GEOMETRIE PLANE : POUR UNE APPROCHE COHERENTE DU DEBUT DE L'ECOLE A LA FIN DU COLLEGE

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Marc Godin

▶ **To cite this version:**

Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Marc Godin. GEOMETRIE PLANE : POUR UNE APPROCHE COHERENTE DU DEBUT DE L'ECOLE A LA FIN DU COLLEGE. 2017. hal-01660837v1

HAL Id: hal-01660837

https://hal.science/hal-01660837v1

Preprint submitted on 11 Dec 2017 (v1), last revised 28 Jun 2018 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GEOMETRIE PLANE : POUR UNE APPROCHE COHERENTE DU DEBUT DE L'ECOLE A LA FIN DU COLLEGE

Marie-Jeanne PERRIN-GLORIAN, Marc GODIN

Résumé.
Le but de cet article est une réflexion sur l'enseignement de la géométrie plane à l'école et au collège afin d'envisager une approche cohérente au long de la scolarité obligatoire. Dans la première partie, nous abordons les rapports entre représentation de l'espace et géométrie, entre géométrie physique sur des figures matérielles et géométrie théorique axiomatique ; dans la deuxième partie nous étudions des conditions sur la reproduction de figures avec les instruments pour qu'elle favorise une entrée dans la géométrie théorique ; dans la troisième partie, nous nous intéressons aux figures définies par des énoncés.

Introduction : dans quel but enseigner la géométrie au collège ?

Pourquoi enseigner la géométrie dans la scolarité obligatoire ? Le rapport Kahane (2002) mettait en avant plusieurs raisons. Nous en retenons trois principales que nous reformulons ainsi :
- l'acquisition par les élèves d'un savoir géométrique et le développement du raisonnement mathématique sur des problèmes qui ne sont pas facilement algorithmisables, c'est-à-dire un moyen de validation appuyé sur la logique, la démonstration,
- l'acquisition d'un cadre théorique cohérent pour modéliser des problèmes simples de l'espace, régi par une axiomatique (explicite ou non) et la capacité à utiliser ce cadre théorique pour résoudre des problèmes concrets qui se posent dans l'espace sensible,
- enfin, et ce n'est pas la moindre à nos yeux, un moyen de représentation pour d'autres champs de savoir, y compris à l'intérieur des mathématiques, ce qu'on appelle parfois la pensée géométrique ou l'intuition géométrique. La pensée géométrique constitue un puissant outil heuristique par le fait que l'on peut transférer dans ces champs des intuitions issues de notre rapport à l'espace. Régine Douady a mis en avant ces traductions d'un domaine mathématique dans un autre comme moyen de faire progresser les connaissances mathématiques des élèves à travers ce qu'elle a appelé des jeux de cadres (Douady, 1987, 1994). Or ces jeux de cadres ne peuvent être productifs sans un minimum de connaissances dans chacun des cadres.

Quelle géométrie enseigner ? Quels fondements mathématiques, quelle axiomatique prendre pour une approche cohérente de la géométrie de 6 à 15 ans ? La cohérence de l'enseignement de la géométrie élémentaire (de l'école au collège) ne peut être assurée sans une axiomatique sous-jacente dont devraient disposer au moins les enseignants du collège qui ont en charge l'introduction d'une géométrie théorique qui valide les propositions par la démonstration. C'est nécessaire pour qu'ils se sentent légitimes et assurés de la validité de ce qu'ils enseignent. Le modèle théorique, quel qu'il soit, permet de rendre compte des problèmes qui se posent dans l'espace sensible parce que, quelle que soit la théorie, les axiomes n'ont pas été choisis n'importe comment. Cependant, l'axiomatique sous-jacente n'est pas indifférente si l'on veut atteindre les trois objectifs mentionnés plus haut et si l'on veut penser la cohérence et la continuité de l'enseignement de la géométrie sur toute la scolarité obligatoire. En effet, si on se place au début du CP, il est clair qu'on ne peut pas faire

appel à autre chose qu'à la perception directe pour décrire ou reproduire des formes, des positions, des déplacements d'objets de l'espace. Au cours du primaire des instruments sont progressivement introduits pour outiller la perception et donner des moyens plus précis et plus sûrs de le faire. Si l'on veut lui assurer une certaine cohérence, l'enseignement de la géométrie au collège devrait s'appuyer sur ce travail avec les instruments pour construire un modèle théorique qui permette d'être sûr sans réaliser l'expérience. Or, le modèle de l'espace affine euclidien enseigné à l'université ne permet pas de fonder un enseignement appuyé sur l'espace sensible et l'usage d'instruments parce qu'il demande de prendre comme objets premiers les points et les vecteurs qui ne découlent pas de la perception directe de l'espace. Ce modèle, pour performant qu'il soit pour la suite des études, ne peut pas aider les enseignants du collège qui doivent dans leur quotidien gérer les rapports conflictuels de leurs élèves entre perception dans l'espace sensible et raisonnement dans le modèle théorique de cet espace. Il ne peut venir que dans un second temps quand on dispose déjà d'un premier modèle de la géométrie appuyé sur l'espace sensible. Nous reprenons à notre compte cette citation de Gonseth :

> « Certes le géomètre peut refuser de comparer son expérience avec celle du physicien. Il peut s'enfermer dans des systèmes axiomatiques, en posant comme données a priori les axiomes et la logique de la déduction. Il évitera ainsi, de justesse, le problème de l'espace (…) mais il n'aura rien fait pour l'éclairer. » Gonseth, 1945, I-8.

A une époque où la place de la géométrie a considérablement diminué dans l'enseignement et même se réduit à la géométrie analytique au lycée, nous voudrions souligner l'importance de la géométrie des figures dans la culture du citoyen. Elle est importante pour traiter des problèmes de l'espace dans la vie quotidienne et aussi pour certaines professions, et donc certaines branches des lycées professionnels. Mais elle est essentielle aussi comme appui pour conceptualiser les nombres[1] et représenter aussi bien des notions mathématiques plus élaborées et leurs relations que des concepts et relations d'autres disciplines, en un mot poser les bases d'une vision géométrique du monde et créer l'intuition qui va avec et servira pour traiter des problèmes dans d'autres domaines. Même pour traiter la géométrie par le calcul, l'appui sur les connaissances géométriques liées aux figures permet de rendre les calculs plus efficaces.

Mais que peut-on entendre par géométrie des figures et comment l'enseigner si on veut la penser de manière cohérente sur toute la scolarité obligatoire ? Beaucoup de recherches en didactique des mathématiques ou dans les IREM ont pointé la rupture dans l'enseignement du début du collège entre une géométrie des tracés matériels (sur papier ou sur écran) avec des instruments et la géométrie théorique des énoncés et démonstrations. Cette rupture tient notamment au mode de validation des énoncés, physique dans le premier cas, c'est-à-dire la perception aidée d'instruments, discours logique à partir d'énoncés (axiomes, définitions, théorèmes, hypothèses ou énoncés validés précédemment) décrivant des propriétés d'objets théoriques ou de relations entre ces objets dans le second cas. Cependant ces recherches prennent rarement en compte l'enseignement du début du primaire jusqu'à la fin du collège. Où se situent les difficultés pour penser une continuité entre l'école et le collège ? Nous pensons que, pour les comprendre, on ne peut pas se limiter à la seule transition école collège ni même au nouveau cycle 3.

En grande section de maternelle, on reconnaît un rectangle en s'appuyant sur la perception visuelle et tactile (qu'il est important de développer à ce niveau). En primaire, on justifie en

[1] Les grandeurs géométriques jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation des nombres entiers et rationnels par reports de longueurs, des racines carrées, des grandeurs constructibles à la règle et au compas et même pour concevoir les limites.

contrôlant les angles droits avec l'équerre et les longueurs avec la règle graduée. Pour valider une telle affirmation en fin de collège, il faudra donner des propriétés et même des conditions nécessaires et suffisantes. La validation par les instruments de géométrie (règle, équerre, compas), valorisée en primaire, peut-elle jouer un rôle positif dans l'accès à la validation par la démonstration ? Peut-on envisager une construction plus progressive d'un point de vue théorique, appuyée sur la recherche de propriétés générales et l'enrichissement continu des connaissances théoriques ? Comment reconnaît-on qu'on est entré dans le modèle théorique de la géométrie dans le cas où le problème de départ est matériel ? Dans l'article de Repères (Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq, 2013), nous analysions le problème d'Abul Wafa : comment faire un carré d'aire triple d'un carré donné ? Découper trois carrés identiques, couper deux des carrés par une diagonale et disposer astucieusement les morceaux sur les côtés du troisième carré donne l'idée de la solution. Un tracé et une vérification avec les instruments sur papier ou dans un logiciel peut convaincre de sa justesse. Mais, dans la géométrie théorique, il reste à prouver que la recomposition des morceaux permet bien d'obtenir un carré. Il ne suffit pas de vérifier, il faut donner les raisons.

Au cœur du problème de l'enseignement de la géométrie se trouve donc le traitement du rapport entre les objets géométriques et les objets matériels de l'espace sensible, entre les figures théoriques définies par des relations entre des objets géométriques et les figures matérielles[2] qui les représentent, contrôlées par la vue ou par les instruments. Nous y revenons dans la première partie de ce texte. La deuxième partie est consacrée à une réflexion sur la reproduction de figures (matérielles) comme source de problèmes permettant d'assurer une continuité de l'enseignement au long de l'école obligatoire. Enfin, dans la troisième partie, nous nous intéressons aux figures définies par des énoncés ; la figure matérielle est alors la représentation d'un objet théorique.

Ce texte prend appui sur le travail d'un groupe de recherche qui a été soutenu par l'IUFM Nord Pas-de-Calais de 2000 à 2010 et se donnait comme objectif lointain de penser l'enseignement de la géométrie de manière cohérente sur toute la scolarité obligatoire. Le travail de ce groupe a donné lieu à plusieurs publications (Duval et Godin, 2005, Offre, Perrin-Glorian et Verbaere, 2006, Keskessa, Perrin-Glorian et Delplace, 2007, Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq, 2013, Perrin-Glorian et Godin, 2014) et se poursuit sous d'autres formes.

I. La géométrie et son enseignement : objets géométriques et objets matériels

Dans cette première partie, nous tentons de préciser ce que nous entendons par « géométrie physique » et « géométrie théorique » en nous situant par rapport à des travaux existants, dans le but de dégager dans les parties suivantes des conditions qui nous paraissent nécessaires pour prendre en charge dans l'enseignement les rapports entre la géométrie physique et la géométrie théorique.

[2] La distinction entre dessin et figure a été utilisée dans de nombreux travaux de recherche sur l'enseignement de la géométrie et elle est couramment utilisée en formation des maîtres. Cependant, les dessins géométriques ne sont pas n'importe quels dessins mais des dessins présentant des caractéristiques qu'on peut produire avec des instruments de géométrie bien définis. Dans ce texte nous préférons l'expression « figure matérielle » à « dessin » pour insister sur le fait que c'est à ces caractéristiques qu'on s'intéresse plus qu'au dessin lui-même. De plus, il nous paraît important que les expressions « reproduction de figures » et « construction de figures » puissent référer aussi bien à des figures matérielles qu'à des figures théoriques (dans le cas de la construction).

1. La géométrie comme modèle de l'espace et les géométries théoriques

Nous avons retenu en introduction trois raisons d'enseigner la géométrie à tous. Ces trois raisons découlent de deux finalités de la géométrie elle-même : finalité pratique pour la géométrie comme outil de modélisation de l'espace, finalité théorique pour la géométrie comme théorie mathématique. Dans un texte ancien repris plus récemment, Guy Brousseau (1983, 2000) imagine deux situations fondamentales pour les distinguer : la situation du charpentier qui doit découper au sol de lourdes pièces de bois qui devront s'ajuster exactement quand il les assemblera à dix mètres du sol et la situation de l'intersection des médiatrices d'un triangle. Cette dernière situation consiste à tracer sur papier avec les instruments usuels un triangle et ses trois médiatrices ; à cause de l'imprécision des tracés, celles-ci forment généralement un tout petit triangle ; il s'agit alors de chercher un autre triangle pour lequel le triangle formé par les trois médiatrices soit le plus grand possible. La recherche d'un tel triangle conduit à démontrer qu'il ne peut pas exister : pour assurer la cohérence logique du modèle, les trois médiatrices doivent se couper en un même point.

Les deux finalités, pratique et théorique, correspondent pour nous aux paradigmes G1 et G2 définis par Catherine Houdement et Alain Kuzniak (Houdement et Kuzniak, 2006, Houdement 2007) au sens suivant : G1 correspond à la situation fondamentale du charpentier : c'est la géométrie qui permet de résoudre des problèmes posés dans l'espace sensible. Elle permet la représentation de l'espace, des objets de l'espace et des actions dans l'espace ou sur les objets de l'espace et comprend une théorie, c'est-à-dire un corpus de savoirs sur lesquels s'appuie le raisonnement mais dont les fondements ne sont pas remis en question et dont la validation se fait dans l'espace sensible à l'aide d'instruments. G2 est une théorie de l'espace, un modèle de G1, défini à partir d'objets premiers, les points, les droites et les plans et de relations entre ces objets dont certaines sont posées comme axiomes et les autres démontrées, c'est la géométrie d'Euclide. Elle correspond à la situation des médiatrices : les problèmes concernent des objets théoriques avec comme outil de validation la démonstration. Catherine Houdement et Alain Kuzniak considèrent que dans G2, on n'a pas nécessairement une théorie complète mais seulement des îlots déductifs. Pour notre part, nous appellerons G2 la théorie d'Euclide complétée par Hilbert même si le travail de Hilbert doit être considéré à un niveau supérieur de théorisation puisqu'il montre que l'ensemble des axiomes retenus est complet et minimal et que l'axiome des parallèles est indépendant des autres. Au niveau G3, on trouve les théories dans lesquelles G2 devient un modèle parmi d'autres : on peut par exemple envisager des géométries non euclidiennes.

Ces théories peuvent s'exprimer avec différents choix d'axiomes, même au niveau G2 : par exemple Annie Cousin Fauconnet (1995) avait proposé une axiomatique de la géométrie équivalente à celle d'Euclide mais avec un système d'axiomes fondé sur la symétrie axiale, conforme aux programmes des années 80-90. Dans G2, les objets premiers sont les points, les droites et les plans et les axiomes des relations entre eux, notamment d'incidence et d'ordre ; ces objets et relations ont des modèles physiques. En revanche, au niveau G3, on peut exprimer des théories équivalentes dans des langages très différents sans lien évident avec un modèle physique (par exemple l'espace euclidien défini à partir des espaces vectoriels et des formes quadratiques).

Dans la suite, nous nous intéresserons d'abord à G1 en tant que modélisation de l'espace mais en n'acceptant comme instruments que des instruments de tracé à l'exclusion des instruments de mesure des longueurs. Nous appellerons G1* cette restriction de G1. C'est une géométrie des tracés que nous qualifions de *géométrie physique* puisque les problèmes et les moyens de validation relèvent de l'espace sensible. Notons qu'il ne s'agit pas d'accepter tout ce qu'on constate avec les instruments mais de constituer un corps de savoirs valides appuyé

sur l'expérience et la vérification contrôlée avec des instruments. Le raisonnement se fait à partir de ce corps de savoirs tenus pour vrais. La plupart des savoirs qui relèvent de cette *géométrie physique* s'énoncent de la même manière que des savoirs théoriques de G2. Toutefois, des constructions approchées dans G2[3], acceptables à la précision des instruments de tracé dont on dispose, peuvent être considérées comme des savoirs de G1* : par exemple des constructions approchées de l'heptagone régulier ou de la trisection d'un angle.

Nous nous intéresserons aussi aux premiers rudiments enseignés au collège de G2 (restreinte à la géométrie plane), avec quelques objets théoriques, essentiellement les droites et les points, et quelques îlots déductifs, que nous appellerons *géométrie théorique*. En réalité la théorie sous-jacente qui nous intéresse concerne les figures que l'on peut construire à la règle et au compas.

René Berthelot et Marie-Hélène Salin (Berthelot et Salin, 1992, 1993-1994, Salin, 2008), dans la suite des travaux de Brousseau, se sont intéressés aussi aux rapports entre géométrie physique et géométrie théorique mais en distinguant deux manières de traiter les problèmes posés dans l'espace sensible. Ils identifient ainsi trois problématiques dans les rapports entre espace sensible et géométrie :

- la problématique pratique : le problème est posé dans l'espace sensible, les rapports à l'espace sont effectifs, « ils sont contrôlés de manière empirique et contingente » par les sens, la validation se fait dans l'espace sensible.

- la problématique de modélisation ou spatio-géométrique : le problème est posé dans l'espace sensible mais on ne peut pas le traiter directement dans cet espace : on le traduit dans un modèle géométrique où se fait la résolution ; le résultat est retraduit à son tour dans l'espace sensible et la validation se fait aussi dans l'espace sensible. Pour distinguer les deux, ils donnent l'exemple d'un vitrier qui veut remplacer une vitre en forme de parallélogramme et doit prendre les informations nécessaires pour découper la vitre dans son atelier. Une réponse dans la problématique pratique consisterait à fabriquer sur place un patron de la vitre. Une réponse dans la problématique spatio-géométrique serait de mesurer deux côtés et une diagonale du parallélogramme. Remarquons au passage que la théorie de référence du vitrier peut être la géométrie physique G1 (ensemble de savoirs validés par l'expérience) ou G2 (savoirs validés dans une théorie axiomatique).

- la problématique géométrique : le problème, le traitement et la validation se situent dans le cadre de la géométrie théorique, selon des règles établies. Les rapports à l'espace, par exemple à la figure peuvent être effectifs mais sont régis par les définitions et les règles de fonctionnement des objets théoriques qu'elle représente.

On peut considérer que la problématique géométrique se situe entièrement dans G2. En revanche, si l'on considère que la problématique pratique s'appuie essentiellement sur des connaissances spatiales plutôt que sur des connaissances géométriques, si elle consiste à résoudre un problème pratique par des considérations pratiques, purement perceptives, par exemple en faisant des essais et des ajustements comme la première solution du vitrier, ce n'est pas la géométrie physique au sens où nous l'entendons ci-dessus. Celle-ci correspond plutôt à la problématique de modélisation qui demande d'identifier dans la réalité concrète les éléments qui permettent d'utiliser localement des résultats, des savoirs géométriques (qui relèvent de G1 mais qu'on pourrait démontrer dans une axiomatique de type G2) pour traiter

[3] Elles sont inexactes au sens de G2 mais avec une marge d'erreur que l'on peut éventuellement majorer. Elles sont acceptées comme valides dans G1* suivant la précision souhaitée pour la réalisation et possible avec les instruments de tracé dont on dispose.

un problème posé et validé finalement dans cette réalité concrète. Elle permet en particulier d'éviter des manipulations dans l'espace par des raisonnements dans un modèle local de l'espace. C'est ce que fait le vitrier qui mesure les côtés et la diagonale du parallélogramme pour le reconstruire à partir de deux triangles.

2. Prise en compte dans l'enseignement au collège des rapports entre objets géométriques et objets matériels

Comment sont traités dans l'enseignement les rapports entre l'espace sensible, l'espace géométrique et les figures matérielles ? Pour illustrer ce point, regardons d'abord comment ce rapport est géré dans des manuels du début de collège à 50 ans d'intervalle.

Dans les années 50, c'est en 5ème qu'on introduit les objets géométriques et l'appui sur l'espace sensible est assumé. Les objets géométriques sont évoqués à partir d'objets matériels idéalisés puis on les caractérise par des propriétés qui sont en fait des axiomes.

Par exemple dans le manuel Monge et Guinchan (1958), on trouve un paragraphe intitulé « Propriétés de la droite », où la droite est matérialisée par une aiguille à tricoter fine bien droite qui passe par deux trous percés dans les faces opposées d'une boîte et qu'on peut faire glisser ou tourner ; on constate que, dans ces déplacements, l'aiguille paraît fixe entre les points A et B. On évoque ensuite une tige curviligne dont le pivotement engendrerait un fuseau entre A et B (figure 1). On admet que les résultats de l'expérience sont vrais pour une droite géométrique et on énonce une propriété caractéristique de la droite et quelques conséquences qui feront partie des fondements du cours de géométrie :

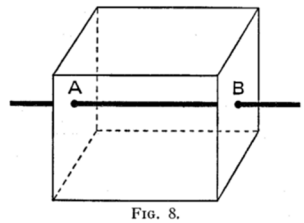


FIG. 8.

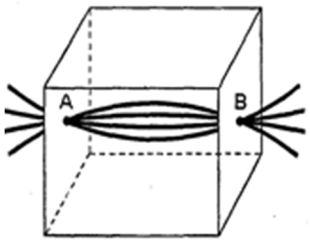


FIG. 9.

> Par deux points distincts, il passe une droite et une seule.
> Deux points déterminent une droite.
> Deux droites qui ont deux points communs coïncident.
> Deux droites distinctes peuvent se rencontrer, au plus, en un point.
> Pour nommer une droite, il suffit de nommer deux de ses points.

Figure 1. Monge et Guinchan 1958

La vérification de la justesse d'une règle matérielle est ensuite proposée (figure 2) comme application.

10. Application : *Vérification d'une règle par retournement.*
On marque sur une feuille de papier deux points A et B, puis au moyen de la

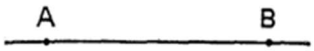


FIG. 10. — L'arête de la règle est juste.

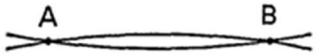


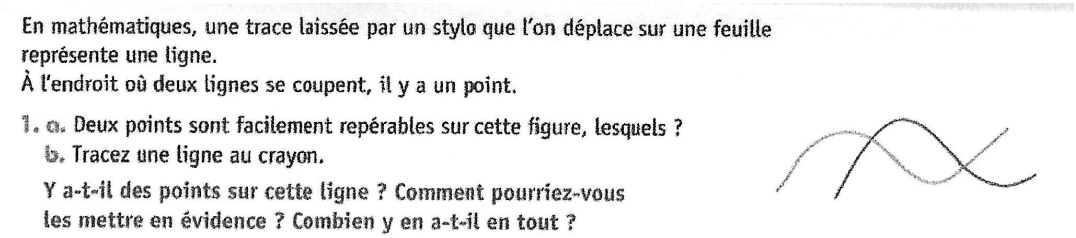
FIG. 11. — L'arête de la règle est fausse.

règle à vérifier on joint AB. On retourne la règle, puis utilisant le même bord on recommence le tracé.
La règle est juste si les deux tracés se recouvrent exactement (*fig.* 10 et 11).
Il est indispensable de vérifier successivement les deux bords d'une règle plate.

Figure 2. Monge et Guinchan 1958

Dans le premier chapitre de géométrie des manuels de sixième de 2009, on ne trouve presque jamais de référence à des objets physiques. En revanche, on introduit souvent un vocabulaire et des notations ensemblistes et on s'intéresse à la représentation des objets géométriques, points, droites, demi-droites, segments pour lesquels on introduit aussi des notations. Les objets géométriques sont définis à partir de leur représentation et une ligne est d'emblée un

ensemble de points. A titre d'exemples, voici quelques extraits de ces manuels, en commençant (figure 3 et figure 4) par des représentations de points et lignes dans le manuel Zenius (Magnard) :


En mathématiques, une trace laissée par un stylo que l'on déplace sur une feuille représente une ligne.
À l'endroit où deux lignes se coupent, il y a un point.

1. a. Deux points sont facilement repérables sur cette figure, lesquels ?
   b. Tracez une ligne au crayon.
   Y a-t-il des points sur cette ligne ? Comment pourriez-vous les mettre en évidence ? Combien y en a-t-il en tout ?

Figure 3. Extrait de l'activité 1 du manuel de 6ème Zenius 2009 p. 120

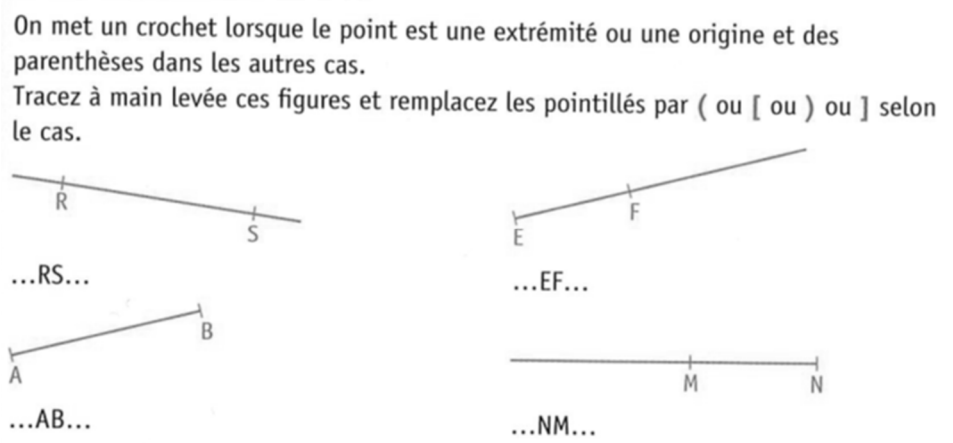


Figure 4. Activité 4 du manuel de 6ème Zenius 2009 p. 121

Dans le manuel Déclic (Hachette), la première activité (p. 127) vise, entre autres, à différencier droite et segment : une droite peut être prolongée des deux côtés et ne peut pas être mesurée alors qu'un segment ne peut pas se prolonger mais peut être mesuré.

Dès les premiers chapitres de géométrie, le rapport à la figure matérielle est très subtil, comme on peut le voir (figure 5) à travers l'activité proposée par le manuel Hélice (QCM pour commencer), pourtant très attentif par ailleurs à ne pas considérer d'emblée les objets géométriques comme des ensembles de points :

Si on a tracé une figure en représentant avec des instruments une propriété géométrique demandée, on peut la coder et elle est supposée vérifiée : on a représenté une propriété géométrique sur une figure matérielle (questions 1 et 4). En revanche si la figure est donnée sans plus d'information, ni dans le texte, ni dans le codage, les caractéristiques visuelles, même vérifiées avec les instruments, ne peuvent pas être interprétées comme des propriétés géométriques : on peut seulement les conjecturer. Ici, le cercle « semble avoir pour rayon ou diamètre… ».

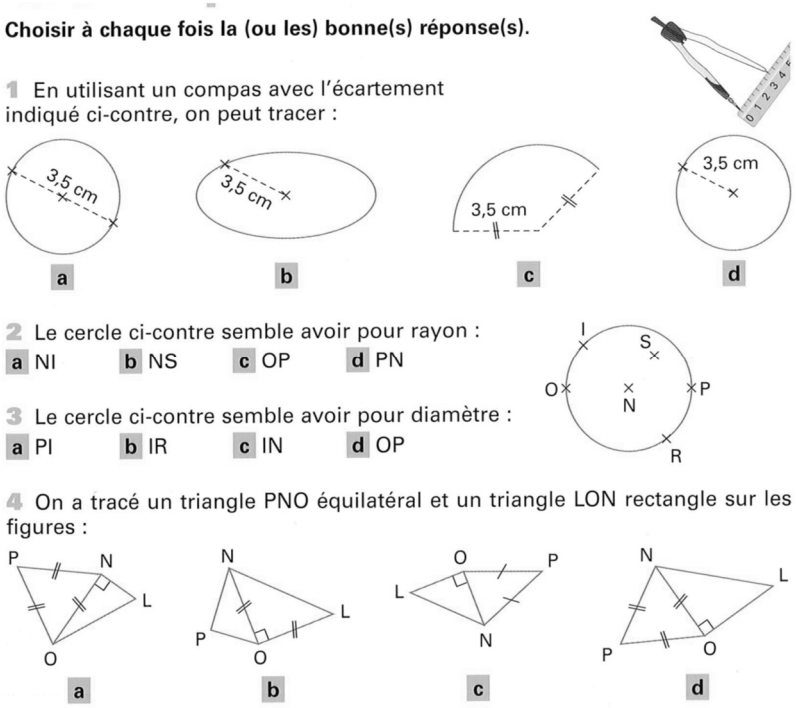


Figure 5. Manuel de 6ème Hélice 2009 p. 108

Dans l'extrait du manuel Bordas reproduit dans l'article de Repères (Perrin-Glorian et al. 2013), les droites « semblent » parallèles ou perpendiculaires, le triangle « semble » rectangle ou équilatéral. Ce « semble » réfère à la perception mais aussi à l'usage des instruments. Nous reviendrons sur l'usage des instruments et du codage dans les parties 2 et 3.

3. L'espace graphique. Double rôle des figures matérielles

Les représentations, schémas et figures jouent des rôles différents suivant que le problème qu'on veut traiter se pose dans l'espace sensible ou dans le modèle théorique.

Si le problème se pose dans l'espace sensible, des dessins, maquettes, peuvent représenter les objets de la réalité. Ces schémas ou maquettes peuvent à leur tour se modéliser par des figures qu'on peut traiter comme représentant des objets géométriques, ce qui peut amener à les refaire. Ces schémas et figures jouent ainsi un rôle d'intermédiaire entre le monde sensible et les objets géométriques théoriques.

Dans Perrin-Glorian et al. (2013), nous analysons un énoncé tiré d'un manuel de seconde professionnelle où il s'agit de calculer l'aire de la surface vitrée à nettoyer dans la pyramide du Louvre. On donne une photo de la pyramide (en précisant que les quatre faces sont vitrées) ainsi que la hauteur et le côté de la base carrée.

Pour résoudre l'exercice, on est amené à faire un schéma (figure 6) qui rassemble les données, y compris celles qu'il faut lire sur la photo : il s'agit d'une pyramide régulière (donc le pied de la hauteur est au centre du carré de la base). Le placement de la hauteur sur le schéma amène à le transformer en figure représentant un objet géométrique pour mettre la hauteur au centre du carré représentant la base.

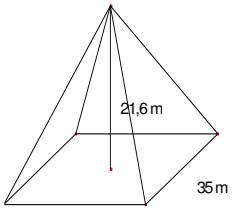


Figure 6

Le travail sur cette figure permet d'identifier l'élément nécessaire pour le calcul de l'aire des triangles : la hauteur des triangles (figure 7). Pour la calculer, il faut identifier un plan pertinent et, dans ce plan, un

triangle rectangle dont on connaît les mesures des côtés de l'angle droit et dont l'hypoténuse donnera la longueur cherchée.

Pour utiliser les résultats établis dans un modèle théorique de la géométrie, il est nécessaire d'identifier dans le problème concret les éléments qui pourront se traduire dans le modèle théorique à la fois comme hypothèses et conclusions du résultat théorique qu'on utilise. La représentation est un moyen de le faire.

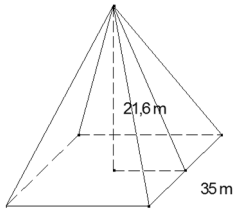


Figure 7

C'est pourquoi, en plus de l'espace sensible, il nous faut considérer une partie spécifique de l'espace sensible que nous appelons l'espace graphique des représentations. On y trouve des représentations d'objets du monde physique ou d'objets géométriques sous forme de schémas ou de figures en dimension 2. L'espace graphique est une interface entre l'espace sensible et l'espace géométrique dans le cas d'un problème posé dans le monde sensible, ce que nous représentons par le diagramme de la figure 8. La théorie de référence peut être la géométrie physique ou la géométrie théorique axiomatique.

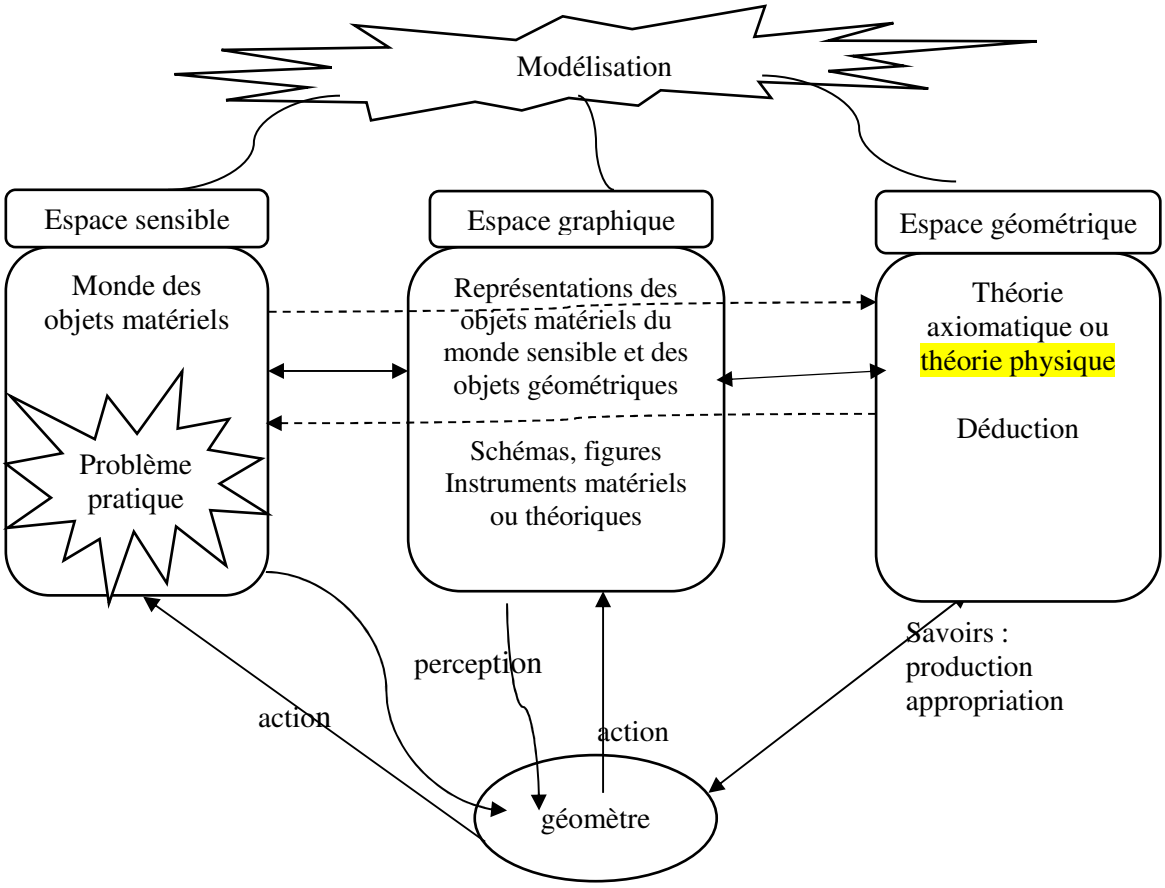


Figure 8. Problème posé dans l'espace sensible

Les problèmes de l'espace sensible se posent dans un espace à trois dimensions mais bon nombre d'entre eux peuvent être modélisés par la géométrie plane en se restreignant à un plan bien choisi. Les maquettes peuvent, comme les figures, être des représentations d'objets matériels ou d'objets géométriques ; ce sont néanmoins des objets matériels en trois dimensions ; nous les incluons dans l'espace sensible. Nous considérons que l'espace graphique contient des représentations en deux dimensions (ou moins) sur un support plat et les instruments qui permettent de les produire. Le langage est aussi un moyen de

représentation des objets matériels ou théoriques. Nous le considérons séparément et, comme le langage n'est pas nécessairement le même dans l'espace sensible, dans l'espace graphique et dans l'espace géométrique, cela peut être un indice de l'espace dans lequel se place le géomètre.

Nous incluons les instruments (objets matériels avec leurs schèmes d'usage au niveau manipulatoire) dans l'espace graphique. Nous reviendrons à plusieurs reprises au cours du texte sur la notion de figure ; nous la distinguons du schéma par le fait qu'elle représente des propriétés géométriques validées par des instruments dans le cas de la géométrie physique ou par un codage (texte ou signes) dans le cas de la géométrie théorique.

Si le problème est théorique, il porte sur des objets théoriques qui peuvent se représenter dans l'espace sensible par des maquettes, des figures, qu'elles soient réalisées avec les instruments classiques ou avec des logiciels. L'espace graphique (voire l'espace sensible pour les maquettes) sert alors de terrain d'expérimentation pour ce problème théorique, ce que nous représentons par le diagramme de la figure 9.

Dans l'enseignement de la scolarité obligatoire, l'étude des figures n'a en fait le plus souvent ni une finalité pratique ni une finalité théorique, elle poursuit plutôt une finalité d'apprentissage conceptuel. Suivant que l'objet d'étude est la figure matérielle ou la figure géométrique, on a deux modes de validation radicalement différents qui correspondent à ce que nous avons appelé géométrie physique et géométrie théorique.

Dans le cas où l'objet d'étude est la figure géométrique (au collège), on est dans le schéma précédent (figure 9) : la figure matérielle est une représentation de la figure géométrique théorique.

Dans le cas où l'objet d'étude est la figure matérielle, à l'école élémentaire voire au début du collège, on a un problème graphique qui correspond au schéma de la figure 10 : la théorie de référence est la théorie physique.

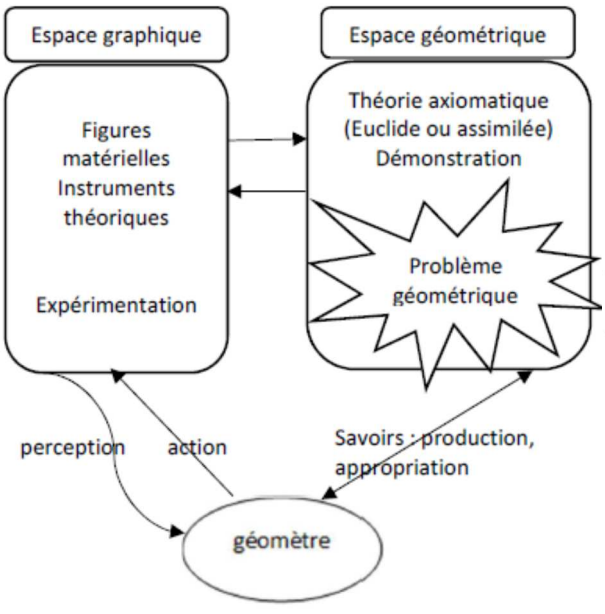


Figure 9. Problème géométrique (théorique)

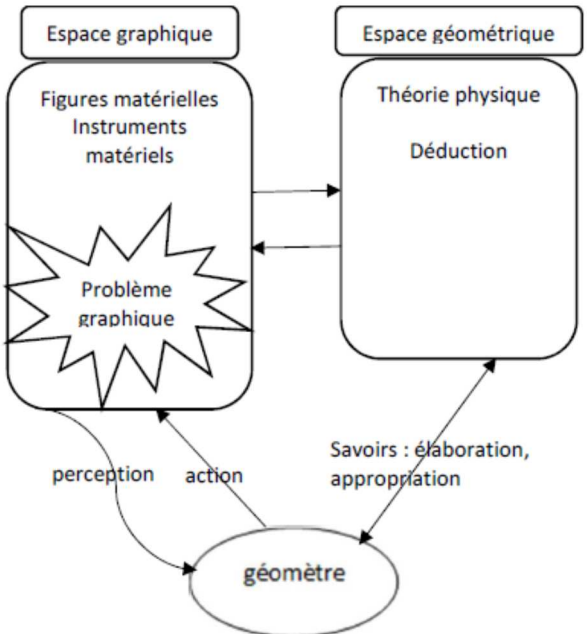


Figure 10. Problème graphique

Nous prenons ci-dessous l'exemple d'un même problème traité dans les deux cas : construire un triangle rectangle connaissant (en grandeur) un côté *c* de l'angle droit et

l'hypoténuse *a*, l'un des deux étant aussi connu en position (i.e. donné par un segment sur lequel doit se faire la construction).

Que le problème se pose dans l'espace graphique ou dans l'espace géométrique, on peut faire une première figure d'un triangle rectangle en codant l'angle droit et les côtés connus. Un des côtés du triangle est donné, soit un côté de l'angle droit, soit l'hypoténuse. Il faut donc trouver le 3ème sommet comme intersection de deux lignes à partir des données. Le problème n'est pas le même suivant le côté donné en position. Ce ne sont pas les mêmes savoirs concernant les triangles rectangles et la distance qu'on utilisera pour trouver une solution par intersection d'une droite et d'un cercle ou de deux cercles. Si c'est le côté de l'angle droit qui est donné en position, le sommet cherché se trouve sur une perpendiculaire en l'une des extrémités du côté donné et sur le cercle centré en l'autre extrémité de ce côté et de rayon la longueur *a* de l'hypoténuse. On utilise la définition du triangle rectangle et la définition du cercle comme ensemble des points à une distance donnée du centre (ou le report de longueurs au compas). Si c'est l'hypoténuse qui est donnée en position, pour trouver une première ligne qui porte le sommet cherché, il faut savoir que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse (ou le rectangle dans un cercle dont ses diagonales sont des diamètres). La deuxième ligne est un autre cercle centré en l'une des extrémités de l'hypoténuse et de rayon la longueur connue *c* du côté de l'angle droit.

Cas où l'objet d'étude est la figure géométrique :

On cherche les relations géométriques qu'on peut construire à partir des données pour obtenir celles qu'on cherche. La figure permet d'expérimenter ce qu'on peut tracer et ce qui manque (phase d'analyse ou recherche de conditions nécessaires). C'est la démonstration qui apportera la preuve de la validité de la méthode et l'existence de solutions dès que $a > c$. Les théorèmes sont utilisés dans un sens pour l'analyse de la figure à obtenir et la recherche de la solution (conditions nécessaires) et dans l'autre pour la preuve qu'on a bien répondu au problème posé (conditions suffisantes).

Cas où l'objet d'étude est la figure matérielle dans l'espace graphique :

Dans ce cas, le problème dépend aussi des instruments dont on dispose. On suppose que les instruments matériels dont on dispose (notamment l'écartement du compas) permettent effectivement les constructions. La validation vient par le contrôle par les instruments mais la recherche de la solution mobilise des savoirs sur les propriétés des figures qu'on veut tracer et leurs relations avec les instruments à disposition. Si c'est le côté de l'angle droit qui est donné en position et qu'on dispose d'une équerre, on utilise l'angle droit dans la construction donc la vérification à l'équerre est inutile. Si $a>c$, le cercle et la droite se coupent ; si $a<c$, ils ne se coupent pas ; on peut l'expliquer parce qu'on sait que l'hypoténuse est plus grande que les côtés de l'angle droit. Si on ne dispose pas d'équerre, il faut dans ce cas, avoir un autre moyen de construire un angle droit.

Si c'est l'hypoténuse qui est donnée en position, et si on sait qu'un triangle rectangle est un demi-rectangle et qu'un rectangle est inscrit dans un cercle dont ses diagonales sont des diamètres, on est ramené à chercher un rectangle dont une diagonale est donnée et ainsi à inscrire ce rectangle dans un cercle. Cela donne une première ligne sur laquelle se trouve le sommet cherché. On peut la tracer avec le compas (à condition de savoir prendre un milieu, par exemple avec une bande de papier qu'on peut plier). Comme on connaît la longueur d'un côté de l'angle droit, on peut déduire un autre cercle sur lequel se trouve ce sommet ou simplement reporter la longueur au compas à partir d'une des extrémités de l'hypoténuse. Ce report est possible si $a>c$. Les savoirs sur le rectangle, le triangle rectangle et le cercle font partie de la théorie physique qui est utilisée pour déduire un procédé de construction à partir

des données. La vérification qu'on obtient bien un triangle rectangle se fait à l'équerre, dans l'espace graphique si on ne sait pas qu'en joignant un point d'un cercle aux extrémités d'un diamètre, on obtient un angle droit.

Si l'on ne sait pas que le triangle rectangle est inscrit dans un cercle de diamètre son hypoténuse, une autre solution, dans l'espace graphique, consiste à construire ailleurs le triangle rectangle en commençant par le côté de l'angle droit dont on connaît la longueur. Cela permet de connaître la longueur de l'autre côté de l'angle droit et on est ramené à la construction d'un triangle connaissant ses trois côtés. On vérifie à l'équerre qu'on a bien un triangle rectangle.

Points communs et différences entre les deux cas

La phase d'analyse de la figure et de recherche de conditions nécessaires (sur quelles lignes se trouve le sommet manquant) dépend des connaissances disponibles mais elle est de même nature dans les deux cas. Les différences principales se trouvent dans la discussion (à quelles conditions les deux lignes se coupent-elles ?) et dans la vérification que les conditions sont suffisantes (démonstration dans un cas, vérification par les instruments dans l'autre).

Pour le triangle rectangle, la discussion est assez simple mais elle est nettement plus complexe dans le cas général traité dans Perrin (2005 : exercice 173 b p. 199, 2011 : exercice 175 b p. 203). Il s'agit de construire un triangle ABC vérifiant les conditions suivantes : le côté AB est donné en position, l'angle C et le côté AC sont donnés en grandeur. Le point C cherché est sur un cercle de centre A et de rayon AC mais la détermination de l'autre ligne (arc capable) par l'angle inscrit limite n'est plus une connaissance disponible, on peut construire ailleurs un triangle isométrique en commençant par l'angle, ce qui donne toutes les grandeurs du triangle. Si l'angle C est aigu, il y a deux solutions non isométriques si $AC \sin C < AB < AC$, une seule si $AB \geq AC$ ou $AB = AC \sin C$ et pas du tout si $AB < AC \sin C$. Si l'angle est droit ou obtus, il y a une seule solution à isométrie près si $AB > AC$, pas du tout dans les autres cas. L'expérimentation dans l'espace graphique d'un logiciel de géométrie dynamique constitue une aide appréciable, notamment pour repérer les cas à distinguer dans la démonstration. La discussion du nombre de solutions et la démonstration du fait qu'on a bien répondu au problème initial relève de la théorie axiomatique.

Une solution pratique du problème dans le cas du triangle rectangle :

Les élèves qui ne savent pas que le triangle rectangle est inscrit dans un demi-cercle (ou n'y pensent pas) peuvent envisager une solution pratique en ajustant les instruments : par exemple, commencer par tracer l'hypoténuse, repérer la longueur b sur un côté de l'angle droit de l'équerre, placer l'équerre de façon à maintenir le repère sur une extrémité de l'hypoténuse et ajuster la position du sommet et de l'autre côté de l'angle droit en faisant tourner l'équerre jusqu'à ce que le deuxième côté de l'angle droit passe par l'autre extrémité de l'hypoténuse (figure 11).

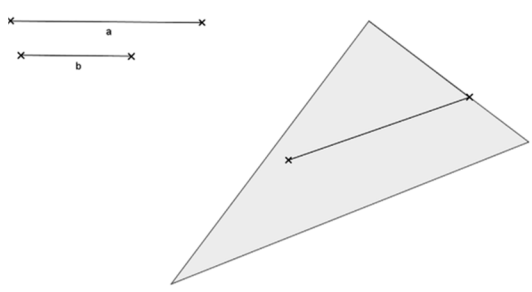


Figure 11

4. L'étude des figures matérielles : continuité et rupture primaire-collège.

L'identification par Berthelot & Salin (1992, 1993) des trois problématiques décrites plus haut les amène à distinguer les connaissances spatiales des connaissances géométriques et ils soulignent dans leur thèse le déficit des connaissances spatiales y compris chez les adultes, en

particulier dans le méso-espace[4], et l'absence de prise en charge de ces connaissances par l'enseignement. Ce déficit de connaissances spatiales se manifeste aussi bien dans la vie courante que dans l'enseignement de la géométrie ou d'autres disciplines, notamment par la confusion entre les connaissances géométriques et les connaissances spatiales (par exemple la position d'une figure dans la feuille de papier relève du spatial et non du géométrique).

Ils considèrent la problématique pratique comme faisant obstacle à la mise en place de la problématique géométrique, en particulier dans le micro-espace de la feuille de papier. Ils montrent que la taille de l'espace est une variable didactique importante parce que le contrôle par la vue et les instruments matériels n'a pas la même efficacité selon la taille de l'espace. Ainsi, 50% des élèves de CM2 sont incapables de prévoir la position qu'occuperont les pieds d'un banc rectangulaire après déplacement alors que la majorité d'entre eux sont capables de tracer un rectangle sur une feuille de papier où ils peuvent utiliser continûment le contrôle de la vue. Ils proposent alors la problématique spatio-géométrique comme moyen d'entrer dans le géométrique à partir de problèmes posés dans l'espace mais avec blocage des procédures spatiales naturelles, notamment en travaillant dans le méso-espace. Ils retiennent ainsi trois classes de variables importantes pour l'analyse des situations de géométrie dans l'enseignement : le type de problématique, le type de rapport à l'espace, effectif ou intériorisé, le caractère adidactique ou non des situations et construisent quelques ingénieries didactiques, notamment concernant les angles (Berthelot et Salin, 1994-1995).

Pour notre part, nous nous intéressons au travail des figures sur papier et nous considérons que si la figure matérielle est l'objet du travail, nous sommes dans la géométrie physique qui correspond au modèle G1* : la validation se fait par des instruments de tracé qui contrôlent des caractéristiques graphiques correspondant à la représentation de propriétés géométriques dans G2. Dans la géométrie théorique qui correspond à G2 ou à la problématique géométrique de Berthelot et Salin, l'objet d'étude est une figure théorique définie par des propriétés (données par des énoncés ou un codage). La validation se fait par déduction en utilisant des propriétés déjà validées. Certaines des propriétés sont prises comme axiomes ; les propriétés déjà validées et qui méritent d'être retenues parce qu'on les utilisera souvent sont des théorèmes. D'autres propriétés sont données comme hypothèses : elles sont spécifiques de la figure considérée.

Il y a donc une rupture dans le rapport aux figures entre ces deux modes de validation. Cependant, il y a une continuité au niveau des énoncés entre G1* et G2 : les propriétés valides sont les mêmes[5] et les figures matérielles sont les mêmes. Comment aborder dans l'enseignement la rupture entre les modes de validation des propriétés des figures matérielles ? Faut-il mettre en défaut la géométrie physique ou s'en servir comme point d'appui ? La géométrie dynamique qui introduit le mouvement comme moyen de validation de propriétés théoriques par la théorie embarquée dans l'instrument est une manière de prendre appui sur la perception de caractéristiques graphiques pour tester des propriétés théoriques. La suite de l'article (parties 2 et 3) sera consacrée à une autre façon de prendre appui sur la géométrie physique pour construire les concepts de la géométrie théorique : la reproduction puis la construction de figures matérielles sur papier avec des instruments. Auparavant, il nous reste à préciser un dernier élément théorique qui nous servira à analyser le regard que l'on porte sur les figures dans l'activité géométrique.

---

[4] C'est-à-dire l'espace dans lequel on se déplace à l'échelle humaine.

[5] Pas tout à fait dans le cas des constructions approchées que nous laissons de côté pour le moment.

5. Acquérir une mobilité du regard sur les figures matérielles

Commençons par un exemple emprunté à un mémoire professionnel soutenu en 2000. Les stagiaires avaient donné à des élèves de seconde le problème suivant :

> Soit ABCD un parallélogramme de centre O.
> Soit M un point du segment [AB], distinct de A et B.
> La droite (OM) coupe [CD] en N.
> Faire une figure.
> Le but de cet exercice est de démontrer que O est le milieu de [MN], de deux manières différentes.

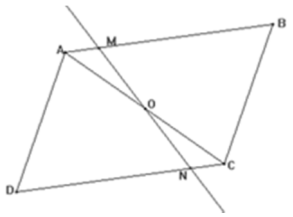


Figure 12

Suivaient deux questions subdivisées en sous-questions détaillant chacune des deux manières :
1) démontrer que AOM et OCN sont isométriques
2) démontrer que N est l'image de M par la symétrie centrale de centre O.

Dans les deux cas, tout le schéma de démonstration est indiqué, les élèves n'ont qu'à reconnaître les théorèmes suggérés et à les mettre en œuvre.

Les stagiaires s'attendaient à une meilleure réussite des élèves dans le cas de la symétrie, plus familière puisqu'elle était étudiée depuis la cinquième, alors que les cas d'isométrie des triangles venaient d'être étudiés en seconde. Or ils constatent que c'est l'inverse qui se produit. La plupart des élèves ont utilisé le fait que N est l'image de M par la symétrie centrale pour trouver l'image de la droite (OM) demandée en fin de première question et ils ont évidemment été bloqués à la question 2 où il s'agissait justement de le montrer ; les autres n'ont en général pas su traiter cette question 2 parce que très peu d'élèves ont compris qu'il fallait considérer le point M comme intersection des droites (AB) et (OM) pour trouver son image. D'ailleurs, les élèves, à qui on demandait leur avis sur les méthodes proposées ont majoritairement trouvé la première plus facile et l'un des élèves a dit « car j'ai du mal avec les images des points ». La démonstration par la symétrie demande en effet de considérer d'abord la droite (AB) comme définie par les points A et B pour trouver son image, de considérer la droite (OM) comme globalement invariante dans la symétrie (alors que M ne l'est pas) puis de considérer le point M comme intersection de ces deux droites alors que, dans l'énoncé, on choisit d'abord M sur (AB) et qu'on définit (OM) à partir de M. La nécessité de changer constamment de dimension (ici considérer une droite comme définie par deux points et un point comme défini par l'intersection de deux droites) dans le regard qu'on porte sur les figures dans une démonstration est une difficulté essentielle de l'articulation entre le registre des figures et celui du langage en géométrie que pointe Duval (1995) et qu'il a appelée ensuite (Duval, 2005) déconstruction dimensionnelle.

En appui sur ce cadre théorique apporté et affiné par Raymond Duval au sein de notre groupe de recherche, ainsi que sur les observations de Marc Godin qui avait repéré que des élèves détournaient l'usage des instruments pour y porter des parties de la surface à reproduire, par exemple en écrivant sur les gabarits d'angle droit au lieu de se servir seulement de leur contour, nous avons différencié trois regards que l'on peut porter sur les figures. Dans cette distinction, nous prenons en compte non seulement la dimension des unités figurales mais aussi la possibilité d'y voir des unités figurales non tracées mais qui pourraient se définir à partir de celles qui sont présentes sur la figure et permettraient d'engendrer tout ou partie de la figure. Par exemple un triangle est délimité par son contour (trois côtés, trois sommets) mais chacun des côtés est porté par une droite. Le triangle peut donc être défini aussi à partir de trois droites sécantes. Ces unités figurales potentiellement présentes peuvent représenter des objets géométriques (surfaces, lignes, points). Une unité figurale peut représenter plusieurs objets géométriques (par exemple un trait peut représenter

un segment, une demi-droite, une droite). Nous présentons ces trois regards sur les figures ou visions des figures à partir d'un exemple.

La vision naturelle, et celle des jeunes enfants, est de voir des surfaces juxtaposées ou, ce qui est déjà beaucoup moins naturel, superposées, ce que nous appellerons une vision « surfaces » (ou D2) des figures. Sur l'exemple (figure 13), on peut voir trois triangles juxtaposés (figure 14) ou deux triangles superposés (figure 15), le tout posé sur un quadrilatère.

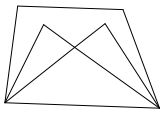


Figure 13

Dans une vision « surfaces », des lignes et des points peuvent apparaître mais les lignes sont seulement des bords de surfaces, les points sont des sommets de surfaces ou, en cas de superposition, des intersections de bords. On ne peut pas créer de nouvelles lignes sans déplacer de surface.

Figure 14

Cependant, les énoncés de géométrie plane (définitions ou théorèmes) portent le plus souvent sur les relations entre des lignes et des points. Nous nous limiterons ici aux lignes qu'on peut obtenir avec des instruments classiques (droites, demi-droites, segments, cercles). La vision géométrique demande donc de voir sur une figure des lignes qui ne sont pas nécessairement tracées, qui ne sont pas des bords et dépassent éventuellement la figure ainsi que des points qu'on peut obtenir ou définir par intersection de ces lignes.

Figure 15

Dans une vision « lignes » (ou D1), la figure est constituée de lignes qui peuvent se tracer avec des instruments : la règle pour les droites, les demi-droites (qu'on peut prolonger) et les segments, le compas pour les cercles ou les arcs de cercles. Sur l'exemple, on verra plus ou moins de lignes supports des côtés (figure 16, figure 17). Il peut rester difficile de prolonger des lignes pour définir des points dont le lien avec la figure n'est pas direct. Les points sont des extrémités de lignes ou des intersections de lignes qu'on a déjà. On peut tracer des segments (voire des droites) qui relient des points qu'on a déjà.

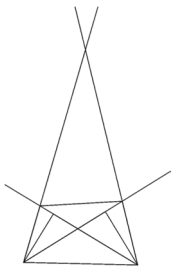


Figure 16

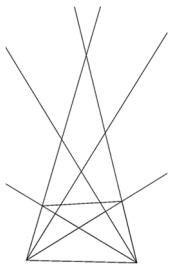


Figure 17

Dans une vision « points » (ou D0) de la figure, on peut créer des points par intersection de deux lignes et les points peuvent définir des lignes : il faut deux points (ou un point et une direction) pour déterminer une droite, une demi-droite ; pour un segment, il faut deux points ou un point et une longueur sur une demi-droite déjà tracée ; il faut deux points pour déterminer un cercle (le centre et un point du cercle) ou un point et une longueur. Sur l'exemple (figure 18), on peut identifier des points qui permettent de définir les lignes : la donnée du quadrilatère ABCD détermine E et F. Le choix de G sur (EF) détermine les petits triangles. Notons que nous nommons ici les points pour faciliter la communication mais ce n'est pas nécessaire pour une analyse de figure dont on n'a pas à communiquer le résultat.

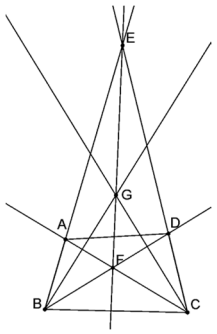


Figure 18

Conclusion de la première partie

Pour dépasser la rupture dans le rapport aux figures entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il nous paraît essentiel de penser une progression cohérente de la géométrie, en y incluant les grandeurs géométriques, du cours préparatoire jusqu'à la fin du collège qui puisse servir d'appui à une progression sur les nombres. C'est dans ce sens que nous travaillons. Pour que notre approche soit cohérente, il faut donc que la géométrie soit

fondée sur une axiomatique sous-jacente qui ne suppose pas le nombre. Nous ne chercherons pas à l'expliciter. Disons que c'est l'axiomatique d'Euclide complétée par Hilbert mais en intégrant les transformations, au moins la symétrie axiale. L'axiomatique qui fonde la géométrie du collège n'a pas besoin d'être minimale. La cohérence de l'ensemble est assurée par le fait que nous ne prenons comme axiomes que des axiomes ou théorèmes de la géométrie d'Euclide - Hilbert[6].

Notre problématique consiste à s'appuyer sur la géométrie physique et notamment la construction de figures en y faisant entrer des raisons de la géométrie théorique. Les propriétés des figures de la géométrie théorique se traduisent par des propriétés visuelles des figures matérielles qui les représentent. Dans la géométrie physique, on peut établir un répertoire de figures et de propriétés qu'on connaît et qui évitent d'aller jusqu'à la superposition du calque pour vérifier quand on fait une reproduction de figure : par exemple, on utilise les propriétés des figures classiques, notamment les quadrilatères et triangles particuliers. L'enseignement à l'école est centré sur ces propriétés en donnant de plus la priorité à la mesure, dans le but d'aller vite à des connaissances utiles socialement. Nous pensons que cela contribue à accentuer la rupture entre les deux modes de validation des figures. En effet, les mots et propriétés introduits dans le cadre de la géométrie physique sont repris avec une tout autre signification dans le cadre de la géométrie théorique sans qu'on éclaircisse ce qui se retrouve et ce qui ne se retrouve pas. Par exemple, dans la géométrie physique, les propriétés du rectangle sont liées à la caractérisation d'une forme pour la décrire ou la construire : un rectangle n'est pas un parallélogramme. Dans la géométrie théorique, il est plus économique pour les démonstrations de donner des définitions qui incluent le rectangle parmi les parallélogrammes.

Nous faisons l'hypothèse que les figures planes tracées sur une feuille de papier avec des instruments qui permettent de reporter des formes et des grandeurs constituent un milieu riche pour représenter les savoirs de base de la géométrie élémentaire plane sans passer par les nombres : relations entre droites, demi-droites, segments, points, cercles dans leur capacité à représenter des objets plats de l'espace et leurs relations. Dans la deuxième partie, nous verrons comment nous avons complété notre cadre théorique dans le cas de la reproduction de figures sur papier avec des instruments et recherché des situations qui pouvaient favoriser l'évolution du regard sur la figure et la conceptualisation des notions géométriques au long de la scolarité obligatoire.

II. Reproduction de figures comme source de problèmes permettant d'assurer une continuité de l'enseignement tout au long de l'école obligatoire

Dans cette deuxième partie, nous nous intéressons à la reproduction de figures matérielles sur papier. A partir de l'exemple de la reproduction d'un polygone, nous dégageons un certain nombre de questions concernant la reproduction de figures : Quand dirons-nous que nous avons affaire à la même figure ? Comment le vérifie-t-on ? Avec quels instruments peut-on le faire ? L'examen de ces questions nous amènera à émettre quelques hypothèses concernant les variables didactiques des situations de reproduction de figures et leur utilisation dans la construction de situations facilitant l'entrée des élèves dans la géométrie théorique.

[6] Dans le cadre d'un groupe de l'IREM de Paris animé par Daniel Perrin, nous travaillons actuellement à l'explication d'une progression pour le cycle 4 compatible avec les programmes de 2016 et d'une axiomatique de ce type qui la fonde.

1. Reconnaître et reproduire un polygone de la maternelle à la 6ème

Les moyens de reconnaissance et de production d'une figure évoluent radicalement au cours de la scolarité obligatoire. Prenons l'exemple d'un polygone (figure 19).

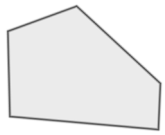


Figure 19

A la maternelle, on recourt à la seule perception. Les formes géométriques sont des objets plats de l'espace qu'on manipule. En fin de grande section, on peut tracer les contours d'un gabarit : on obtient une « figure simple ». Au cycle 2, on introduit la règle. Elle devient indispensable pour reproduire le polygone si on ne dispose que d'un gabarit grignoté (figure 20). Le prolongement des côtés donne le sommet manquant. Les élèves du cycle 2 acceptent difficilement d'obtenir ce sommet par une intersection. Un instrument de report de longueur permet de ne pas déborder (figure 21). S'il manque tout un côté, on peut encore s'en tirer avec le report de longueur et il devient nécessaire (figure 22).

Figure 20

S'il manque deux côtés entièrement, il faut d'abord reporter deux longueurs (figure 23) et on a besoin d'un nouvel instrument pour reporter au moins un angle. On peut terminer le polygone en reportant 2 angles avec un papier qu'on plie (gabarit d'angle) ou avec du calque, on obtient le dernier sommet par intersection des côtés de l'angle. On peut aussi reporter un angle et une longueur pour obtenir le dernier sommet, il reste à tracer le dernier côté. Au cycle 3, on se limite généralement au cas du carré ou du rectangle où le report d'angle peut se faire à l'équerre mais le cas du polygone peut être proposé dans le cadre de l'étude des angles.

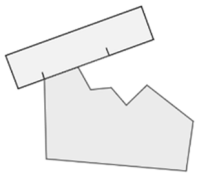


Figure 21

Pour terminer la reproduction, on peut aussi joindre les extrémités des segments prolongés (figure 23) pour obtenir une diagonale du polygone et s'apercevoir qu'il reste à reproduire un triangle. On peut alors comprendre que s'il manquait entièrement trois côtés, on pourrait terminer le polygone en reproduisant deux triangles et qu'on peut reproduire le polygone entier en reproduisant 3 triangles. On en déduit que si on sait reproduire un triangle, on sait reproduire n'importe quel polygone en le décomposant en triangles. Il est donc intéressant de savoir reproduire des triangles.

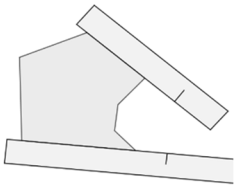


Figure 22

On peut reproduire un triangle en reportant des angles et des longueurs (une longueur et deux angles ou bien un angle et deux longueurs). On peut aussi reproduire un triangle en reportant trois longueurs et un angle droit (avec une équerre) en coupant le triangle en deux triangles rectangles (figure 24). Tous ces modes de reproduction sont compatibles avec une vision surfaces et lignes comme supports des côtés.

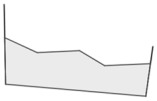


Figure 23

En revanche, pour comprendre et justifier la reproduction d'un triangle au compas à partir des longueurs des côtés, il faut voir un point comme intersection de lignes et voir le cercle comme un ensemble de points à une distance donnée du centre. C'est un objectif de sixième. L'algorithme peut avoir été rencontré par les élèves en primaire mais rarement justifié en terme de recherche d'un point à des distances données de deux points donnés.

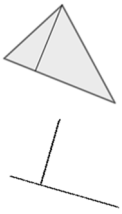


Figure 24

Ces questions sur les moyens de reproduire des polygones et notamment des triangles constituent une excellente préparation aux cas d'égalité des triangles qui reviennent dans les programmes du cycle 4.

2. Que veut dire reproduire une figure ?

Dans l'exemple précédent, nous nous sommes intéressés à la reproduction d'un polygone à l'identique : la forme et la taille du polygone sont conservées, on peut vérifier l'exactitude de la reproduction par superposition d'un calque. Plus généralement, pour l'étude ou la reproduction d'une figure matérielle tracée sur papier avec un mode de validation matériel, deux cas sont à considérer : soit on reproduit la figure à l'identique et la vérification de l'égalité des figures se fait par superposition avec un calque ; soit la reproduction se fait à une taille différente et la conformité au modèle demande la mise en œuvre de propriétés géométriques comme la conservation des angles, des alignements, des rapports de longueurs. Elle peut se faire aussi par la vérification des propriétés de la figure à reproduire, par exemple pour un triangle équilatéral ou un carré (plus généralement, le nombre de côtés détermine un polygone régulier à une similitude près, autrement dit son nom détermine sa forme). Remarquons que ce n'est pas le cas pour un rectangle non carré ou un triangle isocèle non équilatéral : pour un triangle isocèle, il faut de plus respecter les angles ou un rapport de longueur, pour un rectangle, respecter les angles ne suffit pas : il faut de plus respecter un rapport de longueur. Le triangle joue un rôle majeur dans la reproduction des figures à une taille différente puisque la conservation des angles assure la conservation de la forme : des triangles dont les angles sont égaux sont semblables.

Si l'on reproduit la figure à l'identique, forme et grandeurs sont conservées ; si l'on reproduit la figure à une taille différente, la forme est conservée, les angles aussi mais les longueurs ne le sont pas, seul le rapport entre les longueurs est conservé. En géométrie conserver la forme signifie produire une figure semblable au modèle mais le mot « forme » a bien d'autres sens en français et, même en cours de géométrie dans les années antérieures, « avoir la même forme » a parfois un sens beaucoup plus large. Ainsi, quand on trie des « formes géométriques » (objets matériels) en maternelle ou au début de cycle 2, on distingue les formes triangle, rectangle, carré, rond et ce sera à ce moment-là un apprentissage de mettre tous les rectangles dans la même catégorie, aussi allongés soient-ils, et de les distinguer des carrés qui ont une propriété supplémentaire. Ce n'est qu'en sixième, quand on sera en mesure d'accepter une définition d'un objet géométrique à partir de ses propriétés, qu'on pourra inclure le carré dans la famille des rectangles : c'est une véritable révolution de point de vue. En effet, en maternelle, les objets sont premiers : on découvre et formule des propriétés qui permettent de les reconnaître par la perception visuelle ou par le toucher. Ces propriétés correspondent à des caractéristiques visuelles des traces graphiques que ces objets laissent sur le papier quand on en fait le contour. On peut produire les traces graphiques des objets matériels sans en faire le contour avec des instruments qui permettent de reproduire et de vérifier les caractéristiques visuelles de ces traces. Ces caractéristiques visuelles correspondent aux propriétés (égalités de longueur, angles droits, parallélisme) qui permettront de définir les objets géométriques. Le vocabulaire introduit sur les objets matériels reste le même ou presque quand il s'applique aux traces graphiques, puis aux objets géométriques que ces traces représentent.

Au cours de la scolarité obligatoire il y a donc deux tournants majeurs à gérer dans le mode de définition des figures :

- Au cycle 2 et au début du cycle 3 : il faut passer de la seule perception au contrôle des propriétés par des instruments.

- Au cycle 3 et au début du cycle 4 (fin du primaire et collège) : il faut passer du contrôle par les instruments au contrôle par les énoncés.

Les instruments usuels, règle, équerre, compas, jouent un rôle essentiel dans le passage du contrôle des figures par la seule perception au contrôle par les énoncés. Cependant les instruments du commerce remplissent en général plusieurs fonctions qu'il nous paraît nécessaire de distinguer dans l'apprentissage parce qu'elles sont liées à la conceptualisation de notions géométriques différentes. Par exemple, la règle graduée remplit trois fonctions : produire ou vérifier de l'alignement, reporter une longueur, mesurer une longueur. Nous allons expliquer dans le paragraphe 3 pourquoi nous excluons la mesure de notre approche de la géométrie des tracés et nous intéresser aux autres fonctions des instruments dans le paragraphe 4.

3. Grandeurs et mesures

Notre objectif à long terme est de penser une progression cohérente de la géométrie du cours préparatoire jusqu'à la fin du collège coordonnée à une progression sur les nombres. Dans cette perspective, il est essentiel d'aborder les opérations (addition, soustraction, multiplication et division par un entier) sur les grandeurs géométriques (longueurs d'abord, angles et aires ensuite) indépendamment de leur mesure pour qu'elles puissent servir d'appui pour la construction des nombres. Nous pensons en effet que les grandeurs géométriques et leurs opérations jouent un rôle essentiel dans la construction des nombres, en particulier l'extension des entiers et de leurs opérations aux décimaux, rationnels et réels, et même au-delà pour l'algèbre. Ainsi, nous parlons de grandeur et non de mesure dans la géométrie physique comme dans la géométrie théorique : quand c'est nécessaire, la taille des figures est fixée par des longueurs données par des segments et non par leur mesure. Dans la suite, nous nous intéresserons aux instruments de tracé et de report de longueur ou d'angle et non aux instruments de mesure (les graduations des règles, équerres ou rapporteurs). La règle (non graduée) permet de tracer des lignes droites ; elle est liée à la conceptualisation de l'alignement. L'équerre permet de tracer des lignes et de reporter des angles droits ; elle est liée à la conceptualisation de la notion d'angle droit avec ses deux côtés infinis. Le compas permet de tracer des cercles et aussi (plus tard) de reporter des longueurs sur une droite déjà tracée (c'est en fait l'intersection d'une demi-droite et d'un cercle). Avant d'utiliser le compas dans ce but, le report de longueur peut se faire avec d'autres instruments, par exemple une bande de papier avec un bord droit sur lequel on peut porter des repères ; le compas à pointes sèches a le même usage mais la longueur à reporter n'est pas matérialisée par un segment. Nous envisagerons d'autres nécessités du tracé et d'autres instruments au paragraphe 4.

Bien sûr, nous ne voulons pas dire qu'il ne faut pas apprendre à mesurer avec la règle graduée ou avec le rapporteur. Mais la mesure est pour nous du côté des nombres et pour qu'elle puisse jouer son rôle dans la conceptualisation des nombres, il faut aussi (d'abord ou simultanément) travailler la mise bout à bout des longueurs, l'addition des aires et des angles… La place à donner aux mesures dans l'enseignement élémentaire de la géométrie est un sujet sur lequel on manque de travaux. En primaire et en sixième, l'usage très fréquent des mesures pour fixer les figures (taille et forme) facilite le contrôle du professeur sur le travail des élèves mais il se peut qu'il enlève de la généralité et de la richesse aux problèmes concernant les figures de la géométrie physique et qu'il enlève ainsi aux élèves des occasions de construire des concepts géométriques.

4. Les instruments de tracé, interface entre le perceptif et le théorique

Dans la géométrie physique, les figures matérielles se tracent avec des instruments concrets qui ont un domaine d'efficacité limité ; les tracés à main levée, éventuellement codés, sont

des schémas qui aident la mémoire et qu'il s'agit de réaliser avec les instruments. Dans la géométrie théorique, les figures matérielles se tracent à main levée ou avec des instruments, elles supportent le raisonnement, la figure de travail est la figure géométrique (immatérielle). Même dans la géométrie physique, la recherche de la solution d'un problème de construction réfère à des instruments théoriques : la règle est infiniment longue, de même que les côtés de l'angle droit de l'équerre, les branches du compas peuvent s'écarter et se rapprocher autant qu'on veut. Au moment de la réalisation se posera la question des limitations éventuelles des instruments dont on dispose, ce qui peut d'ailleurs soulever de nouveaux problèmes théoriques.

Intéressons-nous maintenant aux instruments matériels pour tracer et reproduire des figures sur papier (figures simples ou composées), en lien avec le regard qu'on porte sur ces figures, des instruments qui permettent donc de reporter des formes (morceaux de surfaces ou lignes et relations entre lignes) et des grandeurs (angles ou longueurs). Pour penser la continuité de l'enseignement de la géométrie sur la scolarité obligatoire, il nous faut inclure les gabarits, pochoirs et papier calque parmi les instruments. Nous considérons ainsi des instruments de tracé variés qui requièrent une vision plus ou moins élaborée de la figure et la mise en œuvre de plus ou moins de propriétés géométriques.

Les gabarits et pochoirs permettent de transporter toute l'information sur certaines figures que nous appelons simples. Une *figure simple* est donc une figure que l'on peut obtenir en traçant le contour d'un gabarit ou d'un pochoir. C'est une surface avec un bord qui ne se recoupe pas ou c'est une ligne fermée qui ne se recoupe pas et englobe donc une partie connexe du plan. Les autres figures sont des *figures composées* qu'on peut voir comme des assemblages de figures simples juxtaposées ou superposées ou comme des assemblages de lignes dont certaines sont fermées et d'autres ouvertes. Les points sont en général des sommets de figures simples ou des intersections de lignes ; il peut de plus y avoir quelques points isolés (par exemple le centre d'un cercle). C'est surtout pour le cas des surfaces composées que nous avons défini trois visions de la figure et essayé de voir comment elles doivent évoluer au cours de la scolarité primaire. Le papier calque, s'il est assez grand, permet de reporter en une fois toute l'information sur la figure à reproduire, qu'elle soit simple ou composée.

D'autres instruments permettent de transporter des informations D2 sur la figure sans transporter toute l'information : gabarit ou pochoir déchiré, calque trop petit, morceau de papier opaque sur lequel on peut écrire, mais aussi équerre, compas d'angle, règle à bords parallèles. Par exemple l'équerre transporte des informations sur un morceau de surface compris entre deux bords droits. En revanche, la règle ne permet que de vérifier et de reporter des alignements, c'est-à-dire des informations D1. Le compas permet de reproduire des cercles ; en cela il transporte une information D2 (un disque ou une partie de disque) mais, pour le faire, il est nécessaire d'identifier deux points : le centre du cercle et un point de la circonférence. L'usage raisonné du compas (avec justifications) nécessite donc une *vision points* de la figure : savoir que, quel que soit le point qu'on prend sur le cercle, il sera à la même distance du centre. Rappelons que pour la plupart des élèves qui entrent en sixième (et sans doute plus tard pour certains d'entre eux), les cercles, pas plus que les droites ou les segments ne sont vus comme des ensembles de points ; n'existent que les points qui sont identifiés comme sommets, intersections ou marqués sur une ligne ou une surface.

Dans le paragraphe 2, nous avons émis l'hypothèse que les instruments jouaient un rôle essentiel dans le passage du contrôle des propriétés des figures par la seule perception au contrôle par des énoncés et donc dans la construction progressive d'un point de vue théorique. Nous allons maintenant préciser cette hypothèse en définissant les instruments théoriques

dont nous aurons besoin pour représenter les différentes fonctions des instruments matériels et en explicitant les conditions d'un usage géométrique des instruments matériels.

Dans la géométrie théorique achevée, les seuls instruments théoriques dont nous avons besoin sont *la règle* et *le compas*. Mais, quand les connaissances sont limitées, d'autres instruments sont nécessaires pour reporter les propriétés des figures sans recourir à la mesure et aux nombres. Nous avons déjà parlé de *l'équerre* théorique avec des bords infiniment longs. Il nous faut ajouter trois instruments : *le reporteur de longueurs* qui permet de reporter une longueur sur une droite, *le médiateur de segments*[7] qui permet de prendre le milieu d'un segment et *le reporteur d'angles* qui permet de reporter un angle à partir d'une demi-droite déjà tracée. Ces instruments théoriques peuvent être réalisés de différentes manières par des instruments matériels qui remplissent une ou plusieurs fonctions des instruments théoriques. Par exemple, une bande de carton rigide avec un bord droit sur lequel on peut écrire est un reporteur de longueurs mais ne permet pas de prendre le milieu d'un segment ; nous l'appelons aussi règle informable (sur laquelle on peut porter des informations de longueur, des repères) ; une bande de papier avec un bord droit remplit aussi cette fonction mais, comme on peut la plier, c'est aussi un médiateur. D'autres médiateurs (par exemple un papier réglé par une famille de parallèles équidistantes, appelé aussi guide-âne) sont fondés sur des propriétés géométriques que l'on établira au cours du collège (propriété de Thalès ou des diagonales du parallélogramme). Un morceau de papier sans bord droit mais qu'on peut plier ou sur lequel on peut écrire, peut jouer la fonction de reporteur d'angles. Le papier calque peut jouer les trois fonctions. D'autres instruments théoriques correspondant à des instruments matériels réalisables peuvent être envisagés comme la règle à bords parallèles (Celi, Jore, 2015) pour faire travailler d'autres propriétés et d'autres techniques. A mesure que les connaissances des élèves augmentent, on peut réduire le nombre des instruments théoriques (et matériels) nécessaires pour reproduire des figures : par exemple, le reporteur de longueur peut assez vite (dès le cours moyen) être remplacé par le compas. Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie.

Pour que les instruments matériels qu'utilisent les élèves puissent jouer le rôle d'interface entre la géométrie physique et la géométrie théorique, il est important que ceux-ci apprennent à en faire un usage que nous appelons géométrique parce qu'il respecte des règles qui correspondent au report des propriétés géométriques avec les instruments théoriques. Cet apprentissage n'est actuellement pas pris en charge par l'enseignement. Or il nous paraît essentiel pour éclairer les liens entre géométrie physique et géométrie théorique parce qu'il met l'accent sur la justesse de la construction plutôt que sur sa précision (Petitfour, 2015).

Précisons donc maintenant *l'usage géométrique des instruments matériels* :

- La règle sert à tracer des segments ou des droites et à vérifier des alignements. Pour la placer, il faut deux points ou un segment déjà tracé ; elle permet de vérifier l'alignement de trois points (ou plus), d'un segment et d'un point, de deux segments.
- Le report d'une longueur se fait à partir d'un point sur une droite qu'on connaît déjà ; on prend la longueur avec un reporteur de longueur (règle informable ou compas à pointes sèches) et on la reporte sur la droite connue, à partir du point connu, d'un côté ou de l'autre de ce point.
- Le milieu d'un segment est aligné avec les extrémités et il se trouve à la même distance de ces deux extrémités ; on a besoin d'un papier avec un bord droit pour reporter la longueur du segment ; quand on le plie en faisant coïncider les deux extrémités, on obtient une

[7] Nous introduisons ce mot pour faciliter l'écriture de ce texte. Nous ne proposons pas de l'introduire auprès des élèves parce que c'est un instrument provisoire dans le cours de géométrie. On disposera au plus tard en sixième de connaissances qui permettront de prendre un milieu à la règle et au compas et du mot « médiatrice ».

longueur moitié que l'on peut reporter à partir d'une des extrémités du segment, vers l'intérieur.

- Pour poser l'équerre, il faut une droite sur laquelle on pose un côté de l'angle droit, on peut la faire glisser sur cette droite si l'on veut que l'autre côté de l'angle droit passe par un point donné.

- Le compas a deux branches différentes : la pointe se pose sur le centre du cercle, la mine décrit un arc de cercle quand on tourne. Pour reproduire un cercle, il faut repérer le centre et prendre l'écartement jusqu'à un point du bord. Cet écartement représente une longueur : la distance entre le centre et n'importe quel point de la circonférence. On peut donc reporter une longueur à partir d'un point sur une droite avec le compas en plaçant la pointe sur ce point et en faisant un arc de cercle qui coupe la droite.

- Pour le report d'angles, on peut ne pas avoir de contrainte quand on commence la reproduction d'une figure ; dans ce cas, le repérage des directions des deux côtés de l'angle sur un papier (calque ou non) suffit. Mais, le plus souvent, on reporte l'angle à partir d'une demi-droite qu'on a déjà : on reporte alors le sommet sur le point origine de la demi-droite et un côté sur la demi-droite qu'on a déjà et on reporte l'autre côté de part ou d'autre de cette demi-droite. Comme pour le report de longueur, il y a deux possibilités.

La construction d'un rectangle dont un côté et une diagonale sont donnés en grandeur donne un exemple qui montre l'intérêt de l'identification de l'usage géométrique des instruments pour l'apprentissage et l'entrée dans une problématique géométrique. La construction usuelle du rectangle à l'équerre et à la règle graduée à partir des côtés de l'angle droit ne permet pas de répondre directement au problème. Les élèves sont alors tentés de procéder comme pour la construction du triangle rectangle de la figure 11 : après avoir tracé la diagonale et repéré la longueur du côté de l'angle droit sur un côté de l'équerre, ajuster l'équerre en la faisant tourner autour d'une des extrémités de cette diagonale tout en maintenant fixe la longueur du côté de l'angle droit.

Cette procédure, qui correspond à la problématique pratique de Berthelot et Salin, ne respecte pas l'usage géométrique de l'équerre : on doit poser un côté de l'angle droit de l'équerre sur une droite qu'on a déjà. Ici, il n'y a pas de droite sur laquelle poser un côté de l'angle droit de l'équerre. Une autre procédure pratique consiste à tracer le côté du rectangle dont on connaît la longueur et le support d'un côté consécutif en une des extrémités et à faire tourner le reporteur de longueur en maintenant le point origine sur l'autre extrémité du côté jusqu'à ce que le repère de longueur soit sur la demi-droite support du deuxième côté. Cette fois, c'est l'usage du reporteur de longueur qui n'est pas géométrique : on ne peut reporter une longueur que sur une droite qu'on a déjà. Si on n'a pas de droite support, il faut utiliser un compas. L'explicitation de l'usage géométrique des instruments contribue donc à invalider les procédures relevant de la problématique pratique.

5. Construction et réduction du nombre des instruments

Nous avons déjà dit que les élèves peuvent utiliser le compas comme reporteur de longueur quand ils voient l'écart entre la pointe et la mine comme une longueur et le cercle comme un ensemble de points à la même distance du centre. A mesure que les connaissances des élèves évoluent, ils disposent d'un répertoire de théorèmes et de procédés de construction qui leur permet de se passer aussi du médiateur de segment et de l'équerre puis du reporteur d'angle. Les techniques associées peuvent se rencontrer plus tôt, dans la réalisation de figures particulières. Prenons l'exemple de la construction du milieu d'un segment :

Construction du milieu d'un segment

La construction d'un triangle isocèle ou d'un triangle équilatéral avec un compas conduit à un procédé de construction du milieu d'un segment (figure 25) : c'est le procédé de construction de la médiatrice en lien avec la symétrie.

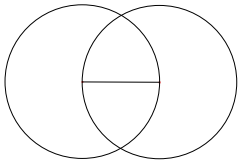


Figure 25

On peut aussi construire le milieu d'un segment à l'équerre en lien avec les propriétés des diagonales d'un parallélogramme (figure 26).

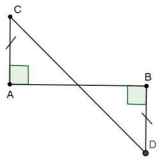


Figure 26

La construction est valable en reportant un autre angle et une même longueur à chaque extrémité du segment en lien avec les théorèmes sur sécantes et parallèles ou les cas d'égalité des triangles.

Bien sûr les théorèmes liés à Thalès dans le triangle nous donnent de nouveaux moyens : on peut reporter deux fois une même longueur sur une sécante si on sait tracer au compas une parallèle passant par un point (figure 27).

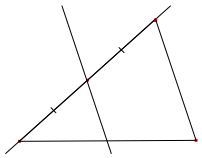


Figure 27

Avec une règle à bords parallèles, il est plus commode de procéder autrement parce qu'il est coûteux de construire une parallèle à une droite donnée passant par un point donné puisque la distance entre les parallèles[8] est fixe :

Si l'on dispose d'un reporteur de longueur, sur une parallèle au segment [AB], on reporte la longueur AB de chaque côté d'un point C pour obtenir les points D et E (figure 28) ; les demi-droites [DA] et [EB] se coupent en un point F et [FC) coupe [AB] en son milieu. Sans report de longueur, on peut procéder comme indiqué sur la figure 29 avec une double utilisation de Thalès.

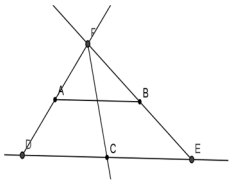


Figure 28

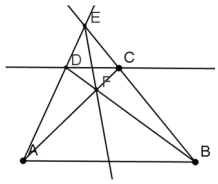


Figure 29

Si l'on prend E sur une deuxième parallèle à [AB] à la même distance, on peut utiliser le point de concours des médianes d'un triangle.

6. La situation de restauration de figure

La restauration de figure avec coût sur les instruments[9] est un type de situation que nous avons mis au point et étudié dans le but de travailler la mobilité du regard sur les figures (en particulier le passage de la vision surfaces à la vision lignes et points) ainsi que l'usage géométrique des instruments matériels, c'est-à-dire un usage conforme à celui d'instruments théoriques permettant d'expliciter des propriétés géométriques et pas seulement graphiques.

[8] En effet, nous ne retenons comme usage géométrique de la règle à bords parallèles que ce que Celi et Jore (2015) appellent SU2 : il faut une droite ou deux points pour poser le premier bord de la règle à bords parallèles. Avec l'usage SU1, on accepte l'ajustement de la règle par un mouvement de rotation : on peut faire tourner la règle pour que ses bords opposés passent par deux points donnés (à condition que la distance qui sépare ces points soit supérieure à la largeur de la règle), ce qui n'est pas possible avec SU2. L'usage SU1 permet toutes les constructions à la règle et au compas (Berthe et Cazier, 2000). Il autorise donc des constructions que ne permet pas nécessairement SU2.

[9] Il s'agit d'attribuer des points à l'usage de chaque instrument. Celui qui restaure la figure en dépensant le moins de points a gagné. Des exemples sont donnés dans la suite.

Nous la définissons à partir des caractéristiques d'une situation en théorie des situations : le problème et la règle du jeu, le milieu et ses variables didactiques, les connaissances en jeu.

1) Le problème et la règle du jeu. Une restauration de figure est une reproduction de figure matérielle mais avec des contraintes particulières :

- Une figure modèle est donnée (en vraie grandeur ou non).
- Une partie de la figure à obtenir (amorce) est donnée soit par son tracé, soit par un instrument qui permet de reporter des informations D2 de la figure initiale mais sans donner toute l'information.
- On dispose d'instruments variés qui ont un coût d'utilisation donné dans un barème.
- Quand les élèves pensent avoir terminé, ils peuvent tester leur production par un calque disponible auprès du maître.

2) Le milieu est constitué notamment de la figure modèle, de l'amorce de la figure, des instruments avec leur coût. Les variables (didactiques) portent sur les choix de ces différents éléments du milieu.

3) Les connaissances en jeu sont à examiner dans chaque cas. Il faut choisir le milieu et la règle du jeu en fonction des connaissances supposées disponibles et de celles dont on veut favoriser l'émergence.

Il s'agit de restaurer des figures matérielles à l'aide d'instruments matériels. La figure modèle donne des informations sur des caractéristiques graphiques que l'on peut identifier et reproduire avec les instruments. Cependant certaines de ces caractéristiques graphiques représentent des propriétés géométriques qui peuvent être reconnues comme telles et dont on peut déduire de nouvelles propriétés géométriques qui ont pour conséquence de nouvelles caractéristiques graphiques. Par exemple, dans un quadrilatère deux sommets opposés sont alignés avec le point d'intersection des diagonales. Le choix des variables didactiques est fait en sorte que l'utilisation des propriétés géométriques qu'on veut travailler permette de réduire le coût de la restauration. La restauration de figure vise ainsi à encourager l'identification de lignes et de points qui permettent de définir géométriquement la figure et de la construire. Si l'objectif est d'aider les élèves à passer d'une vision surfaces à une vision lignes et points des figures, on peut faire un choix des variables tel que la construction soit possible avec une vision surface, mais avec un coût plus élevé. L'usage géométrique des instruments est défini progressivement en lien avec la définition du coût des instruments. On peut trouver de nombreux exemples de restauration de figure dans des articles publiés antérieurement notamment Keskessa, Perrin-Glorian et Delplace (2007), Perrin-Glorian et Godin (2009), Perrin-Glorian, Mathé et Leclercq (2013), Perrin-Glorian et Godin (2014) et on peut en trouver d'autres sur le site géré par Marc Godin www.aider-ses-eleves.com. Nous présentons ici un exemple très simple, qui pourrait se situer en fin de primaire ou en sixième et a pour objectif de travailler les propriétés du rectangle et du cercle.

On veut restaurer la figure constituée d'un rectangle avec ses diagonales. On donne comme amorce l'un des triangles quarts de rectangle (figure 30). On dispose de trois instruments pour reproduire : la règle est gratuite ; chaque usage du reporteur de longueur vaut 2 points et l'usage du compas 1 point. Comment reproduire la figure au moindre coût ?

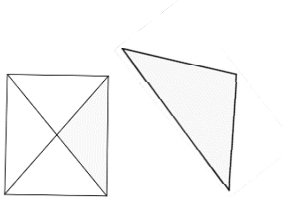


Figure 30

L'amorce n'est pas à la même échelle que le modèle et elle est orientée différemment ; il faut savoir à quel triangle elle correspond : on peut le vérifier en se fiant à la perception visuelle ou en vérifiant les angles avec une feuille de papier que l'on plie ou bien le texte dit

(par exemple en le coloriant sur le modèle) de quel triangle il s'agit. Avec le choix fait pour le coût des instruments, la stratégie gagnante consiste à utiliser le compas : on a le centre du cercle circonscrit au rectangle et deux de ses points, on peut donc le tracer au compas ; il suffit ensuite de prolonger les petits côtés du triangle isocèle fourni pour obtenir les diagonales et, à l'intersection avec le cercle, les sommets du rectangle et tracer ensuite les côtés ; le coût est de 1 point.

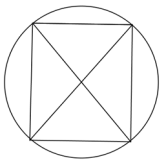


Figure 31

Une autre stratégie consiste à reporter la longueur des côtés égaux du triangle isocèle sur leur droite-support vers l'extérieur à partir du sommet du triangle isocèle (qui est le point d'intersection des supports) ; elle coûte 4 points et demande de mettre en œuvre la propriété des diagonales de se couper en leur milieu. A partir d'un triangle quelconque, on obtiendrait un parallélogramme mais, comme on part d'un triangle isocèle, les diagonales sont de plus égales et on obtient un rectangle.

La première stratégie est beaucoup plus probable si le cercle circonscrit figure sur le modèle (figure 31). Sinon, il faut avoir disponible la connaissance qu'un rectangle est inscrit dans un cercle dont le centre est le point d'intersection des diagonales. Le report des longueurs au compas peut aussi faire émerger le cercle : on n'a pas besoin de changer l'écartement du compas entre les deux reports et on a le même centre donc on trace deux arcs d'un même cercle et il suffit d'utiliser une seule fois le compas pour faire le cercle entier et obtenir les sommets manquants comme intersection de deux lignes (une droite et un cercle).

Dans la restauration, les propriétés géométriques à utiliser pour construire sont à reconnaître à travers des caractéristiques graphiques du modèle vérifiables avec les instruments. Dans une construction, les conditions que doit vérifier la figure sont données dans un texte et les propriétés doivent être disponibles. Par ailleurs, la vérification se fait par superposition d'un calque qui porte la solution. Ici, la vérification du fait qu'on obtient bien un rectangle et ses diagonales pourrait se faire à l'équerre. On pourrait aussi le démontrer grâce aux propriétés caractéristiques du rectangle. Nous aborderons les rapports entre restauration et démonstration dans la troisième partie.

La restauration de figure peut viser des propriétés géométriques spécifiques (comme dans l'exemple ci-dessus) mais elle vise d'abord des apprentissages liés à la pratique géométrique et qui ne sont que rarement considérés explicitement, comme :

- Un segment est porté par une droite. Une droite peut se prolonger autant qu'on veut de chaque côté : dès qu'on en connaît une partie, on la connaît toute entière.
- Il faut deux points pour définir une droite.
- Un point s'obtient par l'intersection de deux lignes.
- Il faut un support rectiligne (une droite et même une demi-droite pour n'obtenir qu'un seul point) pour reporter une longueur à partir d'un point et obtenir un autre point ; si on n'a pas de support, il faut un compas pour reporter une longueur à partir d'un point : on obtient tous les points qui sont à la même distance, fixée par cette longueur, du point donné : c'est un cercle et le point cherché se trouve à l'intersection du cercle et d'une autre ligne.

Pour ces apprentissages, on choisit de préférence une figure qui n'a aucune propriété particulière.

Il nous paraît important d'identifier avec les enseignants ces savoirs généralement ignorés par l'enseignement et qui nous paraissent essentiels pour que les savoirs de la géométrie théorique puissent s'appuyer sur ceux de la géométrie physique en dépassant les malentendus identifiés dans de nombreuses recherches.

La restauration de figure permet aussi d'apprendre à enrichir une figure avec de nouveaux tracés qu'on a le projet d'utiliser dans la restauration : ces éléments nouveaux sont reliés à ceux qu'on a déjà et à ceux qu'on cherche à obtenir. Dans l'exemple ci-dessus, on peut enrichir le modèle en y ajoutant le cercle. On aurait pu prendre aussi comme modèle la figure 32 avec la même amorce. Pour restaurer la figure, il aurait d'abord fallu l'enrichir de ses diagonales.

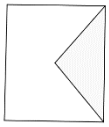


Figure 32

L'activité de restauration contribue ainsi à augmenter l'épaisseur sémiotique des figures qui deviennent porteuses d'informations qui ne sont pas visibles d'emblée mais qu'il faut rechercher et aussi celle du vocabulaire : par exemple le mot « rectangle » sera progressivement porteur de relations de plus en plus nombreuses entre ses éléments visibles – angles, sommets, côtés – et ceux de la figure enrichie – diagonales, cercle circonscrit, axes de symétrie etc. Nous y reviendrons dans la troisième partie.

Au cours du développement de cette approche et d'une première diffusion auprès d'enseignants du primaire, nous nous sommes d'abord intéressés à des restaurations de figures assez complexes que les enseignants appréciaient parce qu'elles fournissaient des problèmes à résoudre en géométrie alors que jusque-là, la résolution de problèmes se limitait au domaine numérique. Cependant, nous avons constaté que les enseignants éprouvaient des difficultés à intégrer cette démarche dans l'ensemble de leur progression en géométrie. En effet, il ne suffit pas de proposer aux enseignants des situations complexes qui représentent le savoir géométrique qu'on veut faire acquérir aux élèves. Il faut identifier ce que nous avons appelé des briques élémentaires qui permettent de fabriquer de telles situations. Un moyen de le faire a été de considérer que reproduire des figures quelconques, c'est reporter des formes et des grandeurs et qu'il fallait donc inscrire notre démarche dans les modes de reproduction des formes et des grandeurs. Le premier pas consiste à étudier l'usage des instruments qui permettent de le faire. L'identification de propriétés vérifiables par les instruments permet de rationaliser l'usage de ces instruments. Le développement du langage géométrique va permettre de formaliser progressivement ces propriétés.

Conclusion de la partie 2

La vision géométrique des figures nécessite l'articulation de la figure et d'un texte (éventuellement donné par codage), elle n'est pas naturelle et il est nécessaire de la travailler pour qu'elle se développe chez les élèves. Une condition d'apprentissage de propriétés géométriques dans le milieu des figures matérielles tracées avec les instruments de tracé usuels (règle, équerre, compas) nous semble être de dégager les règles permettant de définir un usage géométrique des instruments matériels, en lien avec le développement de capacités d'analyse des figures. Pour le faire, il faut relier le langage géométrique à un langage technique permettant de décrire cet usage géométrique des instruments matériels, ce qu'Edith Petitfour (Petitfour, 2015) a appelé le langage technique géométrique. Nous faisons l'hypothèse que c'est un moyen de travailler sur les figures matérielles dans la perspective de développer le langage et les concepts géométriques ainsi que le raisonnement logique à partir d'énoncés. La restauration de figures, par le jeu qu'elle permet sur les variables didactiques, notamment, parmi les caractéristiques graphiques de la figure et de l'amorce, celles qui peuvent s'interpréter comme des propriétés géométriques de la figure à reproduire, ainsi que les instruments à disposition avec leur coût, est un moyen de produire des situations de classe visant ces objectifs.

Notre approche vise ainsi la coordination de trois dimensions majeures : la mobilité du regard sur les figures matérielles, le double rôle des instruments (matériels et théoriques) et le

langage géométrique. Dans la partie 2, nous avons surtout porté notre attention sur les figures et les instruments ; dans la partie 3, nous nous intéressons à d'autres aspects sémiotiques : langage et codage.

III. Figures géométriques définies par des énoncés

Le mot « figure » est, pour nous, un terme générique qui englobe plusieurs objets : nous avons déjà distingué la figure matérielle et la figure géométrique ou figure théorique qui est un ensemble d'objets géométriques avec leurs relations que l'on peut décrire par des énoncés. La figure matérielle a un double statut : elle est l'objet du travail dans la géométrie physique et elle représente une figure géométrique dans la géométrie théorique. Nous préférons ce terme à celui de dessin parce que ce n'est pas n'importe quel dessin ; le fait qu'il puisse se tracer avec des instruments bien définis (la règle et le compas) est essentiel. La figure codée, à laquelle nous nous intéressons maintenant, est une figure matérielle portant des signes pour noter des informations sur cette figure. Ce sont des caractéristiques graphiques si la figure relève de la géométrie physique ou des propriétés géométriques si elle relève de la géométrie théorique.

1. Le codage des figures dans la géométrie physique

Dans le cadre de la géométrie physique, la validité des propriétés est assurée par l'usage des instruments, soit pour les produire, soit pour les vérifier sur une figure matérielle. Le code sert à mémoriser des propriétés qu'on a déjà vérifiées ou qu'on se propose de produire. La situation est différente dans le cas de la reproduction où l'on dispose d'une figure modèle sur laquelle on peut prélever des informations avec les instruments et dans le cas de la construction où l'on n'en dispose pas.

Dans un problème de reproduction (ou de restauration) de figure, le code peut servir à mémoriser les propriétés reconnues perceptivement et vérifiées instrumentalement sur la figure modèle afin de poursuivre la recherche des propriétés nécessaires à la mise au point d'un algorithme de reproduction. En plus des codes usuels pour les angles droits ou les égalités de longueurs ou d'angles, il peut être intéressant d'utiliser la couleur pour coder des propriétés : il est assez courant maintenant de le faire pour coder les droites parallèles mais on peut aussi l'utiliser pour coder l'instrument utilisé dans le cas d'une restauration avec coût sur les instruments. Nous en donnons un exemple dans Godin et Perrin-Glorian (2009) que nous reprenons ici en l'explicitant davantage.

La figure modèle à reproduire et l'amorce sont présentées en taille réduite sur la figure 33. Les instruments utiles sont ici la règle et le reporteur de longueur. Tracer un trait avec la règle coûte 1 point ; reporter une longueur du modèle vers la figure en cours coûte 5 points. Les opérations sur le modèle sont gratuites.

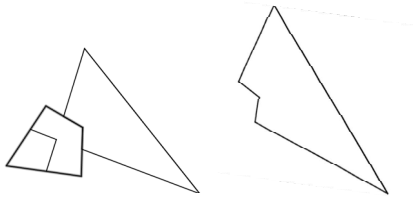


Figure 33

Il est facile d'identifier l'amorce sur le modèle et donc la figure différence (ce qui manque). Les droites tracées en pointillés sur le modèle permettent de relier l'amorce et ce qui manque (figure 34). Quatre de ces droites peuvent se tracer assez facilement sur l'amorce (figure 35). Pour terminer la figure, on peut faire deux reports de longueur (figure 36) qui permettent de tracer les deux droites manquantes

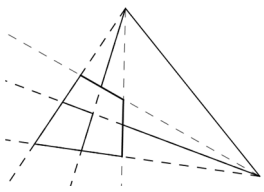


Figure 34

(figure 37). Il reste à repasser en noir la figure réponse et éventuellement à effacer les lignes de construction.

Le tracé des droites se fait avec la règle. Dans la classe observée, les élèves disposent de crayons de couleur ; ils changent de couleur pour chaque nouvelle droite tracée sur le modèle et reportent sur l'amorce une droite de la même couleur. En même temps, ils produisent une écriture additive permettant de calculer le coût de la restauration, en écrivant le nombre 1 ou 5 de la couleur de la droite tracée ou support du report.

Pour la méthode ci-dessous, le coût serait donc 1+1+1+1+5+5+1+1 (avec des nombres écrits dans des couleurs différentes). Cette écriture additive, avec les couleurs, fournit un codage de la procédure de restauration.

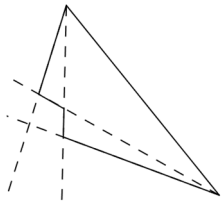


Figure 35

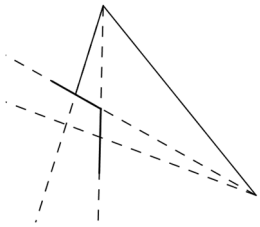


Figure 36

Ce n'est pas la restauration au moindre coût. En effet, le repérage d'un autre alignement sur le modèle (figure 38) permet de ramener le coût à 12 : un seul report de longueur suffit si on le fait sur la diagonale du quadrilatère à ajouter. Deux droites reportées sur l'amorce se coupent en un point que l'on peut joindre à un des sommets de l'amorce pour tracer d'abord le support de cette diagonale et y reporter sa longueur (figure 39). Cela donne un point qu'il suffit de joindre à deux autres sommets de l'amorce pour terminer la figure. Les couleurs permettent de retrouver l'algorithme de construction que l'on peut décrire dans un programme de construction.

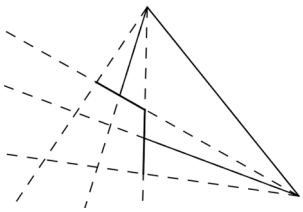


Figure 37

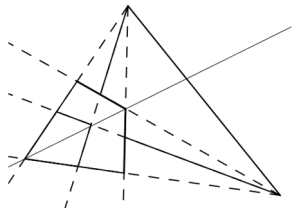


Figure 38

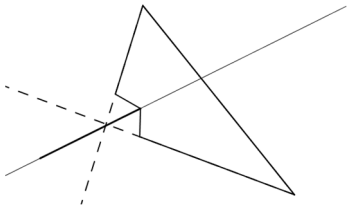


Figure 39

Mais, pour écrire commodément un programme de construction, il faut nommer les points et les droites et savoir qu'on peut désigner une droite par deux de ses points.

Par exemple, si l'on nomme les sommets de la figure modèle et, de la même manière, les sommets correspondants de la figure amorce (figure 40), le programme de construction correspondant à la deuxième procédure pourrait s'écrire : tracer les droites (ou demi-droites) (AC) et (BI) ; elles se coupent au point G ; tracer la droite (GD).

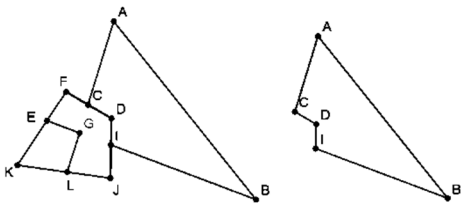


Figure 40

On prend la longueur DK sur le modèle et on la reporte sur la droite (DG) [10] à partir de D du même côté que G (vers l'extérieur de l'amorce). On obtient le point K. On peut tracer la droite (BK) ; elle coupe la droite (AC) en L et la droite (DI) en J. De même, on trace la droite (AK) ; elle coupe la droite (BI) en E et la droite (DC) en F. Tracer le quadrilatère FDJK puis les segments [GE] et [GL].

On voit que, du fait de la nécessité de désignation pour communiquer, l'écriture du programme de construction est beaucoup plus complexe que le codage de la procédure de restauration par l'écriture additive de son coût. Dans la restauration, la présence constante de la figure modèle qu'on peut comparer à l'amorce progressivement complétée facilite le travail de décomposition de la figure. Le calcul du coût demande de garder la mémoire des instruments successivement utilisés ; c'est une étape vers la rédaction d'un programme de construction qui demande une appréhension séquentielle de la figure (Duval, 1994).

Dans un problème de construction d'une figure matérielle, les propriétés de la figure à construire ne sont pas à identifier dans un modèle mais sont données sous forme de texte ou de schéma à main levée codé : dès le primaire, un problème de construction peut être donné par un énoncé mais aussi par un schéma codé ou par une combinaison des deux. Le code peut donc, dans un premier temps, servir à indiquer les propriétés qu'une figure à construire doit satisfaire. Au fur et à mesure de la construction, le code pourra ensuite indiquer les propriétés utilisées sur la figure en cours de réalisation. Une fois la construction réalisée, les autres propriétés demandées et non utilisées dans la construction sont vérifiées avec les instruments et éventuellement codées également. En géométrie dynamique, il faudra vérifier que la figure ne se déforme pas.

Si les connaissances de celui qui construit la figure ne lui permettent pas de répondre directement au problème, il est amené à rechercher les propriétés sur lesquelles peut s'appuyer la construction. Si l'on écarte une solution pratique et qu'on respecte l'usage géométrique des instruments, on est conduit à faire l'analyse d'un schéma codé (souvent à main levée) portant les propriétés à obtenir (problème supposé résolu) pour les relier éventuellement à celles qu'il sera possible d'utiliser pour la construction. C'est la phase d'analyse au cours de laquelle on est amené à enrichir la figure pour en rechercher d'autres propriétés à partir desquelles on peut mener la construction avec les instruments dont on dispose. Même si on est en géométrie physique, il est nécessaire de passer dans cette phase d'analyse par un répertoire de savoirs (dont la démonstration relève de la géométrie théorique mais qui ont le même énoncé dans la géométrie physique).

Dans l'exemple de la construction d'un rectangle connaissant la longueur *b* d'un côté et celle *a* de la diagonale, l'analyse d'un schéma codé (figure 41) montre qu'on peut tracer un côté AB du rectangle dont on connaît la longueur avec la règle et le reporteur de longueur puis le support du deuxième côté avec l'équerre mais il manque sa longueur. On connaît une ligne sur laquelle se trouve D, il faut en trouver une deuxième. Or on connaît la longueur de la diagonale ainsi qu'une de ses extrémités, B. Faire tourner cette longueur *a* autour du point B engendre un disque. Le compas permettra de trouver toutes les extrémités possibles de la diagonale sur un cercle de centre B et de rayon *a*. Le point D cherché se trouve donc sur ce cercle et sur la demi-droite d'origine A déjà tracée.

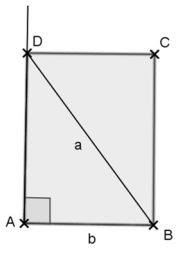


Figure 41

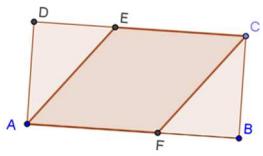
[10] Le fait de désigner une droite par deux de ses points suppose une vision points des figures.

L'analyse du schéma codé, centrée sur les conditions à réaliser et l'usage géométrique des instruments, amène donc à voir une demi-droite support du segment [AD] et le report de la longueur *a* à partir de B comme engendrant un cercle de centre B : comme on n'a pas de droite support pour reporter cette longueur, on a besoin du compas.

Dans des problèmes un peu plus complexes, la phase d'analyse d'un problème de construction peut être difficile pour des élèves de début de collège. La restauration de figure peut être un moyen d'initier cette analyse. Prenons l'exemple suivant :

Construction

> Soit un rectangle ABCD. On veut construire un losange ECFA tel que E soit sur le segment [CD] et F sur le segment [AB].



Restauration (figure 42)

Reproduire la figure suivante : ABCD est un rectangle et AFCE un losange. On a déjà tracé le rectangle.

> Règle : gratuit
> Equerre : 2 points
> Report de longueur : 10 points
> Report d'angle : 10 points

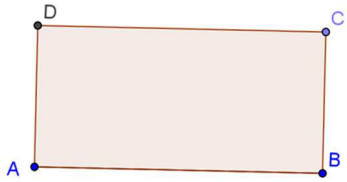


Figure 42

Dans la construction, il faut tracer une figure, fausse mais respectant les relations d'incidence, sur laquelle raisonner et se servir des propriétés des diagonales du losange pour construire. Dans la restauration, la figure à analyser est déjà là. Si le modèle n'est pas à la même taille que l'amorce, on ne peut pas reporter de longueur directement mais on peut reporter des angles directement ou par 2 reports de longueur. Avec le barème proposé pour les instruments, c'est la procédure à l'équerre et à la règle qu'on favorise. Elle demande d'ajouter les mêmes lignes au modèle et de produire la même analyse que dans le cas de la construction.

2. Le codage des figures dans la géométrie théorique

Dans le cadre de la géométrie théorique, la figure matérielle est une représentation d'une figure géométrique, qui est l'objet du travail. Les propriétés de la figure géométrique peuvent être énoncées en langue naturelle ou traduites par des signes conventionnels sur une figure matérielle qui représente la figure géométrique et sert de support pour le codage.

Dans une démonstration, le codage sert à indiquer les propriétés affirmées par les hypothèses ou confirmées logiquement. Dans la construction d'une figure matérielle avec les instruments, les droites et cercles laissent une trace sur le papier et on peut coder les angles droits et égalités de longueurs ou d'angles réalisées avec les instruments. Dans le cas de propriétés données ou obtenues dans la langue naturelle, il n'est pas toujours facile de les coder par des signes sur la figure matérielle (par exemple le parallélisme). On peut donc marquer plus ou moins de signes sur la figure matérielle et il se peut que ces signes ne codent pas toutes les propriétés de l'énoncé, c'est pourquoi nous ajoutons dans le code d'une figure géométrique la formulation de propriétés en langue naturelle. La figure codée est donc dans ce cas une figure matérielle codée par des signes et complétée par des énoncés en langue naturelle. Ainsi nous considérons que le *code d'une figure* est une liste de propriétés déjà établies, qu'elles soient données par des énoncés ou par un codage de la figure matérielle. En fait cette liste n'est jamais exhaustive car, comme le remarquent Marie-Claire Demongeot et Michèle Gandit (Demongeot et Gandit, 2003), il y a des choix à faire pour coder ou écrire ce

que l'on sait sur une figure et le choix de formuler certaines hypothèses plutôt que d'autres s'appuie déjà sur la conclusion que l'on veut obtenir.

Dans un problème de géométrie théorique, puisque le code ne donne qu'une partie des propriétés que vérifie une figure, il s'agit d'identifier et de prouver de nouvelles propriétés géométriques vérifiées par la figure codée initiale. Autrement dit, dans les démonstrations, il s'agit d'enrichir le code d'une figure codée. Deux figures codées différentes peuvent correspondre à la même figure géométrique : par exemple les hypothèses d'un théorème et de sa réciproque correspondent à des figures codées différentes pour la même figure géométrique avec toutes ses propriétés.

Pour quelqu'un qui cherche une démonstration, si le texte est fourni sans figure, la première étape consiste à réaliser une figure et à la coder. Cette figure peut être réalisée à main levée ou avec des instruments. L'article de Demongeot et Gandit montre clairement le danger qu'il y a à demander aux élèves d'expliciter dans la démonstration les « petits pas » qu'on est amené à faire en réalisant la figure et en la codant, d'autant plus qu'il y a déjà un choix de propriétés à faire si l'on veut réaliser la figure avec des instruments. Nous pensons qu'il faut donc accepter ces petits pas sans justification et considérer que les propriétés qui ont servi à la construction de la figure avec des instruments font partie du code initial de la figure mais qu'elles demandent à être explicitées en tant que telles. Reprenons un des exemples étudiés dans l'article et proposé à des élèves de 4ème.

Soit un triangle ABC, non rectangle en B. (AH) est une hauteur du triangle ABC et I est le milieu de [BC]. La parallèle à (AH) passant par I coupe (AB) en J. Démontrer que le triangle BJC est isocèle en J.

Que l'on fasse la figure avec des instruments ou à main levée, le premier tracé est celui du triangle ABC dont on nous dit qu'il est non rectangle en B. L'angle en B est donc aigu ou obtus ; sur la figure 43 nous avons choisi de placer [BC] horizontal ce qui permet de repérer visuellement que l'angle B n'est pas droit (obtus ici). Le texte nomme (AH) la hauteur, donc une droite ; nous interprétons (ce qui n'est pas dit) que H est sur (BC).

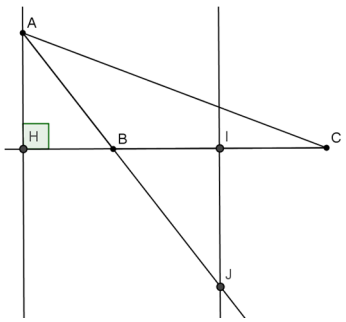


Figure 43

Que l'on trace la perpendiculaire à l'équerre ou à main levée, on peut coder l'angle droit en H puisqu'il est voulu tel. Le point I est le milieu de [BC] ; nous pouvons coder l'égalité des longueurs sur la figure ou en écrivant BI = IC. La parallèle à (AH) passant par I peut se tracer à l'équerre et alors on peut coder l'angle en I comme droit puisqu'il a été construit comme tel : on utilise implicitement le théorème « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles ». Sinon, on peut obtenir des parallèles par un autre moyen, sans mettre en jeu explicitement de connaissances géométriques autres, sur le papier en faisant glisser la droite (AH) sans utiliser l'angle droit de l'équerre ou à main levée, surtout si on a pris la précaution de placer [BC] horizontal comme ici, ou encore en utilisant l'outil « droites parallèles » d'un logiciel de tracé. Dans ce cas, c'est la connaissance du théorème réciproque du précédent « si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre » qui permet de déduire que la parallèle à (AH) est perpendiculaire à (BC). Le point J est à l'intersection de (AB) et de cette droite ; cela donne le droit d'appeler la parallèle (IJ).

Nous considérons que tous ces éléments, y compris l'angle droit en I (qui est une manière de coder le parallélisme via ces deux théorèmes) devraient pouvoir faire partir du code initial de la figure quand on demande une démonstration en 4ème, c'est-à-dire que leur justification

pourrait relever d'une explication du codage de la figure et ne pas être exigée des élèves dans le texte de la démonstration. Autrement dit, on devrait pouvoir dire qu'on sait, par l'énoncé et la construction de la figure que (IJ), qui est parallèle à (AH), est perpendiculaire à [BC] et que I est le milieu de [BC]. On en déduit, par définition de la médiatrice (que l'on peut énoncer), que (IJ) est la médiatrice de [BC] puis, par la propriété des points de la médiatrice (que l'on peut énoncer) que JB = JC et donc que le triangle JBC est isocèle. Le code initial comprendrait donc : l'angle droit en H (ou (AH) perpendiculaire à (BC)) ; l'égalité des longueurs BI = CI ; (IJ) parallèle à (AH) ; (IJ) perpendiculaire à (BC). La démonstration enrichit ce code de la propriété BJ = CJ qu'on ne peut pas obtenir directement dans la construction de la figure à partir des propriétés données et qu'on déduit bien des autres.

Nous pensons que l'entrée dans la géométrie théorique et la démonstration pourrait s'appuyer sur la construction de figures et l'explicitation des contraintes qu'elle engendre en fonction de l'usage géométrique des instruments. Cette idée n'est pas nouvelle. Pluvinage et Rauscher (1986) rendent compte d'une expérimentation en 6ème qui reposait déjà sur cette idée mais ils ne questionnaient pas l'usage des instruments comme nous l'avons fait plus haut et le lien entre construction de figures matérielles avec des instruments et explicitation des propriétés géométriques restait implicite. Revenons donc sur les problèmes de construction du point de vue de la géométrie théorique.

3. Figures codées et construction

Dans un problème de construction, le codage qui est donné au départ (en texte ou en signes) est un objectif à atteindre : il faut montrer qu'il existe une figure géométrique vérifiant les propriétés demandées et qu'on peut exhiber un procédé séquentiel qui, à partir des données, permette d'obtenir tous les éléments de la figure avec leurs propriétés par des tracés de droites et cercles. La différence avec un problème de démonstration est que c'est la construction même de la figure qui est problématique : les propriétés à obtenir, données dans le texte, ne sont en général pas celles qu'il faudra utiliser pour construire la figure et il faut procéder à une analyse d'une figure correspondant au problème supposé résolu (construite à main levée ou en trichant) en enrichissant cette figure pour trouver d'autres propriétés qui entraînent celles qu'on cherche. La solution peut ne pas être unique et il peut y avoir des restrictions. Le codage de la figure matérielle n'a donc pas les mêmes fonctions dans la phase d'analyse et dans la phase de synthèse : recherche de conditions nécessaires (propriétés à obtenir) dans un cas, propriétés obtenues par construction dans l'autre. Nous avons déjà discuté la question de la construction d'une figure matérielle avec des instruments dans la géométrie physique à partir d'un exemple : construire un rectangle dont un côté et une diagonale sont donnés en grandeur, en la mettant en relation avec l'usage géométrique des instruments. Dans la géométrie théorique, la différence principale est au niveau de la validation des propriétés et des instruments qu'on s'autorise pour la construction : on ne se contente pas de vérifier les propriétés avec les instruments mais il faut les prouver.

Sans limiter les instruments à la règle et au compas, les problèmes de construction comme celui-là (figure 44) peuvent motiver une entrée dans la géométrie théorique et la démonstration si, au lieu de vérifier avec les instruments les propriétés demandées sur la figure construite, on les prouve. Ici, la fin de la construction est facile puisque, une fois tracés la perpendiculaire et le cercle, on a un (ou deux si on a tracé une droite plutôt qu'une demi-droite) troisième sommet pour le rectangle ; on peut donc le compléter par les techniques habituelles et les propriétés demandées sont bien vérifiées puisqu'elles ont été utilisées dans la construction.

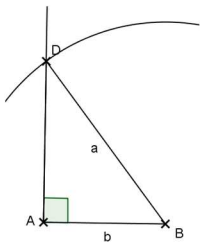


Figure 44

Dans Celi et Perrin-Glorian (2014), nous étudions un autre exemple : construire un cercle tangent aux côtés d'un angle et nous analysons les allers et retours entre langage et figure dans la recherche d'un programme de construction par deux élèves de 3ème. Les élèves font le plus souvent des figures à main levée dans les phases de recherche et testent la réalisation aux instruments. Ici, les propriétés données dans le texte ne sont pas celles qu'on peut utiliser pour construire la figure. La recherche des conditions requises pour tracer le cercle au compas (position de pointe et mine ou position de la pointe et écartement) les conduit à enrichir la figure de la bissectrice de l'angle et des rayons du cercle perpendiculaires aux côtés de l'angle. Cette recherche les amène à argumenter et à recourir à leurs connaissances géométriques même si la démonstration de la validité du programme auquel ils aboutissent n'est pas complète.

Pour examiner de façon un peu plus complète les problèmes de construction du point de vue de la géométrie théorique, intéressons-nous à un cas où il y a des conditions sur l'existence des solutions, par exemple : construire un triangle connaissant (en grandeur) un côté et les hauteurs issues des extrémités de ce côté.

Dans une phase d'analyse, on recherche des conditions nécessaires : le problème nécessite de construire deux triangles rectangles de même hypoténuse donnée et dont un côté de l'angle droit est donné (figure 45). Ils peuvent être de part et d'autre du côté en cas d'angle obtus à l'une des extrémités du côté donné. L'existence d'une hypoténuse commune incite à utiliser l'inscription des triangles rectangles dans un même cercle (figure 46). Ce faisant, on enrichit la figure à construire du cercle ayant pour diamètre le côté donné. Ce cercle peut se construire sans condition à partir du côté donné. Parmi tous les triangles rectangles dont le sommet de l'angle droit est sur ce cercle, il faut prendre ceux dont un côté de l'angle droit a pour longueur celle fixée pour une des hauteurs. Le pied de la hauteur se trouve donc sur un cercle de centre le sommet concerné et de rayon la longueur fixée pour la hauteur correspondante.

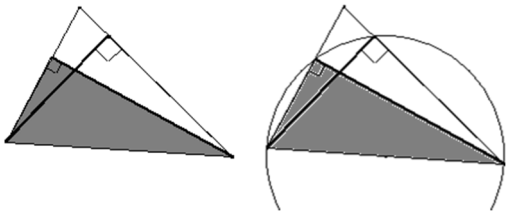


Figure 45

Figure 46

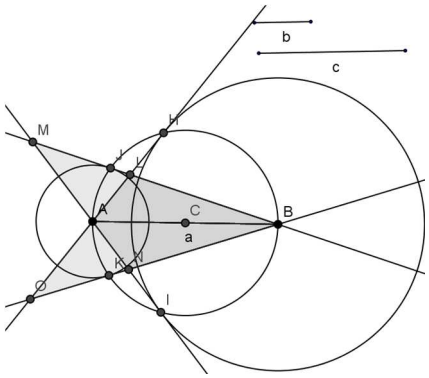


Figure 47

Synthèse : Les cercles ne se coupent que si les longueurs données pour les hauteurs sont inférieures à celle donnée pour le côté (diamètre du premier cercle).

Si ces conditions sont vérifiées, on a 4 solutions pour les pieds des hauteurs, ce qui permet en général d'obtenir 4 triangles deux à deux symétriques par rapport au support du côté donné en joignant un sommet et le pied de la hauteur issue de l'autre sommet (figure 47). Pour terminer, il faudrait encore examiner le cas où des droites ne se coupent pas : dans le cas de longueurs égales pour les pieds des hauteurs ; on n'a alors que deux triangles, isocèles. La réalisation de la figure sur un logiciel de géométrie dynamique permet de matérialiser la différence entre la figure de l'analyse et celle de la synthèse : pour l'analyse, on part du triangle ABM, le point M est donc mobile et son déplacement entraîne la variation des longueurs des hauteurs ; dans la figure de synthèse, seuls A et B sont mobiles ainsi que les rayons des cercles de centre A et B mais ils ne le sont que par le biais des segments qui

représentent cette longueur et que nous avons laissés visibles sur la figure 46. Les problèmes de construction sont difficiles quand ils ne conduisent pas à une solution unique et sans condition supplémentaire. Ce type de problème a disparu de l'enseignement mais les constructions dans les cas simples sont des motivations pour la démonstration et permettent de réduire le nombre des instruments comme nous l'avons vu dans la deuxième partie.

4. Figures clés

Les figures 25 à 29 peuvent aider à mémoriser des moyens de construire le milieu d'un segment et les théorèmes qui permettent de justifier cette construction. Nous dirons que ce sont des figures clés. Plus généralement, nous appelons *figure clé* une figure matérielle codée dont le code correspond aux hypothèses ou à la conclusion d'un théorème connu. Ce code représente une partie des propriétés d'une figure géométrique qui possède d'autres propriétés reliées à celles-ci par un théorème.

Dans l'exemple de construction proposé ci-dessus, la figure des deux triangles rectangles de même hypoténuse est une figure clé dans l'évocation du cercle (en fait des quadrilatères inscriptibles) et donc dans l'identification d'une ligne sur laquelle seront les pieds des hauteurs. Reste alors à trouver l'autre ligne qui permettra de déterminer chacun de ces points. Celle-ci découle de la définition du cercle.

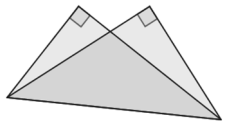


Figure 48

Un théorème de géométrie élémentaire peut souvent se traduire (au moins en partie) par deux figures codées : l'une représentant les hypothèses et l'autre la conclusion. C'est ce qui fait jouer aux figures clés un rôle essentiel dans les démonstrations. En effet, si une figure clé reconnue représente les hypothèses d'un théorème, on peut enrichir le code des conclusions. Si elle représente la conclusion d'un théorème, on peut lui associer la figure clé des hypothèses de ce théorème et rechercher comment on pourrait les démontrer (progression en remontant dans la recherche d'un chemin entre les hypothèses et la conclusion). Nous joignons ici des idées déjà développées par d'autres auteurs (par exemple Houdebine et Kerboeuf, 2005, Tanguay et Geeraerts, 2005).

Dans un problème de géométrie, certaines propriétés d'une figure géométrique sont décrites dans un énoncé. En général (ce n'est pas le cas dans un problème de construction), ces propriétés permettent de construire facilement avec des instruments une figure matérielle qui la représente. Il s'agit de déduire d'autres propriétés de la figure géométrique qui sont données aussi par des énoncés, soit sous forme affirmative (démontrer que) soit sous forme de question. Les outils pour démontrer sont eux aussi des énoncés (axiomes ou théorèmes). Le rôle joué par les instruments dans la géométrie physique est donc joué ici par des énoncés associés à des figures qui peuvent être des figures clés. Ces figures sont à reconnaître dans la figure en général plus complexe du problème cherché : il faut les isoler comme sous-figures, voire compléter la figure donnée pour les faire apparaître et, pour cela, ajouter des lignes qui se définissent à partir des lignes données mais n'apparaissent pas au premier coup d'œil. C'est ce que nous cherchons à travailler dans la restauration de figure. Mais peut-elle contribuer autrement à l'apprentissage de la démonstration ? C'est ce que nous allons examiner maintenant.

5. Restauration de figure : un premier pas vers la démonstration ?

La démarche de restauration d'une figure matérielle avec des instruments de tracé vise à apprendre aux élèves à porter un regard géométrique sur les figures par la nécessité d'analyser les caractéristiques visuelles d'une figure en termes de propriétés qu'on peut reproduire avec des instruments dont l'usage, par les contraintes qu'on y met, va se rapprocher de la

représentation de propriétés géométriques. De plus, dans une restauration de figure, on peut être amené à enrichir la figure modèle de lignes potentiellement présentes, qui ne sont pas tracées mais sont nécessaires pour trouver des propriétés permettant de relier l'amorce à la partie manquante.

La restauration de figure apprend aussi aux élèves à mettre une certaine hiérarchie entre les propriétés que vérifie une figure, certaines étant déjà données (celles fournies par l'amorce), d'autres étant à identifier sur le modèle (qu'on enrichit au besoin à cette fin) parmi lesquelles il faudra choisir celles qui permettent la reconstruction de la figure avec les instruments à disposition, d'autres enfin étant conséquences de celles-là. La recherche de cette hiérarchie sur les propriétés présente une certaine analogie avec celle d'un chemin qui relie hypothèses et conclusion dans une démonstration. Le tableau suivant esquisse un parallèle entre les deux démarches.

<table>
<tr><td rowspan="2">Restauration</td><td rowspan="2">Données :
Figure amorce,
Figure modèle

Ce sont des figures matérielles (muettes ou avec certaines informations).</td><td>Instruments matériels de tracé avec leur coût d'utilisation</td><td rowspan="2">Figure complétée

Conformité au modèle vérifiée par un calque (ou avec des instruments pour les propriétés non utilisées dans la construction). Cette vérification nécessite soit d'effacer certaines lignes de construction (ou de n'en pas tenir compte) soit de repasser la figure à obtenir.</td></tr>
<tr><td>Connaissances :
- Reconnaître dans le modèle la figure amorce et ce qui permet de relier l'amorce aux éléments manquants. Nécessité d'enrichir la figure modèle.
- Règles d'usage des instruments à mettre en relation avec les tracés recherchés.
- Organiser les tracés dans un certain ordre : les nouveaux tracés doivent s'appuyer sur des tracés déjà obtenus.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Démonstration</td><td rowspan="2">Données :
Un codage partiel (par texte ou signes) d'une figure géométrique théorique, suffisant pour la déterminer et permettre sa construction : Rôle joué dans la restauration par la figure amorce.
Une propriété de la figure à démontrer : Rôle joué par la figure modèle.</td><td>Instruments
- Figure matérielle (à main levée ou aux instruments) codée.
- Savoirs (définitions, théorèmes).</td><td rowspan="2">Figure codée complétée
Des données et des savoirs (théorèmes u définitions) ont été utilisés pour la construction et le codage de la figure matérielle représentant la figure théorique.
Des propriétés nouvelles ont été démontrées : on a enrichi le code de la figure.</td></tr>
<tr><td>Connaissances :
- Isoler les éléments pertinents sur la figure matérielle.
- Reconnaître des figures clés et les relier à des savoirs.
- Organiser les savoirs en une démarche permettant de relier les données aux propriétés à obtenir.</td></tr>
</table>

Tableau 1. Comparaison entre restauration et démonstration

La deuxième colonne indique les données dans chaque cas, la troisième colonne le travail sur la figure avec les moyens qui le permettent, la dernière colonne, le résultat de ce travail et

les moyens de validation. La grande différence est que, dans le cas de la démonstration, la validation des propriétés se fait non à l'aide d'instruments matériels mais dans le langage, à l'aide d'un raisonnement logique appuyé sur des définitions et théorèmes. Revenons donc sur les moyens de validation dans la restauration de figure et regardons comment ils peuvent évoluer.

Dans la restauration de figure telle que nous l'avons présentée en première partie, la validation se fait par un calque qui porte la solution (différente de la figure modèle dans le cas d'une restauration à une échelle différente). Cependant, des connaissances rendent certaines vérifications inutiles. Progressivement, on peut substituer à la prise d'information sur le modèle une liste de propriétés fournies avec la figure modèle ou en réponse à des questions posées par les élèves après une première exploration de la figure modèle, et à la vérification par le calque une vérification par les instruments voire par le raisonnement. Nous n'avons pas expérimenté de telles activités avec les élèves puisque nous n'avons jusqu'à présent travaillé qu'avec des élèves de l'école élémentaire. Cependant, il nous semble que de telles restaurations pourraient être proposées au début du collège. En voici un exemple.

Exemple de restauration préparant la démonstration

On a commencé l'agrandissement de l'hexagone ABCDEF. Le terminer sachant [11]que ABCD est un parallélogramme, F est sur [AD], E sur [CF], que (CF) est perpendiculaire à (BD), (DE) perpendiculaire à (BC) et (BE) perpendiculaire à (DC).
Coût des instruments pour tracer :
Règle : gratuite
Compas : 5 points ; report de longueur : 5 points
Equerre : 10 points
Défi : restaurer la figure avec 25 points et justifier les propriétés obtenues.

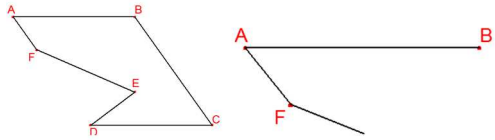


Figure 49

Le modèle a une taille réduite ; on ne peut donc pas reporter de longueur de la figure modèle sur la figure restaurée. La lecture du texte amène à enrichir la figure modèle des segments [FD], et [EC] ainsi que des droites (BD), (DE) et (BE). L'examen de l'amorce (en faisant confiance au nom des lettres ou en vérifiant trois angles) montre qu'un côté du parallélogramme est fourni ainsi que la direction d'un autre côté : le point D se trouve sur la droite (AF) que l'on peut tracer. On ne peut pas terminer le parallélogramme parce qu'on n'a pas la longueur AD. Si on examine les autres données du texte qui concernent le point B, on en trouve trois : (DE) perpendiculaire à (BC) ne peut pas être utilisée puisqu'on n'a ni la droite (BC) ni le point E ; en revanche on a la direction de la droite (FC) donc on peut tracer la perpendiculaire à (FC) passant par B ; D se trouve à l'intersection de cette droite et de la droite (AF) qui est sur l'amorce. On a donc un moyen de construire le point D à partir de l'amorce. Le coût de la construction est de 10 points qu'on la fasse au compas ou à l'équerre (ce n'est pas l'objectif de privilégier l'un par rapport à l'autre). Pour terminer la figure, il reste à construire les points C et E. On peut terminer le parallélogramme par deux coups de compas en utilisant les longueurs des côtés opposés : DC = AB et BC = AD (donc 10 points ; tracer des parallèles à l'équerre serait beaucoup plus coûteux) mais on peut économiser un coup de compas en se servant du fait que C est sur [FE] dont on a la direction : C est à l'intersection de cette demi-droite et du cercle de centre D et de rayon AB. Pour obtenir le point E, il faut encore utiliser une des deux informations, (BE) perpendiculaire à (CD) ou (DE) perpendiculaire à (BC) ; l'autre sera nécessairement vérifiée aussi puisque les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes : E est l'orthocentre du triangle BCD. Il y a d'autres solutions,

[11] La liste de propriétés peut être établie après une première phase d'exploration de la figure modèle par les élèves à la recherche de propriétés vérifiées par cette figure.

par exemple en traçant des parallèles mais elles coûtent plus cher. Avec un logiciel, l'objectif peut être de rechercher différentes solutions.

Fabrication du problème :

La figure à restaurer est construite ici à partir de la figure de démonstration du concours des hauteurs d'un triangle : les hauteurs du triangle sont les médiatrices d'un autre triangle obtenu en traçant les parallèles à chaque côté par le sommet opposé. Nous obtenons ainsi un réseau de droites sur lequel nous avons tracé le polygone ABCDEF dont les côtés vérifiaient des propriétés intéressantes pour la construction.

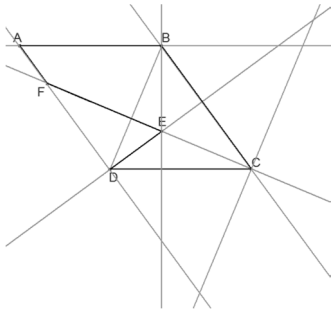


Figure 50

On peut aussi, lors de ces reproductions de figures matérielles avec cahier des charges, donner aux élèves l'occasion de s'apercevoir que des constructions différentes peuvent aboutir à une même figure et s'interroger sur différents cahiers des charges donnant la même figure...

D'autres figures liées à la démonstration de théorèmes de géométrie élémentaire pourraient être utilisées pour construire des restaurations de figures. D'autres supports peuvent aussi être trouvés dans l'histoire : lors du colloque mathématiques au cycle 3, le groupe « Liaison école-collège et Histoire des mathématiques » de l'IREM de Limoges animé par Marc Moyon a présenté un travail en CM2 et en 6ème de reproduction de figures du Codex Atlanticus de Léonard de Vinci[12] ; ces figures seraient des supports intéressants pour une restauration de figures, le choix d'une amorce favorisant un mode de construction plutôt qu'un autre et donc l'usage de certaines propriétés. La proposition d'une amorce dans la restauration est une aide à la construction et peut donc être un moyen de différenciation à la disposition des professeurs.

Conclusion

Beaucoup de recherches ont mis l'accent sur la rupture dans le rapport aux figures entre une géométrie appuyée sur la perception, aidée d'instruments de tracé ou de mesure, et la géométrie déductive où il s'agit de valider par la démonstration à partir d'axiomes et de théorèmes déjà établis des énoncés portant sur des objets théoriques idéaux. Nous avons ici cherché à dépasser cette rupture en tentant d'identifier un chaînon manquant entre ces deux géométries. Nous avons pour cela défini ce que nous avons appelé une théorie physique de la géométrie qui porte sur des objets d'un espace graphique servant d'intermédiaire entre l'espace physique des objets matériels et l'espace théorique d'une géométrie axiomatique. Nous rejoignons sur ce point Tanguay et Geeraerts (2012) ; cependant notre démarche présente une différence importante avec la leur : notre théorie physique de la géométrie s'appuie uniquement sur des instruments de tracé et de reports de grandeurs, à l'exclusion de la mesure par les nombres. La question des mesures approchées ne se pose donc pas. Bien sûr, la mesure des grandeurs géométriques demande à être étudiée par ailleurs par les élèves et articulée avec la démarche que nous proposons ici.

Notre choix se justifie parce que nous centrons notre attention sur le rapport aux figures et la conceptualisation des objets géométriques abstraits (points et droites essentiellement) sur lesquels repose une axiomatique du type de celle d'Euclide. Nous avons ainsi centré notre réflexion sur la reproduction et la construction de figures en identifiant des variables

[12] Les documents sont disponibles à l'URL http://www.irem.unilim.fr/recherche/liaison-ecole-college-par-l-histoire-des-mathematiques/

didactiques qui permettent de concevoir une progression partant de l'utilisation du contour d'un gabarit pour reproduire une figure simple à la construction de figures à la règle et au compas. Un moteur pour passer du simple tracé avec des instruments à la conceptualisation des objets géométriques nous semble être la formulation de règles d'usage des instruments autour d'une question centrale : de quels tracés déjà réalisés ai-je besoin pour poser mon instrument, quel tracé nouveau permet-il d'obtenir ? Cette question préfigure une question essentielle de la démarche de démonstration : quelles sont les données, quel énoncé veut-on démontrer ? Dans la démonstration, les théorèmes et définitions jouent le rôle que jouaient les instruments dans la restauration ou la construction d'une figure.

Nous n'abordons que partiellement dans la troisième partie les questions de langage et de codage qui sont très importantes en géométrie notamment au collège, et pas du tout la démonstration en tant que telle. Notre démarche se situe donc en amont de celle de Tanguay et Geeraerts (2012) ou de Houdebine et Kerboeuf (2005). Cependant, notre approche vise la coordination de trois dimensions majeures : la mobilité du regard sur les figures matérielles, le double rôle des instruments (matériels et théoriques) et le langage géométrique à travers la reproduction et la construction raisonnée et argumentée de figures. Elle est le résultat de longues années de réflexion sur l'enseignement de la géométrie à l'école élémentaire et au début du collège. Nous espérons qu'elle peut aider à élaborer des repères pour une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie au long de la scolarité obligatoire. Nous avons donné ailleurs quelques pistes pour le faire sur le thème de la symétrie orthogonale (Perrin-Glorian, 2012).

Le présent texte comporte de nombreuses limites et demanderait à être complété sur de nombreux points, y compris en amont de la démonstration. D'abord, nous ne considérons que la géométrie plane ; il faudrait étendre la réflexion à la géométrie dans l'espace : représentation des objets de l'espace et aussi des positions et déplacements dans l'espace. De plus, dans le domaine de la géométrie plane, il faudrait relier notre travail sur les figures à une réflexion sur les grandeurs géométriques (les angles et les aires notamment) et faire le lien avec les mesures. Et même dans le domaine restreint des tracés avec des instruments, il faudrait considérer le cas des outils numériques où certaines choses seraient sans doute à adapter.

Surtout ce texte est essentiellement prospectif : nous manquons de travaux sur les effets que pourrait avoir une telle approche sur les apprentissages des élèves. D'ailleurs nous n'avons pas abordé la question de la mise en œuvre effective de telles situations dans des classes. C'est une piste qui reste à explorer. Nous pensons néanmoins que notre réflexion peut aider les enseignants du collège à comprendre certaines des difficultés de leurs élèves et à trouver eux-mêmes des solutions.

Bibliographie

Berthe D., Cazier B. (2000), La règle à bords parallèles. *Repères-IREM* 40, 43-70.

Berthelot R., Salin M.H. (1992), *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans la scolarité obligatoire.* Thèse. Université de Bordeaux 1.

Berthelot R., Salin M.H. (1993-1994), L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N* 53, 39-56.

Berthelot R., Salin M.H. (1994-1995), Un processus d'enseignement des angles au cycle 3, *Grand N,* 56, 69-116.

Brousseau G. (1983), Etude des questions d'enseignement. Un exemple : la géométrie. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique.* LSD, IMAG. Université Fourier. Grenoble.

Brousseau G. (2000), Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire. *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques, Rethymon 2000.* Université de Crète. Disponible sur https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00515110/fr/

Celi V., Jore F. (2015), Les constructions à la règle à bords parallèles en formation initiale des professeurs des écoles. Pourquoi ? Comment ?, *Actes du Colloque de la* COPIRELEM, ESPE d'Aquitaine, Mont-de-Marsan, 18-20 juin 2014 [sur CD-Rom].

Celi V., Perrin-Glorian M.J. (2014), Articulation entre langage et traitement des figures dans la résolution d'un problème de construction en géométrie. *Spirale* 54, 151-174.

Cousin Fauconnet A. (1995), *Enseigner la géométrie au collège*. Paris : Armand Colin.

Demongeot M.C., Gandit M. (2003), Faire la figure, coder, écrire les hypothèses, démontrer que... *Petit x* 63, 30-50.

Douady, R. (1987), Jeux de cadres et dialectique outil objet. *Recherches en didactique des mathématiques,* 7/2, 5-31.

Douady, R. (1994), Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères-IREM* 15, 37-61.

Duval R. (1994), Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM,* 17, 121-138.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels,* Peter Lang, Bern.

Duval R. (2005), Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie : développement de la visualisation, différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 10, 5-53.

Duval, R., Godin, M. (2005), Les changements de regard nécessaires sur les figures, *Grand N* 76, 7-27.

Godin M., Perrin-Glorian M.J. (2009), De la restauration de figures à la rédaction d'un programme de construction. Le problème de l'élève, le problème du maître. In COPIRELEM *Enseigner les mathématiques à l'école : où est le problème ? Actes du colloque de Bombannes, juin 2008, CD-rom, Atelier A2*.

Gonseth F. (1945-1955), *La géométrie et le problème de l'espace.* Editions du Griffon, Lausanne.

Hilbert D. (1899), *Les fondements de la géométrie* (traduction de l'ouvrage de 1899, présentation de P. Rossier, Ed. Dunod 1971).

Houdebine J., Kerboeuf M.P. (2005), Les figures-clés : une idée pour l'apprentissage de la démonstration en quatrième. *Repères-IREM* 59, 83-103.

Houdement C. (2007), A la recherche d'une cohérence entre géométrie de l'école et géométrie du collège. *Repères-IREM* 67. 69-84.

Houdement C., Kuzniak A., (2006), Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 11*. 175-195.

Kahane, J.P. (dir.) (2002), *L'enseignement des sciences mathématiques : Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques*, Paris : Odile Jacob.

Keskessa, B., Perrin-Glorian M.J., Delplace J.R. (2007), Géométrie plane et figures au cycle 3. Une démarche pour élaborer des situations visant à favoriser une mobilité du regard sur les figures de géométrie. *Grand N,* 79, 33-60.

Offre B., Perrin-Glorian M.-J., Verbaere O. (2006), Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2 *Petit x* 72, 6-39 et *Grand N* 77, 7-34.

Perrin D. (2005, 2011), *Mathématiques d'école.* Paris : Cassini.

Perrin-Glorian M.J. (2012), Vers une progression cohérente de l'enseignement de la géométrie plane du CP à la fin du collège ? L'exemple de la symétrie axiale. *Bulletin de l'APMEP,* 499, 325-332. Version plus complète en ligne : http://www.apmep.fr/IMG/pdf/Perrin_Glorian_2.pdf

Perrin-Glorian, M.J., Godin, M. (2014), De la reproduction de figures géométriques avec des instruments vers leur caractérisation par des énoncés. *Math-école* n°222, 26-36.

Perrin-Glorian, M.J., Mathé, A.C., Leclercq, R. (2013), Comment peut-on penser la continuité de l'enseignement de la géométrie de 6 à 15 ans ? Le jeu sur les supports et les instruments. *Repères-IREM*, 90, 5-41.

Petitfour E. (2015), *Enseignement de la géométrie à des élèves en difficulté d'apprentissage : étude du processus d'accès à la géométrie d'élèves dyspraxiques visuo-spatiaux lors de la transition CM2-6ème*. Thèse de l'Université Paris Diderot.

Pluvinage F., Rauscher J.C. (1986), La géométrie construite mise à l'essai. *Petit x,* 11, 5-36.

Salin M.H. (2008), Enseignement et apprentissage de la géométrie à l'école primaire et au début du collège. Le facteur temps. *Bulletin de l'APMEP,* 478. p. 647-670.

Tanguay D., Geeraerts L. (2012), D'une géométrie du perceptible à une géométrie déductive : à la recherche du paradigme manquant. *Petit x* 88, 5-24.