



**HAL**  
open science

## Curvature-Free Margulis Lemma for Gromov-Hyperbolic Spaces

G rard Besson, Gilles Courtois, Sylvestre Gallot, Andrea Sambusetti

► **To cite this version:**

G rard Besson, Gilles Courtois, Sylvestre Gallot, Andrea Sambusetti. Curvature-Free Margulis Lemma for Gromov-Hyperbolic Spaces. 2017. hal-01671256v1

**HAL Id: hal-01671256**

**<https://hal.science/hal-01671256v1>**

Preprint submitted on 22 Dec 2017 (v1), last revised 18 Nov 2020 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destin e au d p t et   la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publi s ou non,  manant des  tablissements d'enseignement et de recherche fran ais ou  trangers, des laboratoires publics ou priv s.

# Curvature-Free Margulis Lemma for Gromov-Hyperbolic Spaces

G. Besson, G. Courtois, S. Gallot, A. Sambusetti

21 décembre 2017

## 1 Introduction

The celebrated Margulis Lemma is the keystone of a beautiful theory of the structure of complete Riemannian manifolds with bounded sectional curvature. It has two main aspects : the first one is algebraic and concerns the fundamental group of the manifold, the second one is more geometric and yields a thin-thick decomposition of the manifold. To be more precise let us state a weak version of this lemma pertaining to the first aspect (see [Mar75], [BGS85], [BZ88] Section 37.3).

**Theorem 1.1.** *There exist constants  $\varepsilon(n) > 0$  and  $C(n) > 0$  such that, for every complete Riemannian manifold  $M$  whose sectional curvature satisfies  $-1 \leq \text{Sect}(M) \leq 0$ , every point  $p \in M$  and every  $\varepsilon \leq \varepsilon(n)$ , the subgroup  $\Gamma_\varepsilon(p)$  of  $\pi_1(M)$  generated by the loops at  $p$  of length less than  $\varepsilon$  is virtually nilpotent. Furthermore, the index of the nilpotent subgroup is bounded above by  $C(n)$ .*

The history of this result goes back to Bieberbach Theorem ([Bie11]) which describes the discrete subgroups of the isometry group of the Euclidean spaces and consequently gives a structure theorem for the flat manifolds and orbifolds. Later, Zassenhaus ([Zas38]) extended this result to the study of discrete subgroups of Lie groups. The above statement is a weak version, indeed in the strong one the upper bound on the sectional curvature could be positive, with extra assumption though. Recently there has been progresses on the question of extending this result to different spaces or curvature conditions, see [Cou15] for references and a detailed exposition.

This paper is the first of a series of articles devoted to this theme. Here we are interested by both aspects, algebraic and geometric, with however an emphasis on the second and we aim at giving quantitative (computable) estimates of some important invariants. Our goal is to get rid of the pointwise curvature assumptions, as mentioned in the title, in order to extend the results to more general spaces such as certain metric spaces. Essentially the upper bound on the curvature is replaced by the assumption that the space is  $\delta$ -hyperbolic (in the sense of Gromov, see [Gro87] and Section 8.1 of Appendix 8 for precise definitions) and the lower bound by an upper bound on the entropy which we define below. Notice that  $\delta$  behaves like a distance and it is rather  $\delta^{-2}$  which is curvature like.

Let  $(X, d)$  be a (non-elementary) metric space which we assume to be *proper*, i.e the closed metric balls are compact. We only consider metric spaces which are geodesic. More precisely, a geodesic segment is the image of an interval of  $I \subset \mathbf{R}$  by an isometric map from  $I$  into  $X$ . The space  $(X, d)$  is said to be *geodesic* if any two points of  $X$  are joined by at least one geodesic segment. Let  $\mu$  be a positive (non identically zero) Borel measure. We call  $(X, d, \mu)$  a *measured metric space*.

**Definition 1.2.** *Let  $(X, d, \mu)$  be a metric measured space we define its entropy by*

$$\text{Ent}(X, d, \mu) = \liminf_{R \rightarrow +\infty} \frac{1}{R} \ln (\mu(B_X(x, R)))$$

where  $B_X(x, R)$  is the open ball of radius  $R$  around  $x \in X$ . Furthermore, the entropy is independent on  $x$ .

In the sequel we will consider a group  $\Gamma$  acting by isometries on  $(X, d)$  co-compactly and *properly*. We recall that the action is said to be *proper* if for  $x \in X$  and for all  $R > 0$ , the number of  $\gamma \in \Gamma$  satisfying  $d(x, \gamma x) \leq R$  is finite; this does not depend on  $x$ . In that case, for any measure  $\mu$  invariant by  $\Gamma$  the above definition yields the same number which we call the entropy of  $(X, d)$  and denote by  $\text{Ent}(X, d)$ . If  $(X, d)$  is a  $\delta$ -hyperbolic geodesic metric space and  $\gamma$  a torsion-free isometry, we define the stable displacement of  $\gamma$  by,

$$\ell(\gamma) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} d(x, \gamma^k x),$$

this definition does not depend on the choice of  $x \in X$ . One of our results is the following (see Proposition 5.7).

**Proposition 1.3.** *For every  $\delta$ -hyperbolic metric space  $(X, d)$  and every group  $\Gamma$  acting properly by isometries on  $(X, d)$ , if  $\text{diam}(\Gamma \backslash X) \leq D < +\infty$ , then*

$$\text{Ent}(X, d) \geq \frac{\ln 2}{L + 14\delta + 4D} \geq \frac{\ln 2}{26\delta + 16D},$$

where  $L = \inf \{ \ell(\gamma) : \gamma \text{ hyperbolic element of } \Gamma \setminus \{e\} \}$ .

Note that in the proof we show that, in the above situation, there always exists an hyperbolic element  $\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}$  which satisfies  $\ell(\gamma) \leq 12(D + \delta)$ .

Now, let  $\Gamma$  be a group which is non-elementary (i.e. whose boundary has at least three points) and  $\Sigma$  a finite generating set. The Cayley graph of  $\Gamma$  defined by  $\Sigma$  is a metric space when endowed with the distance such that the edges have length 1. We say that  $(\Gamma, \Sigma)$  is a  $\delta$ -hyperbolic group if this metric space is  $\delta$ -hyperbolic. The group  $\Gamma$  acts by isometries on this metric space and the quotient is finite and has diameter 1. The entropy of this metric space is denoted by  $\text{Ent}(\Gamma, \Sigma)$  and is called the algebraic entropy of  $\Gamma$  with respect to  $\Sigma$ . We also define the algebraic entropy of  $\Gamma$  by

$$\text{Ent}(\Gamma) = \inf_{\Sigma} \{ \text{Ent}(\Gamma, \Sigma) \},$$

the infimum being taken among all finite generating sets  $\Sigma$ .

The study of the algebraic entropy of groups with exponential growth has recently made progresses. When the group acts on a Hadamard manifold the three first authors have proved a quantitative version of the Tits alternative, see [BCG11] and the references herein.

A corollary of the above Proposition is the following statement (see 5.8),

**Corollary 1.4.** *Let  $\Gamma$  be a non-elementary group and  $\Sigma$  a finite generating set such that  $(\Gamma, \Sigma)$  is  $\delta$ -hyperbolic, then*

$$\text{Ent}(\Gamma, \Sigma) \geq \frac{\ln 2}{26\delta + 16}.$$

**Remarks 1.5.** *In a recent private communication, E. Brevillard mentioned to us a joint work with K. Fujiwara which contains an improvement of [BCG11] and Corollary 1.4.*

This study starts with the simple remark that if two elements,  $a$  and  $b$ , of a discrete subgroup  $\Gamma$  of the isometry group of a Hadamard manifold  $X$  generate a free group and if their displacements at  $x \in X$ , that is  $d(x, a(x))$  and  $d(x, b(x))$ , are small, then the entropy of  $X$  is big. Hence an upper bound on the entropy prevents the subgroup of  $\Gamma$  generated by the elements with small displacement at  $x$  to be algebraically "big". Nevertheless, even in the case of controlled entropy, free-subgroups or free-semigroups do exist but their generators must have large displacements. This can be made effective and the next theorem is in this spirit.

A metric space  $(X, d)$  is said to be *geodesically complete* if all geodesic segments can be defined on  $\mathbf{R}$ . It is called a *Busemann space* (see [Pap14], p. 187) if the distance  $d$  is convex, that is if the function  $d(c(t), c'(t))$  is a convex function of  $t \in [0, 1]$  for two geodesic segments  $c$  and  $c'$ , affinely reparametrised. We have (see 6.11),

**Theorem 1.6.** *Let  $(X, d)$  be a connected, geodesically complete, non-elementary  $\delta$ -hyperbolic Busemann metric space. Let  $\Gamma$  a torsion-free discrete subgroup of the isometry group of  $(X, d)$ . We assume that  $\text{diam}(\Gamma \backslash X) \leq D < +\infty$  and  $\text{Ent}(X, d) \leq H$ . For all pairs of elements  $a, b$  of  $\Gamma$ , if the subgroup generated by  $a$  and  $b$  is not cyclic, then, for all integers  $p, q \geq S(\delta, H, D)$  one of the two semi-groups generated by  $\{a^p, b^q\}$  or by  $\{a^p, b^{-q}\}$  is free.*

Here  $S(\delta, H, D)$  is a function of  $\delta, H$  and  $D$  which we describe precisely.

Finally, we mention a result related to the thick-thin decomposition. Let  $\Gamma$  be a non-abelian group,  $\alpha > 0$  a real number and  $(\beta', \gamma')$  a pair of elements of  $\Gamma$ , we call  $\langle \beta', \alpha' \rangle$  the subgroup of  $\Gamma$  generated by  $\beta'$  and  $\gamma'$ . We say that  $\Gamma$  is  $(\delta, \alpha)$ -non abelian if, for any pair  $(\beta', \gamma')$  of non-commuting elements of  $\Gamma$ , there exists a  $\delta$ -hyperbolic space  $(X', d')$  and a morphism  $\rho$  from  $\langle \beta', \alpha' \rangle$  into the isometry group of  $(X', d')$  such that,

i)  $\rho(\langle \beta', \alpha' \rangle)$  is neither isomorphic to  $\{0\}$  nor to  $\mathbf{Z}$ ,

ii)  $\forall \sigma \in \rho(\langle \beta', \alpha' \rangle) \setminus \{e\}$ ,  $\ell(\sigma) \geq \alpha$ . Here  $\ell(\sigma)$  is computed for the action on  $(X', d')$ .

Notice that the space  $(X', d')$  may depend on  $\beta'$  and  $\gamma'$ . Non trivial examples of such groups are given in the present article.

Now if  $\Gamma$  acts on  $(X, d)$  by isometries, we define the *pointwise and global systoles* by,

$$\text{sys}_\Gamma(x) = \inf_{\gamma \in \Gamma \setminus \{e\}} \{d(x, \gamma x)\}, \quad \text{Sys}_\Gamma(X) = \inf_{x \in X} \{\text{sys}(x)\}.$$

The next theorem is a curvature-free version of the celebrated "collar theorem" for metric spaces. It shows that, under the hypotheses, if one has a small loop at some point any other independent loop at this point is long. More precisely (see 7.16),

**Theorem 1.7.** *Let  $(X, d, \mu)$  a metric measured space whose entropy is bounded above by  $H > 0$  and  $\Gamma$  a  $(\delta, \alpha)$ -non abelian group acting properly on  $X$  by isometries preserving the measure  $\mu$ , we have,*

i) *for  $x \in X$  and  $\sigma \in \Gamma \setminus \{e\}$  such that  $d(x, \sigma x) = \text{sys}_\Gamma(x)$  then, for all  $\gamma \in \Gamma$  non commuting with  $\sigma$ ,*

$$d(x, \gamma x) > \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}])H} \text{Max} \left[ \ln(2), \ln \left( \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}])H \text{sys}_\Gamma(x)} \right) \right],$$

ii) *if furthermore  $(X, d)$  is path-connected and if  $\Gamma$  has trivial centre, then the global systole satisfies,*

$$\text{Sys}_\Gamma(X) \geq \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}])H} e^{-2(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}])H \text{diam}(\Gamma \backslash X)}.$$

Let us summarise this result by the following sentence : *a thin tube is long and has simple topology*. More precise statements on the topology and the structure of thin tubes will be given in Subsection 7.3. Notice that in the inequality i) the right hand side goes to  $+\infty$  logarithmically when  $\text{sys}(x)$  goes to 0, exactly like the standard collar theorem. Furthermore, in Theorem 1.7 the metric space  $(X, d)$  is not assumed to be  $\delta$ -hyperbolic. A striking case is when  $X$  is a manifold which carries a Riemannian metric  $g_0$  of sectional curvature less than  $-1$ , Theorem 1.7 then applies to any other Riemannian metric on  $X$  whose entropy is less than  $H$ .

In order to make Theorem 1.7 effective we have to provide a lower bound of  $\alpha$  in terms of the data. Such lower estimates are given in this article in various situations. One particular case is when we consider a proper co-compact action by isometries on a  $\delta$ -hyperbolic space for which  $\alpha$  can be taken to be the global systole of the action. The next theorem gives such a bound (see 5.24).

**Theorem 1.8.** *Let  $(X, d)$  be a  $\delta$ -hyperbolic, non elementary, geodesically complete, Busemann space whose entropy satisfies  $\text{Ent}(X, d) \leq H$ . Let  $\Gamma$  acting properly, discretely, co-compactly by isometries on this space such that  $\text{diam}(\Gamma \backslash X) \leq D$ . Then, for any non torsion element  $\gamma$  of  $\Gamma \setminus \{e\}$  we have,*

$$\ell(\gamma) > s_0(\delta, H, D),$$

for  $s_0(\delta, H, D)$  a function of  $\delta$ ,  $H$  and  $D$  which we describe. If furthermore we assume that  $\Gamma$  is torsion-free, we get,

$$\text{Sys}_\Gamma(X) > s_0(\delta, H, D).$$

This last result is the main step in the proof of Theorem 1.6 and, together with Theorem 1.6, they are the key tools which lead to effectiveness in Theorem 1.7.

The article which follows this introduction is written in french for convenience, a second version in english is being readied and will be posted soon. It will contain improvements of the techniques as well as the results.

In the present article Section 2 contains the basic notations. Section 3 contains the definition of the various entropies and several versions of the doubling property which are compared according to their generality. Section 4 is devoted to the study of the so-called *Margulis domains*; for an isometry of a  $\delta$ -hyperbolic space, it is the subset of points at which the displacement of the isometry is controlled. Section 5 begins with one of the main tools running all over the paper : a doubling property for any  $\delta$ -hyperbolic space which admits a co-compact action of a group of isometries, see Subsection 5.1. In Section 6 we describe the techniques used to produce discrete free groups and free semi-groups of isometries of a  $\delta$ -hyperbolic space. In Section 7 we develop the idea which we call *transplantation of Margulis properties*. *Grosso modo*, the underlying philosophy is that if a discrete group acts properly by isometries on a Gromov-hyperbolic space then it inherits, from this action, algebraic properties which in turn translates into Margulis type properties when it acts on another metric measured space whose entropy is bounded. This is the section in which the interplay between algebraic and topological properties is the most enlightening. Finally, in Section 8, we recall the basic facts about Gromov-hyperbolic spaces.

## Acknowledgements

The authors thank Emmanuel Breuillard and Mikhail Gromov for interesting exchanges. Gérard Besson is supported by the ERC Advanced Grant 320939, GETOM. Sylvestre Gallot wish to thank the Dipartimento SBAI and the Istituto Guido Castelnuovo dell'Università di Roma "Sapienza" for their hospitality.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quelques définitions et notations de base</b>	<b>5</b>
<b>3</b>	<b>Entropie, propriétés de doublement et de "packing".</b>	<b>8</b>
3.1	Entropies . . . . .	8
3.2	Propriétés de doublement et de "packing" . . . . .	12
3.3	Comparaison entre les différentes hypothèses possibles : borne de l'entropie, des constantes de doublement ou de "packing", de la courbure de Ricci . . . . .	13
3.4	Propriété de doublement induite sur les sous-groupes . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Les domaines de Margulis</b>	<b>20</b>
4.1	Propriétés basiques . . . . .	21
4.2	Domaines de Margulis de deux isométries "indépendantes" . . . . .	25
4.3	Domaines de Margulis sous hypothèse de doublement . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Actions cocompactes sur des espaces Gromov-hyperboliques</b>	<b>27</b>

5.1	Propriétés de doublement pour les espaces Gromov-hyperboliques . . . . .	27
5.2	Une alternative de Tits quantitative pour les actions de groupes sur les espaces Gromov-hyperboliques . . . . .	29
5.2.1	La dichotomie entropie vs déplacement moyen . . . . .	29
5.2.2	Bornes inférieures universelles pour la croissance exponentielle . . . . .	36
5.3	Propriétés de Margulis pour les actions de groupes sur les espaces Gromov-hyperboliques	37
5.3.1	Un premier Lemme “à la Margulis” sous hypothèse de doublement faible	38
5.3.2	Minoration de la diastole . . . . .	39
5.3.3	Minoration de la systole globale pour les métriques convexes . . . . .	41
<b>6</b>	<b>Sous-groupes libres</b>	<b>44</b>
6.1	Lemme de Ping-pong . . . . .	45
6.2	Le cas où le déplacement moyen est minoré . . . . .	48
6.3	Le cas où la constante de Margulis est supérieure à $\delta$ . . . . .	52
6.4	Semi-groupes libres pour des distances convexes . . . . .	54
<b>7</b>	<b>Transplantation des propriétés de Margulis</b>	<b>55</b>
7.1	Les classes de groupes considérées ici : . . . . .	55
7.2	Propriétés de Margulis pour les espaces métriques mesurés . . . . .	60
7.2.1	Propriétés de Margulis pour des actions de groupes $(\delta, \alpha)$ –non abéliens sur des espaces métriques mesurés . . . . .	60
7.2.2	Minoration de la diastole sur les espaces métriques mesurés : . . . . .	62
7.2.3	Minoration de la systole globale sur les espaces métriques mesurés : . . . . .	63
7.3	Structure des parties minces dans les quotients d’espaces métriques mesurés . . . . .	65
7.3.1	Lemme topologique général . . . . .	65
7.3.2	Sur la topologie des parties minces . . . . .	67
7.3.3	Les tubes de Margulis ont une topologie simple . . . . .	70
<b>8</b>	<b>Appendices : Rappels sur les espaces Gromov-hyperboliques</b>	<b>74</b>
8.1	Mise au point sur les écarts numériques entre les textes de base . . . . .	74
8.2	Projections . . . . .	76
8.3	Géodésiques asymptotes et divergentes . . . . .	77
8.4	Isométries et déplacements . . . . .	80
8.4.1	Sous-groupes discrets du groupe des isométries . . . . .	80
8.4.2	Isométries et déplacements des espaces Gromov-hyperboliques . . . . .	82
8.5	Sous-groupes élémentaires . . . . .	87

## 2 Quelques définitions et notations de base

**Définitions 2.1.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique quelconque; soit  $\Gamma$  un groupe agissant par isométries sur  $(X, d)$ ,

- (i) Rappelons que l’espace  $(X, d)$  est “propre” si toute boule fermée est compacte.
- (ii) Nous dirons que l’action est “propre” si, pour au moins un  $x \in X$  (et par conséquent pour tout  $x \in X$ ) et pour tout  $R > 0$ , l’ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) \leq R$  est fini.

(iii) L'action sera dite "discrète" si elle est fidèle et si l'image de  $\Gamma$  (par cette action) dans le groupe des isométries de  $(X, d)$  est un sous-groupe discret (pour la topologie de la convergence uniforme sur tout compact).

**Remarque 2.2.** Sur un espace propre  $(X, d)$ , toute action fidèle est propre si et seulement si elle est discrète.

La preuve de la Remarque 2.2 sera donnée par la Proposition 8.11.

À l'exception des résultats de la section 3 et de certains des résultats de la section 7, les espaces métriques sur lesquels nous travaillerons seront supposés propres, et les actions de groupes seront supposées propres.

Classiquement, on appelle systole d'une variété riemannienne  $(Y, h)$  l'infimum des longueurs des lacets non homotopes à zéro. Si on considère  $(Y, h)$  comme le quotient de son revêtement universel  $(\tilde{Y}, \tilde{h})$  par l'action (par isométries) de son groupe fondamental  $G$ , la systole de  $(Y, h)$  coïncide avec l'invariant  $\inf_{x \in \tilde{Y}} (\min_{\gamma \in G \setminus \{e\}} d(x, \gamma x))$  de l'action de  $G$  sur  $(\tilde{Y}, \tilde{h})$ .

Nous généralisons ici cette notion en posant les définitions suivantes :

**Définitions 2.3.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique quelconque ; soit  $\Gamma$  un groupe agissant par isométries sur  $(X, d)$ ,

- en tout point  $x \in X$ , la systole (ponctuelle) de cette action est définie comme la quantité  $\text{sys}_\Gamma(x) := \inf_{g \in \Gamma \setminus \{e\}} d(x, gx)$  ;
- la systole (globale) de cette action est alors définie comme la quantité  $\text{Sys}_\Gamma(X) := \inf_{x \in X} \text{sys}_\Gamma(x)$  ;
- la diastole de cette action est la quantité  $\text{Dias}_\Gamma(X) := \sup_{x \in X} \text{sys}_\Gamma(x)$ .

La systole (au sens classique) d'une variété riemannienne  $(Y, h)$  est donc la systole globale de l'action du groupe fondamental sur le revêtement universel riemannien  $(\tilde{Y}, \tilde{h})$  de  $(Y, h)$ , muni de la distance riemannienne associée à la métrique riemannienne relevée  $\tilde{h}$ .

Contrairement à ce qui se passe pour les variétés riemanniennes compactes, la systole ponctuelle (et a fortiori la systole globale) de l'action d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(X, d)$  peut être nulle. Un de nos objectifs sera de trouver des classes d'espaces métriques et d'actions de groupes (les plus larges possibles) telles que la systole (ponctuelle ou globale) de tous les espaces de chacune de ces classes soit minorée par une même constante strictement positive.

Dans toute la suite, pour toute valeur réelle  $\delta > 0$  nous nous intéresserons aux espaces métriques qui sont  $\delta$ -hyperboliques au sens de Gromov (une définition de ces espaces est donnée au début de la sous-section 8.1) ; notons qu'en vertu de cette définition un espace  $\delta$ -hyperbolique est automatiquement géodésique et propre. Dans toute la suite, sur un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique quelconque  $(X, d)$ , nous faisons agir par isométries et *de manière propre* un groupe  $\Gamma$  quelconque, non virtuellement cyclique (voir les Définitions 2.1). Suivant en cela les conventions canoniques, nous adopterons les

**Définitions 2.4.** Nous appellerons  $\Gamma^*$  l'ensemble  $\Gamma \setminus \{e\}$ .

Nous noterons  $\Sigma_r(x)$  (resp.  $\tilde{\Sigma}_r(x)$ ) l'ensemble (fini quand l'action est propre) des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) \leq r$  (resp.  $d(x, \gamma x) < r$ ), et on notera  $\Gamma_r(y)$  (resp.  $\tilde{\Gamma}_r(x)$ ) le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\Sigma_r(x)$  (resp. par  $\tilde{\Sigma}_r(x)$ ).

Dans ce travail, nous nous plaçons dans le cadre général des *espaces métriques mesurés*  $(X, d, \mu)$ . Suivant une convention classique, nous noterons  $B_X(x, r)$  (resp.  $\bar{B}_X(x, r)$ ) la *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre  $x$  et de rayon  $r > 0$  dans l'espace  $(X, d)$ .

Un espace métrique  $(X, d)$  est dit "*espace de longueur*" si, pour tous les  $(x, y) \in X \times X$ , il existe un chemin continu joignant  $x$  et  $y$  et si  $d(x, y)$  est la borne inférieure des longueurs<sup>1</sup> des

1. La longueur d'un chemin  $c : [0, a] \rightarrow X$  est la borne supérieure (éventuellement infinie), lorsque  $T = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$  parcourt l'ensemble des subdivisions de  $[0, a]$  (i. e.  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N-1} < t_N = a$ ), des  $L_T(c) = \sum_{i=1}^N d(c(t_{i-1}), c(t_i))$ .

chemins qui joignent  $x$  et  $y$ .

Dans un espace de longueur, on appellera *géodésique* l'image d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  par une application isométrique  $c$  (i. e. vérifiant  $d(c(t), c(s)) = |t - s|$  pour tous les  $t, s \in I$ ) : une géodésique est donc par définition *minimisante*, en effet  $|t - s|$  est la longueur de la géodésique mesurée entre les points  $c(t)$  et  $c(s)$ , elle donc inférieure ou égale à la longueur de tous les chemins joignant  $c(t)$  et  $c(s)$ . Si nous nous restreignons aux cas où l'intervalle  $I$  est de la forme  $[a, b]$ , ou  $[a, +\infty[$ , ou  $] - \infty, +\infty[$ , cette géodésique sera appelée (respectivement) *segment géodésique*, ou *rayon géodésique*, ou *droite géodésique*.

On appellera *géodésique locale* une application  $c$  d'un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  dans  $X$  qui est localement minimisante<sup>2</sup>, c'est à dire que, pour tout  $t \in I$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $c$  soit une géodésique en restriction à l'intervalle  $]t - \varepsilon, t + \varepsilon[ \cap I$ .

On fera souvent l'hypothèse que les espaces métriques considérés sont *des espaces géodésiques* : un espace métrique est dit géodésique si deux points quelconques peuvent être reliés par (au moins) un segment géodésique ; il peut en général y avoir plusieurs segments géodésiques reliant deux points distincts  $x, y$  : un léger abus de notation nous fera noter  $[x, y]$  un quelconque des segment géodésiques qui relient ces deux points.

Un espace métrique géodésique  $(X, d)$  est dit avoir la *propriété d'extension géodésique* si, pour toute géodésique locale  $c : [a, b] \rightarrow X$  ( $a \neq b$ ), il existe un  $\varepsilon > 0$  et une géodésique locale  $c' : [a, b + \varepsilon] \rightarrow X$  qui prolonge  $c$  (i. e.  $c'|_{[a, b]} = c$ ). Cet espace sera dit *géodésiquement complet* si toute géodésique locale  $c : [a, b] \rightarrow X$  ( $a \neq b$ ) peut être prolongée en une géodésique locale  $\bar{c} : ] - \infty, +\infty[ \rightarrow X$ . Il est utile de rappeler qu'un espace métrique *complet*  $(X, d)$ , qui est de plus géodésique, a la propriété d'extension géodésique si et seulement s'il est géodésiquement complet (cf. [BH99] Lemme II.5.8 (1) p. 208).

Sur ces espaces métriques, nous ferons agir un groupe (a priori quelconque)  $\Gamma$  ; nous ne considérerons que des actions par isométries et *propres* (voir la Définition 2.1 de ce type d'action), ce qui implique en particulier que cette action opère via une *représentation*  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(X, d)$  dont le noyau est un sous-groupe normal fini de  $\Gamma$  et dont l'image  $\varrho(\Gamma)$  est un sous-groupe discret du groupe  $\text{Isom}(X, d)$  des isométries de  $(X, d)$  (voir le Lemme 5.5, dont les résultats (i) et (ii) sont valables sur des espaces métriques généraux) ; cela implique également que le *stabilisateur*  $\text{Stab}_\Gamma(x)$  dans  $\Gamma$  de tout point  $x$  est fini.

L'espace-quotient  $\Gamma \backslash X$  sera muni de la *distance-quotient*  $\bar{d}$  définie par  $\bar{d}(\Gamma \cdot x, \Gamma \cdot x') := \inf_{\gamma, g \in \Gamma} d(\gamma x, g x')$  =  $\inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma y)$  aussi, lorsque nous parlerons du *diamètre de*  $\Gamma \backslash X$ , ce diamètre sera calculé par rapport à cette distance.

Pour une telle action d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $X$ , un certain nombre des résultats que nous énoncerons seront dénommés "*Propriétés de Margulis*"; sous cette appellation, nous entendrons que ces résultats essaierons, pour chacun des problèmes  $M_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) énoncés ci-dessous, de calculer des constantes universelles (i. e. valables sur un ensemble  $\mathcal{M}_i$  d'espaces métriques  $X$  et d'actions de groupes  $\Gamma$  le plus grand possible<sup>3</sup>) répondant aux exigences suivantes :

- **Problème  $M_1$**  : Trouver un ensemble  $\mathcal{M}_1$  d'espaces  $X$ , de groupes  $\Gamma$  et d'actions de  $\Gamma$  sur  $X$ , et une constante universelle  $\varepsilon_1 > 0$  tels que soit vérifiée la propriété :  $\forall x \in X$ ,  $\Gamma_{\varepsilon_1}(x)$  est virtuellement nilpotent,
- **Problème  $M_2$**  : Trouver un ensemble  $\mathcal{M}_2$  d'espaces  $X$ , de groupes  $\Gamma$  et d'actions de  $\Gamma$  sur  $X$ , et une constante universelle  $\varepsilon_2 > 0$  tels que  $\text{Dias}_\Gamma(X) \geq \varepsilon_2$ ,
- **Problème  $M_3$**  : Trouver un ensemble  $\mathcal{M}_3$  d'espaces  $X$ , de groupes  $\Gamma$  et d'actions de  $\Gamma$  sur  $X$ , et une constante universelle  $\varepsilon_3 > 0$  tels que  $\text{Sys}_\Gamma(X) \geq \varepsilon_3$ ,
- **Problème  $M_4$**  : Trouver un ensemble  $\mathcal{M}_4$  d'espaces  $X$ , de groupes  $\Gamma$  et d'actions de  $\Gamma$  sur  $X$ , et des constantes universelles  $\varepsilon_4, C_0, C_1 > 0$  tels que la propriété suivante soit

2. Dans le cas des variétés riemanniennes, ce que nous appelons ici "géodésiques locales" sont les géodésiques au sens riemannien du terme, ces dernières n'étant que localement minimisantes.

3. L'ensemble  $\mathcal{M}_i$  sera précisé dans chaque énoncé, ainsi que la valeur des constantes universelles correspondantes.



vérifiée : en tout point  $x \in X$  et pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_4]$ , s'il existe un  $\sigma \in \Gamma$  non trivial tel que  $d(x, \sigma x) \leq \varepsilon$ , alors tout  $\gamma \in \Gamma$  qui ne commute pas avec  $\sigma$  vérifie  $d(x, \gamma x) \geq C_1 \ln \left( 1 + \frac{C_0}{\varepsilon} \right)$ .

Parmi les actions de groupes auxquelles s'applique ce travail, citons l'action d'un groupe discret  $\Gamma$ , muni d'une partie génératrice finie  $\Sigma$ , sur son *graphe de Cayley*  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$ . On notera  $|\gamma|_\Sigma$  la *métrique des mots* relative à  $\Sigma$  (i. e. chacune des manières d'écrire  $\gamma$  comme produit d'éléments de  $\Sigma \cup \Sigma^{-1}$  formant un mot,  $|\gamma|_\Sigma$  désigne la longueur minimale de ces mots) et  $d_\Sigma$  la *distance algébrique* associée sur le groupe  $\Gamma$  (i. e.  $d_\Sigma(\gamma, g) := |\gamma^{-1}g|_\Sigma$ ), ainsi que la distance de longueur induite sur le graphe  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$  (car  $|\gamma|_\Sigma$  est aussi l'infimum des longueurs des chemins joignant  $e$  à  $\gamma$  dans le graphe de Cayley, chaque arête du graphe étant de longueur unitaire). Par un léger abus de langage, nous adopterons la même notation  $d_\Sigma$  pour cette dernière distance de longueur et pour la distance algébrique qui en est la restriction aux sommets du graphe de Cayley.

Toute mesure  $\mu$  considérée dans cet article sera, par définition, positive (i. e. tout ensemble mesurable sera de mesure positive ou nulle, éventuellement infinie), non nulle et *borélienne* (i. e. toute boule ouverte sera mesurable). Des mesures qui seront souvent considérées sont :

- la *mesure de dénombrement*  $\#$ , pour des ensemble discrets ;
- la *mesure de comptage*  $\mu_x^\Gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma x}$  de l'orbite  $\Gamma \cdot x$  d'un point  $x$  fixé, associée à toute action propre d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace  $X$ , où  $\delta_y$  désigne la mesure de Dirac au point  $y$  ;
- la *mesure 1-dimensionnelle induite sur le graphe de Cayley*  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$ , telle que la mesure de chaque portion d'arête du graphe soit égale à sa longueur.
- la *mesure riemannienne*  $dv_g$  d'une variété riemannienne  $(X, g)$ , définie sur  $X$  elle-même, ou (selon le contexte) la mesure relevée sur son revêtement universel  $\tilde{X}$ .

Les espaces métriques qui seront notre premier objet d'étude sont les *espaces  $\delta$ -hyperboliques au sens de Gromov*, dont nous rappellerons la définition et les notions de base nécessaires au présent travail dans l'Appendice ; en cohérence avec cette définition, *les espaces  $\delta$ -hyperboliques que nous considérerons seront toujours géodésiques et seront supposés propres*, sans qu'il soit nécessaire de le rappeler.

De manière classique, on appellera *groupe  $\delta$ -hyperbolique* la donnée d'un groupe discret  $\Gamma$  et d'une partie génératrice  $\Sigma$  tels que le graphe de Cayley  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$  (muni de la distance de longueur  $d_\Sigma$  définie ci-dessus) soit un espace  $\delta$ -hyperbolique au sens de Gromov.

*Plaçons nous maintenant dans un espace  $\delta$ -hyperbolique (au sens de Gromov)  $(X, d)$*  : on utilisera alors les symboles  $\partial X$  pour le *bord de Gromov* (aussi appelé *bord idéal*) de l'espace  $X$ , et  $L\Gamma$  pour l'*ensemble limite* d'un groupe discret  $\Gamma$  agissant par isométries sur  $X$  (i. e. l'ensemble des points d'accumulation dans  $\partial X$  de n'importe quelle orbite  $\Gamma \cdot x$ ).

Finalement, on appellera *élémentaire* un espace ou un groupe hyperbolique dont le bord possède au plus deux points ; sera dite également *élémentaire* toute action d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace hyperbolique  $(X, d)$ , dont l'ensemble limite vérifie  $\#(L\Gamma) \leq 2$ .

Dans la section 7, nous quitterons l'univers des espaces  $\delta$ -hyperboliques pour nous intéresser aux espaces métriques mesurés généraux et nous verrons pour quel type de groupes les propriétés de Margulis, valables sur les espaces  $\delta$ -hyperboliques, sont encore valables sur un espace métrique mesuré.

Sur tous ces espaces, l'invariant qui se substituera à la courbure (et que nous retrouverons tout au long de cet article) est l'*entropie d'un espace métrique mesuré*, que nous allons définir, discuter et comparer à d'autres invariants dans la section qui suit.

### 3 Entropie, propriétés de doublement et de “packing”.

#### 3.1 Entropies

**Définitions 3.1.** *Pour toute action d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(X, d)$ , on appellera “domaine recouvrant” n'importe quel sous-ensemble  $K \subset X$  tel que  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma K = X$  et*

“domaine fondamental” n’importe quel domaine recouvrant tel que  $\gamma K^\circ \cap K^\circ = \emptyset$  pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$  (où  $K^\circ$  désigne l’intérieur de  $K$ ). L’action de  $\Gamma$  sera dite “cocompacte” s’il existe un domaine compact qui est recouvrant pour cette action.

**Définition 3.2.** L’entropie d’un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  (notée  $\text{Ent}(X, d, \mu)$ ) est définie comme la limite inférieure (quand  $R \rightarrow +\infty$ ) de  $\frac{1}{R} \ln \left( \mu(B_X(x, R)) \right)$ . Cette limite inférieure ne dépend pas du choix de  $x$ .

Cet invariant (éventuellement infini) donne une information très faible sur la géométrie de l’espace métrique, cependant il devient intéressant (tout en restant une information très faible sur la géométrie de l’espace métrique, voir la sous-section 3.3) lorsqu’il existe un groupe  $\Gamma$  qui agit sur  $(X, d)$  par isométries, de manière propre (et éventuellement cocompacte), et quand on se restreint aux mesures boréliennes  $\mu$  qui sont invariantes par cette action. Une mesure de ce type jouera un rôle privilégié dans la suite : la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l’orbite  $\Gamma \cdot x$  d’un point  $x$  fixé, définie en section 2. Dans le cas cocompact, l’entropie ne dépend pas de la mesure  $\Gamma$ -invariante choisie, comme le démontre la

**Proposition 3.3.** Pour tout espace métrique non compact  $(X, d)$ , pour tout groupe  $\Gamma$  qui agit sur  $(X, d)$  par isométries, de manière propre et cocompacte, pour toute mesure  $\mu$  (non triviale) sur  $X$  invariante par cette action, s’il existe un domaine compact recouvrant (pour cette action) de  $\mu$ -mesure finie, alors  $\text{Ent}(X, d, \mu) = \text{Ent}(X, d, \mu_x^\Gamma)$  pour tout  $x \in X$ . Si, de plus,  $(X, d)$  est un espace de longueur, alors  $\text{Ent}(X, d, \mu)$  est la limite (quand  $R \rightarrow +\infty$ ) de  $\frac{1}{R} \ln \left( \mu(B_X(x, R)) \right)$ .

Cette Proposition est la raison qui nous fera désormais adopter la notation  $\text{Ent}(X, d)$  au lieu de  $\text{Ent}(X, d, \mu)$  pour ce type de mesures. La preuve de cette Proposition 3.3 s’appuie sur les deux Lemmes qui suivent

**Lemme 3.4.** Pour toute action propre d’un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(X, d)$ , si le quotient  $\Gamma \backslash X$  est compact, alors l’espace  $(X, d)$  est propre et toute boule fermée de rayon au moins égal au diamètre de  $\Gamma \backslash X$  est un domaine compact recouvrant pour cette action.

*Preuve :* Si  $\Gamma \backslash X$  est compact et de diamètre  $D$ , pour tout  $R \geq D$ , pour tout  $x \in X$ , et pour toute suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de points de la boule fermée  $\overline{B}_X(x, R)$ , il existe une sous-suite (que nous noterons encore  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) dont l’image par  $\pi$  converge dans  $(\Gamma \backslash X, \bar{d})$  et, par définition de la distance-quotient  $\bar{d}$  (voir le Lemme 8.12(i)) et puisque  $\overline{B}_X(x, R)$  est un domaine recouvrant, il existe un point  $y_\infty \in \overline{B}_X(x, R)$  et une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d’éléments de  $\Gamma$  tels que  $d(y_n, \gamma_n y_\infty) \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Il existe donc un  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on ait

$$d(x, \gamma_n x) \leq d(x, y_n) + d(y_n, \gamma_n y_\infty) + d(\gamma_n y_\infty, \gamma_n x) \leq 2R + 1 ;$$

comme l’action est propre, ceci implique que la suite  $(\gamma_n)_{n \geq N}$  prend un nombre fini de valeurs, donc admet une sous-suite constante et égale à un élément fixé  $\gamma \in \Gamma$ . Il existe donc une sous-suite de la suite  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $\gamma y_\infty$ . Ceci prouve que toutes les boules fermées de rayon  $R \geq D$  sont des domaines recouvrants compacts, donc que toutes les boules fermées sont compactes.  $\square$

**Lemme 3.5.** Pour tout espace métrique non compact  $(X, d)$ , pour tout groupe  $\Gamma$  qui agit sur  $(X, d)$  par isométries, de manière propre et cocompacte, pour toute mesure  $\mu$  invariante par cette action, pour tout domaine compact recouvrant  $K$  de cet action, pour tout point  $x \in X$  pour tous les réels  $R, R'$  tels que  $0 < R' < R$ , on a

$$\frac{\mu(B_X(x, R'))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, R' + \text{diam}(K)))} \cdot \mu_x^\Gamma(B_X(x, R - R')) \leq \mu(B_X(x, R)) \leq \mu(K) \cdot \mu_x^\Gamma(B_X(x, R + \text{diam}(K)))$$

*Preuve :* La preuve suit (en la corrigeant légèrement) la démonstration de la Proposition 2.3 de [Rev08]. Par définition d’un domaine recouvrant, il existe un élément  $g \in \Gamma$  tel que  $x \in g \cdot K$ .

Posons  $K' := g \cdot K$  pour simplifier, en notant  $\check{\Sigma}_r(x)$  l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) < r$  et  $D := \text{diam}(K)$  le diamètre de  $K$ , l'inégalité triangulaire donne :

$$\mu(B_X(x, R)) \leq \mu\left(\bigcup_{\gamma \in \check{\Sigma}_{R+D}(x)} \gamma K'\right) \leq \sum_{\gamma \in \check{\Sigma}_{R+D}(x)} \mu(\gamma K') = \mu(K) \cdot \mu_x^\Gamma(B_X(x, R+D)) .$$

Pour démontrer la première inégalité du Lemme 3.5, rappelons que, si  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont deux mesures sur  $X$ , pour tout  $U \subset X$  mesurable, on a la formule

$$\int_U \mu_2(B_X(x, r)) d\mu_1(x) = \int_X \mu_1(B_X(x, r) \cap U) d\mu_2(x) , \quad (1)$$

car les deux membres de cette égalité sont égaux à  $\int_X \int_X \mathbf{1}_{[0, r]}(d(x, y)) \mathbf{1}_U(x) d\mu_2(y) d\mu_1(x)$ . En y remplaçant  $\mu_1$  par  $\mu_x^\Gamma$  et  $\mu_2$  par  $\mu$ , l'égalité (1), et le fait que  $\mu(B_X(\gamma x, R')) = \mu(B_X(x, R'))$  par  $\Gamma$ -invariance de  $d$  et de  $\mu$ , donnent

$$\begin{aligned} \mu_x^\Gamma(B_X(x, R - R')) \cdot \mu(B_X(x, R')) &= \int_{B_X(x, R - R')} \mu(B_X(z, R')) d\mu_x^\Gamma(z) = \\ \int_{B_X(x, R)} \mu_x^\Gamma(B_X(y, R') \cap B_X(x, R - R')) d\mu(y) &\leq \mu_x^\Gamma(B_X(x, R' + D)) \cdot \mu(B_X(x, R)) , \end{aligned}$$

où la dernière égalité découle du fait que, par définition d'un domaine recouvrant, pour tout  $y \in X$ , il existe un  $g \in \Gamma$  tel que  $B_X(y, R') \subset B_X(gx, R' + D)$ .  $\square$

*Fin de la preuve de la Proposition 3.3 :* Choisissons un domaine compact recouvrant  $K$  tel que  $\mu(K) < +\infty$  et un point  $x$  quelconque de  $X$ , il existe alors un point  $x' \in K$  et une isométrie  $g \in \Gamma$  tels que  $x = gx'$ ; posons  $D := \text{diam}(K)$  et choisissons  $R' = D + 1$ , de sorte que  $K \subset B_X(x', R')$ . Le fait que  $\mu_{x'}^\Gamma(B_X(x', R + D)) < +\infty$  pour tout  $R > 0$  (en vertu de l'hypothèse de propreté de l'action), injecté dans la seconde des inégalités du Lemme 3.5, a deux conséquences : d'une part  $\mu(B_X(x', R)) < +\infty$  pour tout  $R > 0$ , d'autre part, si  $\mu(K)$  était nul, on aurait  $\mu(B_X(x', R)) = 0$  pour tout  $R > 0$  et, en tant que réunion croissante des  $B_X(x', R)$ ,  $\mu(X)$  serait alors nul, ce qui impliquerait que  $\mu$  est triviale, en contradiction avec l'hypothèse : on a donc  $\mu(K) > 0$ , ce qui implique que  $\mu(B_X(x', R')) > 0$ . En injectant ces deux résultats de positivité et la finitude de  $\mu(K)$  et de  $\mu(B_X(x', R'))$  dans les inégalités du Lemme 3.5, nous obtenons que les limites inférieures (quand  $R \rightarrow +\infty$ ) de  $\frac{1}{R} \ln(\mu(B_X(x', R)))$ , de  $\frac{1}{R} \ln(\mu_{x'}^\Gamma(B_X(x', R)))$  et de  $\frac{1}{R} \ln(\mu_x^\Gamma(B_X(x, R)))$  coïncident, cette dernière coïncidence étant une conséquence du fait que  $\mu_{gx'}^\Gamma = \mu_{x'}^\Gamma$  et que  $\mu_{x'}^\Gamma(B_X(gx', R)) = \mu_{x'}^\Gamma(B_X(x', R))$ . Ceci prouve que  $\text{Ent}(X, d, \mu) = \text{Ent}(X, d, \mu_x^\Gamma)$ .

Supposons maintenant que  $(X, d)$  est un espace de longueur, alors les propriétés ci-dessus et le lemme 3.5 impliquent que, si  $\frac{1}{R} \ln(\mu_x^\Gamma(B_X(x, R)))$  admet une limite quand  $R \rightarrow +\infty$ , il en est de même pour  $\frac{1}{R} \ln(\mu(B_X(x, R)))$ . L'existence d'une telle limite se déduit, de manière presque classique, du fait que la fonction  $R \mapsto \ln(\mu_x^\Gamma(B_X(x, R + 2D)))$  est croissante et sous-additive, voir la Propriété 2.5 de [Rev08] pour une preuve complète.  $\square$

Deux exemples classiques où cette notion d'entropie s'applique sont :

- la notion classique d'*entropie volumique d'une variété riemannienne compacte*  $(M, g)$ , qui peut être définie, selon la définition 3.2, comme  $\text{Ent}(\widetilde{M}, d_{\widetilde{g}}, dv_{\widetilde{g}})$ , où  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  est le revêtement universel riemannien de  $(M, g)$ , où  $d_{\widetilde{g}}$  est la distance riemannienne associée à la métrique  $\widetilde{g}$ , et où  $dv_{\widetilde{g}}$  est la mesure riemannienne associée. Remarquons que, dans ce cas, le groupe  $\Gamma$  est le groupe fondamental de  $M$ , agissant isométriquement sur  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$

par transformations de revêtement ; on peut donc remplacer, dans cette définition,  $dv_{\tilde{g}}$  par la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite de  $\Gamma$  ou par n'importe quelle autre mesure  $\mu$  invariante par l'action de  $\Gamma$  sur  $\widetilde{M}$ .

- la notion d'entropie algébrique d'un groupe finiment engendré quelconque  $\Gamma$ , associée au choix d'un système fini  $\Sigma$  de générateurs : Dans ce cas, "l'entropie algébrique de  $\Gamma$  relative à  $\Sigma$ " (également appelée *taux de croissance exponentielle*, ou *exposant critique* de  $\Gamma$  par rapport à  $\Sigma$  et notée ici  $\text{Ent}(\Gamma, \Sigma)$ ) peut être définie de deux manières équivalentes : soit comme l'entropie de l'espace métrique mesuré  $(\Gamma, d_\Sigma, \#)$ , où  $d_\Sigma$  est la distance algébrique associée au système générateur  $\Sigma$  (définie dans la section 2), soit l'entropie de l'espace métrique mesuré  $(\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma), d_\Sigma, \mu)$ , où  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$  est le graphe de Cayley de  $\Gamma$  associé au système générateur  $\Sigma$ , où  $d_\Sigma$  et  $\mu$  désignent respectivement la distance de longueur et la mesure 1-dimensionnelle induites sur le graphe (pour la définition de ces deux notions, voir la section 2).

Un lien entre ces deux notions est donné par le résultat classique suivant. Désignons par  $d_x$  la pseudo-distance "géométrique" ( $\Gamma$ -invariante par translations à gauche) définie sur  $\Gamma$  par  $d_x(\gamma, \gamma') := d(\gamma x, \gamma' x)$ , la notion de boules pour la pseudo-distance  $d_x$  étant bien définie sur  $\Gamma$ , on peut définir l'entropie de l'espace pseudo-métrique mesuré  $(\Gamma, d_x, \#)$  comme la limite inférieure, lorsque  $R \rightarrow +\infty$ , de  $\frac{1}{R} \ln(\#\{\gamma : d_x(e, \gamma) < R\})$ . Notons  $\text{Stab}_\Gamma(x)$  le stabilisateur de  $x$  dans  $\Gamma$ , la pseudo-distance induit une vraie distance sur  $\Gamma/\text{Stab}_\Gamma(x)$  et l'entropie de l'espace métrique mesuré  $(\Gamma/\text{Stab}_\Gamma(x), d_x, \#)$  coïncide avec l'entropie de  $(\Gamma, d_x, \#)$  lorsque  $\text{Stab}_\Gamma(x)$  est fini.

**Lemme 3.6.** – Soit  $\Gamma$  un groupe finiment engendré et  $\Sigma$  un système fini de générateurs de  $\Gamma$ , pour toute action propre, par isométries, de  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(X, d)$ , pour toute mesure  $\mu$   $\Gamma$ -invariante sur  $X$ , pour tout  $x \in X$ , on a :

$$\text{Ent}(X, d, \mu) \geq \text{Ent}(X, d, \mu_x^\Gamma) = \text{Ent}(\Gamma, d_x, \#) \geq \frac{1}{\text{Max}_{\sigma \in \Sigma} d(x, \sigma x)} \text{Ent}(\Gamma, \Sigma) .$$

*Preuve :* L'égalité  $\text{Ent}(\Gamma, d_x, \#) = \text{Ent}(X, d, \mu_x^\Gamma)$  découle du fait que, par définition de  $\mu_x^\Gamma$  et de la pseudo-distance  $d_x$ ,  $\mu_x^\Gamma(B_X(x, R))$  coïncide avec  $\#\{\gamma : d_x(e, \gamma) < R\}$ . Posons  $M := \text{Max}_{\sigma \in \Sigma} d(x, \sigma x)$ . L'inégalité triangulaire implique que  $d(x, \gamma x) \leq M \cdot d_\Sigma(e, \gamma)$  et donc que

$$\frac{1}{R} \ln \left( \mu_x^\Gamma(B_X(x, R)) \right) \geq \frac{1}{R} \ln \left( \# \left\{ \gamma : d_\Sigma(e, \gamma) < \frac{R}{M} \right\} \right) ,$$

ce qui, en passant à la limite inférieure quand  $R \rightarrow +\infty$ , prouve la dernière inégalité du Lemme 3.6 (remarquer que ce résultat reste valable lorsque  $\text{Ent}(X, d, \mu_x^\Gamma) = +\infty$ ).

Comme la mesure totale de  $X$  est strictement positive, il existe un  $R' > 0$  tel que  $\mu(B(x, R')) > 0$  ; la formule (1) (où on remplace  $\mu_1$  par  $\mu_x^\Gamma$  et  $\mu_2$  par  $\mu$ ) donne, pour tout  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned} \mu_x^\Gamma(B_X(x, R)) \cdot \mu(B_X(x, R')) &= \int_{B_X(x, R)} \mu(B_X(z, R')) \, d\mu_x^\Gamma(z) \\ &= \int_{B_X(x, R+R')} \mu_x^\Gamma(B_X(y, R') \cap B_X(x, R)) \, d\mu(y) \leq \int_{B_X(x, R+R')} \mu_x^\Gamma(B_X(y, R')) \, d\mu(y) , \end{aligned} \quad (2)$$

Si  $d(y, \Gamma x) \geq R'$ , alors  $B(y, R') \cap \Gamma x = \emptyset$  et  $\mu_x^\Gamma(B_X(y, R')) = 0$  ; si  $d(y, \Gamma x) < R'$ , il existe un  $g \in \Gamma$  tel que  $d(y, gx) < R'$  et l'inégalité triangulaire assure que  $B_X(y, R') \subset B_X(gx, 2R')$ , donc que

$$\mu_x^\Gamma(B_X(y, R')) \leq \mu_x^\Gamma(B_X(gx, 2R')) = \mu_x^\Gamma(B_X(x, 2R')) ,$$

où la dernière égalité découle de la  $\Gamma$ -invariance de la mesure  $\mu_x^\Gamma$  et du fait que  $B_X(gx, 2R') = g(B_X(x, 2R'))$ . En reportant ces deux dernières estimées dans l'inégalité (2), nous obtenons

$$\mu_x^\Gamma(B_X(x, R)) \cdot \mu(B_X(x, R')) \leq \mu_x^\Gamma(B_X(x, 2R')) \cdot \mu(B_X(x, R+R')) ;$$

En passant au logarithme de part et d'autre de cette dernière inégalité, en divisant par  $R+R'$  et en passant à la limite inférieure de part et d'autre quand  $R \rightarrow +\infty$ , nous en déduisons que  $\text{Ent}(X, d, \mu) \geq \text{Ent}(X, d, \mu_x^\Gamma)$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

### 3.2 Propriétés de doublement et de “packing”

**Définitions 3.7.** Pour toutes données du réel  $C_0 > 1$  et d'un intervalle  $I \subset ]0, +\infty[$ ,

(i) un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  est dit “vérifier la condition (ou l'hypothèse) de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in I$  centrées en un de ses points  $x$ ” si la propriété suivante est vérifiée :

$$\forall r \in I \quad , \quad 0 < \mu(B_X(x, r)) < +\infty \quad \text{et} \quad \frac{\mu(B_X(x, 2r))}{\mu(B_X(x, r))} \leq C_0 . \quad (3)$$

(ii) un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  est dit “vérifier l'hypothèse de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  autour d'un de ses points  $x$ ” s'il vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [\frac{r_0}{2}, 2r_0]$  centrées en  $x$ .

(iii) un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  est dit “vérifier l'hypothèse de  $C_0$ -doublement fort à l'échelle  $r_0$  autour d'un de ses points  $x$ ” s'il vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in ]0, 2r_0]$  centrées en  $x$ .

Si la condition (3) est vérifiée en tout point  $x \in X$  et pour tout  $r \in I$  (resp. en tout point  $x \in X$  et pour tout  $r \in [\frac{r_0}{2}, 2r_0]$ , resp. en tout point  $x \in X$  et pour tout  $r \in ]0, 2r_0]$ ), on dira que l'espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  “vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in I$ ” (resp. “vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$ ”, resp. “vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement fort à l'échelle  $r_0$ ”).

Dans tout les cas, la valeur  $C_0$  sera appelée “l'amplitude du doublement” et la moyenne logarithmique  $r_0$  (la moyenne  $r_0$  si la borne inférieure de l'intervalle est 0) des bornes de l'intervalle des variations de  $r$  sera appelé “l'échelle du doublement”<sup>4</sup>.

Ces définitions s'appliquent en particulier à la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$ , introduite à la suite de la Définition 3.2, en présence d'une action isométrique propre d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  (le fait que l'action soit propre assure que les boules de  $(X, d)$  sont de  $\mu_x^\Gamma$ -mesure finie). Quand la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite de  $x$  satisfait une propriété de  $C$ -doublement pour tout choix du point  $x$ , nous dirons simplement (par abus de notation) que  $(\Gamma, d_x)$  satisfait la condition de  $C$ -doublement. Nous verrons dans le Lemme 3.15, que,  $(X, d)$  et  $\Gamma$  étant fixés, une hypothèse de doublement portant sur la mesure  $\mu_x^\Gamma$  est la plus faible de toutes les hypothèses de doublement portant sur des mesures  $\Gamma$ -invariantes  $\mu$ ; cependant une difficulté vient du fait que, pour tout point  $y \in X$  tel que  $d(y, \Gamma \cdot x) \geq \frac{1}{2}r_0$ ,  $\mu_x^\Gamma(B_X(y, r_0/2)) = 0$ , et par conséquent la condition de doublement (3) n'est alors vérifiée pour aucune boule centrée en  $y$ , de rayon  $r < \frac{1}{2}r_0$ , par exemple l'hypothèse de  $C_0$ -doublement faible à une échelle  $r_1 \leq r_0$  autour du point  $y$  n'a alors aucun sens. C'est pourquoi, dans la suite, nous ne ferons d'hypothèse de doublement de la mesure  $\mu_x^\Gamma$  que pour des boules centrées au point  $x$  (ou en un point de  $\Gamma x$ ).

Remarquons qu'il n'est nullement nécessaire de supposer que l'action de  $\Gamma$  est “sans point fixe” : en effet, si le point  $x$  a un stabilisateur (noté  $Stab_\Gamma(x)$  non trivial, celui-ci est forcément fini (car l'action est propre) et, pour tout  $g \in \Gamma$ , on a  $Stab_\Gamma(gx) = g \cdot Stab_\Gamma(x) \cdot g^{-1}$ . Il y a alors une autre définition classique de la mesure de comptage, à savoir la mesure  $\mu'_x$  définie par  $\mu'_x(A) = \#(A \cap \Gamma x)$  pour tout ensemble mesurable  $A \subset X$ ; on a alors  $\mu_x^\Gamma = \#(Stab_\Gamma(x)) \cdot \mu'_x$ , ce qui implique que  $\mu_x^\Gamma$  vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in I$  centrées en  $x$  si et seulement si  $\mu'_x$  la vérifie.

C'est pourquoi quand, dans la suite, quand nous parlerons d'une hypothèse de doublement vérifiée par la mesure de comptage de l'orbite  $\Gamma x$ , la mesure ainsi désignée sera indifféremment la mesure  $\mu'_x$  ou la mesure  $\mu_x^\Gamma$ .

Enfin, reliée à l'hypothèse de doublement, l'hypothèse de “packing” est devenue classique depuis les travaux fondateurs de M. Gromov et peut (par exemple) s'énoncer comme suit :

4. Remarquons d'une part que, pour tout  $\lambda > 0$ , ni l'échelle ni l'amplitude ne sont modifiées quand la mesure  $\mu$  est remplacée par  $\lambda \cdot \mu$ , d'autre part que l'échelle  $r_0$  est multipliée par  $\lambda$ , sans changement de l'amplitude, lorsque la distance est multipliée par  $\lambda$ .

**Définition 3.8.** *Pour toutes les données des constantes universelles  $N_0 \in \mathbb{N}^*$  et  $r_0 > 0$ , un espace métrique  $(X, d)$  est dit “vérifier la condition de packing de borne  $N_0$  à l’échelle  $r_0$ ” si, pour tout  $x \in X$ , le nombre maximal de boules disjointes de rayon  $r_0/2$  qu’on peut inclure dans la boule  $B_X(x, 9r_0)$  est inférieur ou égal à  $N_0$ .*

### 3.3 Comparaison entre les différentes hypothèses possibles : borne de l’entropie, des constantes de doublement ou de “packing”, de la courbure de Ricci

Tout d’abord l’hypothèse “Entropie majorée” ou une hypothèse de doublement faible (à une certaine échelle) de la mesure de comptage d’une orbite de l’action de  $\Gamma$  ont un sens sur des espaces métriques très généraux, alors que, à l’autre extrémité de la chaîne, l’hypothèse de “courbure de Ricci minorée” n’a de sens que pour des variétés riemanniennes. Même si on se restreint au cadre des variétés riemanniennes, et au cas où  $\Gamma$  est le groupe fondamental d’une variété compacte agissant sur son revêtement universel, la comparaison entre toutes ces hypothèses peut se résumer grossièrement de la manière suivante :

**Comparaison 3.9.** *L’hypothèse “Entropie majorée” est strictement plus faible qu’une hypothèse de doublement faible de la mesure de comptage de l’orbite d’un point  $x$  donné (cf. le Lemme 3.10 (ii)), elle-même strictement plus faible qu’une hypothèse de packing à une échelle équivalente (cf. le Lemme 3.12), elle-même plus faible qu’une hypothèse de doublement faible de la mesure riemannienne (cf. le Lemme 3.14), elle-même strictement plus faible que l’hypothèse de doublement fort à la même échelle (cf. le Lemme 3.16 et son corollaire 3.17), elle-même strictement plus faible que l’hypothèse de “courbure de Ricci minorée” (cf. le Lemme 3.18).*

*De plus, si on se restreint à la comparaison des différentes hypothèses de doublement faibles, l’hypothèse de doublement est d’autant plus forte que l’échelle de ce doublement est petite (cf. le Lemme 3.10 (i)).*

Il convient de remarquer que, dans le cas cocompact, sur une variété riemannienne fixée  $(X, g)$ , pour toute échelle  $r_0$  fixée, il existera toujours une constante  $C(r_0)$  telle que la mesure riemannienne vérifie la propriété de  $C(r_0)$ –doublement faible à l’échelle  $r_0$  ; de même il existera toujours une constante  $H$  telle que l’entropie de  $(X, g)$  soit majorée par  $H$ . Ici nous comparons des familles d’espaces métriques mesurés : une première hypothèse est dite strictement plus faible qu’une seconde si la famille des espaces vérifiant la seconde hypothèse est strictement incluse dans la famille des espaces vérifiant la première hypothèse, les constantes qui interviennent dans la première hypothèse se calculant en fonction des constantes qui interviennent dans la seconde ; par exemple, sur l’ensemble des variétés riemanniennes, dire que l’hypothèse “Entropie majorée” est strictement plus faible que (par exemple) l’hypothèse de “doublement faible de la mesure riemannienne”, c’est dire que, pour toute donnée des constantes  $r_0$  et  $C_0$ , il existe une constante  $H(r_0, C_0)$  (calculable en fonction de  $r_0$  et de  $C_0$ ) telle que l’ensemble des variétés riemanniennes qui vérifient l’hypothèse de  $C_0$ –doublement faible à l’échelle  $r_0$  soit strictement inclus dans l’ensemble des variétés riemanniennes d’entropie majorée par  $H(r_0, C_0)$ .

Les Lemmes qui suivent précisent et démontrent les résultats de comparaison énoncés ci-dessus :

**Lemme 3.10.** (“Entropie majorée” vs. “doublement faible de la mesure de comptage”).— *Sur tout espace métrique de longueur  $(X, d)$ , pour toute action propre par isométries de  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  telle que  $\Gamma \backslash X$  soit compact et de diamètre majoré par  $D$ , s’il existe un point  $x_0$  de  $X$  tel que la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^\Gamma$  de l’orbite  $\Gamma \cdot x_0$  vérifie la propriété de  $C_0$ –doublement faible pour au moins une échelle  $R_0 > D$  autour du même point  $x_0$ , alors*

- (i) *la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^\Gamma$  vérifie la propriété de  $C_0^{3(1+\lceil \frac{2R_1}{R_0} \rceil)}$ –doublement faible autour du même point  $x_0$  pour toute échelle  $R_1 \geq R_0$*
- (ii) *l’entropie de  $(X, d)$  est majorée par  $\frac{3}{R_0} \ln C_0$ .*

En d’autres termes l’ensemble des  $(X, d, \Gamma)$  tels que la mesure  $\mu_{x_0}^\Gamma$  vérifie la propriété de  $C_0$ –doublement faible à l’échelle  $R_0 \geq D$  est inclus dans l’ensemble des  $(X, d, \Gamma)$  dont l’entropie

pie est majorée par  $\frac{3}{R_0} \ln C_0$ . Cette inclusion est stricte car, pour tout réseau  $\Gamma$  agissant sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^n$  est d'entropie nulle, alors que l'hypothèse de  $C_0$ -doublement à l'échelle  $R_0$  n'est plus vérifiée quand la dimension  $n$  est suffisamment grande.

*Preuve du Lemme 3.10 :* Rappelons que  $\check{\Sigma}_r(x_0)$  désigne l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x_0, \gamma x_0) < r$ , notons  $R$  n'importe quel réel supérieur ou égal à  $R_0$ .

De l'égalité (1) (appliquée dans le cas où les deux mesures concernées  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont égales à  $\mu_{x_0}^\Gamma$ ), nous déduisons :

$$\int_{B_X(x_0, R)} \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x, 4R_0)) d\mu_{x_0}^\Gamma(x) = \int_X \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x, 4R_0) \cap B_X(x_0, R)) d\mu_{x_0}^\Gamma(x),$$

ce qui implique, par un calcul direct utilisant la définition de  $\mu_{x_0}^\Gamma$  et le fait que  $x \mapsto \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x, 4R_0))$  est constant sur le support de  $\mu_{x_0}^\Gamma$  :

$$\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R)) \cdot \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 4R_0)) \geq \sum_{\gamma \in \check{\Sigma}_{R+R_0}(x_0)} \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(\gamma x_0, 4R_0) \cap B_X(x_0, R)) \quad (4)$$

- Si  $d(x_0, \gamma x_0) \leq |R - 4R_0|$ ,  $B_X(\gamma x_0, 4R_0) \cap B_X(x_0, R)$  contient soit la boule  $B_X(x_0, R)$ , soit la boule  $B_X(\gamma x_0, 4R_0)$  : dans les deux cas, on a  $\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(\gamma x_0, 4R_0) \cap B_X(x_0, R)) \geq \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R))$
- Si  $|R - 4R_0| < d(x_0, \gamma x_0) \leq R + R_0$ , comme nous sommes sur un espace de longueur, pour tout  $\varepsilon$  tel que  $0 < \varepsilon < R_0 - D$ , il existe un point  $y(\gamma) \in X$  (choisi par exemple sur un chemin presque minimisant joignant  $x_0$  à  $\gamma x_0$ , dont la longueur est inférieure à  $d(x_0, \gamma x_0) + \varepsilon$ ) tel que

$$d(x_0, y(\gamma)) = \frac{1}{2} [d(x_0, \gamma x_0) + R - 4R_0] \quad \text{et} \quad d(\gamma x_0, y(\gamma)) < \frac{1}{2} [d(x_0, \gamma x_0) - R + 4R_0 + 2\varepsilon].$$

On vérifie aisément que

$$B_X\left(y(\gamma), \frac{3R_0}{2} - \varepsilon\right) \subset B_X\left(y(\gamma), \frac{1}{2} [R + 4R_0 - d(x_0, \gamma x_0)] - \varepsilon\right) \subset B_X(\gamma x_0, 4R_0) \cap B_X(x_0, R).$$

Comme il existe un  $g \in \Gamma$  tel que  $d(g x_0, y(\gamma)) \leq D < R_0 - \varepsilon$ , l'intersection  $B_X(\gamma x_0, 4R_0) \cap B_X(x_0, R)$  contient la boule  $B_X(g x_0, \frac{R_0}{2})$ .

Pour tout  $\gamma \in \check{\Sigma}_{R+R_0}(x_0)$ , on a donc  $\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(\gamma x_0, 4R_0) \cap B_X(x_0, R)) \geq \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{R_0}{2}))$  ; en reportant cette inégalité dans (4), nous obtenons :

$$\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R)) \cdot \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 4R_0)) \geq \sum_{\gamma \in \check{\Sigma}_{R+R_0}(x_0)} \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{R_0}{2})) = \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R+R_0)) \cdot \mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{R_0}{2})),$$

et donc  $\frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R+R_0))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R))} \leq \frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 4R_0))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{1}{2} R_0))} \leq C_0^3$ , et par conséquent que, pour tout

$k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R+kR_0))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R))} \leq C_0^{3k}$ , ce qui implique d'une part que  $\frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 2R))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R))} \leq$

$C_0^{3(1+\lceil \frac{R}{R_0} \rceil)}$  et achève la preuve de (i), et d'autre part que l'entropie est majorée par  $\frac{3}{R_0} \ln(C_0)$ ,

achevant la preuve de (ii) (rappelons que, l'entropie ne dépendant pas, dans le cas présent, de la mesure  $\Gamma$ -invariante choisie, il nous est loisible de la calculer pour la mesure de comptage).  $\square$

Le lemme qui suit est la technique de base pour comparer les hypothèses de doublement de la mesure et de "packing" :

**Lemme 3.11.** *Pour tout espace métrique  $(X, d)$ , pour toute action (propre, par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$ , pour tout  $x \in X$ , pour tout entier  $k \geq 5$  et tout réel  $r > 0$ , notons*

$N_k^\Gamma(r)$  le nombre maximal de boules disjointes de rayon  $\frac{r}{2}$  (dont les centres sont astreints à être des points de l'orbite  $\Gamma \cdot x$ ) qui peuvent être incluses dans la boule  $B_X(x, k\frac{r}{2})$ . Alors, pour toute mesure  $\mu$   $\Gamma$ -invariante sur  $X$ , en comparaison avec la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma \cdot x$ , nous obtenons :

$$\frac{\mu_x^\Gamma(\overline{B}_X(x, (k-1)\frac{r}{2}))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, r))} \leq N_k^\Gamma(r) \leq \frac{\mu(B_X(x, k\frac{r}{2}))}{\mu(B_X(x, \frac{r}{2}))}.$$

*Preuve* : Pour simplifier les écritures, posons  $N := N_k^\Gamma(r)$  ; notons  $\gamma_1 x, \dots, \gamma_N x$  les centres d'un remplissage maximal de la boule  $B_X(x, k\frac{r}{2})$  par des boules disjointes de rayon  $\frac{r}{2}$  dont les centres sont astreints à être des points de  $\Gamma \cdot x$ . La  $\Gamma$ -invariance de la mesure  $\mu$ , assure que  $\mu(B_X(\gamma_i x, \frac{r}{2})) = \mu(B_X(x, \frac{r}{2}))$  pour tout  $i$  et, par conséquent, que  $N \cdot \mu(B_X(x, \frac{r}{2})) \leq \mu(B_X(x, k\frac{r}{2}))$ , ce qui démontre l'inégalité de droite du Lemme 3.11.

S'il existe un  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma x \in \overline{B}_X(x, (k-1)\frac{r}{2}) \cap \Gamma \cdot x$  et tel que  $\gamma x$  n'appartienne à aucun des  $B_X(\gamma_i x, r)$ , les boules de rayon  $\frac{r}{2}$ , centrées en  $\gamma_1 x, \dots, \gamma_N(x), \gamma x$  sont disjointes et incluses dans la boule  $B_X(x, k\frac{r}{2})$ , en contradiction avec le fait que le remplissage par les boules de rayon  $\frac{r}{2}$ , centrées en  $\gamma_1 x, \dots, \gamma_N x$  est maximal. Il s'ensuit que

$$\overline{B}_X(x, (k-1)\frac{r}{2}) \cap \Gamma \cdot x \subset \cup_{i=1}^N (B_X(\gamma_i x, r) \cap \Gamma \cdot x),$$

et, par conséquent, que  $\#(\overline{B}_X(x, (k-1)\frac{r}{2}) \cap \Gamma \cdot x) \leq N \#(B_X(x, r) \cap \Gamma \cdot x)$ . Ceci (et l'équivalence entre les deux définitions de la mesure de comptage précisée avant la Définition 3.8) donne la propriété suivante de doublement, qui termine la preuve :

$$\frac{\mu_x^\Gamma(\overline{B}_X(x, (k-1)\frac{r}{2}))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, r))} = \frac{\#(\overline{B}_X(x, (k-1)\frac{r}{2}) \cap \Gamma \cdot x)}{\#(B_X(x, r) \cap \Gamma \cdot x)} \leq N. \quad \square$$

**Lemme 3.12.** (Doublement faible de la mesure de comptage vs. "packing").— *Pour tout espace métrique  $(X, d)$  qui vérifie la condition de packing de borne  $N_0$  à l'échelle  $r_0$ , pour toute action (propre, par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$ , pour tout  $x \in X$ , la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma \cdot x$  vérifie la condition de  $N_0$ -doublement faible à l'échelle  $2r_0$  autour du point  $x$ .*

*Preuve* : Rappelons que  $N_{18}^\Gamma(r_0)$  désigne le nombre maximal de boules disjointes de rayon  $\frac{r_0}{2}$  (dont les centres sont astreints à être des points de l'orbite  $\Gamma \cdot x$ ) qui peuvent être incluses dans la boule  $B_X(x, 9r_0)$  ; en vertu de la Définition 3.8 du "packing", on a  $N_{18}^\Gamma(r_0) \leq N_0$ . La première inégalité du Lemme 3.11 (où on pose  $k = 18$ ) permet d'en déduire que, pour tout  $r \in [r_0, 4r_0]$  :

$$\frac{\mu_x^\Gamma[B_X(x, 2r)]}{\mu_x^\Gamma[B_X(x, r)]} \leq \frac{\mu_x^\Gamma[B_X(x, \frac{17}{2}r_0)]}{\mu_x^\Gamma[B_X(x, r_0)]} \leq N_{18}^\Gamma(r_0) \leq N_0. \quad \square$$

En d'autres termes l'ensemble des  $(X, d, \Gamma)$  qui vérifient la condition de packing de borne  $N_0$  à l'échelle  $r_0$  est inclus dans l'ensemble des  $(X, d, \Gamma)$  tels que la mesure  $\mu_x^\Gamma$  associée à tout point  $x$  vérifie la condition de  $N_0$ -doublement faible à l'échelle  $2r_0$  autour de  $x$ , lui-même inclus dans l'ensemble des  $(X, d, \Gamma)$  tels que la mesure  $\mu_x^\Gamma$  associée à au moins un point  $x$  vérifie la condition de  $N_0$ -doublement faible à l'échelle  $2r_0$  autour de  $x$ . Cette inclusion est stricte, comme le prouvent les exemples suivants :

**Exemples 3.13.** L'échelle  $r_0$  étant fixée (et quelconque dans les exemples (1) et (3)), chacun des exemples qui suivent construit une suite de variétés riemanniennes  $(X_k, g_k)$  et d'actions isométriques propres d'un groupe  $\Gamma_k$  telles que le nombre maximal  $N_k(r_0)$  de boules disjointes de rayon  $r_0/2$  qu'on peut inclure dans une boule de rayon  $9r_0$  de  $(X_k, g_k)$  tende vers l'infini avec  $k$  (donc, pour toute donnée de  $N_0$  et pour tout  $k$  suffisamment grand,  $(X_k, g_k)$  ne vérifie pas la condition de packing de borne  $N_0$  à l'échelle  $r_0$ ), alors que la mesure de comptage  $\mu_{x_k}^{\Gamma_k}$  de l'action de  $\Gamma_k$  sur  $X_k$  vérifie la condition de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $2r_0$  (pour des valeurs de  $C_0$  et de  $r_0$  fixées indépendamment de  $k$ ) :



- (1) Pour tout réseau  $\Gamma_k := \frac{1}{k} \cdot \mathbb{Z} \times k \cdot \mathbb{Z}^{k-1}$  agissant sur  $(\mathbb{R}^k, \text{can.})$ , pour tout choix d'échelle  $r_0 > 0$ , pour tout point  $x \in \mathbb{R}^k$ , la mesure  $\mu_x^{\Gamma_k}$  vérifie la condition de 2-doublément faible à l'échelle  $2r_0$  autour du point  $x$  dès que  $k > 8r_0$ , alors que le nombre maximal  $N_k(r_0)$  de boules disjointes de rayon  $r_0/2$  qu'on peut inclure dans une boule de rayon  $9r_0$  de  $(\mathbb{R}^k, \text{can.})$  tend vers l'infini avec la dimension  $k$ .
- (2) Cet exemple se généralise au cas où  $(X, g)$  est le revêtement universel riemannien d'une variété riemannienne  $(\bar{X}, \bar{g})$  compacte de courbure comprise entre  $-1$  et  $-K^2$  et où  $\Gamma$  est son groupe fondamental. Une variante du Lemme de Margulis classique démontre alors l'existence d'un  $\varepsilon_0 > 0$  universel tel que, dans chaque partie mince (i. e. dans chaque composante connexe de l'ensemble des points de  $\bar{X}$  où le rayon d'injectivité est inférieur à  $\varepsilon_0$ ), il existe une géodésique périodique  $\bar{c}$  le longeur inférieure à  $2\varepsilon_0$ , dont la classe d'homotopie engendre  $\tilde{\Gamma}_{2\varepsilon_0}(x)$ , où  $x$  est le relevé de n'importe quel point  $\bar{x}$  de  $\bar{c}$ ; comme  $\tilde{\Gamma}_{2\varepsilon_0}(x)$  agit par translations sur le relevé  $c$  de  $\bar{c}$  passant par  $x$  et comme  $d(x, \gamma x) \geq 2\varepsilon_0$  pour tout  $\gamma \in \Gamma \setminus \tilde{\Gamma}_{2\varepsilon_0}(x)$ , la mesure  $\mu_x^\Gamma$  vérifie la condition de 2-doublément faible à l'échelle  $2r_0$  pour tout  $r_0 \leq \varepsilon_0/4$ . Au contraire, pour toute suite pointée  $(X_k, g_k, x_k)$  de telles variétés (i. e. on fixe un point  $x_k$  dans chaque  $X_k$ )  $N_k(r_0)$  tend vers l'infini lorsque la dimension des  $X_k$  tend vers l'infini ou lorsque la courbure de  $X_k$  tend vers  $-\infty$  sur les boules  $B_{X_k}(x_k, 2r_0)$ .
- (3) Dans cet exemple, la suite  $(X_k, g_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$  sera construite de telle manière que la dimension des  $X_k$  soit fixée (égale à  $n$ ), que l'échelle  $r_0$  soit quelconque et que la topologie des  $X_k$  devienne de plus en plus compliquée (ce qui se déduit, par exemple, du fait que leur caractéristique d'Euler tende vers l'infini) quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Partons en effet d'une variété riemannienne compacte quelconque  $(\bar{X}, \bar{g})$ , notons  $(X, g)$  son revêtement universel riemannien et  $\Gamma$  son groupe fondamental (agissant sur  $(X, g)$  par transformations de revêtement isométriques). Pour tout  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit, considérons un  $2\varepsilon$ -réseau  $\bar{R}_\varepsilon = \{\bar{x}_i\}_{i=1}^{\bar{N}(\varepsilon)}$  de  $(\bar{X}, \bar{g})$ , ayant un nombre minimal  $\bar{N}(\varepsilon)$  de points; les boules  $B_{\bar{X}}(\bar{x}_i, \varepsilon)$  étant alors disjointes on modifie légèrement la métrique  $\bar{g}$  sur chaque boule  $B_{\bar{X}}(\bar{x}_i, 2\varepsilon^2)$  de telle sorte que la nouvelle métrique (que nous noterons encore  $\bar{g}$ ) soit plate sur  $B_{\bar{X}}(\bar{x}_i, \varepsilon^2)$ . Le réseau  $\bar{R}_\varepsilon$  se relève en un  $2\varepsilon$ -réseau  $R_\varepsilon = \{x_i\}_{i \in I}$ , globalement  $\Gamma$ -invariant de  $(X, g)$ .

Considérons par ailleurs n'importe quelle variété riemannienne compacte  $(Y, h)$  fixée, dont le diamètre est égal à  $2r_0$  et deux points  $y, y'$  tels que  $d_Y(y, y') = 2r_0$  et rendons la métrique plate au voisinage de  $y$  comme ci-dessus, de sorte que la boule  $B_Y(y, \varepsilon^3)$  est alors isométrique à chacune des boules  $B_X(x_i, \varepsilon^3)$ , ce qui assure que les bords des boules  $B_X(x_i, \varepsilon^3)$  et  $B_Y(y, \varepsilon^3)$  sont isométriques à la sphère euclidienne  $\mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon^3)$  de rayon  $\varepsilon^3$ . Notons  $(Y', h')$  la variété riemannienne à bord obtenue<sup>5</sup> en recollant un cylindre  $C_\varepsilon := [0, \varepsilon^2] \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon^3)$  à  $Y \setminus B_Y(y, \varepsilon^3)$  (en identifiant le bord  $\partial B_Y(y, \varepsilon^3)$  de  $Y \setminus B_Y(y, \varepsilon^3)$  avec le bord  $\{\varepsilon^2\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon^3)$  du cylindre). Considérons maintenant une famille d'exemplaires  $(Y'_i)_{i \in I}$  de  $(Y', h')$  et recollons chaque  $Y'_i$  à  $X \setminus (\bigcup_{i \in I} B_X(x_i, \varepsilon^3))$  en identifiant le bord  $\partial Y'_i = \{0\} \times \mathbb{S}^{n-1}(\varepsilon^3)$  de  $Y'_i$  avec la composante connexe  $\partial B_X(x_i, \varepsilon^3)$  du bord de  $X \setminus (\bigcup_{i \in I} B_X(x_i, \varepsilon^3))$ . La variété riemannienne ainsi construite en posant  $\varepsilon = \varepsilon_k \rightarrow 0$  sera appelée  $(X_k, g_k)$ .

Considérons l'application  $f_k : X_k \rightarrow X$ , construite en envoyant chaque  $Y'_i$  sur la boule  $B_X(x_i, \varepsilon^3)$  (en contractant la partie  $Y$  de  $Y'_i$  sur  $x_i$  et en envoyant les génératrices de la partie cylindre  $C_\varepsilon$  de  $Y'_i$  sur les rayons de la boule) et en décidant que  $f_k$  est l'identité en restriction à  $X \setminus (\bigcup_{i \in I} B_X(x_i, \varepsilon^3))$ ; l'application  $f_k : (X_k, g_k) \rightarrow (X, g)$  est alors contractante, de plus il existe une suite  $\eta_k$  tendant vers zéro telle qu'on ait

$$\forall x, z \in X \setminus (\bigcup_{i \in I} B_X(x_i, \varepsilon^3)) \quad d_X(f_k(x), f_k(z)) = d_X(x, z) \geq (1 + \eta_k)^{-1} d_{X_k}(x, z) - \eta_k. \quad (5)$$

Fixons un point  $x \in X \setminus (\bigcup_{i \in I} B_X(x_i, \varepsilon^3))$  et notons  $J$  l'ensemble (fini) des  $i \in I$  tels que  $x_i \in B_X(x, 6r_0)$ , dont le nombre d'éléments (noté  $\tilde{N}_{\varepsilon_k}(r_0)$ ) tend vers l'infini quand  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ , donc quand  $k \rightarrow +\infty$ , puisque le nombre d'éléments d'un  $2\varepsilon$ -réseau dans une boule fixée tend vers l'infini quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Pour tout  $i \in J$ , on a  $Y'_i \subset B_{X_k}(x, 6r_0)$ : en effet, pour tout point  $z \in Y'_i$ , il existe un point  $z' \in \partial B_X(x_i, \varepsilon^3)$  tel que  $d_{X_k}(z, z') \leq 2r_0 + \varepsilon_k^2$  et l'inégalité (5) implique que l'on a aussi

$$d_{X_k}(x, z') \leq (1 + \eta_k)(d_X(x, z') + \eta_k) \leq (1 + \eta_k)(d_X(x, x_i) + \varepsilon_k^3 + \eta_k) \leq (1 + \eta_k)(6r_0 + \varepsilon_k^3 + \eta_k) < \frac{13}{2} r_0.$$

En réunissant les deux dernières inégalités, on en déduit que  $d_{X_k}(x, z) < \frac{13}{2} r_0 + 2r_0 + \varepsilon_k^2 < 9r_0$ , donc que  $Y'_i \subset B_{X_k}(x, 9r_0)$ . Comme chaque  $Y'_i$  contient une boule de rayon  $r_0$ , on en déduit que

5. La métrique riemannienne  $h'$  ainsi construite est  $C_1$  par morceaux, mais les lecteurs qui préfèrent travailler avec des métriques lisses peuvent remplacer  $h'$  par une de ses approximations  $C^\infty$ .

le nombre maximal  $N_k(r_0)$  de boules disjointes de rayon  $r_0$  qu'on peut inclure dans  $B_{X_k}(x, 9r_0)$  est au moins égal à  $\tilde{N}_{\varepsilon_k}(r_0)$ , donc tend vers l'infini quand  $k \rightarrow +\infty$ .

Par ailleurs, la construction ci-dessus étant  $\Gamma$ -invariante,  $\Gamma$  agit également par isométries sur  $(X_k, g_k)$  et on a  $f_k(\gamma x) = \gamma f_k(x)$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $x \in X_k$ ; l'application  $f_k$  étant contractante, on en déduit que  $\{\gamma : \gamma x \in B_{X_k}(x, r)\} \subset \{\gamma : \gamma f_k(x) \in B_X(f_k(x), r)\}$ . La variété  $(X, g)$  de départ étant fixée, il existe un  $C_0 > 1$  tel que la mesure de comptage  $\mu_{f_k(x)}^\Gamma$  de l'orbite de  $f_k(x)$  sous l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  vérifie  $\mu_{f_k(x)}^\Gamma(B_X(f_k(x), 8r_0)) \leq C_0$ ; l'inclusion précédente prouve que la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite de  $x$  sous l'action de  $\Gamma$  sur  $X_k$  vérifie  $\mu_x^\Gamma(B_{X_k}(x, 8r_0)) \leq C_0$ , ce qui donne, pour tout  $r \in [r_0, 4r_0]$

$$\frac{\mu_x^\Gamma(B_{X_k}(x, 2r))}{\mu_x^\Gamma(B_{X_k}(x, r))} \leq \mu_x^\Gamma(B_{X_k}(x, 2r)) \leq C_0.$$

**Lemme 3.14.** (Packing vs. doublement faible d'une mesure autour de chaque point) *Pour tout espace métrique  $(X, d)$ , s'il existe une mesure  $\mu$  qui vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [\frac{r_0}{2}, 9r_0]$  centrées en tous les points<sup>6</sup>  $x$  de  $X$ , alors  $(X, d)$  vérifie la condition de packing de borne  $C_0^6$  à l'échelle  $r_0$ .*

*Preuve :* Fixons un point quelconque  $x \in X$  et considérons un remplissage de  $B_X(x, 9r_0)$  par  $N$  boules disjointes  $B_X(x_i, \frac{r_0}{2})$ . Parmi ces  $N$  boules, notons  $B_X(x_{i_0}, \frac{r_0}{2})$  celle qui est de mesure minimale, on a alors

$$N \cdot \mu\left(B_X\left(x_{i_0}, \frac{r_0}{2}\right)\right) \leq \mu(B_X(x, 9r_0)) \leq \mu(B_X(x_{i_0}, 18r_0));$$

$$\text{On a donc } N \leq \frac{\mu(B_X(x_{i_0}, 18r_0))}{\mu\left(B_X\left(x_{i_0}, \frac{r_0}{2}\right)\right)} \leq C_0^6 \quad \square$$

Les Lemmes 3.12 et 3.14 assurent qu'une hypothèse de doublement faible de la mesure de comptage de l'orbite d'un point donné est une hypothèse plus faible qu'une condition de doublement faible de toute autre mesure autour du même point; cependant il est intéressant d'obtenir une démonstration directe de ce fait qui permette d'optimiser quantitativement ce résultat, c'est le but du

**Lemme 3.15.** (Mesure de comptage vs. mesure quelconque).— *Considérons un espace métrique propre quelconque  $(X, d)$  et une action propre, par isométries d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$ ; fixons un point  $x$  quelconque de  $X$ . S'il existe une mesure  $\Gamma$ -invariante  $\mu$  qui satisfait à l'hypothèse de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules centrées en  $x$ , de rayon  $r \in [\frac{1}{2}r_0, r_1]$  (où  $r_1 \geq \frac{5}{4}r_0$ ), alors la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma \cdot x$  vérifie  $\frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, 2r))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, r))} \leq C_0^3$  pour tout  $r \in [r_0, \frac{4}{5}r_1]$ .*

*Preuve :* Le Lemme 3.11 (où on pose  $k = 5$ ) assure que, pour tout  $r \in [r_0, \frac{4}{5}r_1]$ , on a

$$\frac{\mu_x^\Gamma[B_X(x, 2r)]}{\mu_x^\Gamma[B_X(x, r)]} \leq N_5^\Gamma(r) \leq \frac{\mu(B_X(x, \frac{5}{2}r))}{\mu(B_X(x, \frac{r}{2}))} \leq \frac{\mu(B_X(x, r))}{\mu(B_X(x, \frac{r}{2}))} \cdot \frac{\mu(B_X(x, \frac{5}{4}r))}{\mu(B_X(x, r))} \cdot \frac{\mu(B_X(x, \frac{5}{2}r))}{\mu(B_X(x, \frac{5}{4}r))} \leq C_0^3,$$

car  $\frac{r}{2}$ ,  $r$  et  $\frac{5}{4}r$  appartiennent à l'intervalle  $[\frac{1}{2}r_0, r_1]$ .  $\square$

Les constantes  $C_0 > 1$  et  $r_0 > 0$  étant fixées, il est évident (d'après les Définitions 3.7 (ii) et (iii)) que, si un espace métrique mesuré vérifie l'hypothèse de  $C_0$ -doublement fort à l'échelle  $r_0$  autour d'un point  $x \in X$ , alors il vérifie la condition de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  autour du même point  $x \in X$ . Il est cependant intéressant de comprendre plus précisément en quoi la première hypothèse est "beaucoup plus forte" que la seconde, c'est le but du

6. Le fait que la mesure doive (par hypothèse) vérifier la condition de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [\frac{r_0}{2}, 9r_0]$ , quel que soit leur centre, impose à la mesure d'être "suffisamment diffuse", c'est à dire que, pour tout  $x \in X$ , la boule  $B_X(x, \frac{r_0}{2})$  soit de mesure non nulle. Ceci exclut en particulier la mesure de comptage d'une orbite donnée sous l'action propre, par isométries d'un groupe  $\Gamma$  lorsque le diamètre de  $\Gamma \setminus X$  est supérieur à  $r_0$ .

**Lemme 3.16.** (Doublement faible vs. doublement fort à la même échelle)

Considérons n'importe quelle variété riemannienne complète  $(X, g)$ , de dimension  $n \geq 2$ , compacte ou non (lorsqu'elle est non compacte, nous supposons que sa courbure de Ricci ne peut pas tendre vers  $-\infty$  à l'infini); considérons une suite de variétés compactes  $(Y_k, h_k)$ , de même dimension, dont le diamètre et le volume tendent vers zéro. On appelle  $X_k$  la variété obtenue en faisant la somme connexe de  $X$  et de  $Y_k$ . Il existe, sur  $X_k$ , une métrique  $g_k$  et deux valeurs  $r_0 > 0$  et  $C_0 \geq 2^n + 1$  (indépendantes de  $k$ ) telles que, pour  $k$  suffisamment grand,  $(X_k, g_k)$ , muni de sa mesure riemannienne, vérifie la condition de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  autour de tout point  $x \in X_k$ .

En revanche, pour toute donnée des valeurs  $C_0 > 1$  et  $r_0 > 0$ , il existe un choix de la suite des variétés  $(Y_k, h_k)$  telle que toutes les sommes connexes  $(X_k, g_k)$  vérifient la condition de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  et qu'aucune ne vérifie la condition de  $C_0$ -doublement fort à la même échelle.

**Corollaire 3.17.** Pour chaque donnée de valeurs  $C_0 \geq 2^n + 1$  et  $r_0 > 0$ , l'hypothèse de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  (même si vérifiée autour de chacun des points des variétés considérées) n'impose aucune restriction à la topologie ou à la géométrie des boules de rayon inférieur à  $\frac{r_0}{20}$ , donc elle n'impose aucune restriction à la topologie ou à la géométrie locale.

*Preuve du Lemme 3.16 :* La variété  $(X, g)$  étant fixée et sa courbure de Ricci minorée à l'infini, il existe des constantes  $r_0$  et  $C'_0$  (indépendantes de  $k$ ) telles que la mesure riemannienne de  $(X, g)$  vérifie la condition de  $C'_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in ]0, 2r_0]$  centrées en tout point  $x$ .

Précisons la construction de la suite  $(X_k, g_k) := X \# Y_k$  : excisons les deux boules  $B_k := B_X(x_0, r_k)$  et  $B'_k := B_{Y_k}(y_k, r_k)$  (de rayons  $r_k < \frac{1}{100} \text{inj}(Y_k, h_k)$ ) de  $X$  et de  $Y_k$  (respectivement) et recollons  $X \setminus B_k$  et  $Y_k \setminus B'_k$  aux deux extrémités d'un cylindre  $C_k := [0, r_k^{3/4}] \times \mathbb{S}^{n-1}(r_k)$  de rayon  $r_k$  en opérant ces recollements comme dans l'exemple 3.13 (3). On construit, de la même manière que dans l'exemple 3.13 (3), une application contractante  $f_k : X_k \rightarrow X$  telle qu'il existe une suite  $(\eta_k)_{k \in \mathbb{N}}$  (tendant vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ ) telle que  $d_X(f_k(x), f_k(y)) \geq d_{X_k}(x, y) - \eta_k$ . Comme  $f_k$  est contractante et surjective, on a

$$\text{Vol}_{g_k}(B_{X_k}(x, r)) \geq \text{Vol}_g(f_k(B_{X_k}(x, r))) \geq \text{Vol}_g(B_X(f_k(x), r - \eta_k)) . \quad (6)$$

D'autre part, par construction de  $f_k$ , il existe une suite  $(V_k)_{k \in \mathbb{N}}$ , tendant vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$ , telle que, pour tout domaine  $A \subset X$ ,

$$\text{Vol}_g(f_k(A)) \geq \text{Vol}_{g_k}(A \cap (X \setminus B_k)) \geq \text{Vol}_{g_k}(A) - \text{Vol}_{g_k}(Y_k \setminus B'_k) - \text{Vol}_{g_k}(C_k) \geq \text{Vol}_{g_k}(A) - V_k ;$$

de ceci et du fait que  $f_k$  est contractante (ce qui implique que  $f_k(B_{X_k}(x, 2r)) \subset B_X(f_k(x), 2r)$ ) nous déduisons que

$$\text{Vol}_{g_k}(B_{X_k}(x, 2r)) \leq \text{Vol}_g(f_k(B_{X_k}(x, 2r))) + V_k \leq \text{Vol}_g(B_X(f_k(x), 2r)) + V_k .$$

Cette dernière inégalité et (6) impliquent qu'il existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $k \geq N_0$ , pour tout  $x \in X$  et tout  $r \in [\frac{r_0}{2}, 2r_0]$ , on ait

$$\frac{\text{Vol}_{g_k} B_{X_k}(x, 2r)}{\text{Vol}_{g_k} B_{X_k}(x, r)} \leq \frac{\text{Vol}_g(B_X(f_k(x), 2r)) + V_k}{\text{Vol}_g(B_X(f_k(x), r - \eta_k))} \leq \frac{\text{Vol}_g(B_X(f_k(x), 2r))}{\text{Vol}_g(B_X(f_k(x), r/2))} + 1 \leq (C'_0)^2 + 1 ,$$

car  $r \in [\frac{r_0}{2}, 2r_0]$  implique que  $\frac{r}{2}$  et  $r$  appartiennent à l'intervalle  $]0, 2r_0]$ . En posant  $C_0 := (C'_0)^2 + 1$ , nous en déduisons que, pour tout  $k \geq N_0$ , la mesure riemannienne de  $(X_k, g_k)$  vérifie la condition de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  autour de tout point  $x \in X_k$ ; ceci démontre la première partie du Lemme.

Refaisons maintenant cette construction dans le cas où les variétés riemanniennes  $(Y_k, h_k)$  sont de la forme  $(Y_k, \varepsilon_k^2 \cdot h'_k)$  où  $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite tendant vers zéro quand  $k \rightarrow +\infty$  et où chacune des  $(Y_k, h'_k)$  est une variété riemannienne de courbure sectionnelle inférieure ou égale à

$-k^2$ , de diamètre inférieur ou égal à  $(\varepsilon_k)^{-1/2}$  et de rayon d'injectivité supérieur ou égal à une constante positive  $4r_0 > 0$  (indépendante de  $k$ ). Fixons un point  $x_k \in (Y_k, h'_k)$  situé à une  $h'_k$ -distance de  $y_k$  au moins égale à  $4r_0$ . Pour tout  $r \leq 2r_0$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}_{g_k} B_{X_k}(x_k, 2\varepsilon_k r)}{\text{Vol}_{g_k} B_{X_k}(x_k, \varepsilon_k r)} &= \frac{\text{Vol}_{h_k} B_{X_k}(x_k, 2\varepsilon_k r)}{\text{Vol}_{h_k} B_{X_k}(x_k, \varepsilon_k r)} = \frac{\text{Vol}_{h'_k} B_{(Y_k, h'_k)}(x_k, 2r)}{\text{Vol}_{h'_k} B_{(Y_k, h'_k)}(x_k, r)} \\ &\geq \frac{\int_0^{2r} \sinh^{n-1}(kt) dt}{\int_0^r \sinh^{n-1}(kt) dt} \geq e^{(n-1)kr} . \end{aligned}$$

L'amplitude de doublement (pour des boules de rayon proche de zéro) tend donc vers  $+\infty$  avec  $k$ ; donc, pour toute donnée des valeurs  $C_0 > 1$  et  $r_0 > 0$ , et pour tout  $k$  suffisamment grand, aucune des variétés  $(X_k, g_k)$  ne vérifie la condition de  $C_0$ -doublement fort à l'échelle  $r_0$  autour du point  $x_k$ .  $\square$

*Preuve du Corollaire 3.17 :* Partons d'un  $n$ -Tore plat  $(X, g)$  et reprenons la construction par sommes connexes de la suite de variétés riemanniennes  $(X_k, g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de la preuve du Lemme 3.16; on obtient  $(X_k, g_k)$  en recollant à  $(X, g)$  n'importe quelle variété compacte  $(Y_k, h_k)$  de petit diamètre et de petit volume : comme il n'y a aucune restriction sur la topologie de  $Y_k$  et (à homothéties-près) sur la géométrie de  $h_k$  et comme le recollement se fait à l'intérieur d'une boule de rayon beaucoup plus petit que  $\frac{r_0}{20}$ , il n'y a aucune restriction sur la topologie ou la géométrie des boules de  $X_k$ , de rayon inférieur à  $\frac{r_0}{20}$ , centrées en un point  $x$  de la partie  $Y_k \setminus B'_k$  de la somme connexe. Pourtant la preuve du Lemme 3.16 démontre que, puisque dans ce cas l'amplitude de doublement de  $(X, g)$  vaut  $2^n$ , pour n'importe quelle valeurs  $C_0 \geq 2^n + 1$  et  $r_0 > 0$ , il existe un  $N_0 \in \mathbb{N}$  tel que toutes les variétés  $(X_k, g_k)$  correspondant à des valeurs de  $k \geq N_0$  vérifient l'hypothèse de  $C_0$ -doublement faible à l'échelle  $r_0$  autour de tout point.  $\square$

**Lemme 3.18.** (Doublement fort vs. courbure de Ricci minorée)

*Pour toutes les données des valeurs  $K \geq 0$  et  $r_0 > 0$ , posons  $C_0 = 2^n (\cosh(Kr_0))^{n-1}$ ; alors toute variété riemannienne complète  $(X, g)$ , dont la courbure de Ricci satisfait l'hypothèse  $\text{Ric}_g \geq -(n-1)K^2 \cdot g$ , vérifie la condition de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in ]0, r_0]$  (quel que soit le centre de ces boules).*

*Preuve :* Le Théorème de comparaison de Bishop-Gromov implique que, pour tout  $x \in X$  et tout  $r \leq r_0$ ,

$$\frac{\text{Vol}_g B_X(x, 2r)}{\text{Vol}_g B_X(x, r)} \leq \frac{\int_0^{2r} \left(\frac{1}{K} \sinh(Kt)\right)^{n-1} dt}{\int_0^r \left(\frac{1}{K} \sinh(Kt)\right)^{n-1} dt} = 2 \cdot \frac{\int_0^{Kr} (\sinh(2t))^{n-1} dt}{\int_0^{Kr} (\sinh(t))^{n-1} dt} \leq 2^n (\cosh Kr)^{n-1} . \quad \square$$

Il existe, dans la littérature, de nombreux exemples de suites  $(X, g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de variétés riemanniennes qui vérifient toutes une condition de  $C_0$ -doublement fort à l'échelle  $r_0$  (où  $C_0$  et  $r_0$  sont des constantes universelles indépendantes de  $k$ ) et dont cependant l'infimum de la courbure de Ricci tend vers  $-\infty$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Un exemple peut être obtenu en recollant deux exemplaires de  $\mathbb{R}^n \setminus B^n$  sur leur bord  $\mathbb{S}^{n-1}$  et en construisant sur l'espace ainsi recollé une suite de métriques riemanniennes régulières qui tend vers la métrique singulière obtenue en munissant chacun des exemplaires de  $\mathbb{R}^n \setminus B^n$  de sa métrique euclidienne.

### 3.4 Propriété de doublement induite sur les sous-groupes

Une propriété importante de la mesure de comptage, que nous exploiterons dans la suite, est que la condition de doublement passe aux sous-groupes, comme le précise la

**Proposition 3.19.** *Pour toute action propre, par isométries, d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(X, d)$ , pour tout sous-groupe  $\Gamma'$  de  $\Gamma$  et pour tout point  $x_0 \in X$ , on a :*

(i) Si la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^\Gamma$  vérifie la condition de  $C$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [\frac{1}{2}r_0, \frac{5}{4}r_1]$  centrées en  $x_0$  (où  $0 < r_0 \leq r_1$ ) la mesure  $\mu_{x_0}^{\Gamma'}$  vérifie la condition de  $C^3$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [r_0, r_1]$  centrées en  $x_0$ . Plus exactement, on a

$$\forall r \in [r_0, r_1] \quad \frac{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(\overline{B}_X(x_0, 2r))}{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(B_X(x_0, r))} \leq C^3 .$$

(ii) Si la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^\Gamma$  vérifie  $\frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 2r))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, r))} \leq C e^{\alpha r}$  pour tous les  $r \in [\frac{1}{2}r_0, +\infty[$ , alors la mesure  $\mu_{x_0}^{\Gamma'}$  vérifie

$$\forall r \in [r_0, +\infty[ \quad \frac{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(\overline{B}_X(x_0, 2r))}{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(B_X(x_0, r))} \leq C^3 e^{\frac{19}{8}\alpha r} .$$

*Preuve :* Pour tout  $r > 0$ , rappelons que nous avons noté  $N_5^\Gamma(r)$  (resp.  $N_5^{\Gamma'}(r)$ ) le nombre maximal de boules disjointes de rayon  $\frac{r}{2}$  qu'on peut inclure dans la boule  $B_X(x_0, \frac{5}{2}r)$ , tout en imposant aux centres de ces boules d'être des points de l'orbite  $\Gamma \cdot x_0$  du groupe  $\Gamma$  (resp. des points de l'orbite  $\Gamma' \cdot x_0$  du sous-groupe  $\Gamma'$ ); la condition d'appartenance à  $\Gamma' \cdot x_0$  étant plus restrictive que la condition d'appartenance à  $\Gamma \cdot x_0$ , nous avons  $N_5^{\Gamma'}(r) \leq N_5^\Gamma(r)$ . Le Lemme 3.11 appliqué deux fois, d'abord à la mesure de comptage  $\mu_x^{\Gamma'}$  de l'orbite  $\Gamma' \cdot x$ , puis à la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma \cdot x$ , donne :

$$\begin{aligned} \frac{\mu_x^{\Gamma'}(\overline{B}_X(x, 2r))}{\mu_x^{\Gamma'}(B_X(x, r))} &\leq N_5^{\Gamma'}(r) \leq N_5^\Gamma(r) \leq \frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, \frac{5}{2}r))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, \frac{r}{2}))} \\ &\leq \frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{5}{2}r))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{5}{4}r))} \cdot \frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{5}{4}r))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{5}{8}r))} \cdot \frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, r))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, \frac{1}{2}r))} . \end{aligned} \quad (7)$$

- *Preuve de (i) :* Pour tout  $r \in [r_0, r_1]$ , en nous appuyant sur le fait que  $\frac{1}{2}r$ ,  $\frac{5}{8}r$  et  $\frac{5}{4}r$  appartiennent à  $[\frac{1}{2}r_0, \frac{5}{4}r_1]$ , l'hypothèse de doublement faite dans (i) sur la mesure  $\mu_{x_0}^\Gamma$  nous permet de majorer chacun des trois termes du dernier membre des inégalités (7) par  $C$ , ce qui démontre que  $\frac{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(\overline{B}_X(x_0, 2r))}{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(B_X(x_0, r))} \leq C^3$  et achève la preuve de (i).
- *Preuve de (ii) :* Pour tout  $r \in [r_0, +\infty[$ , l'hypothèse de doublement faite dans (ii) sur la mesure  $\mu_{x_0}^\Gamma$  nous permet de majorer chacun des trois termes du dernier membre des inégalités (7) respectivement par  $C e^{\frac{5}{4}\alpha r}$ , par  $C e^{\frac{5}{8}\alpha r}$  et par  $C e^{\frac{1}{2}\alpha r}$ , ce qui démontre que  $\frac{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(\overline{B}_X(x_0, 2r))}{\mu_{x_0}^{\Gamma'}(B_X(x_0, r))} \leq C^3 e^{(\frac{5}{4} + \frac{5}{8} + \frac{1}{2})\alpha r}$  et achève la preuve de (ii).  $\square$

## 4 Les domaines de Margulis

Dans cette section, nous nous placerons sur n'importe quel espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  (donc automatiquement géodésique et propre, selon la Définition 8.2) et nous considérerons des isométries hyperboliques de cet espace. Rappelons que, à chaque isométrie hyperbolique  $\gamma$ , nous associons son déplacement minimum  $s(\gamma) = \inf_{x \in X} d(x, \gamma x)$  et son déplacement moyen  $\ell(\gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n} d(x, \gamma^n x))$ , voir les Définitions 8.17. Rappelons qu'il a été établi que  $\ell(\gamma)$  est alors strictement positif. Les deux points fixes de  $\gamma$  dans  $\partial X$  seront notés  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ . Nous renvoyons le lecteur à la section 8.2 pour tout ce qui concerne l'existence et les propriétés élémentaires des projections dans les espaces hyperboliques, et à la section 2 pour ce qui concerne les notions de géodésique et de géodésique locale.

**Définitions 4.1.** Pour toute isométrie  $\gamma$  de  $(X, d)$  de type hyperbolique, nous noterons  $\mathcal{G}(\gamma)$  l'ensemble des droites-géodésiques (orientées)  $c$  telles que  $c(-\infty) = \gamma^-$  et  $c(+\infty) = \gamma^+$ ; nous noterons  $M(\gamma)$  le sous-ensemble de  $X$  obtenu comme réunion de toutes ces droites-géodésiques.

Par ailleurs  $M_{\min}(\gamma)$  désignera l'ensemble des points de  $X$  où la fonction  $x \rightarrow d(x, \gamma x)$  atteint son infimum  $s(\gamma)$  (nous prouverons au Lemme 4.10 (iv) que cet ensemble est non vide et, par continuité, fermé).

En général, les ensembles  $M(\gamma)$  et  $M_{\min}(\gamma)$  sont disjoints; nous verrons cependant qu'ils coïncident lorsque la distance est convexe (cf le Lemme 5.23); si de plus l'espace est une variété de courbure strictement négative (ou un espace  $\text{Cat}(-1)$ ), les ensembles  $M(\gamma)$  et  $M_{\min}(\gamma)$  coïncident avec l'unique droite-géodésique qui joint les points fixes  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  de  $\gamma$ .

**Définition 4.2.** À toute isométrie  $\gamma$  de  $(X, d)$ , on associera son rayon de déplacement ponctuel, i. e. la fonction  $R_\gamma : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $R_\gamma(x) = \inf_{n \in \mathbb{N}^*} d(x, \gamma^n x)$ .

On remarquera que  $R_\gamma$  est identiquement nul quand  $\gamma$  est de torsion, c'est pourquoi ce cas sera exclu dans la suite.

## 4.1 Propriétés basiques

**Lemme 4.3.** Pour tout point  $x \in M_{\min}(\gamma)$  et pour tout choix d'une géodésique  $[x, \gamma x]$  reliant les points  $x$  et  $\gamma x$ , la réunion, pour tous les  $p \in \mathbb{Z}$ , des segments géodésiques  $\gamma^p([x, \gamma x])$  est une géodésique locale  $\gamma$ -invariante incluse dans  $M_{\min}(\gamma)$

*Preuve :* Notons  $[\gamma^p x, \gamma^{p+1} x]$  la géodésique  $\gamma^p([x, \gamma x])$  qui joint les points  $\gamma^p x$  et  $\gamma^{p+1} x$ ; pour tout  $u \in [\gamma^p x, \gamma^{p+1} x]$ , on a

$$d(u, \gamma u) \leq d(u, \gamma^{p+1} x) + d(\gamma^{p+1} x, \gamma u) = d(\gamma^p x, u) + d(u, \gamma^{p+1} x) = d(\gamma^p x, \gamma^{p+1} x) = d(x, \gamma x) = s(\gamma),$$

ce qui implique d'une part que  $d(u, \gamma u) = s(\gamma)$ , donc que  $u \in M_{\min}(\gamma)$ , et d'autre part que les inégalités ci-dessus sont toutes des égalités, donc que  $d(u, \gamma u) = d(u, \gamma^{p+1} x) + d(\gamma^{p+1} x, \gamma u)$ , ce qui signifie que la réunion des segments-géodésiques  $[u, \gamma^{p+1} x]$  et  $[\gamma^{p+1} x, \gamma u]$  est une géodésique (minimisante) joignant  $u$  à  $\gamma u$ . Il s'ensuit que la réunion, pour tous les  $p \in \mathbb{Z}$ , des segments géodésiques  $[\gamma^p x, \gamma^{p+1} x]$  est un chemin qui est minimisant sur toute portion de longueur  $s(\gamma)$ , ce qui assure que ce chemin est une géodésique locale.  $\square$

**Lemme 4.4.** Si  $\ell(\gamma) > 3\delta$ , on a  $d(x, M(\gamma)) \leq \frac{1}{2}(d(x, \gamma x) - \ell(\gamma)) + 3\delta$  pour tout  $x \in X$ .

*Preuve :* Considérons une géodésique  $c_\varepsilon \in \mathcal{G}(\gamma)$  telle que  $d(x, c_\varepsilon) \leq d(x, M(\gamma)) + \frac{1}{2}\varepsilon$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , notons  $c_\varepsilon(t_k)$  un projeté du point  $\gamma^k x$  sur l'image de  $c_\varepsilon$ . Nous allons démontrer la propriété :

$$\exists p \in \mathbb{N} \text{ tels que } d(c_\varepsilon(t_p), c_\varepsilon(t_{p+1})) > \ell(\gamma) - \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (8)$$

En effet, si  $c_\varepsilon(t'_k)$  est un projeté de  $\gamma^k(c_\varepsilon(t_0))$  sur la géodésique  $c_\varepsilon$ , la Proposition 8.9 (i) (et le fait que  $c_\varepsilon$  et  $\gamma^k \circ c_\varepsilon$  sont deux géodésiques qui joignent  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ ) assure que  $d(\gamma^k c_\varepsilon(t_0), c_\varepsilon(t'_k)) \leq 2\delta$ , ce qui implique que

$$d(\gamma^k x, c_\varepsilon(t_k)) \leq d(\gamma^k x, c_\varepsilon(t'_k)) \leq d(\gamma^k x, \gamma^k c_\varepsilon(t_0)) + d(\gamma^k c_\varepsilon(t_0), c_\varepsilon(t'_k)) \leq d(x, c_\varepsilon) + 2\delta;$$

on en déduit que  $d(c_\varepsilon(t_0), c_\varepsilon(t_k))$  est minorée par  $d(x, \gamma^k x) - d(x, c_\varepsilon(t_0)) - d(\gamma^k x, c_\varepsilon(t_k))$ , et donc par  $d(x, \gamma^k x) - 2d(x, c_\varepsilon) - 2\delta$ . Il s'ensuit que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} d(c_\varepsilon(t_i), c_\varepsilon(t_{i+1})) \right) \geq \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} d(c_\varepsilon(t_0), c_\varepsilon(t_k)) \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} d(x, \gamma^k x) \right) = \ell(\gamma),$$

ce qui a pour conséquence que  $\sup_{p \in \mathbb{N}} d(c_\varepsilon(t_p), c_\varepsilon(t_{p+1})) \geq \ell(\gamma)$ , ce qui achève la preuve de la propriété (8).

Lorsque  $\ell(\gamma) > 3\delta$ , si  $\varepsilon$  est choisi suffisamment petit, la Propriété (8) prouve l'existence d'un  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $d(c_\varepsilon(t_p), c_\varepsilon(t_{p+1})) > \ell(\gamma) - \frac{1}{2}\varepsilon > 3\delta$ . Le Lemme 8.8 permet d'en déduire que

$$d(x, \gamma x) = d(\gamma^p x, \gamma^{p+1} x) \geq d(\gamma^p x, c_\varepsilon(t_p)) + d(c_\varepsilon(t_p), c_\varepsilon(t_{p+1})) + d(c_\varepsilon(t_{p+1}), \gamma^{p+1} x) - 6\delta$$

$$\geq 2d(x, M(\gamma)) + \ell(\gamma) - \frac{1}{2}\varepsilon - 6\delta,$$

où la dernière inégalité découle du fait que  $d(\gamma^p x, c_\varepsilon(t_p)) = d(x, \gamma^{-p} \circ c_\varepsilon) \geq d(x, M(\gamma))$ . On achève la preuve en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans l'inégalité précédente.  $\square$

**Définition 4.5.** Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , pour toute isométrie  $\gamma \neq \text{id}$ , pour tout  $R \in ]0, +\infty[$  (et tout  $p \in \mathbb{Z}^*$ ), on définit

- le domaine de Margulis d'ordre  $p$  :  $M_R^p(\gamma) := \{x \in X : d(x, \gamma^p x) \leq R\}$ ,
- le domaine de Margulis  $M_R(\gamma)$  comme la réunion (pour tous les  $k \in \mathbb{Z}^*$ ) des  $M_R^k(\gamma)$ .

**Remarque 4.6.** Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , pour toute isométrie sans torsion  $\gamma$ , pour tout  $R \in ]0, +\infty[$ , on a  $M_R(\gamma) = \{x : R_\gamma(x) \leq R\}$ .

La preuve de cette Remarque, laissée au lecteur, repose sur le fait que, lorsque  $\gamma$  est sans torsion, il n'est pas elliptique, donc  $g^k x$  tend vers l'infini lorsque  $k \rightarrow +\infty$ , ce qui prouve que  $\{x : R_\gamma(x) \leq R\}$  est fini, donc qu'il existe un  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d(x, \gamma^n x) = R_\gamma(x)$ .

**Lemme 4.7.** Dans tout espace  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire  $(X, d)$ , pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  et tout réel  $R > 0$ ,  $X \setminus M_R(\gamma)$  est non vide.

*Preuve :* Notons  $k_0$  la partie entière de  $R/\ell(\gamma)$ , remarquons d'abord que  $M_R^k(\gamma)$  est vide pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $k \geq k_0 + 1$ , puisque tout  $x \in X$  vérifie alors  $d(x, \gamma^k x) \geq \ell(\gamma^k) \geq (k_0 + 1)\ell(\gamma) > R$  (voir la Définition 8.17 de  $\ell(\gamma)$  et les propriétés qui suivent cette définition). Par conséquent  $M_R(\gamma)$  est la réunion des  $M_R^k(\gamma)$  pour tous les  $k \leq k_0$  appartenant à  $\mathbb{N}^*$ .

Notons  $\{\gamma^-, \gamma^+\}$  l'ensemble-limite de  $\gamma$  (i. e. l'ensemble de ses points fixes, inclus dans le bord idéal, voir le début de la section 8.4.2); choisissons un point  $\theta \in \partial X$  qui n'appartient pas à cet ensemble limite et un rayon-géodésique  $c_0$  telle que  $c_0(+\infty) = \theta$ ; pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , le rayon-géodésique  $\gamma^k \circ c_0$  vérifie donc  $\gamma^k \circ c_0(+\infty) = \gamma^k \theta$ ; comme  $\gamma^k \theta \neq \theta$ , la distance  $d(c_0(t), \gamma^k \circ c_0(t))$  tend vers  $+\infty$  quand  $t$  tend vers  $+\infty$ , ce qui prouve qu'il existe un  $t_k$  tel que  $c_0(t) \notin M_R^k(\gamma)$  pour tout  $t > t_k$ . Posons  $T = \max_{k \leq k_0} (t_k)$ , nous obtenons que, pour tout  $t \in ]T, +\infty[$ ,  $c(t)$  n'appartient pas à  $\cup_{k \leq k_0} M_R^k(\gamma)$ , donc n'appartient pas à  $M_R(\gamma)$ .  $\square$

**Lemme 4.8.** Pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  et tout nombre réel  $R > 0$

(i) pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ ,  $M_R^k(\gamma)$  est vide lorsque  $R < |k|\ell(\gamma)$  et non vide lorsque  $R \geq |k|\ell(\gamma) + \delta$ ,

(ii)  $M_R(\gamma)$  est un fermé qui est vide lorsque  $R < \ell(\gamma)$  et non vide lorsque  $R \geq \ell(\gamma) + \delta$ .

*Preuve :* Si  $M_R^k(\gamma)$  est non vide, pour tout point  $x \in M_R^k(\gamma)$ , les propriétés élémentaires des fonctions  $s$  et  $l$ , énoncées après leurs Définitions 8.17, donnent :  $R \geq d(x, \gamma^k x) \geq s(\gamma^k) \geq \ell(\gamma^k) = |k|\ell(\gamma)$ , ce qui prouve que  $M_R^k(\gamma)$  est vide lorsque  $R < |k|\ell(\gamma)$ .

D'autre part, par définition de la fonction  $s$  (cf. Définitions 8.17),  $M_R^k(\gamma)$  est non vide si et seulement si  $R \geq s(\gamma^k)$ ; comme  $s(\gamma^k) \leq \ell(\gamma^k) + \delta = |k|\ell(\gamma) + \delta$  en vertu du Lemme 8.20 (i),  $M_R^k(\gamma)$  est non vide lorsque  $R \geq |k|\ell(\gamma) + \delta$ .

Par continuité de  $x \mapsto d(x, \gamma^k x)$ , chaque  $M_R^k(\gamma)$  est un fermé de  $(X, d)$ ;  $M_R(\gamma)$  étant (d'après le (i)) une réunion d'un nombre fini de  $M_R^k(\gamma)$  (correspondant aux  $k$  tels que  $|k| \leq \frac{R}{\ell(\gamma)}$ ), il est lui-même fermé.

Si  $R < \ell(\gamma)$ , alors  $R < |k|\ell(\gamma)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$  et tous les  $M_R^k(\gamma)$  sont vides d'après le (i), leur réunion  $M_R(\gamma)$  est alors vide. Si  $R \geq \ell(\gamma) + \delta$ , le (i) assure que  $M_R^1(\gamma)$  est non vide, donc que  $M_R(\gamma)$  est non vide.  $\square$

**Lemme 4.9.** Pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$ , pour tous les  $r, R$  tels que  $r < R$  et tels que  $M_r(\gamma)$  ne soit pas vide, pour tout point  $x$  de l'adhérence de  $X \setminus M_R(\gamma)$ , on a :

$$d(x, M_r(\gamma)) \geq \frac{1}{2}(R - r)$$

*Preuve* : Notons  $\bar{x}$  un projeté quelconque de  $x$  sur le fermé  $M_r(\gamma)$ . La définition de  $M_r(\gamma)$  nous permet de choisir un  $k \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d(\bar{x}, \gamma^k \bar{x}) \leq r$ . On a alors  $d(x, \gamma^k x) \geq R$  et l'inégalité triangulaire conclut en donnant :

$$2 d(x, M_r(\gamma)) + r = 2 d(x, \bar{x}) + r \geq d(x, \bar{x}) + d(\bar{x}, \gamma^k \bar{x}) + d(\gamma^k \bar{x}, \gamma^k x) \geq d(x, \gamma^k x) \geq R. \quad \square$$

**Lemme 4.10.** *Pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  et tout nombre réel  $R > 0$  tel que  $M_R(\gamma)$  soit non vide,*

- (i) *pour toute géodésique  $c$ , qui relie les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  de l'ensemble limite, pour tout  $x \in M_R(\gamma)$ , on a  $\text{Min}_{t \in \mathbb{R}} d(x, c(t)) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{7\delta}{\ell(\gamma)} + 1 \right) R + \frac{7}{2} \delta$ ,*
- (ii) *pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $M_R(\gamma)$  telle que  $d(x_0, x_n) \rightarrow +\infty$ , l'ensemble de ses valeurs d'adhérence est inclus dans  $\{\gamma^-, \gamma^+\}$ ,*
- (iii) *pour toute origine fixée  $x_0 \in X$ , le domaine de Dirichlet  $D_\gamma(x_0) := \{x : \forall k \in \mathbb{Z} d(x_0, x) \leq d(\gamma^k x_0, x)\}$  de l'action du groupe  $\langle \gamma \rangle$  engendré par  $\gamma$  est un domaine recouvrant pour cette action (i. e.  $\cup_{k \in \mathbb{Z}} \gamma^k (D_\gamma(x_0))$ ) tel que  $M_R(\gamma) \cap D_\gamma(x_0)$  soit compact,*
- (iv) *la fonction  $x \mapsto d(x, \gamma x)$  atteint son minimum sur  $X$ .*

*Preuve de (i)* : Soit  $x$  un élément quelconque de  $M_R(\gamma)$ , il existe donc un entier  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d(x, \gamma^p x) \leq R$ ; remarquons que l'on a alors  $R \geq d(x, \gamma^p x) \geq s(\gamma^p) \geq p \ell(\gamma)$ , donc  $p \leq \frac{R}{\ell(\gamma)}$ .

Considérons l'entier  $k$  tel que  $(k-1)p\ell(\gamma) \leq 7\delta < kp\ell(\gamma)$ . Notons  $y_k$  (resp.  $y_0$ ) un projeté du point  $\gamma^{kp}(x)$  (resp. du point  $x$ ) sur l'image de la géodésique  $c$ ; notons  $y'_k$  un projeté de  $\gamma^{kp}(y_0)$  sur l'image de  $c$  et  $z_0$  un projeté de  $y_0$  sur la géodésique  $\gamma^{kp} \circ c$ ; la Proposition 8.9 (i) (et le fait que  $c$  et  $\gamma^{kp} \circ c$  sont deux géodésiques qui joignent  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ ) assure que

$$d(\gamma^{kp} y_0, y'_k) = d(\gamma^{kp} y_0, c) \leq 2\delta \quad , \quad d(y_0, z_0) = d(y_0, \gamma^{kp} \circ c) \leq 2\delta \quad (9)$$

Le lemme 8.3 (iv) du quadrilatère et le fait que  $d(\gamma^{kp} x, \gamma^{kp} y_0) = d(x, y_0)$  impliquent que

$$d(y_0, \gamma^{kp} x) + d(x, \gamma^{kp} y_0) - 2\delta \leq \text{Max} [d(x, \gamma^{kp} x) + d(y_0, \gamma^{kp} y_0), 2d(x, y_0)] ; \quad (10)$$

en utilisant d'abord l'inégalité triangulaire, puis le Lemme 8.6 (ii) (en y posant  $\eta = 0$ ), puis les inégalités (9), on obtient les deux séries d'inégalités suivantes :

$$d(x, \gamma^{kp} y_0) \geq d(x, y'_k) - d(y'_k, \gamma^{kp} y_0) \geq d(x, y_0) + d(y_0, y'_k) - 4\delta \geq d(x, y_0) + d(y_0, \gamma^{kp} y_0) - 6\delta ,$$

$$d(y_0, \gamma^{kp} x) \geq d(z_0, \gamma^{kp} x) - d(y_0, z_0) \geq d(\gamma^{kp} x, \gamma^{kp} y_0) + d(\gamma^{kp} y_0, z_0) - 4\delta \geq d(x, y_0) + d(y_0, \gamma^{kp} y_0) - 6\delta ,$$

où on a utilisé le fait que  $y_0$  et  $\gamma^{kp} y_0$  sont des projetés des points  $x$  et  $\gamma^{kp} x$  (respectivement) sur les géodésiques  $c$  et  $\gamma^{kp} \circ c$ . De ces deux inégalités, on déduit que

$$d(y_0, \gamma^{kp} x) + d(x, \gamma^{kp} y_0) - 2\delta \geq 2d(x, y_0) + 2d(y_0, \gamma^{kp} y_0) - 14\delta > 2d(x, y_0) ,$$

où la dernière inégalité découle du choix de  $k$ , qui assure que  $d(y_0, \gamma^{kp} y_0) \geq \ell(\gamma^{kp}) = kp\ell(\gamma) > 7\delta$ . En reportant cette dernière inégalité dans l'inégalité (10), nous obtenons

$$2d(x, y_0) + d(y_0, \gamma^{kp} y_0) - 7\delta \leq 2d(x, y_0) + 2d(y_0, \gamma^{kp} y_0) - 14\delta \leq d(y_0, \gamma^{kp} x) + d(x, \gamma^{kp} y_0) - 2\delta$$

$$\leq d(x, \gamma^{kp} x) + d(y_0, \gamma^{kp} y_0) \leq kR + d(y_0, \gamma^{kp} y_0) \leq \left( \frac{7\delta}{p\ell(\gamma)} + 1 \right) R + d(y_0, \gamma^{kp} y_0) ,$$

et nous en déduisons que

$$\text{Min}_{t \in \mathbb{R}} d(x, c(t)) = d(x, y_0) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{7\delta}{p\ell(\gamma)} + 1 \right) R + \frac{7}{2} \delta \leq \frac{1}{2} \left( \frac{7\delta}{\ell(\gamma)} + 1 \right) R + \frac{7}{2} \delta .$$

*Preuve de (ii)* : Soit  $c$  une quelconque des géodésiques qui relient les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  de l'ensemble limite. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $x_n \in M_R(\gamma)$ , le résultat (i) prouve l'existence d'un  $t_n \in \mathbb{R}$  tel que  $d(x_n, c(t_n)) \leq \frac{1}{2} \left( \frac{7\delta}{\ell(\gamma)} + 1 \right) R + \frac{7}{2} \delta$ ; comme  $d(c(0), x_n) \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , on en déduit que  $|t_n| \rightarrow +\infty$ . Par conséquent, considérant la suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on est dans un des trois cas suivants



- soit tous ses éléments (sauf un nombre fini) sont positifs, et alors  $t_n \rightarrow +\infty$ ,  $c(t_n) \rightarrow \gamma^+$  et, par conséquent  $x_n \rightarrow \gamma^+$  car  $d(x_n, c(t_n))$  est bornée indépendamment de  $n$ ,
- soit tous ses éléments (sauf un nombre fini) sont négatifs, et alors  $t_n \rightarrow -\infty$ ,  $c(t_n) \rightarrow \gamma^-$  et, par conséquent  $x_n \rightarrow \gamma^-$  car  $d(x_n, c(t_n))$  est bornée indépendamment de  $n$ ,
- soit elle possède une infinité d'éléments de chaque signe, auquel cas elle est la réunion de deux suites respectivement positive et négative et qui tendent respectivement vers  $+\infty$  et  $-\infty$ , ce qui implique, d'après les deux cas précédents, que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la réunion de deux suites de limites respectives  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$ .

*Preuve de (iii) :* Soit  $c$  une quelconque des géodésiques qui relient les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  de l'ensemble limite. Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\text{Min}_{k \in \mathbb{Z}} d(c(t), \gamma^k c(0))$  est majoré indépendamment de  $t$  : en effet, si  $c(t_k)$  est un projeté du point  $\gamma^k \circ c(0)$  sur l'image de  $c$ , la Proposition 8.9 (i) (et le fait que  $c$  et  $\gamma^k \circ c$  sont deux géodésiques qui joignent  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ ) assure que  $d(c(t_k), \gamma^k \circ c(0)) \leq 2\delta$  et donc que

$$|t_{k+1} - t_k| \leq d(c(t_k), c(t_{k+1})) \leq d(\gamma^k c(0), \gamma^{k+1} c(0)) + 4\delta \leq d(c(0), \gamma c(0)) + 4\delta. \quad (11)$$

Fixons une valeur quelconque  $t \in \mathbb{R}$  ; quand  $k$  tend vers  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ),  $\gamma^k c(0)$  tend vers  $\gamma^+$  (resp. vers  $\gamma^-$ ), donc  $c(t_k)$  tend vers  $\gamma^+$  (resp. vers  $\gamma^-$ ) (car  $d(c(t_k), \gamma^k \circ c(0)) \leq 2\delta$ ), et par conséquent  $t_k$  tend vers  $+\infty$  (resp. vers  $-\infty$ ) ; il s'ensuit qu'il existe un  $k' \in \mathbb{Z}$  tel que  $t_{k'} \leq t < t_{k'+1}$  et (comme conséquence de ceci et de l'inégalité (11)) il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $|t - t_k| \leq \frac{1}{2} d(c(0), \gamma c(0)) + 2\delta$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe donc un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$d(c(t), \gamma^k c(0)) \leq d(c(t), c(t_k)) + d(c(t_k), \gamma^k c(0)) \leq \frac{1}{2} d(c(0), \gamma c(0)) + 4\delta. \quad (12)$$

Considérons un point quelconque  $x \in M_R(\gamma)$  et notons  $c(t)$  un projeté de  $x$  sur la géodésique  $c$ , il résulte de la propriété (12) et du résultat (i) qu'il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $d(x, \gamma^k c(0)) \leq d(x, c(t)) + d(c(t), \gamma^k c(0)) \leq R_0$  où

$$R_0 := \frac{1}{2} \left( \frac{7\delta}{\ell(\gamma)} + 1 \right) R + \frac{1}{2} d(c(0), \gamma c(0)) + \frac{15}{2} \delta$$

et, par conséquent, tel que  $d(x, \gamma^k x_0) \leq d(x_0, c(0)) + R_0$ . Pour tout  $x \in M_R(\gamma) \cap D_\gamma(x_0)$ , on a  $d(x, x_0) \leq \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}} d(x, \gamma^k x_0)$  et, en vertu de l'inégalité précédente,  $d(x, x_0) \leq d(x_0, c(0)) + R_0$ .  $M_R(\gamma) \cap D_\gamma(x_0)$  est donc un fermé borné, donc compact car  $(X, d)$  est propre.

*Preuve de (iv) :* Notons  $f$  la fonction  $x \mapsto d(x, \gamma x)$ , posons  $s(\gamma) := \inf_{x \in X} f(x)$  et  $R := s(\gamma) + 1$  ; comme  $\{x : f(x) \leq R\} = M_R^1(\gamma) \subset M_R(\gamma)$ , il nous suffit de prouver que la restriction de  $f$  à l'ensemble (non vide)  $M_R(\gamma)$  atteint son minimum. Comme  $f(\gamma^k x) = f(x)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  (et pour tout  $x$ ), comme  $M_R(\gamma)$  est globalement invariant par les  $\gamma^k$ , et comme  $X = \cup_{k \in \mathbb{Z}} \gamma^k (D_\gamma(x_0))$ , il nous suffit de prouver que  $f$  atteint son minimum sur  $M_R(\gamma) \cap D_\gamma(x_0)$ , ce qui est démontré puisque  $M_R(\gamma) \cap D_\gamma(x_0)$  est compact (d'après le (iii)) et  $f$  continue.  $\square$

**Lemme 4.11.** *Pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$ , pour tout nombre réel  $R > 0$ ,*

- (i) *pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $x \in M_R^p(\gamma)$ , toute géodésique joignant  $x$  à  $\gamma^p x$  ou à  $\gamma^{-p} x$  est incluse dans  $M_R^p(\gamma)$ ,*
- (ii) *pour tout  $x, y \in M_R^p(\gamma)$ , toute géodésique joignant  $x$  à  $y$  est incluse dans  $M_{R+2\delta}^p(\gamma)$ .*
- (iii) *pour tout  $x \in M_R(\gamma)$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , toute géodésique joignant  $x$  à  $\gamma^k x$  est incluse dans  $M_{R+2\delta}(\gamma)$ .*

*Preuve de (i) :* Nous supposons que  $M_R^p(\gamma)$  est non vide, sinon le résultat est trivialement vérifié. Soit  $x$ , un point quelconque de  $M_R^p(\gamma)$ , pour tout  $q \in \{-p, p\}$ , considérons une (quelconque) des géodésiques joignant  $x$  à  $\gamma^q x$  ; pour tout  $u \in [x, \gamma^q x]$ , l'inégalité triangulaire donne :

$$d(u, \gamma^p u) = d(u, \gamma^q u) \leq d(u, \gamma^q x) + d(\gamma^q x, \gamma^q u) = d(x, u) + d(u, \gamma^q x) = d(x, \gamma^q x) \leq R,$$

donc  $u \in M_R^p(\gamma)$ , ce qui prouve (i).

*Preuve de (ii) :* Nous supposons que  $M_R^p(\gamma)$  est non vide, sinon le résultat est trivialement vérifié. Posons  $L := d(x, y)$ . Notons  $c$  une quelconque des géodésiques qui joignent  $x$  à  $y$  (i. e.  $c(0) = x$  et  $c(L) = y$ ), la propriété de quasi-convexité des espaces  $\delta$ -hyperboliques (cf. la Proposition 25, p. 45 de [Gd90]) donne :

$$d(c(t), g^p \circ c(t)) \leq \left(1 - \frac{t}{L}\right) d(c(0), g^p \circ c(0)) + \frac{t}{L} d(c(L), g^p \circ c(L)) + 2\delta \leq R + 2\delta,$$

où la dernière inégalité découle du fait que  $x, y \in M_R^p(\gamma)$ . Ceci prouve que, pour tout  $t \in [0, L]$ ,  $c(t)$  appartient à  $M_{R+2\delta}^p(\gamma)$ .

*Preuve de (iii) :* Fixons un  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $x \in M_R^p(\gamma)$  (un tel  $p$  existe par définition de  $M_R(\gamma)$ ), alors  $d(\gamma^k x, \gamma^p(\gamma^k x)) = d(x, \gamma^p x) \leq R$  et  $\gamma^k x$  appartient à  $M_R^p(\gamma)$ . On peut donc appliquer la partie (ii) du présent Lemme (en y remplaçant  $y$  par  $\gamma^k x$ ) et on obtient que toute géodésique joignant  $x$  à  $\gamma^k x$  est incluse dans  $M_{R+2\delta}(\gamma)$ .  $\square$

## 4.2 Domaines de Margulis de deux isométries “indépendantes”

Considérons deux isométries  $a$  et  $b$  d’un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ . On a alors les définitions et lemmes suivants :

**Définition 4.12.** *La constante de Margulis  $L(a, b)$  de la paire d’isométries  $\{a, b\}$  est définie comme l’infimum (quand  $x$  parcourt  $X$  et quand  $(p, q)$  parcourt l’ensemble des  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  tels que  $a^p$  et  $b^q$  soient non triviaux) de  $\text{Max}[d(x, a^p x); d(x, b^q x)]$ .*

Supposons maintenant que  $a$  et  $b$  sont des isométries de type hyperbolique, on a le

**Lemme 4.13.** *Si le groupe  $\langle a, b \rangle$  engendré par  $a$  et  $b$  est un sous-groupe discret, non virtuellement cyclique du groupe des isométries de  $(X, d)$  alors pour tout nombre réel  $R > 0$  tel que  $M_R(a)$  et  $M_R(b)$  soient non vides, il existe des points  $x_0 \in M_R(a)$  et  $y_0 \in M_R(b)$  tels que  $d(x_0, y_0)$  soit le minimum de  $d(x, y)$  quand  $(x, y)$  parcourt  $M_R(a) \times M_R(b)$ .*

*Preuve :* Notons  $a^+$  et  $a^-$  (resp.  $b^+$  et  $b^-$ ) les points de l’ensemble limite de  $a$  (resp. de  $b$ ). Supposons qu’il existe une suite  $n \mapsto (x_n, y_n)$  d’éléments de  $M_R(a) \times M_R(b)$  qui va à l’infini (on entend par là qu’elle sort de tout compact) et telle que  $n \mapsto d(x_n, y_n)$  reste bornée; le raisonnement étant identique quand  $y_n$  va à l’infini, il nous suffit de mener la démonstration dans le cas où  $x_n$  va à l’infini; dans ce cas, le Lemme 4.10 (ii) prouve l’existence d’une sous-suite  $k \mapsto x_{n_k}$  qui tend vers  $a^+$  ou  $a^-$  et, comme  $k \mapsto d(x_{n_k}, y_{n_k})$  reste bornée, il s’ensuit que  $y_{n_k}$  tend vers  $a^+$  ou  $a^-$  quand  $k \rightarrow +\infty$ . Comme, d’après le Lemme 4.10 (ii), la limite de  $y_{n_k}$  ne peut être que  $b^+$  ou  $b^-$ , on a  $\{a^-, a^+\} \cap \{b^-, b^+\} \neq \emptyset$ , ce qui implique (d’après la Proposition 8.21 (i)) que  $\{a^-, a^+\} = \{b^-, b^+\}$  et donc que tous les éléments du groupe  $\langle a, b \rangle$  admettent  $\{a^-, a^+\}$  comme ensemble de points fixes; la Proposition 8.21 (ii) permet d’en déduire que  $\langle a, b \rangle$  est virtuellement cyclique. Comme ce cas est exclu par hypothèse,  $d(x, y)$  tend vers  $+\infty$  quand  $(x, y)$  va à l’infini; ceci assure l’existence d’un point  $(x_0, y_0)$  du fermé (propre)  $M_R(a) \times M_R(b)$  où la fonction continue  $(x, y) \mapsto d(x, y)$  atteint son minimum.  $\square$

Evidemment, le Lemme 4.13 est trivial lorsque  $M_R(a) \cap M_R(b) \neq \emptyset$  (car alors une solution  $(x_0, y_0)$  est donnée par  $x_0 = y_0 \in M_R(a) \cap M_R(b)$ ) il est donc important d’avoir un critère qui caractérise les valeurs de  $R$  telles que  $M_R(a) \cap M_R(b)$  est vide, ce qui est le but du résultat qui suit.

**Lemme 4.14.** *Soit  $R$  n’importe quel réel positif tel que  $M_R(a)$  et  $M_R(b)$  soient non vides; si  $L(a, b) > R$ , les domaines de Margulis  $M_R(a)$  et  $M_R(b)$  sont disjoints; réciproquement, si les domaines de Margulis  $M_R(a)$  et  $M_R(b)$  sont disjoints, alors  $L(a, b) \geq R$ .*

*Preuve* : Si les deux domaines de Margulis  $M_R(a)$  et  $M_R(b)$  ont un point  $x$  en commun, il existe  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  tel que  $d(x, a^p x) \leq R$  et  $d(x, b^q x) \leq R$ . Par définition de  $L(a, b)$ , ceci implique que  $L(a, b) \leq R$ .

Réciproquement, si les domaines de Margulis  $M_R(a)$  et  $M_R(b)$  sont disjoints, alors tout point  $x \in X$  vérifie  $x \in X \setminus M_R(a)$  ou  $x \in X \setminus M_R(b)$ , ce qui implique que, pour tout  $p, q \in \mathbb{Z}^*$ ,  $d(x, a^p x) > R$  ou  $d(x, b^q x) > R$ . En passant à l'infimum, on en déduit que  $L(a, b) \geq R$ .  $\square$

### 4.3 Domaines de Margulis sous hypothèse de doublement

On prouve ici une minoration de la distance entre domaines de Margulis lorsqu'on suppose que la mesure de comptage de l'orbite de l'action du groupe vérifie une hypothèse de doublement à partir d'une certaine échelle).

**Lemme 4.15.** *Fixons-nous des constantes arbitraires  $r_0 > 0$ ,  $\alpha > 0$  et  $C_1 > 1$ . Considérons un espace métrique quelconque  $(X, d)$ , une isométrie (sans torsion<sup>7</sup>) quelconque  $\gamma$  de  $(X, d)$ . Pour tout sous-groupe discret  $\Gamma$  du groupe des isométries de  $(X, d)$  contenant  $\gamma$  et pour tout point  $x_0 \in X$  tels que  $R_\gamma(x_0) \geq r_0$  et que la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma x_0$  vérifie la condition de doublement  $\frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 2R))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R))} \leq C_1 e^{\alpha R}$  pour tous les  $R \in [\frac{1}{2}r_0, +\infty[$ , on a :*

(i) pour tout  $p \in \mathbb{N}$

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^p R_\gamma(x_0)\} \leq C_1^{3p} e^{\frac{19}{8} \alpha (2^p - 1) R_\gamma(x_0)} .$$

(ii) en tout point  $x \in X$  et pour tout  $R \geq R_\gamma(x)$

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x, \gamma^k x) < R\} \leq C_1^3 \left( \frac{R + 2d(x_0, x)}{R_\gamma(x_0)} \right)^{\frac{3}{\ln 2} \ln C_1} e^{5\alpha(R + 2d(x_0, x))} .$$

(iii) pour tout point  $x$  tel que  $R_\gamma(x) \leq R_\gamma(x_0)$

$$\frac{d(x_0, x)}{R_\gamma(x_0)} \geq \frac{\ln \left( C_1^{-3} \left( 2 \left\lfloor \frac{R_\gamma(x_0)}{R_\gamma(x)} \right\rfloor + 1 \right) \right)}{10 \alpha R_\gamma(x_0) + \frac{6}{e \ln 2} \ln C_1} - \frac{1}{2} .$$

*Preuve de (i)* : L'inégalité (i) étant trivialement vérifiée lorsque  $p = 0$ , nous supposons que  $p \geq 1$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on a  $2^i R_\gamma(x_0) \geq r_0$ , on peut donc appliquer la Proposition 3.19 (ii) dans le cas où le sous groupe  $\Gamma'$  est le sous-groupe engendré par  $\gamma$ , ce qui assure que, pour tout  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^{i+1} R_\gamma(x_0)\}}{\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^i R_\gamma(x_0)\}} \leq C_1^3 e^{\frac{19}{8} \alpha 2^i R_\gamma(x_0)} .$$

En faisant le produit pour  $i$  variant de 0 à  $p - 1$ , nous en déduisons

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^p R_\gamma(x_0)\} \leq \frac{\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^p R_\gamma(x_0)\}}{\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < R_\gamma(x_0)\}} \leq C_1^{3p} e^{\frac{19}{8} \alpha (2^p - 1) R_\gamma(x_0)} ,$$

où la première inégalité découle du fait que  $\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < R_\gamma(x_0)\} = \{\text{id}_X\}$ .

*Preuve de (ii)* : Pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , l'inégalité triangulaire et l'invariance par  $\gamma$  de la distance donnent :  $d(x_0, \gamma^k x_0) \leq d(x, \gamma^k x) + 2d(x_0, x)$ , on en déduit d'une part que  $R + 2d(x_0, x) \geq R_\gamma(x) + 2d(x_0, x) \geq R_\gamma(x_0)$ , et d'autre part que l'ensemble  $\{k \in \mathbb{Z} : d(x, \gamma^k x) < R\}$  est inclus dans  $\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < R + 2d(x_0, x)\}$  ; si  $p$  est l'entier tel que  $2^{p-1} R_\gamma(x_0) < R + 2d(x_0, x) \leq 2^p R_\gamma(x_0)$ , nous en déduisons que

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x, \gamma^k x) < R\} \leq \#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^p R_\gamma(x_0)\} \leq C_1^{3p} e^{\frac{19}{8} \alpha (2^p - 1) R_\gamma(x_0)} ,$$

7. Lorsque  $\gamma$  est de torsion, les résultats qui suivent sont vides, puisque  $R_\gamma(x)$  est alors nul pour tout  $x \in X$ .

où la dernière inégalité découle de la propriété (i). Cette dernière inégalité et un calcul direct impliquent (ii).

*Preuve de (iii) :* Posons  $N := \left\lceil \frac{R_\gamma(x_0)}{R_\gamma(x)} \right\rceil$ . Par définition de  $R_\gamma(x)$ , il existe un  $p \in \mathbb{N}^*$  tel que  $d(x, \gamma^p x) = R_\gamma(x)$  et l'inégalité triangulaire permet d'en déduire que  $d(x, \gamma^{kp} x) < R_\gamma(x_0) + \varepsilon$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $|k| \leq N$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , donc, en appliquant (ii) dans le cas où  $R = R_\gamma(x_0) + \varepsilon$ , que

$$2N+1 \leq \#\left\{k \in \mathbb{Z} : d(x, \gamma^k x) < R_\gamma(x_0) + \varepsilon\right\} \leq C_1^3 \left( \frac{R_\gamma(x_0) + 2d(x_0, x) + \varepsilon}{R_\gamma(x_0)} \right)^{\frac{3}{\ln 2} \ln C_1} \cdot e^{5\alpha(R_\gamma(x_0) + 2d(x_0, x) + \varepsilon)},$$

ce qui, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro puis en remarquant que la fonction  $\text{Max}_{t \in \mathbb{R}^+} (t^\beta e^{-(\beta/\varepsilon)t}) = 1$ , donne

$$2N+1 \leq C_1^3 \left( \frac{R_\gamma(x_0) + 2d(x_0, x)}{R_\gamma(x_0)} \right)^{\frac{3}{\ln 2} \ln C_1} e^{5\alpha(R_\gamma(x_0) + 2d(x_0, x))} \leq C_1^3 e^{(5\alpha R_\gamma(x_0) + \frac{3}{\varepsilon \ln 2} \ln C_1) \left(1 + 2 \frac{d(x_0, x)}{R_\gamma(x_0)}\right)},$$

ce qui implique que

$$\frac{d(x_0, x)}{R_\gamma(x_0)} \geq \frac{\ln(C_1^{-3}(2N+1))}{10\alpha R_\gamma(x_0) + \frac{6}{e \ln 2} \ln C_1} - \frac{1}{2}. \quad \square$$

## 5 Actions cocompactes sur des espaces Gromov-hyperboliques

Dans cette section, on se fixe arbitrairement trois constantes positives  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  et on s'intéresse à tous les espaces  $\delta$ -hyperboliques  $(X, d)$  (donc automatiquement géodésiques et propres, d'après la Définition 8.2) et à toutes les actions propres (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  telles que l'entropie de  $(X, d)$  et le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  soient respectivement bornés par  $H$  et  $D$ .

Rappelons qu'en vertu du Lemme 8.12 (ii),  $\Gamma \backslash X$  est alors compact et que, d'après le Lemme 8.12 (iii), si  $\Gamma$  est sans torsion, l'action de  $\Gamma$  sur  $X$  est alors fidèle et sans point fixe.

Rappelons qu'on a défini  $\Sigma_r(x)$  comme l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma^*$  tels que  $d(x, \gamma x) \leq r$  et que  $\Gamma_r(x)$  est le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\Sigma_r(x)$  (cf. les Définitions 2.4).

Rappelons que la Proposition 3.3 prouve que, lorsque l'action est cocompacte, l'entropie de  $(X, d)$  peut alors être calculée pour n'importe quelle mesure borélienne  $\Gamma$ -invariante sur  $X$ , et qu'elle ne dépend pas du choix d'une telle mesure.

### 5.1 Propriétés de doublement pour les espaces Gromov-hyperboliques

**Théorème 5.1.** *Pour toute action propre d'un groupe  $\Gamma$  sur tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , si le quotient  $\Gamma \backslash X$  est de diamètre majoré par  $D$  et si l'Entropie de  $(X, d)$  est au plus égale à  $H$ , on a alors :*

$$\forall x \in X \quad \forall R \geq 10(D + 2\delta) \quad \frac{\#(B_X(x, 2R) \cap \Gamma x)}{\#(B_X(x, R) \cap \Gamma x)} = \frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, 2R))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, R))} \leq 3^4 e^{\frac{13}{2}HR}.$$

En d'autres termes, la mesure de comptage de toute orbite de l'action de  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  vérifie la condition de doublement d'amplitude  $C(R) := 3^4 e^{\frac{13}{2}HR}$  à toutes les échelles  $R \geq 20(D + 2\delta)$

La preuve de cette propriété de doublement se déduit du

**Lemme 5.2.** *Sur un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , pour tous les  $R, R' \in ]0, +\infty[$ , pour toute paire de points  $x, y$  tels que  $d(x, y) < R + R'$ , il existe un point  $y' \in X$  tel que*

$$B_X(x, R) \cap B_X(y, R') \subset B_X(y', r), \quad \text{où} \quad r = \text{Min} \left( R, R', \frac{1}{2} (R + R' - d(x, y)) + 2\delta \right).$$

*Preuve du lemme 5.2 :* Remarquons que, si  $d(x, y) \geq R + R'$ , alors  $B_X(x, R) \cap B_X(y, R') = \emptyset$ , c'est pourquoi nous pouvons supposer que  $d(x, y) < R + R'$ . Quitte à échanger les noms des points et des rayons, on peut supposer que  $R' \leq R$ . Si  $d(x, y) \leq R - R' + 4\delta$ , en choisissant  $y' = y$ , on a bien  $B_X(x, R) \cap B_X(y, R') \subset B_X(y', r)$  car, dans ce cas,  $R' = \text{Min}\left(R, R', \frac{1}{2}(R + R' - d(x, y)) + 2\delta\right) = r$ , donc le Lemme est vérifié dans ce cas.

*Plaçons-nous maintenant dans le cas où  $R - R' + 4\delta \leq d(x, y) < R + R'$ .* Les espaces hyperbolique considérés étant géodésiques, notons  $c = [x, y]$  une quelconque des géodésiques (minimisantes) qui joignent  $x$  à  $y$ , cette géodésique étant paramétrée par sa longueur et telle que  $c(0) = x$  et  $c(d(x, y)) = y$ . Notons  $y'$  le point  $c\left(\frac{1}{2}(R - R' + d(x, y))\right)$  de cette géodésique. Pour tout point  $z \in B_X(x, R) \cap B_X(y, R')$ , le lemme du rectangle donne :

$$\begin{aligned} d(y', z) + d(x, y) &\leq \text{Max}[d(x, z) + d(y, y'), d(y, z) + d(x, y')] + 2\delta \\ &< \text{Max}\left[R + \left(d(x, y) - \frac{1}{2}(R - R' + d(x, y))\right), R' + \frac{1}{2}(R - R' + d(x, y))\right] + 2\delta, \end{aligned}$$

ce qui implique que  $d(y', z) < \frac{1}{2}(R + R' - d(x, y)) + 2\delta = \text{Min}\left(R, R', \frac{1}{2}(R + R' - d(x, y)) + 2\delta\right)$  et conclut.  $\square$

*Preuve du Théorème 5.1 :* Considérons un point  $x$  quelconque de  $X$  ; pour simplifier, nous noterons  $\nu$  la mesure de comptage de l'orbite de  $x$  (i. e.  $\nu = \sum_{\gamma \in \Gamma} \delta_{\gamma x}$ ). Pour tous les  $R, R' \geq 8\delta$  tels que  $R' \leq R$ , l'égalité (1) donne :

$$\begin{aligned} \int_{B_X(x, R)} \nu(B_X(y, R')) d\nu(y) &= \int_X \nu(B_X(y, R') \cap B_X(x, R)) d\nu(y) \leq \int_{B_X(x, R - \frac{1}{2}R')} \nu(B_X(y, R')) d\nu(y) + \\ &+ \int_{B_X(x, R + R') \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')} \nu(B_X(y, R') \cap B_X(x, R)) d\nu(y). \end{aligned} \quad (13)$$

Le Lemme 5.2 assure, pour tout  $y \in B_X(x, R + R') \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')$ , l'existence d'un point  $y'$  tel que

$$B_X(y, R') \cap B_X(x, R) \subset B\left(y', \frac{1}{2}(R + R' - d(x, y)) + 2\delta\right) \subset B\left(y', \frac{3}{4}R' + 2\delta\right);$$

comme il existe un  $\gamma' \in \Gamma$  tel que  $d(y', \gamma'x) \leq D$ , on en déduit que

$$\nu(B_X(y, R') \cap B_X(x, R)) \leq \nu\left(B\left(y', \frac{3}{4}R' + 2\delta\right)\right) \leq \nu\left(B(\gamma'x, \frac{3}{4}R' + 2\delta + D)\right) = \nu\left(B\left(x, \frac{3}{4}R' + 2\delta + D\right)\right)$$

En reportant ces estimées dans (13), nous obtenons :

$$\int_{B_X(x, R) \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')} \nu(B_X(y, R')) d\nu(y) \leq \int_{B_X(x, R + R') \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')} \nu\left(B\left(x, \frac{3}{4}R' + 2\delta + D\right)\right) d\nu(y).$$

De cette dernière inégalité, de la définition de la mesure  $\nu$  et du fait que  $\nu(B_X(y, R')) = \nu(B_X(x, R'))$  pour tous les  $y \in \Gamma x$ , on déduit que

$$\begin{aligned} \nu(B_X(x, R')) \cdot \nu\left(B_X(x, R) \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')\right) &= \int_{B_X(x, R) \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')} \nu(B_X(y, R')) d\nu(y) \\ &\leq \nu\left(B\left(x, \frac{3}{4}R' + 2\delta + D\right)\right) \cdot \nu\left(B_X(x, R + R') \setminus B_X(x, R - \frac{1}{2}R')\right) \end{aligned}$$

Supposons dorénavant que  $R' \geq 12(D + 2\delta)$ , en rappelant que  $\nu = \mu_x^\Gamma$ , nous en déduisons que

$$\frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, R'))}{\mu_x^\Gamma\left(B_X\left(x, \frac{10}{12}R'\right)\right)} \leq \frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, R'))}{\mu_x^\Gamma\left(B_X\left(x, \frac{3}{4}R' + 2\delta + D\right)\right)} \leq \frac{\mu_x^\Gamma\left(B_X(x, R + R')\right) - \mu_x^\Gamma\left(B_X\left(x, R - \frac{R'}{2}\right)\right)}{\mu_x^\Gamma\left(B_X(x, R)\right) - \mu_x^\Gamma\left(B_X\left(x, R - \frac{R'}{2}\right)\right)}$$

Posons  $C := \frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, R'))}{\mu_x^\Gamma(B(x, \frac{10}{12} R'))} - 1$  et  $a_k = \mu_x^\Gamma(B_X(x, k \frac{R'}{2}))$ , l'inégalité précédente implique que, pour tout  $k \geq 2$ ,  $a_{k+2} - a_{k-1} \geq (C+1)(a_k - a_{k-1})$ , donc que  $a_{k+2} - a_k \geq C(a_k - a_{k-1})$ . En sommant cette dernière inégalité pour tous les  $k$  tels que  $2 \leq k \leq n$ , on obtient :

$$2(a_{n+2} - a_1) \geq a_{n+2} - a_3 + a_{n+1} - a_2 \geq C(a_n - a_1)$$

dont on déduit que  $a_{2n} \geq (\frac{C}{2})^{n-1}(a_2 - a_1) + a_1$ , et donc que

$$H \geq \text{Ent}(X, d) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{nR'} \ln(\mu_x^\Gamma(B_X(x, nR'))) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{nR'} \ln(a_{2n}) \right) \geq \frac{1}{R'} \ln\left(\frac{C}{2}\right).$$

On en conclut que  $\frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, R'))}{\mu_x^\Gamma(B(x, \frac{10}{12} R'))} \leq 1 + 2e^{HR'}$ ; pour tout  $r \geq 10(D + 2\delta)$ , en posant

$$R' = \frac{12}{10}r, \text{ nous en déduisons que } \frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, \frac{12}{10}r))}{\mu_x^\Gamma(B(x, r))} \leq 1 + 2e^{\frac{12}{10}Hr} \leq 3e^{\frac{12}{10}Hr}.$$

En itérant et en remplaçant successivement  $r$  par  $r, \frac{12}{10}r, \dots, (\frac{12}{10})^3 r$ , nous en déduisons que

$$\frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, 2r))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, r))} \leq 3^4 e^{(\frac{12}{10} + \dots + (\frac{12}{10})^4)Hr} \leq 3^4 e^{\frac{13}{2}Hr},$$

ce qui conclut.  $\square$

## 5.2 Une alternative de Tits quantitative pour les actions de groupes sur les espaces Gromov-hyperboliques

Rappelons que, à toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , on associe sa fonction rayon de déplacement  $x \mapsto R_\gamma(x) := \text{Min}_{k \in \mathbb{N}^*} d(x, \gamma^k x)$  (voir la Définition 4.2), son déplacement minimum  $s(\gamma) := \inf_{x \in X} d(x, \gamma x)$  et son déplacement moyen  $\ell(\gamma) := \lim_{n \rightarrow +\infty} d(x, \gamma^n x)/n$  (voir les Définitions 8.17). Rappelons aussi que nous avons défini les domaines de Margulis  $M_R(\gamma)$  comme l'ensemble des points  $x$  tels que  $R_\gamma(x) \leq R$  (voir la Définition 4.5 et la Remarque 4.6). Si  $\gamma$  est de type hyperbolique, rappelons que  $\mathcal{G}(\gamma)$  est l'ensemble des géodésiques orientées joignant ses points fixes  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ , que  $M(\gamma)$  est la réunion de ces géodésiques, et que  $M_{\min}(\gamma)$  est l'ensemble des points où la fonction  $x \mapsto d(x, \gamma x)$  atteint son minimum (pour toutes ces notions, voir les Définitions 4.1).

### 5.2.1 La dichotomie entropie vs déplacement moyen

Le but de cette sous-section est de prouver le

**Théorème 5.3.** *Pour tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire  $(X, d)$ , pour toute action propre par isométries d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$ , si le quotient  $\Gamma \backslash X$  est de diamètre majoré par  $D$ , une (au moins) des deux propriétés ci-dessous est vérifiée :*

- soit  $\text{Ent}(X, d) > \frac{1}{750\delta}$ ,
- soit  $\ell(\gamma) > 3^{-34} \delta M_0 e^{-\frac{4}{29}M_0}$  pour tous les éléments  $\gamma$  de  $\Gamma^*$  qui ne sont pas de torsion, où  $M_0 := \text{Max} \left[ 20 \left( \frac{D}{\delta} + 2 \right), 720 \right]$ .

Dans le cas  $\delta$ -hyperbolique et cocompact, nous avons vu (cf. le Théorème 5.1) que la constante de doublement est contrôlée pour les boules de rayon supérieur à  $10(D + 2\delta)$ , le Lemme 4.15 implique alors le

**Lemme 5.4.** *Sous les hypothèses du Théorème 5.3, pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma^*$  qui n'est pas de torsion et pour tout point  $x_0 \in X$  vérifiant  $R_\gamma(x_0) \geq 20(D + 2\delta)$ , on a :*

(i) pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2^p R_\gamma(x_0)\} \leq 3^{12p} e^{16 \text{Ent}(X,d)(2^p-1)R_\gamma(x_0)} .$$

(ii) pour tout point  $y \in X$  et pour tout  $R \geq R_\gamma(y)$

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(y, \gamma^k y) < R\} \leq 3^{12} \left( \frac{R + 2d(x_0, y)}{R_\gamma(x_0)} \right)^{12 \frac{\ln 3}{\ln 2}} e^{\frac{65}{2} \text{Ent}(X,d)(R+2d(x_0, y))} ,$$

(iii) pour tout point  $y \in X$  tel que  $R_\gamma(y) \leq R_\gamma(x_0)$

$$\frac{d(x_0, y)}{R_\gamma(x_0)} \geq \frac{\ln \left( 3^{-12} \left( 2 \left\lfloor \frac{R_\gamma(x_0)}{R_\gamma(y)} \right\rfloor + 1 \right) \right)}{65 \text{Ent}(X, d) \cdot R_\gamma(x_0) + 14} - \frac{1}{2} .$$

*Preuve* : Le Théorème 5.1 assure alors qu'on a  $\frac{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, 2R))}{\mu_{x_0}^\Gamma(B_X(x_0, R))} \leq 3^4 e^{\frac{13}{2} \text{Ent}(X,d)R}$  pour tout  $R \geq 10(D + 2\delta)$  ; on peut donc appliquer le Lemme 4.15 (i), (ii) et (iii) (en affectant respectivement aux paramètres  $r_0$ ,  $C_1$  et  $\alpha$  du Lemme 4.15 les valeurs  $20(D + 2\delta)$ ,  $3^4$  et  $\frac{13}{2} \text{Ent}(X, d)$ ), qui démontrent respectivement les propriétés (i), (ii) et (iii) du Lemme 5.4.  $\square$

Le lemme suivant, bien qu'assez trivial, clarifiera la situation et évitera de répéter cet argument qui sera souvent utilisé ; son but est de montrer que, lorsqu'un sous-groupe agit proprement sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$ , la plupart des propriétés de cette action se déduisent des propriétés analogues de son image dans le groupe des isométries de  $(X, d)$ , plus précisément, on a :

**Lemme 5.5.** *Sur tout espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$ , toute action propre par isométries d'un groupe  $\Gamma$  se fait via une représentation  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(X, d)$  qui a les propriétés suivantes :*

- (i)  $\text{Ker } \varrho$  est un sous-groupe normal fini de  $\Gamma$ ,
- (ii) le groupe  $\varrho(\Gamma)$  est un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(X, d)$ ,
- (iii) une mesure  $\mu$  sur  $X$  est  $\varrho(\Gamma)$ -invariante si et seulement si elle est  $\Gamma$ -invariante, par conséquent l'entropie est insensible au fait que l'action de groupe considérée soit celle de  $\Gamma$  ou de  $\varrho(\Gamma)$ ,
- (iv)  $\varrho(\Gamma) \backslash X = \Gamma \backslash X$ , par conséquent  $\varrho(\Gamma) \backslash X$  est compact et de diamètre borné par  $D$  si et seulement si  $\Gamma \backslash X$  est de diamètre borné par  $D$ ,
- (v) pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$ ,  $\varrho(\gamma)$  est de torsion si et seulement si  $\gamma$  est de torsion,  $\gamma$  est de type hyperbolique si et seulement si  $\varrho(\gamma)$  est une isométrie hyperbolique.
- (vi) pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$ ,  $\ell(\varrho(\gamma)) = \ell(\gamma)$ .

*Preuve* : (i) est une conséquence immédiate du fait que, puisque l'action est propre, l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) = 0$  est fini. (ii) découle immédiatement du Lemme 8.11 et du fait que l'action de  $\varrho(\Gamma)$  sur  $(X, d)$  est fidèle (par construction) et propre.

Si  $\Gamma \backslash X$  est de diamètre borné par  $D$ , il est compact d'après le Lemme 8.12 (ii). Les propriétés (iii) et (iv) étant de ce fait évidentes, démontrons (v) : en effet,  $\gamma^n = e$  implique que  $\varrho(\gamma)^n = \text{id}_X$  ; réciproquement  $\varrho(\gamma)^n = \text{id}_X$  si et seulement si  $\gamma^n \in \text{Ker } \varrho$ , ce qui implique qu'il existe des entiers distincts  $p, q$  tels que  $\gamma^{np} = \gamma^{nq}$  (en vertu de la finitude de  $\text{Ker } \varrho$ ), donc que  $\gamma$  est de torsion. Il s'ensuit que  $\varrho(\gamma)$  est de torsion si et seulement si  $\gamma$  est de torsion. Enfin, par définition, pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $\gamma^k x := \varrho(\gamma)^k x$ , ce qui prouve d'une part que  $\gamma$  est de type hyperbolique si et seulement si  $\varrho(\gamma)$  l'est et d'autre part que  $d(x, \gamma^k x) = d(x, \varrho(\gamma)^k x)$  ; en divisant par  $k$  on obtient, à la limite quand  $k \rightarrow +\infty$ ,  $\ell(\varrho(\gamma)) = \ell(\gamma)$ .  $\square$

**Lemme 5.6.** *Sous les hypothèses et notations du Théorème 5.3, pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma^*$  qui n'est pas de torsion, si on pose  $R_0 := \delta \cdot M_0$ , pour tout point  $x_0 \in X$  tel que  $R_\gamma(x_0) \geq R_0$  (de tels points existent), nous avons les résultats suivants :*

(i) il existe un entier  $k_0 > 0$  tel que  $R_\gamma(x_0) = d(x_0, \gamma^{k_0} x_0)$  et alors

$$\text{Min} \left( \frac{R_\gamma(x_0)}{k_0 \ell(\gamma)} ; 2 \exp \left( \frac{R_\gamma(x_0)}{12 \delta} \right) \right) + 1 < 3^{12} e^{16 \text{Ent}(X,d) R_\gamma(x_0)} ,$$

(ii) si de plus  $\text{Ent}(X, d) \leq \frac{1}{750 \delta}$ , alors  $k_0 \ell(\gamma) \geq 3^{-12} R_\gamma(x_0) e^{-\frac{2 R_\gamma(x_0)}{93 \delta}}$ ,

(iii) pour tout  $z \in X$  et tout  $R \geq 3(d(x_0, z) + d(z, \gamma z))$ , on a :

$$\text{Ent}(X, d) \leq \frac{1}{750 \delta} \implies \frac{\ell(\gamma)}{R_\gamma(x_0)} > \frac{3^{-12}}{2} \left( \frac{R + 2d(x_0, z)}{R_\gamma(x_0)} \right)^{-20} e^{-\frac{65}{2} \text{Ent}(X,d) (R+2d(x_0,z))} .$$

*Preuve* : Si  $\varrho$  est la représentation de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(X, d)$  associée à l'action considérée, le Lemme 5.5 prouve que l'action du groupe  $\varrho(\Gamma)$  sur  $(X, d)$  vérifie également les hypothèses du Théorème 5.3; de plus, pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$ , si  $\gamma$  n'est pas de torsion, alors  $\varrho(\gamma)$  n'est pas de torsion et vérifie  $\ell(\varrho(\gamma)) = \ell(\gamma)$  et  $R_{\varrho(\gamma)}(x) = R_\gamma(x)$  pour tout  $x \in X$ . Ceci prouve que, pour démontrer le Lemme 5.6 pour toute action d'un groupe  $\Gamma$  vérifiant les hypothèses du Théorème 5.3, il suffit de le démontrer lorsque  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(X, d)$  vérifiant les hypothèses du Théorème 5.3.

Nous supposons donc dorénavant que  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(X, d)$ .

*Preuve de (i)* :  $\Gamma \backslash X$  est alors compact d'après le Lemme 8.12 (ii) et la Proposition 8.22 (ii) assure que  $\gamma$  n'agit pas par isométrie parabolique; comme  $\gamma$  n'est pas de torsion, il n'est pas elliptique d'après la Remarque 8.14 (i) et  $\gamma$  est automatiquement une isométrie de type hyperbolique. Le Lemme 4.7 établit alors l'existence de points  $x \in X$  tels que  $R_\gamma(x) \geq R_0$ . L'action étant propre, il existe un entier  $k_0 > 0$  tel que  $d(x_0, \gamma^{k_0} x_0) = R_\gamma(x_0)$ ; comme le Lemme 8.18 (iii) donne, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$d(x_0, \gamma^{k_0 n} x_0) \leq R_\gamma(x_0) + (n-1) \ell(\gamma^{k_0}) + 4 \delta \frac{\ln(n)}{\ln(2)} , \quad (14)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \#\{n \in \mathbb{N}^* : d(x_0, \gamma^{k_0 n} x_0) < 2 R_\gamma(x_0)\} &\geq \#\left\{n \in \mathbb{N}^* : (n-1) k_0 \ell(\gamma) \leq \frac{R_\gamma(x_0)}{2} \text{ et } 4 \delta \frac{\ln(n)}{\ln(2)} < \frac{R_\gamma(x_0)}{2}\right\} \\ &\geq \text{Min} \left( 1 + \left\lfloor \frac{R_\gamma(x_0)}{2 k_0 \ell(\gamma)} \right\rfloor ; e^{\frac{R_\gamma(x_0) \ln 2}{8 \delta}} - 1 \right) > \text{Min} \left( \frac{R_\gamma(x_0)}{2 k_0 \ell(\gamma)} ; e^{\frac{R_\gamma(x_0)}{12 \delta}} \right) , \end{aligned} \quad (15)$$

où la dernière inégalité découle du fait que, puisque  $R_\gamma(x_0) \geq R_0 \geq 720 \delta$ , on a :

$$e^{R_\gamma(x_0) \ln 2 / (8 \delta)} - e^{R_\gamma(x_0) / (12 \delta)} = e^{R_\gamma(x_0) / (12 \delta)} \left( e^{\frac{R_\gamma(x_0)}{\delta} \left( \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{12} \right)} - 1 \right) \geq e^{60} \left( e^{720 \left( \frac{\ln 2}{8} - \frac{1}{12} \right)} - 1 \right) > 1 .$$

Par ailleurs, la propriété (i) du lemme 5.4 donne

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(x_0, \gamma^k x_0) < 2 R_\gamma(x_0)\} \leq 3^{12} e^{16 \text{Ent}(X,d) R_\gamma(x_0)} .$$

La propriété (i) découle de cette dernière inégalité et de (15).

*Preuve de (ii)* : Si  $\text{Ent}(X, d) \leq \frac{1}{750 \delta}$ , en rappelant qu'il existe un point  $x_0 \in X$  tel que  $R_\gamma(x_0) \geq R_0$  et que, dans ce cas,  $\frac{R_\gamma(x_0)}{24 \delta} \geq \frac{R_0}{24 \delta} \geq 30 > 12 \ln 3$ , la propriété (i) donne :

$$\text{Min} \left( \frac{R_\gamma(x_0)}{k_0 \ell(\gamma)} ; 2 e^{\frac{R_\gamma(x_0)}{12 \delta}} \right) + 1 < 3^{12} e^{16 \text{Ent}(X,d) R_\gamma(x_0)} < 3^{12} e^{\frac{2 R_\gamma(x_0)}{93 \delta}} < e^{\frac{R_\gamma(x_0)}{12 \delta}} ,$$

Ceci prouve que  $\frac{R_\gamma(x_0)}{k_0 \ell(\gamma)} < 3^{12} e^{\frac{2 R_\gamma(x_0)}{93 \delta}}$  et achève de démontrer (ii).



*Preuve de (iii) :* Pour simplifier, nous noterons dans cette preuve  $H := \text{Ent}(X, d)$ ,  $R' := d(x_0, z)$  et  $A := d(z, \gamma z)$ . Le Lemme 8.18 (iii) assure que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$d(z, \gamma^k z) \leq d(z, \gamma z) + (k-1)\ell(\gamma) + 4\delta \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \leq A + (k-1)\ell(\gamma) + 4\delta \frac{\ln(k)}{\ln(2)} ;$$

puisque  $R > 2(R' + A)$ , ceci implique que

$$\#\{k \in \mathbb{N} : d(z, \gamma^k z) < R\} \geq \#\left\{k \in \mathbb{N} : k < \frac{R - 2R' - 2A}{2\ell(\gamma)} + 1 \text{ et } \frac{\ln(k)}{\ln(2)} \leq \frac{R + 2R'}{8\delta}\right\} ,$$

et il s'ensuit que

$$\#\{k \in \mathbb{Z} : d(z, \gamma^k z) < R\} > \text{Min} \left( \frac{R - 2R' - 2A}{\ell(\gamma)} , 2 \cdot 2^{(R+2R')/8\delta} - 1 \right) .$$

Par définition de  $R$ , on a  $R \geq d(z, \gamma z) \geq R_\gamma(z)$ , ce qui nous autorise à appliquer l'inégalité (ii) du Lemme 5.4 qui, reliée à l'inégalité qui précède (en remarquant que  $2^{\frac{R+2R'}{8\delta}}$  est supérieur à 1), donne :

$$\text{Min} \left( \frac{R - 2R' - 2A}{\ell(\gamma)} , 2^{(R+2R')/8\delta} \right) < 3^{12} \left( \frac{R + 2R'}{R_\gamma(x_0)} \right)^{12 \frac{\ln 3}{\ln 2}} e^{\frac{65}{2} H (R+2R')} . \quad (16)$$

L'inégalité triangulaire assure que  $R_\gamma(x_0) \leq 2R' + A$  donc, par le choix de la valeur de  $R$ , on a  $2(R + 2R') \geq 10R' + 6A > 5R_\gamma(x_0)$ , et par conséquent  $\frac{R_\gamma(x_0)}{2(R + 2R')} \ln \left( \frac{2(R + 2R')}{R_\gamma(x_0)} \right) \leq \frac{\ln 5}{5}$ .

De ceci et du fait que  $H \leq \frac{1}{750\delta}$ , nous déduisons les deux inégalités

$$\frac{65}{128} \frac{R + 2R'}{8\delta} \ln 2 > \frac{65}{2} H (R + 2R') \quad , \quad \frac{32}{128} \frac{R + 2R'}{8\delta} \ln 2 > 12 \frac{\ln 3}{\ln 2} \ln \left( \frac{2(R + 2R')}{R_\gamma(x_0)} \right) ,$$

qui impliquent que

$$2^{(R+2R')/8\delta} > 3^{12} \left( \frac{R + 2R'}{R_\gamma(x_0)} \right)^{12 \frac{\ln 3}{\ln 2}} e^{\frac{65}{2} H (R+2R')}$$

et, en reportant dans (16), nous en déduisons que

$$\frac{R - 2R' - 2A}{\ell(\gamma)} < 3^{12} \left( \frac{R + 2R'}{R_\gamma(x_0)} \right)^{12 \frac{\ln 3}{\ln 2}} e^{\frac{65}{2} H (R+2R')} ;$$

comme nous avons vu que  $R_\gamma(x_0) \leq 2R' + A$ , ceci prouve (iii) en prouvant que :

$$\frac{\ell(\gamma)}{R_\gamma(x_0)} \geq \frac{\ell(\gamma)}{2(R - 2R' - 2A)} > \frac{3^{-12}}{2} \left( \frac{R + 2R'}{R_\gamma(x_0)} \right)^{-20} e^{-\frac{65}{2} H (R+2R')} . \quad \square$$

*Preuve du Théorème 5.3 :* Nous avons déjà vu (cf. le début de la preuve du Lemme 5.6) que l'image  $\varrho(\Gamma)$  de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(X, d)$  est un groupe dont l'action sur  $(X, d)$  vérifie également les hypothèses du Théorème 5.3. De plus, si les conclusions du Théorème 5.3 sont prouvées pour l'action du groupe  $\varrho(\Gamma)$ , elles le sont automatiquement pour l'action du groupe  $\Gamma$  : en effet, les entropies associées à ces deux actions sont identiques (cf. le Lemme 5.5 (iii)), de plus le Lemme 5.5 (v) et (vi) implique que, si  $\gamma$  n'est pas de torsion, alors  $\varrho(\gamma)$  n'est pas de torsion et vérifie  $\ell(\varrho(\gamma)) = \ell(\gamma)$ . Pour démontrer le Théorème 5.3 pour toute action d'un groupe  $\Gamma$  (vérifiant les hypothèses), il suffit de le démontrer lorsque  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(X, d)$ .

*Nous supposons donc dorénavant que  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(X, d)$ .*

$\Gamma \backslash X$  est alors compact d'après le Lemme 8.12 (ii). Pour simplifier, posons  $H := \text{Ent}(X, d)$ . Si

$H > \frac{1}{750\delta}$  ou si  $\ell(\gamma) > \text{Max}\left(\frac{\delta}{2500}, 10^{-5}D\right) > \frac{3^{-12}}{5} \delta M_0$  pour tous les éléments  $\gamma$  de  $\Gamma^*$  qui ne sont pas de torsion, le Théorème 5.3 est trivialement vérifié, c'est pourquoi nous supposons dorénavant (en raisonnant par l'absurde) que  $H \leq \frac{1}{750\delta}$  et qu'il existe des éléments  $\gamma \in \Gamma^*$  qui ne sont pas de torsion et vérifient  $\ell(\gamma) \leq \text{Max}\left(\frac{\delta}{2500}, 10^{-5}D\right)$ ; fixons un quelconque de ces éléments, noté  $\gamma$ . La Proposition 8.22 (ii) assure que  $\gamma$  n'est pas une isométrie parabolique; comme  $\gamma$  n'est pas de torsion, il n'est pas elliptique d'après la Remarque 8.14 (i)) et  $\gamma$  est automatiquement une isométrie de type hyperbolique et vérifie donc  $\ell(\gamma) > 0$ . Posons  $R_0 := \delta M_0 = \text{Max}[20(D + 2\delta), 720\delta]$ . En vertu du Lemme 8.20 (i), la majoration ci-dessus de  $\ell(\gamma)$  implique que

$$s(\gamma) := \inf_{x \in X} d(x, \gamma x) \leq \ell(\gamma) + \delta \leq \delta + \text{Max}\left(\frac{\delta}{2500}, 10^{-5}D\right) < \frac{R_0}{719}, \quad (17)$$

Les lemmes 4.8 (ii) et 4.7 assurent que le domaine de Margulis  $M_{R_0}(\gamma)$  et  $X \setminus M_{R_0}(\gamma)$  sont non vides; de ceci, le théorème des valeurs intermédiaires déduit l'existence d'un point  $x_1 \in X$  tel que  $R_\gamma(x_1) := \text{Min}_{k \in \mathbb{N}^*} d(x_1, \gamma^k x_1) = R_0$ ; fixons un tel point  $x_1$ . Notons  $k_0$  un entier positif tel que ce minimum soit atteint (i. e.  $d(x_1, \gamma^{k_0} x_1) = R_0$ ); le Lemme 5.6 (ii) assure alors que

$$k_0 \ell(\gamma) \geq \varepsilon'_0 \quad \text{où} \quad \varepsilon'_0 := 3^{-12} R_0 e^{-\frac{2R_0}{93\delta}}. \quad (18)$$

Notons  $k_1$  le plus petit entier positif tel que  $k_1 k_0 \ell(\gamma) > 3\delta$ , on a alors

$$1 \leq k_1 \leq \left\lceil \frac{3\delta}{\varepsilon'_0} \right\rceil + 1 \quad \text{et} \quad (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) \leq 3\delta, \quad (19)$$

où la première propriété découle de (18) et la seconde de la définition de  $k_1$ .

Posons  $g := \gamma^{k_1 k_0}$ , l'inégalité (14) assure que

$$d(x_1, g x_1) \leq R_0 + (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + 4\delta \frac{\ln(k_1)}{\ln(2)} \leq \frac{9R_0}{8} + (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + 45\delta, \quad (20)$$

où la dernière inégalité découle du fait que, en vertu de (19), un calcul direct donne :

$$\ln(k_1) \leq \ln\left(1 + 3^{13} \frac{\delta}{R_0} e^{\frac{2R_0}{93\delta}}\right) \leq \ln\left(3^{13} \frac{\delta}{R_0} e^{\frac{2R_0}{93\delta}}\right) + 3^{-13} \frac{R_0}{\delta} e^{-\frac{2R_0}{93\delta}},$$

dont on déduit que

$$4 \frac{\ln(k_1)}{\ln(2)} \leq \frac{4}{\ln 2} \left(13 \ln 3 - \ln 720 + \frac{R_0}{\delta} \left(\frac{2}{93} + 3^{-13}\right)\right) \leq 45 + \frac{R_0}{8\delta}.$$

Rappelons que l'action de  $\gamma$  sur  $X \cup \partial X$  admet exactement deux points fixes  $\gamma^-, \gamma^+ \in \partial X$ ; comme  $M(g) = M(\gamma)$  (car  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  sont aussi les points fixes de  $g$ ) et comme  $\ell(g) = k_1 k_0 \ell(\gamma) > 3\delta$ , le Lemme 4.4 donne :

$$d(x_1, M(\gamma)) = d(x_1, M(g)) \leq \frac{1}{2}(d(x_1, g x_1) - \ell(g)) + 3\delta \leq \frac{1}{2} \left(\frac{9R_0}{8} - k_0 \ell(\gamma)\right) + \frac{51}{2} \delta \quad (21)$$

où la dernière inégalité découle de la définition de  $g$  et de (20).

Fixons n'importe quelle géodésique  $c \in \mathcal{G}(\gamma)$ , telle que la distance de  $x_1$  à l'image de  $c$  soit majorée par  $d(x_1, M(\gamma)) + \varepsilon$ , notons  $c(t_k)$  un projeté de  $g^k x_1$  sur l'image de  $c$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $d(c(t_k), c(t_{k+1})) > 3\delta$  on a, d'après l'inégalité (20) et le Lemme 8.8,

$$\frac{9R_0}{8} + (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + 51\delta \geq d(x_1, g x_1) + 6\delta = d(g^k x_1, g^{k+1} x_1) + 6\delta$$

$$\geq d(g^k x_1, c(t_k)) + d(c(t_k), c(t_{k+1})) + d(c(t_{k+1}), g^{k+1} x_1) \geq 2 d(x_1, M(\gamma)) + d(c(t_k), c(t_{k+1})) ,$$

où la dernière inégalité découle du fait que  $g^{-k} \circ c$  et  $g^{-(k+1)} \circ c$  sont deux géodésiques de  $\mathcal{G}(\gamma)$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a donc

$$\begin{aligned} d(c(t_k), c(t_{k+1})) &\leq \text{Max} \left( \frac{9R_0}{8} + (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + 51 \delta - 2 d(x_1, M(\gamma)) , 3\delta \right) = \\ &= \frac{9R_0}{8} + (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + 51 \delta - 2 d(x_1, M(\gamma)) , \end{aligned}$$

où la dernière égalité se déduit de l'inégalité (21) et du fait que  $k_1 k_0 \ell(\gamma) > 3\delta$ . Nous en déduisons

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad d(c(t), c(t_k)) \leq \frac{9}{16} R_0 + \frac{1}{2} (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + \frac{51}{2} \delta - d(x_1, M(\gamma)) . \quad (22)$$

Par ailleurs, si  $c(t'_k)$  est un projeté de  $g^k \circ c(t_0)$  sur l'image de la géodésique  $c$ , les géodésiques  $c$  et  $g^k \circ c$  joignant les mêmes points fixes  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ , on peut leur appliquer la Proposition 8.9 (i), ce qui implique que  $d(g^k \circ c(t_0), c(t'_k)) \leq 2\delta$  et donc que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} d(g^k x_1, c(t_k)) &\leq d(g^k x_1, c(t'_k)) \leq d(g^k x_1, g^k \circ c(t_0)) + d(g^k \circ c(t_0), c(t'_k)) \\ &\leq d(x_1, c(t_0)) + 2\delta \leq d(x_1, M(\gamma)) + 2\delta + \varepsilon \end{aligned}$$

De ceci et de la Propriété (22), nous déduisons que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tel que

$$d(c(t), g^k x_1) \leq d(c(t), c(t_k)) + d(c(t_k), g^k x_1) \leq \frac{9}{16} R_0 + \frac{1}{2} (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + \frac{51}{2} \delta + 2\delta + \varepsilon ,$$

ce qui donne, en utilisant la dernière des inégalités (19)

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \min_{k \in \mathbb{Z}} d(c(t), g^k x_1) \leq \frac{9}{16} R_0 + 29\delta + \varepsilon < \frac{8}{13} R_0 + \varepsilon . \quad (23)$$

Remarquons maintenant que, comme  $\gamma$  est une isométrie hyperbolique, l'ensemble  $M_{\min}(\gamma)$  est fermé et non vide d'après le Lemme 4.10 (iv). Fixons n'importe quel point  $y \in M_{\min}(\gamma)$  et considérons des projetés  $c(t)$  et  $c(t')$  de  $y$  et  $\gamma y$  (respectivement) sur l'image de la géodésique  $c$  introduite ci-dessus et fixons  $k_2 \in \mathbb{Z}$  tel que  $d(c(t), g^{k_2} x_1) \leq \frac{9}{16} R_0 + 29\delta + \varepsilon$  (un tel nombre existe d'après (23)); alors nous avons deux possibilités :

- **Premier cas :** Si  $d(c(t), c(t')) > 3\delta$ , en y ajoutant l'inégalité triangulaire puis le Lemme 8.8, nous en déduisons :

$$d(y, c(t)) + 3\delta + d(y, c(t')) - d(y, \gamma y) < d(y, c(t)) + d(c(t), c(t')) + d(\gamma y, c(t')) \leq d(y, \gamma y) + 6\delta ;$$

en remarquant que  $d(y, c(t')) \geq d(y, c(t)) + d(c(t), c(t')) - 2\delta > d(y, c(t)) + \delta$  (d'après le Lemme 8.7) et que  $d(y, \gamma y) = s(\gamma) < \frac{R_0}{719}$  (d'après l'inégalité (17)), ceci implique que  $d(y, c(t)) < s(\gamma) + \delta < \frac{R_0}{719} + \delta$ . De ceci, de l'inégalité triangulaire, de la définition de  $k_2$  (par la propriété (23)) et du fait que  $29\delta + \delta \leq \frac{R_0}{24}$  (par définition de  $R_0$ ), nous déduisons :

$$d(x_1, g^{-k_2} y) = d(g^{k_2} x_1, y) \leq d(g^{k_2} x_1, c(t)) + d(c(t), y) < \frac{25}{41} R_0 + \varepsilon .$$

Comme  $M_{\min}(\gamma)$  est stable sous l'action des puissances de  $\gamma$ , donc sous l'action des puissances de  $g$ , le point  $x = g^{-k_2} y$  appartient à  $M_{\min}(\gamma)$ ; on déduit donc de la dernière inégalité (en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro) qu'il existe un point  $x \in M_{\min}(\gamma)$  tel que

$$d(x_1, x) \leq \frac{25}{41} R_0 \quad (24)$$

Fixons ce point  $x$ . Nous pouvons appliquer le Lemme 5.6 (iii) aux points  $x_1$  et  $x$ , en remarquant que  $R_\gamma(x_1) = R_0$  et en y posant  $R := 3(d(x_1, x) + d(x, \gamma x))$ ; d'après les

estimées (24), puis (17), on a :  $R \leq \frac{75}{41}R_0 + 3s(\gamma) \leq \left(\frac{75}{41} + \frac{3}{719}\right)R_0 < \frac{50}{27}R_0$  et, d'après (24),  $R + 2d(x_1, x) < \frac{50}{27}R_0 + \frac{50}{41}R_0 < \frac{77}{25}R_0$ . Comme nous sommes dans le cas où  $\text{Ent}(X, d) \leq \frac{1}{750\delta}$ , l'application du Lemme 5.6 (iii) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\gamma)}{R_0} &> \frac{3^{-12}}{2} \left( \frac{R + 2d(x_1, x)}{R_0} \right)^{-20} e^{-\frac{65}{2} \text{Ent}(X, d) (R + 2d(x_1, x))} \\ &> \frac{3^{-12}}{2} \left( \frac{25}{77} \right)^{20} e^{-\frac{4}{29} \frac{R_0}{\delta}} > 3^{-34} e^{-\frac{4}{29} \frac{R_0}{\delta}}, \end{aligned}$$

— **Second cas :** Si  $d(c(t), c(t')) \leq 3\delta$ , notons  $c(t'')$  un projeté de  $\gamma \circ c(t)$  sur l'image de la géodésique  $c$ , l'inégalité triangulaire donne alors :

$$d(c(t), \gamma \circ c(t)) \leq |t - t'| + |t' - t''| + d(c(t''), \gamma \circ c(t)) \quad (25)$$

- Si  $|t' - t''| \leq 3\delta$ , nous reportons dans l'inégalité (25) les hypothèses faites sur  $d(c(t), c(t'))$  et sur  $|t' - t''|$  ainsi que l'inégalité  $d(\gamma \circ c(t), c(t'')) = \inf_{s \in \mathbb{R}} d(\gamma \circ c(t), c(s)) \leq 2\delta$  (cette dernière inégalité découlant de la Proposition 8.9 (i), appliquée aux deux géodésiques  $c$  et  $\gamma \circ c$  qui joignent la même paire de points fixes  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ ); nous obtenons :  $d(c(t), \gamma \circ c(t)) \leq 8\delta$ .
- Si  $|t' - t''| > 3\delta$ , le Lemme 8.8 donne :

$$\begin{aligned} d(y, c(t)) + 6\delta &= d(\gamma y, \gamma \circ c(t)) + 6\delta \geq d(\gamma y, c(t')) + |t' - t''| + d(c(t''), \gamma \circ c(t)) \\ &\geq d(y, c(t')) - d(y, \gamma y) + |t' - t''| + d(c(t''), \gamma \circ c(t)) \\ &\geq d(y, c(t)) + |t - t'| - 2\delta - s(\gamma) + |t' - t''| + d(c(t''), \gamma \circ c(t)), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une conséquence du Lemme 8.7. En reportant cette estimée dans l'inégalité (25), nous obtenons que  $d(c(t), \gamma \circ c(t)) \leq 8\delta + s(\gamma) < \frac{R_0}{719} + 8\delta$ .

Dans ce second cas, on a donc toujours

$$d(c(t), \gamma \circ c(t)) < \frac{R_0}{719} + 8\delta < \frac{R_0}{79} \quad (26)$$

Comme  $g$  est une puissance de  $\gamma$ , on a, pour tout  $p \in \mathbb{Z}^*$ ,  $d(\gamma^p(g^{k_2} x_1), g^{k_2} x_1) = d(\gamma^p x_1, x_1)$ , et par conséquent  $R_\gamma(g^{k_2} x_1) = R_\gamma(x_1) = R_0$ ; nous pouvons donc appliquer le Lemme 5.6 (iii) aux points  $g^{k_2} x_1$  et  $c(t)$ , en y posant  $R := 3 [d(g^{k_2} x_1, c(t)) + d(c(t), \gamma c(t))]$ ; de la définition de  $k_2$  (en vertu de la propriété (23)) et de l'inégalité (26) on déduit :

$R < 3 \left( \frac{8}{13} R_0 + \frac{R_0}{79} + \varepsilon \right) < \frac{17}{9} R_0 + 3\varepsilon$ . De ceci et de la définition de  $k_2$  (en vertu de (23)) on tire :  $R + 2d(g^{k_2} x_1, c(t)) < \frac{78}{25} R_0 + 5\varepsilon$ . Comme nous sommes dans le cas où  $\text{Ent}(X, d) \leq \frac{1}{750\delta}$ , l'application du Lemme 5.6 (iii) donne :

$$\begin{aligned} \frac{\ell(\gamma)}{R_0} &> \frac{3^{-12}}{2} \left( \frac{R + 2d(g^{k_2} x_1, c(t))}{R_0} \right)^{-20} e^{-\frac{65}{2} \text{Ent}(X, d) (R + 2d(g^{k_2} x_1, c(t)))} \\ &> \frac{3^{-12}}{2} \left( \frac{78}{25} + \frac{5\varepsilon}{R_0} \right)^{-20} e^{-\left( \frac{4}{29} \frac{R_0}{\delta} + \frac{13}{60} \frac{\varepsilon}{\delta} \right)}, \end{aligned}$$

et on en déduit, en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro (et en remarquant que la marge prise dans

les calculs fait que l'inégalité reste stricte à la limite), que  $\frac{\ell(\gamma)}{R_0} > 3^{-34} e^{-\frac{4}{29} \frac{R_0}{\delta}}$ .  $\square$

### 5.2.2 Bornes inférieures universelles pour la croissance exponentielle

**Proposition 5.7.** *Pour tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire  $(X, d)$ , pour tout groupe  $\Gamma$ , pour toute action propre par isométries de ce groupe sur  $(X, d)$ , si le quotient  $\Gamma \backslash X$  est de diamètre majoré par  $D$ , alors*

$$\text{Ent}(X, d) \geq \frac{\ln 2}{L + 14\delta + 4D} \geq \frac{\ln 2}{16D + 26\delta},$$

où  $L = \inf\{\ell(\gamma) : \gamma \text{ élément de type hyperbolique de } \Gamma^*\}$ .

Sur les variétés riemanniennes, nous avons vu (dans la sous-section 3.3) que l'hypothèse "courbure de Ricci minorée" est beaucoup plus forte que l'hypothèse "entropie majorée"; de ce point de vue, la Proposition 5.7, qui donne une obstruction à ce qu'un espace soit d'entropie presque nulle, peut-être vue comme une version très généralisée des obstructions classiques à ce qu'une variété riemannienne soit de courbure de Ricci presque positive.

L'entropie d'un groupe relativement à un système donné de générateurs étant définie en sous-section 3.1, nous obtenons le

**Corollaire 5.8.** *Tout groupe  $\Gamma$ , non-élémentaire, muni d'un système fini  $\Sigma$  de générateurs qui en fait un groupe  $\delta$ -hyperbolique, vérifie*

$$\text{Ent}(\Gamma, \Sigma) \geq \frac{\ln 2}{26\delta + 16}.$$

Afin de démontrer ces énoncés, commençons par établir le Lemme suivant :

**Lemme 5.9.** *Sous les hypothèses de la Proposition 5.7, il existe un  $x \in X$  et un  $\gamma \in \Gamma$ , qui est de type hyperbolique et tel que  $d(x, \gamma x) \leq 12(D + \delta)$ .*

*Preuve :* Posons  $R := 5D + 6\delta$ . Considérons deux points quelconques du bord idéal et une géodésique  $c$  qui joint ces deux points; fixons une origine  $x := c(0)$  quelconque sur cette géodésique, les points  $y := c(R)$  et  $z := c(-R)$  soient à distance au plus  $D$  de  $\Gamma x$ , ce qui implique qu'il existe  $g, h \in \Gamma$  tels que  $R - D \leq d(x, gx) \leq R + D$ ,  $R - D \leq d(x, hx) \leq R + D$  et  $2R - 2D \leq d(gx, hx) \leq 2R + 2D$ . Considérons le produit de Gromov de point-base  $x$  (voir sa définition au début de la section 8.1), nous obtenons

$$(gx | hx)_x := \frac{1}{2} (d(x, gx) + d(x, hx) - d(gx, hx)) \leq 2D,$$

ce qui implique que

$$\text{Max}[d(x, gx); d(x, hx)] \geq R - D = 4D + 6\delta \geq 2(gx | hx)_x + 6\delta.$$

Un des trois éléments  $g$ ,  $h$  ou  $gh$  est de type hyperbolique : en effet, si  $g$  et  $h$  ne sont pas de type hyperbolique, la dernière inégalité ci-dessus assure que les hypothèses du Lemme 9.2.3 page 98 de [CDP90] sont vérifiées, et ce Lemme implique alors que  $gh$  est de type hyperbolique. Comme  $d(x, ghx) \leq d(x, gx) + d(x, hx) \leq 2R + 2D$ , on en déduit qu'il existe toujours un  $\gamma \in \Gamma^*$  qui est de type hyperbolique et vérifie  $d(x, \gamma x) \leq 2R + 2D = 12(D + \delta)$ .  $\square$

*Preuve de la Proposition 5.7 :* Le Lemme 5.9 prouve qu'on peut fixer  $x \in X$  et un  $\gamma \in \Gamma$ , qui est de type hyperbolique et tel que  $d(x, \gamma x) \leq 12(D + \delta)$ , ce qui implique en particulier que  $L$  est correctement défini et que  $L \leq 12(D + \delta)$ . Ceci prouve aussi que, dans la Proposition 5.7, la seconde inégalité est une conséquence directe de la première.

Reste à prouver la première inégalité : la propriété de l'action implique l'existence d'un  $\sigma$  de type hyperbolique tel que  $\ell(\sigma) = L > 0$ . Notons  $N$  le plus petit entier strictement supérieur à  $\frac{13\delta}{L}$  et posons  $a := \sigma^N$ . Fixons un point  $x_0 \in M_{\min}(\gamma)$ , en nous appuyant sur le Lemme 8.20 (i), nous obtenons :

$$13\delta < NL = \ell(a) \leq d(x_0, ax_0) = s(a) \leq \ell(a) + \delta = NL + \delta \leq L + 14\delta. \quad (27)$$

Un résultat de M. Gromov ([Gro07] Proposition 3.22, dont la preuve est écrite pour des variétés riemanniennes, mais qui s'adapte facilement aux espaces métriques connexes par arcs<sup>8</sup>) démontre que  $\Sigma_{2D}(x_0) := \{\sigma \in \Gamma^* : d(x_0, \sigma x_0) \leq 2D\}$  est un système de générateurs de  $\Gamma$  ; la propriété de l'action assure que ce système générateur est fini.

Ce résultat prouve qu'il est possible de trouver un  $b \in \Sigma_{2D}(x_0)$  qui ne laisse pas globalement invariant l'ensemble  $\{a^-, a^+\}$  des points fixes de  $a$  (sinon tout élément de  $\Gamma$  laisserait globalement invariant l'ensemble  $\{a^-, a^+\}$  et  $\Gamma$  serait élémentaire). Fixons ce choix de  $b$  ; si  $b^{-1}ab$  laissait globalement invariant l'ensemble  $\{a^-, a^+\}$ , alors  $\{a^-, a^+\}$  serait l'ensemble des points fixes de  $b^{-1}a^2b$  et coïnciderait donc avec  $\{b(a^-), b(a^+)\}$ , ce qui a été exclu par choix de  $b$ , donc  $b^{-1}ab$  ne laisse pas globalement invariant l'ensemble des points fixes de  $a$ . Ce dernier résultat, la Proposition 8.21 (v) et le fait que  $a$  et  $b^{-1}ab$  sont tous deux de type hyperbolique assurent que le sous-groupe  $\Gamma' := \langle a, b^{-1}ab \rangle$  engendré par  $\Sigma' = \{a, a^{-1}, b^{-1}ab, b^{-1}a^{-1}b\}$  n'est pas virtuellement cyclique ; de plus, comme  $\ell(a) = \ell(b^{-1}ab) > 13\delta$  en vertu de (27), on peut appliquer la Proposition 6.7 qui démontre qu'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{b^{-1}ab, a\}$  ou par  $\{b^{-1}ab, a^{-1}\}$  est libre, ce qui implique que  $\text{Ent}(\Gamma', \Sigma') \geq \ln 2$  (en effet le nombre de mots de longueur  $k$  qu'on peut former en prenant les lettres dans  $\Sigma'$  est au moins égal à  $2^k$ ). D'autre part, les inégalités (27), puis l'inégalité triangulaire, démontrent que  $d(x_0, ax_0) \leq L + 14\delta$  et que  $d(x_0, b^{-1}abx_0) \leq 2d(x_0, bx_0) + d(x_0, ax_0) \leq L + 14\delta + 4D$ . De ce qui précède et du Lemme 3.6 nous déduisons que

$$\text{Ent}(X, d) \geq \frac{\text{Ent}(\Gamma', \Sigma')}{\text{Max}[d(x_0, ax_0); d(x_0, b^{-1}abx_0)]} \geq \frac{\ln 2}{L + 14\delta + 4D} \cdot \square$$

**Remarque 5.10.** Nous aurions pu obtenir (par une preuve similaire à celle que nous venons de faire) la Proposition 5.7 comme corollaire du Théorème 5.3, mais nous avons voulu souligner (par la simplicité de la démonstration de la Proposition 5.7 donnée ci-dessus comparée à la difficulté de la Preuve du Théorème 5.3) le fait que Théorème 5.3 est un résultat potentiellement beaucoup plus fort que la Proposition 5.7. En effet (si on suppose que l'entropie de  $(X, d)$  n'est pas minorée par  $\frac{1}{750\delta}$ ) démontrer la Proposition 5.7 revient à prouver l'existence d'un élément sans torsion  $\gamma \in \Gamma^*$  tel que  $\ell(\gamma) \leq C(\delta, D)$ , alors que le Théorème 5.3 établit que *tout* élément sans torsion  $\gamma \in \Gamma^*$  vérifie  $\ell(\gamma) \geq C'(\delta, D)$ .

*Preuve du Corollaire 5.8 :* Nous avons vu en section 2 que l'hypothèse de  $\delta$ -hyperbolicité du groupe signifie que le graphe de Cayley  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$ , muni de la distance algébrique  $d_\Sigma$  est un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique ; l'action (par translation à gauche) de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$  est isométrique et propre car les boules de  $(G, d_\Sigma)$  sont de cardinal fini ; le fait que  $\Sigma$  est fini implique d'une part que  $(\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma), d_\Sigma)$  est un espace propre et d'autre part que le quotient  $\Gamma \backslash \mathcal{G}_\Sigma(\Gamma)$  est de diamètre majoré par  $D = 1$ . Comme  $\Gamma$  n'est pas élémentaire, son graphe de Cayley est un espace  $\delta$ -hyperbolique non-élémentaire, et on peut appliquer la Proposition 5.7, qui donne :

$$\text{Ent}(\Gamma, \Sigma) := \text{Ent}(\mathcal{G}_\Sigma(\Gamma), d_\Sigma) \geq \frac{\ln 2}{16D + 26\delta} = \frac{\ln 2}{16 + 26\delta} \cdot \square$$

### 5.3 Propriétés de Margulis pour les actions de groupes sur les espaces Gromov-hyperboliques

Rappelons que nous nous intéressons à tout espace  $\delta$ -hyperbolique (donc géodésique et propre)  $(X, d)$  et à toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  tels que l'entropie de  $(X, d)$  (pour au moins une mesure  $\Gamma$ -invariante) et le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  soient respectivement bornés par  $H$  et  $D$ . Dans les sous-sections qui suivent, à toute donnée de ces trois valeurs positives  $\delta$ ,  $H$  et  $D$  on associera, sans qu'il soit nécessaire de le rappeler, les constantes universelles

$$\varepsilon_0(\delta, H, D) := \frac{R_0}{N_0} \tag{28}$$

8. En effet, la connexité par arcs assure l'existence, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et pour tout  $\varepsilon > 0$ , d'un ensemble fini de points  $\{y_0, y_1, \dots, y_N\}$  tel que  $y_0 = y$ ,  $y_N = \gamma y$  et  $d(y_{i-1}, y_i) < \varepsilon$  pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ . On choisit  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_N \in \Gamma$  tels que  $d(y_i, \gamma_i y) \leq D$ , en choisissant  $\gamma_0 = e$  et  $\gamma_N = \gamma$  ; on a alors  $\gamma = \sigma_1 \dots \sigma_N$ , où  $\sigma_i = \gamma_{i-1}^{-1} \cdot \gamma_i$  appartient à  $\Sigma_{2D+\varepsilon}(y)$  et la finitude de  $\Sigma_{3D}(y)$  prouve qu'il est possible de choisir  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que  $\Sigma_{2D+\varepsilon}(y)$  coïncide avec  $\Sigma_{2D}(y)$ .

$$s_0(\delta, H, D) := 2 \cdot 3^{-12} e^{-\frac{1}{2}(N_0+10)(13H R_0+3)} R_0 \quad (29)$$

où  $R_0 := 20(D + 2\delta)$ , où  $N_0 := N\left(\left[3^{12} e^{490H(D+2\delta)}\right] + 1\right)$  et où la fonction  $N(\cdot)$  est définie au Théorème 5.11 qui suit. Rappelons également que, pour tout  $r > 0$  et tout  $x \in X$ , le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par les sous-ensemble fini  $\Sigma_r(x) = \{\gamma \in \Gamma^* : d(x, \gamma x) \leq r\}$  est noté  $\Gamma_r(x)$ .

### 5.3.1 Un premier Lemme “à la Margulis” sous hypothèse de doublement faible

Dans le théorème qui suit, étant donnés un groupe  $\Gamma$  et un sous ensemble  $B$  de  $\Gamma$ , on note  $B \cdot B$  l'image de  $B \times B$  par l'application  $(\gamma, g) \mapsto \gamma \cdot g$ . On notera donc  $B^k$  l'ensemble  $B \cdot \dots \cdot B$  ( $k$  fois).

**Théorème 5.11.** (E. Breuillard, B. Green, T. Tao, cf. [BGT12] Corollary 11.2) *Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , il existe un entier positif  $N = N(p)$  (ne dépendant que de  $p$ ) tel qu'on ait la propriété suivante pour tout groupe  $G$  et tout système symétrique fini  $S$  de générateurs de  $G$  : s'il existe un sous-ensemble fini  $A$  de  $G$  contenant  $S^{N(p)}$  tel que  $\#(A \cdot A) \leq p \cdot \#(A)$ , alors  $G$  est virtuellement nilpotent.*

Le corollaire suivant établit la première propriété de Margulis (i. e. la virtuelle nilpotence du groupe  $\Gamma_\varrho(x_0)$  lorsque  $\varrho$  est plus petit qu'une constante universelle  $\varrho_0$ ) sous une hypothèse de doublement faible. Ce corollaire est une version améliorée du corollaire établi par E. Breuillard, B. Green et T. Tao. L'amélioration consiste à remplacer l'hypothèse de “packing” (du type décrit dans la Définition 3.8) faite par E. Breuillard, B. Green et T. Tao par l'hypothèse de doublement faible de la mesure de comptage d'une orbite donnée, qui est plus faible en vertu du Lemme 3.12 et (plus généralement) en vertu du fait que, lorsqu'on compte le nombre maximal de boules disjointes de rayon  $r$  qu'on peut inclure dans une plus grosse boule, ce nombre est plus grand lorsqu'on ne met aucune condition sur la position des centres de ces boules que lorsqu'on astreint ces centres à être des points de l'orbite d'un groupe  $\Gamma$ .

**Corollaire 5.12.** *Pour toute donnée des paramètres  $r_0 > 0$  et  $C_0 > 1$ , pour tout espace métrique propre  $(X, d)$  et toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur cet espace, pour tout point  $x_0 \in X$ , si la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma \cdot x_0$  vérifie la condition de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [\frac{1}{2}r_0, \frac{5}{4}r_0]$  centrées en  $x_0$ , alors le sous-groupe  $\Gamma_\varrho(x_0)$  est virtuellement nilpotent pour tous les  $\varrho \leq \frac{r_0}{N([C_0^3] + 1)}$  (où  $N(\bullet)$  est défini au Théorème 5.11).*

Dans le cas  $\delta$ -hyperbolique (au sens de Gromov), nous en déduisons le

**Théorème 5.13.** *Pour tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  et toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur cet espace tels que le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  et l'Entropie de  $(X, d)$  soient respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , pour tout  $x \in X$  et tout  $\varrho \leq \varepsilon_0(\delta, H, D)$ , le sous-groupe  $\Gamma_\varrho(x)$  est virtuellement cyclique.*

*Preuve du Corollaire 5.12 :* Dans cette preuve, le rôle fondamental est joué d'abord par les Théorèmes 5.1 et 5.11, et ensuite par la Proposition 3.19 (i); une fois admis ces trois résultats, la preuve suit celle du Corollary 11.17 de [BGT12], en posant  $G := \Gamma_\varrho(x_0)$  et  $S := \Sigma_\varrho(x_0)$ . D'après la Proposition 3.19 (i), l'hypothèse de doublement faite sur l'orbite  $\Gamma \cdot x_0$  de  $\Gamma$  implique que la mesure de comptage  $\mu_{x_0}^G$  de l'orbite  $G \cdot x_0$  du sous-groupe  $G$  vérifie

$$\frac{\mu_{x_0}^G [\overline{B}_X(x_0, 2r_0)]}{\mu_{x_0}^G [\overline{B}_X(x_0, r_0)]} \leq \frac{\mu_{x_0}^G [\overline{B}_X(x_0, 2r_0)]}{\mu_{x_0}^G [B_X(x_0, r_0)]} \leq C_0^3. \quad (30)$$

On applique le Théorème 5.11 en posant  $p = [C_0^3] + 1$ ,  $A := \{\gamma \in G : d(x_0, \gamma x_0) \leq r_0\}$  et  $\varepsilon'_0 := \frac{r_0}{N(p)}$  : l'inégalité triangulaire et l'hypothèse  $\varrho \leq \varepsilon'_0$  donnent  $S^{N(p)} \subset \Sigma_{\varepsilon'_0}(x_0)^{N(p)} \subset A$  et  $A \cdot A \subset \{\gamma \in G : d(x_0, \gamma x_0) \leq 2r_0\}$ ; l'inégalité (30) permet d'en déduire que

$$\frac{\#(A \cdot A)}{\#(A)} \leq \frac{\#(\{\gamma \in G : d(x_0, \gamma x_0) \leq 2r_0\})}{\#(\{\gamma \in G : d(x_0, \gamma x_0) \leq r_0\})} = \frac{\mu_{x_0}^G [\overline{B}_X(x_0, 2r_0)]}{\mu_{x_0}^G [\overline{B}_X(x_0, r_0)]} \leq C_0^3 \leq p;$$

le Théorème 5.11 implique alors que le sous-groupe  $G = \Gamma_\varrho(x_0)$  engendré par  $S := \Sigma_\varrho(x_0)$  est virtuellement nilpotent.  $\square$

*Fin de la preuve du Théorème 5.13 :* Le Lemme 8.12 (ii) assure que  $\Gamma \backslash X$  est compact. Posons  $R_0 := 20(D+2\delta)$  et  $C_0 = 3^4 e^{\frac{490}{3} H(D+2\delta)}$ . Sous les hypothèses du Théorème 5.13, le Théorème 5.1 assure que, pour tout point  $x \in X$  et pour tout  $r \geq \frac{1}{2}R_0$ , la mesure de comptage  $\mu_x^\Gamma$  de l'orbite  $\Gamma x$  vérifie  $\frac{\mu_x^\Gamma(B_X(x, 2r))}{\mu_x^\Gamma(B_X(x, r))} \leq 3^4 e^{\frac{13}{2} H r}$ , donc que cette mesure vérifie la condition de  $C_0$ -doublement pour toutes les boules de rayon  $r \in [\frac{1}{2}R_0, \frac{5}{4}R_0]$  centrées en  $x$ . Comme  $\varepsilon_0(\delta, H, D)$  est égal à  $\frac{R_0}{N([C_0^3] + 1)}$ , le Corollaire 5.12 permet alors d'en déduire que, pour tout point  $x \in X$  et tout  $\varrho \leq \varepsilon_0(\delta, H, D)$ ,  $\Gamma_\varrho(x)$  est virtuellement nilpotent, donc virtuellement cyclique en vertu de la Proposition 8.22 (v).  $\square$

On déduit de ce qui précède la minoration suivante de la constante de Margulis  $L(a, b)$  (introduite dans la Définition 4.12) de toute paire d'éléments de  $\Gamma^*$  :

**Corollaire 5.14.** *Pour tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  et toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur cet espace tels que le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  et l'Entropie de  $(X, d)$  soient respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , toute paire  $\{a, b\}$  d'éléments hyperboliques de  $\Gamma^*$  qui n'engendre pas un groupe virtuellement cyclique vérifie  $L(a, b) \geq \varepsilon_0(\delta, H, D)$ .*

*Preuve :* Posons  $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(\delta, H, D)$  pour simplifier ; si  $L(a, b) < \varepsilon_0$ , il existe un point  $x$  et un couple  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  tels que  $d(x, a^p x) < \varepsilon_0$  et  $d(x, b^q x) < \varepsilon_0$ , donc tels que  $\langle a^p, b^q \rangle \subset \Gamma_{\varepsilon_0}(x)$ . Le Théorème 5.13 assurant que  $\Gamma_{\varepsilon_0}(x)$  est alors virtuellement cyclique, il s'ensuit que le sous-groupe  $\langle a^p, b^q \rangle$  est virtuellement cyclique, ce qui implique (d'après la Proposition 8.21 (v)) que  $a^p$  et  $b^q$  ont les mêmes points fixes sur le bord idéal de  $X$ , donc que  $a$  et  $b$  ont les mêmes points fixes (d'après la Remarque 8.14 (ii)), donc que tous les éléments de  $\langle a, b \rangle$  ont les mêmes points fixes, donc que  $\langle a, b \rangle$  est virtuellement cyclique d'après la Proposition 8.21 (ii), ce qui est contraire à l'hypothèse. On a donc  $L(a, b) \geq \varepsilon_0$ .  $\square$

### 5.3.2 Minoration de la diastole

**Définitions 5.15.** *Sur tout espace métrique  $(X, d)$ , pour toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$ , en tout point  $x \in X$ , définissons*

- $\text{sys}_\Gamma^{\text{wt}}(x)$  comme le minimum des  $d(x, \gamma x)$  quand  $\gamma$  parcourt l'ensemble des éléments  $\gamma \in \Gamma^*$  qui ne sont pas de torsion,
- la "partie  $r$ -mince<sup>9</sup> de  $X$ ", définie comme l'ensemble (ouvert) des  $x \in X$  tels que  $\text{sys}_\Gamma^{\text{wt}}(x) < r$  et notée  $X_r$ ,
- la "partie  $r$ -épaisse de  $X$ ", définie comme le complémentaire de  $X_r$ .

**Proposition 5.16.** *Pour tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire  $(X, d)$  et toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur cet espace tels que le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  et l'entropie de  $(X, d)$  soient respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , pour tout  $r \leq \varepsilon_0(\delta, H, D)$ , la partie  $r$ -mince  $X_r$  de  $X$  n'est pas connexe ; en particulier il existe un point  $x \in X$  tel que  $\text{sys}_\Gamma^{\text{wt}}(x) \geq \varepsilon_0(\delta, H, D)$ .*

*Si de plus  $\Gamma$  est sans torsion, alors il existe un point  $x \in X$  tel que  $\text{Dias}_\Gamma(X) \geq \varepsilon_0(\delta, H, D)$ .*

**Remarque 5.17.** Lorsque le groupe  $\Gamma$  contient des éléments de torsion, il est impossible d'obtenir une minoration universelle de la diastole (et a fortiori des systoles ponctuelle et globale) sous les hypothèses de la Proposition 5.16, comme le prouve le contre-exemple suivant : étant donné un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire  $(X_0, d_0)$  et une action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma_0$  sur cet espace tels que le diamètre de  $\Gamma_0 \backslash X_0$  et l'entropie de  $(X_0, d_0)$

9. L'appellation "mince" est justifiée par les résultats de la section 7.3.



soient respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , nous construisons l'espace métrique  $(X, d)$  comme produit de  $(X_0, d_0)$  et d'un cercle  $(\mathbb{T}, \varepsilon \cdot \text{can})$  et le groupe  $\Gamma$  comme le produit de  $\Gamma_0$  et du groupe  $R_n$  des rotations d'angles  $\frac{2k\pi}{n}$  (où  $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ ). Si  $\varepsilon$  est suffisamment petit, l'espace  $(X, d)$  est  $(\delta + \varepsilon)$ -hyperbolique non élémentaire et l'action-produit canonique de  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  vérifie toutes les hypothèses de la Proposition 5.16. Cependant, on a alors  $\text{sys}_\Gamma(x) = \varepsilon/n$  pour tout  $x \in X$ , ce qui tend vers zéro lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro ou lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ .

*Preuve de la Proposition 5.16 :* Si  $\varrho$  est la représentation de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(X, d)$  associée à l'action considérée, le Lemme 5.5 prouve que l'action du groupe  $\varrho(\Gamma)$  sur  $(X, d)$  vérifie également les hypothèses de la Proposition 5.16; de plus (toujours d'après le Lemme 5.5), pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$ ,  $\gamma$  n'est pas de torsion si et seulement si  $\varrho(\gamma)$  n'est pas de torsion et il s'ensuit que  $\text{sys}_{\varrho(\Gamma)}^{wt}(x) = \text{sys}_\Gamma^{wt}(x)$  pour tout  $x \in X$ , donc que les parties minces  $X_r$  associées aux actions de  $\varrho(\Gamma)$  et de  $\Gamma$  coïncident. Ceci prouve que, pour démontrer la Proposition 5.16 pour toute action d'un groupe  $\Gamma$ , il suffit de la démontrer lorsque  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(X, d)$  agissant proprement.

*Nous supposons donc, dans la suite de cette preuve, que  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(X, d)$ .*

Pour simplifier les écritures, posons  $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(\delta, H, D)$ . Le Lemme 8.12 (ii) assure que  $\Gamma \backslash X$  est compact. D'après la Proposition 8.22 (ii), puisque l'action est cocompacte, chacun des éléments de  $\Gamma$  qui n'est pas de torsion est de type hyperbolique. Fixons un réel positif quelconque  $r \leq \varepsilon_0$ . Le Théorème 5.13 assure alors que, en tout point  $x \in X$ , le sous-groupe  $\Gamma_r(x)$  est virtuellement cyclique; la Proposition 8.21 (v) permet d'en déduire que, pour tout  $x \in X_r$ , tous les éléments de l'ensemble (non vide)  $\Gamma_r^{wt}(x)$  des  $\gamma \in \Gamma_r(x) \setminus \{e\}$  qui agissent sur  $(X, d)$  par isométries de type hyperbolique ont la même paire de points fixes, que nous noterons  $\text{Fix}(x)$ . Nous allons maintenant utiliser le

**Lemme 5.18.** *L'application  $x \mapsto \text{Fix}(x)$  est constante sur chaque composante connexe de  $X_r$ .*

*Preuve :* Pour tout  $x \in X_r$ , la finitude de  $\{\gamma : r < d(x, \gamma x) \leq 2r\}$  implique<sup>10</sup> que  $\Sigma_r(x') \subset \Sigma_r(x)$  pour tout  $x'$  situé dans un voisinage suffisamment petit de  $x$  (inclus dans  $X_r$ ), donc que  $\Gamma_r(x') \setminus \{e\} \subset \Gamma_r(x) \setminus \{e\}$ , donc que  $\emptyset \neq \Gamma_r^{wt}(x') \subset \Gamma_r^{wt}(x)$ ; on en déduit que  $\text{Fix}(x') = \text{Fix}(x)$ . L'application  $x \mapsto \text{Fix}(x)$  étant localement constante, elle est constante sur chacune des composantes connexes de  $X_r$ .  $\square$

*Fin de la preuve de la Proposition 5.16 :* Supposons que la conclusion de la Proposition 5.16 soit fautive, i. e. que  $X_r$  soit connexe. Comme la fonction  $x \mapsto \text{sys}_\Gamma^{wt}(x)$  est  $\Gamma$ -invariante (car  $g\gamma g^{-1}$  est de torsion si et seulement si  $\gamma$  est de torsion), l'ensemble  $X_r$  est (globalement) stable sous l'action de  $\Gamma$ , et le Lemme 5.18 implique que  $\text{Fix}(x) = \text{Fix}(gx)$  pour tout  $g \in \Gamma^*$ . De ceci et de l'égalité  $\Gamma_r(gx) = g\Gamma_r(x)g^{-1}$  nous déduisons que, pour tout  $\gamma \in \Gamma_r^{wt}(x)$ ,  $g\gamma g^{-1} \in g\Gamma_r^{wt}(x)g^{-1} = \Gamma_r^{wt}(gx)$  et que, pour tout  $g \in \Gamma^*$ ,  $\gamma$  et  $g\gamma g^{-1}$  ont le même ensemble de points fixes, que nous noterons  $\{\gamma^-, \gamma^+\}$ . Fixons un  $x$  et un élément  $\gamma \in \Gamma_r^{wt}(x)$ , pour tout  $g \in \Gamma^*$ , on a  $g\gamma g^{-1}(g(\gamma^+)) = g(\gamma^+)$  et  $g\gamma g^{-1}(g(\gamma^-)) = g(\gamma^-)$ , donc  $g(\gamma^+)$  et  $g(\gamma^-)$  sont des points fixes de  $g\gamma g^{-1}$ , donc de  $\gamma$ . On a donc  $g(\{\gamma^-, \gamma^+\}) = \{\gamma^-, \gamma^+\}$  pour tout  $g \in \Gamma$ ; en appliquant la Proposition 8.21 (ii), il en découle que  $\Gamma$  est virtuellement cyclique, donc élémentaire d'après la Proposition 8.22 (iv), donc que  $(X, d)$  est élémentaire d'après la Proposition 8.22 (iii), or ceci est exclu par hypothèse, ce qui signifie que  $X_r$  n'est pas connexe.

En conséquence  $X_{\varepsilon_0}$  n'est pas connexe et est donc différent de  $X$  tout entier, or tout point  $x \in X \setminus X_{\varepsilon_0}$  vérifie  $\text{sys}_\Gamma^{wt}(x) \geq \varepsilon_0$ .

Si de plus  $\Gamma$  est sans torsion, alors tout point  $x \in X \setminus X_{\varepsilon_0}$  vérifie  $\text{sys}_\Gamma(x) = \text{sys}_\Gamma^{wt}(x) \geq \varepsilon_0$ , ce qui assure que  $\text{Dias}_\Gamma(X) \geq \varepsilon_0(\delta, H, D)$  et termine la preuve.  $\square$

10. En effet, notons  $\Gamma_r^+(x)$  l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) > r$  et  $\Sigma_r^+(x) \subset \Gamma_r^+(x)$  l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $r < d(x, \gamma x) \leq 2r$ ; la finitude de  $\Sigma_r^+(x)$  implique l'existence d'un  $\alpha = \alpha(x) > 0$  tel que le minimum (quand  $\gamma$  parcourt  $\Gamma_r^+(x)$ ) de  $d(x, \gamma x)$  soit supérieur ou égal à  $r + \alpha$ . Il s'ensuit que, pour tout  $x' \in B_X(x, \alpha/2)$  et tout  $\gamma \in \Gamma_r^+(x)$ , on a  $d(x', \gamma x') > d(x, \gamma x) - \alpha \geq r$ , donc que  $\gamma \in \Gamma_r^+(x')$ . En passant aux complémentaires, on a donc  $\Sigma_r(x') \subset \Sigma_r(x)$ .

### 5.3.3 Minoration de la systole globale pour les métriques convexes

**Définition 5.19.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique géodésique propre, sa distance  $d$  est dite “convexe” si, pour toute paire de segments géodésiques  $c_1, c_2$  (reparamétrisés de manière à être définis de  $[0, 1]$  dans  $X$ ), la fonction  $t \mapsto d(c_1(t), c_2(t))$  est convexe au sens large.

Des exemples d’espaces dont la distance est convexe sont donnés par les variétés riemanniennes de courbure sectionnelle inférieure ou égale à zéro et, plus généralement, par les espaces  $\text{Cat}(0)$ .

**Remarque 5.20.** Sur un espace géodésique propre dont la distance est convexe, entre deux points quelconques, il existe une unique géodésique.

La preuve, élémentaire, est laissée au lecteur.

**Lemme 5.21.** Sur un espace métrique géodésique propre dont la distance  $d$  est convexe, pour toute paire  $c_0, c_1$  de segments géodésiques, la fonction  $t \mapsto d(c_1(t), \text{Im}(c_0))$  est convexe.

*Preuve :* Notons  $[0, a_0]$  et  $[0, a_1]$  les intervalles sur lesquelles sont définies les géodésiques  $c_0$  et  $c_1$ . Pour tous les  $t_1, t_2 \in [0, a_1]$  tels que  $t_1 < t_2$ , si  $c_0(s_1)$  et  $c_0(s_2)$  sont des projetés respectifs de  $c_1(t_1)$  et  $c_1(t_2)$  sur  $c_0$ , pour tout  $t \in [t_1, t_2]$ , en posant  $\beta := \frac{t - t_1}{t_2 - t_1}$ , on a  $t = (1 - \beta)t_1 + \beta t_2$ , et par conséquent :

$$\begin{aligned} d(c_1(t), \text{Im}(c_0)) &\leq d(c_1((1 - \beta)t_1 + \beta t_2), c_0((1 - \beta)s_1 + \beta s_2)) \leq (1 - \beta)d(c_1(t_1), c_0(s_1)) + \\ &\quad + \beta d(c_1(t_2), c_0(s_2)) = (1 - \beta)d(c_1(t_1), \text{Im}(c_0)) + \beta d(c_1(t_2), \text{Im}(c_0)), \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité découle de la convexité de la distance. Ceci achève la preuve.  $\square$

**Lemme 5.22.** Sur un espace géodésique propre dont la distance est convexe toute géodésique locale est une géodésique (minimisante).

*Preuve :* L’espace étant noté  $(X, d)$ , considérons n’importe quelle géodésique locale  $c : I \rightarrow X$  et deux points quelconques  $t_1$  et  $t_2$  de  $I$ ; notons  $[x, y]$  le segment géodésique (minimisant) qui joint les points  $x := c(t_1)$  et  $y := c(t_2)$  et  $t_0 \in [t_1, t_2]$  un point où la fonction  $t \mapsto d(c(t), [x, y])$  atteint son maximum sur l’intervalle  $[t_1, t_2]$ . L’ensemble  $J$  des  $t \in [t_1, t_2]$  tels que  $d(c(t), [x, y]) = d(c(t_0), [x, y])$  est fermé par continuité de  $c$ . De plus, pour tout  $t \in J$  et pour tous les  $t', t''$  vérifiant  $t' < t < t''$ , suffisamment proches de  $t$  pour que  $c$  soit la géodésique minimisante qui relie  $c(t')$  à  $c(t'')$ , la convexité de la distance et le Lemme 5.21 assurent que la fonction  $s \mapsto d(c(s), [x, y])$  est convexe sur l’intervalle  $[t', t'']$ . Une conséquence est que

$$\text{Max}(d(c(t'), [x, y]); d(c(t''), [x, y])) \leq d(c(t), [x, y]) \leq \frac{t'' - t}{t'' - t'} d(c(t'), [x, y]) + \frac{t - t'}{t'' - t'} d(c(t''), [x, y]),$$

ce qui implique que  $d(c(t'), [x, y]) = d(c(t''), [x, y]) = d(c(t), [x, y]) = d(c(t_0), [x, y])$ , donc que  $J$  est ouvert, et donc (par connexité de  $[t_1, t_2]$ ) que  $J = [t_1, t_2]$ . On a donc  $0 = d(c(t_1), [x, y]) = d(c(t_0), [x, y])$ , ce qui prouve que  $c$  et  $[x, y]$  sont confondues, donc que  $c$  est une géodésique minimisante.  $\square$

**Lemme 5.23.** Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique dont la distance est convexe. Pour toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  et tout point  $x \in M_{\min}(\gamma)$ , la réunion, pour tous les  $p \in \mathbb{Z}$ , des segments géodésiques  $[\gamma^p x, \gamma^{p+1} x]$  est une droite-géodésique  $\gamma$ -invariante (notée  $c_\gamma$ ), incluse dans  $M_{\min}(\gamma)$ , qui relie les points-limites  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  et telle que  $\gamma(c_\gamma(t)) = c_\gamma(t + \ell(\gamma))$ . En conséquence, on a :  $s(\gamma) = d(x, \gamma x) = \ell(\gamma)$ .

*Preuve :* Le Lemme 4.3 implique que la réunion des segments géodésiques  $[\gamma^p x, \gamma^{p+1} x] = \gamma^p([x, \gamma x])$  est une géodésique locale  $c_\gamma$ ,  $\gamma$ -invariante, incluse dans  $M_{\min}(\gamma)$ , et le Lemme 5.22 assure qu’une telle géodésique locale est automatiquement une géodésique, que nous orientons dans le sens des valeurs croissantes de  $p$ . Comme, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$d(x, \gamma^{-p} x) = d(x, \gamma^p x) = \sum_{k=1}^p d(\gamma^{i-1} x, \gamma^i x) = p d(x, \gamma x) = \frac{1}{2} d(\gamma^{-p} x, \gamma^p x),$$

toutes quantités qui tendent vers  $+\infty$  avec  $p$ , la géodésique  $c_\gamma$  est définie sur  $] -\infty, +\infty[$  et vérifie  $c_\gamma(\pm\infty) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\gamma^{\pm p} x) = \gamma^\pm$ . Ces égalités impliquent également que

$$\ell(\gamma) = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{p} d(x, \gamma^p x) = d(x, \gamma x) = s(\gamma);$$

une conséquence du fait que ceci soit vrai pour tout  $x \in M_{\min}(\gamma)$  et du fait que la droite-géodésique  $c_\gamma$  soit incluse dans  $x \in M_{\min}(\gamma)$  est que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $d(c_\gamma(t), \gamma c_\gamma(t)) = \ell(\gamma)$ , donc que  $\gamma c_\gamma(t) = c_\gamma(t + \ell(\gamma))$  par choix de l'orientation de  $c_\gamma$ .  $\square$

Remarquons que le Lemme 5.23 ne prétend pas qu'il existe une unique géodésique reliant les points-limites  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ , ce qui serait faux : un contre-exemple peut être obtenu en partant d'une surface  $S$  simplement connexe de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$ , en considérant une isométrie  $\gamma$  de type hyperbolique et sa géodésique  $\gamma$ -invariante  $c_\gamma$  et en intercalant une bande plate de largeur  $\varepsilon > 0$  entre les deux composantes connexes de  $S \setminus c_\gamma$ .

**Théorème 5.24.** *Pour tout espace métrique  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire géodésiquement complet  $(X, d)$ , dont la distance est convexe, pour toute action propre (par isométries) sur cet espace d'un groupe  $\Gamma$  tels que le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  et l'Entropie de  $(X, d)$  soient respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , on a*

(i)  $\ell(\gamma) > s_0(\delta, H, D)$  pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma^*$  qui n'est pas de torsion,

(ii)  $\text{Sys}_\Gamma(X) > s_0(\delta, H, D)$  si  $\Gamma$  est sans torsion,

où  $s_0(\delta, H, D)$  est la constante universelle positive définie par l'égalité (29).

*Preuve :* Il est évident que (i) implique (ii), il nous reste à démontrer (i).

Si  $\varrho$  est la représentation de  $\Gamma$  dans  $\text{Isom}(X, d)$  associée à l'action considérée, le Lemme 5.5 prouve que l'action du groupe  $\varrho(\Gamma)$  sur  $(X, d)$  vérifie également les hypothèses du Théorème 5.24; de plus (toujours d'après le Lemme 5.5), pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$ ,  $\gamma$  n'est pas de torsion si et seulement si  $\varrho(\gamma)$  n'est pas de torsion et  $\ell(\varrho(\gamma)) = \ell(\gamma)$  par définition des deux actions. Ceci prouve que, pour démontrer le Théorème 5.24 pour toute action d'un groupe  $\Gamma$ , il suffit de le démontrer lorsque  $\Gamma$  est un sous-groupe de  $\text{Isom}(X, d)$  agissant proprement.

Nous supposons donc, dans la suite de cette preuve, que  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(X, d)$ .

Pour simplifier les écritures, posons  $\varepsilon_0 := \varepsilon_0(\delta, H, D)$ , où la constante universelle  $\varepsilon_0(\delta, H, D)$  est définie en (28) et vérifie  $\varepsilon_0 = \frac{R_0}{N_0}$ , où les constantes universelles  $N_0$  et  $R_0$  sont définies en (29). Le Lemme 8.12 (ii) assure que  $\Gamma \backslash X$  est compact. D'après la Proposition 8.22 (ii), puisque l'action est cocompacte, chacun des éléments de  $\Gamma$  qui n'est pas de torsion est de type hyperbolique. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe au moins un élément  $\gamma \in \Gamma^*$  qui n'est pas de torsion (donc de type hyperbolique) et vérifie  $\ell(\gamma) \leq s_0(\delta, H, D)$ ; fixons cet élément. La Proposition 8.21 (ii) démontre que, si on note  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  les points du bord idéal qui sont fixés par  $\gamma$ , le sous-groupe  $\Gamma_\gamma$  formé des éléments  $g \in \Gamma$  qui laissent l'ensemble  $\{\gamma^-, \gamma^+\}$  globalement invariant est le sous-groupe virtuellement cyclique maximal de  $\Gamma$  contenant  $\gamma$ .

Le Lemme 5.23 implique qu'il existe une droite-géodésique (que nous noterons  $c_\gamma$ ), qui relie  $\gamma^-$  à  $\gamma^+$  et telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma(c_\gamma(t)) = c_\gamma(t + \ell(\gamma))$ . Une première conséquence est que le domaine de Margulis  $M_R(\gamma)$  est défini et non vide pour tout  $R \geq \ell(\gamma)$  et que  $M_{\ell(\gamma)}(\gamma)$  coïncide avec  $M_{\min}(\gamma)$  et contient l'image de  $c_\gamma$ .

Le Lemme 4.7 et le théorème des valeurs intermédiaires impliquent qu'il existe un point  $x_0 \in X$  tel que  $R_\gamma(x_0) = R_0$ . Notons  $\bar{x}$  un projeté de  $x_0$  sur l'image de  $c_\gamma$ , comme  $R_\gamma(x_0) = R_0$  et  $R_\gamma(\bar{x}) = \ell(\gamma)$ , le Lemme 5.4 (iii) donne :

$$\frac{d(x_0, \bar{x})}{R_0} \geq \frac{\ln \left( 3^{-12} \left( 2 \left[ \frac{R_0}{\ell(\gamma)} \right] + 1 \right) \right)}{65 H R_0 + 14} - \frac{1}{2} > \frac{1}{2} + \frac{N_0}{10}. \quad (31)$$

où la dernière inégalité résulte de l'hypothèse  $\ell(\gamma) \leq s_0(\delta, H, D)$ , de la définition (29) de

$s_0(\delta, H, D)$  et d'un calcul direct, qui impliquent que

$$\frac{\ln \left[ 3^{-12} \left( 2 \left[ \frac{R_0}{\ell(\gamma)} \right] + 1 \right) \right]}{65 H R_0 + 14} > \frac{1}{2} \frac{(N_0 + 10)(13H R_0 + 14/5)}{65 H R_0 + 14} = 1 + \frac{N_0}{10} .$$

L'hypothèse de discrétude et la définition de  $R_\gamma(x_0)$  assurent l'existence d'un entier positif  $k_0$  tel que  $d(x_0, \gamma^{k_0} x_0) = \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}^*} d(x_0, \gamma^k x_0) = R_0$ . Deux cas sont alors possibles :

— **Premier cas :** Si  $k_0 \ell(\gamma) > \frac{1}{2} \varepsilon_0$  :

Notons alors  $k_1$  le plus petit entier positif tel que  $k_1 k_0 \ell(\gamma) > 3\delta$ , on a alors

$$1 \leq k_1 \leq \left\lceil \frac{6\delta}{\varepsilon_0} \right\rceil + 1 \quad \text{et} \quad (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) \leq 3\delta , \quad (32)$$

où la première propriété découle de l'hypothèse faite dans le cas présent et la seconde de la définition de  $k_1$  et reste (trivialement) valable lorsque  $k_0 \ell(\gamma) > 3\delta$ , i. e. lorsque  $k_1 = 1$ . Posons  $h := \gamma^{k_1 k_0}$ , l'inégalité (14) assure que

$$d(x_0, h x_0) \leq R_0 + (k_1 - 1) \ell(\gamma^{k_0}) + 4\delta \frac{\ln k_1}{\ln 2} \leq R_0 + (k_1 - 1) k_0 \ell(\gamma) + \frac{4\delta}{\ln 2} \ln \left( 1 + \frac{6\delta}{\varepsilon_0} \right) , \quad (33)$$

où la dernière inégalité découle de (32). Comme par ailleurs  $d(\bar{x}, h \bar{x}) = k_1 k_0 \ell(\gamma) > 3\delta$ , le Lemme 8.8 donne :

$$d(x_0, h x_0) \geq d(x_0, \bar{x}) + d(\bar{x}, h \bar{x}) + d(h x_0, h \bar{x}) - 6\delta \geq 2d(x_0, \bar{x}) + k_1 k_0 \ell(\gamma) - 6\delta ;$$

en combinant cette dernière inégalité avec (33) et (31), il vient :

$$\frac{1}{2} \left( R_0 + \frac{4\delta}{\ln 2} \ln \left( 1 + \frac{6\delta}{\varepsilon_0} \right) + 6\delta \right) \geq d(x_0, \bar{x}) > \left( \frac{1}{2} + \frac{N_0}{10} \right) R_0 . \quad (34)$$

En remarquant que  $\delta/R_0 \leq 1/40$ , que  $\delta/\varepsilon_0 = N_0 \delta/R_0$  et que  $R_0 \geq 40\delta$ , nous obtenons :

$$\frac{3}{40} + \frac{1}{13} \ln \left( 1 + \frac{3}{20} N_0 \right) \geq \frac{2}{\ln 2} \frac{\delta}{R_0} \ln \left( 1 + \frac{6\delta}{\varepsilon_0} \right) + 3 \frac{\delta}{R_0} > \frac{N_0}{10} ;$$

comme cette dernière inégalité est fautive, nous en déduisons que ce premier cas ne peut survenir sous l'hypothèse  $\ell(\gamma) \leq s_0(\delta, H, D)$  que nous avons faite.

— **Second cas :** Si  $k_0 \ell(\gamma) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_0$  :

Soit  $\varepsilon$  un nombre quelconque vérifiant  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/1000$ , par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point  $x$  de la géodésique  $[\bar{x}, x_0]$  tel que  $R_\gamma(x) = \varepsilon_0 - \varepsilon$  et, comme la distance entre les géodésiques  $[\bar{x}, x_0]$  et  $[\gamma^{k_0} \bar{x}, \gamma^{k_0} x_0]$  est convexe (selon la Définition 5.19), on a :

$$\varepsilon_0 - \varepsilon \leq d(x, \gamma^{k_0} x) \leq \frac{d(\bar{x}, x)}{d(\bar{x}, x_0)} d(x_0, \gamma^{k_0} x_0) + \left( 1 - \frac{d(\bar{x}, x)}{d(\bar{x}, x_0)} \right) d(\bar{x}, \gamma^{k_0} \bar{x})$$

et, en remarquant que  $d(x_0, \gamma^{k_0} x_0) = R_0$  et que  $d(\bar{x}, \gamma^{k_0} \bar{x}) = k_0 \ell(\gamma) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_0$ , nous en déduisons que

$$d(\bar{x}, x) \geq \frac{\varepsilon_0 - 2\varepsilon}{2R_0 - \varepsilon_0} d(\bar{x}, x_0) \geq \frac{1}{2} (\varepsilon_0 - 2\varepsilon) \left( \frac{1}{2} + \frac{N_0}{10} \right) , \quad (35)$$

où la dernière inégalité découle de la minoration (31).

Pour tout  $g \in \Gamma_\gamma$ , notons  $\bar{x}_g$  un projeté de  $g\bar{x}$  sur la droite-géodésique  $c_\gamma$  ; comme  $g\bar{x}$  est un point de la droite-géodésique  $g \circ c_\gamma$  qui relie elle aussi les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ , on a  $d(g\bar{x}, \bar{x}_g) \leq 2\delta$  d'après le Lemme 8.9 (i), ce qui implique que

$$\forall g \in \Gamma_\gamma \quad d(x, g\bar{x}) \geq d(x, \bar{x}_g) - d(g\bar{x}, \bar{x}_g) \geq d(x, \bar{x}) - 2\delta \geq \frac{1}{2} (\varepsilon_0 - 2\varepsilon) \left( \frac{1}{2} + \frac{N_0}{10} \right) - 2\delta , \quad (36)$$

où la dernière inégalité découle de (35).

Pour tout élément  $g \in \Gamma \setminus \Gamma_\gamma$ , la définition de  $\Gamma_\gamma$  assure que  $\{g(\gamma^-), g(\gamma^+)\} \neq \{\gamma^-, \gamma^+\}$ , donc que l'ensemble  $\{g(\gamma^-), g(\gamma^+)\}$  des points fixes de  $g\gamma g^{-1}$  est différent de l'ensemble  $\{\gamma^-, \gamma^+\}$  des points fixes de  $\gamma$ ; la seconde partie de la Proposition 8.21 (ii) permet d'en déduire que  $g\gamma g^{-1} \notin \Gamma_\gamma$ , donc que le sous-groupe  $\langle \gamma, g\gamma g^{-1} \rangle$  n'est pas virtuellement cyclique, puisque  $\Gamma_\gamma$  est le sous-groupe virtuellement cyclique maximal contenant  $\gamma$  d'après la Proposition 8.21 (ii). Le Corollaire 5.14 permet d'en déduire que  $L(\gamma, g\gamma g^{-1}) > \varepsilon_0 - \varepsilon$  (où  $L(\gamma, g\gamma g^{-1})$  est l'infimum de  $\text{Max}[d(x, \gamma^p x); d(x, (g\gamma g^{-1})^q x)]$  quand  $x$  parcourt  $X$  et quand  $(p, q)$  parcourt  $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ ). Le Lemme 4.14 permet d'en déduire que les domaines de Margulis  $M_{\varepsilon_0 - \varepsilon}(\gamma)$  et  $M_{\varepsilon_0 - \varepsilon}(g\gamma g^{-1})$  sont disjoints (en effet, l'hypothèse faite assure que  $\ell(\gamma) < \varepsilon_0 - \varepsilon$ , donc que les domaines de Margulis  $M_{\varepsilon_0 - \varepsilon}(\gamma)$  et  $M_{\varepsilon_0 - \varepsilon}(g\gamma g^{-1})$  sont non vides).

Comme  $x \in M_{\varepsilon_0 - \varepsilon}(\gamma)$ , alors  $x \notin M_{\varepsilon_0 - \varepsilon}(g\gamma g^{-1})$  et on a donc  $R_{g\gamma g^{-1}}(x) > \varepsilon_0 - \varepsilon$ .

Notons  $\bar{x}'$  un projeté de  $x$  sur la droite-géodésique  $g \circ c_\gamma$ ; du fait que

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad g\gamma g^{-1}(g \circ c_\gamma(t)) = g\gamma(c_\gamma(t)) = g \circ c_\gamma(t + \ell(\gamma)),$$

on déduit que  $g\gamma g^{-1}$  agit par translation de longueur  $\ell(\gamma)$  sur la droite géodésique  $g \circ c_\gamma$  et que  $R_{g\gamma g^{-1}}(\bar{x}') = \ell(\gamma) = \ell(g\gamma g^{-1})$ .

Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'en déduire l'existence d'un point  $x' \in [x, \bar{x}']$  tel que  $R_{g\gamma g^{-1}}(x') = \varepsilon_0 - \varepsilon$ .

La propriété de complétude géodésique assure que le segment-géodésique  $[\bar{x}', x]$  est prolongeable (du côté de  $x$ ) jusqu'à l'infini en une géodésique locale qui, d'après la Lemme 5.22 est un rayon-géodésique, que nous noterons  $c$  et que nous paramétrons de sorte que  $c(0) = \bar{x}'$ .

D'après le Lemme 5.21, la fonction  $f : t \mapsto d(c(t), \text{Im}(g \circ c_\gamma))$  est convexe; comme  $f(0) = 0$  et comme il existe un  $t_0 > 0$  tel que  $f(t_1) = t_1$  pour tout  $t_1 \in [0, t_0]$ , on a  $f(t) \geq t$  pour tout  $t \in [t_1, +\infty[$ , donc  $d(c(t), \text{Im}(g \circ c_\gamma)) = t$  pour tout  $t \geq 0$ ; ceci assure que  $c(+\infty)$  est un point du bord idéal différent de  $g(\gamma^-) = g \circ c_\gamma(-\infty)$  et de  $g(\gamma^+) = g \circ c_\gamma(+\infty)$ , il découle alors du Lemme 4.10 (ii) que ce rayon-géodésique sort de  $M_{R_0}(g\gamma g^{-1})$ , il existe donc (sur le prolongement de  $[\bar{x}', x']$  au-delà de  $x'$ ) un point  $x'_0$  tel que  $R_{g\gamma g^{-1}}(x'_0) = R_0$ .

La même démonstration que celle faite ci-dessus, en y substituant  $g\gamma g^{-1}$  à  $\gamma$  et en notant que  $\ell(g\gamma g^{-1}) = \ell(\gamma) \leq s_0(\delta, H, D)$  sous notre hypothèse de départ, montre que, si  $k'_0$  est l'entier positif tel que  $d(x'_0, (g\gamma g^{-1})^{k'_0} x'_0) = \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}^*} d(x'_0, (g\gamma g^{-1})^k x'_0) = R_0$ , alors le premier cas  $k'_0 \ell(g\gamma g^{-1}) > \frac{1}{2} \varepsilon_0$  est impossible; nous sommes donc dans le cas où  $k'_0 \ell(g\gamma g^{-1}) \leq \frac{1}{2} \varepsilon_0$ ; en procédant comme ci-dessus, nous en déduisons que

$$d(\bar{x}', x') \geq \frac{\varepsilon_0 - 2\varepsilon}{2R_0 - \varepsilon_0} d(\bar{x}', x'_0) \geq \frac{1}{2} (\varepsilon_0 - 2\varepsilon) \left( \frac{1}{2} + \frac{N_0}{10} \right).$$

Comme  $\bar{x}'$  est un projeté de  $x$  sur la géodésique  $g \circ c_a$ , et comme  $g\bar{x}$  est situé sur cette géodésique, on en déduit que, pour tout  $g \in \Gamma \setminus \Gamma_\gamma$ ,

$$d(x, g\bar{x}) \geq d(x, \bar{x}') \geq d(x', \bar{x}') \geq \frac{1}{2} (\varepsilon_0 - 2\varepsilon) \left( \frac{1}{2} + \frac{N_0}{10} \right). \quad (37)$$

Par définition du diamètre de  $\Gamma \setminus X$ , on a  $D \geq \min_{g \in \Gamma} d(x, g\bar{x})$ , ce qui, en utilisant les inégalités (36) et (37) (et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro), donne

$$D \geq \frac{\varepsilon_0}{2} \left( \frac{N_0}{10} + \frac{1}{2} \right) - 2\delta = \frac{R_0}{2N_0} \left( \frac{N_0}{10} + \frac{1}{2} \right) - 2\delta > \frac{R_0}{20} - 2\delta \geq D,$$

d'où une contradiction qui prouve que l'hypothèse  $\ell(\gamma) \leq s_0(\delta, H, D)$  n'est jamais vérifiée, ce qui achève la preuve.  $\square$

## 6 Sous-groupes libres

Dans cette section, nous ne considérerons que des isométries sans torsion d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  (donc automatiquement géodésique et propre, selon la Définition 8.2). À chaque isométrie  $\gamma$

de  $(X, d)$ , nous avons associé son déplacement minimum  $s(\gamma) = \inf_{\gamma \in \Gamma^*} d(x, \gamma x)$  et son déplacement moyen  $\ell(\gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(x, \gamma^n x)}{n}$  (voir les Définitions 8.17). Si  $\gamma$  est de type hyperbolique, rappelons que  $\mathcal{G}(\gamma)$  est l'ensemble des géodésiques orientées joignant ses points fixes  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ , et que  $M(\gamma)$  est la réunion de ces géodésiques (voir les Définitions 4.1). Pour ce qui concerne l'existence et les propriétés élémentaires des projections dans les espaces hyperboliques, nous renvoyons le lecteur à la Section 8.2.

## 6.1 Lemme de Ping-pong

Pour tout espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , pour toute isométrie  $\gamma$  de  $(X, d)$  qui n'est pas de torsion, telle que le sous groupe engendré  $\langle \gamma \rangle$  soit un sous groupe discret du groupe des isométries, et pour tout point  $x \in X$ , notons  $D_\gamma(x)$  et  $D'_\gamma(x)$  les domaines de Dirichlet (respectivement ouvert et fermé) de ce point  $x$  pour l'action de  $\langle \gamma \rangle$ , i. e. les sous-ensembles de  $X$  définis par les égalités<sup>11</sup> :

$$D_\gamma(x) = \{y : \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}^*} d(y, \gamma^k x) > d(y, x)\}, \quad D'_\gamma(x) = \{y : \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}} d(y, \gamma^k x) = d(y, x)\}. \quad (38)$$

Remarquons que  $D'_{\gamma^{-1}}(x) = D'_\gamma(x)$ , que (pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ )  $D'_\gamma(\gamma^k x) = \gamma^k(D'_\gamma(x))$  et définissons les domaines d'attraction (resp. de répulsion)  $U_\gamma^+(x)$  (resp.  $U_\gamma^-(x)$ ) de  $\gamma$  associés au point  $x$  par les égalités :

$$U_\gamma^+(x) := \cup_{k \in \mathbb{N}^*} D'_\gamma(\gamma^k x) = \cup_{k \in \mathbb{N}^*} \gamma^k(D'_\gamma(x)) \quad , \quad U_\gamma^-(x) := U_{\gamma^{-1}}^+(x). \quad (39)$$

Remarquons que, par la définition (39),  $U_\gamma^-(x) \cup U_\gamma^+(x) = \cup_{p \in \mathbb{Z}^*} D'_\gamma(\gamma^p x)$  et, par passage au complémentaire, on a :

$$X \setminus (U_\gamma^-(x) \cup U_\gamma^+(x)) = \{y : \forall p \in \mathbb{Z}^* \quad \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}} d(y, \gamma^k x) < d(y, \gamma^p x)\}$$

$$= \{y : \text{Min}_{k \in \mathbb{Z}} d(y, \gamma^k x) < \text{Min}_{p \in \mathbb{Z}^*} d(y, \gamma^p x)\} = \{y : d(y, x) < \text{Min}_{p \in \mathbb{Z}^*} d(y, \gamma^p x)\};$$

une conséquence de cette égalité et de la définition (39) est la double propriété :

$$X \setminus (U_\gamma^-(x) \cup U_\gamma^+(x)) = D_\gamma(x) \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}^* \quad \gamma^k(D'_\gamma(x)) \subset U_\gamma^-(x) \cup U_\gamma^+(x). \quad (40)$$

**Définitions 6.1.** Considérons une paire d'isométries sans torsion  $a$  et  $b$  de  $(X, d)$ , (telles que  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  agissent discrètement sur  $(X, d)$ ) et n'importe quel point  $x \in X$ ,

(i)  $a$  et  $b$  sont dits en position de Schottky par rapport à  $x$  si les sous-ensembles  $U_a^-(x) \cup U_a^+(x)$  et  $U_b^-(x) \cup U_b^+(x)$  sont disjoints.

(ii)  $a$  et  $b$  sont dits en position de demi-Schottky par rapport à  $x \in X$  si  $U_a^+(x) \subset X \setminus (U_b^-(x) \cup U_b^+(x))$  et si  $U_b^+(x) \subset X \setminus (U_a^-(x) \cup U_a^+(x))$ .

**Proposition 6.2.** Soit  $\Sigma$  un ensemble fini d'isométries sans torsion de  $(X, d)$  (telles que, pour tout  $\sigma \in \Sigma$ ,  $\langle \sigma \rangle$  agisse discrètement sur  $(X, d)$ ). Si toute paire d'éléments distincts de  $\Sigma$  est en position de Schottky par rapport à un même point  $x \in X$ , alors  $\Sigma$  engendre un sous-groupe libre du groupe des isométries de  $(X, d)$ .

*Preuve :* Toute relation non triviale entre éléments de  $\Sigma$  s'écrit sous la forme  $s_1^{p_1} \cdot s_2^{p_2} \dots s_m^{p_m} = e$ , où  $s_1, s_2, \dots, s_m$  sont des éléments de  $\Sigma$  tels que  $s_i \neq s_{i+1}$  pour tous les  $i \in \{1, \dots, m-1\}$ , et où  $p_1, p_2, \dots, p_m$  sont des éléments de  $\mathbb{Z}^*$ .

Montrons par récurrence que, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $s_i^{p_i} \cdot s_{i+1}^{p_{i+1}} \dots s_m^{p_m}(x) \in U_{s_i}^-(x) \cup U_{s_i}^+(x)$  : en effet ceci est vérifié lorsque  $i = m$ , puisque  $x \in D_{s_m}(x)$ , donc  $s_m^{p_m}(x) \in s_m^{p_m}(D_{s_m}(x)) \subset U_{s_m}^-(x) \cup U_{s_m}^+(x)$  où la dernière inclusion est une conséquence de (40); supposons maintenant que  $s_i^{p_i} \cdot s_{i+1}^{p_{i+1}} \dots s_m^{p_m}(x) \in U_{s_i}^-(x) \cup U_{s_i}^+(x)$ , comme  $s_i$  et  $s_{i-1}$  sont deux éléments distincts de  $\Sigma$ , ils

11. Les minima dont ils sera question dans la suite seront bien atteints car l'absence de torsion et la discrétude assurent (par la Remarque 8.14 (i)) que  $\gamma$  est hyperbolique ou parabolique, et donc que  $g^k x$  tend vers l'infini quand  $k \rightarrow \pm\infty$ .

sont (par hypothèse) en position de Schottky par rapport à  $x$ , et on a donc  $U_{s_i}^-(x) \cup U_{s_i}^+(x) \subset X \setminus (U_{s_{i-1}}^-(x) \cup U_{s_{i-1}}^+(x))$ ; de ceci et des deux propriétés (40) on déduit que

$$\begin{aligned} s_{i-1}^{p_{i-1}} \cdot s_i^{p_i} \dots s_m^{p_m}(x) &\in s_{i-1}^{p_{i-1}} (U_{s_i}^-(x) \cup U_{s_i}^+(x)) \subset s_{i-1}^{p_{i-1}} \left( X \setminus (U_{s_{i-1}}^-(x) \cup U_{s_{i-1}}^+(x)) \right) \\ &= s_{i-1}^{p_{i-1}} (D_{s_{i-1}}(x)) \subset U_{s_{i-1}}^-(x) \cup U_{s_{i-1}}^+(x), \end{aligned}$$

ce qui prouve la récurrence. Il s'ensuit que  $x = s_1^{p_1} \cdot s_2^{p_2} \dots s_m^{p_m}(x)$  est un élément de  $U_{s_1}^-(x) \cup U_{s_1}^+(x)$ , ce qui est contradictoire avec le fait que  $x \in D_{s_1}(x)$  car (par (40))  $D_{s_1}(x) \cap (U_{s_1}^-(x) \cup U_{s_1}^+(x)) = \emptyset$ . Il n'y a donc pas de relation non triviale entre les éléments de  $\Sigma$ .  $\square$

**Proposition 6.3.** *Soit  $\{a, b\}$  une paire d'isométries sans torsion de  $(X, d)$ , (telles que  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  agissent discrètement sur  $(X, d)$ ), si  $a$  et  $b$  sont en position de demi-Schottky par rapport à au moins un point  $x \in X$ , alors  $\{a, b\}$  engendre un semi-groupe libre dans le groupe des isométries de  $(X, d)$ .*

Avant de démontrer la proposition 6.3, nous établirons le Lemme suivant :

**Lemme 6.4.** *Soit  $\{a, b\}$  une paire d'isométries sans torsion de  $(X, d)$ , (telles que  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  agissent discrètement sur  $(X, d)$ ), si  $a$  et  $b$  sont en position de demi-Schottky par rapport à un point  $x \in X$ , alors tout produit  $R(a, b)$  de puissances positives de  $a$  et de  $b$  vérifie  $R(a, b)x \in U_a^+(x)$  (resp.  $R(a, b)x \in U_b^+(x)$ ) si le premier facteur du produit  $R(a, b)$  est une puissance de  $a$  (resp. une puissance de  $b$ ).*

*Preuve :* Faisons la démonstration dans le cas où le premier facteur du produit  $R(a, b)$  est une puissance de  $a$ , la preuve dans le cas où le premier facteur est une puissance de  $b$  se faisant à l'identique (en échangeant les rôles de  $a$  et  $b$ ). Supposons donc que

$$R(a, b) = a^{p_0} b^{q_0} \dots a^{p_k} b^{q_k} \quad \text{ou} \quad R(a, b) = a^{p_0} b^{q_0} \dots a^{p_k} b^{q_k} a^{p_{k+1}},$$

où tous les  $p_i$  et  $q_i$  appartiennent à  $\mathbb{N}^*$ .

Notons que  $b^{q_k}(x) \in b^{q_k}(D_b(x)) \subset U_b^+(x)$ , où l'inclusion découle de la première des deux égalités (39); on démontre de même que  $a^{p_{k+1}}(x) \in U_a^+(x)$ . Comme  $a$  et  $b$  sont en position de demi-Schottky par rapport à  $x$ , on a également

$$a^{p_i}(U_b^+(x)) \subset a^{p_i}(X \setminus (U_a^-(x) \cup U_a^+(x))) = a^{p_i}(D_a(x)) \subset U_a^+(x)$$

où l'égalité et la dernière inclusion découlent des deux propriétés (40) et (39). On démontre de la même manière que  $b^{q_i}(U_a^+(x)) \subset U_b^+(x)$ ; en itérant et en alternant ces deux dernières propriétés, nous en déduisons que  $a^{p_0} b^{q_0} \dots a^{p_k} b^{q_k}(x)$  et  $a^{p_0} b^{q_0} \dots a^{p_k} b^{q_k} a^{p_{k+1}}(x)$  appartiennent à  $U_a^+(x)$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

*Fin de la preuve de la Proposition 6.3 :* Si le semi-groupe engendré par  $a$  et  $b$  n'est pas libre, nous allons démontrer que nous sommes obligatoirement dans un des deux cas suivants :

**Cas 1 :** Soit il existe une relation entre  $a$  et  $b$  qui s'écrit, après simplifications éventuelles, sous la forme  $R(a, b) = e = id_X$ , où  $R(a, b)$  peut être défini (dans le sous-groupe  $\langle a, b \rangle$ ) comme un produit (non trivial) de puissances strictement positives de  $a$  et de  $b$  ou de manière équivalente (dans le groupe libre à deux générateurs, encore appelés  $a$  et  $b$ ) comme un mot formé des lettres  $a$  et  $b$ .

**Cas 2 :** Soit il existe une relation entre  $a$  et  $b$  qui s'écrit, après simplifications éventuelles, sous la forme  $R_1(a, b) = R_2(a, b)$ , où  $R_1(a, b)$  et  $R_2(a, b)$  sont eux aussi des produits (non triviaux) de puissances strictement positives de  $a$  et de  $b$  et des mots formés des lettres  $a$  et  $b$  tels que la première lettre du mot  $R_1(a, b)$  soit différente de la première lettre du mot  $R_2(a, b)$ .

En effet, la seule éventualité qui n'est a priori pas couverte par ces deux cas est celle où la relation s'écrit  $R_1(a, b) = R_2(a, b)$  et où les premières lettres des mots  $R_1(a, b)$  et  $R_2(a, b)$  sont identiques. Notons alors  $i$  le plus grand des entiers  $j$  tels que les  $j$  premières lettres des mots

$R_1(a, b)$  et  $R_2(a, b)$  soient identiques, notons  $R_i(a, b)$  le mot formé des  $i$  premières lettres du mot  $R_1(a, b)$  (et donc du mot  $R_2(a, b)$ ), il existe alors des mots  $R'_1(a, b)$  et  $R'_2(a, b)$  (triviaux ou produits de puissances strictement positives de  $a$  et de  $b$ ) tels que  $R_1(a, b) = R'_i(a, b) R'_1(a, b)$  et  $R_2(a, b) = R'_i(a, b) R'_2(a, b)$ , ce qui assure que la relation initiale  $R_1(a, b) = R_2(a, b)$  est trivialement équivalente à la relation  $R'_1(a, b) = R'_2(a, b)$ . Si un des deux mots  $R'_1(a, b)$  ou  $R'_2(a, b)$  est trivial, nous sommes alors dans le cas 1, si aucun des deux mots  $R'_1(a, b)$  et  $R'_2(a, b)$  n'est trivial, alors (par définition de  $i$ ) les premières lettres des mots  $R'_1(a, b)$  et  $R'_2(a, b)$  sont différentes et nous sommes alors dans le cas 2.

Le Lemme 6.4 implique que tout produit  $R(a, b)$  de puissances strictement positives de  $a$  et de  $b$  vérifie  $R(a, b)x \in U_a^+(x) \cup U_b^+(x)$ ; comme d'autre part la première égalité (40) assure que  $x \in D_a(x) \cap D_b(x) = X \setminus (U_a^-(x) \cup U_a^+(x) \cup U_b^-(x) \cup U_b^+(x))$ , il est impossible de réaliser la condition  $R(a, b)x = x$ , donc la condition  $R(a, b) = e$ : il n'existe donc aucune relation relevant du cas 1.

Pour toute paire  $R_1(a, b), R_2(a, b)$  telle que  $R_1(a, b)$  et  $R_2(a, b)$  soient des produits (non triviaux) de puissances strictement positives de  $a$  et de  $b$  tels que la première lettre du mot  $R_1(a, b)$  soit différente de la première lettre du mot  $R_2(a, b)$ , le Lemme 6.4 implique soit que  $R_1(a, b)x \in U_a^+(x)$  et  $R_2(a, b)x \in U_b^+(x)$  (si la première lettre du mot  $R_1(a, b)$  est  $a$ ), soit que  $R_1(a, b)x \in U_b^+(x)$  et  $R_2(a, b)x \in U_a^+(x)$  (si la première lettre du mot  $R_1(a, b)$  est  $b$ ). Ceci prouve qu'il est impossible d'avoir  $R_1(a, b)x = R_2(a, b)x$ , donc de réaliser la condition  $R_1(a, b) = R_2(a, b)$ : il n'existe donc aucune relation relevant du cas 2.

Ceci prouve que le semi-groupe engendré par  $a$  et  $b$  est libre.  $\square$

La Proposition qui suit généralise, dans le cadre d'actions isométriques sur un espace métrique  $\delta$ -hyperbolique, un résultat démontré par T. Delzant dans le cas des groupes hyperboliques (cf. [Del91], Lemme 1.2 p. 179):

**Proposition 6.5.** *Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Soient  $a$  et  $b$  deux isométries de  $(X, d)$ ,*

- (i) *s'il existe un point  $x \in X$  tel que  $d(a^p x, b^q x) > \text{Max}[d(x, a^p x), d(x, b^q x)] + 2\delta$  pour tous les  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ , alors  $a$  et  $b$  sont en position de Schottky par rapport à  $x$  et le sous-groupe du groupe des isométries engendré par  $a$  et  $b$  est libre,*
- (ii) *s'il existe un point  $x \in X$  tel que  $d(a^p x, b^q x) > \text{Max}[d(x, a^p x), d(x, b^q x)] + 2\delta$  pour tous les  $(p, q) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) \setminus (\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-)$ , alors  $a$  et  $b$  sont en position de demi-Schottky par rapport à  $x \in X$  et le semi-groupe engendré par  $a$  et  $b$  est libre.*

**Remarque 6.6.** *L'une ou l'autre des hypothèses faites dans la proposition 6.5 (i) (resp. dans la proposition 6.5 (ii)) implique automatiquement les propriétés suivantes pour les groupes  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  engendrés respectivement par  $a$  et par  $b$  et pour leur action sur  $(X, d)$ :*

- (1) *les éléments  $a$  et  $b$  ne peuvent être de torsion,*
- (2) *le point  $x$  dont il est question dans l'hypothèse de la proposition 6.5 (i) (resp. dans l'hypothèse de la proposition 6.5 (ii)) n'est fixé par aucun des éléments de  $\langle a \rangle \setminus \{\text{id}_X\}$  et par aucun des éléments de  $\langle b \rangle \setminus \{\text{id}_X\}$ ,*
- (3)  *$\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  sont des sous-groupes discrets du groupe des isométries de  $(X, d)$ .*

*Preuve de la Remarque 6.6:* L'une ou l'autre des hypothèses faites dans la proposition 6.5 (i) ou dans la proposition 6.5 (ii) implique, pour tout  $(p, q) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{N}^*)$  et tout  $(p, q) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{Z}^*)$ :

$$\begin{aligned} \text{Max}[d(x, a^p x), d(x, b^q x)] + \text{Min}[d(x, a^p x), d(x, b^q x)] &= d(x, a^p x) + d(x, b^q x) \geq d(a^p x, b^q x) \\ &> \text{Max}[d(x, a^p x), d(x, b^q x)] + 2\delta, \end{aligned}$$

on en déduit que  $\text{Min}[d(x, a^p x), d(x, b^q x)] > 2\delta$ , donc que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^* \quad d(x, a^p x) > 2\delta \quad \text{et} \quad \forall q \in \mathbb{Z}^* \quad d(x, b^q x) > 2\delta$$

On en déduit immédiatement que, pour tous les  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ , on a  $a^p x \neq x$  et  $b^q x \neq x$ , ce qui prouve les énoncés (1) et (2) de la remarque 6.6.



On en déduit également que, pour tous les  $(k, p) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  tels que  $p \neq k$ , on a  $d(a^k x, a^p x) > 2\delta$  et  $d(b^k x, b^p x) > 2\delta$ . Un corollaire est que toute suite  $(a^{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément sur  $\overline{B}_X(x, R)$  est stationnaire : en effet  $(a^{n_k} x)_{k \in \mathbb{N}}$  est alors une suite de Cauchy et il existe un  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $d(a^{n_p} x, a^{n_{p+k}} x) < 2\delta$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  ce qui, en vertu de la propriété qui précède, implique que  $n_{p+k} = n_p$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Ceci prouve que  $\langle a \rangle$  est discret. On démontre de la même manière que  $\langle b \rangle$  est discret.  $\square$

*Preuve de la Proposition 6.5 :* La Remarque 6.6 assurant que  $a$  et  $b$  forment une paire d'isométries de  $(X, d)$  sans torsion telles que  $\langle a \rangle$  et  $\langle b \rangle$  agissent discrètement sur  $(X, d)$ , nous pouvons utiliser les définitions et résultats de la section 6.1.

*Preuve de (i) :* Soit  $y$  un point quelconque de  $U_b^-(x) \cup U_b^+(x)$ , en vertu des définitions (39) il existe un  $k \in \mathbb{Z}^*$  tel que  $y \in D'_b(b^k x)$ , ce qui implique en particulier que  $d(y, b^k x) \leq d(y, x)$  ; fixons cette valeur de  $k$ . Pour tout  $p \in \mathbb{Z}^*$ , la propriété du quadrilatère (lemme 8.3 (iv)), appliquée aux points  $y, a^p x, x$  et  $b^k x$ , donne

$$d(y, x) + d(a^p x, b^k x) \leq \text{Max} [d(y, b^k x) + d(x, a^p x); d(y, a^p x) + d(x, b^k x)] + 2\delta.$$

L'hypothèse faite permet d'en déduire que  $d(y, x) < \text{Max} [d(y, b^k x); d(y, a^p x)]$ , donc que  $d(y, x) < d(y, a^p x)$  pour tout  $p \in \mathbb{Z}^*$ , ce qui entraîne que  $y \in D_a(x) = X \setminus (U_a^-(x) \cup U_a^+(x))$  pour tout  $y \in U_b^-(x) \cup U_b^+(x)$ , donc que  $U_b^-(x) \cup U_b^+(x) \subset X \setminus (U_a^-(x) \cup U_a^+(x))$ . En vertu de la définition 6.1 (i), ceci démontre que  $a$  et  $b$  sont en position de Schottky par rapport à  $x$ . La proposition 6.2 assure alors que le sous-groupe du groupe des isométries engendré par  $a$  et  $b$  est libre.

*Preuve de (ii) :* La démonstration du fait que  $U_b^+(x) \subset X \setminus (U_a^-(x) \cup U_a^+(x))$  est identique à la preuve de (i), à ceci près qu'il faut choisir pour  $y$  un point quelconque de  $U_b^+(x)$ , et par conséquent supposer que  $k \in \mathbb{N}^*$  (tout en continuant à prendre pour  $p$  un élément quelconque de  $\mathbb{Z}^*$ ). La preuve du fait que  $U_a^+(x) \subset X \setminus (U_b^-(x) \cup U_b^+(x))$  se fait de manière identique, en échangeant les rôles de  $a$  et de  $b$ . En vertu de la définition 6.1 (ii), ceci démontre que  $a$  et  $b$  sont en position de demi-Schottky par rapport à  $x$ . La proposition 6.3 assure alors que le semi-groupe engendré par  $a$  et  $b$  est libre.  $\square$

## 6.2 Le cas où le déplacement moyen est minoré

Dans cette sous-section, nous nous intéressons seulement à des paires d'isométries de type hyperbolique.

**Proposition 6.7.** *Soient  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique et  $a$  et  $b$  deux isométries hyperboliques telles que le groupe  $\langle a, b \rangle$  engendré par  $a$  et  $b$  soit discret et non virtuellement cyclique, alors,*

- (i) *si  $s(a), s(b) > 13\delta$ , l'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a, b\}$  ou par  $\{a, b^{-1}\}$  est libre,*
- (ii) *pour tout  $\varepsilon_1 > 0$ , si  $\ell(a), \ell(b) \geq \varepsilon_1$  alors, pour tous les entiers  $p, q > \frac{13\delta}{\varepsilon_1}$ , l'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a^p, b^q\}$  ou par  $\{a^p, b^{-q}\}$  est libre.*

Avant de démontrer la Proposition 6.7, nous allons démontrer le

**Lemme 6.8.** *Soit  $\gamma$  une isométrie de type hyperbolique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  tel que  $s(\gamma) > \frac{11}{2}\delta$ , soit  $c \in \mathcal{G}(\gamma)$  une quelconque des géodésiques canoniquement orientées qui joignent  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ , et soit  $x$  un point quelconque de  $M(\gamma)$ , on a alors*

- (i)  $d(x, \gamma x) \leq \ell(\gamma) + 4\delta$ ,
- (ii) *si on note  $c(t_k)$  un projeté de  $\gamma^k x$  sur la géodésique  $c$ , alors la suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est strictement croissante.*

*Preuve de (ii) :* Par contradiction, supposons que la suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  n'est pas strictement croissante, comme  $t_k \rightarrow \pm\infty$  quand  $k \rightarrow \pm\infty$ , il existe un  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $t_p \leq \text{Min}(t_{p-1}, t_{p+1})$ . Posons

$\delta_k = d(\gamma^k x, c(t_k))$ , la proposition 8.9 (i) implique que  $\delta_k \leq 2\delta$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  (car  $c$  et  $\gamma^k \circ c$  sont deux géodésiques de  $\mathcal{G}(\gamma)$ ) ; on a alors :

— Soit  $t_p \leq t_{p-1} \leq t_{p+1}$ , et alors l'inégalité triangulaire, puis le Lemme 8.20 (ii), et enfin l'hypothèse faite sur  $s(\gamma)$  impliquent que :

$$\begin{aligned} t_{p+1} - t_p + 2\delta_{p-1} + \delta_{p+1} + \delta_p &\geq d(\gamma^p x, \gamma^{p-1} x) + d(\gamma^{p-1} x, \gamma^{p+1} x) \\ &\geq d(x, \gamma x) + d(x, \gamma^2 x) \geq 2d(x, \gamma x) + s(\gamma) - \delta \geq 3s(\gamma) - \delta > \frac{31}{2}\delta ; \end{aligned} \quad (41)$$

comme  $\delta_k \leq 2\delta$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on déduit de cette dernière inégalité que  $d(c(t_p), c(t_{p+1})) > 3\delta$  et qu'on peut donc appliquer le Lemme 8.8, qui donne :

$$d(x, \gamma x) = d(\gamma^p x, \gamma^{p+1} x) \geq t_{p+1} - t_p + \delta_{p+1} + \delta_p - 6\delta .$$

En comparant cette dernière inégalité avec l'inégalité (41), nous obtenons  $2s(\gamma) \leq d(x, \gamma x) + s(\gamma) \leq 11\delta$ , en contradiction avec l'hypothèse faite sur  $s(\gamma)$ .

— Soit  $t_p \leq t_{p+1} \leq t_{p-1}$ , et alors un raisonnement identique au précédent, où il suffit d'échanger les rôles de  $p-1$  et de  $p+1$ , donne également dans ce cas :  $2s(\gamma) \leq d(x, \gamma x) + s(\gamma) \leq 11\delta$ , en contradiction avec l'hypothèse faite sur  $s(\gamma)$ .

Par contradiction, nous en concluons que la suite  $(t_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est strictement croissante.

*Preuve de (i) :* Comme nous avons vu que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\delta_0, \delta_k \leq 2\delta$ , l'inégalité triangulaire donne :

$$d(x, \gamma^k x) - 4\delta \leq d(x, \gamma^k x) - \delta_0 - \delta_k \leq |t_k - t_0| \leq d(x, \gamma^k x) + \delta_0 + \delta_k \leq d(x, \gamma^k x) + 4\delta .$$

Comme la suite  $(t_i)_{i \in \mathbb{N}}$  est croissante d'après (ii), nous en déduisons que  $(t_k - t_0) = |t_k - t_0|$  et que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} |t_{i+1} - t_i| \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} |t_k - t_0| \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{k} d(x, \gamma^k x) \right) = \ell(\gamma) ,$$

ce qui a pour conséquence que  $\inf_{i \in \mathbb{N}} |t_{i+1} - t_i| \leq \ell(\gamma)$ . On en déduit que

$$d(x, \gamma x) = \inf_{i \in \mathbb{N}} d(\gamma^i x, \gamma^{i+1} x) \leq \inf_{i \in \mathbb{N}} (|t_{i+1} - t_i| + \delta_i + \delta_{i+1}) \leq \ell(\gamma) + 4\delta . \quad \square$$

*Preuve de la Proposition 6.7 :* Pour simplifier, notons  $N_1$  le plus petit entier strictement supérieur à  $\frac{13\delta}{\varepsilon_1}$ . Montrons d'abord que (i)  $\implies$  (ii) : en effet, si  $a$  et  $b$  vérifient  $\ell(a), \ell(b) \geq \varepsilon_1 > 0$ , alors d'une part  $a$  et  $b$  sont de type hyperbolique (en vertu du résultat rappelé à la suite des Définitions 8.17) et d'autre part  $s(a^p)$  et  $s(b^q)$  sont respectivement supérieurs ou égaux à  $\ell(a^p)$  et  $\ell(b^q)$ , eux-mêmes supérieurs ou égaux à  $N_1 \varepsilon_1$ , donc strictement supérieurs à  $13\delta$ . La propriété (i) implique alors qu'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a^p, b^q\}$  ou par  $\{a^p, b^{-q}\}$  est libre.

*Preuve de (i) :* Sous les hypothèses de (i), le Lemme 8.20 (i) implique que  $\ell(a) \geq s(a) - \delta > 12\delta$  et que  $\ell(b) \geq s(b) - \delta > 12\delta$ , donc que  $a$  et  $b$  sont de type hyperbolique car  $\ell(a), \ell(b) > 0$  (ce résultat a été rappelé à la suite des Définitions 8.17). Une autre conséquence de ces deux inégalités est que

$$\forall k \in \mathbb{Z}^* , \quad s(a^k) > \max(13, 12|k|) \cdot \delta \quad \text{et} \quad s(b^k) > \max(13, 12|k|) \cdot \delta ; \quad (42)$$

en effet, cette propriété est vérifiée (par hypothèse) lorsque  $k = \pm 1$ , lorsque  $|k| \geq 2$ , on a  $s(a^k) \geq \ell(a^k) = |k|\ell(a) > |k| \cdot 12\delta \geq 24\delta$  et on montre de même que  $s(b^k) > |k| \cdot 12\delta \geq 24\delta$ . Notons  $c_a$  (resp.  $c_b$ ) une des géodésiques joignant les points fixes  $a^-$  et  $a^+$  de  $a$  (resp. les

points fixes  $b^-$  et  $b^+$  de  $b$ ), orientée de façon que  $c_a(-\infty) = a^-$  et  $c_a(+\infty) = a^+$  (resp.  $c_b(-\infty) = b^-$  et  $c_b(+\infty) = b^+$ ). Si les ensembles limites  $\{a^+, a^-\}$  et  $\{b^+, b^-\}$  ont un élément commun, ils sont identiques d'après la Proposition 8.21 (i) et sont les points fixes de tous les éléments de  $\langle a, b \rangle$ , ce qui a pour conséquence (d'après la Proposition 8.21 (ii)) que  $\langle a, b \rangle$  est virtuellement cyclique, ce qui est exclu par hypothèse ; les ensembles limites  $\{a^+, a^-\}$  et  $\{b^+, b^-\}$  n'ont donc aucun élément commun.

La Proposition 8.10 (ii) assure alors qu'il existe un point  $x_0 = c_a(s_0)$  de la géodésique  $c_a$  tel que, pour toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ , il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels strictement positifs tendant vers zéro telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , et pour  $n$  suffisamment grand, on ait

$$d(c_a(t), c_b(t_n)) \geq d(c_b(t_n), x_0) + d(x_0, c_a(t)) - 5\delta - \varepsilon_n . \quad (43)$$

De la même manière, la Proposition 8.10 (iii) assure qu'il existe un point  $x'_0 = c_a(s'_0)$  de la géodésique  $c_a$  tel que, pour toute suite  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $-\infty$ , il existe une suite  $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels strictement positifs tendant vers zéro telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , et pour  $n$  suffisamment grand, on ait

$$d(c_a(t), c_b(t'_n)) \geq d(c_b(t'_n), x'_0) + d(x'_0, c_a(t)) - 5\delta - \varepsilon'_n . \quad (44)$$

Quitte à remplacer éventuellement  $b$  par  $b^{-1}$ , ce qui a pour effet de changer l'orientation de  $c_b$ , donc d'échanger les points  $x_0$  et  $x'_0$ , nous supposons dans la suite que  $s'_0 \leq s_0$ .

Notons  $y_0 = c_b(r_0)$  un projeté de  $x_0$  sur la géodésique  $c_b$ . Notons  $c_a(s_k)$  un projeté de  $a^k x_0$  sur la géodésique  $c_a$  et notons  $c_b(r_q)$  un projeté de  $b^q y_0$  sur la géodésique  $c_b$ . La Proposition 8.9 (i), appliquée aux géodésiques  $c_a$  et  $a^k \circ c_a$  (resp. aux géodésiques  $c_b$  et  $b^q \circ c_b$ ), donne :

$$\forall k, q \in \mathbb{Z}, \quad d(a^k x_0, c_a(s_k)) \leq 2\delta \quad \text{et resp.} \quad d(b^q y_0, c_b(r_q)) \leq 2\delta \quad (45)$$

Pour tous les  $q \in \mathbb{N}^*$  et tous les  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on considère une suite réelle  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$  ; l'hypothèse assurant que  $s(b) > 13\delta$ , on peut appliquer le Lemme 6.8, qui assure la croissance stricte de la suite  $n \rightarrow r_n$  ; on a en particulier  $r_0 < r_q$  et donc, lorsque  $n$  est suffisamment grand,  $d(y_0, c_b(t_n)) = d(y_0, c_b(r_q)) + d(c_b(r_q), c_b(t_n))$ . L'application du Lemme 8.7, puis de l'inégalité triangulaire, donne, lorsque  $n$  est suffisamment grand,

$$\begin{aligned} d(x_0, c_b(t_n)) + 2\delta &\geq d(x_0, y_0) + d(y_0, c_b(t_n)) = d(b^q x_0, b^q y_0) + d(y_0, c_b(r_q)) + d(c_b(r_q), c_b(t_n)) \\ &\geq d(b^q x_0, c_b(r_q)) - 2d(c_b(r_q), b^q y_0) + d(y_0, b^q y_0) + d(c_b(r_q), c_b(t_n)) ; \end{aligned}$$

la seconde inégalité (45) permet d'en déduire :

$$d(x_0, c_b(t_n)) \geq d(b^q x_0, c_b(t_n)) - 6\delta + d(y_0, b^q y_0) \quad (46)$$

En appliquant l'inégalité (43), puis l'inégalité du quadrilatère (Lemme 8.3 (iv)), nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(x_0, b^q x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) + d(x_0, c_b(t_n)) - 7\delta - \varepsilon_n &\leq d(x_0, b^q x_0) + d(c_a(s_k), c_b(t_n)) - 2\delta \\ &\leq \text{Max} [d(x_0, c_a(s_k)) + d(b^q x_0, c_b(t_n)) ; d(b^q x_0, c_a(s_k)) + d(x_0, c_b(t_n))] \\ &\leq d(b^q x_0, c_a(s_k)) + d(x_0, c_b(t_n)) , \end{aligned} \quad (47)$$

où la dernière inégalité (qui découle de l'inégalité (46) et du fait que  $d(x_0, b^q x_0) + d(y_0, b^q y_0) \geq 2s(b^q) > 26\delta$  en vertu de la propriété (42)) est valable quand  $n$  est suffisamment grand (donc  $\varepsilon_n$  suffisamment petit). Quand  $n$  est suffisamment grand, pour tous les  $q \in \mathbb{N}^*$  et tous les  $k \in \mathbb{Z}^*$ , en appliquant l'inégalité  $\text{Min} [d(x_0, b^q x_0), d(x_0, a^k x_0)] \geq \text{Min}(s(a^k), s(b^q)) > 13\delta + \varepsilon_n$  (qui se déduit de la propriété (42) et du fait que  $n$  est suffisamment grand), puis les inégalités (47), (45) et l'inégalité triangulaire, on déduit que

$$\begin{aligned} \text{Max} [d(x_0, b^q x_0), d(x_0, a^k x_0)] + 2\delta &< d(x_0, b^q x_0) + d(x_0, a^k x_0) - 11\delta - \varepsilon_n \\ &\leq d(x_0, b^q x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) - 9\delta - \varepsilon_n \leq d(b^q x_0, c_a(s_k)) - 2\delta \leq d(b^q x_0, a^k x_0) . \end{aligned} \quad (48)$$

Considérons maintenant le cas où  $k \in \mathbb{N}^*$  et où  $q = -p$  (où  $p \in \mathbb{N}^*$ ) et une suite réelle  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui tend vers  $+\infty$ . Le Lemme 6.8 et l'hypothèse sur  $s(a)$  assurant la croissance stricte de la suite  $n \rightarrow s_n$ , on a  $s'_n \leq s_0 < s_k$  et donc  $d(x'_0, c_a(s_k)) = d(x'_0, x_0) + d(x_0, c_a(s_k))$ . L'inégalité (44) et l'inégalité triangulaire donnent, lorsque  $n$  est suffisamment grand,

$$\begin{aligned} d(c_a(s_k), c_b(-t_n)) + 5\delta + \varepsilon'_n &\geq d(c_b(-t_n), x'_0) + d(x'_0, c_a(s_k)) \\ &\geq d(c_b(-t_n), x'_0) + d(x'_0, x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) \geq d(c_b(-t_n), x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) , \end{aligned}$$

En appliquant cette dernière inégalité puis l'inégalité du quadrilatère (Lemme 8.3 (iv)) , nous obtenons, lorsque  $n \in \mathbb{N}^*$  est suffisamment grand,

$$\begin{aligned} d(x_0, b^{-p}x_0) + d(c_b(-t_n), x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) - 7\delta - \varepsilon'_n &\leq d(x_0, b^{-p}x_0) + d(c_a(s_k), c_b(-t_n)) - 2\delta \\ &\leq \text{Max} [d(x_0, c_a(s_k)) + d(b^{-p}x_0, c_b(-t_n)); d(b^{-p}x_0, c_a(s_k)) + d(x_0, c_b(-t_n))] . \end{aligned} \quad (49)$$

Le Lemme 6.8 et l'hypothèse faite sur  $s(b)$  assurant la croissance stricte de la suite  $n \rightarrow r_n$ , on a  $-t_n < r_q < r_0$  (où  $q = -p$  et où  $n$  est supposé suffisamment grand), ce qui implique que  $d(y_0, c_b(-t_n)) = d(y_0, c_b(r_q)) + d(c_b(r_q), c_b(-t_n))$ . L'application de cette égalité, du Lemme 8.7, puis de l'inégalité triangulaire, donnent alors

$$\begin{aligned} d(x_0, c_b(-t_n)) + 2\delta &\geq d(x_0, y_0) + d(y_0, c_b(-t_n)) = d(x_0, y_0) + d(y_0, c_b(r_q)) + d(c_b(r_q), c_b(-t_n)) \\ &\geq d(x_0, y_0) + d(y_0, b^q y_0) - 2\delta + d(c_b(r_q), c_b(-t_n)) , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle de la deuxième des inégalités (45). De cette dernière inégalité nous déduisons, en utilisant également l'inégalité triangulaire, le fait que  $d(y_0, b^q y_0) > 13\delta$  et que  $b^q = b^{-p}$ , puis la deuxième des inégalités (45),

$$\begin{aligned} d(b^{-p}x_0, c_b(-t_n)) &< d(b^{-p}x_0, b^{-p}y_0) + d(b^{-p}y_0, c_b(r_q)) + d(c_b(r_q), c_b(-t_n)) + d(y_0, b^q y_0) - 13\delta \\ &\leq d(x_0, y_0) + d(c_b(r_q), c_b(-t_n)) + d(y_0, b^q y_0) - 11\delta \leq d(x_0, c_b(-t_n)) - 7\delta , \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\begin{aligned} d(x_0, c_a(s_k)) + d(b^{-p}x_0, c_b(-t_n)) &< d(x_0, c_a(s_k)) + d(x_0, c_b(-t_n)) - 7\delta \\ &< d(x_0, b^{-p}x_0) + d(c_b(-t_n), x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) - 7\delta - \varepsilon'_n . \end{aligned}$$

En reportant cette dernière estimée dans l'inégalité (49), nous en déduisons que

$$d(x_0, b^{-p}x_0) + d(x_0, c_a(s_k)) - 7\delta - \varepsilon'_n \leq d(b^{-p}x_0, c_a(s_k))$$

ce qui, en utilisant l'inégalité triangulaire et les estimées (45), donne

$$d(x_0, b^{-p}x_0) + d(x_0, a^k x_0) - 9\delta - \varepsilon'_n \leq d(b^{-p}x_0, a^k x_0) + 2\delta;$$

en appliquant l'inégalité  $\text{Min} [d(x_0, b^q x_0), d(x_0, a^k x_0)] \geq \text{Min}(s(a^k), s(b^p)) > 13\delta + \varepsilon'_n$  (qui se déduit de la propriété (42) et du fait que  $n$  est suffisamment grand), nous en déduisons, lorsque  $n$  est suffisamment grand (donc  $\varepsilon'_n$  suffisamment petit) que

$$\forall k, p \in \mathbb{N}^* , \quad \text{Max} [d(x_0, b^{-p}x_0), d(x_0, a^k x_0)] + 2\delta < d(b^{-p}x_0, a^k x_0) .$$

Cette dernière inégalité et l'inégalité (48) prouvent que, pour tous les  $(p, q) \in (\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*) \setminus (\mathbb{Z}^- \times \mathbb{Z}^-)$ , on a  $d(b^q x_0, a^k x_0) > \text{Max} [d(x_0, b^q x_0), d(x_0, a^k x_0)] + 2\delta$ , la Proposition 6.5 (ii) permet d'en déduire que le semi-groupe engendré par  $a$  et  $b$  est libre. Ceci achève la preuve de (i) et de la Proposition 6.7.  $\square$

### 6.3 Le cas où la constante de Margulis est supérieure à $\delta$

Rappelons que, selon la Définition 4.12, la constante de Margulis  $L(a, b)$  d'une paire d'isométries  $\{a, b\}$  de l'espace  $(X, d)$  est l'infimum de  $\text{Max}[d(x, a^p x); d(x, b^q x)]$  quand  $x$  parcourt  $X$  et quand  $(p, q)$  parcourt l'ensemble des  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$  tels que  $a^p$  et  $b^q$  soient non triviaux.

Rappelons aussi que, à toute isométrie hyperbolique  $\gamma$  d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , nous avons associé sa fonction rayon de déplacement  $x \mapsto R_\gamma(x) := \text{Min}_{k \in \mathbb{N}^*} d(x, \gamma^k x)$  (voir la Définition 4.2) et que nous avons défini les domaines de Margulis  $M_R(\gamma)$  comme l'ensemble des points  $x$  tels que  $R_\gamma(x) \leq R$  (voir la Définition 4.5 et la Remarque 4.6).

Le but de cette sous-section est d'établir un résultat en faisant les hypothèses les plus faibles possibles sur la géométrie de l'espace métrique considéré; évidemment nous payons cette généralité par une hypothèse (a priori assez forte) sur l'action de la paire d'isométries  $\{a, b\}$  considérée: nous supposons en effet que la constante de Margulis  $L(a, b)$  de cette paire d'isométries est minorée. Plus précisément, nous démontrons le

**Théorème 6.9.** *Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Soient  $a$  et  $b$  deux isométries hyperboliques de  $(X, d)$  telles que le sous-groupe engendré  $\langle a, b \rangle$  soit un sous-groupe discret non virtuellement cyclique du groupe des isométries de  $(X, d)$ . Si la constante de Margulis  $L(a, b)$  vérifie  $L(a, b) > 23\delta$ , alors on a les propriétés suivantes pour les sous-groupes du groupe des isométries de  $(X, d)$ :*

- (i) si  $\ell(a), \ell(b) \leq 13\delta$ , le sous-groupe engendré par  $\{a, b\}$  est libre,
- (ii) si  $\ell(a), \ell(b) > 13\delta$ , un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a, b\}$  ou par  $\{a, b^{-1}\}$  est libre,
- (iii) si  $\ell(a) \leq 13\delta$  et  $\ell(b) > 13\delta$ , un des deux semi-groupes engendrés par  $\{b, aba^{-1}\}$  ou par  $\{b, ab^{-1}a^{-1}\}$  est libre,
- (iv) si  $\ell(a) > 13\delta$  et  $\ell(b) \leq 13\delta$ , un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a, bab^{-1}\}$  ou par  $\{a, ba^{-1}b^{-1}\}$  est libre

La preuve de ce Théorème repose principalement sur la Proposition suivante:

**Proposition 6.10.** *Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique. Soient  $a$  et  $b$  deux isométries hyperboliques de  $(X, d)$  telles que le sous-groupe engendré  $\langle a, b \rangle$  soit un sous-groupe discret non virtuellement cyclique du groupe des isométries de  $(X, d)$ . Si<sup>12</sup> la constante de Margulis  $L(a, b)$  vérifie  $L(a, b) - \text{Max}[\ell(a), \ell(b)] > 10\delta$ , alors  $a$  et  $b$  engendrent un sous-groupe libre du groupe des isométries de  $(X, d)$ .*

*Preuve de la Proposition 6.10:* Posons  $\ell_0 = \text{Max}[\ell(a), \ell(b)]$  pour simplifier l'écriture. L'hypothèse  $L(a, b) > 10\delta + \ell_0$  nous permet de fixer un  $R_0$  tel que  $10\delta + \ell_0 < R_0 < L(a, b)$ . Notons  $\varepsilon$  un réel quelconque vérifiant  $0 < \varepsilon < R_0 - (10\delta + \ell_0)$  et notons  $\varepsilon'$  le nombre réel strictement positif tel que  $R_0 = 10\delta + \ell_0 + \varepsilon + 2\varepsilon'$ . Posons  $r_0 := \ell_0 + \delta + \varepsilon$ , les Lemmes 4.8 (ii) et 4.14 impliquent que  $M_{r_0}(a)$  et  $M_{r_0}(b)$  sont des fermés disjoints non vides; de plus, d'après le Lemme 4.13, on peut choisir deux points  $x_0 \in M_{r_0}(a)$  et  $y_0 \in M_{r_0}(b)$  tels que  $d(x_0, y_0)$  soit le minimum de  $d(x, y)$  quand  $(x, y)$  parcourt  $M_{r_0}(a) \times M_{r_0}(b)$ . Fixons une géodésique  $[x_0, y_0]$  qui relie ces deux points. Démontrons d'abord la propriété:

$$\exists x \in [x_0, y_0] \text{ tel que } \forall (p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^* \quad d(x, a^p x) > R_0 \text{ et } d(x, b^q x) > R_0. \quad (50)$$

En effet, on a  $L(a, b) > R_0$ , le Lemme 4.14 implique alors que  $M_{R_0}(a)$  et  $M_{R_0}(b)$  sont des fermés disjoints contenant respectivement  $x_0$  et  $y_0$ , donc que leurs intersections avec  $[x_0, y_0]$  sont des fermés disjoints non vides dont (par connexité) la réunion ne peut être égale à  $[x_0, y_0]$ . Il existe donc un point  $x \in [x_0, y_0]$  qui n'appartient pas à  $M_{R_0}(a) \cup M_{R_0}(b)$  et vérifie donc la propriété (50).

12. Dans cette Proposition, l'hypothèse  $L(a, b) - \text{Max}[\ell(a), \ell(b)] > 10\delta$ , on peut substituer l'hypothèse: il n'existe pas de point  $x \in X$  et d'entiers  $p, q \in \mathbb{N}^*$  qui vérifient simultanément  $d(x, a^p x) \leq 10\delta + \text{Max}[\ell(a), \ell(b)]$  et  $d(x, b^q x) \leq 10\delta + \text{Max}[\ell(a), \ell(b)]$ . L'équivalence de cet énoncé avec la Proposition 6.10 est justifiée par le Lemme 4.14 et le début de la preuve de la présente Proposition 6.10.

Fixons maintenant le point  $x \in [x_0, y_0]$  donné par la propriété (50). Le fait que  $x \notin M_{R_0}(a)$ , que  $x_0$  est un projeté de  $x$  sur  $M_{r_0}(a)$ , que  $a^p x_0 \in M_{r_0}(a)$ , et le Lemme 4.9 impliquent que

$$\forall p \in \mathbb{Z}^* \quad d(x, a^p x_0) \geq d(x, x_0) > \frac{1}{2}(R_0 - r_0) = \frac{9}{2}\delta + \varepsilon'. \quad (51)$$

Fixons deux éléments quelconques  $p$  et  $q$  de  $\mathbb{Z}^*$ . Notons  $[x, x_0]$  la portion de la géodésique  $[x_0, y_0]$  comprise entre  $x$  et  $x_0$  et appelons  $[a^p x, a^p x_0]$  l'image de cette géodésique par  $a^p$ ; choisissons des géodésiques  $[x, a^p x]$ ,  $[x_0, a^p x_0]$  et  $[x, a^p x_0]$  de manière quelconque. D'après les inégalités (50) et (51), il existe des points  $u$ ,  $u'$  et  $u''$ , situés respectivement sur les géodésiques  $[x, a^p x]$ ,  $[x, a^p x_0]$  et  $[x, x_0]$ , tels que  $d(x, u) = d(x, u') = d(x, u'') = \frac{5}{2}\delta + \varepsilon'$ .

Considérons les triangles  $\Delta = [x, a^p x, a^p x_0]$  et  $\Delta' = [x, a^p x_0, x_0]$  formés par les géodésiques choisies ci-dessus (ayant donc la géodésique  $[x, a^p x_0]$  comme côté commun) et leurs approximations par les tripodes associés :  $f_\Delta : (\Delta, d) \rightarrow (T_\Delta, d_T)$  et  $f_{\Delta'} : (\Delta', d) \rightarrow (T_{\Delta'}, d_{T'})$  (selon la construction décrite en début de sous-section 8.1), les points centraux de branchement de ces tripodes étant notés respectivement  $c$  et  $c'$ ; les longueurs des branches du tripode  $(T_\Delta, d_T)$  (resp.  $(T_{\Delta'}, d_{T'})$ ) d'extrémités  $f_\Delta(x)$ ,  $f_\Delta(a^p x)$  et  $f_\Delta(a^p x_0)$  (resp.  $f_{\Delta'}(x)$ ,  $f_{\Delta'}(a^p x_0)$  et  $f_{\Delta'}(x_0)$ ) sont notées  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  (resp.  $\alpha'$ ,  $\beta'$  et  $\gamma'$ ). Notons  $c'_2$  l'image réciproque dans  $[x_0, a^p(x_0)]$  par  $f_{\Delta'}$  du point de branchement  $c'$  du tripode  $T_{\Delta'}$ , le Lemme 4.11 (iii) assure que  $c'_2 \in M_{r_0+2\delta}(a)$  et, comme  $x$  appartient à l'adhérence de  $X \setminus M_{R_0}(a)$ , on a (d'après le Lemme 4.9)

$$\alpha' = d_{T'}(f_{\Delta'}(x), c') \geq d(x, c'_2) - \delta \geq d(x, M_{r_0+2\delta}(a)) - \delta \geq \frac{1}{2}(R_0 - r_0 - 2\delta) - \delta = \frac{5}{2}\delta + \varepsilon',$$

où la dernière égalité découle du choix de  $R_0$  et de  $r_0$ . Il s'ensuit que les points  $f_{\Delta'}(u')$  et  $f_{\Delta'}(u'')$  appartiennent tous deux à la branche  $[c', f_{\Delta'}(x)]$  du tripode  $(T_{\Delta'}, d_{T'})$  et donc que  $f_{\Delta'}(u') = f_{\Delta'}(u'')$  et le Lemme d'approximation 8.3 (i) permet d'en déduire que  $d(u', u'') \leq \delta$ . Par ailleurs, l'application  $f_\Delta$  étant une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)), on a

$$\alpha + \gamma = d(x, a^p x_0) \geq d(x, x_0) = d(a^p x, a^p x_0) = \beta + \gamma,$$

ce qui assure que  $\alpha \geq \beta$ ; comme on a également  $\alpha + \beta = d(x, a^p x) > R_0$ , le fait que l'application  $f_\Delta$  soit une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)) et l'inégalité (50) impliquent que

$$\alpha > \frac{R_0}{2} > 5\delta + \varepsilon' > d(x, u) = d(x, u') = d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(u)) = d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(u')),$$

ce qui prouve que les points  $f_\Delta(u)$  et  $f_\Delta(u')$  sont situés sur la branche  $[c, f_\Delta(x)]$  du tripode  $T_\Delta$  et vérifient  $f_\Delta(u) = f_\Delta(u')$ ; le Lemme d'approximation 8.3 (i) permet d'en déduire que  $d(u, u') \leq \delta$ . Cette dernière inégalité et l'inégalité  $d(u', u'') \leq \delta$  précédemment démontrée impliquent (par l'inégalité triangulaire) que  $d(u, u'') \leq 2\delta$ .

Notons  $[x, y_0]$  la portion de la géodésique  $[x_0, y_0]$  comprise entre  $x$  et  $y_0$ . En remplaçant  $a$  par  $b$  et  $p$  par  $q$  dans le raisonnement précédent, on construit des géodésiques  $[x, b^q x]$  et  $[x, b^q y_0]$  et des points  $v$ ,  $v'$  et  $v''$ , situés respectivement sur les géodésiques  $[x, b^q x]$ ,  $[x, b^q y_0]$  et  $[x, y_0]$ , tels que  $d(x, v) = d(x, v') = d(x, v'') = \frac{5}{2}\delta + \varepsilon'$ . On démontre de la même manière que précédemment que  $d(v, v'') \leq 2\delta$ . Cette dernière estimée, l'inégalité  $d(u, u'') \leq 2\delta$ , l'inégalité triangulaire et le fait que  $u''$ ,  $x$  et  $v''$  soient portés par la même géodésique (minimisante)  $[x_0, y_0]$  donnent

$$d(u, v) \geq d(u'', x) + d(x, v'') - d(u, u'') - d(v, v'') \geq 5\delta + 2\varepsilon' - 4\delta = \delta + 2\varepsilon'. \quad (52)$$

Considérons maintenant le triangle  $\Delta = [x, a^p x, b^q x]$  et son approximation par le tripode associé :  $f_\Delta : (\Delta, d) \rightarrow (T_\Delta, d_T)$  (selon la construction décrite en début de sous-section 8.1), dont les longueurs des branches d'extrémités  $f_\Delta(a^p x)$ ,  $f_\Delta(b^q x)$  et  $f_\Delta(x)$  sont notées respectivement  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Notons  $c$  le point de branchement du tripode  $T_\Delta$ . De l'inégalité (52) et du lemme d'approximation 8.3 (i), nous déduisons que

$$d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) \geq 2\varepsilon' > 0; \quad (53)$$

or, l'application  $f_\Delta$  étant une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)), on obtient :

$$d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(u)) = d(x, u) = \frac{5}{2}\delta + \varepsilon' = d(x, v) = d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(v)) .$$

- Si  $\gamma \geq \frac{5}{2}\delta + \varepsilon'$ , alors  $f_\Delta(u)$  et  $f_\Delta(v)$  appartiennent tous deux à la branche  $[c, f_\Delta(x)]$  du tripode  $T_\Delta$ , et vérifient donc  $f_\Delta(u) = f_\Delta(v)$ , ce qui contredit l'inégalité (53).
- Si  $\frac{5}{2}\delta < \gamma < \frac{5}{2}\delta + \varepsilon'$ , alors  $f_\Delta(u)$  et  $f_\Delta(v)$  appartiennent respectivement aux branches  $[c, f_\Delta(a^p x)]$  et  $[c, f_\Delta(b^q x)]$  du tripode  $T_\Delta$ , et alors

$$d_T(c, f_\Delta(v)) = d_T(c, f_\Delta(u)) = d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(u)) - d_T(f_\Delta(x), c) = \frac{5}{2}\delta + \varepsilon' - \gamma < \varepsilon' ,$$

ce qui implique que  $d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) < 2\varepsilon'$ , en contradiction avec l'inégalité (53).

La seule possibilité est donc que

$$\gamma \leq \frac{5}{2}\delta . \tag{54}$$

En vertu du fait que l'application  $f_\Delta$  est une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)) et de l'inégalité (50), nous avons  $\text{Min}(\alpha, \beta) = \text{Min}[d(x, a^p x); d(x, b^q x)] - \gamma > R_0 - \gamma$ , ce qui entraîne :

$$d(a^p x, b^q x) = \alpha + \beta = \text{Max}(\alpha, \beta) + \text{Min}(\alpha, \beta) > \text{Max}(\alpha + \gamma, \beta + \gamma) + R_0 - 2\gamma ,$$

soit, en utilisant la définition de  $R_0$  et l'inégalité (54),

$$d(a^p x, b^q x) - \text{Max}[d(x, a^p x); d(x, b^q x)] > R_0 - 2\gamma \geq 10\delta + \varepsilon + 2\varepsilon' - 5\delta > 5\delta .$$

Cette dernière inégalité étant valable pour tous les  $(p, q) \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ , on conclut en appliquant la proposition 6.5 (i).  $\square$

*Fin de la preuve du Théorème 6.9 :*

– Si  $\ell(a), \ell(b) \leq 13\delta$ , comme  $L(a, b) > 23\delta$ , on a  $L(a, b) - \text{Max}[\ell(a), \ell(b)] > 10\delta$  et la Proposition 6.10 implique que le sous-groupe engendré par  $\{a, b\}$  est libre.

– Si  $\ell(a), \ell(b) > 13\delta$ , le Lemme 8.20 (i) assure que  $s(a), s(b) > 13\delta$  et la Proposition 6.7 (i) implique alors qu'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a, b\}$  ou par  $\{a, b^{-1}\}$  est libre.

– Si  $\ell(a) \leq 13\delta$  et  $\ell(b) > 13\delta$ , alors  $\ell(ba^{-1}) = \ell(b) > 13\delta$  et le Lemme 8.20 (i) assure que  $s(b), s(ba^{-1}) > 13\delta$ . La Proposition 6.7 (i) implique alors qu'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{b, aba^{-1}\}$  ou par  $\{b, ab^{-1}a^{-1}\}$  est libre.

– Si  $\ell(a) > 13\delta$  et  $\ell(b) \leq 13\delta$ , la même démonstration (en échangeant les rôles de  $a$  et  $b$ ) prouve qu'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a, bab^{-1}\}$  ou par  $\{a, ba^{-1}b^{-1}\}$  est libre.  $\square$

## 6.4 Semi-groupes libres pour des distances convexes

*Dans cette sous-section, on se fixe arbitrairement trois constantes positives  $\delta, H$  et  $D$  et on s'intéresse à tous les espaces  $\delta$ -hyperboliques  $(X, d)$  dont la distance est convexe (au sens de la Définition 5.19) et à toutes les actions propres, par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  telles que l'entropie de  $(X, d)$  et le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  soient respectivement bornés par  $H$  et  $D$ . À ces trois valeurs des paramètres  $\delta, H$  et  $D$ , on associe la constante universelle  $s_0(\delta, H, D) > 0$  définie par l'égalité (29).*

À l'inverse de ce que nous avons fait dans la sous-section 6.3, le but de la présente sous-section est, au prix d'hypothèses légèrement plus fortes sur la géométrie de l'espace métrique considéré, de démontrer un résultat valable pour toute paire d'éléments de  $\Gamma$ , sans restriction sur les valeurs de  $\ell(a)$ , de  $\ell(b)$  ou de la constante de Margulis  $L(a, b)$  :

**Théorème 6.11.** *Pour tout espace métrique connexe  $\delta$ -hyperbolique géodésiquement complet, non élémentaire  $(X, d)$ , dont la distance est convexe, pour toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sans torsion sur cet espace tels que le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  et l'Entropie de  $(X, d)$  soient respectivement majorés par  $D$  et  $H$ , pour toute paire d'éléments  $a, b \in \Gamma$ , si le sous-groupe engendré  $\langle a, b \rangle$  n'est pas cyclique alors, pour tous les entiers  $p, q \geq \frac{13\delta}{s_0(\delta, H, D)}$  un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a^p, b^q\}$  ou par  $\{a^p, b^{-q}\}$  est libre.*

*Preuve :* Sous les hypothèses du Théorème 6.11, le Lemme 8.12 assure que l'action de  $\Gamma$  est fidèle, discrète, sans point fixe et cocompacte; en particulier  $\Gamma$  s'identifie à un sous-groupe cocompact et discret du groupe des isométries de  $(X, d)$ . Le Théorème 5.24 prouve alors que, pour toute paire d'éléments  $a, b \in \Gamma^*$ , on a  $\ell(a), \ell(b) > s_0(\delta, H, D)$ . La Proposition 6.7 (ii) permet d'en déduire que l'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{a^p, b^q\}$  ou par  $\{a^p, b^{-q}\}$  est libre pour tous les  $p, q \geq \frac{13\delta}{s_0(\delta, H, D)}$ .  $\square$

## 7 Transplantation des propriétés de Margulis

Contrairement aux résultats des sections précédentes, les résultats de la présente section portent sur des espaces métriques mesurés  $(Y, d, \mu)$  qui ne sont plus supposés Gromov-hyperboliques, et (dans la plupart des résultats) leur diamètre ne sera plus supposé borné; en fait la seule hypothèse que nous ferons en général sur ces espaces sera de supposer leur entropie bornée<sup>13</sup> par une constante arbitraire  $H$ . Sur ces espaces, nous considérerons des actions (propres, par isométries préservant la mesure) d'un groupe  $\Gamma$ ; la seule restriction que nous apporterons sera que le groupe  $\Gamma$  soit pris dans une classe de groupes vérifiant une même propriété algébrique intrinsèque qui sera précisée par les Définitions 7.4.

L'idée qui sous-tend cette étude est que les propriétés de Margulis sont "transplantables": dit très grossièrement, cette expression signifie que, si un groupe admet une action propre (dite "de référence") sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d_X)$ , il en hérite de propriétés algébriques telles que toute action du même groupe sur tout autre espace métrique mesuré  $(Y, d, \mu)$  d'entropie bornée bénéficie encore des mêmes propriétés de Margulis que l'action de référence (voir les Propositions 7.10, 7.13, 7.16, 7.21 et 7.23 pour des énoncés précis).

En ce qui concerne la première action "de référence" sur un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d_X)$ , le paramètre quantitatif que nous en retiendrons, pour chaque isométrie hyperbolique  $\gamma$ , est le déplacement moyen  $\ell(\gamma) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(x, \gamma^n x)}{n}$ , cette notion étant précisée dans les Définitions 8.17.

### 7.1 Les classes de groupes considérées ici :

**Définitions 7.1.** *Considérons un espace  $\delta$ -hyperbolique quelconque  $(X, d)$  et un groupe  $\Gamma$  agissant par isométries sur  $(X, d)$  ;*

- (i) *étant donnée une valeur  $\alpha > 0$ , cette action sera dite  $\alpha$ -HT (pour  $\alpha$ -Hyperbolically Thick), si elle vérifie de plus  $\ell(\gamma) \geq \alpha$  pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$*
- (ii) *étant donnée une fonction  $N : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{N}^*$ , cette action sera dite " $N(\bullet)$ -acylindriquement hyperbolique" si elle vérifie de plus la propriété :*

$$\forall R > 0, \exists A \geq 0 \text{ t. q. } \forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq A \implies \#\{g : d(x, g.x) < R \text{ et } d(y, g.y) < R\} \leq N(R) ;$$

*l'action sera dite "acylindriquement hyperbolique" s'il existe une fonction  $N(\bullet)$  telle que cette action soit  $N(\bullet)$ -acylindriquement hyperbolique.*

**Remarque 7.2.** *Les définitions ci-dessus impliquent que*

<sup>13</sup>. Cette hypothèse est une manière de fixer l'échelle : en effet, sans une telle normalisation, toute minoration des distances, des déplacements ou de la systole serait impossible puisque ces invariants géométriques tendent vers zéro lorsqu'on multiplie la distance par un facteur tendant vers zéro. Parmi toutes les normalisations possibles, cette hypothèse "d'entropie majorée" est la plus faible (voir la sous-section 3.3 pour une comparaison avec les différentes hypothèses contenues dans la littérature).



- (i) Toute action  $\alpha$ -HT d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace  $\delta$ -hyperbolique est automatiquement fidèle, discrète et propre<sup>14</sup> et l'existence d'une telle action implique que le groupe  $\Gamma$  est sans torsion.
- (ii) Toute action acylindriquement hyperbolique fidèle d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace  $\delta$ -hyperbolique est automatiquement discrète et propre.

*Preuve* : Il est évident que l'action est fidèle quand elle est  $\alpha$ -HT. Donc, que nous soyons dans le cas (i) ou dans le cas (ii), nous supposons dorénavant que  $\Gamma$  est identifié à un sous-groupe du groupe des isométries  $\text{Isom}(X, d)$  de l'espace  $(X, d)$  considéré.

Si  $\Gamma$  n'est pas discret (ou s'il n'est pas fermé) dans  $\text{Isom}(X, d)$ , il existe une suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments *distincts* de  $\Gamma$  qui converge (uniformément sur tout compact) vers un élément  $g \in \text{Isom}(X, d)$ . Toute paire de points  $\{x, y\}$  étant compacte, il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad d(x, \gamma_n^{-1} \gamma_{n+p} x) = d(\gamma_n x, \gamma_{n+p} x) < \alpha \quad \text{et} \quad d(y, \gamma_n^{-1} \gamma_{n+p} y) < \alpha. \quad (55)$$

- Si l'action est  $\alpha$ -HT, comme  $\inf_{x \in X} d(x, \gamma x) \geq \ell(\gamma) \geq \alpha$ , on déduit de (55) que  $\gamma_n^{-1} \gamma_{n+p} = e$ , donc que  $\gamma_{n+p} = \gamma_n$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , ce qui est contradictoire avec le fait que la suite  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constituée d'éléments distincts.
- Si l'action est acylindriquement hyperbolique, cette dernière propriété entre en contradiction avec la propriété (55) qui assure que, pour toute paire de points  $\{x, y\}$  l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  qui vérifient simultanément  $d(x, \gamma x) < \alpha$  et  $d(y, \gamma y) < \alpha$  est infini.

Dans les deux cas, nous avons prouvé que  $\Gamma$  est un sous-groupe discret (et fermé) de  $\text{Isom}(X, d)$ . Un espace  $\delta$ -hyperbolique étant toujours implicitement supposé propre, la Proposition 8.11 assure alors que l'action est propre.

Si l'action est  $\alpha$ -HT, pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$  et tout  $k \in \mathbb{Z}^*$ , on a  $g^k \neq e$  car  $\ell(\gamma^k) = |k|\ell(\gamma) \neq 0$ , ce qui implique que  $\gamma$  n'est pas de torsion, donc que  $\Gamma$  est sans torsion.  $\square$

**Proposition 7.3.** *Pour tout espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  et pour tout sous-groupe  $\Gamma$  sans torsion de son groupe d'isométries, si l'action de  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  est  $N(\bullet)$ -acylindriquement hyperbolique, elle est automatiquement  $\varepsilon_0$ -HT, où  $\varepsilon_0 := \frac{21\delta}{N(20\delta) + 2}$ . On a donc  $\ell(\gamma) \geq \varepsilon_0$  pour tout élément  $\gamma$  de  $\Gamma^*$ .*

*Preuve* : Si l'action de  $\Gamma$  sur  $(X, d)$  est  $N(\bullet)$ -acylindriquement hyperbolique, elle est automatiquement fidèle : en effet l'action se fait via une représentation  $\varrho : \Gamma \rightarrow \text{Isom}(X, d)$  et, sur toute paire de points  $x, y \in X$  tout élément  $\gamma \in \text{Ker}(\varrho)$  vérifie simultanément  $d(x, \gamma \cdot x) := d(x, \varrho(\gamma)(x)) = 0 < \varepsilon$  et  $d(y, \gamma \cdot y) := d(y, \varrho(\gamma)y) = 0 < \varepsilon$  (pour tout  $\varepsilon > 0$ ), ce qui assure que  $\#(\text{Ker}(\varrho)) \leq N(\varepsilon)$ , donc que tous les éléments de  $\text{Ker}(\varrho)$  sont de torsion, ce qui est exclu par hypothèse.

Comme l'action est discrète et propre (d'après la Remarque 7.2) et le groupe sans torsion, la Remarque 8.14 (i) assure qu'aucun élément de  $\Gamma^*$  n'agit de manière elliptique.

Considérons n'importe quel élément  $\gamma \in \Gamma^*$  qui agit par isométrie parabolique, notons  $\gamma^\infty$  son unique point fixe (situé sur le bord idéal  $\partial X$ ) et fixons un rayon-géodésique  $c$  vérifiant  $c(+\infty) = \gamma^\infty$ . Posons  $N := N(8\delta)$  et associons-lui la constante

$$T_N := \sup_{n \in \{1, \dots, N\}} d(c(0), \gamma^n c(0)).$$

Pour tout  $A \geq 0$ , pour tous les  $t, t' \in [T_N, +\infty[$  tels que  $|t' - t| \geq A$ , pour tous les  $n \in \mathbb{Z}$  tels que  $|n| \leq N$ , le Lemme 8.15 (appliqué à l'isométrie parabolique  $\gamma^n$ ) assure que

$$d(c(t), \gamma^n c(t)) \leq 7\delta < 8\delta \quad \text{et} \quad d(c(t'), \gamma^n c(t')) \leq 7\delta < 8\delta,$$

et par conséquent

$$N(8\delta) \geq \# \{g \in \Gamma : d(c(t), g c(t)) < 8\delta \text{ et } d(c(t'), g c(t')) < 8\delta\}$$

<sup>14</sup>. Rappelons qu'une action sur un espace métrique  $(X, d)$  est dite "propre" si, pour tout  $R > 0$  et tout  $x \in X$ , l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) \leq R$  est fini.

$$\geq \#\{\gamma^n : n \in \mathbb{Z} \text{ tel que } |n| \leq N\} = 2N(8\delta) + 1,$$

d'où une contradiction qui assure qu'aucun élément de  $\Gamma$  n'agit par isométrie parabolique.

Il s'ensuit que tout  $\gamma \in \Gamma^*$  agit sur  $(X, d)$  comme isométrie de type hyperbolique, dont les points fixes (situés sur le bord idéal) sont notés  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$ . Posons  $I := \left\{ p \in \mathbb{Z} : \frac{11\delta}{2\ell(\gamma)} < |p| < \frac{16\delta}{\ell(\gamma)} \right\}$ , pour tout  $p \in I$ , on a  $s(\gamma^p) \geq \ell(\gamma^p) = |p|\ell(\gamma) > \frac{11}{2}\delta$ , où le déplacement minimum  $s(\gamma)$  a été introduit dans les Définitions 8.17; nous pouvons donc appliquer le Lemme 6.8 (i) qui assure que, pour tout  $x \in M(\gamma)$  et tout  $p \in I$ ,  $d(x, \gamma^p x) \leq \ell(\gamma^p) + 4\delta < 20\delta$ . Pour tout  $A \geq 0$ , soient  $x, y$  deux points de  $M(\gamma)$  tels que  $d(x, y) > A$  (deux tels points existent, par exemple sur une même géodésique  $c \in \mathcal{G}(\gamma)$ ), on a alors

$$\forall p \in I \quad d(x, \gamma^p x) < 20\delta \text{ et } d(y, \gamma^p y) < 20\delta,$$

et, par conséquent

$$N(20\delta) \geq \#\{g \in \Gamma : d(x, g.x) < 20\delta \text{ et } d(y, g.y) < 20\delta\} \geq \#(I) \geq 2 \left( \frac{21\delta}{2\ell(\gamma)} - 1 \right),$$

ce qui donne  $\ell(\gamma) \geq \frac{21\delta}{N(20\delta) + 2}$  pour tout  $\gamma \in \Gamma^*$ .  $\square$

Ces premières définitions nous amènent aux définitions suivantes :

**Définitions 7.4.** *Etant donnés des réels quelconques  $\delta, \alpha > 0$  et une fonction  $N : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{N}^*$ , nous définissons les classes de groupes suivantes :*

- (i) *La classe des groupes “ $(\delta, \alpha)$ -HT”, i.e. l'ensemble des groupes non cycliques  $\Gamma$  qui admettent au moins une action  $\alpha$ -HT (par isométries) sur au moins un espace  $\delta$ -hyperbolique.*
- (ii) *La classe des groupes “ $(\delta, N(\bullet))$ -acylindriquement hyperboliques”, i. e. l'ensemble des groupes non cycliques et sans torsion  $\Gamma$  qui admettent au moins une action  $N(\bullet)$ -acylindriquement hyperbolique (par isométries) sur au moins un espace  $\delta$ -hyperbolique.*
- (iii) *La classe des groupes “ $(\delta, \alpha)$ -non abéliens”, i.e. l'ensemble des groupes non abéliens  $\Gamma$  tels que, pour toute paire d'éléments  $\gamma, \gamma'$  qui ne commutent pas entre eux, il existe un morphisme  $\varrho$  du sous-groupe  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  engendré par ces deux éléments vers un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT tel que  $\varrho(\langle \gamma, \gamma' \rangle)$  ne soit isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $\mathbb{Z}$ .*
- (iv) *La classe des groupes “ $(\delta, \alpha)$ -transitifs non abéliens”, i.e. l'ensemble des groupes  $(\delta, \alpha)$ -non abéliens  $\Gamma$  tels que la relation de commutation<sup>15</sup> soit transitive sur  $\Gamma^*$ .*

**Remarques 7.5.** Soulignons quelques conséquences de ces définitions :

- (a) *tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT est automatiquement  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien et tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien et de centre trivial;*
- (b) *tout sous-groupe non cyclique d'un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT est automatiquement  $(\delta, \alpha)$ -HT;*
- (c) *tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien de centre trivial est sans torsion;*
- (d) *tout sous-groupe non trivial virtuellement nilpotent d'un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT est automatiquement isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .*

*Preuve :* La propriété (b) est vérifiée car la restriction à un sous-groupe de  $\Gamma$  d'une action  $\alpha$ -HT de  $\Gamma$  sur un espace  $\delta$ -hyperbolique est une action  $\alpha$ -HT sur le même espace.

*Preuve de (d) :* Par hypothèse, le groupe  $\Gamma$  considéré admet une action  $\alpha$ -HT sur au moins un espace  $\delta$ -hyperbolique; par la Remarque 7.2 (i), cette action est fidèle, discrète et propre, et les propriétés (iii) et (iv) de la Proposition 8.21 impliquent que tout sous-groupe non trivial virtuellement nilpotent de  $\Gamma$  est virtuellement cyclique; en appliquant la Remarque 8.13, un tel groupe est infini cyclique puisqu'il est sans torsion d'après la Remarque 7.2 (i).

15. La relation de commutation  $\sim$  est définie par  $\gamma \sim \gamma' \iff \gamma$  commute avec  $\gamma'$ .

*Preuve de (c) :* Si la propriété (c) n'est pas vérifiée, il existe un  $\gamma \in \Gamma^*$  et un  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $\gamma^n = e$ , fixons un tel élément  $\gamma$  ; il existe un  $\gamma' \in \Gamma^*$  qui ne commute pas avec  $\gamma$  (sinon  $\gamma$  serait un élément non trivial du centre de  $\Gamma$ ). Puisque le groupe est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien, il existe un morphisme  $\varrho$  du sous-groupe  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  vers un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT tel que  $\varrho(\langle \gamma, \gamma' \rangle)$  ne soit isomorphe ni à  $0$ , ni à  $\mathbb{Z}$ . Comme  $\varrho(\gamma)^n = \text{id}_X$ , on a  $\varrho(\gamma) = \text{id}_X$  (car sinon, on aurait  $0 = \ell(\varrho(\gamma)^n) = n \ell(\varrho(\gamma)) \geq n \alpha$ ), et par conséquent  $\varrho(\langle \gamma, \gamma' \rangle) = \varrho(\langle \gamma' \rangle)$ , qui (d'après la propriété (d)) est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  (resp. à  $\{0\}$ ) si  $\varrho(\gamma')$  est non trivial (resp. s'il est trivial), en contradiction avec le fait que  $\varrho(\langle \gamma, \gamma' \rangle)$  n'est isomorphe ni à  $0$ , ni à  $\mathbb{Z}$ . Cette contradiction ne peut être levée que si  $\Gamma$  est sans torsion.

*Preuve de (a) :* Si  $\Gamma$  est un groupe  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien, alors il est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien ; si le centre de  $\Gamma$  contenait un élément non trivial, cet élément commuterait avec tous les éléments de  $\Gamma$  et, par transitivité de la relation de commutation,  $\Gamma$  serait abélien, ce qui est exclu ; donc le centre de  $\Gamma$  est trivial, ce qui prouve la seconde affirmation.

Considérons maintenant n'importe quel groupe  $\Gamma$  qui est  $(\delta, \alpha)$ -HT, l'identité  $\text{id}_\Gamma$  est alors un morphisme de  $\Gamma$  dans lui-même qui envoie tout sous groupe non abélien  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  sur un sous groupe différent de  $\{0\}$  et de  $\mathbb{Z}$ . Pour démontrer que  $\Gamma$ , qui est non cyclique, est  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien, il nous suffit d'une part de démontrer qu'il est non abélien, ce qui découle de la propriété (d), et d'autre part que la relation de commutation est transitive sur  $\Gamma^*$ , ce qui découle du Lemme suivant :

**Lemme 7.6.** *Pour tout élément  $\Gamma$  de la classe des groupes  $(\delta, \alpha)$ -HT, la relation  $\sim$ , définie sur l'ensemble  $\Gamma^*$  par*

$$\gamma \sim \gamma' \iff \gamma \text{ et } \gamma' \text{ commutent ,}$$

*est une relation d'équivalence. Le même résultat vaut lorsque le groupe  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien*

*Preuve :* La réflexivité et la symétrie de cette relation étant évidentes, il suffit de prouver sa transitivité.

Lorsque  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien, la transitivité de  $\sim$  est incluse dans la définition-même de cette classe de groupes, ce qui achève la preuve dans ce cas.

Supposons dorénavant que  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -HT et établissons d'abord la propriété :

$$\forall \gamma, \gamma' \in \Gamma^* \quad \langle \gamma, \gamma' \rangle \text{ est abélien} \iff \exists p, q \in \mathbb{Z}^* \text{ tels que } \gamma^p = (\gamma')^q \quad (56)$$

En effet tout sous-groupe virtuellement abélien non trivial de  $\Gamma$  est automatiquement isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$  d'après la Remarque 7.5 (d). Dans l'équivalence (56), l'implication  $\Rightarrow$  est donc triviale. Réciproquement, si on suppose qu'il existe  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\gamma^p = (\gamma')^q$ , le fait que  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -HT implique qu'il existe une action  $\alpha$ -HT de  $\Gamma$  sur un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d_X)$  ; comme tous les éléments de  $\Gamma^*$  sont des isométries hyperboliques de  $(X, d_X)$ ,  $\gamma, \gamma^p = (\gamma')^q$  et  $\gamma'$  ont même paire de points fixes (d'après la Remarque 8.14 (ii)), donc le sous-groupe  $\langle \gamma, \gamma' \rangle$  est virtuellement cyclique (d'après la Proposition 8.21 (ii)), donc isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$  comme nous l'avons vu plus haut, ce qui termine la démonstration de la Propriété (56).

Démontrons maintenant la transitivité de la relation  $\sim$  : Pour tous les  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \Gamma^*$  vérifiant simultanément  $\gamma_1 \sim \gamma_2$  et  $\gamma_2 \sim \gamma_3$ , la propriété (56) assure l'existence d'entiers  $p, q, r, s \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\gamma_1^p = \gamma_2^q$  et  $\gamma_2^r = \gamma_3^s$ , ce qui implique que  $\gamma_1^{pr} = \gamma_2^{qr} = \gamma_3^{sq}$ , donc (en appliquant une seconde fois la propriété (56)) que  $\gamma_1 \sim \gamma_3$ .  $\square$

**Exemples 7.7.** *Les exemples suivants de groupes  $(\delta, \alpha)$ -HT font le lien avec les résultats des sections précédentes et avec les résultats de [BCG03] :*

(i) *Considérons les groupes sans torsion  $\Gamma$ , qui sont isomorphes à un sous-groupe discret du groupe des isométries d'un espace  $\delta$ -hyperbolique non élémentaire, géodésiquement complet  $(X, d_X)$ , dont la distance est convexe, tels que l'Entropie de  $(X, d_X)$  et le diamètre de  $\Gamma \backslash X$  soient respectivement majorés par  $H$  et  $D$  ; ces groupes sont tous  $(\delta, s_0)$ -HT, où  $s_0 := s_0(\delta, H, D)$  est la constante universelle définie par l'égalité (29).*

(ii) *Tout sous-groupe non cyclique d'un des groupes considérés en (i) est aussi  $(\delta, s_0)$ -HT.*

(iii) Tout groupe sans torsion  $(\delta, N(\bullet))$ -acylindriquement hyperbolique est  $(\delta, \varepsilon_0)$ -HT, où  $\varepsilon_0 := \frac{21\delta}{N(20\delta) + 2}$ .

(iv) Les groupes fondamentaux des surfaces compactes de genre au moins 2 sont  $(\ln 3, \operatorname{argcosh} 2)$ -HT.

(v) Pour toute donnée de  $i_0 > 0$ , pour que le groupe fondamental d'une variété différentielle compacte  $M$  (quelle que soit sa dimension) soit  $(\ln 3, 2i_0)$ -HT il suffit qu'il existe sur  $M$  une métrique riemannienne  $g$  de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$  et de rayon d'injectivité supérieur ou égal à  $i_0$ .

(vi) Pour toute donnée des réels  $D > 0$  et  $K \geq 1$  et d'un entier  $n \geq 2$ , il existe une constante universelle  $\varepsilon'_1 = \varepsilon'_1(n, K, D) > 0$  telle que le groupe fondamental d'une variété différentielle compacte  $M^n$  soit  $(\ln 3, \varepsilon'_1)$ -HT dès qu'il existe sur  $M^n$  une métrique riemannienne  $g$  de courbure sectionnelle  $-K^2 \leq \sigma \leq -1$  et de diamètre inférieur ou égal à  $D$ .

(vii) Pour toute donnée des réels  $V > 0$  et  $K \geq 1$  et d'un entier  $n \geq 4$ , il existe une constante universelle  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(n, K, V) > 0$  telle que le groupe fondamental d'une variété différentielle compacte  $M^n$  soit  $(\ln 3, \varepsilon_2)$ -HT dès qu'il existe sur  $M^n$  une métrique riemannienne  $g$  de courbure sectionnelle  $-K^2 \leq \sigma \leq -1$  et de volume inférieur ou égal à  $V$ .

Les valeurs des constantes universelles  $\varepsilon'_1(n, K, D)$  et  $\varepsilon_2(n, K, V)$  sont explicitées dans [BCG03], aux Lemmes 1.8 et 1.10 respectivement.

*Preuves :* (i) découle immédiatement du Théorème 5.24 et du fait que l'espace  $(X, d_X)$  est non élémentaire, ce qui assure que  $\Gamma$  n'est pas cyclique d'après la Proposition 8.22 (iii) et (iv).

(ii) se déduit de (i) et de la Remarque 7.5 (b); enfin (iii) est une conséquence directe de la Proposition 7.3.

Pour les propriétés (iv), (v), (vi) et (vii), les preuves données dans [BCG03] aboutissant à des conclusions moins fortes, nous les reprenons ci-après : (v) découle du fait (classique) que le revêtement universel riemannien  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  de toute variété riemannienne  $(M, g)$  de courbure sectionnelle inférieure ou égale à  $-1$  est un espace  $\delta_0$ -hyperbolique, où  $\delta_0 = \ln 3$  (cette propriété se déduit du fait que l'espace hyperbolique  $(\mathbb{H}^n, \operatorname{can})$  est  $\delta_0$ -hyperbolique d'après le Corollaire 1.4.2 page 12 de [CDP90] et du fait que  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  est alors un espace  $\operatorname{Cat}(-1)$ ); (v) découle alors du fait que l'action par isométries du groupe fondamental sur  $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$  a une systole globale égale à 2 fois le rayon d'injectivité de  $(M, g)$ , ce qui implique que  $\ell(\gamma) \geq 2i_0$  pour tout élément non trivial du groupe fondamental.

Toute surface compacte de genre au moins 2 admet une métrique hyperbolique dont le rayon d'injectivité est minoré par  $\operatorname{argcosh} 2$  (voir par exemple le Lemme 1.7 de [BCG03]); ceci prouve (iv) en nous appuyant sur (v).

La propriété (vi) découle de (v) et d'une version due à M. Gromov du Lemme de Margulis (cf. [BK81]) qui prouve que, sous les hypothèses de (v), le rayon d'injectivité est minoré par  $\varepsilon'_1(n, K, D)$  (pour une démonstration en forme, voir le Lemme 1.8 de [BCG03]). Enfin la propriété (vii) se déduit de (vi) et d'une majoration du diamètre en fonction d'une borne supérieure du volume (due elle aussi à M. Gromov, cf [Gro78]), valable sous les hypothèses de (vii) (pour une démonstration en forme, voir le Lemme 1.10 de [BCG03]).  $\square$

**Exemples 7.8.** Les exemples suivants de groupes  $(\delta, \alpha)$ -non abéliens, bien que triviaux, permettent de mesurer combien cette classe de groupes est plus vaste que la classe des groupes  $(\delta, \alpha)$ -HT (et donc que la classe des groupes sans torsion  $(\delta, N(\bullet))$ -acylindriquement hyperboliques pour tout  $\alpha \leq \frac{21\delta}{N(20\delta) + 2}$ ).

(i) Si un groupe non abélien  $\Gamma$  admet un morphisme  $\varrho$  dans un groupe  $\Gamma'$   $(\delta, \alpha)$ -non abélien, tel que  $\varrho$  soit injectif en restriction au sous-groupe des commutateurs  $[\Gamma, \Gamma]$ , il est lui-même  $(\delta, \alpha)$ -non abélien.

(ii) Le produit d'un groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien avec un groupe abélien est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien.

(iii) Le produit de plusieurs groupes  $(\delta, \alpha)$ -non abéliens est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien.<sup>16</sup>

*Preuves :* Dans le cas (i), pour toute paire  $g, \gamma$  d'éléments de  $\Gamma$  qui ne commutent pas, on a  $[\varrho(g), \varrho(\gamma)] = \varrho([g, \gamma]) \neq e$  ; comme  $\Gamma'$  est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien, il existe un morphisme  $\varrho'$  de  $\langle \varrho(g), \varrho(\gamma) \rangle$  dans un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT (noté  $\Gamma''$ ) tel que  $\langle \varrho' \circ \varrho(g), \varrho' \circ \varrho(\gamma) \rangle$  ne soit isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $\mathbb{Z}$ , ce qui prouve que  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien.

Dans le cas (ii), tous les commutateurs sont contenus dans le premier facteur et la première projection est un morphisme sur un groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien qui est injectif en restriction au premier facteur ; on conclut en utilisant (i).

Dans le cas (iii), toute projection sur un des facteurs est un morphisme sur un groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien. Si deux éléments  $g$  et  $\gamma$  ne commutent pas, leurs images  $g_i$  et  $\gamma_i$  par au moins une de ces projections  $p_i$  ne commutent pas, il existe donc un morphisme  $\varrho$  de  $\langle g_i, \gamma_i \rangle$  dans un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT tel que l'image de  $\langle g_i, \gamma_i \rangle$  ne soit isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $\mathbb{Z}$ , ce qui prouve que  $\varrho \circ p_i$  est un morphisme dans un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT tel que l'image de  $\langle g, \gamma \rangle$  ne soit isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

La Remarque qui suit peut être vue comme une extension presque immédiate de la Proposition 6.7 (ii) aux groupes  $(\delta, \alpha)$ -non abéliens :

**Remarque 7.9.** *Pour tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien  $\Gamma$ , pour toute paire  $g, \gamma$  d'éléments de  $\Gamma$  qui ne commutent pas, pour tous les entiers  $p, q > \frac{13\delta}{\alpha}$ , un des deux semi-groupes engendrés par  $\{g^p, \gamma^q\}$  ou par  $\{g^p, \gamma^{-q}\}$  est libre.*

*Preuve :* Sous les hypothèses de la Remarque 7.9, il existe un morphisme  $\varrho$  du sous-groupe  $\langle g, \gamma \rangle$  de  $\Gamma$  vers un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT  $G$  tel que  $\varrho(\langle g, \gamma \rangle)$  n'est isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $\mathbb{Z}$ , donc n'est pas virtuellement cyclique d'après la Remarque 7.5 (d), en particulier  $\varrho(g)$  et  $\varrho(\gamma)$  sont différents de l'élément neutre. Comme (d'après la Définition 7.1 (i) et la Remarque 7.2),  $G$  s'identifie à un sous-groupe discret du groupe des isométries d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  tel que tous ses éléments non triviaux  $h$  soient des isométries hyperboliques de  $(X, d)$  vérifiant  $\ell(h) \geq \alpha$ ,  $\varrho(\gamma)$  et  $\varrho(g)$  sont des isométries de type hyperbolique de  $(X, d)$  qui vérifient  $\ell(\varrho(g)), \ell(\varrho(\gamma)) \geq \alpha$  ; nous pouvons donc leur appliquer la Proposition 6.7 (ii), qui prouve que, pour tous les  $p, q > \frac{13\delta}{\alpha}$ , un des deux semi-groupes engendrés par  $\{\varrho(g)^p, \varrho(\gamma)^q\}$  ou par  $\{\varrho(g)^p, \varrho(\gamma)^{-q}\}$  est libre. Comme le morphisme envoie toute relation entre puissances de  $g$  et de  $\gamma$  sur la relation correspondante entre puissances de  $\varrho(g)$  et de  $\varrho(\gamma)$ , il s'ensuit qu'un des deux semi-groupes engendrés par  $\{g^p, \gamma^q\}$  ou par  $\{g^p, \gamma^{-q}\}$  est libre.  $\square$

## 7.2 Propriétés de Margulis pour les espaces métriques mesurés

*Dans les sous-sections qui suivent, étant donnée une action (propre, par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(Y, d)$ , nous noterons  $\bar{Y} := \Gamma \backslash Y$  l'espace quotient par cette action, muni de la distance-quotient définie au Lemme 8.12 (i).*

*Rappelons qu'on a défini  $\Sigma_r(y)$  comme l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma^*$  tels que  $d(y, \gamma y) \leq r$  et que  $\Gamma_r(y)$  est le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\Sigma_r(y)$ .*

### 7.2.1 Propriétés de Margulis pour des actions de groupes $(\delta, \alpha)$ -non abéliens sur des espaces métriques mesurés

**Proposition 7.10.** *Pour tout espace métrique mesuré  $(Y, d, \mu)$  d'entropie majorée par  $H$ , pour tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien  $\Gamma$ , pour toute action propre (par isométries préservant la mesure)*

16. Quid pour les produits directs ?

de ce groupe sur  $(Y, d, \mu)$ , en tout point  $y \in Y$  le sous-groupe  $\Gamma_r(y)$  est abélien pour tous les  $r < \frac{\ln 2}{H([\lfloor 13\delta/\alpha \rfloor + 1])}$ .

Avant de démontrer la Proposition 7.10, établissons les Lemmes ci-dessous :

**Lemme 7.11.** . – Soit  $L$  un semi-groupe libre à 2 générateurs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (i. e. les éléments de  $L$  sont les produits de puissances positives de  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$ ), muni d'une distance  $d$  invariante par translations à gauche par n'importe quel  $\gamma \in L$ . Pour tous les  $(l_1, l_2)$  tels que  $l_1 \geq d(e, \gamma_1)$  et  $l_2 \geq d(e, \gamma_2)$ , l'entropie de  $(L, d)$  (pour la mesure de comptage) vérifie :

$$\text{Ent}(L, d) \geq \sup_{a \in ]0, +\infty[} \left[ \text{Max} \left( \frac{1}{l_1 + al_2}, \frac{1}{l_2 + al_1} \right) \cdot \left( (1+a) \ln(1+a) - a \ln a \right) \right].$$

*Preuve :* Pour tout  $R > 0$ , notons  $L_R$  l'ensemble des  $\gamma \in L$  tels que  $d(e, \gamma) \leq R$ . Pour tous les  $(p_1, p_2) \in (\mathbb{N}^*)^2$  tels que  $p_1 l_1 + p_2 l_2 \leq R$ , notons  $\Lambda_{p_1, p_2}$  l'ensemble des éléments de  $L$  qui sont obtenus en faisant le produit de  $p_1$  fois  $\gamma_1$  et de  $p_2$  fois  $\gamma_2$  dans n'importe quel ordre. Puisque  $L$  est un semi-groupe libre, on a  $\#(\Lambda_{p_1, p_2}) = C_{p_1+p_2}^{p_1}$ . L'inégalité triangulaire et l'invariance de la distance  $d$  par translations à gauche impliquent que  $\Lambda_{p_1, p_2} \subset L_R$ . On a donc

$$\#L_R \geq C_{p_1+p_2}^{p_1} \geq e^{-(1+\frac{1}{2p_1})} \frac{(p_1 + p_2)^{p_1+p_2+1/2}}{(p_1)^{p_1+1/2} (p_2)^{p_2+1/2}},$$

(la dernière inégalité découlant du fait que  $\int_i^{i+1} f(x) dx \leq \frac{1}{2} [f(i+1) + f(i)]$  lorsque  $f(x) = \ln \left( \frac{p+x}{x} \right)$ ). Pour tout  $a \in ]0, +\infty[$ , posons  $p_1 = \left\lfloor \frac{R}{l_1+al_2} \right\rfloor$  et  $p_2 = [ap_1]$ . Comme  $\frac{p_1}{R}$  et  $\frac{p_2}{R}$  tendent alors respectivement vers  $\frac{1}{l_1+al_2}$  et vers  $\frac{a}{l_1+al_2}$  quand  $R$  tend vers  $+\infty$ , nous déduisons de ce qui précède que

$$\liminf \left[ \frac{1}{R} \ln(\#L_R) \right] \geq \frac{1}{l_1 + al_2} [(1+a) \ln(1+a) - a \ln(a)].$$

La même inégalité pouvant être établie en échangeant les rôles de  $l_1$  et  $l_2$ , ceci achève la preuve du lemme 7.11.  $\square$

**Lemme 7.12.** . – Soit  $L$  un groupe à 2 générateurs  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  tel que l'un des deux semi-groupes engendrés par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  ou par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2^{-1}$  soit libre, notons  $L^+$  ce semi-groupe libre. Pour toute action propre, par isométries, de  $L$  sur un espace métrique  $(Y, d)$ , pour toute mesure  $\mu$   $L$ -invariante sur  $Y$  telle que l'entropie  $\text{Ent}(Y, d, \mu)$  soit majorée par une constante  $H$ , aucun élément de  $L^+ \setminus \{e\}$  n'admet de point fixe et, pour tout point  $y \in Y$ , on a

$$(i) \quad \text{Ent}(Y, d, \mu) \cdot \text{Max} [d(y, \gamma_1 y), d(y, \gamma_2 y)] \geq \ln 2$$

$$(ii) \quad \text{Min} [d(y, \gamma_1 y), d(y, \gamma_2 y)] > \frac{1}{H} \cdot e^{-H \text{Max} [d(y, \gamma_1 y), d(y, \gamma_2 y)]}.$$

*Preuve :* Quitte à remplacer  $\gamma_2$  par  $\gamma_2^{-1}$ , nous pouvons supposer que c'est le semi-groupe engendré par  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  qui est libre.

L'action étant propre, le stabilisateur d'un point  $y$  quelconque est fini, ce qui implique que tous ses éléments sont de torsion; comme tout élément  $\gamma \neq e$  du semi-groupe libre  $L^+$  est sans torsion, un tel  $\gamma$  ne fixe pas  $y$ .

Posons  $\Sigma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$  et notons  $d_\Sigma$  la distance algébrique associée selon la définition donnée dans la section 3.1. Le nombre d'éléments  $\gamma$  du semi-groupe libre à 2 générateurs tels que  $d_\Sigma(e, \gamma) \leq N$  étant au moins égal à  $2^N$ , on obtient :  $\text{Ent}(L, \Sigma) \geq \ln 2$ . Le Lemme 3.6 achève alors la preuve de (i) en prouvant que

$$\text{Ent}(Y, d, \mu) \cdot \text{Max} [d(y, \gamma_1 y), d(y, \gamma_2 y)] \geq \ln 2.$$

Considérons, sur le groupe  $L$ , la pseudo-distance  $d_y$  définie par  $d_y(\gamma, \gamma') = d(\gamma y, \gamma' y)$ ; comme aucun élément de  $L^+ \setminus \{e\}$  n'admet de point fixe,  $d_y$  est une vraie distance en restriction à

$L^+$ . Posons  $l_1 = d(y, \gamma_1 y) = d_y(e, \gamma_1)$  et  $l_2 = d(y, \gamma_2 y) = d_y(e, \gamma_2)$ . Comme la pseudo-distance  $d_y$  est invariante par les translations à gauche, on peut appliquer d'abord le Lemme 3.6, puis le Lemme 7.11, qui nous donnent :

$$\begin{aligned} H &\geq \text{Ent}(Y, d, \mu) \geq \text{Ent}(Y, d, \mu_y^L) \geq \text{Ent}(L^+, d_y, \#) \\ &\geq \sup_{a \in ]0, +\infty[} \left[ \text{Max} \left( \frac{1}{l_1 + al_2}, \frac{1}{l_2 + al_1} \right) \cdot \left( (1+a) \ln(1+a) - a \ln a \right) \right], \end{aligned}$$

où  $\#$  est la mesure de cardinalité des parties de  $L^+$ . En faisant  $a = H l_1$  dans cette inégalité et en utilisant le fait que  $\ln(1+a) > \frac{a}{1+a}$  pour tout  $a > 0$ , nous obtenons :  $H l_2 > -\ln(H l_1)$ , donc  $H l_1 > e^{-H l_2}$ . De même, en faisant  $a = H l_2$  dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons :  $H l_1 > -\ln(H l_2)$ , donc  $H l_2 > e^{-H l_1}$ . Nous en déduisons que  $\text{Min}(l_1, l_2) > \frac{1}{H} \cdot e^{-H \text{Max}(l_1, l_2)}$ , ce qui achève la preuve de la partie (ii).  $\square$

*Fin de la preuve de la Proposition 7.10* : Supposons qu'il existe un point (noté ici  $y$ ) de  $Y$  tel que le sous-groupe  $\Gamma_r(y)$  ne soit pas abélien, alors il existe, dans son système générateur  $\Sigma_r(y)$ , deux éléments  $a, b$  qui ne commutent pas et qui vérifient donc  $d(y, ay) \leq r$  et  $d(y, by) \leq r$ . Notons  $N_1 = \left\lceil \frac{13\delta}{\alpha} \right\rceil + 1$  le plus petit entier strictement supérieur à  $\frac{13\delta}{\alpha}$  ; comme  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien, la Remarque 7.9 prouve que, quitte à remplacer éventuellement  $b$  par  $b^{-1}$ , le semi-groupe engendré par  $a^{N_1}$  et  $b^{N_1}$  est libre. Une conséquence de ceci et du Lemme 7.12 (i) est que

$$H N_1 r \geq \text{Ent}(Y, d) \cdot \text{Max} [d(y, a^{N_1} y), d(y, b^{N_1} y)] \geq \ln 2,$$

ce qui impose que  $r \geq \frac{\ln 2}{N_1 H}$  ; dans le cas contraire on obtient donc que  $\Gamma_r(y)$  est abélien pour tout  $y \in Y$ .  $\square$

## 7.2.2 Minoration de la diastole sur les espaces métriques mesurés :

Sur un espace métrique  $(Y, d)$  arbitraire, nous considérons n'importe quelle action propre (par isométries) d'un groupe  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien  $\Gamma$ . Un tel groupe étant automatiquement de centre trivial, il est sans torsion (en vertu de la Remarque 7.5 (c)) et la Définition 5.15 de la partie  $r$ -mince  $Y_r$  de  $Y$  peut alors se réinterpréter de la manière suivante :  $Y_r$  est l'ensemble (ouvert) des points  $y \in Y$  tels que  $\text{sys}_\Gamma(y) < r$ .

**Proposition 7.13.** *Pour tout espace métrique mesuré connexe  $(Y, d, \mu)$  d'entropie majorée par  $H$ , pour tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien  $\Gamma$ , pour toute action propre (par isométries préservant la mesure) de ce groupe sur  $(Y, d, \mu)$ ,*

$$(i) \text{ Dias}_\Gamma(Y) \geq \varepsilon_1(\delta, \alpha, H), \text{ où } \varepsilon_1(\delta, \alpha, H) := \frac{\ln 2}{H([\frac{13\delta}{\alpha}] + 1)}.$$

(ii) *pour tout  $r < \varepsilon_1(\delta, \alpha, H)$  l'ensemble  $Y_r$  des  $y \in Y$  tels que  $\text{sys}_\Gamma(y) < r$  n'est pas connexe.*

Fixons un réel  $r$  quelconque tel que  $0 < r < \varepsilon_1(\delta, \alpha, H)$ . Rappelons que la relation de commutation  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\Gamma^*$  (voir le Lemme 7.6). Pour tout  $y \in Y_r$ ,  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  est non trivial (par définition) et saturé pour la relation de commutation  $\sim$  (en vertu de la Proposition 7.10),  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  est donc inclus dans une seule classe d'équivalence de cette relation, que nous noterons  $C_r(y)$ . Avant de démontrer la Proposition 7.13, nous allons établir les deux Lemmes suivants :

**Lemme 7.14.** *Sous les hypothèses de la Proposition 7.13 (ii), la classe d'équivalence  $C_r(y)$  est constante sur chacune des composantes connexes de  $Y_r$ . A chaque composante connexe  $Y_r^i$  de  $Y_r$ , on associe donc une unique classe d'équivalence de la relation  $\sim$ , notée  $C_r^i$ , qui contient tous les  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  (pour tous les  $y \in Y_r^i$ ).*

*Preuve du Lemme 7.14 :* L'action de  $\Gamma$  sur  $(Y, d)$  étant propre,  $\Sigma_r(y)$  est fini; de ceci et de la lipschitzianité de  $y \mapsto d(y, \gamma y)$  nous déduisons que  $\Sigma_r(y') \subset \Sigma_r(y)$  pour tout  $y'$  situé dans un voisinage suffisamment petit<sup>17</sup> de  $y$  dans  $Y_r$ , donc que  $\emptyset \neq \Gamma_r(y') \setminus \{e\} \subset \Gamma_r(y) \setminus \{e\}$ , ce qui implique que  $C_r(y') = C_r(y)$ . L'application  $y \mapsto C_r(y)$  est par conséquent localement constante sur  $Y_r$ , donc constante sur chacune des composantes connexes  $Y_r^i$ , de  $Y_r$ . On achève la démonstration en remarquant (cf. ci-dessus) que, pour tout  $y \in Y_r^i$ , on a  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\} \subset C_r(y) = C_r^i$ .  $\square$

**Lemme 7.15.** *Sous les hypothèses de la Proposition 7.13 (ii), pour tout  $y \in Y_r$ , tout élément  $g$  de  $\Gamma^*$  tel que  $gy$  et  $y$  appartiennent à la même composante connexe de  $Y_r$  commute avec tous les éléments de  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$*

*Preuve :* Le Lemme 7.14 assure que  $C_r(gy) = C_r(y)$ . Le fait que  $d(gy, g\gamma g^{-1}(gy)) = d(y, \gamma y)$  implique que  $\Sigma_r(gy) = g\Sigma_r(y)g^{-1}$ , ce qui donne  $\Gamma_r(gy) = g\Gamma_r(y)g^{-1}$  et prouve que, pour tout  $\gamma \in \Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  et tout  $g \in \Gamma$ ,  $g\gamma g^{-1}$  appartient à  $\Gamma_r(gy) \setminus \{e\} \subset C_r(gy) = C_r(y)$ , donc commute avec  $\gamma$ .

Supposons (par l'absurde) qu'il existe un élément  $\gamma \in \Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  qui ne commute pas avec  $g$ ; par définition de la  $(\delta, \alpha)$ -non abélianité, il existe alors un morphisme  $\varrho$  du groupe engendré  $\langle \gamma, g \rangle$  dans un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT  $G$  tel que  $\varrho(\langle \gamma, g \rangle)$  ne soit isomorphe ni à  $\{0\}$ , ni à  $\mathbb{Z}$ , donc tel que  $\varrho(\langle \gamma, g \rangle)$  ne soit pas virtuellement abélien en vertu de la Remarque 7.5 (d), ce qui assure que  $\varrho(\gamma) \neq e$ , donc que  $\varrho(g\gamma g^{-1}) \neq e$ ; comme (d'après la Définition 7.1 (i) et la Remarque 7.2),  $G$  est un sous-groupe du groupe des isométries d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  tel que tous ses éléments non triviaux soient des isométries de type hyperbolique,  $\varrho(\gamma)$  et  $\varrho(g)\varrho(\gamma)\varrho(g)^{-1}$  sont des isométries de type hyperbolique qui commutent (puisque nous venons de prouver que  $g\gamma g^{-1}$  et  $\gamma$  commutent). Si  $\theta^-$  et  $\theta^+$  sont les points fixes de  $\varrho(\gamma)$ , il s'ensuit que  $\varrho(g)\varrho(\gamma)\varrho(g)^{-1}$  laisse l'ensemble  $\{\theta^-, \theta^+\}$  globalement invariant, donc que  $\theta^-$  et  $\theta^+$  sont les points fixes de  $(\varrho(g)\varrho(\gamma)\varrho(g)^{-1})^2$ , ce qui implique (par le Lemme 8.14 (ii)) que  $\theta^-$  et  $\theta^+$  sont les points fixes de  $\varrho(g)\varrho(\gamma)\varrho(g)^{-1}$ . Comme les points fixes de  $\varrho(g)\varrho(\gamma)\varrho(g)^{-1}$  sont aussi  $\varrho(g)(\theta^-)$  et  $\varrho(g)(\theta^+)$ ,  $\varrho(g)$  laisse globalement invariant l'ensemble  $\{\theta^-, \theta^+\}$ ; de ceci et de la Proposition 8.21 (ii) on déduit que le sous-groupe  $\varrho(\langle \gamma, g \rangle)$  de  $G$  est virtuellement cyclique, en contradiction avec le fait (démontré ci-dessus) que  $\varrho(\langle \gamma, g \rangle)$  n'est pas virtuellement abélien, cette contradiction étant due au fait que nous avons supposé qu'il existe un élément  $\gamma \in \Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  qui ne commute pas avec  $g$ . Donc  $g$  commute avec tous les éléments de  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$ .  $\square$

*Fin de la preuve de la Proposition 7.13 :* Si la propriété (ii) est vérifiée et si  $\text{Dias}_\Gamma(Y) < \varepsilon_1(\delta, \alpha, H)$ , alors il existe un  $r$  tel que  $\text{Dias}_\Gamma(Y) < r < \varepsilon_1(\delta, \alpha, H)$ ; or  $Y_r$  n'étant pas connexe d'après (ii), il ne peut couvrir entièrement  $Y$ , ce qui prouve qu'il existe au moins un  $y \in Y$  tel que  $\text{sys}_\Gamma(y) \geq r$ , en contradiction avec le fait que  $\text{Dias}_\Gamma(Y) < r$ . La seule solution pour lever cette contradiction est donc que  $\text{Dias}_\Gamma(Y) \geq \varepsilon_1(\delta, \alpha, H)$ , ce qui prouve que (ii)  $\implies$  (i).

Démontrons maintenant la propriété (ii) : Supposons que la propriété (ii) n'est pas vérifiée, i. e. qu'on peut trouver un  $r$ , vérifiant  $0 < r < \varepsilon_1(\delta, \alpha, H)$  et tel que  $Y_r$  soit connexe, alors, pour tout  $g \in \Gamma^*$  et tout  $y \in Y_r$ , l'invariance par  $\Gamma$  de la fonction  $\text{sys}_\Gamma$  assure que  $gy$  et  $y$  appartiennent à  $Y_r$ . Comme  $Y_r$  est connexe, on peut appliquer le Lemme 7.15, qui prouve que tout élément  $g \in \Gamma^*$  commute avec tout élément de  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$ ; Comme  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  est non vide, la transitivité de la relation de commutation prouve que tout élément  $g \in \Gamma^*$  commute avec tout élément  $g' \in \Gamma^*$ , ce qui est impossible car  $\Gamma$  n'est pas abélien. En conclusion,  $Y_r$  ne peut pas être connexe.  $\square$

### 7.2.3 Minoration de la systole globale sur les espaces métriques mesurés :

**Proposition 7.16.** *Pour tout espace métrique mesuré  $(Y, d, \mu)$  d'entropie majorée par  $H$ , pour tout groupe  $(\delta, \alpha)$ -non abélien  $\Gamma$ , pour toute action propre (par isométries préservant la mesure) de ce groupe sur  $(Y, d, \mu)$ , on a :*

<sup>17</sup>. En effet, la finitude de  $\Sigma_{2r}(y) \setminus \Sigma_r(y)$  implique l'existence d'un  $\varepsilon > 0$  (dépendant de  $y$ ) tel que tout élément  $\gamma \in \Gamma^* \setminus \Sigma_r(y)$  vérifie  $d(y, \gamma y) > r + \varepsilon$ , ce qui assure que  $d(y', \gamma y') > r$  pour tout  $y'$  vérifiant  $d(y, y') < \varepsilon/2$  et tout  $\gamma \in \Gamma^* \setminus \Sigma_r(y)$  donc, par passage aux complémentaires, que  $\Sigma_r(y') \subset \Sigma_r(y)$ .



(i) en tout point  $y \in Y$ , si  $\sigma$  est un élément de  $\Gamma^*$  tel que  $d(y, \sigma y) = \text{sys}_\Gamma(y)$  alors tout  $\gamma \in \Gamma$  qui ne commute pas avec  $\sigma$  vérifie

$$d(y, \gamma y) > \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}]) H} \text{Max} \left[ \ln 2, \ln \left( \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}]) H \text{sys}_\Gamma(y)} \right) \right]$$

(ii) si de plus  $(Y, d)$  est connexe par arcs et si  $\Gamma$  est de centre trivial, la systole globale vérifie :

$$\text{Sys}_\Gamma(Y) := \inf_{y \in Y} \text{sys}_\Gamma(y) \geq \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}]) H} e^{-2(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}]) H \text{diam}(Y/\Gamma)}.$$

**Remarque 7.17.** Dans la partie (ii) de l'énoncé précédent, si on suppose que  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien, on peut remplacer le diamètre  $D := \text{diam}(Y/\Gamma)$  par le "diamètre topologique", i. e. le supremum des  $r \in \mathbb{R}^+$  tels  $\Gamma_{2r}(y)$  soit abélien pour au moins un  $y \in Y$ . Nous verrons, dans la preuve de la Proposition 7.16 (ii), que  $\Gamma_{2D}(y) = \Gamma$ , ce qui assure que  $\Gamma_{2D}(y)$  n'est jamais abélien et que le diamètre topologique est toujours majoré par  $D = \text{diam}(Y/\Gamma)$ . L'appellation "diamètre topologique" se justifie par le fait que, lorsque  $\bar{Y} = Y/\Gamma$  est une variété et lorsque  $\pi : Y \rightarrow \bar{Y}$  est son revêtement universel,  $\Gamma_{2r}(y)$  coïncide avec l'image (par l'injection canonique) du groupe fondamental de la boule  $B_{\bar{Y}}(\pi(y), r)$  de  $\bar{Y}$  dans le groupe fondamental de  $\bar{Y}$  (voir la Proposition 7.23 (iv)), le diamètre topologique étant alors l'infimum des  $r$  tels que l'image dans  $\pi_1(\bar{Y})$  du groupe fondamental de la boule  $B_{\bar{Y}}(\pi(y), r)$  ne soit pas abélien.

*Preuve de la Proposition 7.16 :* Notons  $N_1 = \left[ \frac{13\delta}{\alpha} \right] + 1$ ,  $y$  un point quelconque de  $Y$ , et  $\sigma$  un élément de  $\Gamma^*$  tel que  $d(y, \sigma y) = \text{sys}_\Gamma(y)$ .

*Preuve de (i) :* Comme  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -non abélien, la Remarque 7.9 prouve que, pour tout  $\gamma \in \Gamma$  qui ne commute pas avec  $\sigma$ , quitte à remplacer éventuellement  $\sigma$  par  $\sigma^{-1}$ , le semi-groupe engendré par  $\gamma^{N_1}$  et  $\sigma^{N_1}$  est libre. Une conséquence de ceci, du Lemme 7.12 (ii), de l'inégalité triangulaire et du fait que  $d(y, \gamma y) \geq d(y, \sigma y)$  est que

$$N_1 H d(y, \sigma y) \geq H \text{Min} [d(y, \sigma^{N_1} y), d(y, \gamma^{N_1} y)] > e^{-H \text{Max}[d(y, \sigma^{N_1} y), d(y, \gamma^{N_1} y)]} \geq e^{-H N_1 d(y, \gamma y)};$$

comme l'application du Lemme 7.12 (i) a pour corollaire l'inégalité :

$$N_1 H d(y, \gamma y) \geq H \text{Max} [d(y, \sigma^{N_1} y), d(y, \gamma^{N_1} y)] \geq \ln 2,$$

nous achevons la preuve de (i) en réunissant ces deux dernières inégalités.

*Preuve de (ii) :* Notons  $D$  le diamètre de  $\Gamma \backslash Y$ . Nous avons vu (dans la preuve de la Proposition 5.7) que la Proposition 3.22 de [Gro07] s'applique aux espaces métriques connexes par arcs et que ce résultat de M. Gromov démontre que  $\Sigma_{2D}(y)$  est un système (fini) de générateurs de  $\Gamma$ . Comme  $\Gamma$  est de centre trivial, il existe au moins un  $\gamma \in \Sigma_{2D}(y)$  qui ne commute pas avec  $\sigma$ . En appliquant la propriété (i), nous en déduisons que

$$2D \geq d(y, \gamma y) > \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}]) H} \ln \left( \frac{1}{(1 + [\frac{13\delta}{\alpha}]) H \text{sys}_\Gamma(y)} \right),$$

ce qui prouve (ii) en minorant  $\text{sys}_\Gamma(y)$  pour tout  $y \in Y$ .  $\square$

*Preuve de la Remarque 7.17 :* Notons toujours  $N_1 = \left[ \frac{13\delta}{\alpha} \right] + 1$  et  $D'$  le diamètre topologique de  $Y/\Gamma$ . Par définition du diamètre topologique, pour tout  $\varepsilon > 0$ , le sous-groupe  $\Gamma_{2D'+\varepsilon}(y)$  n'est pas abélien (donc en particulier pas trivial), ce qui assure que  $\text{sys}_\Gamma(y) \leq 2D' + \varepsilon$ . Pour tout  $y \in Y$ , notons  $\sigma$  un élément de  $\Gamma^*$  tel que  $d(y, \sigma y) = \text{sys}_\Gamma(y)$ , ce qui implique que  $d(y, \sigma y) \leq 2D' + \varepsilon$ , donc que  $\sigma \in \Sigma_{2D'+\varepsilon}(y)$ ; par ailleurs il existe au moins un  $\gamma \in \Sigma_{2D'+\varepsilon}(y)$  qui ne commute pas avec  $\sigma$  (sinon, par transitivité de la relation de commutation,  $\Gamma_{2D'+\varepsilon}(y)$  serait abélien). En appliquant la propriété (i), nous en déduisons que

$$2D' + \varepsilon \geq d(y, \gamma y) > \frac{1}{N_1 H} \ln \left( \frac{1}{N_1 H \text{sys}_\Gamma(y)} \right).$$

On achève la preuve en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro dans cette dernière inégalité, ce qui démontre que

$$\forall y \in Y \quad \text{sys}_\Gamma(y) \geq \frac{1}{N_1 H} e^{-2N_1 H D'} . \quad \square$$

### 7.3 Structure des parties minces dans les quotients d'espaces métriques mesurés

#### 7.3.1 Lemme topologique général

Soit  $(Y, d, \mu)$  un espace métrique mesuré, et soit  $\Gamma$  un groupe sans torsion qui agit proprement et par isométries sur  $(Y, d)$ . Notons  $\pi : Y \rightarrow \bar{Y} = \Gamma \backslash Y$  l'application de passage au quotient. Pour tout ouvert connexe  $\bar{V}$  de  $\bar{Y}$ , notons  $\{V^i : i \in I\}$  l'ensemble des composantes connexes de  $V := \pi^{-1}(\bar{V})$ , et appelons  $\check{\Gamma}_V^i := \{\gamma \in \Gamma : \gamma(V^i) = V^i\}$  le sous-groupe qui préserve  $V^i$ , ce qui permet de définir les espaces-quotients  $\check{Y}^i := \check{\Gamma}_V^i \backslash Y$  et  $\check{V}^i := \check{\Gamma}_V^i \backslash V^i$ .

L'application-quotient  $Y \rightarrow \check{\Gamma}_V^i \backslash Y$  étant nommée  $\check{\pi}_i$ , l'application  $\pi$  passe au quotient en une application  $\bar{\pi}_i : \check{\Gamma}_V^i \backslash Y \rightarrow \Gamma \backslash Y$ . Notons  $p_i$  (resp.  $\check{p}_i$ ) la restriction de  $\pi$  (resp. de  $\check{\pi}_i$ ) à la même composante connexe  $V^i$ ; comme l'injection d'inclusion  $V^i \hookrightarrow Y$  est équivariante par rapport à l'action simultanée de  $\check{\Gamma}_V^i$  sur  $V^i$  et sur  $Y$ , elle passe au quotient en une injection d'inclusion  $\check{\Gamma}_V^i \backslash V^i \hookrightarrow \check{\Gamma}_V^i \backslash Y$ ; via cette inclusion, nous définirons alors  $\bar{p}_i$  comme la restriction de  $\bar{\pi}_i$  à  $\check{\Gamma}_V^i \backslash V^i$ ; définie a priori comme application  $\check{\Gamma}_V^i \backslash V^i \rightarrow \Gamma \backslash Y$ ,  $\bar{p}_i$  est une application  $\check{\Gamma}_V^i \backslash V^i \rightarrow \bar{V}$  qui vérifie  $\bar{p}_i \circ \check{p}_i = p_i$ : en effet, pour tout  $y \in V^i$ , on a  $\bar{p}_i \circ \check{p}_i(y) = \bar{\pi}_i \circ \check{\pi}_i(y) = \pi(y) = p_i(y)$ . L'ensemble de ces résultats est résumé dans le diagramme qui suit :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \xrightarrow{\pi} & & \\
 \Gamma \curvearrowright Y & \xrightarrow{\check{\pi}_i} & \check{Y}^i = \check{\Gamma}_V^i \backslash Y & \xrightarrow{\bar{\pi}_i} & \bar{Y} = \Gamma \backslash Y \\
 & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
 \check{\Gamma}_V^i \curvearrowright V^i & \xrightarrow{\check{p}_i} & \check{V}^i = \check{\Gamma}_V^i \backslash V^i & \xrightarrow{\bar{p}_i} & \bar{V} \\
 & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \xrightarrow{p_i} & & 
 \end{array} \quad (57)$$

Nous noterons enfin  $\bar{d}$  la distance induite sur  $\bar{Y}$  par le passage au quotient et définie dans le Lemme 8.12 (i).

Le Lemme suivant est semi-classique et sera utilisé plusieurs fois dans cette section :

**Lemme 7.18.** (Lemme topologique général) *On a les propriétés suivantes :*

- (i)  $\pi$  et  $\check{\pi}_i$  sont des revêtements localement isométriques, donc des applications ouvertes ;
- (ii)  $p_i$  et  $\check{p}_i : V^i \rightarrow \check{V}^i$  sont des revêtements localement isométriques ;
- (iii) pour toute paire  $V^i, V^j$  de composantes connexes de  $\pi^{-1}(\bar{V})$ , il existe une isométrie  $\gamma_{i,j} \in \Gamma$  telle que  $\gamma_{i,j}(V^i) = V^j$  et  $\check{\Gamma}_V^j = \gamma_{i,j} \check{\Gamma}_V^i \gamma_{i,j}^{-1}$  ;
- (iv)  $\bar{p}_i$  est un homéomorphisme localement isométrique, il préserve donc les longueurs des chemins ;
- (v) si de plus  $Y$  est localement connexe par arcs et simplement connexe alors, pour toute composante connexe  $V^i$  de  $\pi^{-1}(\bar{V})$ , le sous-groupe  $\check{\Gamma}_V^i$  s'interprète de la manière suivante : pour tout  $y \in V^i$ , l'isomorphisme canonique<sup>18</sup> entre  $\Gamma$  et  $\pi_1(\bar{Y}, \pi(y))$  envoie  $\check{\Gamma}_V^i$  sur  $i_* \pi_1(\bar{V}, \pi(y))$ , où  $i_* : \pi_1(\bar{V}, \pi(y)) \rightarrow \pi_1(\bar{Y}, \pi(y))$  est le morphisme induit par l'injection canonique  $i : \bar{V} \hookrightarrow \bar{Y}$ .

*Preuve :* Le Lemme 8.12 (iii) assure que l'action est fidèle, discrète et sans point fixe, nous pouvons donc identifier  $\Gamma$  à un sous groupe discret du groupe des isométries de  $(Y, d)$  tel que,

18. L'isomorphisme canonique entre  $\Gamma$  et  $\pi_1(\bar{Y}, \pi(y))$  est celui qui envoie tout élément  $\gamma \in \Gamma$  sur la classe d'homotopie de  $\pi \circ c$ , où  $c$  est un chemin continu quelconque qui joint  $y$  à  $\gamma y$ .

pour tout  $\gamma \in \Gamma$  et tout  $y \in Y$ , on ait  $d(y, \gamma y) > 0$ ; la propriété de l'action assure alors que  $\{\gamma : d(y, \gamma y) \leq \varepsilon\}$  est fini, donc que, pour tout  $y \in Y$ , il existe un  $\sigma \in \Gamma$  tel que  $\text{sys}_\Gamma(y) = d(y, \sigma y) > 0$ .

- *Preuve de (i)* : Comme  $\bar{d}(\pi(y), \pi(z)) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma y, z)$ , pour tout  $\varepsilon \leq \frac{1}{2} \text{sys}_\Gamma(y)$ ,  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\pi(y), \varepsilon))$  est la réunion disjointe des boules  $B_Y(\gamma y, \varepsilon)$  pour tous les  $\gamma \in \Gamma$ , donc  $\pi$  est un revêtement tel que  $\pi : (B_Y(\gamma y, \varepsilon/2), d) \rightarrow (B_{\bar{Y}}(\pi(y), \varepsilon/2), \bar{d})$  soit une isométrie pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . De plus, pour tout ouvert  $U$  de  $Y$ , l'ensemble  $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(U)$  est un ouvert de  $Y$ , donc (par définition de la topologie quotient)  $\pi(U)$  est un ouvert de  $\bar{Y}$  et l'application  $\pi$  est ouverte. On démontre de la même manière que  $\check{\pi}_i$  est un revêtement localement isométrique et une application ouverte (on remarquera que, puisque l'action de  $\check{\Gamma}_V^i$  est la restriction de l'action de  $\Gamma$ , on a  $\text{sys}_{\check{\Gamma}_V^i}(y) \geq \text{sys}_\Gamma(y) > 0$ ).
- *Preuve de (ii)* : Comme  $V^i$  est ouvert, pour tout  $y \in V^i$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  tel que  $B_Y(y, \varepsilon) \subset V^i$ ; de ceci et de la définition de  $\check{\Gamma}_V^i$  il suit que, pour tout  $\gamma \in \check{\Gamma}_V^i$ , on a  $B_Y(\gamma y, \varepsilon) = \gamma(B_Y(y, \varepsilon)) \subset \gamma(V^i) = V^i$ . Quitte à réduire la valeur de  $\varepsilon$ , on déduit de (i) que, pour tout  $\gamma \in \check{\Gamma}_V^i$ ,  $\check{\pi}_i$  est une isométrie de la boule  $B_Y(\gamma y, \varepsilon) \subset V^i$  sur la boule  $B_{\check{Y}_i}(\check{\pi}_i(y), \varepsilon) \subset \check{\pi}_i(V^i) = \check{p}_i(V^i)$  de  $\check{Y}_i$ ; comme  $\check{\pi}_i^{-1}(B_{\check{Y}_i}(\check{\pi}_i(y), \varepsilon)) = \cup_{\gamma \in \check{\Gamma}_V^i} B_Y(\gamma y, \varepsilon) = \check{p}_i^{-1}(B_{\check{Y}_i}(\check{p}_i(y), \varepsilon))$ , cela prouve que  $\check{p}_i$  est encore un revêtement localement isométrique. Pour montrer que  $p_i$  est un revêtement, commençons par prouver que  $\pi(V^i) = \bar{V}$ . Comme, par construction,  $\pi^{-1}(\bar{V})$  est (globalement)  $\Gamma$ -invariant, tout élément  $\gamma \in \Gamma$  échange les composantes connexes de  $\pi^{-1}(\bar{V})$  et, puisque deux composantes connexes qui s'intersectent sont confondues, pour toutes les paires de composantes connexes  $V^i$  et  $V^j$  de  $\pi^{-1}(\bar{V})$  et pour tout  $\gamma, g \in \Gamma$ , on a

$$\gamma(V^i) \cap g(V^j) \neq \emptyset \implies \gamma(V^i) = g(V^j), \quad (58)$$

ce qui implique que

$$\pi(V^i) \cap \pi(V^j) \neq \emptyset \implies \pi(V^i) = \pi(V^j) : \quad (59)$$

en effet, s'il existe un  $y \in Y$  tel que  $\pi(y) \in \pi(V^i) \cap \pi(V^j)$ , alors il existe  $\gamma, g \in \Gamma$  tels que  $y \in \gamma(V^i)$  et  $y \in g(V^j)$  ce qui, d'après (58), implique que  $\gamma(V^i) = g(V^j)$ , donc que  $\pi(V^i) = \pi(V^j)$ . Comme  $\bar{V} = \cup_{i \in I} \pi(V^i)$ , où les  $\pi(V^i)$  sont des ouverts deux à deux disjoints ou confondus (d'après (59)), la connexité de  $\bar{V}$  implique que les  $\pi(V^i)$  sont tous identiques et égaux à  $\bar{V}$ , ce qui achève de prouver que  $\pi(V^i) = \bar{V}$  pour tout  $i \in I$ .

En raisonnant comme ci-dessus, pour tout  $y \in V^i$ , il existe un  $\varepsilon > 0$  suffisamment petit pour qu'on ait simultanément  $\varepsilon \leq \frac{1}{4} \text{sys}_\Gamma(y)$  et  $B_Y(y, \varepsilon) \subset V^i$ , ce qui implique, pour tout  $\gamma \in \Gamma$ , que  $B_Y(\gamma y, \varepsilon) = \gamma(B_Y(y, \varepsilon)) \subset \gamma(V^i)$ ; nous en déduisons que

- soit  $\gamma \in \check{\Gamma}_V^i$ , et alors  $B_Y(\gamma y, \varepsilon) \subset V^i = \gamma(V^i)$ ,
- soit  $\gamma \notin \check{\Gamma}_V^i$ , et alors  $V^i \neq \gamma(V^i)$ , donc  $\gamma(V^i) \cap V^i = \emptyset$  d'après (58), et  $B_Y(\gamma y, \varepsilon) \cap V^i = \emptyset$ ; nous obtenons ainsi que

$$p_i^{-1}(B_{\bar{Y}}(\pi(y), \varepsilon)) = V^i \cap \pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\pi(y), \varepsilon)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (B_Y(\gamma y, \varepsilon) \cap V^i) = \bigcup_{\gamma \in \check{\Gamma}_V^i} B_Y(\gamma y, \varepsilon),$$

ce qui prouve simultanément que  $p_i$  est un revêtement et une isométrie locale puisque  $\pi$  est une isométrie de la boule  $B_Y(\gamma y, \varepsilon) \subset V^i$  sur la boule  $B_{\bar{Y}}(\pi(y), \varepsilon) \subset \bar{V}$  de  $\bar{Y}$ .

- *Preuve de (iii)* : Comme  $\pi(V^i) = \bar{V} = \pi(V^j)$  (d'après (ii)), pour tout  $y \in V^i$ , l'ensemble  $\pi^{-1}(\{\pi(y)\})$  rencontre  $V^j$ , il existe donc un  $\gamma_{i,j} \in \Gamma$  telle que  $\gamma_{i,j}(y) \in V^j$ , ce qui implique que  $\gamma_{i,j}(V^i) \cap V^j \neq \emptyset$ , donc que  $\gamma_{i,j}(V^i) = V^j$  en vertu de (58). Une autre conséquence est que  $V^j$  est globalement invariant par les éléments de  $\gamma_{i,j} \check{\Gamma}_V^i \gamma_{i,j}^{-1}$ ; de même  $V^i$  est globalement invariant par les éléments de  $\gamma_{i,j}^{-1} \check{\Gamma}_V^j \gamma_{i,j}$ , ce qui implique que  $\check{\Gamma}_V^j = \gamma_{i,j} \check{\Gamma}_V^i \gamma_{i,j}^{-1}$ .

— *Preuve de (iv)* : L'ouvert  $V^i$  étant globalement invariant par  $\check{\Gamma}_V^i$ , on a  $\check{\pi}_i^{-1}(\check{\pi}_i(V^i)) = V^i$ , ce qui implique que  $\check{V}^i = \check{\pi}_i(V^i)$  est un ouvert de  $\check{Y}^i$ . L'application  $\check{p}_i$  est correctement définie et bijective de  $\check{V}^i$  sur  $\check{V}$  car, pour tous les  $y, y' \in V^i$ , on a

$$\pi(y) = \pi(y') \iff \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } y' = \gamma y \iff \exists \gamma \in \check{\Gamma}_V^i \text{ tel que } y' = \gamma y \iff \check{\pi}_i(y) = \check{\pi}_i(y'),$$

où la deuxième équivalence découle du fait que, si  $y$  et  $\gamma y$  appartiennent tous deux à  $V^i$ , alors  $V^i \cap \gamma(V^i) \neq \emptyset$  et  $\gamma \in \check{\Gamma}_V^i$ , d'après (58). Comme  $\check{\pi}_i$  et  $p_i$  sont de plus des isométries locales,  $\check{p}_i$ , est aussi une isométrie locale et, par conséquent, un homéomorphisme.

— *Preuve de (v)* : Les composantes connexes  $V^i$  de  $\pi^{-1}(\check{V})$  étant à la fois connexes et localement connexes par arcs, elles sont connexes par arcs.

Considérons une quelconque de ces composantes connexes, notée  $V^i$ , et un point quelconque  $y \in V^i$ , nous noterons  $\bar{y}$  le point  $\pi(y)$ . À tout  $\gamma \in \check{\Gamma}_V^i$  et à tout chemin  $c$  qui joint les points  $y$  et  $\gamma y$  dans  $V^i$ , on associe la classe (dans  $\pi_1(\check{Y}, \bar{y})$ ) du lacet  $\pi \circ c$  de point-base  $\bar{y}$ , qui est contenu dans  $\check{V}$ ; cette classe est indépendante du choix de  $c$  car tout autre chemin joignant  $y$  et  $\gamma y$  est homotope à  $c$  dans  $Y$ . Ceci définit correctement une application  $\psi_y : \check{\Gamma}_V^i \rightarrow \pi_1(\check{Y}, \bar{y})$  dont l'image réside dans  $i_*(\pi_1(\check{V}, \bar{y}))$ . Réciproquement, tout élément de  $i_*(\pi_1(\check{V}, \bar{y}))$  admet un représentant sous la forme d'un lacet  $\bar{c}$ , de point-base  $\bar{y}$ , inclus dans  $\check{V}$ ; ce lacet se relève en un chemin  $c$  d'origine  $y$  inclus dans  $\pi^{-1}(\check{V})$ , l'extrémité de ce chemin est donc de la forme  $\gamma y$ , où  $\gamma \in \Gamma$ ; cette extrémité est indépendante du représentant  $\bar{c}$  choisi car deux lacets homotopes (dans  $\check{Y}$ ) se relèvent en deux chemins ayant même extrémité dans le revêtement universel  $Y$ ; de plus  $y$  et  $\gamma y$  appartiennent à la même composante connexe  $V^i$  de  $\pi^{-1}(\check{V})$ , donc  $\gamma \in \check{\Gamma}_V^i$  : en envoyant la classe de  $\bar{c}$  sur ce  $\gamma$ , nous obtenons donc une application correctement définie  $\phi_y : i_*(\pi_1(\check{V}, \bar{y})) \rightarrow \check{\Gamma}_V^i$ . On vérifie aisément que  $\phi_y \circ \psi_y = id_{\check{\Gamma}_V^i}$  et que  $\psi_y \circ \phi_y = id_{i_*(\pi_1(\check{V}, \bar{y}))}$ , ce qui achève la preuve.  $\square$

### 7.3.2 Sur la topologie des parties minces

Sur tout espace métrique  $(Y, d)$ , pour toute action propre, par isométries, d'un groupe sans torsion  $\Gamma$  sur  $(Y, d)$ , et pour toute donnée d'un réel  $r > 0$ , nous appelons partie  $r$ -mince de  $Y$  (resp. de  $\check{Y} = \Gamma \backslash Y$ ) l'ensemble ouvert  $Y_r$  des  $y \in Y$  tels que  $\text{sys}_\Gamma(y) < r$  (resp. son image  $\check{Y}_r$  par l'application-quotient  $\pi : Y \rightarrow \check{Y} = \Gamma \backslash Y$ ); remarquer que, lorsque  $\Gamma$  est sans torsion, cette définition est cohérente avec la Définition 5.15.

Pour la définition des notions de géodésique et de géodésique locale, nous renvoyons à la section 2.

Rappelant les Définitions 2.4, nous noterons  $\Sigma_r(x)$  (resp.  $\check{\Sigma}_r(x)$ ) l'ensemble (fini) des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $d(x, \gamma x) \leq r$  (resp.  $d(x, \gamma x) < r$ ), et  $\Gamma_r(y)$  (resp.  $\check{\Gamma}_r(x)$ ) le sous-groupe de  $\Gamma$  engendré par  $\Sigma_r(x)$  (resp. par  $\check{\Sigma}_r(x)$ ).

**Remarque 7.19.** (Lemme banal) La fonction  $y \mapsto \text{sys}_\Gamma(y)$  est  $\Gamma$ -invariante, il existe donc une fonction  $\overline{\text{sys}}_\Gamma : \check{Y} = \Gamma \backslash Y \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que  $\text{sys}_\Gamma = \overline{\text{sys}}_\Gamma \circ \pi$ . Par conséquent, pour tout  $r > 0$ , l'ensemble  $Y_r$  est stable par l'action de  $\Gamma$ , ce qui signifie d'une part que  $Y_r = \pi^{-1}(\check{Y}_r)$  et que  $\check{Y}_r = \Gamma \backslash Y_r$ , et d'autre part que  $\check{Y}_r$  coïncide avec le sous-ensemble des  $\bar{y} \in \check{Y}$  tels que  $\overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y}) < r$ .

Nous fixerons ici un  $r > 0$  arbitraire inférieur ou égal à un  $\varepsilon_2$  qui sera précisé dans la Proposition 7.21; nous noterons  $\{Y_r^i : i \in I\}$  (resp.  $\{\check{Y}_r^j : j \in J\}$ ) l'ensemble des composantes connexes de  $Y_r = \pi^{-1}(\check{Y}_r)$  (resp. de  $\check{Y}_r$ ). Chaque composante connexe  $Y_r^i$  de  $Y_r$  est donc envoyée par  $\pi$  dans une seule composante connexe de  $\check{Y}_r$ , que nous noterons  $\check{Y}_r^{k(i)}$ , ce qui définit une application  $i \mapsto k(i)$  et démontre de plus que, pour tout  $(i, j) \in I \times J$ ,

$$Y_r^i \cap \pi^{-1}(\check{Y}_r^j) \neq \emptyset \iff \pi(Y_r^i) \cap \check{Y}_r^j \neq \emptyset \iff \pi(Y_r^i) \subset \check{Y}_r^j \iff k(i) = j \iff i \in k^{-1}(\{j\}).$$

Ceci prouve que  $Y_r^i$  est soit inclus dans  $\pi^{-1}(\check{Y}_r^j)$ , soit disjoint de  $\pi^{-1}(\check{Y}_r^j)$ , ce qui implique que

$$\pi^{-1}(\check{Y}_r^j) = Y_r \cap \pi^{-1}(\check{Y}_r^j) = \bigcup_{i \in I} Y_r^i \cap \pi^{-1}(\check{Y}_r^j) = \bigcup_{i \in k^{-1}(\{j\})} Y_r^i \cap \pi^{-1}(\check{Y}_r^j) = \bigcup_{i \in k^{-1}(\{j\})} Y_r^i.$$

De ceci on déduit que  $\{Y_r^i : i \in k^{-1}(\{j\})\}$  est l'ensemble des composantes connexes de  $\pi^{-1}(\bar{Y}_r^j)$ .

Ceci prouve que nous pouvons appliquer les résultats de la section 7.3.1 précédente, en posant  $\bar{V} = \bar{Y}_r^j$  et  $V = \bigcup_{i \in k^{-1}(\{j\})} Y_r^i$ , en appelant  $\check{\Gamma}_r^i$  le sous-groupe des éléments de  $\Gamma$  qui préservent la composante connexe  $Y_r^i$ , ce qui permet de définir les espaces-quotient  $\check{Y}^i := \check{\Gamma}_r^i \backslash Y$  et  $\check{Y}_r^i := \check{\Gamma}_r^i \backslash Y_r^i$  et les applications-quotient  $\check{\pi}_i : Y \rightarrow \check{Y}^i$  et  $\check{p}_i : Y_r^i \rightarrow \check{Y}_r^i$ , la seconde application étant la restriction de la première. Comme  $\pi(Y_r^i) \subset \bar{Y}_r^{k(i)}$ , on peut définir  $p_i : Y_r^i \rightarrow \bar{Y}_r^{k(i)}$  comme la restriction de  $\pi$  à  $Y_r^i$ . L'application  $\pi$  passe au quotient en une application  $\bar{\pi}_i : \check{\Gamma}_r^i \backslash Y \rightarrow \Gamma \backslash Y$ , et le même raisonnement qu'à la section 7.3.1 prouve que l'application  $\check{\Gamma}_r^i \backslash Y_r^i \rightarrow \check{\Gamma}_r^i \backslash Y$  induite par l'inclusion  $Y_r^i \hookrightarrow Y$  peut également être considérée comme une inclusion  $\check{\Gamma}_r^i \backslash Y_r^i \hookrightarrow \check{\Gamma}_r^i \backslash Y$ , ce qui permet de définir  $\bar{p}_i$  comme la restriction de  $\bar{\pi}_i$  à  $\check{\Gamma}_r^i \backslash Y_r^i$  et de démontrer (comme en section 7.3.1) que  $\bar{p}_i \circ \check{p}_i = p_i$ . Toutes ces définitions et propriétés sont résumées dans le diagramme suivant et complétées dans le Lemme qui suit :

$$\begin{array}{ccccc}
& & \pi & & \\
& & \curvearrowright & & \\
\Gamma \curvearrowright Y & \xrightarrow{\check{\pi}_i} & \check{Y}^i = \check{\Gamma}_r^i \backslash Y & \xrightarrow{\bar{\pi}_i} & \bar{Y} = \Gamma \backslash Y \\
& \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\
\check{\Gamma}_r^i \curvearrowright \check{Y}_r^i & \xrightarrow{\check{p}_i} & \check{Y}_r^i = \check{\Gamma}_r^i \backslash Y_r^i & \xrightarrow{\bar{p}_i} & \bar{Y}_r^{k(i)} \\
& \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
& & p_i & & 
\end{array} \quad (60)$$

**Lemme 7.20.** (Lemme de revêtement) *Soit  $(Y, d)$  un espace métrique et soit  $\Gamma$  un groupe sans torsion agissant (proprement, par isométries) sur  $(Y, d)$ . Avec les notations qui précèdent, on a :*

- (o) *pour toute composante connexe  $\bar{Y}_r^j$  de  $\bar{Y}_r$ ,  $\{Y_r^i : i \in k^{-1}(\{j\})\}$  est l'ensemble des composantes connexes de  $\pi^{-1}(\bar{Y}_r^j)$  ;*
- (i) *pour toute paire  $Y_r^i, Y_r^{i'}$  de composantes connexes de  $Y_r$ ,  $k(i)$  et  $k(i')$  sont égaux si et seulement si il existe un  $\gamma \in \Gamma$  tel que  $\gamma(Y_r^i) = Y_r^{i'}$ , et on a alors  $\check{\Gamma}_r^{i'} = \gamma \check{\Gamma}_r^i \gamma^{-1}$  ;*
- (ii) *pour tout  $i \in I$ , les applications  $\pi$ ,  $\check{\pi}_i$ ,  $p_i$  et  $\check{p}_i$  sont des revêtements localement isométriques (donc des applications ouvertes) ;*
- (iii) *l'application  $\bar{p}_i$  est un homéomorphisme de  $\check{Y}_r^i$  sur  $\bar{Y}_r^{k(i)}$  qui est une isométrie locale et préserve donc les longueurs des chemins.*

*Preuve :* Le point (o) a été démontré dans le préambule de la section 7.3.2. La propriété (o) et le fait que  $\Gamma$  soit sans torsion démontrent que les hypothèses du Lemme 7.18 sont vérifiées si on remplace l'ouvert  $\bar{V}$  du Lemme 7.18 par une composante connexe  $\bar{Y}_r^j$  quelconque de  $\bar{Y}_r$  et l'ensemble des composantes connexes de  $\pi^{-1}(\bar{V})$  par l'ensemble  $\{Y_r^i : i \in k^{-1}(\{j\})\}$  des composantes connexes de  $\pi^{-1}(\bar{Y}_r^j)$  ; le Lemme 7.18 (iii) implique donc que

$$i, i' \in k^{-1}(\{j\}) \implies \exists \gamma \in \Gamma \text{ tel que } \gamma(Y_r^i) = Y_r^{i'} \text{ et } \check{\Gamma}_r^{i'} = \gamma \check{\Gamma}_r^i \gamma^{-1},$$

la réciproque étant évidente, ceci prouve la partie (i). La partie (ii) découle immédiatement du Lemme 7.18 (i) et (ii).

Le Lemme 7.18 (ii) assure que, pour tout  $j \in J$  et tout  $i \in k^{-1}(\{j\})$ , les restrictions  $p_i$  et  $\check{p}_i$  à  $Y_r^i$  sont des revêtements localement isométriques de  $Y_r^i$  sur  $\bar{Y}_r^j$  et  $\check{Y}_r^i$  respectivement ; le Lemme 7.18 (iv) implique que l'application  $\bar{p}_i$  est un homéomorphisme de  $\check{Y}_r^i$  sur  $\bar{Y}_r^j$  qui est une isométrie locale et préserve les longueurs des chemins, ce qui achève la preuve de la partie (iii).  $\square$

**Proposition 7.21.** (Simplicité topologique des parties minces) *Soit  $(Y, d, \mu)$  un espace métrique mesuré d'entropie majorée par  $H$ , soit  $\Gamma$  un groupe  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien, considérons une action (propre, par isométries préservant la mesure) de ce groupe sur  $(Y, d, \mu)$ . Avec les notations qui précèdent, pour tout  $r < \frac{\alpha \ln 2}{(13\delta + \alpha)H}$ , on a :*

- (i) *Pour tout  $i \in I$ ,  $\check{\Gamma}_r^i$  est un sous-groupe abélien et, si l'espace métrique  $(Y, d)$  est un espace de longueur,  $\check{\Gamma}_r^i$  contient la réunion de tous les  $\check{\Gamma}_r^i(y)$  pour tous les  $y \in Y_r^i$  ;*
- (ii) *si  $(Y, d)$  est localement connexe par arcs et simplement connexe alors, pour toute composante connexe  $Y_r^i$  de  $Y_r$  et pour tout  $y \in Y_r^i$ , si  $\tilde{\pi}_1(\overline{Y}_r^{k(i)}, \pi(y))$  désigne l'image (dans  $\pi_1(\overline{Y}, \pi(y))$ ) du groupe fondamental de  $\overline{Y}_r^{k(i)}$  (de point-base  $\pi(y)$ ) par le morphisme induit par l'inclusion  $\overline{Y}_r^{k(i)} \hookrightarrow \overline{Y}$ , le sous-groupe  $\check{\Gamma}_r^i$  s'identifie avec  $\tilde{\pi}_1(\overline{Y}_r^{k(i)}, \pi(y))$  via l'isomorphisme canonique  $\Gamma \rightarrow \pi_1(\overline{Y}, \pi(y))$ . Par conséquent  $\tilde{\pi}_1(\overline{Y}_r^{k(i)}, \pi(y))$  est un sous-groupe abélien du groupe fondamental de  $\overline{Y}$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  lorsque  $\Gamma$  est un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT.*
- (iii) *si  $(Y, d)$  est géodésique, considérons n'importe quelle composante connexe  $\overline{Y}_r^j$  de  $\overline{Y}_r$  qui est soit d'adhérence compacte, soit telle que la limite inférieure de  $\overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y})$  (quand  $\bar{y}$  tend vers l'infini dans  $\overline{Y}_r^j$ ) soit au moins égale à  $r$  ; une telle composante connexe contient au moins une géodésique locale de  $\overline{Y}$  (non homotope à zéro) qui est périodique et dont la longueur réalise le minimum (sur  $\overline{Y}_r^j$ ) de la fonction  $\bar{y} \mapsto \overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y})$ .*

*Preuve :* La propriété (o) du Lemme précédent et le fait que  $\Gamma$  soit sans torsion (d'après les Remarques 7.5 (a) et (c)) démontrent que le Lemme 7.18 s'applique en y remplaçant l'ouvert  $\overline{V}$  du Lemme 7.18 par une composante connexe  $\overline{Y}_r^j$  quelconque de  $\overline{Y}_r$  et l'ensemble des composantes connexes de  $\pi^{-1}(\overline{V})$  par l'ensemble  $\{Y_r^i : i \in k^{-1}(\{j\})\}$  des composantes connexes de  $\pi^{-1}(\overline{Y}_r^j)$  ; la partie (ii) est alors un corollaire direct du Lemme 7.18 (v).

Démontrons maintenant la partie (i) : pour tout  $y \in Y_r^i$  et tout élément  $g \in \check{\Gamma}_r^i \setminus \{e\}$ ,  $y$  et  $gy$  appartiennent à la même composante connexe  $Y_r^i$  de  $Y_r$  ; le Lemme 7.15 démontre alors que tout élément  $g \in \check{\Gamma}_r^i$  commute avec tous les éléments de  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  ; comme  $\Gamma_r(y) \setminus \{e\}$  est non trivial et, comme la relation de commutation est transitive, ceci prouve que  $\check{\Gamma}_r^i$  est abélien. Montrons maintenant que  $\check{\Gamma}_r^i$  contient  $\check{\Gamma}_r^i(y)$  : comme tout  $\gamma \in \check{\Sigma}_r(y) \setminus \{e\}$  vérifie (par définition)  $d(y, \gamma y) < r$ , il existe un chemin  $c$  joignant les points  $y$  et  $\gamma y$  tel que tout point  $u$  de ce chemin vérifie  $d(y, u) + d(u, \gamma y) < d(y, \gamma y) + \eta < r$  pour tout  $0 < \eta < r - d(y, \gamma y)$  (propriété des espaces de longueur) ; une conséquence de ceci est que tout point  $u$  de ce chemin vérifie

$$d(u, \gamma u) \leq d(u, \gamma y) + d(\gamma y, \gamma u) = d(y, u) + d(u, \gamma y) < r ;$$

il s'ensuit que  $c$  est entièrement contenu dans  $Y_r$  et, par connexité,  $\gamma y$  appartient à  $Y_r^i$ , ce qui prouve que tout  $\gamma \in \check{\Sigma}_r(y) \setminus \{e\}$  appartient à  $\check{\Gamma}_r^i$ , donc que  $\check{\Gamma}_r^i(y) \subset \check{\Gamma}_r^i$ .

Démontrons maintenant la partie (iii) : Rappelons que, d'après la définition de  $\overline{Y}_r$ , la fonction  $\overline{\text{sys}}_\Gamma$  (définie à la Remarque 7.19) est strictement inférieure à  $r$  sur chaque composante connexe  $\overline{Y}_r^j$  et au moins égale à  $r$  sur le bord de  $\overline{Y}_r^j$  ou à l'infini ; cette fonction atteint donc son minimum (sur  $\overline{Y}_r^j$ ) en un point  $\bar{y}_j \in \overline{Y}_r^j$ . Fixons un  $i \in k^{-1}(\{j\})$  ; d'après le Lemme 7.20 (ii), il existe un  $y_i \in \pi^{-1}(\{\bar{y}_j\}) \cap Y_r^i$ , et la Remarque 7.19 permet d'en déduire que

$$\text{sys}_\Gamma(y_i) = \overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y}_j) = \inf_{\bar{y} \in \overline{Y}_r^j} \overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y}) = \inf_{y \in Y_r^i} \overline{\text{sys}}_\Gamma \circ \pi(y) = \inf_{y \in Y_r^i} \text{sys}_\Gamma(y) ,$$

où la troisième égalité découle encore une fois du Lemme 7.20 (ii). La propriété de l'action assure qu'il existe un élément  $\sigma \in \check{\Gamma}_r(y_i) \subset \check{\Gamma}_r^i$  tel que  $d(y_i, \sigma y_i) = \text{sys}_\Gamma(y_i) = \text{Min}_{y \in Y_r^i} (\text{sys}_\Gamma(y))$ . Notons  $[y_i, \sigma y_i]$  une géodésique (minimisante) joignant  $y_i$  et  $\sigma y_i$  ; pour tout point  $u \in [y_i, \sigma y_i]$ , on a :

$$\text{sys}_\Gamma(u) \leq d(u, \sigma u) \leq d(u, \sigma y_i) + d(\sigma y_i, \sigma u) = d(u, y_i) + d(u, \sigma y_i) = d(y_i, \sigma y_i) = \text{sys}_\Gamma(y_i) ,$$

ce qui implique d'une part que  $u \in Y_r^i$  et d'autre part que  $\text{sys}_\Gamma(u) = \text{sys}_\Gamma(y_i)$ , donc que les inégalités ci-dessus sont toutes des égalités ; une conséquence est que la réunion des deux portions de géodésiques  $[u, \sigma y_i]$  et  $[\sigma y_i, \sigma u]$  est une géodésique minimisante joignant  $u$  à  $\sigma u$ . Si on note  $[\sigma^k y_i, \sigma^{k+1} y_i]$  l'image par  $\sigma^p$  de  $[y_i, \sigma y_i]$ , il s'ensuit que la réunion de  $[y_i, \sigma y_i]$  et de  $[\sigma y_i, \sigma^2 y_i]$  est une géodésique locale qui joint  $y_i$  à  $\sigma^2 y_i$ , qui est minimisante sur toute portion de longueur  $T := \text{sys}_\Gamma(y_i)$ . De la même manière, on démontre que

$$c := \dots \cup [\sigma^{-p} y_i, \sigma^{-p+1} y_i] \cup \dots \cup [y_i, \sigma y_i] \cup \dots \cup [\sigma^p y_i, \sigma^{p+1} y_i] \cup \dots$$

est une géodésique locale qui est minimisante sur toute portion de longueur  $T$ , qui est entièrement incluse dans  $Y_r^i$  et qui vérifie  $c(t+T) = \sigma(c(t))$  ; l'image par  $\pi$  de cette géodésique locale est encore une géodésique locale de  $\bar{Y}$ , qui est  $T$ -périodique car  $\pi \circ c(t+T) = \pi(\sigma \circ c(t)) = \pi \circ c(t)$ , qui est entièrement incluse dans  $\bar{Y}_r^i$  et dont la longueur  $T$  coïncide avec  $\overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y}_j)$ , qui est le minimum (sur  $\bar{Y}_r^j$ ) de la fonction  $\bar{y} \mapsto \overline{\text{sys}}_\Gamma(\bar{y})$ .  $\square$

### 7.3.3 Les tubes de Margulis ont une topologie simple

On remarquera que, sur un espace métrique mesuré  $(Y, d, \mu)$  d'entropie majorée, la systole de l'action d'un groupe  $(\delta, \alpha)$ -épais  $\Gamma$  n'est généralement pas minorée lorsque le diamètre de l'espace quotient  $\bar{Y}$  n'est pas majoré (comparer avec la Proposition 7.16 (ii)). Lorsque le diamètre n'est pas majoré, nous allons montrer que, dans l'espace-quotient  $\bar{Y}$ , autour de chaque point  $\bar{y}$  où la systole est petite, il existe une boule de grand rayon qui ressemble à un "tube", i. e. qui est isométrique à une boule du quotient de  $Y$  par un sous-groupe abélien de  $\Gamma$ .

Plus concrètement, en reprenant les notations de la section précédente, nous fixerons ici un  $\varepsilon > 0$  (arbitraire inférieur ou égal à une constante universelle  $\varepsilon_0$  qui sera précisé dans la Proposition 7.23) et nous poserons  $R_\varepsilon := \varepsilon_0 \ln \left( 2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$  (observer que  $R_\varepsilon \rightarrow +\infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ).

Fixons un point  $y \in Y$  tel que  $\text{sys}_\Gamma(y) \leq \varepsilon$  et considérons l'ouvert  $U_{R_\varepsilon} := \bigcup_{\gamma \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon)$  et, afin de pouvoir appliquer le Lemme général 7.18 dans ce contexte, nous allons montrer que  $U_{R_\varepsilon}$  est la composante connexe de  $y$  dans  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon))$  (où  $\bar{y} := \pi(y)$ ). Notons en effet  $U_{R_\varepsilon}(y)$  la composante connexe de  $y$  dans  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon))$  et  $G_y$  l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma(U_{R_\varepsilon}(y)) = U_{R_\varepsilon}(y)$ . Comme toute boule d'un espace de longueur est connexe par arcs<sup>19</sup>, comme  $\gamma(B_Y(y, R_\varepsilon)) = B_Y(\gamma y, R_\varepsilon)$ , et comme, pour toute partie connexe  $A$  de  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon))$ ,  $A \cap U_{R_\varepsilon}(y) \neq \emptyset \iff A \subset U_{R_\varepsilon}(y)$ , en procédant par implications en boucles, nous démontrons que

$$\begin{aligned} \forall \gamma \in \Gamma \quad \gamma y \in U_{R_\varepsilon}(y) &\iff \gamma(U_{R_\varepsilon}(y)) \cap U_{R_\varepsilon}(y) \neq \emptyset \iff \gamma(U_{R_\varepsilon}(y)) = U_{R_\varepsilon}(y) \iff \\ &\iff \gamma \in G_y \iff B_Y(\gamma y, R_\varepsilon) \cap U_{R_\varepsilon}(y) \neq \emptyset \iff B_Y(\gamma y, R_\varepsilon) \subset U_{R_\varepsilon}(y), \end{aligned} \quad (61)$$

et, puisque  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon)$  (d'après la définition de la distance-quotient  $\bar{d}$ ), on déduit des équivalences (61) que :

$$U_{R_\varepsilon}(y) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} (B_Y(\gamma y, R_\varepsilon) \cap U_{R_\varepsilon}(y)) = \bigcup_{\gamma \in G_y} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon). \quad (62)$$

Montrons que  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \subset G_y$  : en effet, pour tout  $\sigma \in \check{\Sigma}_{2R_\varepsilon}(y)$ , on a  $d(y, \sigma y) < 2R_\varepsilon$  ; par ailleurs, comme  $(Y, d)$  est un espace de longueur, il existe un "presque milieu" entre les points  $y$  et  $\sigma y$ , i. e. un point  $u$  tel que

$$d(y, u) = d(\sigma y, u) < \frac{1}{2}(d(y, \sigma y) + \eta) < R_\varepsilon \quad \text{pour tout } \eta \text{ tel que } 0 < \eta < 2R_\varepsilon - d(y, \sigma y) ;$$

<sup>19</sup>. En effet, dans un espace de longueur, pour toute boule ouverte  $B_Y(x, r)$  et tout point  $z$  de cette boule, il existe un chemin  $c$  qui relie  $x$  à  $z$  tel que tout point  $z'$  de ce chemin vérifie  $d(x, z') + d(z', z) < d(x, z) + \eta$  (où  $0 < \eta < r - d(x, z)$ ), ce qui implique que tout point  $z'$  de ce chemin appartient à  $B_Y(x, r)$ .

il s'ensuit que  $B_Y(y, R_\varepsilon) \cap B_Y(\sigma y, R_\varepsilon) \neq \emptyset$ , donc que  $B_Y(\sigma y, R_\varepsilon) \cap U_{R_\varepsilon}(y) \neq \emptyset$  donc, d'après la série d'équivalences (61), que  $\sigma \in G_y$ , ce qui assure que le sous-groupe  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  engendré par  $\check{\Sigma}_{2R_\varepsilon}(y)$  est inclus dans  $G_y$ .

Montrons maintenant que  $G_y \subset \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$ , ce qui prouvera que  $G_y = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  : en effet, comme  $(Y, d)$  est localement connexe par arcs,  $U_{R_\varepsilon}(y)$  est connexe par arcs, car à la fois connexe et localement connexe par arcs ; par conséquent, pour tout  $\gamma \in G_y$ , il existe un chemin continu qui joint  $y$  à  $\gamma y$  et qui est entièrement contenu dans  $U_{R_\varepsilon}(y)$ , on a donc  $d(\Gamma \cdot y, u) < R_\varepsilon$  en tout point  $u$  de ce chemin ; par compacité du chemin et par continuité de la fonction  $u \mapsto R_\varepsilon - \bar{d}(\pi(y), \pi(u))$ , il existe un  $\eta > 0$  tel qu'on ait  $d(\Gamma \cdot y, u) \leq R_\varepsilon - \eta$  en tout point  $u$  de ce chemin.

Considérons une subdivision  $y = y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n = \gamma y$  de ce chemin telle que  $d(y_{i-1}, y_i) < \eta$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Comme tout point  $y_i$  de la subdivision appartient au chemin, il existe un  $\gamma_i \in \Gamma$  tel que  $d(y_i, \gamma_i y) \leq R_\varepsilon - \eta$  (on fait les choix évidents  $\gamma_0 = e$  et  $\gamma_n = \gamma$ ) ; en posant  $\sigma_i = \gamma_{i-1}^{-1} \gamma_i$  (pour tout  $1 \leq i \leq n$ ), nous obtenons que

$$d(y, \sigma_i y) = d(\gamma_{i-1} y, \gamma_i y) \leq d(y_{i-1}, \gamma_{i-1} y) + d(y_{i-1}, y_i) + d(y_i, \gamma_i y) < 2R_\varepsilon - \eta,$$

ce qui prouve que tous les  $\sigma_i$  appartiennent à  $\check{\Sigma}_{2R_\varepsilon}(y)$ , donc que  $\gamma \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  car  $\gamma = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \dots \cdot \sigma_n$ . Comme  $G_y = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$ , nous avons donc, par définition de  $U_{R_\varepsilon}$  et en vertu de (62),

$$U_{R_\varepsilon} = \bigcup_{\gamma \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon) = \bigcup_{\gamma \in G_y} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon) = U_{R_\varepsilon}(y).$$

Ceci démontre que  $U_{R_\varepsilon}$  est la composante connexe de  $y$  dans  $\pi^{-1}(B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon))$ .

Ceci prouve que nous pouvons appliquer les résultats de la section 7.3.1 précédente, en posant  $\check{V} = B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)$  et  $V = \pi^{-1}(B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)) = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon)$ , en remplaçant la composante connexe  $V^i$  de  $V$  par la composante connexe  $U_{R_\varepsilon}$  de  $\pi^{-1}(B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon))$ . Comme  $G_y = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  est le sous-groupe des éléments de  $\Gamma$  qui préservent la composante connexe  $U_{R_\varepsilon} = U_{R_\varepsilon}(y)$ , ceci permet de définir les applications-quotients  $\check{\pi} : Y \rightarrow \check{Y} = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash Y$  et  $\check{p} : U_{R_\varepsilon} \rightarrow \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash U_{R_\varepsilon}$ , la seconde application étant la restriction de la première. Comme  $\pi(U_{R_\varepsilon}) \subset B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)$ , on peut définir  $p : U_{R_\varepsilon} \rightarrow B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)$  comme la restriction de  $\pi$  à  $U_{R_\varepsilon}$ .

L'application  $\pi$  passe au quotient en une application  $\bar{\pi} : \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash Y \rightarrow \Gamma \backslash Y$ , et le même raisonnement qu'à la section 7.3.1 prouve que l'application  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash U_{R_\varepsilon} \rightarrow \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash Y$  induite par l'inclusion  $U_{R_\varepsilon} \hookrightarrow Y$  peut également être considérée comme une inclusion  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash U_{R_\varepsilon} \hookrightarrow \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash Y$ , ce qui permet de définir  $\bar{p}$  comme la restriction de  $\bar{\pi}$  à  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash U_{R_\varepsilon}$  et de démontrer (comme en section 7.3.1) que  $\bar{p} \circ \check{p} = p$ . Toutes ces définitions et propriétés sont résumées dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma \curvearrowright Y & \xrightarrow{\check{\pi}} & \check{Y} = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash Y & \xrightarrow{\bar{\pi}} & \bar{Y} = \Gamma \backslash Y \\ & \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \curvearrowright U_{R_\varepsilon} & \xrightarrow{\check{p}} & B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon) = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash U_{R_\varepsilon} & \xrightarrow{\bar{p}} & B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon) \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) & & \Gamma \end{array} \quad (63)$$

$\pi$  (arc supérieur),  $p$  (arc inférieur)

Dans ce diagramme, l'égalité  $B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon) = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \backslash U_{R_\varepsilon}$  (où  $\check{y} = \check{p}(y)$ ) est justifiée par le fait que  $U_{R_\varepsilon} = \{z : d(\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \cdot y, z) < R_\varepsilon\}$ , ce qui, par définition de la distance-quotient  $\check{d}$ , donne :  $\check{\pi}(U_{R_\varepsilon}) = \{\check{\pi}(z) : \check{d}(\pi(y), \pi(z)) < R_\varepsilon\} = B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)$ . Le Lemme qui suit permet de préciser et commenter ce diagramme.

**Lemme 7.22.** (Lemme de structure) *Soit  $(Y, d)$  un espace métrique de longueur et soit  $\Gamma$  un groupe sans torsion agissant (proprement, par isométries) sur  $(Y, d)$ . Fixons une valeur  $\varepsilon_0 > 0$ ,*



une valeur quelconque  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et choisissons  $R_\varepsilon := \varepsilon_0 \ln \left( 2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$ ; fixons un point  $y \in Y$  tel que  $\text{sys}_\Gamma(y) \leq \varepsilon$  et considérons l'ouvert  $U_{R_\varepsilon} := \bigcup_{\gamma \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)} B_Y(\gamma y, R_\varepsilon)$ . Avec les notations qui précèdent, on a :

- (i)  $U_{R_\varepsilon}$  est la composante connexe de  $y$  dans  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon))$  et  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  est l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma(U_{R_\varepsilon}) = U_{R_\varepsilon}$ .
- (ii) les applications  $\pi$ ,  $\check{\pi}$ ,  $p$  et  $\check{p}$  sont des revêtements localement isométriques de  $U_{R_\varepsilon}$  sur  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)$  et  $B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)$  respectivement;
- (iii)  $\bar{p}$  est un homéomorphisme de  $B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon)$  sur  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)$  qui est une isométrie locale et préserve les longueurs des chemins.

*Preuve* : Le point (i) a été démontré dans le préambule de la présente section 7.3.3. La propriété (i), le fait que  $\Gamma$  est sans torsion, et le fait que les boules sont connexes dans l'espace de longueur  $(Y, d)$  (donc dans son quotient  $(\bar{Y}, \bar{d})$ ) démontrent que les hypothèses du Lemme 7.18 sont vérifiées si on remplace l'ouvert  $\bar{V}$  du Lemme 7.18 par  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)$  et la composante connexe  $V^i$  de  $\pi^{-1}(\bar{V})$  par la composante connexe  $U_{R_\varepsilon}$  de  $y$  dans  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon))$ . La partie (ii) découle immédiatement du Lemme 7.18 (i) et (ii). Le Lemme 7.18 (iv) implique que l'application  $\bar{p}$  est un homéomorphisme de  $B_{\check{Y}}(\check{y}, R_\varepsilon) = \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \setminus U_{R_\varepsilon}$  sur  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)$ , qui est une isométrie locale et préserve les longueurs des chemins, ce qui achève la preuve de la partie (iii).  $\square$

**Proposition 7.23.** *Pour toute donnée des paramètres positifs  $\delta, \alpha, H$ , posons  $\varepsilon_0 = \frac{\alpha}{2H(13\delta + \alpha)}$ , fixons une valeur quelconque  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0]$  et choisissons  $R_\varepsilon := \varepsilon_0 \ln \left( 2 \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right)$ .*

*Soit  $(Y, d, \mu)$  un espace métrique de longueur mesuré d'entropie majorée par  $H$ , et soit  $\Gamma$  un groupe  $(\delta, \alpha)$ -transitif non abélien agissant discrètement (par isométries préservant la mesure) sur  $(Y, d, \mu)$ . Avec les notations du préambule ci-dessus et en nous référant au diagramme (63), pour tout  $\varepsilon \in ]0, \varepsilon_0[$  et pour tout point  $y \in Y$  tel que  $\text{sys}_\Gamma(y) \leq \varepsilon$ , on a :*

- (i) l'application  $\bar{p}$  se restreint en une isométrie de  $B_{\check{Y}}(\check{y}, \frac{1}{2} R_\varepsilon)$  sur  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, \frac{1}{2} R_\varepsilon)$  ;
- (ii) les sous-groupes  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  et  $\Gamma_{2R_\varepsilon}(y)$  sont abéliens (isomorphes à  $\mathbb{Z}$  lorsque  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -HT),
- (iii) si  $(Y, d)$  est simplement connexe, si  $\tilde{\pi}_1(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon), \bar{y})$  désigne l'image (dans  $\pi_1(\bar{Y}, \pi(y))$ ) du groupe fondamental de  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)$  (de point-base  $\bar{y} := \pi(y)$ ) par le morphisme induit par l'inclusion  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon) \hookrightarrow \bar{Y}$ , le sous-groupe  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  s'identifie avec  $\tilde{\pi}_1(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon), \bar{y})$  via l'isomorphisme canonique  $\Gamma \rightarrow \pi_1(\bar{Y}, \pi(y))$ . Par conséquent  $\tilde{\pi}_1(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon), \bar{y})$  est un sous-groupe abélien du groupe fondamental de  $\bar{Y}$ , qui est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  lorsque  $\Gamma$  est un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT.
- (iv) Si  $\Gamma$  est un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT, pour toutes les paires de points  $y', y'' \in B_Y(y, R_\varepsilon - \frac{1}{2} \varepsilon)$  tels que  $\text{sys}_\Gamma(y'), \text{sys}_\Gamma(y'') \leq \varepsilon$ , si  $\sigma'$  et  $\sigma''$  sont des éléments de  $\Gamma^*$  tels que  $d(y', \sigma' y') \leq \varepsilon$  et  $d(y'', \sigma'' y'') \leq \varepsilon$ , alors il existe des entiers  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $(\sigma')^p = (\sigma'')^q$ .  
En particulier, si  $(Y, d)$  est simplement connexe, deux lacets non homotopes à zéro de longueur inférieure ou égale à  $\varepsilon$  et qui n'admettent pas de multiples qui soient homotopes ont leurs voisinages tubulaires de rayons  $(\frac{1}{2} R_\varepsilon - \frac{1}{4} \varepsilon)$  disjoints ;
- (v) Si  $\Gamma$  est un groupe  $(\delta, \alpha)$ -HT et si  $(Y, d)$  est géodésique et simplement connexe, pour tout  $r \leq \varepsilon_0$ , notons  $\{\bar{Y}_r^j : j \in K\}$  l'ensemble des composantes connexes de  $\bar{Y}_r$  qui intersectent la boule  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon - \frac{1}{2} r)$  et qui sont d'adhérence compacte<sup>20</sup>. Dans chacune de ces composantes connexes considérons une (quelconque) des géodésiques locales périodiques<sup>21</sup>

20. On peut ajouter à cet ensemble de composantes connexes l'ensemble des composantes connexes  $\bar{Y}_r^j$  telles que la limite inférieure de  $\text{syst}_\Gamma(\bar{y})$  (quand  $\bar{y}$  tend vers l'infini dans  $\bar{Y}_r^j$ ) soit supérieure ou égale à  $r$  (ce qui implique qu'elle est égale à  $r$ ), mais on remarquera que, pour tout  $r' < r$  chacune de ces composantes connexes contient une composante connexe relativement compacte de  $\bar{Y}_{r'}$ , le traitement du cas où les composantes connexes sont relativement compactes suffit donc à décrire la situation générale.

21. L'existence, dans chaque  $\bar{Y}_r^j$ , d'au moins une de ces géodésiques (locales) périodiques est démontrée par la Proposition 7.21 (iii).

$\bar{c}_j$  de  $\bar{Y}$ , qui sont non homotopes à zéro et de longueur inférieure à  $r$ , alors, pour tous les  $j, k \in K$ , les géodésiques périodiques  $\bar{c}_j$  et  $\bar{c}_k$  admettent des multiples entiers qui sont homotopes.

*Preuve* : La propriété (i) du Lemme 7.22, le fait que  $\Gamma$  soit sans torsion (d'après les Remarques 7.5 (a) et (c)) et le fait que les boules sont connexes dans l'espace de longueur  $(Y, d)$  (donc dans son quotient  $(\bar{Y}, \bar{d})$ ) démontrent que les hypothèses du Lemme 7.18 sont vérifiées si on remplace l'ouvert  $\bar{V}$  du Lemme 7.18 par  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon)$  et la composante connexe  $V^i$  de  $\pi^{-1}(\bar{V})$  par la composante connexe  $U_{R_\varepsilon}$  de  $y$  dans  $\pi^{-1}(B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon))$ .

- (iii) est alors un corollaire immédiat du Lemme 7.18 (v) et du point (ii) qui démontre que  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  est abélien.
- *Preuve de (i)* : Comme conséquence des égalités  $\pi(B_Y(y, \frac{1}{2}R_\varepsilon)) = B_{\bar{Y}}(\bar{y}, \frac{1}{2}R_\varepsilon)$ ,  $\check{\pi}(B_Y(y, \frac{1}{2}R_\varepsilon)) = B_{\check{Y}}(\check{y}, \frac{1}{2}R_\varepsilon)$  (voir ci-dessus) et du Lemme 7.22 (iii), l'application  $\bar{p}$  se restreint en une application de  $\check{B}(\check{y}, \frac{1}{2}R_\varepsilon)$  sur  $B_{\bar{Y}}(\bar{y}, \frac{1}{2}R_\varepsilon)$  qui est encore un homéomorphisme localement isométrique. Pour démontrer que cette restriction de  $\bar{p}$  est une isométrie, il nous suffit de démontrer que, pour tous les  $z, z' \in B_Y(y, \frac{1}{2}R_\varepsilon)$ , on a  $\check{d}(\check{\pi}(z), \check{\pi}(z')) = \bar{d}(\pi(z), \pi(z'))$ . Comme  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \subset \Gamma$ , on a

$$\bar{d}(\pi(z), \pi(z')) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma z, \gamma z') \leq \inf_{\gamma \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)} d(\gamma z, \gamma z') = \check{d}(\check{\pi}(z), \check{\pi}(z')) .$$

Par ailleurs, pour tout  $\gamma \in \Gamma \setminus \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) \subset \Gamma \setminus \check{\Sigma}_{2R_\varepsilon}(y)$ , on a  $d(y, \gamma y) \geq 2R_\varepsilon$  et l'inégalité triangulaire donne :

$$d(\gamma z, \gamma z') \geq d(\gamma y, y) - d(y, z') - d(\gamma y, \gamma z) \geq 2R_\varepsilon - d(y, z') - d(y, z) > R_\varepsilon > d(z, z')$$

et, par conséquent,  $\inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma z, \gamma z') = \inf_{\gamma \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)} d(\gamma z, \gamma z')$ , ce qui implique que  $\check{d}(\check{\pi}(z), \check{\pi}(z')) = \bar{d}(\pi(z), \pi(z'))$ .

- *Preuve de (ii)* : Tout élément  $\gamma \in \Sigma_{2R_\varepsilon}(y)$  vérifie :

$$\begin{aligned} d(y, \gamma y) &\leq 2R_\varepsilon = \frac{\alpha}{H(13\delta + \alpha)} \ln \left( \frac{\alpha}{H(13\delta + \alpha)\varepsilon} \right) \\ &\leq \frac{1}{(1 + \lceil \frac{13\delta}{\alpha} \rceil) H} \text{Max} \left[ \ln 2, \ln \left( \frac{1}{(1 + \lceil \frac{13\delta}{\alpha} \rceil) H \text{sys}_\Gamma(y)} \right) \right], \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que  $\text{sys}_\Gamma(y) \leq \varepsilon \leq \frac{\alpha}{2H(13\delta + \alpha)}$ . Si  $\sigma$  est un élément de  $\Gamma^*$  tel que  $d(y, \sigma y) = \text{sys}_\Gamma(y)$ , la proposition 7.16 (i) implique que tout élément  $\gamma \in \Sigma_{2R_\varepsilon}(y)$  commute avec  $\sigma$  donc que tout  $\gamma \in \Gamma_{2R_\varepsilon}(y)$  commute avec  $\sigma$ , par transitivité de la relation de commutation, nous en déduisons que  $\Gamma_{2R_\varepsilon}(y)$  est abélien (et isomorphe à  $\mathbb{Z}$  si  $\Gamma$  est  $(\delta, \alpha)$ -épais, en vertu de la Remarque 7.5 (d)). Remarquons que  $\Gamma_{2R_\varepsilon}(y)$  est non trivial, puisque  $\text{sys}_\Gamma(y) \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0 \leq 2R_\varepsilon$ . Ceci achève la démonstration de (ii).

- *Preuve de (iv)* :  $y', y'', \sigma', \sigma''$  vérifiant les hypothèses de (iv), l'inégalité triangulaire donne

$$d(y, \sigma' y) \leq 2d(y, y') + d(y', \sigma' y') < 2R_\varepsilon, \quad d(y, \sigma'' y) \leq 2d(y, y'') + d(y'', \sigma'' y'') < 2R_\varepsilon,$$

ce qui prouve que  $\sigma, \sigma'' \in \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$ , ce dernier sous-groupe étant isomorphe à  $\mathbb{Z}$  en vertu de la partie (ii) de la présente Proposition. La propriété (56) permet d'en déduire l'existence d'entiers  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $(\sigma')^p = (\sigma'')^q$ .

Si  $(Y, d)$  est simplement connexe, étant donnés deux lacets  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  de  $\bar{Y}$  non homotopes à zéro, de longueur inférieure ou égale à  $\varepsilon$ , s'il existe des points  $\bar{y}_1$  et  $\bar{y}_2$  de ces deux lacets tels que  $\bar{d}(\bar{y}_1, \bar{y}_2) < R_\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon$ , par définition de la distance-quotient, il existe des antécédents respectifs  $y_1$  et  $y_2$  de  $\bar{y}_1$  et de  $\bar{y}_2$  dans  $Y$  tels que  $d(y_1, y_2) \leq R_\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon$ .

Les lacets  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  se relèvent en deux chemins continus  $c_1$  et  $c_2$  de mêmes longueurs, d'origines respectives  $y_1$  et  $y_2$  et d'extrémités situées respectivement dans  $\pi^{-1}(\{\bar{y}_1\})$  et dans  $\pi^{-1}(\{\bar{y}_2\})$ , donc de la forme  $\sigma_1 y_1$  et  $\sigma_2 y_2$ , où  $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma$ ; le fait que  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  ne soient pas homotopes à zéro assure que  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  sont non triviaux, de plus on a  $d(y_1, \sigma_1 y_1) \leq \text{longueur de } \bar{c}_1 \leq \varepsilon$  et  $d(y_2, \sigma_2 y_2) \leq \text{longueur de } \bar{c}_2 \leq \varepsilon$ . Comme  $y_1, y_2 \in B_Y(y_i, R_\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon)$ , on peut appliquer le résultat de la première partie de (iv) (que nous venons de démontrer), on en déduit qu'il existe des entiers  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\sigma_1^p = \sigma_2^q$ . Notons  $c'_2$  un chemin continu joignant  $y_1$  à  $\sigma_2 y_1$  dans  $Y$ , alors le lacet  $\pi \circ c'_2$  de  $\bar{Y}$  est librement homotope à  $\bar{c}_2$  et l'égalité  $\sigma_1^p y_1 = \sigma_2^q y_1$  implique que les lacets  $p \cdot \bar{c}_1$  et  $q \cdot (\pi \circ c'_2)$  sont homotopes, donc que les lacets  $p \cdot \bar{c}_1$  et  $q \cdot \bar{c}_2$  sont librement homotopes. A l'inverse, ceci assure que la distance entre  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  est supérieure ou égale à  $R_\varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon$  quand  $\bar{c}_1$  et  $\bar{c}_2$  n'admettent pas de multiples librement homotopes.

- *Preuve de (v)* : Pour tout  $j \in K$ , choisissons un point quelconque  $\bar{x}_j$  dans l'intersection (non vide par hypothèse)  $\bar{Y}_r^j \cap B_{\bar{Y}}(\bar{y}, R_\varepsilon - \frac{1}{2}r)$ ; par définition de la distance-quotient,  $\pi^{-1}(\{\bar{x}_j\})$  intersecte  $B_Y(y, R_\varepsilon - \frac{1}{2}r)$  en au moins un point, que nous noterons  $x_j$ . Fixons un élément non trivial  $\sigma_j \in \check{\Sigma}_r(x_j)$  (un tel élément existe car  $x_j \in \pi^{-1}(\{\bar{x}_j\}) \subset \pi^{-1}(\bar{Y}_r^j) = Y_r$ ). De l'inégalité triangulaire, il découle immédiatement que

$$\forall j \in K \quad \sigma_j \in \check{\Sigma}_r(x_j) \subset \check{\Sigma}_{2R_\varepsilon}(y) \subset \check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y) ;$$

Notons  $Y_r^j$  la composante connexe de  $x_j$  dans  $Y_r$ , comme  $\pi(Y_r^j) \cap \bar{Y}_r^j$  est non vide (car il contient  $\bar{x}_j$ ), la Proposition 7.20 (ii) prouve que  $\pi$  induit un revêtement de  $Y_r^j$  sur  $\bar{Y}_r^j$ ; fixons la géodésique locale périodique  $\bar{c}_j \subset \bar{Y}_r^j$  et un point  $\bar{y}_j$  de cette géodésique, il existe donc un relevé  $y_j \in Y_r^j$  du point  $\bar{y}_j$  et un relevé  $c_j$  de la géodésique locale  $\bar{c}_j$  (i. e.  $\pi \circ c_j = \bar{c}_j$ ) d'origine  $y_j$ , dont l'extrémité opposée appartient à  $\pi^{-1}(\{\bar{y}_j\})$  et est distincte de  $y_j$  (car  $\bar{c}_j$  n'est pas homotope à zéro); il existe donc un élément  $\gamma_j$  de  $\Gamma^*$  tel que  $\gamma_j y_j$  soit cette extrémité opposée. De plus, comme  $d(y_j, \gamma_j y_j) \leq \text{longueur de } \bar{c}_j < r$ ,  $\gamma_j$  appartient à  $\check{\Gamma}_r(y_j)$ . La Proposition 7.21 (i) prouve que  $\check{\Gamma}_r(y_j)$  et  $\check{\Gamma}_r(x_j)$  sont inclus dans un même sous-groupe abélien de  $\Gamma$ , ce dernier sous-groupe étant isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$  d'après la Remarque 7.5 (d); il existe donc  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\gamma_j^p = \sigma_j^q$ . Nous avons donc prouvé que, pour tout  $j \in K$ , pour toute géodésique locale périodique  $\bar{c}_j$  incluse dans  $\bar{Y}_r^j$ , pour tout point  $\bar{y}_j$  de  $\bar{c}_j$ , si  $\gamma_j$  est l'élément de  $\Gamma^*$  qui est envoyé sur la classe d'homotopie de  $\bar{c}_j$  par l'isomorphisme canonique  $\Gamma \rightarrow \pi_1(Y, \bar{y}_j)$ , il existe un élément non trivial  $\sigma_j$  de  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  et des  $p, q \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\gamma_j^p = \sigma_j^q$ .

Pour tout autre indice  $k \in K$ , on démontre de même que, pour toute géodésique locale périodique  $\bar{c}_k$  incluse dans  $\bar{Y}_r^k$ , pour tout point  $\bar{y}_k$  de  $\bar{c}_k$ , si  $\gamma_k$  est l'élément de  $\Gamma^*$  qui est envoyé sur la classe d'homotopie de  $\bar{c}_k$  par l'isomorphisme canonique  $\Gamma \rightarrow \pi_1(Y, \bar{y}_k)$ , il existe un élément non trivial  $\sigma_k$  de  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  et des  $r, s \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\gamma_k^r = \sigma_k^s$ . Comme  $\check{\Gamma}_{2R_\varepsilon}(y)$  est isomorphe à  $\mathbb{Z}$  d'après (ii), il existe  $m, n \in \mathbb{Z}^*$  tels que  $\sigma_j^m = \sigma_k^n$ . Les trois égalités ci-dessus donnent  $\gamma_j^{pms} = \gamma_k^{qnrs}$ , ce qui prouve qu'un multiple entier de  $\bar{c}_j$  est (librement) homotope à un multiple entier de  $\bar{c}_k$ .  $\square$

## 8 Appendices : Rappels sur les espaces Gromov-hyperboliques

### 8.1 Mise au point sur les écarts numériques entre les textes de base

Ces écarts numériques sont essentiellement dus au fait que les différents textes de base (par ex. [Gd90], [CDP90], [BH99]) partent de définitions différentes (équivalentes, mais à une constante multiplicative près) de la  $\delta$ -hyperbolicité et ont des méthodes variées pour démontrer les résultats de base de la théorie des espaces Gromov-hyperboliques, d'où des différences d'un facteur multiplicatif dans les constantes (différences qui ne sont pas gênantes quand on travaille à quasi-isométrie près, mais qui sont quelque peu insécurisantes quand on recherche des bornes universelles explicites d'invariants géométriques). Notre propos est ici de donner un cheminement qui permet de contrôler ces constantes multiplicatives de

manière indépendante de l'espace (pourvu que celui-ci soit  $\delta$ -hyperbolique). Comme ces résultats sont (à un facteur multiplicatif près) classiques, la démonstration de chaque Lemme sera laissée au lecteur.

Dans un espace métrique géodésique  $(X, d)$ , un *triangle géodésique*  $\Delta = [x, y, z]$  est la réunion de trois segments géodésiques  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$ . Pour tout triangle géodésique  $\Delta = [x, y, z]$ , il existe toujours un *tripode*  $T_\Delta = [cx'] \cup [cy'] \cup [cz']$  (c.a.d. un arbre métrique à trois branches, ayant pour "point de branchement" le point  $c$ ) et une application surjective  $f_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$  qui envoie les sommets  $x, y, z$  du triangle respectivement sur les extrémités  $x', y', z'$  des branches du tripode et dont la restriction à chaque coté de  $\Delta$  est une isométrie. Le *produit de Gromov*, défini par

$$(x|y)_{x_0} := \frac{1}{2} (d(x_0, x) + d(x_0, y) - d(x, y))$$

permet d'exprimer aisément les longueurs des trois branches de  $T_\Delta$ . En effet, il existe trois points  $c_z \in [x, y]$ ,  $c_x \in [y, z]$  et  $c_y \in [z, x]$  appartenant à  $f_\Delta^{-1}(c)$ , dits *points internes* du triangle  $\Delta$ , tels que

$$\begin{aligned} d(x, c_y) &= d(x, c_z) = d_T(x', c) = (y|z)_x \\ d(y, c_x) &= d(y, c_z) = d_T(y', c) = (x|z)_y \\ d(z, c_x) &= d(z, c_y) = d_T(z', c) = (x|y)_z \end{aligned}$$

(où  $d_T$  indique la distance dans  $T_\Delta$ ). La preuve des inégalités suivantes est immédiate :

**Lemme 8.1.** *Soit  $\Delta = [x, y, z]$  un triangle géodésique et  $f_\Delta$  l'application tripode associée :*

- (i) *En restriction au côté  $[x, y]$  (resp. au côté  $[x, z]$ , resp. au côté  $[y, z]$ ) l'application  $f_\Delta$  est une isométrie.*
- (ii) *si  $u, v \in \Delta$ , alors  $d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) \leq d(u, v)$  ;*
- (iii) *si  $u \in [x, y]$ , alors  $d(u, z) \geq (x|u)_z \geq (x|y)_z$ .*

Un triangle géodésique  $\Delta$  de  $(X, d)$  est dit  $\delta$ -fin si, pour tout  $u \in T_\Delta$  et pour tous les  $x, y \in f_\Delta^{-1}(\{u\})$ , on a  $d(x, y) \leq \delta$ .

**Définition 8.2.** *On dira qu'un espace métrique géodésique propre  $(X, d)$  est  $\delta$ -hyperbolique si tous ses triangles sont  $\delta$ -fins.*

*Tous les espaces  $\delta$ -hyperboliques que nous considérerons ici seront donc supposés géodésiques et propres, sans qu'il soit nécessaire de le répéter.*

Les résultats suivants sont bien connus, et ils sont souvent pris comme définition même de la  $\delta$ -hyperbolicité ; on pourra en retrouver la preuve (avec des constantes variables, dépendantes de la définition choisie) dans tous les textes classiques, cf. par ex. [Gd90], [CDP90], [BH99]).

**Lemme 8.3.** *Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique.*

- (i) *(Lemme d'approximation) Pour tout triangle  $\Delta = [x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$ , l'application tripode associée  $f_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$  satisfait :*

$$d(u, v) - \delta \leq d_T(f_\Delta(u), f_\Delta(v)) \leq d(u, v) .$$

- (ii) *(Lemme de Rips) Pour tout point  $u \in [x, y]$ , on a :*

$$d(u, [y, z] \cup [z, x]) \leq \delta .$$

- (iii) *(Lemme de la moyenne) Pour tous les  $x_0, x, y, z \in X$ , on a*

$$(x|z)_{x_0} \geq \text{Min} [(x|y)_{x_0}, (y|z)_{x_0}] - \delta .$$

*En particulier, pour tout triangle géodésique  $\Delta = [x_0, x, y]$  et pour tout point  $z \in [x, y]$ , on a  $d(x_0, z) \geq (x|z)_{x_0} \geq (x|y)_{x_0}$ .*

- (iv) *(Lemme du quadrilatère) Pour tout les  $x, y, z, w \in X$ , on a*

$$d(x, z) + d(y, w) \leq \text{Max}(d(x, y) + d(z, w); d(x, w) + d(y, z)) + 2\delta ; ;$$

*si de plus  $[x, y]$ ,  $[y, z]$ ,  $[z, w]$  et  $[x, w]$  sont des segments géodésiques reliant entre eux les sommets du quadrilatère  $[x, y, z, w]$ , alors pour tout  $v \in [x, w]$  on a :*

$$d(v, [x, y] \cup [y, z] \cup [z, w]) \leq 2\delta .$$

## 8.2 Projections

**Définition 8.4.** Si  $F$  est un sous-ensemble fermé d'un espace métrique  $(X, d)$  et si  $x \in X$  est un point quelconque, on appelle projeté de  $x$  sur  $F$  n'importe quel point  $\bar{x} \in F$  tel que

$$d(x, \bar{x}) = d(x, F) := \inf_{z \in F} d(x, z) .$$

La continuité de la distance implique qu'il existe toujours un projeté sur un compact, mais celui-ci n'est généralement pas unique.

En revanche, il n'existe pas toujours un projeté sur un fermé ; une hypothèse suffisante pour qu'il existe un projeté sur un fermé  $F$  est que l'espace  $(X, d)$  soit propre. Cependant, lorsque le fermé  $F$  est l'image d'une géodésique, cette hypothèse est inutile, comme le démontre le lemme 8.5 ci-dessous, dont la preuve (élémentaire) est laissée au lecteur :

**Lemme 8.5.** Dans un espace métrique  $(X, d)$ , si  $c$  est un segment, ou un rayon, ou une droite géodésique, tout point  $x \in X$  admet (au moins) un projeté sur l'image  $\text{Im}(c)$  de  $c$ .

De plus, l'application  $x \mapsto d(x, \text{Im}(c))$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz égale à 1.

**Lemme 8.6.** Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique (donc géodésique et propre)  $(X, d)$ , considérons un triangle de géodésiques quelconque  $\Delta := [x, y, z]$ , dont les côtés sont notés  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$  ; pour tout  $\eta \geq 0$  tel que  $d(x, [y, z]) \geq d(x, y) - \eta$ , on a

(i)  $d(y, c_y) \leq 2\delta + \eta$ , où  $c_z, c_y, c_x$  sont les points des côtés respectifs  $[x, y]$ ,  $[x, z]$ ,  $[y, z]$  tels que  $d(x, c_z) = d(x, c_y)$ ,  $d(y, c_z) = d(y, c_x)$  et  $d(z, c_y) = d(z, c_x)$  (voir la formule qui précède le Lemme 8.1),

(ii)  $d(x, z) \geq d(x, y) + d(y, z) - 2(\eta + \delta)$ .

*Preuve :* Notons  $(T_\Delta, d_T)$  le tripode métrique associé au triangle  $\Delta$  et  $f_\Delta : \Delta \rightarrow T_\Delta$  l'application tripode associée. Notons respectivement  $x', y', z'$  les extrémités  $f_\Delta(x), f_\Delta(y), f_\Delta(z)$  des branches du tripode  $T_\Delta$ . Par construction, le point central de branchement  $c$  de ce tripode vérifie  $f_\Delta(c_z) = f_\Delta(c_y) = f_\Delta(c_x) = c$ . Le fait que  $c_x \in [y, z]$ , le fait que  $f_\Delta$  soit une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)) et le Lemme d'approximation 8.3 (i) impliquent que

$$d_T(x', y') = d(x, y) \leq d(x, c_x) + \eta \leq d_T(x', c) + \delta + \eta ,$$

dont on déduit que  $d_T(y', c) \leq \delta + \eta$ , ce qui a deux conséquences :

- d'une part, en vertu du Lemme d'approximation 8.3 (i), on a  $d(y, c_y) \leq 2\delta + \eta$ , ce qui prouve la partie (i),
- d'autre part, en vertu du fait que l'application  $f_\Delta$  est une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)), cette inégalité permet de conclure la preuve de la partie (ii) en démontrant que

$$\begin{aligned} d(x, z) &= d_T(x', z') = d_T(x', c) + d_T(c, z') = d_T(x', y') + d_T(y', z') - 2d_T(y', c) \\ &\geq d(x, y) + d(y, z) - 2(\delta + \eta) . \quad \square \end{aligned}$$

Le Lemme 8.5 (ii) (en y remplaçant  $\eta$  par 0) a pour corollaire immédiat le Lemme 8.7 qui suit :

**Lemme 8.7.** Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , pour toute géodésique  $c$ , pour tout point  $x \in X$  et tout point  $y$  de l'image de  $c$ , on a  $d(x, y) \geq d(x, \bar{x}) + d(\bar{x}, y) - 2\delta$ , où  $\bar{x}$  est un projeté de  $x$  sur l'image de  $c$ .

Le Lemme qui suit signifie que l'inégalité triangulaire est une presque-égalité dans le cas où les deux points intermédiaires sont des projetés.

**Lemme 8.8.** *Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique géodésique  $(X, d)$ , considérons quatre points  $x, y, \bar{x}, \bar{y}$  tels que  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$  soient des projetés de  $x$  et de  $y$  sur un des segments géodésiques (noté  $[\bar{x}, \bar{y}]$ ) joignant  $\bar{x}$  et  $\bar{y}$ , alors*

$$d(\bar{x}, \bar{y}) > 3\delta \implies d(x, y) \geq d(x, \bar{x}) + d(\bar{x}, \bar{y}) + d(\bar{y}, y) - 6\delta .$$

*Preuve :* Le Lemme 8.7 donne  $d(x, \bar{y}) \geq d(x, \bar{x}) + d(\bar{x}, \bar{y}) - 2\delta$  et  $d(y, \bar{x}) \geq d(y, \bar{y}) + d(\bar{y}, \bar{x}) - 2\delta$ . De ceci et de l'hypothèse  $d(\bar{x}, \bar{y}) > 3\delta$  on déduit :

$$d(x, \bar{y}) + d(y, \bar{x}) - 2\delta \geq d(x, \bar{x}) + 2d(\bar{x}, \bar{y}) + d(y, \bar{y}) - 6\delta > d(x, \bar{x}) + d(y, \bar{y}) ,$$

et, en utilisant cette dernière inégalité et le lemme du quadrilatère 8.3 (iv) :

$$\begin{aligned} d(x, \bar{x}) + 2d(\bar{x}, \bar{y}) + d(y, \bar{y}) - 6\delta &\leq d(x, \bar{y}) + d(y, \bar{x}) - 2\delta \leq \text{Max}(d(x, \bar{x}) + d(y, \bar{y}); d(x, y) + d(\bar{x}, \bar{y})) \\ &\leq d(x, y) + d(\bar{x}, \bar{y}) , \end{aligned}$$

ce qui conclut.  $\square$

### 8.3 Géodésiques asymptotes et divergentes

Les points (i) et (ii) de la Proposition qui suit sont classiques : en effet, d'après la définition du bord idéal (Définition 7.1, p. 117 de [Gd90], qui est équivalente à la définition donnée au chapitre 2 de [CDP90], en vertu de la Proposition 7.4 p. 120 de [Gd90]), il est équivalent de dire que deux géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  vérifient l'égalité  $\gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty)$  et de dire que la distance de Hausdorff entre  $\gamma_1([0, +\infty[)$  et  $\gamma_2([0, +\infty[)$  est finie, la même équivalence étant vérifiée du côté de  $-\infty$  sous les hypothèses faites en (i) ; nous nous contentons ici de préciser les constantes qui interviennent dans ces deux résultats (i) et (ii), c'est la raison pour laquelle nous ne donnerons pas leur démonstration.

Le point (iii) de la Proposition qui suit sera démontré ici, bien qu'il soit proche d'un résultat connu, qui s'exprime de la manière suivante : étant données une fonction de Busemann  $b_\gamma$  (associée à un rayon géodésique donné  $\gamma$ ) et deux autres géodésiques  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  telles que  $\gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty) = \gamma(+\infty)$  alors, pour tout  $t > 0$ , les valeurs de la fonction de Busemann  $b_\gamma$  aux points  $\gamma_1(t)$  et  $\gamma_2(t)$  diffèrent d'une constante qui, une fois les origines des géodésiques convenablement choisies, ne dépend que de la constante d'hyperbolicité  $\delta$ . Le point (iii) qui suit est cependant plus précis sur les conséquences quantitatives de cette idée

**Proposition 8.9.** *Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique géodésique propre  $(X, d)$ ,*

(i) *si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 : \mathbb{R} \rightarrow X$  sont deux droites géodésiques telles que  $\gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty)$  et  $\gamma_1(-\infty) = \gamma_2(-\infty)$ , alors, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , il existe un  $s \in \mathbb{R}$  tel que  $d(\gamma_1(t), \gamma_2(s)) \leq 2\delta$ .*

*De plus il existe des choix d'origines  $t_0$  et  $s_0$  sur  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  (respectivement) tels que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $d(\gamma_1(t_0 + t), \gamma_2(s_0 + t)) \leq 4\delta$ ,*

(ii) *si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 : [0, +\infty[ \rightarrow X$  sont deux rayons géodésiques tels que  $\gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty)$  alors, pour tout  $t \in [d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)), +\infty[$ , il existe un  $s \in [0, +\infty[$  tel que  $d(\gamma_1(t), \gamma_2(s)) \leq 2\delta$ ,*

(iii) *si  $\gamma_1$  et  $\gamma_2 : [0, +\infty[ \rightarrow X$  sont deux rayons géodésiques tels que  $\gamma_1(+\infty) = \gamma_2(+\infty)$ , il existe deux nombres réels  $t_1, t_2 \geq 0$  vérifiant  $t_1 + t_2 = d(\gamma_1(0), \gamma_2(0))$  et tels que  $d(\gamma_1(t_1 + t), \gamma_2(t_2 + t)) \leq 2\delta$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .*

*Preuve de (iii) :* D'après (ii), si  $t'$  est choisi suffisamment grand [on aura donc en particulier  $t' > d(\gamma_1(0), \gamma_2(0)) + 2\delta$ ], il existe un  $s'$  tel que  $d(\gamma_1(t'), \gamma_2(s')) \leq 2\delta$ . Pour simplifier, posons  $x_0 = \gamma_1(0)$ ,  $y_0 = \gamma_2(0)$ ,  $x = \gamma_1(t')$ ,  $y = \gamma_2(s')$  et considérons les deux triangles  $\Delta = [x_0, x, y_0]$  et  $\Delta' = [x, y, y_0]$  (ayant le côté  $[x, y_0]$  en commun) et leurs approximations par les tripodes associés :  $f_\Delta : (\Delta, d) \rightarrow (T_\Delta, d_T)$  et  $f_{\Delta'} : (\Delta', d) \rightarrow (T_{\Delta'}, d_{T'})$  (selon la construction décrite en début de section 8.1), les points centraux de branchement de ces tripodes étant notés respectivement  $c$

et  $c'$  ; on a  $f_{\Delta}^{-1}(\{c\}) = \{c_0, c_1, c_2\}$ , où  $c_0, c_1$  et  $c_2$  appartiennent respectivement à  $[x_0, y_0]$ , à  $[x_0, x]$  et à  $[y_0, x]$ . Posons

$$t_1 = d(x_0, c_1) = d(x_0, c_0) = d_T(f_{\Delta}(x_0), c) \quad , \quad t_2 = d(y_0, c_2) = d(y_0, c_0) = d_T(f_{\Delta}(y_0), c) \quad ,$$

où  $t_1 + t_2 = d(x_0, y_0)$  et où, d'après ce qui précède et le Lemme 8.1 (i),

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= d_T(f_{\Delta}(x_0), c) - d_T(f_{\Delta}(y_0), c) = d_T(f_{\Delta}(x_0), f_{\Delta}(x)) - d_T(f_{\Delta}(y_0), f_{\Delta}(x)) \\ &= d(\gamma_1(t'), x_0) - d(\gamma_1(t'), y_0) ; \end{aligned} \quad (64)$$

comme  $\gamma_1(t_1) = c_1$ , le Lemme d'approximation 8.3 (i) implique que  $d(\gamma_1(t_1), c_2) \leq \delta$  et, pour tout  $t \in [0, t' - 2\delta - t_1]$ , le point  $\gamma_1(t_1 + t)$  appartient à  $[c_1, x]$ , donc le point  $f_{\Delta}(\gamma_1(t_1 + t))$  appartient à la branche  $[c, f_{\Delta}(x)]$  du tripode  $T$ . Notons  $u$  le point du segment géodésique  $[c_2, x] \subset [y_0, x]$  tel que  $f_{\Delta}(u) = f_{\Delta}(\gamma_1(t_1 + t))$ , donc tel que  $d(c_2, u) = d(c_1, \gamma_1(t_1 + t)) = t$  (cette dernière égalité découlant du Lemme 8.1 (i)) ; le point  $u$  vérifie donc les trois propriétés suivantes :

$$d(y_0, u) = t_2 + t \quad , \quad d(x, u) = t' - t_1 - t \geq 2\delta \quad , \quad d(\gamma_1(t_1 + t), u) \leq \delta \quad , \quad (65)$$

en effet, la première propriété de (65) découle des égalités  $d(c_2, u) = t$  et  $d(y_0, c_2) = t_2$  et du fait que  $c_2 \in [y_0, u]$ , la deuxième et la troisième du fait que  $f_{\Delta}(u) = f_{\Delta}(\gamma_1(t_1 + t))$ , ce qui implique (en utilisant le Lemme 8.1 (i)) que  $d(x, u) = d_T(f_{\Delta}(x), f_{\Delta}(u)) = d(x, \gamma_1(t_1 + t)) = t' - t_1 - t$  et (en utilisant le d'approximation 8.3 (i)) que  $d(\gamma_1(t_1 + t), u) \leq \delta$ .

Comme  $u \in [x, y_0]$ , la construction du tripode d'approximation (cf. le début de la section 8.1) assure que le point  $f_{\Delta'}(u)$  appartient à la réunion des deux branches  $[c', f_{\Delta'}(x)]$  et  $[c', f_{\Delta'}(y_0)]$  du tripode  $T'$ . En rappelant que  $d(x, y) = d(\gamma_1(t'), \gamma_2(s')) \leq 2\delta$ , en nous appuyant sur le Lemme 8.1 (i), sur la deuxième des propriétés (65) et sur la définition de  $t$ , nous obtenons :

$$d_{T'}(f_{\Delta'}(x), c') \leq d_{T'}(f_{\Delta'}(x), f_{\Delta'}(y)) = d(x, y) \leq 2\delta \leq d(x, u) = d_{T'}(f_{\Delta'}(x), f_{\Delta'}(u)) \quad ;$$

nous en déduisons que  $f_{\Delta'}(u) \notin [c', f_{\Delta'}(x)]$ , donc que  $f_{\Delta'}(u)$  est situé sur la branche  $[c', f_{\Delta'}(y_0)]$  du tripode  $T'$ . Il existe par conséquent un point  $u' \in [y_0, y]$  (qui s'écrit donc  $u' = \gamma_2(s)$ , où  $s \in [0, s']$ ) tel que  $f_{\Delta'}(u') = f_{\Delta'}(u)$ , donc tel que  $d(u, u') \leq \delta$  (d'après le Lemme d'approximation 8.3 (i)) ; de plus le Lemme 8.1 (i), l'égalité  $f_{\Delta'}(u') = f_{\Delta'}(u)$  et la première des propriétés (65) impliquent que  $s = d(y_0, u') = d_{T'}(f_{\Delta'}(y_0), f_{\Delta'}(u)) = d(y_0, u) = t_2 + t$ , donc que  $u' = \gamma_2(t_2 + t)$  ; l'inégalité triangulaire et la dernière des propriétés (65) donnent alors  $d(\gamma_1(t_1 + t), \gamma_2(t_2 + t)) \leq d(\gamma_1(t_1 + t), u) + d(u, u') \leq 2\delta$ . En faisant tendre  $t'$  vers  $+\infty$ , nous en déduisons que l'inégalité  $d(\gamma_1(t_1 + t), \gamma_2(t_2 + t)) \leq 2\delta$  est vérifiée pour tout  $t \in [0, +\infty[$ .  $\square$

Pour toute géodésique  $c$  de  $(X, d)$  et pour tout point  $x \in X$ , notons  $\pi_c(x)$  l'ensemble des projetés du point  $x$  sur l'image  $\text{Im}(c)$  de  $c$  ; le Lemme 8.5 assure que, si  $c$  est un segment, ou un rayon, ou une droite géodésique, alors, pour tout  $x$ ,  $\pi_c(x) \neq \emptyset$ .

L'image d'un ensemble  $E \subset X$  par la projection sur cette géodésique  $c$  (notée  $\pi_c(E)$ ) est définie comme la réunion des ensembles  $\pi_c(x)$  quand  $x$  parcourt  $E$ . On a la

**Proposition 8.10.** *Dans un espace  $\delta$ -hyperbolique (donc géodésique et propre)  $(X, d)$ , si deux droites géodésiques  $c_1$  et  $c_2$  sont telles que  $\{c_1(-\infty), c_1(+\infty)\} \cap \{c_2(-\infty), c_2(+\infty)\} = \emptyset$ , alors*

(i) *l'ensemble des  $s$  tels que  $c_1(s)$  appartienne à la projection  $\pi_{c_1}(\text{Im}(c_2))$  de l'image de  $c_2$  sur  $c_1$  admet une borne supérieure et une borne inférieure finies,*

(ii) *il existe un point  $x_0 = c_1(s_0)$  de la droite géodésique  $c_1$  ayant les propriétés suivantes : pour toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ , il existe une suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$  de réels positifs telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour  $n$  suffisamment grand, on ait*

$$d(c_1(t), c_2(t_n)) \geq d(c_2(t_n), x_0) + d(x_0, c_1(t)) - 5\delta - \varepsilon_n \quad ,$$

(iii) il existe un point  $x'_0 = c_1(s_1)$  de la géodésique  $c_1$  ayant les propriétés suivantes : pour toute suite  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $-\infty$ , il existe une suite  $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow 0$  de réels positifs telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et pour  $n$  suffisamment grand, on ait

$$d(c_1(t), c_2(t'_n)) \geq d(c_2(t'_n), x'_0) + d(x'_0, c_1(t)) - 5\delta - \varepsilon'_n .$$

*Preuve de (i) :* Nous allons démontrer que la borne supérieure de  $\pi_{c_1}(\text{Im}(c_2))$  est finie, la démonstration étant la même pour la borne inférieure, puisque la borne inférieure devient la borne supérieure quand on change l'orientation de la géodésique  $c_1$ .

Pour cela, nous raisonnons par l'absurde : supposons qu'il existe une suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$  et telle que  $c_1(s_n)$  appartienne à  $\pi_{c_1}(\text{Im}(c_2))$  ; il existe alors une suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $c_1(s_n) \in \pi_{c_1}(c_2(t_n))$  et alors

— soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bornée, mais alors  $d(c_1(0), c_2(t_n))$  est bornée par une constante  $D > 0$ , et

$$d(c_2(t_n), c_1(s_n)) = d(c_2(t_n), \text{Im}(c_1)) \leq d(c_1(0), c_2(t_n)) \leq D ,$$

ce qui implique que  $s_n = d(c_1(0), c_1(s_n)) \leq 2D$ , ce qui est en contradiction avec le fait  $s_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$  ;

— soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une sous-suite (que nous continuerons à appeler  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ) qui tend vers  $\pm\infty$ . Quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , comme  $c_1(s_n)$  et  $c_2(t_n)$  tendent respectivement vers deux points distincts  $c_1(+\infty)$  et  $c_2(\pm\infty)$  du bord idéal, le produit de Gromov  $(c_1(s_n)|c_2(t_n))$  (pour une origine en  $c_1(0)$ ) est borné par une constante  $D'$ , ce qui implique que

$$\begin{aligned} s_n &\leq d(c_1(0), c_1(s_n)) + d(c_1(0), c_2(t_n)) - d(c_2(t_n), \text{Im}(c_1)) \\ &\leq d(c_1(0), c_1(s_n)) + d(c_1(0), c_2(t_n)) - d(c_2(t_n), c_1(s_n)) \leq 2D' , \end{aligned}$$

ce qui est en contradiction avec le fait  $s_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

La seule possibilité pour lever ces contradictions est donc que toute suite  $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $c_1(s_n)$  appartienne à  $\pi_{c_1}(\text{Im}(c_2))$  soit bornée.  $\square$

*Preuve de (ii) :* Notons  $K_t$  l'adhérence de  $\pi_{c_1}(c_2([t, +\infty[))$  et posons  $K = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ . Pour toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ , on a encore  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_{t_n} = K$  car, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , il existe un  $p_n \in \mathbb{N}$  tel que  $p_n \leq t_n < p_n + 1$ , ce qui implique que  $K_{p_n+1} \subset K_{t_n} \subset K_{p_n}$ .

Chaque  $K_{t_n}$  est borné car la propriété (i) assure que  $\pi_{c_1}(c_2([-\infty, +\infty[))$  est borné, donc que  $\pi_{c_1}(c_2([t_n, +\infty[))$  est borné ; comme  $(X, d)$  est propre, nous en déduisons que chaque  $K_{t_n}$  est compact et que  $K$  est un compact non vide comme intersection de compacts emboîtés.

Bornons le diamètre de  $K$  : soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $K$ , alors ce sont les limites respectives de deux suites  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(x'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , où  $x_n, x'_n \in \pi_{c_1}(c_2([n, +\infty[))$  : en effet,  $x$  (resp.  $x'$ ) étant dans l'adhérence de  $\pi_{c_1}(c_2([n, +\infty[))$ , il suffit de choisir  $x_n$  (resp.  $x'_n$ ) dans l'intersection (non vide) de  $\pi_{c_1}(c_2([n, +\infty[))$  et de  $B_X(x, \frac{1}{n})$  (resp. et de  $B_X(x', \frac{1}{n})$ ).

Il existe donc des éléments  $t_n, t'_n \in [n, +\infty[$  tels que  $x_n$  (resp.  $x'_n$ ) soit un projeté de  $c_2(t_n)$  (resp. de  $c_2(t'_n)$ ). La propriété du quadrilatère (Lemme 8.3 (iv)) donne

$$d(x_n, c_2(t'_n)) + d(x'_n, c_2(t_n)) - 2\delta \leq \text{Max}[d(x_n, x'_n) + d(c_2(t_n), c_2(t'_n)) ; d(x_n, c_2(t_n)) + d(x'_n, c_2(t'_n))] ,$$

ce qui induit, en appliquant le Lemme 8.7,

$$\begin{aligned} &d(x'_n, c_2(t'_n)) + 2d(x_n, x'_n) + d(x_n, c_2(t_n)) - 6\delta \\ &\leq \text{Max}[d(x_n, x'_n) + d(c_2(t_n), c_2(t'_n)) ; d(x_n, c_2(t_n)) + d(x'_n, c_2(t'_n))] . \end{aligned} \quad (66)$$

Or l'inégalité triangulaire permet d'affirmer que, pour  $n$  assez grand,

$$d(x_n, c_2(t_n)) \geq t_n - d(x_n, c_2(0)) \geq t_n - C , \quad d(x'_n, c_2(t'_n)) \geq t'_n - d(x'_n, c_2(0)) \geq t'_n - C ,$$

car la propriété (i) assure que  $d(x_n, c_2(0))$  et  $d(x'_n, c_2(0))$  sont bornées supérieurement par une constante notée ici  $C$ . Comme  $t_n + t'_n - |t_n - t'_n| = 2 \text{Min}(t_n, t'_n) \geq 2n$ , lorsque  $n$  est assez grand, on a

$$d(x_n, c_2(t_n)) + d(x'_n, c_2(t'_n)) \geq t_n + t'_n - 2C \geq |t_n - t'_n| + 2n - 2C > d(c_2(t_n), c_2(t'_n)) + d(x_n, x'_n) ,$$



où la dernière inégalité découle de la propriété (i), qui assure que  $d(x_n, c_1(0))$  et  $d(x'_n, c_1(0))$  sont bornées supérieurement par une constante notée ici  $C$ , l'inégalité étant donc valable dès que  $n > 2C$ . En injectant cette dernière série d'inégalités dans la formule (66), nous obtenons

$$d(x'_n, c_2(t'_n)) + 2d(x_n, x'_n) + d(x_n, c_2(t_n)) - 6\delta \leq d(x_n, c_2(t_n)) + d(x'_n, c_2(t'_n)) \quad ,$$

ce qui implique que  $d(x_n, x'_n) \leq 3\delta$  donc, par passage à la limite, que  $d(x, x') \leq 3\delta$ . On conclut que  $K$  est inclus dans un segment de longueur  $3\delta$  de la géodésique  $c_1$ ; notons  $x_0$  le milieu de ce segment, on a  $d(x_0, x) \leq \frac{3}{2}\delta$  pour tout  $x \in K$ .

De plus, pour toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$  et toute suite  $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments  $z_n \in \pi_{c_1}(c_2([t_n, +\infty[))$ , la distance  $d(z_n, K)$  tend vers zéro quand  $n$  tend vers  $+\infty$ : en effet dans le cas contraire, il existerait une sous-suite (que nous appellerons  $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ) et un  $\varepsilon > 0$  tels que le  $\varepsilon$ -voisinage de  $K$  (noté  $U_\varepsilon(K)$ ) sur la géodésique  $c_1$  (ou plutôt sur son image) ne contienne aucun des  $z_{n_k}$ ; les  $K_{n_k} \setminus U_\varepsilon(K)$  seraient alors des compacts emboîtés non vides d'intersection vide, ce qui introduirait une contradiction.

Pour tout  $t \in \mathbb{R}$  et toute suite  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $+\infty$ , si  $z_n$  est un projeté de  $c_2(t_n)$ , comme  $z_n \in \pi_{c_1}(c_2([t_n, +\infty[))$ , la majoration ci-dessus du diamètre de  $K$  implique que  $d(x_0, z_n) \leq \frac{3}{2}\delta + d(z_n, K)$ , et le Lemme 8.7 permet d'en déduire que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$d(c_1(t), c_2(t_n)) \geq d(c_2(t_n), z_n) + d(z_n, c_1(t)) - 2\delta \geq d(c_2(t_n), x_0) + d(x_0, c_1(t)) - 5\delta - 2d(z_n, K) \quad ,$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

*Preuve de (iii)* : On change l'orientation de  $c_2$ , i. e. on remplace la géodésique  $c_2$  par la géodésique  $\tilde{c}_2$  définie par  $\tilde{c}_2(t) = c_2(-t)$ . Comme, pour toute suite  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $-\infty$ , la suite  $(-t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers  $+\infty$ , on peut appliquer la propriété (ii) au couple de géodésiques  $c_1$  et  $\tilde{c}_2$ , ce qui prouve l'existence d'un point  $x'_0 = c_1(s_1)$  de la géodésique  $c_1$  tel que, pour toute suite  $(t'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tendant vers  $-\infty$ , il existe une suite  $(\varepsilon'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de nombres réels strictement positifs tendant vers zéro telle que, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on ait

$$d(c_1(t), \tilde{c}_2(-t'_n)) \geq d(\tilde{c}_2(-t'_n), x'_0) + d(x'_0, c_1(t)) - 5\delta - \varepsilon'_n \quad ,$$

ce qui démontre (iii).  $\square$

## 8.4 Isométries et déplacements

### 8.4.1 Sous-groupes discrets du groupe des isométries

Pour savoir ce qu'est une action "propre" ou une action "discrète", nous renvoyons aux Définitions 2.1, l'équivalence entre ces deux notions étant donnée par la

**Proposition 8.11.** *Sur un espace métrique  $(X, d)$ , toute action (par isométries) fidèle et propre est discrète. Réciproquement, si  $(X, d)$  est un espace propre, toute action (par isométries) fidèle et discrète est propre.*

*Preuve* : Considérons un groupe  $\Gamma$  qui agit fidèlement par isométries sur  $(X, d)$ , que nous pouvons donc identifier à un sous-groupe du groupe  $\text{Isom}(X, d)$  des isométries de  $(X, d)$ . Si cette action est supposée propre, considérons n'importe quelle suite convergente (uniformément sur tout compact)  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\Gamma$  et notons  $g \in \text{Isom}(X, d)$  sa limite. Il existe alors un  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on ait  $d(x, \gamma_N^{-1} \gamma_{N+p} x) = d(\gamma_N x, \gamma_{N+p} x) < 1$ , et la suite  $(\gamma_N^{-1} \gamma_{N+p})_{p \in \mathbb{N}}$  parcourt un sous-ensemble fini de  $\Gamma$  (à savoir l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels  $d(x, \gamma x) < 1$ ); comme cette suite est par ailleurs convergente, elle est stationnaire, ce qui prouve que la suite initiale  $(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire, donc que  $\Gamma$  est discret (et fermé).

Réciproquement, si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret de  $\text{Isom}(X, d)$  et si  $(X, d)$  est propre, fixons arbitrairement un point  $x_0 \in X$ ; rappelons que, pour tout  $R > 0$ ,  $\Sigma_R(x_0)$  désigne l'ensemble des  $\gamma \in \Gamma$  tels que  $\gamma x_0 \in \overline{B}_X(x_0, R)$ . Supposons qu'il existe un  $R_0 > 0$  tel que  $\Sigma_{R_0}(x_0)$  soit

infini, le Théorème d'Ascoli démontre que, pour tout  $R > 0$ ,  $\Sigma_{R_0}(x_0)$  est relativement compact dans l'ensemble des applications continues de  $\overline{B}_X(x_0, R)$  dans  $X$ , muni de la topologie de la convergence uniforme : en effet les hypothèses du Théorème d'Ascoli sont vérifiées, car

- $\overline{B}_X(x_0, R)$  est compacte et  $(X, d)$  est un espace métrique complet car  $(X, d)$  est propre,
- tout  $\gamma \in \Sigma_R(x_0)$  est une application continue de  $\overline{B}_X(x_0, R)$  dans  $X$ ,
- $\Sigma_R(x_0)$  est une famille équicontinue car incluse dans l'ensemble des isométries de  $(X, d)$ ,
- Pour tout  $x \in \overline{B}_X(x_0, R)$ , l'ensemble  $\{\gamma x : \gamma \in \Sigma_R(x_0)\}$  est relativement compact dans  $(X, d)$ , car inclus dans la boule compacte  $\overline{B}_X(x_0, R_0 + R)$ .

Comme  $\Sigma_{R_0}(x_0)$  contient une suite d'éléments distincts, nous pouvons en extraire une première sous-suite qui converge uniformément sur  $\overline{B}_X(x_0, R)$  ; comme l'image de cette sous-suite par l'application  $\gamma \mapsto \gamma^{-1}$  est encore une suite d'éléments de  $\Sigma_{R_0}(x_0)$ , nous extrayons, de cette première sous-suite, une seconde sous-suite (que nous noterons  $(\gamma_n^R)_{n \in \mathbb{N}}$ ) telle que  $(\gamma_n^R)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $((\gamma_n^R)^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  convergent (uniformément sur  $\overline{B}_X(x_0, R)$ ) vers deux applications continues de  $\overline{B}_X(x_0, R)$  dans  $X$ , que nous noterons respectivement  $f_R$  et  $h_R$ . En donnant à  $R$  la valeurs  $R_k = k$  et en extrayant la sous-suite  $(\gamma_n^{R_{k+1}})_{n \in \mathbb{N}}$  de la sous-suite précédente  $(\gamma_n^{R_k})_{n \in \mathbb{N}}$ , nous construisons deux suites d'applications  $f_k$  et  $h_k$  telles que  $f_{k+1}$  (resp.  $f_k$ ) soit la limite uniforme de  $(\gamma_n^{R_{k+1}})_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\overline{B}_X(x_0, k+1)$  (resp. sur  $\overline{B}_X(x_0, k)$ ) et que  $h_{k+1}$  (resp.  $h_k$ ) soit la limite uniforme de  $((\gamma_n^{R_{k+1}})^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\overline{B}_X(x_0, k+1)$  (resp. sur  $\overline{B}_X(x_0, k)$ ), ce qui prouve d'une part que  $f_{k+1}$  prolonge  $f_k$  et construit une application continue  $f : X \rightarrow X$  qui coïncide avec chaque  $f_k$  sur chaque boule  $\overline{B}_X(x_0, k)$ , et d'autre part que  $h_{k+1}$  prolonge  $h_k$  et construit une application continue  $h : X \rightarrow X$  qui coïncide avec chaque  $h_k$  sur chaque boule  $\overline{B}_X(x_0, k)$ . Dans chaque sous-suite  $(\gamma_n^{R_k})_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe une infinité d'éléments distincts  $\gamma_n^{R_k}$  tels que

$$\sup_{x \in \overline{B}_X(x_0, k)} d(f(x), \gamma_n^{R_k}(x)) < 1/k \quad \text{et} \quad \sup_{x \in \overline{B}_X(x_0, k)} d(h(x), (\gamma_n^{R_k})^{-1}(x)) < 1/k ;$$

parmi ces éléments, il est donc possible d'en choisir un (noté  $\gamma_{n_k}^{R_k}$ ) qui n'appartienne pas à l'ensemble  $\{\gamma_{n_1}^{R_1}, \dots, \gamma_{n_{k-1}}^{R_{k-1}}\}$  des éléments précédemment choisis. Nous obtenons ainsi une sous-suite  $(\gamma_{n_k}^{R_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  d'éléments distincts telle que  $(\gamma_{n_k}^{R_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  et  $((\gamma_{n_k}^{R_k})^{-1})_{k \in \mathbb{N}^*}$  convergent uniformément (respectivement) vers  $f$  et  $h$  sur toute boule fermée. Un passage à la limite prouve que  $f$  et  $h$  préservent la distance et que  $h \circ f$  et  $f \circ h$  sont les limites uniformes de  $(\gamma_{n_k}^{R_k})^{-1} \gamma_{n_k}^{R_k} = \text{id}_X$  et de  $\gamma_{n_k}^{R_k} (\gamma_{n_k}^{R_k})^{-1} = \text{id}_X$  sur chacune des boules fermées, donc que  $h \circ f = f \circ h = \text{id}_X$ , ce qui prouve que  $f$  appartient à  $\text{Isom}(X, d)$ . Par ailleurs la suite  $(\gamma_{n_k}^{R_k})^{-1} \gamma_{n_{k+1}}^{R_{k+1}}$  converge également vers  $h \circ f = \text{id}_X$  et, comme l'élément neutre  $\text{id}_X$  est isolé dans  $\Gamma$ , cette suite est stationnaire, ce qui prouve que  $\gamma_{n_k}^{R_k} = \gamma_{n_{k+1}}^{R_{k+1}}$  lorsque  $k$  est suffisamment grand, en contradiction avec le fait que la suite  $(\gamma_{n_k}^{R_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$  est constituée d'éléments distincts. Il s'ensuit que  $\Sigma_R(x_0)$  est fini pour tout  $R$ .  $\square$

**Lemme 8.12.** *Pour toute action propre (par isométries) d'un groupe  $\Gamma$  sur un espace métrique  $(X, d)$ ,*

- (i) *l'espace quotient  $\Gamma \backslash X$  est un espace métrique pour la métrique-quotient  $\bar{d}$  définie par  $\bar{d}(\Gamma \cdot x, \Gamma \cdot y) = \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma y)$ ,*
- (ii) *si  $(X, d)$  est un espace propre et si  $\Gamma \backslash X$  est de diamètre fini, alors  $\Gamma \backslash X$  est compact,*
- (iii) *si  $\Gamma$  est sans torsion, alors l'action est fidèle, discrète et sans point fixe.*

*Preuve :* La fonction  $\bar{d}$  est symétrique car  $\inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma y) = \inf_{g, \gamma \in \Gamma} d(gx, \gamma y)$ . Dans les égalités (i) définissant  $\bar{d}$ , l'infimum est atteint puisqu'il porte sur un nombre fini de valeurs : en effet l'ensemble  $\{\gamma : d(x, \gamma y) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma y) + 1\}$  est fini car l'action est propre. On en déduit facilement que, si  $\inf_{\gamma \in \Gamma} d(x, \gamma y) = 0$ , alors  $x \in \Gamma \cdot y$  et  $\Gamma \cdot x = \Gamma \cdot y$  et que  $\inf_{\gamma, g \in \Gamma} d(\gamma x, g z) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma} d(\gamma x, y) + \inf_{g \in \Gamma} d(y, g z)$ , donc que  $\bar{d}$  est une distance. Ceci démontre (i). L'espace  $(X, d)$  étant propre, toute boule fermée  $\overline{B}_X(x, R)$  de rayon  $R$  supérieur ou égal au

diamètre de  $\Gamma \backslash X$  est compacte, donc son image  $\Gamma \backslash X$  par l'application-quotient est compacte. Ceci démontre (ii).

L'action étant propre, le stabilisateur de tout point est un sous-groupe fini de  $\Gamma$ , il est donc trivial lorsque  $\Gamma$  est sans torsion, ce qui implique que l'action est à la fois fidèle et sans point fixe ; en appliquant la première partie de la Proposition 8.11, nous en déduisons que l'action est discrète, ce qui démontre (iii).  $\square$

La Remarque suivante est bien connue des spécialistes de l'algèbre des groupes

**Remarque 8.13.** *Tout groupe non trivial, sans torsion et virtuellement cyclique est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, +)$ .*

*Preuve :* Notons  $G$  le groupe considéré, comme il est non trivial et sans torsion, il est infini et il contient un sous-groupe  $H$  d'indice fini (donc infini) et cyclique, donc isomorphe à  $\mathbb{Z}$ . Pour tout  $g \in G$ , en posant  $\varrho(g)(g'H) = (gg')H$ , on obtient un morphisme  $\varrho$  de  $G$  dans le groupe (fini) des permutations de  $G/H$  dont le noyau est un sous-groupe normal de  $G$ , inclus dans  $H$  et est d'indice fini dans  $G$  ; en remplaçant  $H$  par le noyau de  $\varrho$ , nous sommes ramenés au cas où  $H$  est un sous-groupe normal d'indice fini de  $G$ , isomorphe à  $\mathbb{Z}$ , dont nous fixons un générateur, noté  $\tau$ . Notons  $r : G \rightarrow \text{Aut}(H)$  le morphisme défini par  $r(g)(h) = ghg^{-1}$  ; on a alors  $r(g)(\tau) = \tau^{\pm 1}$ . S'il existe un  $g \in G$  tel que  $r(g) \neq \text{id}_H$ , on a alors  $g\tau g^{-1} = \tau^{-1}$  et, par conséquent,  $ghg^{-1} = h^{-1}$  pour tout  $h \in H$  ; comme par ailleurs il existe un  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $g^n \in H$ , on en déduit que  $g g^n g^{-1} = g^{-n}$ , donc que  $g^{2n} = e$ , ce qui est incompatible avec l'hypothèse "sans torsion". On en déduit que  $ghg^{-1} = h$  pour tous les  $(g, h) \in G \times H$ , donc que  $H$  est inclus dans le centre de  $G$ . Si  $N := \#(G/H)$ , il existe un morphisme  $V : G \rightarrow H$  (le morphisme de transfert) tel que  $V(h) = h^N$  pour tout  $h \in H$  ; comme tous les  $h \in H$  sont sans torsion,  $\text{Ker}(V) \cap H$  est trivial et le morphisme  $\text{Ker}(V) = \text{Ker}(V)/(\text{Ker}(V) \cap H) \rightarrow G/H$  est injectif. Ceci implique que  $\text{Ker}(V)$  est un sous-groupe fini de  $G$ , donc que  $\text{Ker}(V)$  est trivial car sans torsion ; il s'ensuit que  $V$  est un isomorphisme de  $G$  sur un sous-groupe infini de  $H$ , lui-même isomorphe à  $\mathbb{Z}$ .  $\square$

## 8.4.2 Isométries et déplacements des espaces Gromov-hyperboliques

Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique (donc géodésique) ; notons  $\partial X$  le *bord idéal* de  $(X, d)$  (pour une définition de ce bord et de sa topologie, voir la Définition 7.1 p. 117 de [Gd90], qui est équivalente à la définition donnée au chapitre 2 de [CDP90]). Toute isométrie  $\gamma$  de  $(X, d)$  se prolonge en une application continue (et même Lipschitzienne pour une métrique convenable) de  $\partial X$  dans lui-même (voir par exemple la Proposition 11.2.1 p. 134 de [CDP90]). Une isométrie  $\gamma$  de  $(X, d)$  est dite :

- *de type elliptique* si, pour au moins un point  $x \in X$  (et par conséquent pour tout point  $x \in X$ ), l'orbite  $(\gamma^k x)_{k \in \mathbb{Z}}$  est bornée,
- *de type parabolique* si, pour au moins un point  $x \in X$  (et par conséquent pour tout point  $x \in X$ ), l'orbite  $(\gamma^k x)_{k \in \mathbb{Z}}$  admet un et un seul point d'accumulation, situé sur le bord idéal  $\partial X$  de  $X$  ; nous noterons  $\gamma^\infty$  ce point d'accumulation ; par définition de la topologie de  $\partial X$ , ce point d'accumulation ne dépend pas du choix du point  $x$  de départ (remarquer que, pour tout  $x \in X$ ,  $\gamma^\infty$  est la limite de  $\gamma^p x$  quand  $p \rightarrow \pm\infty$ ),
- *de type hyperbolique* si, pour au moins un point  $x \in X$  (et par conséquent pour tout point  $x \in X$ ), l'application  $k \rightarrow \gamma^k x$  est une quasi-isométrie de  $\mathbb{Z}$  dans  $X$ .

Toute isométrie de  $(X, d)$  est soit de type hyperbolique, soit de type parabolique, soit de type elliptique (pour une preuve de ce fait, voir par exemple [CDP90], Théorème 9.2.1 p. 98).

Si  $\gamma$  est de type hyperbolique (resp. de type parabolique), c'est un résultat classique [voir par exemple [CDP90], Proposition 10.6.6 p. 118, (resp. [Gd90], Théorème 17 au Chapitre 8)] que l'action (prolongée comme ci-dessus) de  $\gamma$  sur  $X \cup \partial X$  admet exactement 2 points fixes distincts, que nous noterons  $\gamma^+$  et  $\gamma^-$ , qui sont (pour tout point  $x$ ) les limites de  $\gamma^p x$  et de  $\gamma^{-p} x$  quand  $p \rightarrow +\infty$  (resp. un seul point fixe : le point d'accumulation  $\gamma^\infty$  précisé dans

la définition ci-dessus). La remarque qui suit est bien connue des spécialistes, la démonstration (triviale) est laissée au lecteur.

**Remarque 8.14.** *Si  $(X, d)$  est un espace  $\delta$ -hyperbolique et si  $\Gamma$  est un sous-groupe discret du groupe des isométries de  $(X, d)$ , alors*

- (i) *un élément de  $\Gamma^*$  est elliptique si et seulement si il est de torsion; si  $\Gamma$  est sans torsion, chacun de ses éléments est donc de type hyperbolique ou parabolique;*
- (ii) *si  $g \in \Gamma^*$ , pour tout  $k \in \mathbb{Z}^*$  tel que  $g^k \neq id_X$ ,  $g$  est hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique) si et seulement si  $g^k$  est hyperbolique (resp. parabolique, resp. elliptique); de plus, si  $g$  est hyperbolique ou parabolique, alors  $g^k$  a exactement les mêmes points fixes que  $g$ .*

Lorsque l'isométrie  $\gamma$  considérée est de type parabolique, il est connu que tout point d'une horosphère centrée en  $\gamma^\infty$  s'envoie sur un point situé à distance bornée de cette horosphère; le Lemme suivant précise cette idée :

**Lemme 8.15.** *Soit  $\gamma$  une isométrie parabolique d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$  dont l'unique point fixe (situé sur le bord idéal) est noté  $\gamma^\infty$ . A tout rayon-géodésique  $c$  vérifiant  $c(+\infty) = \gamma^\infty$ , on associe une valeur  $T = T(\gamma) \leq d(c(0), \gamma \circ c(0))$  telle que  $d(c(t), \gamma(c(t))) \leq 7\delta$  pour tout  $t \in [T, +\infty[$ .*

*Preuve :* Appliquons la Proposition 8.9 (iii) aux géodésiques  $c$  et  $\gamma \circ c$  : on vérifie aisément que l'hypothèse est vérifiée car  $\gamma \circ c(+\infty) = \gamma(\gamma^\infty) = \gamma^\infty = c(+\infty)$ , on en déduit qu'il existe deux nombres réels  $t_1, t_2 \geq 0$ , vérifiant  $t_1 + t_2 = d(c(0), \gamma \circ c(0))$ , tels que  $d(c(t_1 + t), \gamma \circ c(t_2 + t)) \leq 2\delta$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ , ce qui équivaut à  $d(c(t + t_1 - t_2), \gamma \circ c(t)) \leq 2\delta$  pour tout  $t \in [t_2, +\infty[$ . On est alors dans un des deux cas suivants :

Cas 1 : Si  $|t_2 - t_1| \leq 3\delta$ , fixons n'importe quel nombre  $t \in [t_2, +\infty[$ , la dernière inégalité ci-dessus et l'inégalité triangulaire donnent :

$$d(c(t), \gamma \circ c(t)) \leq d(c(t), c(t + t_1 - t_2)) + d(c(t + t_1 - t_2), \gamma \circ c(t)) \leq |t_2 - t_1| + 2\delta \leq 5\delta ,$$

ce qui achève la preuve dans ce cas.

Cas 2 : Si  $|t_2 - t_1| > 3\delta$ , fixons n'importe quel nombre  $t \in [t_2, +\infty[$  et considérons le triangle géodésique  $\Delta = [c(t + t_1 - t_2), \gamma \circ c(t), c(t)]$  et son approximation par le tripode associé :  $f_\Delta : (\Delta, d) \rightarrow (T_\Delta, d_T)$ , le point central de branchement de ce tripode étant appelé  $e$  et les longueurs des trois branches du tripode d'extrémités respectives  $f_\Delta(c(t + t_1 - t_2))$ ,  $f_\Delta(\gamma \circ c(t))$  et  $f_\Delta(c(t))$  étant notées  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Le Lemme 8.1 (i) et le fait que  $d(c(t + t_1 - t_2), \gamma \circ c(t)) \leq 2\delta$  impliquent que

$$\alpha + \gamma = |t_2 - t_1| \quad , \quad \alpha + \beta \leq 2\delta \quad , \quad \gamma + \beta = d(c(t), \gamma \circ c(t)) \quad ,$$

et, par conséquent, que  $\gamma - \beta = (\alpha + \gamma) - (\alpha + \beta) \geq |t_2 - t_1| - 2\delta > \delta > 0$ . On en déduit que, si  $m_t$  désigne le milieu d'une géodésique  $[c(t), \gamma \circ c(t)]$ , alors (par construction du tripode) le point  $f_\Delta(m_t)$  est situé sur la branche  $[e, f_\Delta(c(t))]$  du tripode  $T$  et il existe par conséquent un point  $m'_t$  du segment-géodésique  $[c(t), c(t + t_1 - t_2)]$  tel que  $f_\Delta(m'_t) = f_\Delta(m_t)$ , et donc (en vertu du Lemme d'approximation 8.3 (i))  $d(m_t, m'_t) \leq \delta$ . En appliquant cette dernière inégalité, l'inégalité triangulaire, puis le Lemme 8.19, nous en déduisons que

$$d(m'_t, \gamma m'_t) \leq d(m_t, \gamma m_t) + 2\delta \leq \ell(\gamma) + 5\delta = 5\delta \quad ,$$

où la dernière égalité découle du fait que, puisque  $\gamma$  est parabolique, on a  $\ell(\gamma) = 0$ . Comme  $m'_t$  est de la forme  $c(s(t))$ , où  $s(t)$  est compris entre  $t$  et  $t + t_1 - t_2$ ,  $s(t)$  tend vers  $+\infty$  en même temps que  $t$  et  $s(t_2) \leq T$ , où  $T := \max(t_1, t_2)$ . Pour tout  $t \in [T, +\infty[$ , il existe donc un  $t_3$  tel que  $t \in [s(t_2), s(t_3)]$  et, en utilisant la convexité (à  $2\delta$ -près) de la distance entre les géodésiques  $c$  et  $\gamma \circ c$ , nous obtenons :

$$d(c(t), \gamma \circ c(t)) \leq \text{Max} [d(c[s(t_2)], \gamma \circ c[s(t_2)]) ; d(c[s(t_3)], \gamma \circ c[s(t_3)])] + 2\delta =$$

$$= \text{Max} [d(m'_{t_2}, \gamma m'_{t_2}); d(m'_{t_3}, \gamma m'_{t_3})] + 2\delta \leq 7\delta . \quad \square$$

Lorsque l'isométrie  $\gamma$  considérée est de type hyperbolique, il peut exister plusieurs géodésiques qui joignent les deux points fixes  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  de  $\gamma$ , c'est pourquoi nous avons introduit (dans les Définitions 4.1) l'ensemble  $\mathcal{G}(\gamma)$  des géodésiques orientées qui joignent  $\gamma^-$  à  $\gamma^+$  et la réunion  $M(\gamma) \subset X$  de ces droites-géodésiques.

**Remarque 8.16.** Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique et  $\gamma$  une isométrie de  $(X, d)$  de type hyperbolique, si  $c \in \mathcal{G}(\gamma)$ , alors  $\gamma^k \circ c \in \mathcal{G}(\gamma)$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . Par conséquent  $M(\gamma)$  est globalement invariant par  $\gamma^k$ .

**Définitions 8.17.** A toute isométrie  $\gamma$  non triviale d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , on associe :

- son déplacement moyen  $\ell(\gamma)$ , défini comme la limite<sup>22</sup> (quand  $k \rightarrow +\infty$ ) de  $\frac{1}{k} d(x, \gamma^k x)$ ,
- son déplacement minimum  $s(\gamma)$ , défini comme  $\inf_{x \in X} d(x, \gamma x)$ .

Remarquons que, pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on a  $\ell(\gamma^k) = |k| \ell(\gamma)$ .

Pour toute isométrie  $\gamma$  (non triviale) d'un espace  $\delta$ -hyperbolique  $(X, d)$ , rappelons que  $\gamma$  est de type hyperbolique si et seulement si  $\ell(\gamma) > 0$  (voir par exemple [CDP90], Proposition 10.6.3, p. 118) et que<sup>23</sup>  $\ell(\gamma) \leq s(\gamma)$  ;

**Lemme 8.18.** Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique et  $g$  une isométrie de  $(X, d)$  alors, pour tout  $x \in X$ ,

- (i)  $d(x, g^2x) \leq d(x, gx) + \ell(g) + 2\delta$ ,
- (ii)  $\forall p \in \mathbb{N} \quad d(x, g^{2^p}x) \leq d(x, gx) + (2^p - 1)\ell(g) + 2p\delta$ ,
- (iii)  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad d(x, g^n x) \leq d(x, gx) + (n - 1)\ell(g) + 4\delta \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$ .

*Preuve de (i) :* La preuve de (i) est une simple adaptation de la preuve du Lemme 9.2.2 pp 98-99 de [CDP90] : on pose  $a_n = d(x, g^n x)$  et on applique l'inégalité du quadrilatère aux quatre points  $x, gx, g^2x$  et  $g^n x$ , ce qui donne

$$a_2 + a_{n-1} \leq \text{Max}(a_1 + a_{n-2}, a_1 + a_n) + 2\delta \quad (67)$$

pour tout  $n \geq 3$ , et donc pour tout  $n \geq 2$ .

Supposons qu'il existe un point  $x$  tel que  $d(x, g^2x) > d(x, gx) + \ell(g) + 2\delta$ , ce qui se traduit par l'existence d'un  $\alpha > \ell(g)$  tel que

$$a_2 \geq a_1 + \alpha + 2\delta, \quad (68)$$

l'inégalité (67) entraîne alors

$$\forall n \geq 2, \quad a_{n-1} + \alpha \leq \text{Max}(a_{n-2}, a_n) . \quad (69)$$

Montrons que ceci implique la propriété

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} \geq a_n + \alpha : \quad (70)$$

la preuve de cette dernière inégalité se fait par récurrence; en effet, l'inégalité (70) est vérifiée lorsque  $n = 1$  (ceci découle de l'inégalité (68)). Par ailleurs, puisque  $a_0 = 0$ , l'inégalité (68) et l'inégalité triangulaire impliquent que  $a_0 + \alpha + a_1 + 2\delta \leq a_2 \leq 2a_1$ , donc que l'inégalité (70) est

<sup>22</sup>. Par sous-additivité, cette limite existe et, par l'inégalité triangulaire, elle ne dépend pas du choix du point  $x \in X$ , cf. [CDP90], Proposition 10.6.1 page 118);

<sup>23</sup>. En effet, pour tout  $x \in X$  et tout  $k \in \mathbb{N}$ , l'inégalité triangulaire donne  $\frac{1}{k} d(x, \gamma^k x) \leq d(x, \gamma x)$ .

également vérifiée lorsque  $n = 0$ . Si on suppose que  $a_{n+1} \geq a_n + \alpha$ , l'inégalité (69) permet d'en déduire que  $\text{Max}(a_{n+2}, a_n) \geq a_{n+1} + \alpha \geq a_n + 2\alpha$ , donc que  $a_{n+2} \geq a_{n+1} + \alpha$ , ce qui termine la démonstration de (70).

Une conséquence de l'inégalité (70) est que  $a_n \geq n\alpha$ , donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{d(x, g^n x)}{n} \geq \alpha > \ell(g) \quad ,$$

ce qui est contradictoire avec la Définition 8.17 de  $\ell(g)$ . Pour lever cette contradiction, il faut donc que, pour tout point  $x$ , on ait  $d(x, g^2 x) \leq d(x, gx) + \ell(g) + 2\delta$ .  $\square$

*Preuve de (ii)* : L'inégalité de (ii) est trivialement vérifiée lorsque  $p = 0$  et, en vertu de (i), lorsque  $p = 1$ . Si l'inégalité (ii) est vérifiée à l'ordre  $p$ , alors elle l'est aussi à l'ordre  $p + 1$  car, en vertu de (i) et du fait que  $\ell(g^n) = n\ell(g)$ , on a

$$d(x, g^{2^{p+1}} x) \leq d(x, g^{2^p} x) + 2^p \ell(g) + 2\delta \leq d(x, gx) + (2^{p+1} - 1)\ell(g) + 2(p+1)\delta \quad ,$$

ce qui prouve (ii) par récurrence.  $\square$

*Preuve de (iii)* : De (ii) on déduit que l'inégalité (iii) est vérifiée lorsque  $n$  est de la forme  $2^p$ , où  $p \in \mathbb{N}$ ; pour démontrer (iii), il nous suffit donc de démontrer, pour tout  $x \in X$  et pour tout  $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , la propriété :

$$(\mathcal{P}_p) \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } 2^p < n < 2^{p+1} \quad , \quad d(x, g^n x) \leq d(x, gx) + (n-1)\ell(g) + 4\delta p \quad .$$

Pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et pour tout  $n$  tel que  $2^p < n < 2^{p+1}$ , le Lemme 8.3 (iv) du quadrilatère implique que :

$$\begin{aligned} d(x, g^n x) + d(g^{2^p} x, g^{2^{p+1}} x) - 2\delta &\leq \text{Max} \left[ d(x, g^{2^p} x) + d(g^n x, g^{2^{p+1}} x); d(x, g^{2^{p+1}} x) + d(g^n x, g^{2^p} x) \right] \\ &\leq \text{Max} \left[ d(x, g^{2^p} x) + d(g^n x, g^{2^{p+1}} x); d(x, g^{2^p} x) + 2^p \ell(g) + 2\delta + d(g^n x, g^{2^p} x) \right] \quad , \end{aligned}$$

où la seconde inégalité découle de (i). En simplifiant, nous en déduisons que

$$d(x, g^n x) \leq \text{Max} \left[ d(x, g^{2^{p+1}-n} x); 2^p \ell(g) + 2\delta + d(x, g^{n-2^p} x) \right] + 2\delta \quad . \quad (71)$$

Appliquant l'inégalité (71) au cas  $p = 1$  et  $n = 3$ , nous en déduisons que

$$d(x, g^3 x) \leq 2\delta + \text{Max} [d(x, gx); 2\ell(g) + 2\delta + d(x, gx)] = d(x, gx) + 2\ell(g) + 4\delta \quad ,$$

ce qui prouve que la propriété  $(\mathcal{P}_p)$  est vérifiée lorsque  $p = 1$ .

Montrons que, si  $p \geq 2$  et si la propriété  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée pour tous les  $k \leq p-1$ , alors la propriété  $(\mathcal{P}_p)$  est vérifiée. Supposons donc que la propriété  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée pour tous les  $k \leq p-1$  alors (en tenant compte de cette hypothèse et de (ii)) l'inégalité  $d(x, g^i x) \leq d(x, gx) + (i-1)\ell(g) + 4\delta(p-1)$  est vérifiée pour tout  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $1 \leq i \leq 2^p$ , ce qui implique que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $2^p < n < 2^{p+1}$ ,

$$d(x, g^{2^{p+1}-n} x) \leq d(x, gx) + (2^{p+1} - n - 1)\ell(g) + 4(p-1)\delta \quad ,$$

$$d(x, g^{n-2^p} x) \leq d(x, gx) + (n - 2^p - 1)\ell(g) + 4(p-1)\delta \quad ,$$

car les nombres  $2^{p+1} - n$  et  $n - 2^p$  sont tous deux compris entre 1 et  $2^p - 1$ . En reportant ces deux dernières inégalités dans (71), nous en déduisons que

$$\begin{aligned} d(x, g^n x) &\leq d(x, gx) + \text{Max} \left[ (2^{p+1} - n - 1)\ell(g) + 4(p-1)\delta; (n-1)\ell(g) + 2(2p-1)\delta \right] + 2\delta \\ &\leq d(x, gx) + \text{Max} [2^{p+1} - n - 1, n-1] \ell(g) + 4p\delta \leq d(x, gx) + (n-1)\ell(g) + 4p\delta \quad , \end{aligned}$$

où la dernière inégalité découle du fait que  $n-1 \geq 2^p \geq 2^{p+1} - n$ . Ceci prouve que, si la propriété  $(\mathcal{P}_k)$  est vérifiée pour tous les  $k \leq p-1$ , alors la propriété  $(\mathcal{P}_p)$  est vérifiée, ce qui prouve la propriété  $(\mathcal{P}_p)$  pour tous les  $p \in \mathbb{N}^*$  et, en y joignant (ii), achève de démontrer (iii).  $\square$

**Lemme 8.19.** Soit  $(X, d)$  un espace  $\delta$ -hyperbolique et  $g$  une isométrie de  $(X, d)$ , alors, pour tout  $x \in X$ , si  $m$  est le milieu d'une géodésique  $[x, gx]$ , on a

$$\text{Max} [0, d(x, g^2x) - d(x, gx)] \leq d(m, gm) \leq \text{Max} [0, d(x, g^2x) - d(x, gx)] + \delta \leq \ell(g) + 3\delta .$$

*Preuve :* La preuve consiste à adapter la preuve du Lemme 9.3.1 p. 101 de [CDP90]. Une fois choisis deux segments-géodésiques  $[x, gx]$  et  $[x, g^2x]$ , considérons le segment-géodésique  $[gx, g^2x]$  qui est l'image par  $g$  de  $[x, gx]$ , alors  $gm$  est le milieu de  $[gx, g^2x]$ . Appliquons le lemme d'approximation au triangle  $\Delta = [x, gx, g^2x]$  qui est la réunion de ces trois segments géodésiques. Notons  $(T_\Delta, d_T)$  le tripode métrique associé, dont les longueurs des branches d'extrémités  $f_\Delta(x)$ ,  $f_\Delta(gx)$  et  $f_\Delta(g^2x)$  sont notées  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ . Notons  $c$  le point central de branchement de ce tripode.

Le fait que l'application  $f_\Delta$  soit une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)) implique que

$$\alpha + \beta = d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(gx)) = d(x, gx) = d(gx, g^2x) = d_T(f_\Delta(gx), f_\Delta(g^2x)) = \beta + \gamma ,$$

donc que  $\gamma = \alpha$ ; cette même propriété implique aussi que

$$d_T(f_\Delta(m), f_\Delta(x)) = d_T(f_\Delta(m), f_\Delta(gx)) = \frac{\alpha + \beta}{2} = d_T(f_\Delta(gm), f_\Delta(gx)) . \quad (72)$$

- Si  $\beta \geq \alpha$  (i. e. si  $d(x, g^2x) \leq d(x, gx)$ ), les égalités (72) impliquent que d'une part les points  $f_\Delta(m)$  et  $f_\Delta(gm)$  appartiennent tous deux à la branche  $[c, f_\Delta(gx)]$  du tripode et que d'autre part les points  $f_\Delta(m)$  et  $f_\Delta(gm)$  sont à la même distance de l'extrémité  $f_\Delta(gx)$ , donc sont confondus; d'après le lemme d'approximation 8.3 (i), ceci implique que  $0 \leq d(m, gm) \leq \delta$ .
- Si  $\beta < \alpha$  (i. e. si  $d(x, g^2x) > d(x, gx)$ ), alors les égalités (72) impliquent que les points  $f_\Delta(m)$  et  $f_\Delta(gm)$  appartiennent respectivement aux branches  $[c, f_\Delta(x)]$  et  $[c, f_\Delta(g^2x)]$  du tripode; le fait que  $f_\Delta$  soit une isométrie en restriction à chacun des côtés de  $\Delta$  (cf. le Lemme 8.1 (i)) et le Lemme d'approximation 8.3 (i) permettent d'en déduire que

$$\begin{aligned} d(x, g^2x) - d(x, gx) &= \alpha - \beta = d_T(f_\Delta(x), f_\Delta(g^2x)) - d_T(f_\Delta(m), f_\Delta(x)) - d_T(f_\Delta(gm), f_\Delta(g^2x)) \\ &= d_T(f_\Delta(m), f_\Delta(gm)) . \end{aligned}$$

Le Lemme d'approximation 8.3 (i) permet d'en déduire que

$$\begin{aligned} d(x, g^2x) - d(x, gx) &\leq d_T(f_\Delta(m), f_\Delta(gm)) \leq d(m, gm) \\ &\leq d_T(f_\Delta(m), f_\Delta(gm)) + \delta \leq d(x, g^2x) - d(x, gx) + \delta , \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve des deux premières inégalités du Lemme 8.19, la troisième inégalité découle alors de la deuxième et du Lemme 8.18 (i).  $\square$

**Lemme 8.20.** Soit  $g$  n'importe quelle isométrie non triviale d'un espace  $\delta$ -hyperbolique géodésique  $(X, d)$ , alors

$$(i) \quad \ell(g) \leq s(g) \leq \ell(g) + \delta ,$$

(ii) si  $s(g) > \delta$ , pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ , on a la propriété :

$$(\mathcal{Q}_p) \quad : \quad \forall x \in X \quad d(x, g^{2^p}x) \geq d(x, gx) + (2^p - 1)(s(g) - \delta)$$

(iii) si  $s(g) > 3\delta$ , pour tout  $x \in X$ , la suite  $(d(x, g^n x))_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante.

*Preuve de (ii) :* Notons  $m_x$  le milieu d'une géodésique  $[x, gx]$ . Si  $s(g) > \delta$ , on a  $d(m_x, gm_x) > \delta$  et le Lemme 8.19 prouve alors que

$$\forall x \in X \quad s(g) - \delta \leq d(m_x, gm_x) - \delta \leq d(x, g^2x) - d(x, gx) . \quad (73)$$

Nous allons démontrer par récurrence la propriété  $(\mathcal{Q}_p)$ , dont un corollaire immédiat est

$$s(g^{2^p}) - \delta \geq 2^p (s(g) - \delta) . \quad (74)$$

La propriété  $(\mathcal{Q}_p)$  est vérifiée quand  $p = 1$  d'après (73), supposons-la vérifiée jusqu'à l'ordre  $p$ , alors on en déduit que son corollaire (74) est aussi vérifié jusqu'à l'ordre  $p$ , en particulier on a  $s(g^{2^p}) > \delta$  et on peut appliquer l'inégalité (73), puis la propriété  $(\mathcal{Q}_p)$  et son corollaire, ce qui donne :

$$d(x, g^{2^{p+1}}x) \geq d(x, g^{2^p}x) + s(g^{2^p}) - \delta \geq d(x, gx) + (2^{p+1} - 1)(s(g) - \delta) ;$$

ceci prouve que  $(\mathcal{Q}_p) \implies (\mathcal{Q}_{p+1})$ , et donc que la propriété  $(\mathcal{Q}_p)$  est vérifiée pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$ .

*Preuve de (i) :* La démonstration du fait que  $\ell(g) \leq s(g)$  a été donnée après les Définitions 8.17 de ces deux notions. Démontrons maintenant que  $s(g) \leq \ell(g) + \delta$  : si  $s(g) \leq \delta$ , cette inégalité est trivialement vérifiée, nous nous placerons donc dans le cas où  $s(g) > \delta$ , ce qui nous permet d'appliquer la propriété  $(\mathcal{Q}_p)$ , dont on déduit :

$$\ell(g) = \lim_{p \rightarrow +\infty} 2^{-p} d(x, g^{2^p}x) \geq s(g) - \delta .$$

*Preuve de (iii) :* Remarquons que l'hypothèse  $s(g) > 3\delta$  implique (d'après (ii)) que  $\ell(g) > 2\delta$ , donc que  $g$  est une isométrie hyperbolique. En appliquant l'inégalité (73), puis la propriété du quadrilatère (Lemme 8.3 (iv)), nous obtenons :

$$\begin{aligned} d(x, g^{n+1}x) + d(x, gx) + s(g) - \delta &\leq d(x, g^{n+1}x) + d(x, g^2x) = d(x, g^{n+1}x) + d(g^n x, g^{n+2}x) \\ &\leq \text{Max} [d(x, g^n x) + d(g^{n+1}x, g^{n+2}x), d(x, g^{n+2}x) + d(g^n x, g^{n+1}x)] + 2\delta . \end{aligned}$$

Posons  $d_n = d(x, g^n x)$ , nous en déduisons que  $d_{n+1} \leq \text{Max} [d_n, d_{n+2}] + 3\delta - s(g) < \text{Max} [d_n, d_{n+2}]$  lorsque  $s(g) > 3\delta$ . Comme  $d_1 < d_2$  par l'inégalité (73), nous en déduisons que la suite  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement croissante.  $\square$

## 8.5 Sous-groupes élémentaires

Dans cette section on s'intéresse aux sous-groupes *discrets* d'isométries  $G$  d'un espace Gromov-hyperbolique  $(X, d)$ . Une classification de ces groupes a été esquissée par M. Gromov [Gro87] (voir aussi [DSU17], [CCMT15]), en utilisant leur ensemble limite  $LG$  (i. e. l'ensemble des points d'accumulation d'une orbite quelconque de l'action  $G$  sur  $X$ ) ; il les regroupe dans les catégories suivantes<sup>24</sup> :

- les groupes *elliptiques* (aussi dits *bornés*) : les groupes finis, dont toutes les orbites sont donc bornées ;
- les groupes *paraboliques* ou (selon la terminologie originale) *horocycliques* : groupes infinis dont l'ensemble limite  $LG$  est réduit à un point ; un groupe parabolique ne contient donc que des éléments paraboliques ou elliptiques<sup>25</sup>.
- les groupes "*lineal*" : les groupes dont l'ensemble limite  $LG$  contient exactement 2 points ; un groupe "*lineal*" ne contient donc que des éléments hyperboliques ou elliptiques (voir par exemple la sec. 3.4.2 de [Cou16] pour une preuve).

<sup>24</sup>. On ne considère ici que les groupes agissant discrètement ; on négligera donc les groupes *focaux*, groupes non-dénombrables ayant un point fixe global dans  $\partial X$ , mais qui n'agissent pas de manière discrète.

<sup>25</sup>. En effet, pour tout groupe  $G$  contenant une isométrie hyperbolique  $g$ , les points fixes  $g^+$  et  $g^-$  de cette isométrie sont des points d'accumulation de la suite  $(g^k x)_{k \in \mathbb{Z}}$ , donc des points de l'ensemble limite  $LG$ .



- les groupes de *type général* : les groupes  $G$  dont l'ensemble limite  $LG$  a plus que deux points (et est donc infini), ce qui équivaut à dire<sup>26</sup> que  $G$  contient aux moins deux éléments hyperboliques (que nous noterons ici  $g_1$  et  $g_2$ ) dont les ensembles de points fixes respectifs  $F(g_1)$  et  $F(g_2)$  sont disjoints.

Dans les trois premiers cas, l'action de  $G$  sur  $X$  est dite *élémentaire*; on appelle également élémentaire un groupe hyperbolique dont le bord contient au plus deux points.

Notons que, si  $G$  est élémentaire, pour tout élément *non elliptique*  $g \in G$ , l'ensemble  $F(g)$  des points fixes de  $g$  coïncide<sup>27</sup> avec l'ensemble limite  $LG$  de  $G$ .

Dans les deux propositions qui suivent, nous allons rappeler les propriétés basiques des groupes élémentaires, qui résultent presque immédiatement de la classification ci-dessus; ces résultats sont bien connus des spécialistes, ils seront donc rappelés ici avec une simple référence, sans démonstrations. Nous utiliserons ces résultats seulement dans le cas (plus simple) où le groupe  $G$  est sans torsion donc, en vertu de notre définition de la discrétude de l'action de  $G$ , sans élément agissant de manière elliptique.

**Proposition 8.21.** (Actions élémentaires) *Soit  $G$  un groupe discret d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$  :*

- (i) *si  $\gamma_1, \gamma_2 \in G$  sont deux éléments hyperboliques et ont un point fixe commun, alors ils ont leurs deux points fixes en commun, i.e.  $\{\gamma_1^-, \gamma_1^+\} = \{\gamma_2^-, \gamma_2^+\}$  ;*
- (ii) *si  $\gamma \in G$  est un isométrie hyperbolique, le sous-groupe  $G_\gamma$  de  $G$ , formé des éléments qui laissent globalement invariant l'ensemble  $\{\gamma^-, \gamma^+\}$  des points fixes de  $\gamma$ , est le sous-groupe virtuellement cyclique maximal de  $G$  contenant  $\gamma$  ; si de plus  $G$  est sans torsion, alors  $G_\gamma$  est l'ensemble des  $\gamma \in G$  qui fixent les deux points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  ;*
- (iii) *si  $G$  est moyennable (e. g. virtuellement nilpotent), alors l'action de  $G$  est élémentaire ;*
- (iv) *si l'action de  $G$  est élémentaire et si  $G$  ne contient pas d'éléments paraboliques, alors  $G$  est virtuellement cyclique ;*
- (v) *si le groupe  $G$  est virtuellement nilpotent, ses éléments non elliptiques sont tous de même type (soit tous paraboliques, soit tous hyperboliques) et ont tous même ensemble de points fixes.*

Pour la preuve des énoncés (i) et de (ii) de la Proposition 8.21, la référence est [Cou16], Proposition 3.21 et Proposition 3.27; remarquons cependant que cette dernière Proposition ne démontre que la première partie de l'énoncé (ii), la seconde partie de (ii) découlant trivialement de la première car l'absence d'éléments elliptiques (due à la discrétude et à l'absence de torsion, voir la Remarque 8.14 (i)) assure qu'il n'existe pas d'élément  $g \in G$  qui échange les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  : en effet, dans le cas contraire,  $g^2$  fixerait les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  (et serait par conséquent hyperbolique), donc  $g$  fixerait les points  $\gamma^-$  et  $\gamma^+$  d'après la Remarque 8.14 (ii).

La partie (iii) découle du fait que, si l'action de  $G$  n'est pas élémentaire,  $G$  contient un sous-groupe libre (cf. [Del96], [Kou98], [CDP90] section 11 Prop. 3.1 et [DSU17] Prop. 10.5.4), ce qui implique que  $G$  n'est pas moyennable.

Le point (iv) se déduit de la classification donnée en début de la sous-section 8.5 et revient à dire qu'un groupe lineal  $G$  est virtuellement cyclique, car inclus dans l'ensemble des  $\gamma \in G$  qui laissent  $LG$  globalement invariant, la virtuelle cyclicité découlant alors de la Proposition 3.27

26. Si on suppose que les deux ensembles de points fixes  $F(g_1)$  et  $F(g_2)$  correspondant à deux éléments  $g_1$  et  $g_2$  de  $G$  sont disjoints, une conséquence triviale est que l'ensemble limite  $LG$  contient plus de deux points (puisqu'il contient  $F(g_1) \cup F(g_2)$ ) ; la réciproque est prouvée par exemple dans [Cou16], lemma 3.7. Le fait que, si  $\#(LG) > 2$ , alors  $LG$  est infini non-dénombrable, est énoncé dans [Gro87], section 3.5, théorème p.194; on en trouvera une preuve dans [DSU17], Proposition 6.2.14.

27. En effet, pour tout groupe  $G$  parabolique (resp. lineal), pour toute isométrie parabolique (resp. hyperbolique)  $g \in G$  les points fixes de  $g$  sont les points d'accumulation de la suite  $(g^k x)_{k \in \mathbb{Z}}$ , donc des points de l'ensemble limite  $LG$  ; ceci prouve que  $F(g) \subset LG$  ; de plus, comme  $F(g)$  et  $LG$  ont le même nombre d'éléments, on a  $F(g) = LG$ .

de [Cou16].

Le point (v) découle immédiatement du point (iii), de la classification, et de la remarque qui la suit qui prouve que, dans tout groupe élémentaire, l'ensemble  $LG$  est l'ensemble des points fixes de tout élément non elliptique.

Dans le cas cocompact, on a le résultat classique suivant :

**Proposition 8.22.** (Actions cocompactes, cf. [Gd90], [CDP90], [BH99])

Soit  $G$  un groupe discret cocompact d'isométries d'un espace hyperbolique  $X$  :

- (i)  $G$  est un groupe de type fini, Gromov-hyperbolique ;
- (ii)  $G$  ne contient pas d'isométries paraboliques ;
- (iii)  $G$  est élémentaire si et seulement si l'espace  $X$  est élémentaire ;
- (iv)  $G$  est élémentaire si et seulement si il est virtuellement cyclique ;
- (v) tout sous-groupe virtuellement nilpotent de  $G$  est virtuellement cyclique.

Pour le point (i), la référence est (par exemple) [Gd90] : en effet, dans le cas cocompact, l'espace et le groupe sont quasi-isométriques, donc l'espace est Gromov-hyperbolique si et seulement si le groupe l'est<sup>28</sup>.

Pour le point (ii), l'absence d'éléments agissant de manière parabolique sur un groupe Gromov-hyperbolique est démontrée dans [Gd90] (section 8, théorème 29) et dans [CDP90] (section 9, théorème 3.4). Pour les groupes agissant de manière cocompacte sur un espace hyperbolique  $(X, d)$  le fait que la preuve se ramène au cas des groupes hyperboliques fait partie du folklore et se déduit principalement du fait que l'espace et le groupe sont quasi-isométriques<sup>29</sup>.

Le point (iii) se déduit du fait que, dans le cas cocompact, l'ensemble limite  $LG$  est le bord idéal  $\partial X$  tout entier.

Le point (iv) est conséquence de la Proposition 8.21 et des points (ii),(iii) précédents.

Le point (v) se déduit de (i), qui prouve que  $G$  est un groupe hyperbolique, et de [Gd90] (section 8, Théorème 37, p. 157) qui prouve qu'un sous-groupe virtuellement nilpotent infini  $G'$  de  $G$  contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini.

---

28. Remarquons que deux systèmes finis de générateurs d'un même groupe définissent deux distances algébriques équivalentes (à une constante multiplicative près, dépendant des deux systèmes générateurs) ; en revanche, le rapport entre les constantes d'hyperbolicité  $\delta$  et  $\delta'$  associées à ces deux systèmes générateurs étant égal à la même constante multiplicative, il n'est pas contrôlé.

29. Plus précisément, le caractère d'une isométrie  $g$  de  $(X, d)$  (appartenant à  $G$ ) est déterminé par son action et ses points fixes sur  $\partial X$  mais, puisque le bord  $\partial G$  de  $G$  (pour la métrique des mots) s'identifie à  $\partial X$  via un homéomorphisme  $G$ -equivariant, le caractère de  $g$  est (de manière équivalente) déterminé par son action sur  $\partial G$ , il est donc forcément elliptique ou hyperbolique.

## Références

- [BCG03] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Un Lemme de Margulis sans courbure et ses applications. Prépublications de l'Institut Fourier, 183, 2003.
- [BCG11] Gérard Besson, Gilles Courtois, and Sylvestre Gallot. Uniform growth of groups acting on Cartan-Hadamard spaces. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 13(5) :1343–1371, 2011.
- [BGS85] Werner Ballmann, Mikhael Gromov, and Viktor Schroeder. Manifolds of nonpositive curvature. Progress in Mathematics, 61. Boston-Basel-Stuttgart : Birkhäuser. iv, 263 pp. SFr. 74.00 ; DM 88.00 (1985)., 1985.
- [BGT12] Emmanuel Breuillard, Ben Green, and Terence Tao. The structure of approximate groups. *Publ. Math., Inst. Hautes Étud. Sci.*, 116 :115–221, 2012.
- [BH99] Martin R. Bridson and André Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Berlin : Springer, 1999.
- [Bie11] L. Bieberbach. Über die Bewegungsgruppen der Euklidischen Räume. (Erste Abh.). *Math. Ann.*, 70 :297–336, 1911.
- [BK81] Peter Buser and Hermann Karcher. The Bieberbach case in Gromov's almost flat manifold theorem. Global differential geometry and global analysis, Proc. Colloq., Berlin 1979, Lect. Notes Math. 838, 82-93 (1981)., 1981.
- [BZ88] Yu.D. Burago and V.A. Zalgaller. *Geometric inequalities. Transl. from the Russian by A. B. Sossinsky. Transl. from the Russian by A.B. Sossinsky*. Berlin etc. : Springer-Verlag, transl. from the russian by a.b. sossinsky edition, 1988.
- [CCMT15] Pierre-Emmanuel Caprace, Yves Cornuier, Nicolas Monod, and Romain Tessera. Amenable hyperbolic groups. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 17(11) :2903–2947, 2015.
- [CDP90] Michel Coornaert, Thomas Delzant, and Athanase Papadopoulos. *Géométrie et théorie des groupes. Les groupes hyperboliques de Gromov. (Geometry and group theory. The hyperbolic groups of Gromov)*. Berlin etc. : Springer-Verlag, 1990.
- [Cou15] Gilles Courtois. Lemme de Margulis à courbure de Ricci minorée (d'après Vitali Kapovitch et Burkhard Wilking). In *Séminaire Bourbaki. Volume 2013/2014. Exposés 1074–1088*, pages 25–56, ex. Paris : Société Mathématique de France (SMF), 2015.
- [Cou16] Rémi B. Coulon. Quotient partiellement périodique de groupes agissant sur une espace hyperbolique. *Ann. Inst. Fourier*, 66(5) :1773–1857, 2016.
- [Del91] Thomas Delzant. Sous-groupes à deux générateurs des groupes hyperboliques. In *Group theory from a geometrical viewpoint. Proceedings of a workshop, held at the International Centre for Theoretical Physics in Trieste, Italy, 26 March to 6 April 1990*, pages 177–189. Singapore : World Scientific, 1991.
- [Del96] Thomas Delzant. Sous-groupes distingués et quotients des groupes hyperboliques. *Duke Math. J.*, 83(3) :661–682, 1996.
- [DSU17] Tushar Das, David Simmons, and Mariusz Urbański. *Geometry and dynamics in Gromov hyperbolic metric spaces : with an emphasis on non-proper settings*. Providence, RI : American Mathematical Society (AMS), 2017.
- [Gd90] Etienne Ghys and Pierre de la Harpe, editors. *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov. (On the hyperbolic groups à la M. Gromov)*. Boston, MA : Birkhäuser, 1990.
- [Gro78] M. Gromov. Manifolds of negative curvature. *J. Differ. Geom.*, 13 :223–230, 1978.
- [Gro87] M. Gromov. Hyperbolic groups. Essays in group theory, Publ., Math. Sci. Res. Inst. 8, 75-263 (1987)., 1987.
- [Gro07] Misha Gromov. *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces. Transl. from the French by Sean Michael Bates. With appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes. Edited by J. LaFontaine and P. Pansu. 3rd printing*. Basel : Birkhäuser, 3rd printing edition, 2007.

- [Kou98] Malik Koubi. Croissance uniforme dans les groupes hyperboliques. *Ann. Inst. Fourier*, 48(5) :1441–1453, 1998.
- [Mar75] G.A. Margulis. Discrete groups of motions of manifolds of non-positive curvature. Proc. int. Congr. Math., Vancouver 1974, Vol. 2, 21-34 (1975)., 1975.
- [Pap14] Athanase Papadopoulos. *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature. 2nd.* Zürich : European Mathematical Society (EMS), 2nd edition, 2014.
- [Rev08] Guillemette Reviron. Topological rigidity under the hypothesis of bounded entropy and applications. *Comment. Math. Helv.*, 83(4) :815–846, 2008.
- [Zas38] H. Zassenhaus. Beweis eines Satzes über diskrete Gruppen. *Abh. Math. Semin. Univ. Hamb.*, 12 :289–312, 1938.

G. BESSON, INSTITUT FOURIER, CNRS ET UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES, CS 40700, 38058 GRENOBLE CEDEX 09, FRANCE

*E-mail address* : `g.besson@univ-grenoble-alpes.fr`

G. COURTOIS, INSTITUT DE MATHÉMATIQUES DE JUSSIEU-PARIS RIVE GAUCHE, CNRS ET UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE, 4 PLACE JUSSIEU, 75232 PARIS CEDEX 09, FRANCE

*E-mail address* : `gilles.courtois@imj-prg.fr`

S. GALLOT, INSTITUT FOURIER, UNIVERSITÉ GRENOBLE ALPES, CS 40700, 38058 GRENOBLE CEDEX 09, FRANCE

*E-mail address* : `sylvestre.gallot@gmail.com`

A. SAMBUSETTI, DIPARTIMENTO DI MATEMATICA, SAPIENZA UNIVERSITÀ DI ROMA, PIAZZALE ALDO MORO 5, 00185 ROMA, ITALY

*E-mail address* : `sambuset@mat.uniroma1.it`