement la construction $n \mapsto u_n$, et une preuve que cette construction fonctionne pour toute entrée n.
Mais, dans le constructivisme à la Bishop, on ne fait aucune hypothèse précise concernant « ce que sont les constructions légitimes de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ », ni non plus sur « qu'est-ce précisément qu'une preuve qu'une construction marche ? ». Ainsi nous sommes dans une situation dissymétrique.
Cette dissymétrie a la conséquence suivante. Tout ce que vous prouvez a un contenu calculatoire. Mais tout ce que vous prouvez est également valide d'un point de vue classique. Les mathématiques classiques pourraient voir les mathématiques constructives comme parlant seulement d'objets constructifs. Et les mathématiques constructives de Bishop sont certainement intéressées au premier chef par les objets constructifs (cf. [17]). Mais en fait, les mathématiques constructives à la Bishop font des preuves constructives qui marchent pour n'importe quel type d'objets mathématiques [2]. Les théorèmes que l'on trouve dans [Bishop & Bridges] et [MRR] sont valables en mathématiques classiques, mais ils supportent aussi l'interprétation constructive russe (dans laquelle tous les objets mathématiques sont des mots d'un langage formel que l'on pourrait fixer une fois pour toutes) ou encore la philosophie intuitionniste de Brouwer, qui a une composante nettement idéaliste. ∎

Après cette digression revenons à nos moutons : les fonctions. De manière générale, une *fonction* $f : X \to Y$ est une construction qui prend en entrée

2. ... s'il existe des objets mathématiques non constructifs.

un $x \in X$ et une preuve que $x \in X$, et donne en sortie un $y \in Y$ et une preuve que $y \in Y$. En outre, cette construction doit être *extensionnelle* :

$$x =_X x' \Rightarrow f(x) =_Y f(x') \qquad \text{et} \qquad f(x) \neq_Y f(x') \Rightarrow x \neq_X x'$$

Quand X et Y sont des ensembles bien définis, on considère (dans les mathématiques constructives à la Bishop) que l'ensemble $\mathcal{F}(X, Y)$ des fonctions $f : X \to Y$ est aussi bien défini. Pour l'égalité et la distinction on prend les définitions extensionnelles usuelles.

Une fonction $f : X \to Y$ est *injective* si elle vérifie

$$f(x) =_Y f(x') \Rightarrow x =_X x' \qquad \text{et} \qquad x \neq_X x' \Rightarrow f(x) \neq_Y f(x')$$

Ensembles finis, bornés, énumérables et dénombrables

Nous donnons maintenant un certain nombre de définitions constructivement pertinentes en relation avec les concepts d'ensembles finis, infinis et dénombrables en mathématiques classiques.

- Un ensemble est *fini* s'il y a une bijection entre cet ensemble et l'ensemble des entiers $< n$ pour un certain entier n.[3]
- Un ensemble X *finiment énumérable* si l'on a une application surjective d'un segment $[0, n[$ de $\mathbb{N}$ sur X (c'est la définition donnée page 88).
- Un ensemble X est dit *énumérable* si l'on a donné un moyen de l'énumérer en lui laissant la possibilité d'être vide[4], ce qui se passe en pratique comme suit. On donne un $\alpha \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ et une opération φ qui satisfont les deux assertions suivantes :
  - si $\alpha(n) = 1$ alors φ construit à partir de l'entrée n un élément de X,
  - tout élément de X est construit de cette façon.
- Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est énumérable et discret.
- Si n est un entier non nul, on dit qu'un ensemble *possède au plus n éléments* si pour toute famille $(a_i)_{i=0,\ldots,n}$ dans l'ensemble il existe des entiers h et k $(0 \leqslant h < k \leqslant n)$ tels que $a_h = a_k$.
- Un ensemble X est *borné en nombre* (*borné* tout court s'il n'y a pas d'ambiguïté) s'il existe un entier n non nul tel que X ait au plus n éléments (définition donnée page 417).
- Un ensemble X est *faiblement fini* si pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X il existe m et $p > m$ tels que $u_m = u_p$.
- Un ensemble X est *infini* s'il existe une application injective $\mathbb{N} \to X$.

3. C'est la définition donnée page 88, dans le paragraphe « Deux mots sur les ensembles finis ».

4. Page 88, on a donné la définition pour les ensembles non vides.

1.2. Exemple. Un ensemble infini et dénombrable peut être mis en bijection avec $\mathbb{N}$.

Parties d'un ensemble

Une partie d'un ensemble $(X, =_X, \neq_X)$ est définie par une propriété $P(x)$ *portant sur les éléments de* X, c.-à-d. vérifiant

$$\forall x, y \in X \ \big(\ (\ x = y \ \wedge \ P(x) \ ) \ \implies \ P(y) \ \big).$$

Un élément de la partie $\{ \, x \in X \mid P(x) \, \}$ est donné par un couple (x, p) où x est un élément de X et p est une preuve que $P(x)$([5]). Deux propriétés concernant les éléments de X définissent la même partie lorsqu'elles sont équivalentes.

On peut aussi présenter les choses de la manière suivante, qui, bien que revenant au même, fait un peu moins mal à la tête au nouveau venu. Une partie de X est donnée par un couple (Y, φ) où Y est un ensemble et φ est une fonction injective de Y dans X([6]). Deux couples (Y, φ) et (Y', φ') définissent la même partie de X si l'on a

$$\forall y \in Y \ \exists y' \in Y' \ \varphi(y) = \varphi'(y') \quad \text{et} \quad \forall y' \in Y' \ \exists y \in Y \ \varphi(y) = \varphi'(y').$$

En mathématiques constructives on considère que les parties de X ne forment pas un ensemble, mais une *classe*. Cette classe n'a pas clairement le statut d'un ensemble (au sens donné plus haut). L'intuition est la suivante : les ensembles sont des classes suffisamment bien définies pour que l'on puisse quantifier universellement ou existentiellement sur leurs éléments. Pour cela, il faut que le procédé de construction des éléments soit clair.

Rappelons qu'une partie Y de X est dite *détachable* lorsque l'on a un test pour « $x \in Y$? » lorsque $x \in X$. Les parties détachables de X forment un ensemble qui s'identifie à $\{0,1\}^X$.

Constructivement, on ne connaît aucune partie détachable de $\mathbb{R}$, hormis $\emptyset$ et $\mathbb{R}$: *il n'y a pas de trou dans le continu sans la logique du tiers exclu.*

Remarque. Une variante constructivement intéressante pour « une partie Y_1 de X » est obtenue en considérant un couple (Y_1, Y_2) de parties de X qui vérifient les deux propriétés suivantes

$$\forall x_1 \in Y_1 \ \forall x_2 \in Y_2 \ \ x_1 \neq_X x_2 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in X \ \neg(x \notin Y_1 \ \wedge \ x \notin Y_2)$$

Le *complémentaire* est alors donné par le couple (Y_2, Y_1), ce qui rétablit une certaine symétrie. ∎

5. Par exemple, un nombre réel $\geqslant 0$ est *un peu plus qu*'un nombre réel.

6. Par exemple on peut définir les nombres réels $\geqslant 0$ comme ceux qui sont donnés par des suites de Cauchy de rationnels $\geqslant 0$.

La classe des parties d'un ensemble
Notons $\mathrm{P}(X)$ la classe des parties de l'ensemble X. Si l'on admettait $\mathrm{P}(\{0\})$ comme un ensemble, alors $\mathrm{P}(X)$ serait également un ensemble et il y aurait une bijection naturelle entre $\mathrm{P}(X)$ et $\mathcal{F}\big(X, \mathrm{P}(\{0\})\big) = \mathrm{P}(\{0\})^X$.
Ceci montre que toute la difficulté avec l'ensemble des parties est concentrée sur la classe $\mathrm{P}(\{0\})$, c'est-à-dire la classe des *valeurs de vérité*. En mathématiques classiques, on admet que cette classe est un ensemble à deux éléments, c'est le *principe du tiers exclu* **PTE** :

$$\mathrm{P}(\{0\}) = \{\{0\}, \emptyset\}$$

(la classe des valeurs de vérité se réduit à l'ensemble $\{\mathsf{Vrai}, \mathsf{Faux}\}$) et l'on n'a évidemment plus aucun problème avec $\mathrm{P}(X)$.

2. Affirmer signifie prouver

En mathématiques constructives la vérité est aussi le résultat d'une construction. Si P est une assertion mathématique, nous écrirons « $\vdash P$ » pour « nous avons une preuve de P ».

Les assertions élémentaires peuvent être testées par des calculs simples. Par exemple, la comparaison de deux entiers naturels. Quand une assertion signifie une infinité d'assertions élémentaires (e.g., la conjecture de Goldbach [7]), les mathématiques constructives considèrent qu'elle n'est pas a priori « vraie ou fausse ». A fortiori, les assertions ayant une complexité logique encore plus grande ne sont pas considérées (d'un point de vue constructif) comme ayant a priori la valeur de vérité Vrai ou Faux.
Ceci ne doit pas être nécessairement considéré comme une position philosophique concernant la vérité. Mais c'est sûrement une position mathématique concernant les assertions mathématiques. En fait, cette position est nécessaire pour avoir une signification calculatoire pour tous les théorèmes qui sont prouvés de manière constructive.

Digression carrément philosophique. Cette position est également à distinguer de la position qui consiste à dire qu'il y a certainement différents univers mathématiques possibles, par exemple l'un dans lequel l'hypothèse du continu [8] est vraie, un autre dans lequel elle est fausse. Cette position est naturellement parfaitement défendable (Cantor, et sans doute Gödel, l'auraient refusée au nom d'un réalisme platonicien des Idées), mais elle intéresse peu les mathématiques constructives à la Bishop qui ont pour objet

7. Tout nombre pair $\geqslant 4$ est somme de deux nombres premiers.

8. L'hypothèse du continu est, dans la théorie des ensembles classiques, l'affirmation qu'il n'y a pas de cardinal strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$, autrement dit, que toute partie infinie de $\mathbb{R}$ est équipotente à $\mathbb{N}$ ou à $\mathbb{R}$.

d'étude une abstraction de l'univers concret des calculs finis, avec l'idée que cette abstraction doit correspondre d'aussi près que possible à la réalité qu'elle veut décrire. Ainsi, l'hypothèse du continu est plutôt dans ce cadre considérée comme vide de signification, car il est vain de vouloir comparer des infinis potentiels selon leur taille. Si l'on désire les comparer selon leur complexité, on s'aperçoit bien vite qu'il n'y a aucun espoir de mettre une vraie relation d'ordre total dans ce fouillis. En conséquence, l'hypothèse du continu ne semble rien d'autre aujourd'hui qu'un jeu des spécialistes de la théorie formelle ZF. Mais chacun et chacune est bien libre de croire Platon, ou même Cantor, ou Zermelo-Frankel, ou encore, pourquoi pas, de croire en la multiplicité des mondes. Personne ne pourra jamais lui prouver qu'il a tort. Et rien ne dit par ailleurs que le jeu ZF ne s'avérera pas un jour vraiment utile, par exemple pour comprendre certains points subtils des mathématiques qui ont une signification concrète. ∎

3. Connecteurs et quantificateurs

Ici nous donnons l'explication « Brouwer-Heyting-Kolmogorov » pour la signification constructive des symboles logiques usuels. Ce sont seulement des explications informelles, pas des définitions [9].
Il s'agit d'explications « détaillées », pour ce qui concerne les connecteurs logiques et les quantificateurs, concernant ce que l'on entend par le slogan « affirmer signifie prouver ». Quand on écrit $\vdash P$ on sous-entend que l'on dispose d'une preuve constructive de P. Nous expliciterons ceci en donnant un nom, par exemple p, à cet objet mathématique qu'est la preuve de P. Les explications concernent alors ces objets particuliers p, mais tout ceci reste informel.

Conjonction : $\vdash P \wedge Q$ signifie : « $\vdash P$ et $\vdash Q$ » (comme pour la logique classique). En d'autres termes : une preuve de $P \wedge Q$ est un couple (p, q) où p est une preuve de P et q une preuve de Q.

Disjonction : $\vdash P \vee Q$ signifie : « $\vdash P$ ou $\vdash Q$ » (ce qui ne marche pas avec la logique classique). En d'autres termes : une preuve de $P \vee Q$ est un couple (n, r) avec $n \in \{0, 1\}$. Si $n = 0$, r doit être une preuve de P, et si $n = 1$, r doit être une preuve de Q.

Implication : $\vdash P \Rightarrow Q$ a la signification suivante :
une preuve de $P \Rightarrow Q$ est une construction $p \mapsto q$ qui transforme toute preuve p de P en une preuve q de Q.

Négation : $\neg P$ est une abréviation de $P \Rightarrow 0 =_{\mathbb{N}} 1$.

9. Pour le point de vue de Kolmogorov plus précisément sur « la logique des problèmes » on pourra consulter [119, Kolmogorov] et [33, Coquand].

Quantificateur universel : (similaire à l'implication). *Une quantification est toujours une quantification sur les objets d'un ensemble défini au préalable.* Soit $P(x)$ une propriété concernant les objets x d'un ensemble X.
Alors $\vdash\ \forall x \in X\ \ P(x)$ a la signification suivante : nous avons une construction $(x,q) \mapsto p(x,q)$ qui prend en entrée n'importe quel couple (x,q), où x est un objet et q est une preuve que $x \in X$, et donne en sortie une preuve $p(x,q)$ de l'assertion $P(x)$.
Pour une quantification sur $\mathbb{N}$, on estime que la donnée d'un entier x (sous-entendu, sous forme standard) suffit à prouver que $x \in \mathbb{N}$: la partie q dans le couple (x,q) ci-dessus peut être omise.

3.1. Exemple. *Supposons que les propriétés P et Q dépendent d'une variable $x \in \mathbb{N}$. Alors une preuve de $\forall x \in \mathbb{N}\ \big(P(x) \vee Q(x)\big)$ est une construction $\mathbb{N} \ni x \mapsto \big(n(x), r(x)\big)$, où $n(x) \in \{0,1\}$: si $n(x) = 0$, $r(x)$ est une preuve de $P(x)$, et si $n(x) = 1$, $r(x)$ est une preuve de $Q(x)$.* ∎

Quantificateur existentiel : (similaire à la disjonction) *Une quantification est toujours une quantification sur les objets d'un ensemble défini au préalable.* Soit $P(x)$ une propriété concernant les objets x d'un ensemble X.
Alors $\vdash\ \exists x \in X\ P(x)$ a la signification suivante : une preuve de $\exists x \in X\ P(x)$ est un triplet (x,p,q) où x est un objet, p est une preuve de $x \in X$, et q une preuve de $P(x)$.

3.2. Exemple. *Soit $P(x,y)$ une propriété concernant les entiers naturels x et y. Alors l'affirmation*

$$\vdash\ \forall x \in \mathbb{N}\ \ \exists y \in \mathbb{N}\ \ P(x,y)$$

signifie : voici un couple (u,p) où u est une construction $u : x \mapsto y = u(x)$ de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ et p est une preuve de $\vdash\ \forall x \in \mathbb{N}\ P\big(x,u(x)\big)$. ∎

3.3. Exemple. (Logique des propositions)
La classe des valeurs de vérité en mathématiques constructives est une algèbre de Heyting.
NB : P($\{0\}$) étant une classe et non un ensemble on entend simplement par là que les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\to$ et les constantes Vrai et Faux satisfont les axiomes des algèbres de Heyting.
En particulier, soient A, B, C des propriétés mathématiques. On a les équivalences suivantes.

$\vdash\ \big((A \Rightarrow C)\ \wedge\ (B \Rightarrow C)\big)\ \iff\ \big((A\ \vee\ B)\ \Rightarrow\ C\big)$
$\vdash\ \big(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)\big)\ \iff\ \big((A\ \wedge\ B)\ \Rightarrow\ C\big)$
$\vdash\ \neg(A\ \vee B\ )\ \iff\ (\neg A \wedge \neg B)$
$\vdash\ (A \Rightarrow B)\ \implies\ (\neg B\ \Rightarrow\ \neg A)$
$\vdash\ \neg\neg\neg A\ \iff\ \neg A$

Si en outre on a $\vdash\ A\ \vee \neg A$ et $\vdash\ B\ \vee \neg B$, alors on a :

$$\vdash \neg\neg A \iff A$$
$$\vdash \neg(A \wedge B) \iff (\neg A \vee \neg B)$$
$$\vdash (A \Rightarrow B) \iff (\neg A \vee B)$$ ∎

Remarque. Puisque $\neg\neg\neg A \Leftrightarrow \neg A$, une propriété C est équivalente à une propriété $\neg B$ (pour une certaine propriété B non encore précisée) si, et seulement si, $\neg\neg C \Rightarrow C$. Ainsi, on peut définir en mathématiques constructives le concept de *propriété négative*. En mathématiques classiques, le concept n'a pas d'intérêt puisque toute propriété est négative. En mathématiques constructives, il faut prendre garde que Vrai est aussi une propriété négative : puisque Faux ⇒ Faux, ¬Faux est vrai. ∎

4. Calculs mécaniques

Nous discutons ici un point qui est souvent mal apprécié par les mathématiciens classiques. Une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ est donnée par une construction. Les constructions usuelles correspondent à des programmes algorithmiques qui peuvent tourner sur un ordinateur « idéal » [10]. Ceci conduit à la notion de *calculs mécaniques*. Une fonction $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ obtenue par un tel calcul mécanique est appelée une *fonction récursive*.

Le sous-ensemble $\mathsf{Rec} \subset \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ formé par les fonctions récursives peut alors être décrit de manière plus formelle comme nous allons l'expliquer maintenant. Rappelons qu'une *fonction primitive récursive* est une fonction $\mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ qui peut être définie par composition ou par récurrence simple à partir de fonctions primitives récursives déjà définies (nous commençons avec les fonctions constantes et l'addition $+$). Appelons Prim_2 l'ensemble des fonctions primitives récursives $\mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. On vérifie sans peine que Prim_2 est un ensemble énumérable.

Une fonction $\beta \in \mathsf{Prim}_2$ peut être pensée comme simulant l'exécution d'un programme de la manière suivante. Pour une entrée n nous calculons $\beta(n, m)$ pour $m = 0, 1, \ldots$ jusqu'à ce que $\beta(n, m) \neq 0$ (intuitivement : jusqu'à ce que le programme arrive à l'instruction Stop). Alors, la fonction $\alpha \in \mathsf{Rec}$ calculée par le « programme » $\beta \in \mathsf{Prim}_2$ est : $f : n \mapsto \beta(n, m_n) - 1$ où m_n est la première valeur de m telle que $\beta(n, m) \neq 0$.

Ainsi, nous obtenons une application surjective d'un sous-ensemble *Rec* de Prim_2 sur Rec, et Rec peut être identifié au préensemble *Rec* muni de l'égalité et de la distinction convenables. Cela signifie que Rec est défini comme un « quotient » [11] d'un sous-ensemble d'un ensemble énumérable.

10. Un ordinateur disposant de tout l'espace et de tout le temps nécessaire au calcul envisagé.

11. Puisque Rec est l'image de *Rec* par une application surjective.

Les éléments de la partie *Rec* de Prim_2 sont définis par la condition suivante :

$$\beta \in Rec \overset{\text{def}}{\iff} (*) \ : \ \forall n \in \mathbb{N} \ \exists m \in \mathbb{N} \quad \beta(n,m) \neq 0$$

D'un point de vue classique, pour n'importe quel $\beta \in \mathsf{Prim}_2$, l'assertion $(*)$ ci-dessus est vraie ou fausse dans l'absolu, en référence à la logique du tiers exclu (ou, si l'on préfère, à l'infinité actuelle de $\mathbb{N}$) : la notion de calcul mécanique peut ainsi être définie sans référence aucune à une notion primitive de construction.
D'un point de vue constructif par contre, l'assertion $(*)$ doit être prouvée, et une telle preuve est elle-même une construction. Ainsi *la notion de calcul mécanique dépend de la notion de construction, qui ne peut pas être définie.*
Signalons pour terminer ce paragraphe que le constructivisme russe à la Markov admet comme principe fondamental l'égalité $\mathsf{Rec} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, principe parfois appelé **Fausse Thèse de Church**. Voir [Beeson, Bridges & Richman] et [160, Richman]. La vraie **Thèse de Church** est qu'aucun système de calcul automatique ne pourra jamais calculer d'autres fonctions que les fonctions récursives : on pourra améliorer les performances des ordinateurs, mais aucun système de calcul automatique ne pourra dépasser ce qu'ils savent calculer «en principe» (c'est-à-dire s'ils disposent du temps et de l'espace nécessaire). La vraie Thèse de Church est extrêmement vraisemblable, mais elle n'est évidemment susceptible d'aucune preuve.

5. Principes d'omniscience

On appelle *principe d'omniscience* un principe qui, bien que vrai en mathématiques classiques, pose manifestement problème en mathématiques constructives, car il suppose une connaissance a priori de ce qui se passe avec un infini potentiel. Le mot omniscience vaut donc ici pour «prescience de l'infini potentiel». Les principes d'omniscience ont en général des contre-exemples durs dans les mathématiques constructives russes. Ils ne peuvent cependant pas être démontrés faux dans les mathématiques constructives à la Bishop, car elles sont compatibles avec les mathématiques classiques.

Le Petit Principe d'Omniscience
Soit $\alpha = (\alpha_n) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ une *suite binaire*, i.e., une construction qui donne pour chaque entier naturel (en entrée) un élément de $\{0,1\}$ (en sortie). Considérons les assertions suivantes :

$$\begin{aligned} P(\alpha) &: \alpha_n = 1 \text{ pour un } n, \\ \neg P(\alpha) &: \alpha_n = 0 \text{ pour tout } n, \\ P(\alpha) \vee \neg P(\alpha) &: P(\alpha) \text{ ou } \neg P(\alpha), \\ \forall \alpha \ \big(P(\alpha) \vee \neg P(\alpha)\big) &: \text{pour toute suite binaire } \alpha,\ P(\alpha) \text{ ou } \neg P(\alpha). \end{aligned}$$

Une preuve constructive de $P(\alpha) \vee \neg P(\alpha)$ devrait fournir un algorithme qui ou bien montre que $\alpha_n = 0$ pour tout n, ou bien calcule un entier naturel n tel que $\alpha_n = 1$.
Un tel algorithme est beaucoup trop performant, car il permettrait de résoudre de manière automatique un grand nombre de conjectures importantes. En fait nous savons que si un tel algorithme existe, il n'est certainement pas « mécaniquement calculable » : un programme qui tourne sur machine ne peut sûrement pas accomplir un tel travail même lorsque l'on impose la limitation sur l'entrée α qu'elle soit une suite binaire primitive récursive explicite. Cette impossibilité est un grand théorème d'informatique théorique, souvent indiqué sous l'appellation « théorème de l'arrêt des programmes ».

Théorème de l'arrêt des programmes (On ne peut pas tout savoir)
Sous trois formes immédiatement équivalentes :

- *On ne peut pas assurer automatiquement la terminaison des programmes : il n'existe pas de programme T qui puisse tester si un programme arbitraire P finira par aboutir à l'instruction Stop.*
- *Il n'existe pas de programme qui puisse tester si une suite primitive récursive arbitraire est identiquement nulle.*
- *Il n'existe pas de programme U qui prenne en entrée deux entiers, donne en sortie un booléen, et qui énumère toutes les suites binaires programmables (la suite $n \mapsto U(m,n)$ est la m-ième suite énumérée par U).*

Non seulement ce théorème, sous sa dernière formulation, ressemble au théorème de Cantor qui affirme que l'on ne peut pas énumérer l'ensemble des suites binaires, mais la preuve, très simple, est essentiellement la même.

Bien que le théorème précédent n'interdise pas a priori l'existence d'une procédure effective mais non mécanisable pour résoudre de manière systématique ce type de problèmes, il confirme l'idée intuitive selon laquelle il faudra toujours faire preuve de nouvelle inventivité pour progresser dans notre connaissance du monde mathématique.

Ainsi, d'un point de vue constructif, nous rejetons le *Limited Principle of Omniscience.*

LPO : Si (α_n) est une suite binaire, alors ou bien il existe un n tel que $\alpha_n = 1$, ou bien $\alpha_n = 0$ pour tout n.

Le voici sous forme plus concentrée.

LPO : $$\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}},\ \ (\alpha \neq 0\ \vee\ \alpha = 0)$$

Nous appellerons *propriété élémentaire* une propriété équivalente à

$$\exists n\ \alpha(n) \neq 0$$

pour un certain $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Le principe **LPO** a de nombreuses formes équivalentes. En voici quelques unes.

1. Si A est une propriété *élémentaire*, on a $A \vee \neg A$.
2. Toute suite dans $\mathbb{N}$ est ou bien bornée, ou bien non bornée.
3. Toute suite décroissante dans $\mathbb{N}$ est constante à partir d'un certain rang.
4. D'une suite bornée dans $\mathbb{N}$ on peut extraire une sous-suite infinie constante.
5. Toute partie énumérable de $\mathbb{N}$ est détachable.
6. Toute partie énumérable de $\mathbb{N}$ est ou bien finie, ou bien infinie.
7. Pour toute suite double d'entiers $\beta : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ on a :
$$\forall n\ \exists m\ \ \beta(n,m) = 0 \quad \vee \quad \exists n\ \forall m\ \ \beta(n,m) \neq 0$$
8. Tout sous-groupe détachable de $\mathbb{Z}$ est engendré par un seul élément.
9. Tout sous-groupe de $\mathbb{Z}^p$ engendré par une suite infinie est de type fini.
10. $\forall x \in \mathbb{R}$, ($x \neq 0\ \vee\ x = 0$).
11. $\forall x \in \mathbb{R}$, ($x > 0\ \vee\ x = 0\ \vee\ x < 0$).
12. Toute suite bornée monotone dans $\mathbb{R}$ converge.
13. D'une suite bornée dans $\mathbb{R}$ on peut extraire une sous-suite convergente.
14. Tout nombre réel est ou bien rationnel ou bien irrationnel.
15. Tout sous-espace vectoriel de type fini de $\mathbb{R}^n$ admet une base.
16. Tout espace de Hilbert séparable admet
– ou bien une base hilbertienne finie
– ou bien une base hilbertienne dénombrable.

Le Mini Principe d'Omniscience

Un autre principe d'omniscience, plus faible, **LLPO** (Lesser Limited Principle of Omniscience) est le suivant.

LLPO : Si A et B sont deux propriétés élémentaires, on a
$$\neg(A\ \wedge\ B) \quad \Longrightarrow \quad (\neg A\ \vee\ \neg B)$$

Ce principe **LLPO** a de nombreuses formes équivalentes.

1. $\forall\, \alpha, \beta$ suites croissantes $\in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si $\forall n\, \alpha(n)\beta(n) = 0$, alors $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.
2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, si $\forall n, m \in \mathbb{N}\ \alpha(n) \neq \beta(m)$ alors $\exists \gamma \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que
$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad \big(\gamma(\alpha(n)) = 0\ \wedge\ \gamma(\beta(m)) = 1\big)$$
3. $\forall \alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $\exists k \in \{0,1\}$, ($\exists n\ \alpha(n) = 0\ \Rightarrow\ \exists m\ \alpha(2m+k) = 0$).

4. $\forall x \in \mathbb{R} \quad (\ x \leqslant 0 \ \vee \ x \geqslant 0 \ )$ (ceci permet de faire de nombreuses preuves par dichotomie avec les nombres réels.)
5. $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad (\ xy = 0 \ \Rightarrow \ (\ x = 0 \ \vee \ y = 0 \ ) \ )$.
6. L'image d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ par une fonction réelle uniformément continue est un intervalle $[c, d]$.
7. Une fonction réelle uniformément continue sur un espace métrique compact atteint ses bornes.
8. $\mathbf{KL}_1$ (une des versions du lemme de König) Tout arbre infini explicite à embranchements finis possède une branche infinie.

Il est connu que si un algorithme existe pour le troisième item il ne peut pas être «mécaniquement calculable» (i.e., récursif) : on peut construire α et β mécaniquement calculables vérifiant l'hypothèse, mais pour lesquels aucun γ mécaniquement calculable ne vérifie la conclusion. De même, l'arbre singulier de Kleene est un arbre récursif dénombrable infini à embranchements finis qui ne possède aucune branche infinie récursive. Ceci donne un «contre-exemple récursif» pour $\mathbf{KL}_1$.

Nous allons montrer maintenant [12] l'équivalence $\mathbf{KL}_1 \Leftrightarrow \mathbf{LLPO}$.
Un arbre infini explicite à embranchements finis peut être décrit par un ensemble $A \subset \mathsf{Lst}(\mathbb{N})$ de listes d'entiers vérifiant les propriétés suivantes (les quatre premières correspondant à la notion d'arbre explicite à embranchements finis).

— La liste vide $[\,]$ représente la racine de l'arbre, elle appartient à A,
— un $a = [a_1, \ldots, a_n] \in A$ représente à la fois un noeud de l'arbre et le chemin qui mène de la racine jusqu'au noeud,
— si $[a_1, \ldots, a_n] \in A$ et $n \geqslant 1$, alors $[a_1, \ldots, a_{n-1}] \in A$,
— si $a = [a_1, \ldots, a_n] \in A$ alors les $x \in \mathbb{N}$ tels que $[a_1, \ldots, a_n, x] \in A$ forment un segment $\{ \, x \in \mathbb{N} \, | \, x < \mu(a) \, \}$ où $\mu(a)$ est donné explicitement en fonction de a : les branches issues de a sont numérotées $0, \ldots, \mu(a) - 1$.
— Pour tout $n \in \mathbb{N}$ il y a au moins un $[a_1, \ldots, a_n] \in A$ (l'arbre est explicitement infini).

Ainsi la partie A de $\mathsf{Lst}(\mathbb{N})$ est détachable (c'est en fin de compte ce que signifie ici le mot «explicite»). Et A est dénombrable.

Démonstration de $\mathbf{KL}_1 \Leftrightarrow \mathbf{LLPO}$.
Nous prenons pour **LLPO** la variante donnée dans l'item 1.

12. Comme pour toutes les démonstrations dans cette annexe, elle est informelle et l'on ne précise pas dans quel cadre formel elle pourrait être écrite. Le lecteur repérera dans cette démonstration une utilisation d'une construction par récurrence qui relève en fait de l'axiome du choix dépendant, généralement considéré comme non problématique en mathématiques constructives.

Supposons $\mathbf{KL}_1$. Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ comme dans l'item 1. Considérons l'arbre suivant. Après la racine on ouvre deux branches qui se poursuivent indéfiniment sans jamais créer de nouveaux embranchements, jusqu'à ce que $\alpha(n) \neq 0$ ou $\beta(n) \neq 0$ (si jamais cela se produit). Si cela se produit avec $\alpha(n) \neq 0$, on arrête la branche de gauche et l'on continue celle de droite. Si c'est avec $\beta(n) = 0$, on fait le contraire. Donner explicitement une branche infinie dans cet arbre revient à certifier d'avance que $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$.
Inversement supposons **LLPO**. Considérons un arbre infini explicite à embranchements finis. Supposons sans perte de généralité que l'arbre est binaire : au delà d'un noeud il y a au plus deux branches. Nous prouvons par récurrence que nous pouvons sélectionner jusqu'à la profondeur n un chemin qui aboutit à un noeud K_n en dessous duquel l'arbre est infini. Ceci est vrai pour $n = 0$ par hypothèse. Si cela est vrai pour n, il y a au moins une branche en dessous du noeud K_n sélectionné. S'il y en a deux, considérons les suites α_n et $\beta_n \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définies comme suit :
— $\alpha_n(m) = 0$ si il y a au moins une branche de longueur m en dessous de K_n partant sur la droite, sinon $\alpha_n(m) = 1$
— $\beta_n(m) = 0$ si il y a au moins une branche de longueur m en dessous de K_n partant sur la gauche, sinon $\beta_n(m) = 1$.
Par hypothèse de récurrence les suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et leur produit est nul. On applique l'item 1 de **LLPO** : l'une des deux suites est nulle et cela nous donne le moyen de sélectionner le chemin vers la droite ou celui vers la gauche. □

Le Principe du Tiers Exclu
Le Principe du Tiers Exclu (**PTE**) affirme que $P \vee \neg P$ est vrai pour toute proposition P. Ce principe d'omniscience extrêmement fort implique **LPO**. Il suppose de manière implicite que des ensembles tels que $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ou même nettement plus compliqués, sont des *infinis actuels*. Il implique également que tout ensemble X est discret si l'on définit $x \neq_X y$ comme signifiant $\neg(x =_X y)$.

6. Principes problématiques en mathématiques constructives

Nous entendons par *principe problématique* un principe qui, quoique vérifié en pratique si l'on fait des mathématiques constructives dans le style de Bishop, est indémontrable constructivement. En mathématiques classiques, ces principes peuvent être connus comme vrais ou connus comme faux.
Par exemple, en pratique, chaque fois qu'un $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ est bien défini constructivement, il peut être calculé par un programme.
Autrement dit, en pratique, la **Fausse Thèse de Church**, que l'on peut

écrire sous la forme $\boxed{\mathsf{Rec} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}}$, est vérifiée en mathématiques constructives. Mais elle ne peut pas être démontrée dans le cadre minimaliste des mathématiques constructives à la Bishop, qui sont compatibles avec les mathématiques classiques. Car la Fausse Thèse de Church est un principe faux en mathématiques classiques, en vertu d'un argument de cardinalité. Par contre, les mathématiques constructives russes le prennent comme un axiome fondamental.

Nous allons ici examiner (brièvement) seulement deux principes problématiques, tous deux vrais en mathématiques classiques.

Le Principe de Markov

Le *Principe de Markov*, **MP**, est le suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\neg x = 0 \Rightarrow x \neq 0).$$

Affirmer **MP** revient à dire : pour toute suite binaire α, s'il est impossible que tous ses termes soient nuls, alors il doit y avoir un terme non nul.
C.-à-d. encore : si A est une propriété élémentaire alors $\neg\neg A \Rightarrow A$.
L'école constructive russe admet **MP**. En fait, pour un $\alpha \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, il semble impossible de donner une preuve constructive de $\neg(\alpha = 0)$ sans trouver un n tel que $\alpha(n) \neq 0$. Ainsi **MP** est valide d'un point de vue pratique dans le constructivisme à la Bishop. Remarquons aussi que **LPO** implique clairement **MP**.

Principes de continuité uniforme

Le principe de continuité uniforme affirme que toute fonction ponctuellement continue sur un espace métrique compact est uniformément continue. Il est équivalent à la même affirmation dans un cas particulier, qui est elle-même très proche de l'une des formes classiques du lemme de König. Les principes problématiques suivants semblent intéressants à étudier dans leurs relations mutuelles, d'autant plus qu'ils apparaissent très souvent en analyse classique.

- **UC**$^+$ Toute fonction ponctuellement continue $f : X \to Y$, avec X espace métrique compact et Y espace métrique, est uniformément continue.
- **UC** Toute fonction ponctuellement continue $f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N}$ est uniformément continue.
- **Min** Toute fonction réelle > 0 uniformément continue sur un espace métrique compact est minorée par un réel > 0.
- **Min**$^-$ Toute fonction réelle > 0 uniformément continue sur un intervalle compact $[a, b]$ est minorée par un réel > 0.
- **Min**$^+$ Toute fonction réelle > 0 ponctuellement continue sur un espace métrique compact est minorée par un réel > 0.

FAN Un arbre binaire explicite A qui ne possède pas de branche infinie (i.e., $\forall \alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}\ \exists m \in \mathbb{N}\ \alpha|^m \notin A$) est fini.

Dans la formulation **FAN**, on voit que ce principe est apparemment voisin de **LLPO** (voir la dernière forme équivalente $\mathbf{KL}_1$ citée page 990). En fait, on peut montrer qu'il est une conséquence de **LPO**. Mais il ne s'agit pas d'un principe d'omniscience. D'ailleurs, il n'implique pas **LLPO**. En mathématiques constructives, **LLPO** est manifestement faux en pratique, tandis que **FAN** est vérifié en pratique. Car chaque fois que l'on sait prouver constructivement qu'un arbre à embranchements finis n'a pas de branche infinie, on sait également prouver qu'il est fini.

Exercices et problèmes

Exercice 1. Donnez des démonstrations pour les exemples 1.1, 1.2, 3.1, 3.2 et 3.3.

Exercice 2. Expliquez pourquoi les notions d'ensemble fini, finiment énumérable, borné en nombre, faiblement fini, énumérable et borné en nombre, ne peuvent pas être identifiées en mathématiques constructives. Expliquez pourquoi ces notions coïncident si l'on admet le principe du tiers exclu.

Exercice 3. Démontrer quelques unes des équivalences signalées pour **LPO**.

Exercice 4. Démontrer quelques unes des équivalences signalées pour **LLPO**.

Commentaires bibliographiques

La polémique sur la nature et l'usage de l'infini en mathématiques a été très vive au début du 20$^{\text{e}}$ siècle : voir par exemple Hilbert [104, 1926], Poincaré [148, 1909], H. Weyl [194, 1918], [Brouwer, 1951] et [Infini, 1987]). Le débat a semblé en un premier temps se terminer à l'avantage du point de vue représenté par la logique classique. En fait, depuis les années 60 et notamment la parution du livre de Bishop, les deux points de vue sont nettement moins opposés qu'il ne pouvait paraître.
Quelques références intéressantes sur ce thème : [Lorenzen, 1962], [162, Fred Richman, 1990], [Dowek2, 2007] et [136, Per Martin-Löf, 2008].
La logique constructive s'appelle souvent « logique intuitionniste ». Elle a été mise au point en tant que système formel par A. Heyting.
On trouve des exposés agréables de tels systèmes formels (en confrontation avec les systèmes correspondant à la logique classique avec Tiers Exclu) dans les livres [Lorenzen, 1962] et [David, Nour & Raffalli, 2001]. Le livre plus difficile [Schwichtenberg & Wainer, 2012] est une référence essentielle pour une étude plus avancée des rapports entre logique classique, logique intuitionniste et logique minimale. Le petit livre [Dowek1, 1995] donne quant à lui une présentation informelle intéressante.

Concernant la discussion sur les rapports entre effectivité et récursivité voir [39, Coquand], [103, Heyting] et [173, Skolem].
Le livre [Beeson, 1985] fait une étude systématique de nombreux principes problématiques en mathématiques constructives. Pour l'arbre singulier de Kleene voir [Beeson, page 68] et [Kleene & Vesley, 1965].
La mise au point et la comparaison de systèmes formels pouvant servir de cadre aux mathématiques constructives pratiquées dans [Bishop] ou [MRR] est depuis longtemps un sujet très actif de recherche. On notera l'influence prépondérante de la théorie constructive des types **CTT** de Per Martin-Löf, [134, 135] et [Martin-Löf, 1984], et de la théorie **CZF** de Peter Aczel et Michael Rathjen ([1, Aczel] et [Aczel & Rathjen]). Voir aussi les développements récents dans [HoTT, 2014] et la page web de Thierry Coquand : `http://www.cse.chalmers.se/~coquand/`.
Citons également le beau livre [Feferman, 1998] qui se situe dans la lignée des propositions d'Hermann Weyl.
Pour une discussion sur le « Fan Theorem » voir [34, Coquand].
L'étude systématique de la comparaison (en mathématiques constructives) de principes d'omniscience (tels que **LPO** ou **LLPO**), ainsi que celle de principes problématiques (tels que **MP** ou **FAN**) a pris récemment un essor important. On pourra consulter à ce sujet [12, 13, 14, Berger&al.] et [108, 109, 110, Ishihara].

Tables des théorèmes

Méthodes dynamiques

Principes local-globals concrets

Principes de recouvrement fermé

Stabilité par extension des scalaires

Théorèmes

Principe local-global de base et systèmes linéaires

La méthode des coefficients indéterminés

Modules de présentation finie

Modules projectifs de type fini, 1

Algèbres strictement finies et algèbres galoisiennes

La méthode dynamique

Modules plats

Anneaux locaux, ou presque

Modules projectifs de type fini, 2

Treillis distributifs, groupes réticulés

Anneaux de Prüfer et de Dedekind

Dimension de Krull

Nombre de générateurs d'un module

Le principe local-global

Modules projectifs étendus

Bibliographie

[Abdeljaoued & Lombardi] Abdeljaoued A., Lombardi H. *Méthodes Matricielles. Introduction à la Complexité Algébrique.* Springer, (2003). 107

[Aczel & Rathjen] Aczel P., Rathjen M. *Notes on Constructive Set Theory.* `http://www1.maths.leeds.ac.uk/~rathjen/book.pdf`. 994

[Adams & Loustaunau] Adams W., Loustaunau P. *An Introduction to Gröbner Bases.* American Mathematical Society, (1994). 32

[Apéry & Jouanolou] Apéry F., Jouanolou J.-P. *Élimination. Le cas d'une variable.* Hermann, (2006). 188

[Atiyah & Macdonald] Atiyah M.F., Macdonald I.G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison Wesley, (1969). xxvi

[Basu, Pollack & Roy] Basu S., Pollack R., Roy M.-F. *Algorithms in real algebraic Geometry.* Springer, (2006). 188, 189, 232

[Bass] Bass H. *Algebraic K-theory.* W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, (1968). 849, 860, 959

[Beeson] Beeson M. *Foundations of Constructive Mathematics.* Springer-Verlag, (1985). 206, 987, 994

[Bhaskara Rao] Bhaskara Rao K. *The Theory of Generalized Inverses over a Commutative Ring.* Taylor & Francis. Londres, (2002). 45, 85

[Bigard, Keimel & Wolfenstein] Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S. *Groupes et anneaux réticulés.* Springer LNM 608, (1977). 693

[Birkhoff] Birkhoff G. *Lattice theory.* Third edition. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXV American Mathematical Society, Providence, R.I., (1967). 692

[Bishop] *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw Hill, (1967). Reprint avec une préface de Michael Beeson. 2012. IshiPress New York and Tokyo. 206, 418, 978, 994

[Bishop & Bridges] Bishop E., Bridges D. *Constructive Analysis.* Springer-Verlag, (1985). 206, 418, 978, 980

[Bourbaki] Bourbaki. *Algèbre Commutative.* Hermann, (1961-2002). xxvi, 629

[Bridges & Richman] Bridges D., Richman F. *Varieties of Constructive Mathematics.* London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press, (1987). 206, 987

[Brouwer] Brouwer L. *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism, 1951* (Van Dalen ed.) Cambridge University Press, (1981). 993

[Burris & Sankappanavar] Burris S., Sankappanavar H. *A Course in Universal Algebra.* Springer, (1981). 259

[Cartan & Eilenberg] Cartan H., Eilenberg S. *Homological algebra.* Princeton University Press, (1956). 762

[COCOA] Kreuzer M., Robbiano L. *Computational commutative algebra.* Springer Verlag, Berlin. Vol. 1 (2000), Vol. 2 (2005) xxvi

[Cohn] Cohn P. *Basic Algebra. Groups, rings and fields.* (2nd edition) Springer Verlag, (2002). 259

[Cox] Cox D. *Galois theory.* Wiley-Interscience, (2004). 449

[Cox, Little & O'Shea] Cox D., Little J, O'Shea D. *Ideals, Varieties, and Algorithms.* (2nd edition) Springer Verlag UTM, (1998). xxvi

[CPMPCS] *Concepts of proof in mathematics, philosophy, and computer science. (Based on the Humboldt-Kolleg, Bern, Switzerland, September 9–13, 2013).* Eds : Probst D., Schuster P. Berlin : De Gruyter, (2016). 1011

[CRA] *Commutative ring theory and applications.* Eds : Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 231. M. Dekker, (2002). 1011, 1016

[Curry] Curry H. B. *Foundations of mathematical logic* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-San Francisco, Calif.-Toronto-London, (1963). 693

[David, Nour & Raffalli] David R., Nour K., Raffalli C. *Introduction à la logique.* Dunod, (2001). 993

[Demeyer & Ingraham] Demeyer F., Ingraham E. *Separable algebras over commutative rings.* Springer Lecture Notes in Mathematics 181, (1971). 392

[Díaz, Lombardi & Quitté] Díaz-Toca G., Lombardi H., Quitté *Modules sur les anneaux commutatifs.* Calvage&Mounet, (2014). 254

[Dowek1] Dowek G. *La logique.* Flammarion. Collection Dominos, (1995). 993

[Dowek2] Dowek G. *Les métamorphoses du calcul. Une étonnante histoire de mathématiques.* Le Pommier, (2007). 993

[Edwards89] Edwards H. *Divisor Theory.* Boston, MA : Birkhäuser, (1989). xiv

[Edwards05] Edwards H. *Essays in Constructive Mathematics.* Springer Verlag, (2005). xiv

[Eisenbud] Eisenbud D. *Commutative Algebra with a view toward Algebraic Geometry.* Springer Verlag, (1995). xxvi, 392, 822

[Ene & Herzog] Ene, V., Herzog, J. *Gröbner bases in commutative algebra.* Graduate Studies in Mathematics n°130, American Mathematical Society (2012). xxvi

[Elkadi & Mourrain] Elkadi M., Mourrain B. *Introduction à la résolution des systèmes polynomiaux.* Collection Mathématiques & Applications, n°59, Springer Verlag, Berlin (2007). xxvi

[Feferman] Feferman S. *In the Light of Logic.* Oxford University Press, (1998). 994

[Frege-Gödel] van Heijenoort J. (ed.), *Frome Frege to Gödel : a source book in mathematical logic.* Harvard University Press, Cambridge, Massachussets (1967). (troisième réimpression en 2002). 1015

[Freid & Jarden] Freid M. D., Jarden M. *Field Arithmetic*. Springer-Verlag. (1986). 712

[von zur Gathen & Gerhard] von zur Gathen J. Gerhard J. *Modern computer algebra*. Cambridge University Press, Cambridge, (2003). xxvi

[Gilmer] Gilmer R. *Multiplicative Ideal Theory*. Queens papers in pure and applied Math, vol. 90, (1992). xxvi, 490, 762, 823

[Glaz] Glaz S. *Commutative Coherent Rings*. Lecture Notes in Math., vol. 1371, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, second edition, (1990). xxvi

[Grätzer] Grätzer G. *Lattice Theory : foundation*. Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, (2011). 688, 692

[Gupta & Murthy] Gupta S., Murthy M. *Suslin's work on linear groups over polynomial rings and Serre conjecture*. ISI Lecture Notes n°8. The Macmillan Company of India Limited, (1980). 968, 969, 971, 975

[HoTT] *Homotopy Type Theory : Univalent Foundations of Mathematics*. `http://homotopytypetheory.org/` (2014). 994

[Infini] Toraldo di Francia G. (ed.), *L'infinito nella scienza*. Istituto della Enciclopedia Italiana, Rome, (1987). 993

[Ireland & Rosen] Ireland K., Rosen M. *A classical introduction to modern number theory*. Graduate Texts in Mathematics, vol. 84, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, (1989). 129

[Ischebeck & Rao] Ischebeck F., Rao R. *Ideals and Reality. Projective modules and number of generators of ideals*. Springer Monograph in Mathematics, Berlin-Heidelberg-New York, (2005). 259, 929

[Jaffard] Jaffard, P. *Théorie de la dimension dans les anneaux de polynômes* Gauthier-Villars, Paris, (1960). 823

[Jensen, Ledet & Yui] Jensen C., Ledet A., Yui N. *Generic Polynomials, Constructive Aspects of the Inverse Galois Problem* Cambrigde University Press, MSRI Publications 45, (2002). 629

[Johnstone] Johnstone P. *Stone spaces*. Cambridges studies in advanced mathematics n°3. Cambridge University Press, (1982). 676, 692, 693, 823

[Kaplansky] Kaplansky I. *Commutative rings*. Boston, Allyn and Bacon, (1970). xxvi

[Kleene & Vesley] Kleene S.C., Vesley R. *The Foundations of intuitionistic mathematics*. Amsterdam (North-Holland), (1965). 994

[Knapp, 1] Knapp A. *Basic algebra*. Birkhäuser, (2006). xxvi

[Knapp, 2] Knapp A. *Advanced algebra*. Birkhäuser, (2007). xxvi

[Knight] Knight J. *Commutative Algebra*. London Mathematical Society LNS n°5. Cambridge University Press, (1971). 914

[Kunz] Kunz E. *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*. Birkhäuser, (1991). xiv, xxvi, 259, 312, 545, 839, 859, 914, 925

[Lafon & Marot] Lafon J.-P., Marot J. *Algèbre locale*. Hermann, Paris, (2002). xxvi, 516, 545

[Lakatos] Lakatos I. *Preuves et réfutations.* Version française, Hermann (1984). xxiv

[Lam] Lam T.Y. *Serre's conjecture.* Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635. Springer Berlin Heidelberg New York, (1978). 959

[Lam06] Lam T.Y. *Serre's Problem on Projective Modules.* Springer Berlin Heidelberg New York, (2006). xxvi, 259, 911, 929, 933, 935, 939, 954, 959, 975

[Lancaster & Tismenetsky] Lancaster P., Tismenetsky M. *The Theory of Matrices, 2/e* Academic Press, (1985). 45

[Lawvere & Rosebrugh] Lawvere W., Rosebrugh R. *Sets for Mathematics* Cambridge University Press, (2003). 259

[Lorenzen] Lorenzen P. *Métamathématique.* Traduit de l'allemand par J. B. Grize, Gauthier-Villars, Paris, Mouton, Paris La Haye (1967), édition originale 1962. 993

[Mac Lane] Mac Lane, S. *Categories for the Working Mathematician.* Second edition, Springer, (1998). 259

[Martin-Löf] Martin-Löf P. *Intuitionistic type theory.* Notes by Giovanni Sambin. Studies in Proof Theory. Lecture Notes, 1. Bibliopolis, Naples, (1984). 994

[Matsumura] Matsumura H. *Commutative ring theory.* Cambridge studies in advanced mathematics n°8. Cambridge University Press, (1989). xxvi, 839

[MITCA] *Multiplicative Ideal Theory in Commutative Algebra : A tribute to the work of Robert Gilmer.* Eds : Brewer J., Glaz G., Heinzer W., Olberding B. Springer, (2006) 1009, 1013

[MRR] Mines R., Richman F., Ruitenburg W. *A Course in Constructive Algebra.* Universitext. Springer-Verlag, (1988). vii, xiv, 28, 32, 84, 206, 216, 221, 258, 266, 279, 392, 394, 406, 426, 427, 448, 482, 506, 545, 693, 695, 873, 978, 980, 994

[Mora] Mora T. *Solving Polynomial Equation Systems I : The Kronecker-Duval Philosophy.* Cambridge University Press, (2003) xxvi

[Northcott] Northcott D. *Finite free resolutions.* Cambridge tracts in mathematics No 71. Cambridge University Press, (1976). xxvi, 84, 85, 232, 258, 312, 899

[PFCM] Crosilla L., Schuster P., eds. *From Sets and Types to Analysis and Topology : Towards Practicable Foundations for Constructive Mathematics.* Oxford University Press, (2005). 1011, 1015

[Pohst & Zassenhaus] Pohst, Zassenhaus *Algorithmic algebraic number theory (Encyclopedia of Mathematics and its Applications).* Cambridge University Press, (1989). 449

[Rao & Mitra] Rao C., Mitra S. *Generalized Inverses of Matrices and its Applications.* John Wiley & Sons, (1971). 84

[Raynaud] Raynaud M. *Anneaux locaux henséliens.* Springer Lecture Notes in Mathematics n°169, (1970). 516, 545

[SINGULAR] Greuel G.-M., Pfister G. *A Singular Introduction to Commutative Algebra.* Springer (2002). `http://www.singular.uni-kl.de/` xxvi

[Schwichtenberg & Wainer] Schwichtenberg H., Wainer S. *Proofs and Computations.* Perspectives in Logic. Association for Symbolic Logic and Cambridge University Press, (2012). 993

[Stacks-Project] Stacks-Project. Ouvrage collectif. `http://stacks.math.columbia.edu` xxvi, 258

[TAPAS] Cohen A., Cuypers H., Sterk H. (eds) *Some Tapas of Computer Algebra.* Springer Verlag, (1999). xxvi

[Tignol] Tignol J.-P. *Galois' theory of algebraic equations.* World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, (2001). 449

[Yengui] Yengui I. *Constructive commutative algebra. Projective modules over polynomial rings and dynamical Gröbner bases.* Springer LNM n°2138 (2015). xiv, 448

[Zaanen] Zaanen A. *Introduction to Operator Theory in Riesz Spaces.* Springer Verlag, (1997). 693

Articles

[1] Aczel P. *Aspects of general topology in constructive set theory.* Ann. Pure Appl. Logic, **137**, (2006), 3–29. 994

[2] Aubry P., Valibouze A. *Using Galois Ideals for Computing Relative Resolvents.* J. Symbolic Computation, **30**, (2000), 635–651. 449

[3] Auslander M., Goldman, O. *The Brauer group of a commutative ring.* Trans. Amer. Math. Soc., **97**, (1960), 367–409. 392

[4] Avigad J. *Methodology and metaphysics in the development of Dedekind's theory of ideals.* Dans : José Ferreirós and Jeremy Gray, editors, The Architecture of Modern Mathematics, Oxford University Press, (2006), 159–186. 696, 762

[5] Banaschewski B. *Radical ideals and coherent frames.* Comment. Math. Univ. Carolin. **37** 2, (1996), 349–370. 823

[6] Barhoumi S. *Seminormality and polynomial rings.* Journal of Algebra **322** (2009), 1974–1978. 959

[7] Barhoumi S., Lombardi H. *An Algorithm for the Traverso-Swan theorem on seminormal rings.* Journal of Algebra **320** (2008), 1531–1542. 925, 959

[8] Barhoumi S., Lombardi H., Yengui I. *Projective modules over polynomial rings : a constructive approach.* Math. Nachrichten **282** (2009), 792–799. 959

[9] Basu R., Rao R., Khanna R. *On Quillen's Local Global Principle.* Contemporary Mathematics, Commutative Algebra and Algebraic Geometry, Volume 390, (2005), 17–30. 959

[10] Bass H. *Torsion free and projective modules.* Trans. Amer. Math. Soc. **102**, (1962), 319–327. 874

[11] Bazzoni S., Glaz S. *Prüfer rings.* dans [MITCA], 55–72. 491

[12] Berger J. *Constructive Equivalents of the Uniform Continuity Theorem.* Journal of Universal Computer Science **11** n°12 (2005), 1878–1883. 994

[13] Berger J., Bridges D. *A fan-theoretic equivalent of the antithesis of Specker's theorem.* Proc. Koninklijke Nederlandse Akad. Wetenschappen. Indag. Math. **18** n°2 (2007), 195-202. 994

[14] Berger J., Ishihara H. *Brouwer's fan theorem and unique existence in constructive analysis.* Math. Logic Quarterly **51** (2005), 360–364. 994

[15] Bernstein D. *Factoring into coprimes in essentially linear time.* Journal of Algorithms **54** (2005), 1–30. 695

[16] Bernstein D. *Fast ideal arithmetic via lazy localization.* Cohen, Henri (ed.), Algorithmic number theory. Second international symposium, ANTS-II, Talence, France, May 18-23, 1996. Proceedings. Berlin : Springer. Lect. Notes Comput. Sci. n°1122 (1996), 27–34. 695

[17] Bishop, E. *Mathematics as a numerical language.* in Intuitionism and Proof Theory. Eds. Myhill, Kino, and Vesley, North-Holland, Amsterdam, (1970) 980

[18] Boniface J., Schappacher N. *"Sur le concept de nombre en mathématique" : cours inédit de Leopold Kronecker à Berlin (1891).* Rev. Histoire Math. **7** (2001), 206–275. 87

[19] Bosma W., Cannon J., Playoust C. *The Magma algebra system. I. The user language.* J. Symbolic Comput. **24** (1997), 235–265. 450

[20] Brandl R. *Integer polynomials that are reducible modulo all primes.* Amer. Math. Month. **93**, no. 4 (1986), 286–288. 449

[21] Brenner H. *Lifting chains of prime ideals.* J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 1–5. 823

[22] Brewer J., Costa D. *Projective modules over some non-Noetherian polynomial rings.* J. Pure Appl. Algebra **13** (1978), no. 2, 157–163. 959

[23] Brewer J., Costa D. *Seminormality and projective modules over polynomial rings.* J. Algebra **58**, no. 1 (1979), 208–216. 958

[24] Brewer J., Klinger L. *Pole assignability and the invariant factor theorem in Prüfer domains and Dedeking domains.* J. Algebra **111** (1987), 536–545. 762

[25] Buchmann J., Lenstra H. *Approximating rings of integers in number fields.* J. Théor. Nombres Bordeaux, **6** (2) (1994), 221–260. 695, 696

[26] Cahen, P.-J., *Construction B, I, D et anneaux localement ou résiduellement de Jaffard. (B, I, D construction and locally or residually Jaffard rings).*, Archiv der Mathematik, **54**, (1990), 125–141. 823

[27] Caniglia L., Cortinas G., Danón S., Heintz J., Krick T., Solernó P. *Algorithmic Aspects of Suslin's Proof of Serre's Conjecture.* Computational Complexity **3** (1993), 31–55. 959

[28] Cannon J., Bosma W. *Handbook of Magma functions.* Version 2.14, Oct. 2007, 4400 pages. 450

[29] Cederquist J., Coquand T. *Entailment relations and Distributive Lattices* Logic Colloquium '98 (Prague), 127–139, Lect. Notes Log., 13. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, (2000). 693

[30] Chase S., Harrison D., Rosenberg A. *Galois theory and Galois cohomology of commutative rings.* Mem. Amer. Math. Soc. **52** (1965), 15–33. 392

[31] Chervov A., Talalaev D. *Hitchin systems on singular curve I.* Theor. Math. Phys. **140** (2004), 1043–1072. 629

[32] Chervov A., Talalaev D. *Hitchin systems on singular curve II. Glueing subschemes.* Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys **4** (2007), 751–787. 629

[33] Coquand T. *La contribution de Kolmogorov en logique intuitionniste.* dans : L'héritage de Kolmogorov en mathématiques. Charpentier E., Lesne A., Nikolski N. (eds). Belin, Paris (2004). 984

[34] Coquand T. *About Brouwer's fan theorem.* Revue internationale de philosophie, **230** (2004), 483–489. 994

[35] Coquand T. *Sur un théorème de Kronecker concernant les variétés algébriques.* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 291–294. 825

[36] Coquand T. *On seminormality.* Journal of Algebra, **305** (1), (2006), 585–602. 914, 918, 958

[37] Coquand T. *A refinement of Forster's theorem.* Preprint (2007). 825, 860, 959

[38] Coquand T. *Space of valuations.* Annals of Pure and Applied Logic, **157** (2009), 97–109. 823

[39] Coquand T. *Recursive functions and constructive mathematics.* p. 159–167 dans : Bourdeau M., Dubucs J. (Eds.), Calculability and Constructivity. Historical and Philosophical Aspects. Logic, Epistemology and the Unity of Science, Vol. 34. Springer (2014). 994

[40] Coquand T., Ducos L., Lombardi H., Quitté C. *L'idéal des coefficients du produit de deux polynômes.* Revue des Mathématiques de l'Enseignement Supérieur, **113** (3), (2003), 25–39. 84

[41] Coquand T., Ducos L., Lombardi H., Quitté C. *Constructive Krull Dimension. I : Integral Extensions.* Journal of Algebra and Its Applications. **8** (2009), 129–138. 823

[42] Coquand T., Lombardi H. *A logical approach to abstract algebra.* (survey) Math. Struct. in Comput. Science **16** (2006), 885–900. xxvii

[43] Coquand T., Lombardi H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings*, dans [CRA], 477–499. 823

[44] Coquand T., Lombardi H. *Constructions cachées en algèbre abstraite (3) Dimension de Krull, Going Up, Going Down.* Rapport technique (2001) `http://hlombardi.free.fr/publis/GoingUpDownFrench.pdf` (version anglaise `http://hlombardi.free.fr/publis/GoingUpDown.pdf`). 823

[45] Coquand T., Lombardi H. *Some remarks on normal rings*, dans [CPMPCS] 141–149. 763

[46] Coquand T., Lombardi H., Quitté C. *Generating non-Noetherian modules constructively.* Manuscripta mathematica, **115** (2004), 513–520. 825, 860

[47] Coquand T., Lombardi H., Quitté C. *Dimension de Heitmann des treillis distributifs et des anneaux commutatifs.* Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres (2006). 51 pages. Version corrigée : `http://hlombardi.free.fr/publis/AHeitmann.html` 823, 825, 830, 860

[48] Coquand T., Lombardi H., Roy M.-F. *An elementary characterization of Krull dimension.* dans [PFCM], 239–244. 823

[49] Coquand T., Lombardi H., Schuster P. *A nilregular element property.* Archiv der Mathematik, **85** (2005), 49–54. 779, 823, 859

[50] Coquand T., Persson H. *Valuations and Dedeking Prague theorem.* J. Pure Appl. Algebra, **155** (2001), 121–129. 693

[51] Cortiñas G., Haesemayer C., Walker M.E. and Weibel C. *A negative answer to a question of Bass.* Proc. AMS, **139** (2011), 1187–1200. 929

[52] Coste M., Lombardi H., Roy M.-F. *Dynamical method in algebra : Effective Nullstellensätze.* Annals of Pure and Applied Logic, **111**, (2001), 203–256. 914

[53] Couchot F. *Finitely presented modules over semihereditary rings.* Communications in Algebra, **35** (9), (2007) 2685–2692. 762

[54] Dedekind R. *Über einen arithmetischen Satz von Gauss.* Mitt. dtsch. math. Ges. Prag. (1892), 1–11. 188

[55] Dedekind R. *Über die Begründung der IdealTheorie.* Nachr. K. Ges. Wiss. Göttingen (1894), 272–277. 696

[56] Della Dora J., Dicrescenzo C., Duval D. *About a new method for computing in algebraic number fields.* In Caviness B.F. (Ed.) EUROCAL '85. Lecture Notes in Computer Science 204, 289–290. Springer (1985). 404, 433, 914

[57] Díaz-Toca G. *Galois theory, splitting fields and computer algebra.* J. Symbolic Computation **41** n°11, (2006), 1174–1186. 449

[58] Díaz-Toca G., Gonzalez-Vega L., Lombardi H. *Generalizing Cramer's Rule : Solving uniformly linear systems of equations.* SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **27** n°3, (2005), 621–637. 545

[59] Díaz-Toca G., Gonzalez-Vega L., Lombardi H. & Quitté C. *Modules projectifs de type fini, applications linéaires croisées et inverses généralisés.* Journal of Algebra **303** n°2, (2006), 450–475. 84, 236, 545, 601

[60] Díaz-Toca G., Lombardi H. *A polynomial bound on the number of comaximal localizations needed in order to make free a projective module.* Linear Algebra and its Application. **435**, (2011), 354–360. 312

[61] Díaz-Toca G., Lombardi H., Quitté C. *L'algèbre de décomposition universelle.* Proceedings du colloque TC2006 (Granada), 169–184. 449

[62] Díaz-Toca G., Lombardi H. *Dynamic Galois Theory.* Journal of Symbolic Computation. **45**, (2010), 1316–1329. 449

[63] Drach J. *Essai sur la théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes.* Ann. Sci. Ec. Norm. Sup **3** n°15, (1898), 243–384. 188, 448

[64] Ducos L. *Effectivité en théorie de Galois. Sous-résultants.* Université de Poitiers, Thèse doctorale. Poitiers (1997). 449

[65] Ducos L. *Construction de corps de décomposition grâce aux facteurs de résolvantes. (French) [Construction of splitting fields in favour of resolvent factors].* Communications in Algebra **28** n°2, (2000), 903–924. 449

[66] Ducos L. *Vecteurs unimodulaires et systèmes générateurs.* Journal of Algebra **297**, (2006), 566–583. 860

[67] Ducos L. *Sur la dimension de Krull des anneaux noethériens.* Journal of Algebra **322**, (2009), 1104–1128. 859, 914

[68] Ducos L. *Polynômes à valeurs entières : un anneau de Prf̈er de dimension 2.* (2011) To appear in Communications in Algebra. 723

[69] Ducos L., Lombardi H., Quitté C., Salou M. *Théorie algorithmique des anneaux arithmétiques, des anneaux de Prüfer et des anneaux de Dedekind.* Journal of Algebra **281**, (2004), 604–650. 491, 762

[70] Ducos L., Valibouze A., Yengui I. *Computing syzygies over $V[X_1, \ldots, X_k]$, V a valuation domain.* Journal of Algebra **425**, (2015), 133–145. 448

[71] Edwards H. *The genesis of ideal theory.* Arch. Hist. Exact Sci. **23** n°4 (1980/81), 321–378. 762

[72] Eisenbud D., Evans E., Jr. *Generating modules efficiently : theorems from algebraic K-theory.* J. Algebra **27** (1973), 278–305. 859, 860

[73] Eisenbud D., Evans E., Jr. *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces.* Inventiones math. **19** (1973), 107–112. 859

[74] Ellouz A., Lombardi H., Yengui I. *A constructive comparison of the rings $\mathbf{R}(X)$ and $\mathbf{R}\langle X\rangle$ and application to the Lequain-Simis Induction Theorem.* Journal of Algebra. **320** (2008), 521–533. 949, 959

[75] Español L. *Dimensión en álgebra constructiva.* Thèse doctorale. Université de Zaragoza, Zaragoza, (1978). 823, 860

[76] Español L. *Constructive Krull dimension of lattices.* Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2) **37** (1982), 5–9. 823

[77] Español L. *Le spectre d'un anneau dans l'algèbre constructive et applications à la dimension.* Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégorique. **24** n°2 (1983), 133–144. 823

[78] Español L. *Dimension of Boolean Valued Lattices and Rings.* Journal of Pure and Applied Algebra **42** (1986), 223–236. 823

[79] Español L. *The spectrum lattice of Baer rings and polynomials.* Categorical algebra and its applications. (Louvain-La-Neuve, 1987), 118–124, Lecture Notes in Math., 1348, Springer, Berlin-New York, (1988). 84, 823

[80] Español L. *Finite chain calculus in distributive lattices and elementary Krull dimension.* Contribuciones cientificas en honor de Mirian Andres Gomez. Eds. L. Lamban, A. Romero y J. Rubio, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logrono, Spain, (2010). 812, 823

[81] Estes R., Guralnick R. *Module equivalences : local to global when primitive polynomials represent units.* J. of Algebra **77** (1982), 138–157. 545

[82] Ferrand D. *Les modules projectifs de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps sont libres.* Sém. Bourbaki, exposé **484**, (1975-1976), 202–221. 959

[83] Ferrero M., Paques A. *Galois theory of commutative rings revisited.* Contributions to Algebra and Geometry **38** (1997), 399–410. 392

[84] Fitchas N., Galligo A. *Nullstellensatz effectif et Conjecture de Serre (Théorème de Quillen-Suslin) pour le Calcul Formel.* Math. Nachr. **149** (1990), 231–253. 959

[85] Fontana M., Loper A. *An historical overview of Kronecker function rings, Nagata rings and related star and semistar operations.* dans [MITCA], 169–187. 188

[86] Forster O. *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring.* Math. Z. **84** (1964), 80–87. 859

[87] Fuchs L. *Über die Ideale arithmetischer ringe.* Math. Helv. **23** (1949), 334–341. 490

[88] Carl Friedrich Gauss *Demonstratio nova altera theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse.* Comm. Recentiores (Gottingae), **3** (1816), 107–142. Reproduit dans Werke III, 31–56. Traduction anglaise : `http://www.monad.me.uk/misc/gauss-web.php` sur la page web de Paul Taylor. `http://www.monad.me.uk/` 87

[89] Geissler K., Klüners J. *Galois Group Computation for Rational Polynomials.* J. Symbolic Computation **30** (2000), 653–674. 449

[90] Gillman L., Henriksen M. *Some remarks about elementary divisor rings.* Trans. Amer. Soc. **82**, (1956) 362–365 240

[91] Gilmer R., Heitmann R. *On Pic R[X] for R seminormal.* J. Pure Appl. Algebra **16** (1980), 251–257. 958

[92] Gilmer R., Hoffmann, J. *A characterization of Prüfer domains in terms of polynomials.* Pacific J. Math. **60** (1) (1975), 81–85. 762

[93] Glaz S. *Finite conductor properties of* $\mathbf{R}(X)$ *and* $\mathbf{R}\langle X\rangle$. dans : Proceeding of conference in honor to J. Huckaba's retirement, Missouri, Dec. 1999. Marcel Dekker Lecture Notes. 959

[94] Glaz, S., Vasconcelos W. *Gaussian polynomials.* Marcel Dekker Lecture Notes 186 (1997), 325–337. 84

[95] Goldman O. *Determinants in projective modules.* Nagoya Math. J. **18** (1961), 27–36. 312

[96] Hallouin E. *Parcours initiatique à travers la théorie des valuations.* Rapport technique. Université de Poitiers, (1996). `http://www.picard.ups-tlse.fr/~hallouin/eh-valuation.ps` 152

[97] Hallouin E. *Calcul de fermeture intégrale en dimension 1 et factorisation intégrale.* Thèse. Université de Poitiers, (1998). `http://www.picard.ups-tlse.fr/~hallouin/eh-these.ps` 762

[98] Heitmann R. *Generating ideals in Prüfer domains.* Pacific J. Math. **62** (1976), 117–126. 859

[99] Heitmann R. *Generating non-Noetherian modules efficiently.* Michigan Math. **31** 2 (1984), 167–180. xxiii, 825, 830, 831, 859, 860

[100] Heitmann R., Levy L. *1 1/2 and 2 generator ideals in Prüfer domains.* Rocky Mountain J. Math. **5** 3 (1975), 361–673. 762

[101] Hermida J., Sánchez-Giralda T. *Linear Equations over Commutative Rings and Determinantal Ideals.* Journal of Algebra **99** (1986), 72–79. 467, 490

[102] Hess F. *Computing Riemann-Roch space in algebraic function fields.* Journal of Symbolic Computation **33** (2002), 425–445. 762

[103] Heyting A. *After thirty years.* In : 1962 Logic, Methodology and Philosophy of Science (Proc. 1960 Internat. Congr.) pp. 194–197 Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. 994

[104] Hilbert D. *Über das Unendliche.* Math. Annalen **95** (1926), 161–190. (Sur l'infini) traduction anglaise dans [Frege-Gödel] 367–392. 993

[105] Hochster M. *Prime ideal structure in commutative rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969), 43–60. 823

[106] Horrocks G. *Projective modules over an extension of a local ring.* Proc. Lond. Math. Soc. **14** (1964), 714–718. 959

[107] Hulpke A. *Konstruktion transitiver Permutationsgruppen.* Dissertation, Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany. (1996). 449

[108] Ishihara H. *Constructive reverse mathematics : compactness properties.* dans [PFCM], 245–267. 994

[109] Ishihara H. *Weak König lemma implies Brouwer's fan theorem : a direct proof.* Notre Dame J. Formal Logic **47** (2006), 249–252. 994

[110] Ishihara H. *Reverse mathematics in Bishop's constructive mathematics.* Philosophia Scientiae, Cahier Spécial **6** (2006), 43–59. 994

[111] Jacobsson C., Löfwall C. *Standard Bases for General Coefficient Rings and a New Constructive Proof of Hilbert's Basis Theorem.* J. Symb. Comput. **12** (1991), 337–372. 84

[112] Johnstone, P. *The art of pointless thinking : a student's guide to the category of locales.* Category theory at work (Bremen, 1990), 85–107, Res. Exp. Math., 18, Heldermann, Berlin, 1991. 693

[113] Joyal A. *Spectral spaces and distibutive lattices.* Notices AMS **18** (1971), 393. 823

[114] Joyal A. *Le théorème de Chevalley-Tarski.* Cahiers de topologie et géometrie différentielle catégorique, 1975. 823, 860

[115] van der Kallen W. *The K2 of rings with many units.* Ann. Sci. É.N.S. 4^{e}série, **10**, (1977), 473–515. 545

[116] Kaplansky I. *Elementary divisors and modules.* Transactions of the AMS **66**, (1949), 464–491. 240, 259

[117] Kaplansky I. *Modules over Dedekind Rings and Valuation Rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **72**, (1952), 327–340. 762

[118] Klüners J., Malle G. *Explicit Galois realization of transitive groups of degree up to 15.* J. Symbolic Comput. **30** (6), (2000), 675–716. 449

[119] Kolmogorov A. *Zur Deutung der intuitionistischen Logik.* Math. Zeitschr., **35** (1932) 58–65. 984

[120] Kronecker L. *Zur Theorie der Formen höherer Stufen* Ber. K. Akad. Wiss. Berlin (1883), 957–960. (Werke 2, 417–424). 97, 188

[121] Kronecker L. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen.* J. reine angew. Math. **92**, (1882) 1–123. Réimprimé dans *Leopold Kronecker's Werke*, II, 237–387. 826

[122] Landau, S., Miller, G. *Solvability by radicals is in polynomial time.* J. Comput. Syst. Sci. **30** (1985), 179–208. 450

[123] Lecerf, G. *Fast separable factorization and applications.* Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, **19** (2) (2008), 135–160. 392

[124] Lequain, Y., Simis, A. *Projective modules over $R[X_1, ..., X_n]$, R a Prüfer domain.* J. Pure Appl. Algebra **18** (2) (1980), 165–171. 580, 951

[125] Lombardi H. *Le contenu constructif d'un principe local-global avec une application à la structure d'un module projectif de type fini.* Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres. Fascicule (1997), 94–95 & 95–96. 914

[126] Lombardi H. *Platitude, localisation et anneaux de Prüfer : une approche constructive.* 64 pages. Publications Mathématiques de Besançon. Théorie des nombres. Années 1998-2001. 491, 762

[127] Lombardi H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique.* Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46. 823

[128] *Un anneau de Prüfer.* Third International Meeting on Integer-Valued Polynomials. Actes des rencontres du CIRM, **2** (2010). `http://acirm.cedram.org/cgi-bin/browse` 723

[129] Lombardi H., Quitté C. *Constructions cachées en algèbre abstraite (2) Le principe local global.* dans [CRA] 461–476. 959

[130] Lombardi H., Quitté C. *Seminormal rings (following Thierry Coquand).* Theoretical Computer Science. **392**, (2008), 113–127. 958

[131] Lombardi H., Quitté C., Yengui I. *Hidden constructions in abstract algebra (6) The theorem of Maroscia, Brewer and Costa.* Journal of Pure and Applied Algebra. **212** 7 (2008), 1575–1582. 959

[132] Lombardi H., Yengui I. *Suslin's algorithms for reduction of unimodular rows.* Journal of Symbolic Computation **39** (2005), 707–717. 960

[133] Maroscia P. *Modules projectifs sur certains anneaux de polynômes.* C.R.A.S. Paris **285** série A (1977), 183–185. 959

[134] Per Martin-Löf. *An intuitionistic theory of types : Predicative part.* In H. E. Rose and J. C. Shepherdson, editors, Logic Colloquium Ô73, pages 73–118. North Holland, (1975). 994

[135] Martin-Löf P. *An intuitionistic theory of types.* 127–172, in : Twenty-five years of constructive type theory (Venice, 1995), Oxford Logic Guides, 36, Oxford Univ. Press, New York, 1998. 994

[136] Per Martin-Löf *The Hilbert-Brouwer controversy resolved ?* dans : One hundred years of intuitionism (1907-2007), (Cerisy), (Mark Van Atten & al., editors) Publications des Archives Henri Poincaré, Birkhäuser Basel, (2008), pp. 243–256. 993

[137] Mertens F. *Über einen algebraischen Satz.* Ber. K. Akad. Wiss. Wien (1892). 188

[138] Mnif A., Yengui I. *An algorithm for unimodular completion over Noetherian rings.* J. Algebra **316** (2007), 483–498. 960

[139] Mulmuley K. *A fast parallel algorithm to compute the rank of a matrix over an arbitrary field.* Combinatorica, **7**/1, (1987), 101–104. 601

[140] Murthy M. *Generators of a general ideal.* in : A tribute to C. S. Seshadri (Chennai, 2002), Trends in Math., Birkhäuser, Basel, (2003), 379–384. 860

[141] Murthy M., Pedrini C. *K_0 and K_1 of polynomial rings.* in Algebraic K-Theory II, Lecture Notes in Math. 342, (1973), 109–121. 930

[142] Nashier B., Nichols W. *Ideals containing monics.* Proc. Amer. Math. Soc. **99** (1987), 634–636. 929

[143] Nicholson W. *Lifting idempotents and exchange rings.* Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977), 269–278. 531

[144] Northcott D. *A generalization of a theorem on the content of polynomials.* Proc. Cambridge Philos. Soc. **55** (1959), 282–288. 84, 188

[145] Orange S., Renault G., Valibouze A. *Calcul efficace de corps de décomposition.* Rapport technique LIP6 2003/005. 449

[146] Perdry H. *Strongly Noetherian rings and constructive ideal theory.* J. Symb. Comput. **37** (2004), 511–535. 84

[147] Perdry H. *Lazy bases : a minimalist constructive theory of Noetherian rings.* Math. Log. Quart. **54** (2008), 70–82. 84

[148] Poincaré H. *La logique de l'infini.* Revue de Métaphysique et de Morale **17**, 461–482, (1909) réédité dans *Dernières pensées*, Flammarion (1913). 993

[149] Prüfer H. *Untersuchunger uber teilbarkeitseigenschaften in korpen.* Angew. Mat. **168** (1932), 1–36. 490, 762

[150] Quentel Y. *Sur une caractérisation des anneaux de valuation de hauteur 1.* C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. A **265** (1967), 659–661. 762

[151] Querré J. *Sur le groupe de classes de diviseurs.* C. R. Acad. Sci. Paris, **284** (1977), 397–399. 958

[152] Quillen D. *Projective modules over polynomial rings.* Invent. Math. **36** (1976), 167–171. 959

[153] Rao R. *On projective $R_{f_1,\ldots,f_t}$-modules.* Amer. J. Math. **107** (1985), 387–406. 969

[154] Rao R. *An elementary transformation of a special unimodular vector to its top coefficient vector.* Proc. Amer. Math. Soc. **93** (1985), 21–24. 942, 969

[155] Rao R. *A note on the Serre dimension of polynomial rings.* J. Pure Appl. Algebra **38** (1985), 87–90. 969

[156] Rao R., Selby J. *Quillen-Suslin theory revisited.* J. Pure Appl. Algebra **211** (2007), 541–546. 959

[157] Richman F. *Constructive aspects of Noetherian rings.* Proc. Amer. Mat. Soc. **44** (1974), 436–441. 28, 84

[158] Richman F. *Seidenberg's condition P.* in Constructive Mathematics. Springer LNM 873 (1981), 1–11. 392

[159] Richman F. *Finite dimensional algebras over discrete fields.* L. E. J. Brouwer centenary symposium, Troelstra and van Dalen eds., North-Holland Pub. Co. (1982), 397–411. 392

[160] Richman F. *Church Thesis without tears.* Journal of Symbolic Logic, **48** (3) (1983), 797–803. 987

[161] Richman F. *Non trivial uses of trivial rings.* Proc. Amer. Math. Soc., **103** (1988), 1012–1014. 545

[162] Richman F. *Intuitionism as generalization.* Philosophia Mathematica, **5** (1990), 124–128. 993

[163] F. Richman. *The regular element property.* Proc. Amer. Math. Soc. **126** 7 (1998), 2123–2129.

[164] Roitman M. *On projective modules over polynomial rings.* Journal of Algebra **58** (1979), 51–63. 959

[165] Roitman M. *On stably extended projective modules over polynomial rings* Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 585–589. 954

[166] Rota Gian Carlo *The many lives of lattice theory.* Notices Amer. Math. Soc. **44** 11 (1997), 1440–1445. 696

[167] Sander T. *Existence and uniqueness of the real closure of an ordered field without Zorn's Lemma.* J. Pure and Applied Algebra **73** (1991), 165–180. 448

[168] Seidenberg A. *What is Noetherian ?* Rend. Sem. Mat. e Fis. Milano **44** (1974), 55–61. 28, 84

[169] Seidenberg A. *On the Lasker-Noether decomposition theorem.* Amer. J. Math **106** (1984), 611–638. 84

[170] Serre J.-P. *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Ann. Inst. Fourier Grenoble **6** (1955-1956), 1–42. xix, 452

[171] Serre J.-P. *Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle.* Séminaire P. Dubreil, Année 1957/1958. 859

[172] Simis A., Vasconcelos W. *Projective modules over $R[X]$, R a valuation ring, are free.* Notices. Amer. Math. Soc. **18** (5), (1971). 959

[173] Skolem T. *A critical remark on foundational research.* Norske Vid. Selsk. Forh., Trondheim **28** (1955), 100–105. 994

[174] Soicher L., McKay J. *Computing Galois groups over the rationals.* J. Number Theory, **20**, (1985), 273–281. 449

[175] Stauduhar R. *The determination of Galois groups.* Math. Comp. **27**, (1973), 981–996. 449

[176] Steel A. *A New Scheme for Computing with Algebraically Closed Fields.* Lecture Notes In Computer Science **2369**. Proceedings of the 5th International Symposium on Algorithmic Number Theory, (2002), 491–505. 450

[177] Steel A. *Computing with algebraically closed fields.* Journal of Symbolic Computation. **45**, 342–372, (2010). 450

[178] Stone M. H. *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics.* Cas. Mat. Fys. **67**, (1937), 1–25. 766, 823

[179] Storch U. *Bemerkung zu einem Satz von M. Kneser.* Arch. Math. **23**, (1972), 403–404. 859

[180] Suslin A. *Projective modules over polynomial rings are free. (Russian).* Dokl. Akad. Nauk SSSR **229** no. 5 (1976), 1063–1066. 959

[181] Suslin A. *On the structure of the special linear group over polynomial rings. (Russian).* Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 235–252. English translation Math. USSR Izvestija, **11**, no. 2, 221–238.

[182] Suslin A. *Stably Free Modules. (Russian).* Mat. Sb. (N.S.) **102** (1977), 537–550. English translation : Math. USSR Sb. **31**, 479–491. 312

[183] Swan R. *Factorization of Polynomials over Finite Fields.* Pacific Journal of Mathematics **12**, no. 3, (1962), 1099–1106. 178

[184] Swan R. *The Number of Generators of a Module.* Math. Z. **102** (1967), 318–322. 859, 860

[185] Swan R. *On Seminormality.* Journal of Algebra, **67** (1980), 210–229. 918, 958

[186] Tennenbaum J. B. *A constructive version of Hilbert's basis theorem.* Dissertation, University of California San Diego, (1973). 84

[187] Traverso C. *Seminormality and the Picard group.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **24** (1970), 585–595. 918, 958

[188] Valibouze A. *Sur le corps des racines d'un polynôme.* Acta Arithmetica **131** (1), (2008), 1–27. 449

[189] Vaserstein L.N. (with A.A. Suslin) *Serre's problem on projective modules over polynomial rings and algebraic K-theory.* Funk. An. **8** (1974), 65–66 = Funct. Anal. Appl. **8**, 148–150.

[190] Vaserstein L.N. *Serre's problem on projective modules over polynomial rings after Suslin and Quillen.* (1976), Unpublished notes. 939

[191] Vaserstein L.N. (with A.A. Suslin) *Serre's problem on projective modules over polynomial rings and algebraic K-theory.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **40** (1976), 993–1054 = Math. USSR Izv. **10**, 937–1001.

[192] Vessiot E. *Sur la théorie de Galois et ses diverses généralisations.* Ann. Sci. E. N. S. 3ème série **21**, (1904), 9–85. 448

[193] Van der Waerden. Review Zentralblatt für Math **24**, (1941), 276. 859

[194] Weyl H. *Das Kontinuum, Kritische Untersuchungen über die Grundlagen der Analysis.* Veit, Leipzig (1918). Traduction italienne *Il Continuo. Indagine critiche sui fondamenti dell' Analisi.* par A. B. Veit Riccioli, Bibliopolis, Naples (1977). Traduction anglaise *The Continuum. A critical examination of the foundations of Analysis.* par S. Polard et T. Bole. Thomas Jefferson Press, University Press of America (1987). En français : *Le continu et autres écrits.* Traduits et commentés par Jean Largeault. Librairie Vrin (1994). 993

[195] Yengui I. *An algorithm for the divisors of monic polynomials over a commutative ring.* Math. Nachr. **260** (2003), 93–99. 913

[196] Yengui I. *Dynamical Gröbner bases.* Journal of Algebra **301** (2006), 447–458. Corrigendum : [197] 914

[197] Yengui I. Corrigendum to *Dynamical Gröbner bases* [J. Algebra 301 (2) (2006) 447–458] and to *Dynamical Gröbner bases over Dedekind rings* [J. Algebra 324 (1) (2010) 12–24]. Journal of Algebra **339** (2011), 370–375. 1020

[198] Yengui I. *Making the use of maximal ideals constructive.* Theoretical Computer Science, **392**, (2008) 174–178. 914

[199] Yengui I. *The Hermite ring conjecture in dimension one.* Journal of Algebra **320** (2008), 437–441. 954

[200] Yengui I. *Stably free modules over $R[X]$ of rank $>\dim R$ are free.* Mathematics of Computation **80** (2011), 1093–1098. 954

Index des notations

page

Exemples

Principe local-global de base et systèmes linéaires

La méthode des coefficients indéterminés

Modules de présentation finie

Modules projectifs de type fini, 1

Algèbres strictement finies et algèbres galoisiennes

La méthode dynamique

Anneaux locaux, ou presque

Modules projectifs de type fini, 2

Treillis distributifs, groupes réticulés

Anneaux de Prüfer et de Dedekind

Dimension de Krull

Index

Dépôt légal ...