



HAL
open science

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS A LA FONCTION D'ERDÖS-ZAREMBA ET APPLICATION A L'INÉGALITÉ DE GAL

Michel Weber

► **To cite this version:**

Michel Weber. QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS A LA FONCTION D'ERDÖS-ZAREMBA ET APPLICATION A L'INÉGALITÉ DE GAL. 2017. hal-01672910

HAL Id: hal-01672910

<https://hal.science/hal-01672910>

Preprint submitted on 27 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES RÉSULTATS RELATIFS À LA FONCTION D'ERDŐS-ZAREMBA ET APPLICATION À L'INÉGALITÉ DE GÁL

MICHEL J. G. WEBER

ABSTRACT. Let $\Psi(n) = \sum_{d|n} \frac{(\log d)(\log \log d)}{d}$. This function and some other studied in this article are related to Erdős et Zaremba function $\Phi(n) = \sum_{d|n} \frac{\log d}{d}$, and it is known that $\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{(\log \log n)^2} = e^\gamma$, γ being Euler's constant. We show that

$$0 < \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} < \infty.$$

The study of $\Psi(n)$ much involves Davenport's function $w(n) = \sum_{p|n} \frac{\log p}{p}$. As an application, we easily show that for any given real $\eta > 1$, there exists a constant $C(\eta)$ depending on η only, such that for any finite sequence of reals $\{c_k, k \in K\}$,

$$\sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{\gcd(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \log \nu)^\eta \Psi(\nu).$$

This establishes the existence of an arithmetical type inequality, hidden in Gál's famous inequality, and nevertheless very close to this one. This much improves recent results obtained by the author in [13].

1. Introduction.

Considérons la fonction arithmétique $\Phi(n) = \sum_{d|n} \frac{\log d}{d}$. Erdős et Zaremba ont montré dans [6] que

$$(1.1) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi(n)}{(\log \log n)^2} = e^\gamma,$$

où γ est la constante d'Euler. La démonstration repose, tant pour la majoration que pour la minoration, sur l'identité (formule (1) dans [6])

$$(1.2) \quad \sum_{d|n} \frac{\log d}{d} = \sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{\log p_i^{\nu_i}}{p_i^{\nu_i}} \sum_{\delta | n p_i^{-\alpha_i}} \frac{1}{\delta}, \quad (n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r})$$

laquelle résulte de

$$(1.3) \quad \sum_{d|n} \frac{\log d}{d} = \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}} \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \log p_i \right).$$

Dans ce travail nous considérons une fonction légèrement plus grande :

$$(1.4) \quad \Psi(n) = \sum_{d|n} \frac{(\log d)(\log \log d)}{d}.$$

Key words and phrases. Arithmetical function, Erdős-Zaremba's function, Davenport's function, Gál's inequality, Gál's sums, Factor closed set, greatest common divisor.

2010 Mathematical Subject Classification: Primary 11D57, Secondary 11A05, 11A25 .

October 2, 2017.

Nous considérons aussi les fonctions suivantes, les deux premières étant liées à Ψ , voir (1.8),

$$\begin{aligned}\Phi_1(n) &= \sum_{d|n, d=p_1^{\mu_1}\dots p_r^{\mu_r}} \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i(\log p_i)(\log \log p_i)}{d} \\ \Phi_2(n) &= \sum_{d|n} \frac{(\log d) \log \Omega(d)}{d}, \\ \Phi_\eta(n) &= \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d},\end{aligned}$$

où $\eta > 1$, et $\Omega(d)$ est la fonction arithmétique comptant le nombre de puissances de nombres premiers divisant d .

Convention: Nous conviendrons que $\log \log x$, (resp. $\log \log \log x$) est égal à 1 si $0 \leq x \leq e^e$ (resp. $0 \leq x \leq e^{e^e}$) et égal à $\log \log x$, (resp. $\log \log \log x$) au sens habituel si $x > e^e$ (resp. $x > e^{e^e}$).

Outre l'intérêt propre d'examiner quelles extensions du résultat de Erdős et Zaremba sont possibles et quelles en sont leurs limites, une autre motivation dans l'étude de variantes de la fonction d'Erdős et Zaremba, réside dans le fait que celle-ci est indirectement liée, ainsi qu'on le verra plus loin, à une inégalité bien connue due à Gál, et ce par l'intermédiaire d'un travail récemment publié dans [13].

Concernant les fonctions que nous venons d'introduire, nous verrons que l'on a facilement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} \geq e^\gamma, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} \geq e^\gamma,$$

et qu'en fait

$$(1.5) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} = e^\gamma.$$

L'extension correspondante de ce résultat à la fonction Ψ est une question naturelle et très intéressante. L'apparition du logarithme double $\log \log d$ (ou de $\log \Omega(d)$) détruit la "log-linéarité" qui permet d'obtenir la formule (1.3). L'estimation de $\Psi(n)$ est donc techniquement plus délicate que celle de $\Phi(n)$. Il résulte par ailleurs de (1.1) que

$$(1.6) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n)}{(\log \log n)^3} \leq e^\gamma.$$

La question est donc de savoir si le bon exposant de $\log \log n$ est proche de 2 ou 3. Nous établirons le résultat précis suivant. Rappelons que la fonction de Davenport $w(n)$ est définie par $w(n) = \sum_{p|n} \frac{\log p}{p}$. Cette fonction est étudiée dans [4]. Il résulte notamment du théorème 4 de [4] que

$$(1.7) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{w(n)}{\log \log n} = 1.$$

Convention: On note par C une constante positive absolue, et par $C(\eta)$ une constante positive ne dépendant que d'un paramètre η ; chacune de ces constantes pouvant changer de valeur à chaque apparition.

Théorème 1.1. *Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$. On a l'estimation suivante*

$$\Psi(n) \leq \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - p_j^{-1}} \right) \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i - 1} + C(\log \log \log r)(\log r)w(n).$$

En particulier,

$$\Psi(n) \leq C(\log \log n)^2(\log \log \log n).$$

Le théorème 1.1 découlera d'une estimation préliminaire de $\Phi_1(n)$, de l'inégalité de convexité (1.8) ci-dessous, et de l'estimation suivante de $\Phi_2(n)$, laquelle occupe les sections 4 et 5.

Théorème 1.2. *On a l'estimation suivante*

$$\Phi_2(n) \leq C(\log \log \log r)(\log r)w(n).$$

Convention : On convient que $0 \log 0 = 0$.

Par convexité, on montre facilement avec les notations μ_i, p_j précédentes, le lemme suivant.

Lemme 1.3. *On a*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r (\mu_i \log p_i) \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \log p_i \right) &\leq \sum_{i=1}^r \mu_i (\log p_i) (\log \log p_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^r \mu_i (\log p_i) \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right), \end{aligned}$$

Il en résulte donc que

$$(1.8) \quad \Psi(n) \leq \Phi_1(n) + \Phi_2(n).$$

L'étude de $\Phi_\eta(n)$ paraît plus délicate et nous n'avons que des résultats très partiels. Un simple argument de convexité montre que

$$(1.9) \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_\eta(n)}{(\log \log n)^{1+\eta}} \geq e^\gamma.$$

La minoration précédente est optimale lorsque les diviseurs premiers de l'entier n ne sont pas trop proches les uns des autres. On peut montrer qu'étant donné $\eta \geq 1$, il existe une constante $C(\eta)$ ne dépendant que de η , telle que pour tout entier $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ vérifiant la condition $\sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i-1} < 2^{1-\eta}$, on a (proposition 3.4)

$$\Phi_\eta(n) \leq C(\eta)(\log \log n)^{1+\eta}.$$

Ainsi qu'annoncé plus haut, une des motivations de l'étude de variantes de la fonction arithmétique d'Erdős et Zaremba, réside dans son lien avec l'inégalité de Gál [7], que nous rappelons : il existe une constante C telle que pour tout ensemble fini K d'entiers distincts, en notant $\#(K) = \kappa$, on a

$$(1.10) \quad \sum_{k, \ell \in K} \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C \kappa (\log \log \kappa)^2.$$

Cette majoration est en outre optimale. Lewko and Radziwiłł [10, Th. 1, 2] ont récemment montré, entre autres résultats, que

$$(1.11) \quad \frac{1}{\kappa(\log \log \kappa)^2} \sup_{\#(K)=\kappa} \sum_{k, \ell \in K} \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \rightarrow \frac{6e^{2\gamma}}{\pi^2},$$

lorsque $\kappa \rightarrow \infty$.

De plus, concernant la norme spectrale associée, on a

$$(1.12) \quad \sup \left\{ \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} : \sum_{k \in K} |c_k|^2 = 1 \right\} \leq \left(\frac{6e^{2\gamma}}{\pi^2} + o(1) \right) (\log \log \kappa)^2.$$

Ceci généralise un travail récent de Hilberdink [9, p. 363]. Bien que ce résultat soit optimal, la majoration de la forme quadratique qui en résulte, à savoir

$$(1.13) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C (\log \log \kappa)^2 \left(\sum_{k \in K} |c_k|^2 \right),$$

n'intègre rien de la structure arithmétique de K ; ce qu'une majoration du type

$$(1.14) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C \sum_{k \in K} \psi(k) |c_k|^2,$$

ferait, où ψ est une fonction arithmétique.

La recherche d'une telle fonction dont l'ordre maximal devrait être proche de $(\log \log n)^2$, est une question très intéressante et naturelle en regard de la nature arithmétique cette forme quadratique. Nous l'avons récemment étudiée dans [13], [14], et en collaboration avec Berkes dans [2]. Le travail initial est celui de Brémont [3], lequel a motivé l'auteur dans l'étude de ces questions. Mais ce point de vue n'est pas nouveau et remonte aux travaux de Cesàro (voir [13, Sec. 2.2] pour plus de détails).

Posons pour tout réel positif η ,

$$\Psi_\eta(n) = \Psi_\eta(n) (\log \log \log n)^\eta.$$

Nous établirons le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Soit $\eta > 1$. Alors il existe une constante $C(\eta)$ ne dépendant que de η , telle que pour tout ensemble fini K d'entiers distincts, et toute suite de réels $\{c_k, k \in K\}$, on a*

$$\sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 \Psi_\eta(\nu).$$

D'où aussi à l'aide du Théorème 1.1,

$$(1.15) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \nu)^2 (\log \log \log \nu)^{1+\eta}.$$

En particulier,

$$(1.16) \quad \sum_{k, \ell \in K} \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C \sum_{\nu \in K} (\log \log \nu)^2 (\log \log \log \nu)^{1+\eta}.$$

Le Théorème 1.4 établit donc l'existence d'une inégalité de type arithmétique, cachée dans l'inégalité de Gál, et néanmoins très proche de celle-ci. En fait, concrètement, la majoration essentielle est du type

$$\sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C(\eta, K) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 \Psi(\nu),$$

et $C(\eta, K)$ dépend de l'ordre de $(\log \log \log \nu)^{1+\eta}$ sur K .

La démonstration que nous proposons est courte et élémentaire. La majoration fournie par le Théorème 1.4 est notamment intéressante lorsque les coefficients sont eux-mêmes de nature arithmétique, par exemple générés par une fonction arithmétique.

Ceci améliore aussi considérablement un travail récent [13], où nous avons établi l'inégalité suivante valable pour tout $s > 1/2$,

$$(1.17) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq \zeta(2s) \inf_{0 < \varepsilon \leq 2s-1} \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 \sigma_{1+\varepsilon-2s}(\nu),$$

où pour tout réel u , $\sigma_u(\nu)$ est la somme des puissances u -ièmes de ν .

On déduit aussi immédiatement du Théorème 1.4 et de (1.13) l'estimation suivante :

Corollaire 1.5. *Soit $\eta > 1$. Alors il existe une constante $C(\eta)$ ne dépendant que de η , telle que pour tout ensemble fini K d'entiers distincts, notant $\#(K) = \kappa$, et toute suite de réels $\{c_k, k \in K\}$,*

$$\sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^2}{k\ell} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \min(\nu, \kappa))^2 (\log \log \log \min(\nu, \kappa))^\eta.$$

Nous renvoyons à [1], [10], [13] pour des références concernant notamment les récentes et remarquables estimations (non arithmétiques) de la forme quadratique arithmétique considérée au théorème 1.4, ainsi que d'autres variantes de celle-ci.

Les sections qui suivent sont consacrées aux démonstrations. Les sections 4 et 5 forment la partie principale de l'article, et concernent la démonstration du Théorème 1.2, laquelle fera intervenir la construction d'un arbre binaire, voir fin de la section 4. Les démonstrations que nous proposons sont toutes élémentaires et très, ou trop selon, détaillées.

2. Preuve du Lemme 1.3 et majoration de $\Phi_1(n)$.

Démonstration du Lemme 1.3. Compte tenu de la convention faite, on peut se restreindre au cas où $\sum_{i=1}^r \mu_i \geq 1$, car sinon les deux membres de l'inégalité cherchée sont nuls. On note $M = \sum_{i=1}^r \mu_i$ et on écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \mu_i (\log p_i) \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \log p_i \right) &= M \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{M} (\log p_i) \log \left(\left\{ \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{M} \log p_i \right\} \cdot M \right) \\ &= M \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{M} (\log p_i) \log \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{M} \log p_i \right\} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{M} (\log p_i) (\log M) \right\}. \end{aligned}$$

La première somme entre parenthèses est égale à $\psi(\sum_{i=1}^r \theta_i \log p_i)$ avec $\sum_{i=1}^r \theta_i = 1$, $\theta_i \geq 0$, et $\psi(x) = x \log x$ est convexe sur \mathbb{R}_+ ($\psi''(x) = 1/x > 0$). Par conséquent,

$$\psi \left(\sum_{i=1}^r \theta_i \log p_i \right) \leq \sum_{i=1}^r \theta_i \psi(\log p_i).$$

Il en résulte que

$$\sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} (\log p_i) \log \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} \log p_i \right\} \leq \sum_{i=1}^r \frac{\mu_i}{\sum_{i=1}^r \mu_i} (\log p_i) (\log \log p_i).$$

La deuxième somme a déjà la bonne forme. On a donc obtenu que

$$\sum_{i=1}^r (\mu_i \log p_i) \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \log p_i \right) \leq \sum_{i=1}^r \mu_i (\log p_i) (\log \log p_i) + \sum_{i=1}^r \mu_i (\log p_i) \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right).$$

□

Nous passons à la majoration de $\Phi_1(n)$.

Lemme 2.1. *On a la majoration suivante,*

$$\Phi_1(n) \leq \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1-p_j^{-1}} \right) \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i - 1}.$$

Démonstration. On écrit que

$$\Phi_1(n) = \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_1(\log p_1)(\log \log p_1) + \cdots + \mu_r(\log p_r)(\log \log p_r)}{p_1^{\mu_1} \cdots p_r^{\mu_r}}$$

Le i -ième terme du numérateur produit la somme

$$\underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r}}_{\text{la somme relative à } \mu_i \text{ est exclue}} \underbrace{\frac{1}{p_1^{\mu_1} \cdots p_r^{\mu_r}}}_{p_i^{\mu_i} \text{ est exclu}} \left(\sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} \frac{\mu_i(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i^{\mu_i}} \right).$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \Phi_1(n) &= \sum_{i=1}^r \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r}}_{\text{la somme relative à } \mu_i \text{ est exclue}} \underbrace{\frac{1}{p_1^{\mu_1} \cdots p_r^{\mu_r}}}_{p_i^{\mu_i} \text{ est exclu}} \left(\sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} \frac{\mu_i(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i^{\mu_i}} \right) \\ (2.1) \quad &= \sum_{i=1}^r \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left(\frac{1-p_j^{-\alpha_j-1}}{1-p_j^{-1}} \right) \left[\sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} \frac{\mu_i(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i^{\mu_i}} \right]. \end{aligned}$$

Or $\sum_{\mu=0}^{\alpha_i} \frac{\mu}{p_i^\mu} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j}{p_i^j} = \frac{1}{(p_i-1)(1-p_i^{-1})}$, (Indication: Soit $S(u) = \sum_{a=0}^{\infty} e^{-au} = \frac{1}{1-e^{-u}}$, $u > 0$. Alors $S'(u) = -\sum_{a=0}^{\infty} a e^{-au} = \frac{-e^{-u}}{(1-e^{-u})^2} = \frac{-1}{(e^u-1)(1-e^{-u})}$).

On peut donc continuer avec

$$\begin{aligned} \Phi_1(n) &\leq \sum_{i=1}^r \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left(\frac{1-p_j^{-\alpha_j-1}}{1-p_j^{-1}} \right) \cdot \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{(p_i-1)(1-p_i^{-1})} \\ (2.2) \quad &\leq \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1-p_j^{-1}} \right) \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i-1}. \end{aligned}$$

□

Corollaire 2.2. *On a l'estimation suivante,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} \leq e^\gamma.$$

Notation: On note $p(j)$ le j -ième nombre premier consécutif.

On rappelle que

$$(2.3) \quad \begin{aligned} p(i) &\geq \max(i \log i, 2), & i &\geq 1, \\ p(i) &\leq i(\log i + \log \log i), & i &\geq 6. \end{aligned}$$

Voir par exemple [12], inégalités (3.12) et (3.13).

Démonstration. Soient $\varepsilon > 0$ et un entier $r_0 \geq 4$. Si $r \leq r_0$, alors

$$\sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i-1} \leq \delta r_0, \quad \delta = \sup_{p \geq 3} \frac{(\log p)(\log \log p)}{p-1} < \infty.$$

Si $r > r_0$, alors

$$\begin{aligned} \sum_{i=r_0+1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i - 1} &\leq \left(\max_{i>r_0} \frac{p(i)}{p(i) - 1} \right) \sum_{i=r_0+1}^r \frac{(\log p(i))(\log \log p(i))}{p(i)} \\ &\leq \left(\max_{i>r_0} \frac{p(i)}{p(i) - 1} \right) \sum_{i=r_0+1}^r \frac{(\log(i \log i))(\log \log(i \log i))}{i \log i} \end{aligned}$$

On choisit $r_0 = r_0(\varepsilon)$ de sorte que $\log r_0 \geq 1/\varepsilon$ et que l'expression précédente soit majorée par

$$(1 + \varepsilon) \sum_{i=r_0+1}^r \frac{\log \log i}{i}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{i=r_0+1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i - 1} &\leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=r_0+1}^r \int_{i-1}^i \frac{\log \log t}{t} dt \\ &= (1 + \varepsilon) \int_{r_0}^r \frac{\log \log t}{t} dt = (1 + \varepsilon) \left\{ (\log t)(\log \log t) \Big|_{r_0}^r - \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} \right\} \\ &\leq (1 + \varepsilon)(\log r)(\log \log r). \end{aligned}$$

A l'aide de l'estimation de Mertens [11, th. 2.7], on a aussi

$$(2.4) \quad \prod_{p \leq x} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) = e^\gamma \log x + \mathcal{O}(1) \quad x \geq 2.$$

Donc,

$$(2.5) \quad \prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_\ell}} \right) \leq \prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p(\ell)}} \right) \leq \prod_{p \leq r(\log r + \log \log r)} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) \leq e^\gamma (\log r) + C,$$

si $r \geq 6$, et partant pour tout $r \geq 1$, quitte à modifier C . Comme $r = \omega(n)$ et $2^{\omega(n)} \leq n$, on a par conséquent,

$$\begin{aligned} \Phi_1(n) &\leq e^\gamma (1 + \varepsilon) ((\log r) + C) (\log r)(\log \log r) \\ &\leq e^\gamma (1 + \varepsilon) (1 + C\varepsilon) (\log r)^2 (\log \log r) \\ &\leq e^\gamma (1 + C'\varepsilon)^2 (\log \log n)^2 (\log \log \log n), \end{aligned}$$

si $r > r_0$. Si $r \leq r_0$, on a

$$\Phi_1(n) \leq \delta e^\gamma (1 + \varepsilon) ((\log r_0) + C) := C(\varepsilon).$$

D'où,

$$\Phi_1(n) \leq e^\gamma (1 + \varepsilon)^2 (\log \log n)^2 (\log \log \log n) + C(\varepsilon).$$

Comme ε peut être arbitrairement petit, il en résulte que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} \leq e^\gamma.$$

□

La proposition suivante n'est rien d'autre que la partie majoration de (1.1). La preuve que nous en donnons utilise (1.3) et non (2.6), et nous paraît plus simple et plus précise.

Proposition 2.3. (a) *On a la majoration suivante,*

$$\sum_{d|n} \frac{\log d}{d} \leq \prod_{p|n} \left(\frac{1}{1 - p^{-1}} \right) \sum_{p|n} \frac{\log p}{p - 1}.$$

De plus,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log \log n)(\log \omega(n))} \sum_{d|n} \frac{\log d}{d} \leq e^\gamma.$$

Démonstration. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, ($\alpha_i \geq 1$). Alors, comme pour la preuve du lemme 2.1, nous avons successivement à partir de (1.3), en re-sommant,

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{\log d}{d} &= \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\sum_{i=1}^r \mu_i \log p_i}{p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}} \\ &= \sum_{i=1}^r \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}}}_{\substack{\text{la somme relative} \\ \text{à } \mu_i \text{ est exclue}}} \left(\sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} \frac{\mu_i (\log p_i)}{p_i^{\mu_i}} \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^r \left(\frac{1 - \frac{1}{p_\ell^{\alpha_\ell+1}}}{1 - \frac{1}{p_\ell}} \right) \left[\sum_{\mu=0}^{\alpha_i} \frac{\mu \log p_i}{p_i^\mu} \right]. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \frac{\log d}{d} &\leq \prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_\ell}} \right) \sum_{i=1}^r (1 - p_i^{-1}) \frac{\log p_i}{(p_i - 1)(1 - p_i^{-1})} \\ &= \prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_\ell}} \right) \sum_{i=1}^r \frac{\log p_i}{p_i - 1}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Comme $p_i \geq p(i) \geq \max(i \log i, 2)$ si $i \geq 1$, on montre sans peine que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe H_ε tel que

$$\sum_{i=1}^r \frac{\log p_i}{p_i - 1} \leq H_\varepsilon + (1 + \varepsilon) \log r. \quad (2.8)$$

On a donc

$$\sum_{d|n} \frac{\log d}{d} \leq \prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_\ell}} \right) (H_\varepsilon + (1 + \varepsilon) \log r).$$

A l'aide de l'estimation (2.5) on a aussi

$$\prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p_\ell}} \right) \leq \prod_{\ell=1}^r \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p(\ell)}} \right) \leq e^\gamma (\log r) + C.$$

Finalement

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log \omega(n))^2} \sum_{d|n} \frac{\log d}{d} \leq e^\gamma.$$

□

3. Minoration.

On rappelle que le plus petit diviseur premier d'un entier n se note par $P^-(n)$.

Lemme 3.1. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $r \geq 1$, $\alpha_i \geq 1$. Alors,

$$\Phi_1(n) \geq \left(1 - \frac{1}{P^-(n)}\right) \prod_{j=1}^r (1 + p_j^{-1}) \left[\sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i} \right]$$

Démonstration. Par (2.1),

$$\begin{aligned}
\Phi_1(n) &= \sum_{i=1}^r \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left(\frac{1 - p_j^{-\alpha_j - 1}}{1 - p_j^{-1}} \right) \left[\sum_{\mu=0}^{\alpha_i} \frac{\mu_i (\log p_i) (\log \log p_i)}{p_i^{\mu_i}} \right] \\
&\geq \sum_{i=1}^r \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^r \left(\frac{1 - p_j^{-\alpha_j - 1}}{1 - p_j^{-1}} \right) \left[\frac{(\log p_i) (\log \log p_i)}{p_i} \right] \\
&= \prod_{j=1}^r \left(\frac{1 - p_j^{-\alpha_j - 1}}{1 - p_j^{-1}} \right) \left[\sum_{i=1}^r \frac{(1 - p_i^{-1}) (\log p_i) (\log \log p_i)}{p_i} \right] \\
&\geq \prod_{j=1}^r (1 + p_j^{-1}) \left[\sum_{i=1}^r \frac{(1 - p_i^{-1}) (\log p_i) (\log \log p_i)}{p_i} \right].
\end{aligned}$$

Donc

$$\Phi_1(n) \geq \left(1 - \frac{1}{P^-(n)}\right) \prod_{j=1}^r (1 + p_j^{-1}) \left[\sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i) (\log \log p_i)}{p_i} \right].$$

□

On déduit facilement du lemme 2.1 et du lemme 3.1 le corollaire suivant.

Corollaire 3.2. *Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, $r \geq 1$, $\alpha_i \geq 1$. Alors,*

$$\left(1 - \frac{1}{P^-(n)}\right) \prod_{j=1}^r (1 + p_j^{-1}) \leq \frac{\Phi_1(n)}{\sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i) (\log \log p_i)}{p_i}} \leq 2 \prod_{j=1}^r \left(\frac{1}{1 - p_j^{-1}} \right).$$

Proposition 3.3. *Soit $\eta \geq 1$. Alors,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log \log n)^{1+\eta}} \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d} \geq e^\gamma.$$

On a aussi

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} \geq e^\gamma, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n)}{(\log \log n)^2 (\log \log \log n)} \geq e^\gamma.$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\eta = 1$. Soit $n_j = \prod_{p < e^j} p^j$. Rappelons que $p(i)$ est le i -ième nombre premier consécutif, et que $p(i) \geq \max(i \log i, 2)$ si $i \geq 1$. Soit $r(j)$ l'entier défini par la condition $p(r(j)) < e^j < p(r(j) + 1)$.

En utilisant (2.6) et en suivant la preuve de Gronwall [8], nous avons successivement,

$$\begin{aligned}
\sum_{d|n_j} \frac{\log d}{d} &= \sum_{i=1}^{r(j)} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{r(j)} \left(\frac{1 - p(\ell)^{-j-1}}{1 - p(\ell)^{-1}} \right) \left[\sum_{\mu=0}^j \frac{\mu \log p(i)}{p(i)^\mu} \right] \\
&\geq \frac{1}{\zeta(j+1)} \prod_{\ell=1}^{r(j)} \left(\frac{1}{1 - p(\ell)^{-1}} \right) \sum_{i=1}^{r(j)} (1 - p(i)^{-1}) \frac{\log p(i)}{p(i)} \left[1 + \frac{1}{p(i)} + \dots + \frac{1}{p(i)^{j-1}} \right] \\
&= \frac{1}{\zeta(j+1)} \prod_{\ell=1}^{r(j)} \left(\frac{1}{1 - p(\ell)^{-1}} \right) \sum_{i=1}^{r(j)} \frac{\log p(i)}{p(i)} (1 - p(i)^{-j}).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la fonction de Chebycheff $\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ vérifie $\vartheta(x) \geq (1 - \varepsilon(x))x$, $x \geq 2$, où $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ quand x tend vers l'infini; voir [12, (3.33)] où $\varepsilon(x)$ est explicitée. Par conséquent, $\log n_j = j\vartheta(e^j) = je^j(1 + o(1))$, et donc $\log \log n_j = j + \log j(1 + o(1)) = j(1 + o(1))$.

On a alors d'une part, par (2.4),

$$(3.1) \quad \prod_{\ell=1}^{r(j)} (1 - p(\ell)^{-1}) = \prod_{p < e^j} (1 - p^{-1}) = \frac{e^{-\gamma}}{j} (1 + \mathcal{O}(\frac{1}{j})).$$

et d'autre part, à l'aide de l'estimation de Mertens [11, th. 2.7],

$$(3.2) \quad \sum_{p < e^j} \frac{\log p}{p} = j + \mathcal{O}(1) \geq (1 + o(1)) \log \log n_j.$$

Comme en outre $\zeta(j+1) \rightarrow 1$ lorsque $j \rightarrow \infty$, il suit que

$$(3.3) \quad \sum_{d|n_j} \frac{\log d}{d} \geq (1 + o(1)) e^\gamma (\log \log n_j)^2 \quad j \rightarrow \infty.$$

On suppose maintenant que $\eta > 1$. Un simple argument probabiliste suffit. Soit X une variable aléatoire discrète égale à $\log d$ si $d|n$, avec probabilité $1/(d\sigma_{-1}(n))$. Alors,

$$\mathbb{E} X^\eta = \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d\sigma_{-1}(n)} \geq (\mathbb{E} X)^\eta = \left(\sum_{d|n} \frac{\log d}{d\sigma_{-1}(n)} \right)^\eta.$$

D'où,

$$\Phi_\eta(n) = \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d} \geq \sigma_{-1}(n)^{1-\eta} \left(\sum_{d|n} \frac{\log d}{d} \right)^\eta.$$

Comme $\sigma_{-1}(n) \leq (1 + o(1)) e^\gamma \log \log n$, en utilisant (3.3) nous déduisons que

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(n_j) &\geq (1 + o(1)) e^{(1-\eta)\gamma} (\log \log n_j)^{1-\eta} (e^\gamma (\log \log n_j)^2)^\eta \\ &= (1 + o(1)) e^\gamma (\log \log n_j)^{1+\eta}. \end{aligned}$$

Examinons la minoration correspondante pour la fonction $\Psi(n)$. La preuve est identique à la précédente. Soit $\sigma'_1(n) = \sum_{d|n, d \geq 3} 1/d$. Soit X' une variable aléatoire discrète égale à $\log d$ si $d|n$ et $d \geq 3$, avec probabilité $1/(d\sigma'_{-1}(n))$. Par convexité de la fonction $x \log x$ sur l'intervalle $[1, \infty)$, on a tout d'abord

$$\begin{aligned} \mathbb{E} X \log X &= \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} \frac{(\log d)(\log \log d)}{d\sigma'_1(n)} \geq (\mathbb{E} X) \log(\mathbb{E} X) \\ &= \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} \frac{(\log d)}{d\sigma'_{-1}(n)} \right) \log \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} \frac{(\log d)}{d\sigma'_1(n)} \right) \\ &\geq \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \frac{(\log d)}{d\sigma'_{-1}(n)} - C \right) \left(\log \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \frac{(\log d)}{d} - C \right) - \log \sigma_{-1}(n) \right). \end{aligned}$$

D'où, en multipliant par $\sigma'_{-1}(n)$ et puisque trivialement $\sigma'_{-1}(n) \leq \sigma_{-1}(n)$,

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{d|n \\ d \geq 3}} \frac{(\log d)(\log \log d)}{d} &\geq \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \frac{(\log d)}{d} - C\sigma_{-1}(n) \right) \left(\log \left(\sum_{\substack{d|n \\ d \geq 1}} \frac{(\log d)}{d} - C \right) - \log \sigma_{-1}(n) \right) \\ &\quad - \log \sigma_{-1}(n) \end{aligned}$$

En faisant $n = n_j$, on déduit de (3.3) que

$$\begin{aligned} \Psi(n) &\geq \sum_{\substack{d|n_j \\ d \geq 3}} \frac{(\log d)(\log \log d)}{d} \geq \left((1 + o(1)) e^\gamma (\log \log n_j)^2 - C \log \log n_j \right) \\ &\quad \times \left(\log \{ (1 + o(1)) e^\gamma (\log \log n_j)^2 - C \} - \log C \log \log n_j \right) \\ &\geq (1 + o(1)) e^\gamma (\log \log n_j)^2 \log \log \log n_j. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\Psi(n)}{(\log \log n)^2 \log \log \log n} \geq e^\gamma.$$

Examinons à présent le cas de la fonction $\Phi_1(n)$. On a

$$\begin{aligned} \Phi_1(n_j) &= \sum_{i=1}^{r(j)} \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq i}}^{r(j)} \left(\frac{1 - p(\ell)^{-j-1}}{1 - p(\ell)^{-1}} \right) \left[\sum_{\mu=0}^j \frac{\mu(\log p(i))(\log \log p(i))}{p(i)^\mu} \right] \\ &\geq \frac{1}{\zeta(j+1)} \prod_{\ell=1}^{r(j)} \left(\frac{1}{1 - p(\ell)^{-1}} \right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^{r(j)} (1 - p(i)^{-1}) \frac{(\log p(i))(\log \log p(i))}{p(i)} \left[1 + \frac{1}{p(i)} + \dots + \frac{1}{p(i)^{j-1}} \right] \\ &\geq \frac{1}{\zeta(j+1)} (e^\gamma j) \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{j}\right) \right) \sum_{i=1}^{r(j)} \frac{(\log p(i))(\log \log p(i))}{p(i)} (1 - p(i)^{-j}). \end{aligned}$$

par (3.1). Soit $0 < \varepsilon < 1$. En utilisant (3.2), on a aussi pour tout j assez grand,

$$\begin{aligned} \sum_{p < e^j} \frac{(\log p)(\log \log p)}{p} &\geq \sum_{e^{\varepsilon j} \leq p < e^j} \frac{(\log p)(\log \log p)}{p} \\ &\geq (1 + o(1)) (\log(\varepsilon j)) \sum_{e^{\varepsilon j} \leq p < e^j} \frac{(\log p)}{p} \\ &\geq (1 + o(1)) (1 - \varepsilon) j (\log(\varepsilon j)) (1 + \mathcal{O}(1/j)) \\ &\geq (1 + o(1)) (1 - \varepsilon) (\log \log n_j) (\log(\varepsilon \log \log n_j)). \end{aligned}$$

Comme $\log(\varepsilon \log \log n_j) \sim \log \log \log n_j$, $j \rightarrow \infty$, on a

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n_j)}{(\log \log n_j)^2 (\log \log \log n_j)} \geq e^\gamma (1 - \varepsilon).$$

D'où

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\Phi_1(n_j)}{(\log \log n_j)^2 (\log \log \log n_j)} \geq e^\gamma.$$

□

Dans la proposition ci-dessous, on montre que si par exemple les diviseurs premiers de l'entier n ne sont pas trop proches les uns des autres, alors la minoration précédente de la fonction $\Phi_\eta(n)$ est optimale.

Proposition 3.4. *Soit $\eta \geq 1$. Il existe une constante $C(\eta)$ ne dépendant que de η , telle que pour tout entier $n = \prod_{i=1}^r p_i^{\alpha_i}$ vérifiant la condition ci-dessous*

$$(3.4) \quad \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i - 1} < 2^{1-\eta},$$

on a

$$\Phi_\eta(n) \leq C(\eta) (\log \log n)^\eta \sigma_{-1}(n).$$

Comme $\sigma_{-1}(n) \leq C \log \log n$, on a donc

$$\Phi_\eta(n) \leq C(\eta) (\log \log n)^{1+\eta}.$$

Démonstration. On utilise l'inégalité bien connue $(a+b)^\eta \leq 2^{\eta-1}(a^\eta + b^\eta)$ si $a \geq 0$, $b \geq 0$ et $\eta \geq 1$; laquelle résulte de l'inégalité de Hölder. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, ($\alpha_i \geq 1$). On a successivement,

$$\begin{aligned} \Phi_\eta(n) &= \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \sum_{\delta|np_i^{-\alpha_i}} \frac{(\log p_i^{\nu_i} \delta)^\eta}{p_i^{\nu_i} \delta} \\ &\leq 2^{\eta-1} \left\{ \sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{(\nu_i \log p_i)^\eta}{p_i^{\nu_i}} \sum_{\delta|np_i^{-\alpha_i}} \frac{1}{\delta} + \sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{1}{p_i^{\nu_i}} \sum_{\delta|np_i^{-\alpha_i}} \frac{(\log \delta)^\eta}{\delta} \right\} \\ &\leq 2^{\eta-1} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{(\nu_i \log p_i)^\eta}{p_i^{\nu_i}} \right) \sigma_{-1}(n) + 2^{\eta-1} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{1}{p_i^{\nu_i}} \right) \sum_{\delta|n} \frac{(\log \delta)^\eta}{\delta} \\ &\leq 2^{\eta-1} \left(\sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{(\nu_i \log p_i)^\eta}{p_i^{\nu_i}} \right) \sigma_{-1}(n) + 2^{\eta-1} \left(\sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i - 1} \right) \sum_{\delta|n} \frac{(\log \delta)^\eta}{\delta}, \end{aligned}$$

puisque

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{1}{p_i^{\nu_i}} \leq \sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i^{\nu_i}} = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i - 1}.$$

D'où, en tenant compte de l'hypothèse (3.4),

$$\left(1 - 2^{\eta-1} \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i - 1}\right) \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d} \leq 2^{\eta-1} \sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{(\nu_i \log p_i)^\eta}{p_i^{\nu_i}} \sum_{\delta|n} \frac{1}{\delta}.$$

Par conséquent,

$$(3.5) \quad \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d} \leq c \left(\sum_{i=1}^r \sum_{\nu_i=1}^{\alpha_i} \frac{(\nu_i \log p_i)^\eta}{p_i^{\nu_i}} \right) \sigma_{-1}(n)$$

où

$$c = \frac{1}{2^{1-\eta} - \sum_{i=1}^r 1/(p_i - 1)}.$$

Maintenant on observe que

$$\sum_{i=1}^r (\log p_i)^\eta \sum_{\nu_i=1}^{\infty} \frac{\nu_i^\eta}{p_i^{\nu_i}} = \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)^\eta}{p_i} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+1)^\eta}{p_i^h} \leq \left(\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+1)^\eta}{2^h} \right) \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)^\eta}{p_i}.$$

Il résulte de (2.3) et de la monotonie de la fonction $(\log x)^\eta/x$ que l'on a,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)^\eta}{p_i} &\leq \sum_{i=1}^r \frac{(\log p(i))^\eta}{p(i)} \leq \sum_{i=1}^r \frac{(\log i)^\eta}{\max(i \log i, 2)} \\ &\leq \frac{(\log 2)^\eta}{2} + \frac{(\log \omega(n))^\eta}{\eta} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\eta} \right) (\log \omega(n))^\eta. \end{aligned}$$

Puisque $n \geq 2^{\omega(n)}$, on a donc

$$(3.6) \quad \sum_{d|n} \frac{(\log d)^\eta}{d} \leq C(\eta) (\log \log n)^\eta \sigma_{-1}(n).$$

□

4. Majoration de $\Phi_2(n)$.

Si 2 divise n , écrivons que $n = 2^v m$ où $2 \nmid m$, et

$$\Psi(n) = \sum_{d|n} \frac{(\log d)(\log \log d)}{d} = \sum_{k=1}^v \sum_{\substack{d=2^k \delta \\ \delta|m}} \frac{(\log(2^k \delta))(\log \log(2^k \delta))}{2^k \delta}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^v \sum_{\substack{d=2^k \delta \\ \delta|m, \delta > 2^k}} \frac{(\log(2^k \delta))(\log \log(2^k \delta))}{2^k \delta} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sum_{\delta|m} \frac{(2 \log \delta)(\log(2 \log \delta))}{\delta} \\ &\leq c_1 \Psi(m), \end{aligned}$$

où

$$c_1 = 2 \sup_{\delta \geq 3} \frac{\log(2 \log \delta)}{\log \log \delta} < \infty.$$

En outre,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^v \sum_{\substack{d=2^k \delta \\ \delta|m, \delta \leq 2^k}} \frac{(\log(2^k \delta))(\log \log(2^k \delta))}{2^k \delta} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k \log 2)(\log(2k \log 2))}{2^k} \sum_{\delta|m} \frac{1}{\delta} \\ &:= c_2 \sigma_{-1}(m). \end{aligned}$$

Comme en outre $\Psi(m) \geq \sigma_{-1}(m) - c_3$, on a donc

$$\Psi(n) \leq c_1 \Psi(m) + c_2 \sigma_{-1}(m) \leq (c_1 + c_2) \Psi(m) + c_3.$$

On peut donc supposer que si $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, alors

$$(4.1) \quad \min_{i=1}^r p_i \geq 3.$$

De même que pour $\Phi_1(n)$, on écrit que

$$\begin{aligned} \Phi_2(n) &= \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}} \sum_{i=1}^r \mu_i (\log p_i) \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^r \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_r^{\mu_r}}}_{\substack{\text{la somme relative} \\ \text{\textit{à } \mu_i \text{ est exclue}}} } \underbrace{\left(\sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} \frac{\mu_i (\log p_i)}{p_i^{\mu_i}} \right)}_{\substack{\text{est exclu} \\ p_i^{\mu_i}}} \log \left(\sum_{i=1}^r \mu_i \right). \end{aligned}$$

La majoration va donc consister en l'estimation des sous-sommes précédentes. Comme nous n'avons pas mis de relation d'ordre sur la suite p_1, \dots, p_r , l'étude de la somme

$$(4.2) \quad \Phi_2(r, n) := \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_{r-1}=0}^{\alpha_{r-1}} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_{r-1}^{\mu_{r-1}}} \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log \left[\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r \right].$$

sera donc générique de celle des autres. Examinons sa structure et anticipons quelque peu les calculs. La dernière somme $\sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log \left[\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r \right]$ est du type

$$\sum_{\mu=0}^{\alpha_r} \alpha \mu (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu}, \quad \alpha = \log p_r, \quad A = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i.$$

Il est facile de voir à partir de (4.6), que l'estimation de cette somme va répercuter sur la somme en μ_{r-1} un facteur logarithmique $\log \left[h + \sum_{i=1}^{r-2} \mu_i + \mu_{r-1} \right]$ où h est un entier positif, et ce, ainsi de suite. Plus précisément, à l'aide du lemme 4.4, la somme ci-dessus se majore par

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha \mu (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} &\leq \alpha (\log(A + 1)) e^{-\alpha} + 2\alpha (\log(A + 2)) e^{-2\alpha} \\ &+ \left\{ 3\alpha \log(A + 3) + 3 \log(A + 3) + \frac{1}{\alpha} \log(A + 3) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A + 3)} \right\} e^{-3\alpha}. \end{aligned}$$

pourvu que $A \geq 1$, et $\alpha \geq 1$. C'est à dire,

$$\frac{\log p_r}{p_r} (\log(A+1)) + \frac{2 \log p_r}{p_r^2} (\log(A+2)) + \frac{1}{p_r^3} \left\{ 3 \log p_r \log(A+3) + 3 \log(A+3) \right. \\ \left. + \frac{1}{\log p_r} \log(A+3) + \frac{1}{\log p_r} + \frac{1}{(\log p_r)^2 (A+3)} \right\}.$$

En reportant la majoration obtenue dans l'écriture de $\Phi_2(r, n)$, on a donc à considérer des sommes du type

$$\sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{\mu_{r-1}=0}^{\alpha_{r-1}} \frac{\log \left[\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + h \right]}{p_1^{\mu_1} \cdots p_{r-1}^{\mu_{r-1}}} \quad h = 1, 2, 3$$

affectées de nouveaux coefficients. La dernière somme s'estime à l'aide de (4.9), et se majore par

$$\log \left[\sum_{i=1}^{r-2} \mu_i + h \right] + \frac{1}{p_{r-1}} \left(\log \left(\sum_{i=1}^{r-2} \mu_i + h + 1 \right) \right. \\ \left. + \frac{\log \left[\sum_{i=1}^{r-2} \mu_i + h + 1 \right]}{\log p_{r-1}} + \frac{1}{(\log p_{r-1})^2 (\sum_{i=1}^{r-2} \mu_i + h + 1)} \right).$$

En reportant, ceci permet de majorer à nouveau $\Phi_2(r, n)$. Les sommes restantes seront à partir de là toutes du même type. Le facteur $\log \left[\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + h \right]$, une fois la majoration faite, produit sur la somme d'ordre $(r-2)$ le facteur $\log \left[\sum_{i=1}^{r-2} \mu_i + h + 1 \right]$. A ce propos, l'étude de la fonction $\Phi_\eta(n)$, $\eta > 1$, produirait ici des altérations beaucoup plus sensibles. Il s'agit donc de comprendre comment se génèrent les nouveaux coefficients obtenus par ce moyen, et de vérifier qu'un coefficient d'ordre $1 + \varepsilon$ ne produit pas par itération un coefficient d'ordre $(1 + \varepsilon)^r$. On établira au lemme 4.8 une inégalité de récurrence permettant de calculer ceux-ci.

4.1. Lemmes élémentaires.

4.1.1. *Fonctions* φ_1, φ_2 . Soient $A \geq 0$, $\alpha \geq 0$. On pose

$$(4.3) \quad \begin{cases} \varphi_1(x) = x(\log(A+x))e^{-\alpha x} \\ \varphi_2(x) = (\log(A+x))e^{-\alpha x} \end{cases} \quad x > 0.$$

Lemme 4.1. *Si $A \geq 1$ et $\alpha \geq \log 2$, alors $\varphi_1(x)$ est décroissante sur l'intervalle $[3, \infty)$. D'autre part, si $A \geq 1$ et $\alpha \geq 1$, alors $\varphi_2(x)$ est décroissante sur l'intervalle $[1, \infty)$.*

Démonstration. On a

$$(4.4) \quad \varphi_1'(x) = (\log(A+x))e^{-\alpha x} + \frac{x}{A+x}e^{-\alpha x} - \alpha x(\log(A+x))e^{-\alpha x}$$

Donc $\varphi_1'(x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{(A+x)\log(A+x)} \leq \alpha$. Or par hypothèse,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{(A+x)\log(A+x)} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{8 \log 2} \leq \frac{1}{3} + \frac{1}{5} < \log 2 \leq \alpha.$$

En outre,

$$(4.5) \quad \varphi_2'(x) = \frac{1}{A+x}e^{-\alpha x} - \alpha(\log(A+x))e^{-\alpha x}.$$

Donc $\varphi_2'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (A+x)\log(A+x) \geq \frac{1}{\alpha}$. Et par hypothèse $(A+x)\log(A+x) \geq 2 \log 2 > 1 \geq \frac{1}{\alpha}$. \square

4.1.2. *Intégrales associées à φ_1 , φ_2 .*

Lemme 4.2. *Pour tout entier $m \geq 1$, on a l'estimation suivante*

$$\alpha \int_m^\infty x(\log(A+x))e^{-\alpha x} dx \leq \frac{1}{\alpha^2(A+m)}e^{-\alpha m} + \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha m} + \frac{1}{\alpha}(\log(A+m))e^{-\alpha m} + m(\log A + m)e^{-\alpha m}.$$

Démonstration. On tire de (4.4) que

$$(4.6) \quad \alpha x(\log(A+x))e^{-\alpha x} = (\log(A+x))e^{-\alpha x} + \frac{x}{A+x}e^{-\alpha x} - (x(\log A + x)e^{-\alpha x})'.$$

Et donc en intégrant,

$$\alpha \int_m^\infty x(\log(A+x))e^{-\alpha x} dx = \int_m^\infty x(\log(A+x))e^{-\alpha x} dx + \int_m^\infty \frac{x}{A+x}e^{-\alpha x} dx + m(\log A + m)e^{-\alpha m}.$$

On tire par ailleurs de (4.5) que

$$\alpha \int_m^\infty (\log(A+x))e^{-\alpha x} dx = \int_m^\infty \frac{1}{A+x}e^{-\alpha x} dx + (\log(A+m))e^{-\alpha m}.$$

En combinant, il vient que

$$(4.7) \quad \alpha \int_m^\infty x(\log(A+x))e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \int_m^\infty \frac{1}{A+x}e^{-\alpha x} dx + \int_m^\infty \frac{x}{A+x}e^{-\alpha x} dx + \frac{1}{\alpha}(\log(A+m))e^{-\alpha m} + m(\log A + m)e^{-\alpha m}.$$

Il est maintenant immédiat que

$$\alpha \int_m^\infty x(\log(A+x))e^{-\alpha x} dx \leq \frac{1}{\alpha^2(A+m)}e^{-\alpha m} + \frac{1}{\alpha}e^{-\alpha m} + \frac{1}{\alpha}(\log(A+m))e^{-\alpha m} + m(\log A + m)e^{-\alpha m}.$$

□

Lemme 4.3.

$$\int_1^\infty (\log(A+x))e^{-\alpha x} dx \leq \frac{\log(A+1)}{\alpha}e^{-\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A+1)}e^{-\alpha}.$$

Démonstration. On tire de (4.4) que

$$\int_1^N (\log(A+x))e^{-\alpha x} dx = \int_1^N \frac{1}{\alpha(A+x)}e^{-\alpha x} dx - \frac{1}{\alpha} \left((\log(A+1))e^{-\alpha} - \log(A+N)e^{-\alpha N} \right).$$

Lorsque N tend vers l'infini, le second membre tend vers $\frac{\log(A+1)}{\alpha}e^{-\alpha}$. Comme en outre

$$\frac{1}{\alpha} \int_1^N \frac{1}{A+x}e^{-\alpha x} dx \leq \frac{1}{\alpha^2(A+1)}e^{-\alpha},$$

on en déduit que

$$\int_1^\infty (\log(A+x))e^{-\alpha x} dx \leq \frac{\log(A+1)}{\alpha}e^{-\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A+1)}e^{-\alpha}.$$

□

4.1.3. *Estimations liées à $\Phi_2(r, n)$.*

Lemme 4.4. *Supposons que $A \geq 1$, et $\alpha \geq 1$. Alors,*

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha \mu (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} &\leq \alpha (\log(A + 1)) e^{-\alpha} + 2\alpha (\log(A + 2)) e^{-2\alpha} \\ &\quad + \left\{ 3\alpha \log(A + 3) + 3 \log(A + 3) + \frac{1}{\alpha} \log(A + 3) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A + 3)} \right\} e^{-3\alpha}. \end{aligned}$$

Démonstration. On écrit la somme à estimer sous la forme

$$\alpha (\log(A + 1)) e^{-\alpha} + 2\alpha (\log(A + 2)) e^{-2\alpha} + 3\alpha (\log(A + 3)) e^{-3\alpha} + \alpha \sum_{\mu=4}^{\infty} \mu (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu}.$$

Comme $A \geq 1$, et $\alpha \geq 1$, on sait par le lemme 4.1 que $\varphi_1(x) = x(\log(A + x))e^{-\alpha x}$ est décroissante sur l'intervalle $[3, \infty)$. On a donc en utilisant le lemme 4.2,

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{\mu=4}^{\infty} \mu (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} &\leq \alpha \int_3^{\infty} x (\log(A + x)) e^{-\alpha x} dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha^2(A + 3)} e^{-3\alpha} + \frac{1}{\alpha} e^{-3\alpha} + \frac{\log(A + 3)}{\alpha} e^{-3\alpha} + 3(\log A + 3) e^{-3\alpha}. \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$(4.8) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} \alpha \mu (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} \leq \alpha (\log(A + 1)) e^{-\alpha} + 2\alpha (\log(A + 2)) e^{-2\alpha} + \left\{ 3\alpha \log(A + 3) + 3 \log(A + 3) + \frac{1}{\alpha} \log(A + 3) + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A + 3)} \right\} e^{-3\alpha}.$$

□

Lemme 4.5. *Sous l'hypothèse (4.1), on a*

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_s=0}^{\infty} \frac{\log(\sum_{i=1}^s \mu_i + h)}{p_s^{\mu_s}} &\leq \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h\right) + \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s}\right) \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h + 1\right) \\ &\quad + \frac{1}{(1 + (\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + 2))(\log p_s)^2 p_s}. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\sum_{\mu_s=0}^{\infty} \frac{\log(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h)}{p_s^{\mu_s}} \leq \left(1 + \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s} + \frac{1}{3(\log p_s)^2}\right)\right) \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h + 2\right).$$

Démonstration. On écrit que

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=0}^{\infty} (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} &= \log A + (\log(A + 1)) e^{-\alpha} + \sum_{\mu=2}^{\infty} (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} \\ &\leq \log A + (\log(A + 1)) e^{-\alpha} + \int_1^{\infty} (\log(A + x)) e^{-\alpha x} dx. \end{aligned}$$

D'où par le lemme 4.3,

$$(4.9) \quad \sum_{\mu=0}^{\infty} (\log(A + \mu)) e^{-\alpha \mu} \leq \log A + e^{-\alpha} \left(\log(A + 1) + \frac{\log(A + 1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A + 1)} \right).$$

Par conséquent,

$$\sum_{\mu_s=0}^{\infty} \frac{\log(\sum_{i=1}^s \mu_i + h)}{p_s^{\mu_s}} \leq \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h\right) + \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s}\right) \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h + 1\right)$$

$$+ \frac{1}{(1 + (\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + 2))(\log p_s)^2 p_s}.$$

On en déduit donc que,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_s=0}^{\infty} \frac{\log(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h)}{p_s^{\mu_s}} &\leq \left(1 + \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s}\right)\right) \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h + 1\right) + \frac{1}{3(\log p_s)^2 p_s} \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s}\right) + \frac{1}{3(\log p_s)^2}\right) \log\left(\sum_{i=1}^{s-1} \mu_i + h + 2\right). \end{aligned}$$

□

Corollaire 4.6. *Supposons que l'hypothèse (4.1) soit vérifiée.*

(i) Si $\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \geq 1$, alors,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r\right) &\leq \frac{\log p_r}{p_r} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 1\right) + \frac{2 \log p_r}{p_r^2} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 2\right) \\ &+ \frac{1}{p_r^3} \left(3 \log p_r + 3 + \frac{1}{\log p_r}\right) \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 3\right) + \frac{1}{p_r^3 \log p_r} \left(1 + \frac{1}{(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 3) \log p_r}\right). \end{aligned}$$

En outre,

$$\sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r\right) \leq 5 \frac{\log p_r}{p_r} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 3\right).$$

(ii) Si $\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i = 0$, alors

$$\sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r\right) \leq 18 \frac{\log p_r}{p_r}.$$

Démonstration. (i) La première inégalité découle du lemme 4.4 avec le choix $\alpha = \log p_r$, $A = \sum_{i=1}^{r-1} \mu_i$, et en notant que $\alpha > 1$ en vertu de l'hypothèse (4.1). Comme $p_r \geq 3$, il est aussi immédiat que

$$\begin{aligned} &\sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r\right) \\ &\leq \left\{3 \frac{\log p_r}{p_r} + \frac{\log p_r}{9 p_r} \left(3 + \frac{3}{\log p_r} + \frac{1}{(\log p_r)^2}\right)\right\} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 3\right) \\ &\quad + \frac{1}{9 p_r \log p_r} \left(1 + \frac{1}{4 \log p_r}\right) \\ &\leq 5 \frac{\log p_r}{p_r} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 3\right). \end{aligned}$$

(ii) Si $\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i = 0$, les sommes relatives à μ_i , $1 \leq i \leq r-1$, n'ont aucune contribution. Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log\left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r\right) &= \sum_{\mu_r=2}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log \mu_r = \sum_{\mu=1}^{\alpha_r-1} \frac{(\mu+1) \log p_r}{p_r^{\mu+1}} \log(\mu+1) \\ &\leq \frac{1}{p_r} \left\{ \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu \log p_r}{p_r^{\mu}} \log(\mu+1) + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\log p_r}{p_r^{\mu}} \log(\mu+1) \right\}. \end{aligned}$$

Le lemme 4.4 appliqué avec $A = 1$ et $\alpha = \log p_r$ fournit la majoration

$$\begin{aligned} \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\mu \log p_r}{p_r^\mu} \log(\mu + 1) &\leq \frac{(\log 2) \log p_r}{p_r} + \frac{2(\log 3) \log p_r}{p_r^2} \\ &\quad + \frac{1}{p_r^3} \left\{ (6 \log 2)(\log p_r) + 6 \log 2 + \frac{2 \log 2}{(\log p_r)} + \frac{1}{(\log p_r)} + \frac{1}{4(\log p_r)^2} \right\} \\ &\leq 8 \left(\frac{\log p_r}{p_r} + \frac{1}{p_r^3} \right). \end{aligned}$$

L'estimation (4.9) avec $A = 1$ et $\alpha = \log p_r$, montre en outre,

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\log p_r}{p_r^\mu} \log(\mu + 1) \leq \frac{1}{p_r} \left(\log 2 + \frac{\log 2}{\log p_r} + \frac{1}{2(\log p_r)^2} \right) \leq \frac{2}{p_r}.$$

D'où,

$$\sum_{\mu_r=0}^{\alpha_r} \frac{\mu_r \log p_r}{p_r^{\mu_r}} \log \left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + \mu_r \right) \leq 18 \frac{\log p_r}{p_r}.$$

□

Remarque 4.7. Comme $\log \left(\sum_{i=1}^s \mu_i + h \right) \leq \log (\Omega(n) + 3)$, on en déduit du corollaire 4.6-(ii) que

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, n) &\leq 18 \frac{\log p_r}{p_r} \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_{r-1}=0}^{\alpha_{r-1}} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_{r-1}^{\mu_{r-1}}} \log \left(\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 3 \right) \\ &\leq 18 \frac{\log p_r}{p_r} \log(\Omega(n) + 3) \prod_{i=1}^{r-1} \left(\frac{1 - p_i^{-\alpha_i - 1}}{1 - p_i^{-1}} \right) \\ &\leq 18 \frac{\log p_r}{p_r} \log(\Omega(n) + 3) \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{1 - p_i^{-1}} \right). \end{aligned}$$

Compte tenu de la remarque faite au début de la section 4, on a donc

$$\Phi_2(n) \leq 18 (\log(\Omega(n) + 3)) \left(\sum_{j=1}^r \frac{\log p_j}{p_j} \right) \prod_{i=1}^r \left(\frac{1}{1 - p_i^{-1}} \right).$$

En combinant avec la majoration de $\Phi_1(n)$ établie au lemme 2.1, et en utilisant l'inégalité (1.8), il vient que

$$(4.10) \quad \Psi(n) \leq \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1 - p_j^{-1}} \right) \left\{ \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i - 1} + 18 \left(\sum_{i=1}^r \frac{\log p_i}{p_i} \right) \log(\Omega(n) + 3) \right\}.$$

Rappelant que $r = \omega(n)$ et $\omega(n) \leq \Omega(n) \leq \log_2 n$, on obtient donc déjà en utilisant la proposition 2.3,

$$\Psi(n) \leq e^\gamma (1 + o(1)) (\log \log n)^2 (\log \log \log n + 18w(n)).$$

L'estimation plus fine de $\Psi(n)$ va résulter d'une étude plus précise des coefficients de $\Psi(r, n)$, laquelle fait l'objet de la sous-section suivante.

4.2. Estimation de $\Phi_2(r, n)$ proprement dite.

Notation : On définit successivement

$$(4.11) \quad \begin{cases} \mu = (\mu_1, \dots, \mu_r), & (\mu_1, \dots, \mu_r) \in \prod_{i=1}^r ([0, \alpha_i] \cap \mathbb{N}), \\ p_\mu(s) = p_1^{-\mu_1} \dots p_s^{-\mu_s}, & 1 \leq s \leq r, \\ \Pi_s = \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_s=0}^{\alpha_s} p_\mu(s) = \prod_{\ell=1}^s \left(\frac{1-p_\ell^{-\alpha_\ell-1}}{1-p_\ell^{s-1}} \right). \end{cases}$$

Puis,

$$\Phi_s(h) = \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_s=0}^{\alpha_s} p_\mu(s) \log \left(\sum_{i=1}^s \mu_i + h \right), \quad 1 \leq s \leq r-1.$$

Notons aussi

$$(4.12) \quad \begin{cases} c_1 = 1, & c_2 = \frac{2}{p_r}, & c_3 = \frac{1}{p_r^2} \left(3 + \frac{3}{\log p_r} + \frac{1}{(\log p_r)^2} \right), \\ c_4 = \frac{1}{p_r^3 \log p_r} \left(1 + \frac{1}{3 \log p_r} \right) \\ c_0 = \frac{\log p_r}{p_r}, & c = \sum_{i=1}^3 c_i, \\ b_s = \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s} \right), & \beta_s = \frac{1}{2p_s (\log p_s)^2}. \end{cases}$$

4.2.1. *Inégalité de récurrence.* On déduit de la première partie du lemme 4.5,

$$\Phi_s(h) \leq \Phi_{s-1}(h) + \frac{1}{p_s} \left(1 + \frac{1}{\log p_s} \right) \Phi_{s-1}(h+1) + \frac{1}{2(\log p_s)^2 p_s} \Pi_{s-1}.$$

D'où avec les notations précédentes,

Lemme 4.8. *Sous l'hypothèse (4.1), on a pour tout $s = 2, \dots, r-1$,*

$$\Phi_s(h) \leq \Phi_{s-1}(h) + b_s \Phi_{s-1}(h+1) + \beta_s \Pi_{s-1}.$$

Ces notations permettent aussi de réécrire de manière plus condensée la majoration (i) du lemme 4.6. Sous l'hypothèse (4.1), si $\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i \geq 1$, on a alors

$$\Phi_2(r, n) \leq c_0 \underbrace{\sum_{h=1}^3 c_h \Phi_{r-1}(h)}_{(1)} + c_4 \Pi_{r-1}.$$

En appliquant deux fois l'inégalité de récurrence, on obtient aussi

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, n) &\leq c_0 \underbrace{\sum_{h=1}^3 c_h \Phi_{r-3}(h)}_{(1)} + c_0 \underbrace{\sum_{h=1}^3 c_h b_{r-2} \Phi_{r-3}(h+1)}_{(3)} + c_0 c b_{r-2} \Pi_{r-3} \\ &\quad + c_0 \underbrace{\sum_{h=1}^3 c_h b_{r-1} \Phi_{r-3}(h+1)}_{(2)} + c_0 \underbrace{\sum_{h=1}^3 c_h b_{r-1} b_{r-2} \Phi_{r-3}(h+2)}_{(4)} + c_0 c b_{r-1} \beta_{r-2} \Pi_{r-3} \\ &\quad + c_0 c \beta_{r-1} \Pi_{r-2} + c_4 \Pi_{r-1}. \end{aligned}$$

On vérifie facilement que le coefficient de $\Phi_{r-1}(h)$ est le même que celui de $\Phi_{r-2}(h)$ et $\Phi_{r-3}(h)$, voir expressions soulignées par (1). Il en est de même pour $\Phi_{r-2}(h+1)$, voir expressions soulignées par (2). Se créent aussi de nouvelles expressions (3), (4) liées à $\Phi_{r-3}(h+1)$, $\Phi_{r-3}(h+2)$.

Chaque nouveau coefficient est conservé jusqu'à la fin du processus d'itération généré par l'inégalité de récurrence du lemme 4.8.

On vérifie aussi, lorsqu'on applique cette inégalité, qu'on passe d'une majoration s'exprimant à partir de $\Phi_{r-1}(h)$, Π_{r-1} , *uniquement*, à une majoration s'exprimant à partir de Φ_{r-2} (en h ou $h+1$) et Π_{r-2} , Π_{r-1} *uniquement*.

Cette règle est générale, et on voit qu'en itérant cette relation de récurrence, on obtient à chaque étape une majoration ne faisant intervenir que Φ_{r-d} et les produits $\Pi_{r-d}, \Pi_{r-d+1}, \dots, \Pi_{r-1}$.

Arbre binaire: Le décalage en h ou $h+1$ génère un arbre binaire dont les branches sont à chaque division (étapes correspondant aux itérations précédentes), soit stationnaires: $\Phi_{r-d}(h) \rightarrow \Phi_{r-d-1}(h)$, soit créatrices de nouveaux coefficients: $\Phi_{r-d}(h) \rightarrow \Phi_{r-d-1}(h+1)$. On peut présenter ceci par le diagramme tiré du lemme 4.8.

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{shift } +1, \text{ nouveaux coefficients } \downarrow \\ \Phi_s(h) \leq \Phi_{s-1}(h) + b_s \Phi_{s-1}(h+1) + \beta_s \Pi_{s-1}. \\ \uparrow \text{stationnarité } \uparrow \end{array}$$

5. Démonstration des théorèmes 1.1 et 1.2

Avant de continuer, on rappelle que par (4.9),

$$\sum_{\mu=0}^{\alpha_s} (\log(A+\mu)) e^{-\alpha\mu} \leq \log A + e^{-\alpha} \left(\log(A+1) + \frac{\log(A+1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2(A+1)} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} \Phi_1(v) &\leq \sum_{\mu_1=0}^{\infty} p_{\mu}(1) \log \left(\sum_{i=1}^v \mu_i + 1 \right) = \sum_{\mu_1=0}^{\infty} \frac{\log(v+\mu)}{p_1^{\mu}} \\ &\leq \log v + \frac{1}{p_1} \left(\log(v+1) + \frac{\log(v+1)}{\log p_1} + \frac{1}{v(\log p_1)^2} \right) \quad (v \geq 1). \end{aligned}$$

D'où,

$$\Phi_1(h) \leq C \log h.$$

On vérifie facilement que les d -uples de b_i ont tous $\Phi_{r-x}(h+d)$ comme facteur. Les termes ayant $\Phi_{r-\cdot}(h+\cdot)$ comme facteur forment la somme

$$(5.1) \quad c_0 \sum_{d=1}^{r-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{i_1} \dots b_{i_d} \right) \Phi_1(h+d),$$

une fois l'itération menée à son terme, c'est à dire, après avoir appliqué $(r-1)$ fois l'inégalité de récurrence du lemme 4.8.

Cette somme se majore donc par (en rappelant que $h = 1, 2$ ou 3)

$$c_0 \sum_{d=1}^{r-1} (\log d) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{i_1} \dots b_{i_d} \right).$$

Or, pour tous entiers positifs a_1, \dots, a_r et $1 \leq d \leq r$ on a,

$$\left(\sum_{i=1}^r a_i \right)^d \geq d! \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d \leq r} a_{i_1} \dots a_{i_d}.$$

Donc

$$\sum_{d=1}^{r-1} (\log d) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{i_1} \dots b_{i_d} \right) \leq \sum_{d=1}^{r-1} \frac{(\log d)}{d!} \left(\sum_{i=1}^r b_i \right)^d.$$

Comme par ailleurs,

$$b_i = \frac{1}{p_i} \left(1 + \frac{1}{\log p_{i+1}} \right) \leq \frac{1}{p(i)} + \frac{1}{p(i) \log p(i)},$$

on a à l'aide de (2.3),

$$\sum_{i=1}^r b_i \leq \sum_{i=1}^r \left(\frac{1}{i \log i} + \frac{1}{i(\log i)^2} \right) \leq \log \log r + C.$$

Donc

$$\sum_{d=1}^{r-1} (\log d) \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{i_1} \dots b_{i_d} \right) \leq C \sum_{d=1}^{r-1} \frac{(\log d)}{d!} (\log \log r + C)^d.$$

D'une part,

$$\begin{aligned} \sum_{\log d \leq 1 + \varepsilon + \log \log \log r} \frac{(\log d)}{d!} (\log \log r + C)^d &\leq (1 + \varepsilon + \log \log \log r) \sum_{d > 1} \frac{(\log \log r + C)^d}{d!} \\ &\leq C(1 + \varepsilon + \log \log \log r) \log r. \end{aligned}$$

D'autre part, utilisant l'estimation classique $d! \geq C\sqrt{d}d^d e^{-d}$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{\log d > 1 + \varepsilon + \log \log \log r} \frac{(\log d)}{d!} (\log \log r)^d &\leq \sum_{\log d > 1 + \varepsilon + \log \log \log r} \frac{(\log d)}{\sqrt{d}} e^{-d(\log d - 1 - \log \log \log r)} \\ &\leq \sum_{d > 1} \frac{(\log d)}{\sqrt{d}} e^{-\varepsilon d} < \infty. \end{aligned}$$

On en déduit donc que la somme en (5.1)

$$(5.2) \quad c_0 \sum_{d=1}^{r-1} \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{i_1} \dots b_{i_d} \right) \Phi_1(h+d) \leq C \frac{\log p_r}{p_r} (1 + \log \log \log r) \log r;$$

5.1. *Coefficients liés à Π_s .* En appliquant l'inégalité de récurrence (lemme 4.8), on génère successivement

$$\begin{aligned} &c_4 \Pi_{r-1} \\ &c_4 \Pi_{r-1} + c_0 c \beta_{r-1} \Pi_{r-2} \\ &c_4 \Pi_{r-1} + c_0 c \beta_{r-1} \Pi_{r-2} + c_0 c \beta_{r-2} (1 + b_{r-1} b_{r-2}) \Pi_{r-3} \\ &c_4 \Pi_{r-1} + c_0 c \beta_{r-1} \Pi_{r-2} + c_0 c \beta_{r-2} (1 + b_{r-1} b_{r-2}) \Pi_{r-3} + c_0 c \beta_{r-3} (1 + b_{r-2} + b_{r-1} + b_{r-1} b_{r-2}) \Pi_{r-4}. \end{aligned}$$

Coefficients:

$$\begin{aligned} \Pi_{r-1} &: c_4 & \Pi_{r-2} &: c_0 c \beta_{r-1} \\ \Pi_{r-3} &: c_0 c \beta_{r-2} (1 + b_{r-1}) & \Pi_{r-4} &: c_0 c \beta_{r-3} (1 + b_{r-2} + b_{r-1} + b_{r-1} b_{r-2}). \end{aligned}$$

Il est facile de voir que les coefficients de Π_{r-x} sont exactement ceux de $\Phi_{r-x+1}(\cdot)$ affectés du facteur $c_0 c \beta_{r-x+1}$. Les produits forment la somme

$$(5.3) \quad c_0 c \sum_{d=0}^{r-2} \beta_{r-d} \left(1 + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{r-i_1} \dots b_{r-i_d} \right) \Pi_{r-d-1}.$$

Par (2.3), on a

$$(5.4) \quad \beta_j = \frac{1}{2p_j(\log p_j)^2} \leq \frac{1}{2p(j)(\log p(j))^2} \leq \frac{1}{2j(\log j)^3}, \quad \text{si } j \geq 2,$$

De plus, (2.3) et (2.4) impliquent que

$$\begin{aligned} \Pi_j &= \prod_{\ell=1}^j \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^\ell}} \right) \leq \prod_{\ell=1}^j \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p(\ell)}} \right) \leq \prod_{p \leq j(\log j + \log \log j)} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \right) \\ &\leq C(\log j). \end{aligned}$$

On note maintenant que l'on a aussi par définition de Π_j ,

$$\Pi_j \leq \max_{\ell \leq 5} \prod_{p \leq p(\ell)} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = C_0.$$

On en tire que

$$(5.5) \quad \Pi_j \leq C(\log j), \quad \text{si } j \geq 2.$$

Par conséquent, (5.5) et (5.4) impliquent que

$$(5.6) \quad \beta_{j+1}\Pi_j \leq \frac{C}{j(\log j)^2}, \quad \text{si } j \geq 2.$$

Il en résulte que la somme (5.3) peut se majorer comme suit :

$$\begin{aligned} & c_0 c \sum_{d=0}^{r-2} \beta_{r-d} \left(1 + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{r-i_1} \dots b_{r-i_d} \right) \Pi_{r-d-1} \\ \leq & c_0 c \prod_{i=1}^{r-2} (1 + b_{r-i}) \cdot \sum_{d=0}^{r-2} \beta_{r-d} \Pi_{r-d-1} = c_0 c \prod_{j=2}^{r-1} (1 + b_j) \cdot \sum_{d=0}^{r-2} \beta_{r-d} \Pi_{r-d-1} \\ \leq & c_0 c C \prod_{j=2}^{r-1} (1 + b_j) \cdot \sum_{d=0}^{r-2} \frac{1}{(r-d)(\log(r-d))^2} \\ \leq & c_0 c C \prod_{j=2}^{r-1} (1 + b_j) \cdot \sum_{\delta=2}^{\infty} \frac{1}{\delta(\log \delta)^2} \\ (5.7) \leq & c_0 c C \prod_{j=2}^{r-1} (1 + b_j). \end{aligned}$$

On rappelle que

$$\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} \leq \log \log x + C.$$

Voir par exemple [12], inégalité (3.20). Donc,

$$(5.8) \quad \prod_{i=1}^r (1 + b_i) \leq C \log r.$$

Maintenant l'estimation (5.8) montre que

$$\begin{aligned} c_0 c \sum_{d=0}^{r-2} \beta_{r-d} \left(1 + \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_d < r} b_{r-i_1} \dots b_{r-i_d} \right) \Pi_{r-d-1} & \leq c_0 c C \log r \\ (5.9) & \leq C \frac{\log p_r}{p_r} \log r. \end{aligned}$$

On déduit donc de (5.2) et (5.2) que

$$\begin{aligned} \Phi_2(r, n) & \leq C \frac{\log p_r}{p_r} (1 + \log \log \log r) \log r + C \frac{\log p_r}{p_r} \log r \\ (5.10) & \leq C \frac{\log p_r}{p_r} (\log r) (\log \log \log r). \end{aligned}$$

Par suite, il en résulte, compte tenu de l'observation faite au début de la section 4, que

$$(5.11) \quad \Phi_2(n) \leq C (\log \log \log r) (\log r) \sum_{i=1}^r \frac{\log p_i}{p_i} = C (\log \log \log r) (\log r) w(n).$$

En combinant (5.11) avec la majoration de $\Phi_1(n)$ établie au lemme 2.1 et en utilisant l'inégalité (1.8), il vient que

$$(5.12) \quad \Psi(n) \leq \left(\prod_{j=1}^r \frac{1}{1-p_j^{-1}} \right) \sum_{i=1}^r \frac{(\log p_i)(\log \log p_i)}{p_i - 1} + C(\log \log \log r)(\log r)w(n).$$

En combinant cette fois (5.11) avec le corollaire 2.2 et en utilisant à nouveau l'inégalité (1.8), on obtient aussi puisque $r \leq \log n$, compte tenu de l'estimation de $w(n)$ donnée en (1.7),

$$(5.13) \quad \begin{aligned} \Psi(n) &\leq e^\gamma(1+o(1))(\log \log n)^2(\log \log \log n) + C(\log \log \log \log n)(\log \log n)^2 \\ &= e^\gamma(1+o(1))(\log \log n)^2(\log \log \log n). \end{aligned}$$

Ce qui établit le théorème 1.1.

6. Minoration de $\Phi_2(n)$.

Lemme 6.1. *On a la minoration suivante*

$$\Phi_2(n) \geq (\log 2) \left(\frac{P^-(n)}{P^-(n)+1} \right) \left(\prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{p_i} \right) \right) \sum_{j=1}^r \left(\frac{\log p_j}{p_j} \right).$$

Proof. On remarque à partir de (4.2) que

$$\Phi_2(r, n) \geq \sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_{r-1}=0}^{\alpha_{r-1}} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_{r-1}^{\mu_{r-1}}} \frac{\log p_r}{p_r} \log \left[\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 1 \right].$$

Il est clair que la somme multiple précédente ne peut contribuer que si $\max_{i=1}^{r-1} \mu_i \geq 1$, auquel cas $\log \left[\sum_{i=1}^{r-1} \mu_i + 1 \right] \geq \log 2$. On a donc

$$(6.1) \quad \begin{aligned} \Phi_2(r, n) &\geq (\log 2) \left(\frac{\log p_r}{p_r} \right) \underbrace{\sum_{\mu_1=0}^{\alpha_1} \dots \sum_{\mu_{r-1}=0}^{\alpha_{r-1}} \frac{1}{p_1^{\mu_1} \dots p_{r-1}^{\mu_{r-1}}}}_{\max_{i=1}^{r-1} \mu_i \geq 1} \\ &= (\log 2) \left(\frac{\log p_r}{p_r} \right) \prod_{i=1}^{r-1} \left(1 + \sum_{\mu_i=0}^{\alpha_i} \frac{1}{p_i^{\mu_i}} \right) \\ &\geq (\log 2) \left(\frac{\log p_r}{p_r} \right) \prod_{i=1}^{r-1} \left(1 + \frac{1}{p_i} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$(6.2) \quad \begin{aligned} \Phi_2(n) &\geq (\log 2) \sum_{j=1}^r \left(\frac{\log p_j}{p_j} \right) \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^r \left(1 + \frac{1}{p_i} \right) \\ &\geq (\log 2) \left(\frac{P^-(n)}{P^-(n)+1} \right) \left(\prod_{i=1}^r \left(1 + \frac{1}{p_i} \right) \right) \sum_{j=1}^r \left(\frac{\log p_j}{p_j} \right). \end{aligned}$$

□

7. Démonstration du théorème 1.4.

Nous avons établi dans [13] le résultat suivant.

Théorème 7.1. [13, théorème 2.5] *Soit $s > 0$, et soit aussi $0 \leq \tau \leq 2s$. Soit $\psi(u) > 0$ une fonction croissante au sens large sur \mathbb{R}^+ . Alors nous avons la majoration suivante valable pour toute suite de réels $\{c_k, k \in K\}$,*

$$(7.1) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq \left(\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{\psi(u) \sigma_\tau(u)} \right) \left(\sum_{\nu \in K} c_\nu^2 \psi(\nu) \sigma_{\tau-2s}(\nu) \right).$$

Nous avons noté par $F(K)$ l'ensemble de tous les diviseurs des éléments de K .

Avant de continuer, quelques commentaires sont nécessaires. Ecrivons que $K = \{n_1, \dots, n_r\}$. Comme l'ensemble $F(K)$ est contenu dans l'ensemble de tous les diviseurs du plus petit commun multiple de n_1, \dots, n_r , $\text{ppcm}(n_1, \dots, n_r)$, la première somme du membre droit de l'inégalité (8.1) se majore directement par

$$(7.2) \quad \sum_{u \in F(K)} \frac{1}{\psi(u)\sigma_\tau(u)} \leq \sum_{d|\text{ppcm}(n_1, \dots, n_r)} g(d) = \mathbb{I} * g(\text{ppcm}(n_1, \dots, n_r)),$$

où $g = 1/\psi\sigma_\tau$, et \mathbb{I} est la fonction égale à 1 partout.

En outre nous avons déduit du théorème l'estimation (1.17). Par ailleurs, nous avons montré qu'à tout réel $\eta > 1$, on peut associer un nombre positif $C(\eta)$, tel que pour tout réel s tel que $1/2 < s \leq 1$, toute suite de réels $\{c_k, k \in K\}$, on a la majoration suivante

$$(7.3) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \nu)^\eta \sigma_{1-2s}(\nu).$$

Cette inégalité se trouve dans [2], remarque 1.6.

En fait, nous n'aurons besoin que d'une forme légèrement plus générale de ce résultat dont résultera facilement le théorème 1.4.

Théorème 7.2. *Soit $\eta > 1$. Alors, pour tout réel s tel que $0 < s \leq 1$, toute suite de réels $\{c_k, k \in K\}$, on a*

$$(7.4) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \log \nu)^\eta \sum_{\delta|\nu} \frac{(\log \delta)(\log \log \delta)}{\delta^{2s-1}}.$$

La constante $C(\eta)$ ne dépend que de η .

Remarque 7.3. Comme

$$\sum_{\delta|\nu} \frac{(\log \delta)(\log \log \delta)}{\delta^{2s-1}} \ll \sum_{\delta|\nu} \frac{1}{\delta^{2s-1-\varepsilon}} = \sigma_{1+\varepsilon-2s}(k),$$

l'estimation (7.4) est meilleure que celle donnée en (1.17).

Démonstration. Elle consiste en une simple variation de celle du théorème 7.1, que nous avons encore légèrement simplifiée et raccourcie. Soit $\varepsilon > 0$ et soit J_ε la fonction généralisée d'Euler. Nous rappelons que

$$(7.5) \quad J_\varepsilon(n) = \sum_{d|n} d^\varepsilon \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

où μ est la Möbius function. We étendons la suite $\{c_k, k \in K\}$ à tout \mathbb{N} en posant $c_k = 0$ si $k \notin K$. Par la formule de Möbius, on a $n^\varepsilon = \sum_{d|n} J_\varepsilon(d)$. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons successivement

$$\begin{aligned} L &:= \sum_{k, \ell=1}^n c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} = \sum_{k, \ell \in K} \frac{c_k c_\ell}{k^s \ell^s} \left\{ \sum_{d \in F(K)} J_{2s}(d) \mathbf{1}_{d|k} \mathbf{1}_{d|\ell} \right\} \\ (k = ud, \ell = vd) &\leq \sum_{u, v \in F(K)} \frac{1}{u^s v^s} \left(\sum_{d \in F(K)} \frac{J_{2s}(d)}{d^{2s}} c_{ud} c_{vd} \right) \\ &\leq \sum_{u, v \in F(K)} \frac{1}{u^s v^s} \left(\sum_{d \in F(K)} \frac{J_{2s}(d)}{d^{2s}} c_{ud}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{d \in F(K)} \frac{J_{2s}(d)}{d^{2s}} c_{vd}^2 \right)^{1/2} \\ &= \left[\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{u^s} \left(\sum_{d \in F(K)} \frac{J_{2s}(d)}{d^{2s}} c_{ud}^2 \right)^{1/2} \right]^2 \end{aligned}$$

$$(7.6) \quad \leq \left(\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{u^s \psi(u)} \right) \left(\sum_{\nu \in K} \frac{c_\nu^2}{\nu^{2s}} \sum_{\substack{u \in F(K) \\ u|\nu}} J_{2s} \left(\frac{\nu}{u} \right) u^s \psi(u) \right),$$

où $\psi(u) > 0$ est une fonction croissante au sens large sur \mathbb{R}^+ . On choisit alors

$$\psi(u) = u^{-s} \psi_1(u) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t), \quad \psi_1(u) = (\log \log \log u)^\eta.$$

(Dans la preuve du théorème 7.1, nous avons choisi $\psi(u) = u^{-s} \psi_1(u) \sigma_\tau(u)$, $0 \leq \tau \leq 2s$ et $\psi_1(u) \equiv 1$). D'où,

$$\begin{aligned} L &\leq \left(\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{\psi_1(u) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t)} \right) \left(\sum_{\nu \in K} \frac{c_\nu^2}{\nu^{2s}} \sum_{\substack{u \in F(K) \\ u|\nu}} J_{2s} \left(\frac{\nu}{u} \right) \psi_1(u) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t) \right) \\ &\leq \left(\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{\psi_1(u) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t)} \right) \left(\sum_{\nu \in K} \frac{c_\nu^2 \psi_1(\nu)}{\nu^{2s}} \sum_{\substack{u \in F(K) \\ u|\nu}} J_{2s} \left(\frac{\nu}{u} \right) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t) \right). \end{aligned}$$

Comme $\nu \in K$, on peut écrire

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{u \in F(K) \\ u|\nu}} J_{2s} \left(\frac{\nu}{u} \right) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t) &= \sum_{u|\nu} \sum_{d|\frac{\nu}{u}} d^{2s} \mu \left(\frac{\nu}{ud} \right) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t) \\ &= \sum_{d|\nu} d^{2s} \sum_{u|\frac{\nu}{d}} \mu \left(\frac{\nu}{ud} \right) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t) \\ \text{(en écrivant } u = tx) &= \sum_{d|\nu} d^{2s} \sum_{t|\frac{\nu}{d}} t(\log t)(\log \log t) \sum_{x|\frac{\nu}{dt}} \mu \left(\frac{\nu}{dtx} \right) \\ \text{(en écrivant } \frac{\nu}{dt} = x\theta) &= \sum_{d|\nu} d^{2s} \sum_{t|\frac{\nu}{d}} t(\log t)(\log \log t) \sum_{\theta|\frac{\nu}{dt}} \mu(\theta) \\ (7.7) \quad &= \sum_{d|\nu} d^{2s} \left(\frac{\nu}{d} \right) (\log \left(\frac{\nu}{d} \right)) (\log \log \left(\frac{\nu}{d} \right)), \end{aligned}$$

où pour la dernière inégalité nous avons utilisé le fait que $\sum_{d|n} \mu(d)$ égal 1 ou 0 suivant que $n = 1$ ou $n > 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} L &\leq \left(\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{\psi_1(u) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t)} \right) \left(\sum_{\nu \in K} \frac{c_\nu^2 \psi_1(\nu)}{\nu^{2s}} \sum_{d|\nu} d^{2s} \left(\frac{\nu}{d} \right) (\log \left(\frac{\nu}{d} \right)) (\log \log \left(\frac{\nu}{d} \right)) \right) \\ &= \left(\sum_{u \in F(K)} \frac{1}{\psi_1(u) \sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t)} \right) \left(\sum_{\nu \in K} c_\nu^2 \psi_1(\nu) \sum_{\delta|\nu} \frac{1}{\delta^{2s}} \delta(\log \delta) (\log \log \delta) \right). \end{aligned}$$

De la minoration triviale $\sum_{t|u} t(\log t)(\log \log t) \geq u(\log u)(\log \log u)$, résulte alors que

$$\begin{aligned} \sum_{k,\ell=1}^n c_k c_\ell \frac{(k,\ell)^{2s}}{k^s \ell^s} &\leq \left(\sum_{u \geq 1} \frac{1}{u(\log u)(\log \log u)(\log \log \log u)^\eta} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \log \nu)^\eta \sum_{\delta|\nu} \frac{(\log \delta)(\log \log \delta)}{\delta^{2s-1}} \right) \\ (7.8) \quad &= C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \log \nu)^\eta \sum_{\delta|\nu} \frac{(\log \delta)(\log \log \delta)}{\delta^{2s-1}}. \end{aligned}$$

□

En faisant $s = 1$, on obtient (en rappelant (1.4)),

$$(7.9) \quad \sum_{k,\ell=1}^n c_k c_\ell \frac{(k,\ell)^2}{k\ell} \leq C(\eta) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 (\log \log \log \delta)^\eta \Phi(\nu),$$

d'où le théorème 1.4.

Compte tenu de (1.1), (1.15) s'en suit.

8. Conclusion.

Nous ne savons pas, malgré nos efforts, s'il est possible d'éviter l'approche itérative assez lourde, mais directe, que nous avons utilisé lors de la démonstration du Théorème 1.2; une preuve plus courte serait évidemment très intéressante.

Le cas $0 < s < 1$ considéré au théorème 7.2, est examiné plus en détail dans un travail séparé. Concernant ce cas, rappelons que nous avons établi dans Berkes et Weber [2, Prop. 1.13] la proposition suivante dont la preuve est élémentaire.

Proposition 8.1. *Soit K un ensemble fini d'entiers et soit K_+ (resp. K_-) le plus grand (resp. plus petit) élément de K . Pour tout $k \in K$,*

$$\sum_{\substack{\ell \in K \\ \ell \neq k}} \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq \begin{cases} 2(\log \frac{K_+}{K_-}) \sigma_{-1}(k) & \text{si } s = 1, \\ C_s 2^s k^{s-1} \left(\int_{K_-}^{K_+} \frac{du}{u^s} \right) \sigma_{1-2s}(k) & \text{si } 0 < s < 1. \end{cases}$$

On en déduit immédiatement que

$$\sum_{\substack{\ell \in K \\ \ell \neq k}} \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq C_s 2^s \left(\int_{K_-}^{K_+} \frac{du}{u^s} \right) \sigma_{-s}(k),$$

si $0 < s < 1$. Une majoration classique de formes quadratiques (voir par exemple [2, Lemme 1.9]), montre alors que pour toute suite de réels $\{c_k, k \in K\}$,

$$(8.1) \quad \sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s} \leq \left(C_s 2^s \int_{K_-}^{K_+} \frac{du}{u^s} \right) \sum_{\nu \in K} c_\nu^2 \sigma_{-s}(\nu).$$

Mais cette majoration est optimale lorsque $K_+ = K_- + \mathcal{O}(K_-^s)$ (et, si $s = 1$, lorsque $K_+ \leq MK_-$, M étant un nombre fixé), ce à cause du facteur arithmétique $\sigma_{-s}(\nu)$, voir Aistleitner, Berkes, Seip et Weber [1, 30-33].

Notons aussi, concernant l'évaluation de la somme

$$\sum_{k, \ell \in K} c_k c_\ell \frac{(k, \ell)^{2s}}{k^s \ell^s},$$

que l'on peut toujours se ramener au cas où la propriété suivante est vérifiée: pour tout $k \in K$ on a l'implication

$$p|k \Rightarrow p'|k \quad \text{pour tout } p' < p.$$

Ceci résulte trivialement du fait que cette somme est inchangée si l'on remplace K par $mK = \{mk, k \in K\}$ où m est un entier positif, et $(c_k)_{k \in K}$ par $(\gamma_\ell)_{\ell \in mK}$ où $\gamma_\ell = c_k$, si $\ell = mk$, $k \in K$.

Nous n'avons, par ailleurs, obtenu que des résultats très partiels (pour certains types d'entiers n) concernant la fonction $\Phi_\eta(n)$, et la question de l'existence d'une majoration générale reste donc en suspens.

Nous concluons par quelques remarques sur l'ordre de grandeur de la fonction de Davenport $w(n)$. Tout d'abord, si p_1, \dots, p_r sont les r premiers nombres premiers et $n = p_1 \dots p_r$, alors $w(n) \sim \log \omega(n)$.

Par ailleurs, on a trivialement $w(n) \ll \log \log \log n$ lorsque les diviseurs premiers de n sont grands, par exemple si ceux-ci, notons-les p_1, \dots, p_r , vérifient pour un nombre positif B arbitraire donné,

$$(8.2) \quad \sum_{j=1}^r \frac{\log p_j}{p_j} \leq B \quad \text{et} \quad p_1 \dots p_r \gg e^{e^B}.$$

On peut plus généralement établir le résultat suivant. Soit $\{p_i, i \geq 1\}$ une suite croissante de nombres premiers possédant la propriété suivante

$$(8.3) \quad p_1 \dots p_s \leq p_{s+1} \quad s = 1, 2, \dots$$

Notons que les nombres de la forme $n = p_1 \dots p_\nu$ avec $p_1 \dots p_{i-1} \leq p_i$, $2 \leq i \leq \nu$, $\nu = 1, 2, \dots$ sont extrémaux pour certaines questions relatives aux diviseurs d'un entier, voir Erdős et Hall [5].

Lemme 8.2. *Soit $\{p_i, i \geq 1\}$ une suite croissante de nombres premiers vérifiant (8.3). Il existe une constante C , telle que si $p_1 \geq C$, alors pour tout entier $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ tel que $\alpha_i \geq 1$ pour tout i , on a $w(n) \leq \log \log \log n$.*

Démonstration. On utilise l'inégalité suivante. Soit $0 < \theta < 1$. Il existe un nombre h_θ tel que pour tout $h \geq h_\theta$ et tout H tel que $e^{\frac{\theta}{(1-\theta)\log 2}} \leq H \leq h$, on ait

$$(8.4) \quad h \leq e^h \log \frac{\log(H+h)}{\log H}.$$

En effet, on note que $\log(1+x) \geq \theta x$ si $0 \leq x \leq (1-\theta)/\theta$. Soit h_θ tel que si $h \geq h_\theta$, alors $h \log h \leq \theta(\log 2)e^h$. On a alors

$$\begin{aligned} h &\leq e^h \theta \frac{\log 2}{\log h} \leq e^h \theta \frac{\log 2}{\log H} \leq e^h \log \left(1 + \frac{\log 2}{\log H}\right) = e^h \log \left(\frac{\log 2H}{\log H}\right) \\ &\leq e^h \log \left(\frac{\log H + h}{\log H}\right). \end{aligned}$$

Nous allons montrer par récurrence sur r que

$$(8.5) \quad \sum_{i=1}^r \frac{\log p_i}{p_i} \leq \log \log \log(p_1 \dots p_r).$$

C'est trivialement vrai si $r = 1$ par la convention faite dans l'Introduction, et puisque $p \geq 2$. Supposons que (8.5) soit vraie pour $s = 1, \dots, r-1$. Par l'hypothèse de récurrence, on a

$$\sum_{i=1}^r \frac{\log p_i}{p_i} \leq \log \log \log(p_1 \dots p_{r-1}) + \frac{\log p_r}{p_r}.$$

Posons $H = \sum_{i=1}^{r-1} \log p_i$, $h = \log p_r$. Il suffit donc de montrer que

$$\frac{\log p_r}{p_r} = \frac{h}{e^h} \leq \log \frac{\log \sum_{i=1}^r \log p_i}{\log \sum_{i=1}^{r-1} \log p_i} = \log \frac{\log H + h}{\log H},$$

Or $H \leq h$, par l'hypothèse (8.3). Choisissons $C = e^{\frac{\theta}{(1-\theta)\log 2}}$. Alors $H \geq \log p_1 \geq e^{\frac{\theta}{(1-\theta)\log 2}}$. L'inégalité cherchée résulte donc de (8.4). Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$, où $\alpha_i \geq 1$ pour tout i . On a $w(n) \leq \log \log \log(p_1 \dots p_r) \leq \log \log \log n$.

REFERENCES

- [1] C. Aistleitner, I. Berkes, K. Seip and M. Weber, (2015) Convergence of series of dilated functions and spectral norms of GCD matrices, *Acta Arith.* **168**, no. 3, 221–246.
- [2] I. Berkes and M. Weber, (2012) On series of dilated functions, *Quart. J. Math.* **65**, no. 1, 25–52.
- [3] J. Brémont, (2011) Davenport series and almost sure convergence, *Quart. J. Math.* **62**, 825–843.
- [4] H. Davenport, (1932) On a generalization of Euler's function $\phi(n)$, *J. London Math. Soc.* **7**, 290–296.
- [5] P. Erdős and R. R. Hall, (1978) On some unconventional problems on the divisors of integers, *J. Austral. Math. Soc. (Series A)* **25**, 479–485.
- [6] P. Erdős and S. K. Zaremba, (1972) The arithmetical function $\sum_{d|n} \frac{\log d}{d}$, *Demonstratio Math.* **6**, Part. 2, 575–579.
- [7] I. S. Gál, (1949) A theorem concerning diophantine approximations, *Nieuw Arch. Wiskunde* **23**, 13–38.
- [8] T. H. Gronwall, (1912) Some asymptotic expressions in the theory of numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* **8**, 118–122.

- [9] T. Hilberdink, (2009) An arithmetical mapping and applications to Ω -results for the Riemann zeta function, *Acta Arith.* **139**, 341–367.
- [10] M. Lewko and M. Radziwill, (2017) Refinements of Gáls theorem and applications, *Adv. Math.* **305**, 280–297.
- [11] H. Montgomery et R. Vaughan, *Multiplicative number theory: I. Classical Theory*, Cambridge Studies in Advanced Math. **97**, (2006), Cambridge UK.
- [12] J. B. Rosser et L. Schoenfeld, (1962) Approximate formulas for some functions of prime numbers, *Illinois J. Math.* **6**(1), 64–94.
- [13] M. Weber, (2016) An arithmetical approach to the convergence problem of series of dilated functions and its connection with the Riemann Zeta function, *J. Number Th.* **162**, 137–179.
- [14] M. Weber, (2011) On systems of dilated functions, *C. R. Acad. Sci. Paris, Sec. 1* **349**, 1261–1263.

IRMA, UMR 7501, 7 RUE RENÉ DESCARTES, 67084 STRASBOURG CEDEX, FRANCE.
E-mail address: michel.weber@math.unistra.fr