HAL
open science

Hypergraphes et Systèmes Complexes : application à la modélisation d'une situation d'enseignement et à l'analyse de discours argumentatifs

Jean-Jacques Salone

To cite this version:

Jean-Jacques Salone. Hypergraphes et Systèmes Complexes : application à la modélisation d'une situation d'enseignement et à l'analyse de discours argumentatifs. 8ème congrès de l'Union Européenne de Systémique, Jan 2011, Bruxelles, Belgique. hal-01671151

HAL Id: hal-01671151

https://hal.science/hal-01671151v1

Submitted on 21 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Hypergraphes et Systèmes Complexes : application à la modélisation d'une situation d'enseignement et à l'analyse de discours argumentatifs

Salone Jean-Jacques
Doctorant en Sciences de l'Éducation à l'Université de Provence - laboratoire ADEF UMR- ;
Ingénieur diplômé de l'Institut d'Optique Graduate school.
Professeur certifié de mathématiques au collège H. Margalhan, 13014 Marseille (France) ;
jjsan@free.fr

Résumé :
Comment représenter mathématiquement un système complexe ? Dans cet article des hypergraphes seront utilisés. Ce sont des ensembles de parties d'un ensemble plus large communément appelé l'Univers. Ils vont permettre d'aboutir à la modélisation d'une situation d'enseignement, puis de suivre les processus de validation des connaissances au travers des discours des enseignants et des apprenants.
Mots clés :
Hypergraphe, Système complexe, Situation d'enseignement, Validation des connaissances.

Abstract:
How to represent mathematically a complex system? In this paper, hypergraphs are used. These are sets of parts of a larger set commonly called the Universe. They will lead to the modeling of a teaching situation and then to follow the processes of knowledge validation through the discourses of teachers and learners.
Keywords:
Hypergraph, complex systems, teaching situation, knowledge validation.

La ***Théorie Générale des Systèmes,*** proposée par Von Bertalanffy consiste à envisager le monde comme un *système* d'***objets*** en ***relations*** les uns avec les autres. « Un système peut être défini comme un complexe d'éléments en interaction. » (1968/1993, p 53). Ce concept de système coïncide avec la notion mathématique d'***hypergraphe*** (Berge, 1987), un objet défini au sein de la ***Théorie des Ensembles***. Un hypergraphe n'est rien d'autre qu'un ensemble de parties d'un ensemble donné. Les éléments de ce dernier ensemble sont en fait les objets de la Théorie Générale des Systèmes, et les parties de l'hypergraphe en sont les relations.
Mais les choses ne sont pas si simples : une relation donnée peut être l'objet d'une autre relation, plus générale, et un objet donné englobe très souvent d'autres objets constitutifs en interaction. La disjonction entre objets et relations laisse ainsi place à une ***dualité entre objets et relations*** et à un concept de ***fractalité*** qui consiste à voir l'Univers comme une imbrication de toutes ces choses, objets (éléments) ou relations (parties).
Ces deux concepts de dualité et de fractalité s'expriment aisément en termes de propriétés des hypergraphes. Même si un hypergraphe possède bien d'autres propriétés, nous n'en évoquerons que quelques unes ici qui permettront la modélisation de situations d'enseignement.

Mais avant de pouvoir envisager quelque modélisation mathématique que ce soit d'une situation d'enseignement, il est nécessaire de définir un ensemble initial qui servira de cadre général. Que peut-il être ? La Théorie Anthropologique du Didactique de Chevallard aborde cette question dans le cas particulier de l'enseignement des mathématiques. Elle « situe l'activité mathématique, et donc l'activité d'étude en mathématiques, dans l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales » (1998, p. 91). On est donc déjà dans un système très vaste incluant les êtres humains,

leurs actions et leurs institutions. Nous le nommerons ***Univers*, U**. Que cet Univers existe en soi ou qu'il n'existe qu'au travers de « l'expérience de l'acteur intervenant dans un univers qu'il perçoit actif » (Le Moigne, 2005, p. 8), ce ne sera pas un dilemme tranché ici. L'Univers n'existe dans cet article que mathématiquement, en tant qu'hypergraphe. En son sein vont pouvoir être définis des concepts d'action et d'humanité qui à leur tour donneront sens aux concepts de connaissance et d'ignorance, puis à celui d'argumentation dans une situation d'enseignement.

Commençons donc par l'Univers. Il est constitué d'un doublet associant l'***ensemble des objets* S** et l'***ensemble des relations* R.**

<u>Axiome 1 (onto-phénoménologique)</u> : $\exists$ **Univers =** U = {**choses**}

(i) : $\exists$ S = {**objets**}, $S \neq \emptyset$,

(ii) : $\exists$ R = {**relations**}, $R \neq \emptyset$,

(iii) : $U = R \cup S$

Ramis, Deschamps & Odoux (1983, p. 5) précisent la suite de la procédure de modélisation : « une théorie mathématique est définie par la donnée de l'univers, ou collection des termes de la théorie ; des axiomes de la théorie ou assertions admises comme étant vraies ; des règles régissant des signes de la théorie ; des schémas permettant de déduire des relations vraies, dites théorèmes, d'axiomes ou d'autres relations vraies. » Proposons donc quelques autres axiomes, les axiomes mathématiques énoncés par les auteurs sus-cités étant sous-entendus.
On acceptera en premier lieu que l'Univers n'est pas un ensemble statique mais, qu'au contraire, des changements se produisent en son sein, aussi bien dans l'ensemble des objets que dans l'ensemble des relations. Ce postulat équivaut à lui associer une structure temporelle, c'est à dire un ensemble T, appelé ***Temps***, dont les éléments seront ici strictement ordonnés. Ce Temps permet alors de modéliser l'Univers comme une succession d'***états*** associés à des ***instants.*** Dans l'écriture formelle ci-après, et par la suite, nous noterons o = o(x) la dépendance d'une chose o par rapport à une autre chose x.

<u>Axiome 2 (dynamique):</u> $\exists$ **Temps** = T = {**instants**},

(i) : T est ordonné

(ii) : $U = U(t \in T)$

(iii) $\forall (t,t') \in T^2, t \neq t' \Leftrightarrow U(t) \neq U(t')$

On notera $\delta U(t,t')$ les variations de U entre t et t' : $\delta U(t,t') = U(t) \setminus U(t') \cup U(t') \setminus U(t)$.

Puisqu'il est possible que tout ne soit pas que du hasard, il est légitime mathématiquement de distinguer parmi toutes les choses celles qui influencent les évolutions de l'Univers ou de ses constituants. C'est la question de l'***action***. Cela ne signifie nullement que l'Univers soit déterministe. Bien au contraire. Les choses peuvent très bien être récursives ou aléatoires. Nous définirons les ***actions*** comme étant des relations qui traduisent des changements d'état non fortuits de l'Univers ou des choses qu'il contient. Une action étant un sous-hypergraphe de l'Univers, elle a comme lui des parties internes : les choses qu'elle concerne, les ***acteurs***, et les variations de l'Univers qui dépendent de ces acteurs, ou plus précisément les variations des états de ces derniers.

Définition 1 : $\forall$ r $\in$ R, r = **action** :

$\exists$ (t,t') $\in$ T², t' $\neq$ t,
$\exists$ {**acteurs** $\in$ U},
tels que :
δU(t,t') est en relation par r avec {acteurs}

On notera A l'ensemble des actions :
A = { r $\in$ R, r = action }

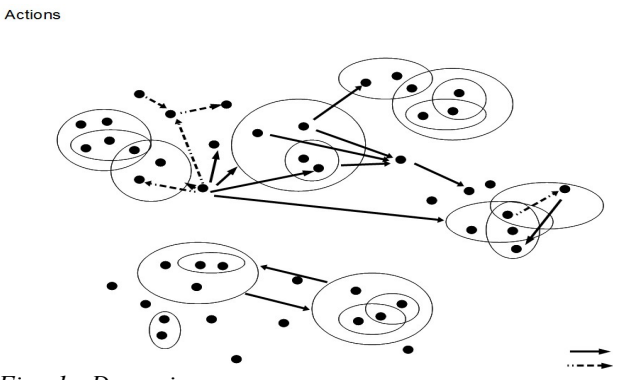

Fig. 1 : Dynamique

Une telle définition procède d'un principe mathématique général qui consiste à définir des regroupement de choses (des classes) à partir de leurs propriétés. Ainsi la dynamique de l'Univers vient d'induire la définition de deux ***natures*** de choses, les actions et les acteurs. Les natures des choses sont appelées en mathématiques des ***relations d'équivalence.*** Elles ont les propriétés de symétrie, de réflexivité et de transitivité. En termes d'ensembles ou d'hypergraphes, elles sont traduites par des relations d'appartenance et d'inclusion.
Parmi ces natures possibles des choses, il en est une autre qui est difficilement réfutable, l'humanité. L'Humanité définit un sous-hypergraphe de l'Univers que nous appellerons le ***système subjectif,*** **H.** Sa partie complémentaire sera nommée le ***système objectif,*** **O.** Par la suite on nommera ***sujets*** les êtres humains et ***objets*** les autres choses (restriction du sens initial). Les sujets interviennent dans de nombreuses actions. L'ensemble des ***actions humaines*** sera nommé la ***Praxis Π***.

Axiome 2 (anthropologique) :
$\exists$ **Humanité** = H = {**sujets**} $\in$ P(S)

On notera :
O = **Système objectif** = {**objets**} = S \ H

Définition 2 : Π = **Praxis** = { r $\in$ A, $\exists$ h $\in$ H, h $\in$ S(r), h : **acteur** }

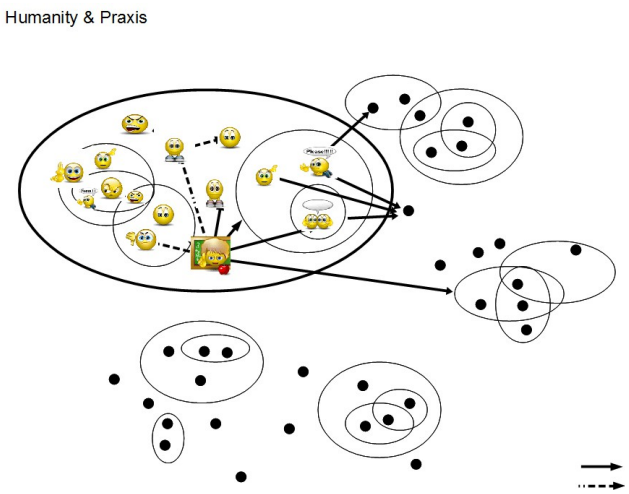

Fig. 2 : Humanité et Praxis

Ces actions humaines peuvent avoir des ***finalités,*** ou au contraire être fortuites (dans ce cas on dira que l'ensemble des finalité est vide). Ces finalités de l'action expriment une dépendance plus grande que celle initialement définie entre l'action et les variations des états de l'Univers : elles excluent ou privilégient des états ultérieurs. Mathématiquement, cela découle de l'existence de trois types de solutions pour les systèmes d'équations temporelles susceptibles de décrire l'évolution d'un système dynamique : des solutions stables atteintes asymptotiquement, des solutions périodiques, et des solutions chaotiques et instables (Von Bertalanffy, 1968/1993, p. 73). L'axiome téléologique ainsi proposé n'exprime que la capacité des sujets à paramétrer des actions en fonction d'un état final possiblement stable ou oscillatoire.
Axiome 3 (téléologique) : $\exists$ F = {**finalités**} $\in$ P(R).

A son tour, l'ensemble des actions humaines contient un sous ensemble qui sera fortement intéressant pour la suite. C'est celui des ***actions de communication***. Ces actions sont caractérisées par la création par certains sujets de nouveaux objets que l'on nommera des ***discours***. Un discours est une suite temporellement bornée d'actions humaines. Il est le fruit de relations dissymétriques dans lesquelles les acteurs sont séparables en ***auteurs (ou émetteurs)*** et ***récepteurs.*** Seul les auteurs créent les discours. Les récepteurs y sont uniquement reliés par leur implication dans les actions élémentaires. Mais ces deux natures de sujets ne sont pas forcément des propriétés constantes de ceux qui en sont qualifiés. Sur la durée d'un discours, auteurs et récepteurs ne conservent en général leur qualité que sur certains intervalles temporels. Ils partagent en outre des ***langages,*** c'est-à-dire des ensembles de relations entre les choses de l'Univers et les éléments de leurs discours. Les langages permettent de faire en sorte que les actions de communications soient efficaces car conduisant vraiment à un changement d'état de l'Univers. Enfin, un discours est associé à des média, c'est-à-dire à des objets qui le supportent au sens physique. Là encore il est difficile de définir complètement ce qu'est un ***médium***, mais les exemples en sont nombreux et bien connus. On soulignera encore que sans langage commun aux sujets il n'y a pas de discours, et *vice versa* : les langages n'existent que pour permettre l'existence des discours. Il en va de même pour le concept de médium. D'où l'axiome suivant qui lie ces trois concepts, discours, langage et médium, en un seul triplet :

<u>Axiome 4 (linguistique)</u> : $\exists$ L = {(discours, langage, médium)} $\in$ P(O) x P(O) x P(O)

Nous pouvons alors définir les actions de communication :

<u>Définition 3</u> : $\forall$ r $\in \Pi$, r = **action de communication** :

r = S(r) $\cup$ R(r) $\cup$ {d(r)} – **objets internes, relations internes et durée** ;

S(r) = H(r) $\cup$ O(r) – **sujets acteurs et objets:**

O(r) = L(r) $\cup$ O*(r) – **discours et autres objets** ;

L(r) = {**discours**} $\cup$ {**langages**} $\cup$ {**média**} ;

H(r) = {**auteurs**} $\cup$ {**récepteurs**} ;

R(r) = F(R) $\cup$ R*(r) – **finalités et autres relations**.

Certaines actions de communication ont pour finalité de décrire l'Univers et ses parties. Leurs discours sont usuellement appelés des ***connaissances***. Leur ensemble est ***la Connaissance.*** La Connaissance admet une partie supplémentaire : ***l'Ignorance***. Là encore, ces deux natures de discours sont difficilement définissables, et le paradoxe formulé par Platon (-390/2000, p. 48) révèle sa pertinence : « il n'est pas possible à l'homme de chercher ni ce qu'il sait ni ce qu'il ne sait pas. Car il ne saurait chercher ce qu'il sait, puisqu'il le sait, et que dans ce cas il n'a nul besoin de chercher ; ni ce qu'il ne sait pas, puisqu'il ne sait même pas ce qu'il doit chercher. » Nous suivrons donc son conseil : « tu auras la sagesse de ne pas croire savoir ce que tu ne sais pas. » (Platon, -370/1994, pp. 302-303), et nous ne définirons la Connaissance que par un axiome postulant son existence :

<u>Axiome 5 (gnoséologique)</u> :

$\exists$ **Connaissance** = C = {**objets de connaissances**} $\in$ P(U) :

$\forall$ c $\in$ C, c = { o $\in$ U} $\cup$ {(discours, langage, médium)}

<u>Définition 4:</u> **Ignorance** = U \ C $\neq \emptyset$

Mais Connaissance et Ignorance ne sont pas deux natures disjointes des choses. Elles sont relatives aux sujets, ou plus généralement aux ***institutions*** au sein desquelles ils agissent. Ces dernières sont fondées sur des ***enjeux*** (un cas particulier de finalités) qui délimitent le champ des connaissances

reconnues et le sens de l'action conjointe des sujets. Elles rejettent les discours non conformes dans l'Ignorance, ou plus précisément à l'intersection de l'Ignorance et de la Connaissance, dans les ***croyances.*** Les croyances ont parfois leurs propres discours, les ***opinions***. Leur importance justifie l'introduction d'un nouvel ensemble les regroupant, ***la Doxa, Δ.*** La Doxa influence de façon souvent implicite une grande partie des actions humaines. En fait, rien n'y échappe, même pas les mathématiques et la logique (Gödel,1931). On appellera ***logos*** des discours relatifs aux objets de connaissance qui ne sont pas reliés à des croyances, et on regroupera ces objets en un ensemble, le ***Logos.***

<u>Définition 5</u> : **Institution** = groupe ∪ {**enjeux**}, avec groupe ∈ P(H) et {enjeux} ∈ P(F).

<u>Définition 6 :</u>
Doxa = Δ = {**croyances**} = C ∩ Ignorance
∀ c ∈ Δ, c = { o ∈ U} ∪ {(discours = **opinion**, langage, médium)}

<u>Définition 7</u> :
Logos = Λ = C \ Ignorance
∀ c ∈ Λ, c = { o ∈ U} ∪ {(discours = **logos**, langage, médium)}

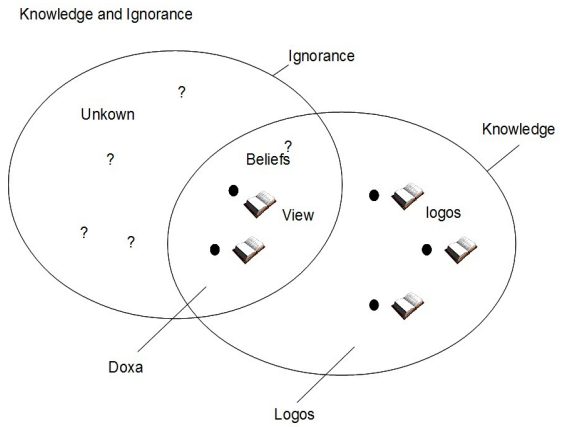

Fig. 3 : Connaissance et Ignorance

A ce niveau de modélisation, les choses commencent à devenir ***complexes***. Heureusement la Théorie des Hypergraphes montre qu'il est toujours possible d'extraire des structures organisées d'un univers complexe. C'est un théorème (Salone, 2011) dont la démonstration repose sur la notion mathématique de connexité : les relations de R définissent des chemins qui, de proche en proche, relient les choses entre elles. Ainsi des ***structures horizontales*** apparaissent, correspondant à des parties qui se chevauchent et dans lesquelles on peut relier des choses à d'autres en suivant ces 'chemins' relationnels. Ces structures se regroupent par coalescence pour délimiter les 'composantes connexes' de l'hypergraphe, des sous-hypergraphes disjoints les uns des autres. Ces composantes connexes renferment à leur tour d'autres hypergraphes emboîtés les uns dans les autres à la manière de poupées russes, révélant des ***structures verticales*** fractales.

La Connaissance est ainsi structurable horizontalement en :

- ***Connaissance pratique.*** C'est la la connaissance des actions humaines. C'est le Logos de la Praxis. Chevallard (1996) la nomme ***technologie***, et Vergnaud (1996/2004) les ***savoirs d'action***, ou les ***savoir-faire***. Pour Kant (1781/2006, p. 94), ce sont les connaissances empiriques, celles qui « possèdent leur source a posteriori, c'est-à-dire dans l'expérience ».
- La ***Connaissance propositionnelle.*** C'est celle qui concernent le Vrai et le Faux à propos des choses de l'Univers à l'exclusion des actions. C'est la partie complémentaire de la Connaissance pratique. Ses corpus peuvent concerner les structures, les états et les évolutions. C'est ce que Chevallard (1996) appelle la ***théorie***, ou que Vergnaud (1996/2004) appelle les ***savoirs savants***. Pour Kant, c'est une connaissance « indépendante de l'expérience et même de toutes les impressions des sens. On nomme de semblables connaissances *a priori...* » (Kant, 1781/2006, pp. 93-94). Plus précisément, c'est ce qu'il appelle les connaissances pures, « celles auxquelles absolument rien d'empirique n'est mêlé. » (*Ibid.*).

La Doxa, le Logos et la Praxis apparaissent donc finalement comme trois parties de l'Univers déterminantes pour le structurer de façon intelligible. Leur triplet sera nommé une ***praxéologie.***

Définition 8 :
Connaissance pratique = $\theta = \Lambda \cap \Pi$

Définition 9 :
Connaissance propositionnelle = $\Theta = \Lambda \setminus \theta$.

Définition 10 : **Praxéologie**
$DLP = (U \cap \Delta) \cup (U \cap \Lambda) \cup (U \cap \Pi)$

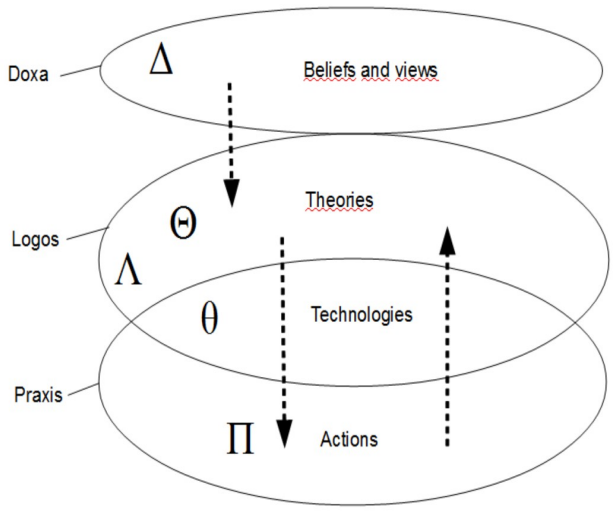

Fig. 4 : Praxéologie

On notera alors DLP(I) une ***praxéologie relative*** à une institution I donnée, et Δ (I), Λ(I), Π(I), Θ(I) et θ(I) ses composantes.

Une ***situation*** pourra maintenant être définie comme une partie de l'Univers sur une durée donnée et en un lieu précisé où un certain nombre de sujets, chacun avec sa praxéologie, agissent ensemble sur un certain nombre d'objets, dans le cadre d'une praxéologie institutionnelle, et avec un enjeu particulier. C'est ce qu'il est convenu d'appeler une ***situation du monde :***

Définition 11 : S:= **situation du monde** = $I \cup O(S) \cup \{DLP(h), h \in I\} \cup DLP(I)$
où I est l'institution regroupant les acteurs de la situation et qui légitime les enjeux de leur action commune, O(S) est la partie du système objectif O qui est en jeu, et DLP(I) et DLP(h) sont les praxéologies relatives à I où à l'un de ses membres h.

Parmi ces situations, celles dont l'enjeu est d'accroître les Logos et les Praxis de certains sujets non forcément membres seront qualifiées de ***situations didactiques (ou d'enseignement)***. Leurs enjeux, appelés ***enjeux didactiques***, sont médiatisés par un ***contrat didactique.*** C'est un discours réglant les relations entre les sujets et les objets. « La mise en relation d'un individu et d'un savoir dans le cadre d'une institution se fait sous un contrat et dans le cadre de situations institutionnellement déterminées. La formation du rapport au savoir, telle que la gère l'institution, suppose l'entrée de l'individu dans le contrat et sa traversée des situations que celle-ci établit. » (Chevallard, 1988, p.100) Le contrat introduit toujours une relation dissymétrique entre les sujets, la ***relation didactique.*** Elle sépare les sujets en ***apprenants*** X et ***enseignants*** Y. Dans une situation didactique très classique, il y a un seul enseignant, le *professeur*, et tous les autres sujets constituent le *groupe classe*. Mais dans des situations plus collaboratives, comme le monitorat, certains apprenants peuvent être des enseignants. Le contrat didactique structure par ailleurs le sous système objectif de la situation, en commençant par attribuer un statut d'objets à enseigner/apprendre à certains objets de connaissance. Il trie aussi les objets matériels selon qu'ils sont utilisables ou non dans la situation par les enseignants ou les apprenants. Se différencie ainsi un sous système objectif, le ***milieu didactique*** M, regroupant à la fois des objets de connaissance et des objets matériels. On arrive finalement à une écriture formelle d'une situation d'enseignement:

Définition 12: S = **situation d'enseignement** :
S = I $\cup$ O(S) $\cup$ {DLP(h), h $\in$ I} $\cup$ DLP(I) où
I:= **institution didactique** = **groupe** $\in$ P(H) $\cup$ {**enjeux**} $\in$ P(F) où
groupe = X $\cup$ Y $\cup$ Z avec X={**apprenants**} Y={**enseignants**} Z= groupe / (X $\cup$ Y)
$\exists$ K(S) $\in$ Λ(I), K(S):= **Contrat didactique** = discours({**enjeux didactiques**})
O(S) = M(S) $\cup$ O(S)/M(S) où
M(S) := **milieu didactique de la situation**
M(S) = {**objets à apprendre/enseigner**} $\cup$ {**objets matériels**)

Une situation d'enseignement étant dans un Univers dynamique, son évolution est envisageable. Son unité spatio-temporelle réside alors sur des éléments particuliers du contrat didactique qui en définissent des ***invariants systémiques*** (comme les regroupements d'apprenants en classes ou d'enseignants en équipes). Naît ainsi le ***système didactique,*** évolution d'une situation d'enseignement dans l'espace et le temps :

Définitions 13 : **système didactique** = $\bigcup_{d,l}$ { S(d,l), K(S) $\supset$ **invariants systémiques** }

L'enjeu essentiel d'un système didactique étant l'évolution des Logos et des Praxis relatifs aux apprenants, il devient intéressant d'analyser comment les connaissances ou les compétences sont produites dans les discours des apprenants et des enseignants. C'est ce que permettent de faire les divers sous-hypergraphes qui viennent d'être définis. Les praxéologies relatives aux institutions sont en effet autant d'espaces où les sujets peuvent situer leurs discours ou leurs actions. Nous emploierons le terme ***argument*** pour désigner un sous-hypergraphe d'une praxéologie relative.
Commençons par un sujet h donné. Sa praxéologie détermine quatre niveaux d'arguments internes : ses **croyances,** Δ (h), ses **principes,** Θ (h), ses **discours personnels,** θ (h), et son **expérience personnelle,** Π (h).
Il évoque en outre très souvent les praxéologies d'autres personnes qui sont membres des groupes sociaux auxquels il appartient. On peut ainsi distinguer quatre niveaux externes d'argumentation: l'**élargissement primaire,** DLP(I), où I est un groupe primaire ou un groupe de pairs, l'**avis crucial,** DLP(h^), où h^ un membre de tel groupe I et qui 'fait autorité', l'**élargissement secondaire,** DLP(I*), où I* est un groupe secondaire non constitué exclusivement de pairs, et enfin l'**Argument d'universalité,** DLP(H), qui est l'évocation de l'avis de toute l'Humanité.
Le sujet agissant au sein d'une institution I0 qui fixe les finalités de son action, le recours argumentatif à des praxéologies institutionnelles de ***référence*** lui est autorisé. La première de ces praxéologies de référence est bien sûr celle de I0. Elle définit quatre niveaux argumentatifs internes autorisés: les **axiomes,** Δ (I0), les **arguments théoriques,** Θ (I0), les **discours technologiques,** θ (I0), et les **arguments pratiques,** Π (I0).
Mais I0 accepte aussi que d'autres institutions soient considérées comme ***référentes***. C'est la référence globale, ou externe au sens de Sensevy et Mercier (2007), ou la référence à une « communauté discursive » au sens de Bernier, « une communauté constituée sur la base d'une pratique sociale quelconque (production de biens matériels ou de connaissances scientifiques, etc.) » (2002, p. 78). On distinguera là encore quatre niveaux : l'**argument de reproductibilité,** DLP(h', h",... $\in$ Iref), où h', h",... sont des membres d'une institution référente Iref, l'**avis d'un référent** dont la praxéologie est reconnue par I0**,** DLP(h^), les **praxéologies sociales de référence,** DLP(Iref), où Iref est une institution référente de grand cardinal correspondant à un groupe social, et l'**argument d'exhaustivité,** DLP($\cup$ Iref de référence), évoquant les praxéologies de tous ceux qui ont un rapport reconnu aux connaissances en jeu.

Ces seize degrés argumentatifs, répartis sur deux échelles, l'une objective, l'autre subjective, ont permis de conduire des analyses argumentatives des discours (Salone, 2011). Appliqués à la

comparaison didactique entre l'anglais langue seconde et les mathématiques, ils ont révélé des phénomènes d'enseignement, certains fort connus, d'autre moins :

– des différences entre les ***représentations*** des enseignants en fonction de leurs disciplines respectives : les arguments objectifs internes (surtout théoriques et technologiques) sont plus évoqués par le professeur de mathématiques que par le professeur d'anglais ; les arguments externes, qu'ils soient objectifs ou subjectifs, sont exclusivement proposés par le professeur d'anglais, essentiellement *via* les niveaux des références institutionnelles ;

– des dérives entre les arguments évoqués par les professeurs lors des entretiens préalables et ceux évoqués dans la classe réellement en situation: que ce soit en mathématiques ou en anglais, les arguments subissent une ***centration hic et nunc*** autour des niveaux correspondant à l'action personnelle des sujets;

– des ***oscillations*** argumentatives de deux types : des oscillations rapides dans la phase initiale des discours, autour des arguments *hic et nunc*, puis des oscillations de basses fréquences s'allongeant pour aboutir à une phase finale de validation et de stabilisation sur des niveaux plus internes. Parfois même on peut observer un phénomène d'oscillations doxiques où les croyances se mêlent aux axiomes. Ces oscillations traduisent des incertitudes phénoménologiques quant au choix des niveaux argumentatifs évoqués par les sujets. Cette incertitude s'ajoute à celle induite par leur identification lors des transcriptions.

La représentation topologique de l'hypergraphe rassemblant ces arguments apparaît ainsi comme un espace argumentatif à deux dimensions en forme de huit :

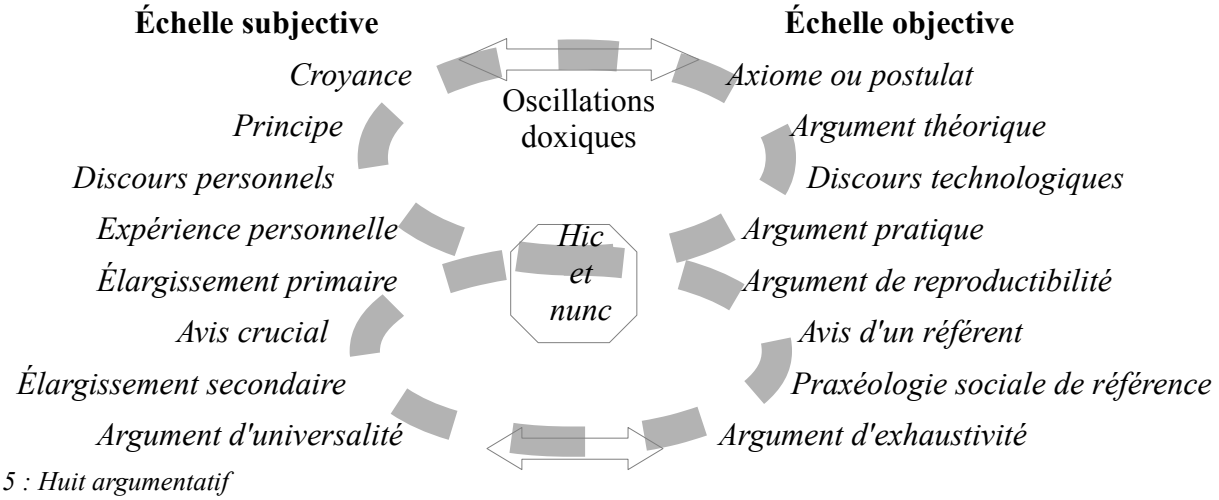

Fig. 5 : Huit argumentatif

D'autres applications de cet espace argumentatif pourraient être envisagées :

– il a été utilisé pour suivre des objets de connaissances dans leurs parcours praxéologiques. Tout objet d'un discours ou toute action pourraient être analysés de façon analogue;

– les sujets ont été mis au second plan de l'analyse pour se concentrer davantage sur les arguments et les processus. On pourrait inverser ces rôles en suivant l'évolution des discours argumentatifs d'un sujet donné dans son espace praxéologique relatif. Cela reviendrait à suivre l'acquisition de ses connaissances.

– une analyse du concept de Vérité construit pour partie chez les élèves adolescents par les enseignants dans leurs disciplines respectives pourrait aussi être envisagée. En effet, les discours et les actions conduisant à la validation ou au rejet de connaissances et de compétences, l'action pédagogique sélective des enseignants détermine grandement la construction des représentations que se font les apprenants de ce qui peut être considéré comme vrai ou comme faux. L'usage de l'espace argumentatif permettrait d'assurer une plus grande cohérence entre les enseignements des

diverses disciplines.

Bibliographie.

BERGE, C. (1987). *Hypergraphes : Combinatoire des ensembles finis*. Paris : Bordas.
BERNIER, J-P. (2002). *L'approche des pratiques langagières scolaires à travers la notion de « communauté discursive » : un apport à la didactique comparée ?* In *Vers une didactique comparée* (Revue française de pédagogie n°141, pp. 5-16). Paris : Institut National de Recherche Pédagogique.
CHEVALLARD, Y. (1988). *Esquisse d'une théorie formelle du didactique*. In C. Laborde (Ed.), Actes du premier colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique (pp. 97-106). Aubenas : La Pensée Sauvage éditions.
CHEVALLARD, Y. (1996). *Dictionnaire de didactique des mathématiques 1996-1997.* Marseille : Institut Universitaire de Formation des Maîtres de la Canebière.
CHEVALLARD, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique.* In R. Noirfalise (Ed.), *Actes de l'Université d'été de la Rochelle* (pp. 91-139). Aubière : Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.
GÖDEL, K. (1931). *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme.* In Monatshefte für mathematik (Vol. 38, n°. 1, pp. 173-198). Paris;Springer-verlag.
KANT, E. (1781/2006). *Critique de la raison pure*. In A. Renaut (Trans.). Paris : Flammarion (GF Flammarion).
KANT, E. (1790/2008). *Critique de faculté de juger.* In F. Alquié (Ed.). Paris : Gallimard (folio, essais).
LE MOIGNE, J-L. (2005). *Les formalismes de la modélisation systémique*. From : http://www.intelligence-complexite.org/fileadmin/docs/ateliers/0505formalismesvfr.pdf
PLATON. (-390/2000). *Ménon*. In B. Piettre (Trans.). Paris : Nathan (les intégrales de philo).
PLATON. (-370/1994). *Théétète*. In M. Narcy (Trans.).Paris : Flammarion (GF Flammarion).
RAMIS, E., DESCHAMPS, C., & ODOUX, J. (1983). *Cours de mathématiques spéciales, algèbre* (Vol.1). Paris : Masson.
SALONE, J-J. (2011). *Validation des connaissances, processus comparés en mathématiques et en anglais*. Marseille, Université de Provence UMR ADEF (Mémoire de Master 2).
SENSEVY, G., & MERCIER, A. (2007). *Agir ensemble : l'action didactique conjointe*. In G. Sensevy, & A. Mercier (Eds.), *Agir ensemble, l'action didactique conjointe du professeur et des élèves* (pp. 187-211). Rennes : Presses Universitaires de Rennes, Paideia.
VERGNAUD, G. (1996/2004). *Au fond de l'action, la conceptualisation.* In J-M Berbier (Ed.), Savoirs théoriques et savoirs d'action (pp. 275-291). Paris : Presses Universitaires de France.
Von BERTALANFFY, L. (1968/1993). *General System Theory.* New York : Georges Braziller,Inc. In J-B. Chabrol (Trans.), *Théorie générale des systèmes*. Paris: Dunod.