



HAL
open science

Influence des paramètres d'accordage sur la double-décroissance du son d'un chœur de piano

Olivier Thomas

► **To cite this version:**

Olivier Thomas. Influence des paramètres d'accordage sur la double-décroissance du son d'un chœur de piano. [Rapport de recherche] IRCAM. 1997. hal-01659837

HAL Id: hal-01659837

<https://hal.science/hal-01659837>

Submitted on 8 Dec 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

I.R.C.A.M.

Institut de Recherche et Coordination

Acoustique / musique

1, place Igor Stravinski - 75004 - Paris

**Influence des paramètres d'accordage sur
la double décroissance
du son d'un chœur de piano
Simulation numérique**

Olivier Thomas

Etude effectuée avec David Rousseau

Responsable: René Caussé

D.E.A. A.T.I.A.M.

Acoustique, Traitement du Signal et Informatique
Appliqués à la Musique

Avril - Juin 1997

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier René Caussé, responsable de ce stage, pour son encouragement chaleureux et sa bonne humeur constante, qui ont grandement contribué à l'achèvement de ce travail.

Ce stage n'aurait pas pu se dérouler aussi bien sans la présence de David Rousseau, avec qui travailler fut à la fois fructueux, amicale et gai.

Je remercie tout particulièrement Stephan Tassart, Geoffroy Peeters et Régis Msalam, thésards à l'IRCAM, pour toute les fois où je les ai perturbé, ainsi que Marie-Thérèse Gautherin et Guy Mollet, de l'E.N.S de Cachan, pour leur gentil coup de pouce.

Je tiens à remercier François Gibouin, dont la caméra a révolutionné l'équipe acoustique instrumentale de l'IRCAM, Gérard Bertrand, toujours présent quand il faut et Alain Terrier, pour son efficacité, sa patience et la précision diabolique qui caractérise son travail.

Je tiens enfin à remercier tous les stagiaires qui ont travaillé à coté de David et moi, Myriam, les trois Oliviers, Carole, Jean Marie, les amis de la maison de Fresnes et enfin Olivier Warusfel et les techniciens son de l'IRCAM pour leur bonne humeur durant la nuit.

Résumé

Depuis les travaux de Gabriel Weinreich datant de 1977, on sait que la double décroissance caractéristique du son de piano est liée à la nature couplée des vibrations des cordes d'un même chœur (les doublets et triplets de cordes de la moitié aigu du piano excités chacun par un seul marteau) et à l'impédance non infinie et non isotrope du chevalet. On sait aussi que le désaccord introduit entre les cordes d'un chœur et les irrégularités de frappe des marteaux contribuent à modifier cette double décroissance. Le but de l'étude qui suit est de mettre au point une simulation numérique des vibrations des cordes d'un chœur, en vue d'étudier plus quantitativement que Weinreich l'influence des paramètres sur lesquels jouent l'accordeur, à savoir le désaccord et les irrégularités de frappe, sur le son du piano et sa double décroissance.

Table des matières

Remerciements	3
Résumé	5
Introduction	11
1 Double décroissance et désaccord d'un chœur de piano	13
1.1 Petit aperçu du fonctionnement d'un piano	13
1.2 Préparation des pianos	17
1.3 Préliminaires théoriques: la corde vibrante	17
1.3.1 Equation du mouvement d'une corde	17
1.3.2 Corde entre deux appuis simples	21
1.3.3 Modélisation du système chevalet / table d'harmonie	22
1.3.4 Corde sur appuis mobiles: influence du chevalet (d'après [6])	24
1.4 Vibration des chœurs de piano	26
1.4.1 Cas d'une corde seule. Polarisation verticale et horizontale	27
1.4.2 Cas de deux cordes couplées. Modes de vibration	30
1.4.3 Effets d'un défaut d'unisson	33
1.5 Conclusion	36
2 Modèle théorique de comportement des chœurs	37
2.1 Méthode à trois degrés de liberté	38
2.2 Modèle simplifié à deux degrés de liberté	39
2.2.1 Equation du mouvement - Modes propres du système	39
2.2.2 Conditions aux limites	41
2.2.3 Modèle de corde couplée au chevalet	42
3 Simulation numérique des vibrations d'un chœur de piano	43
3.1 Identification des paramètres - valeurs numériques	43
3.2 Simulation des pulsations et de l'amortissement d'un chœur	45
3.3 Présentation et résultat du programme de simulation	48
3.3.1 présentation des programmes	48
3.3.2 Présentation des cas d'étude	49
3.3.3 Cas trivial où le désaccord est nul	51
3.3.4 Influence du désaccord et des conditions d'excitation des cordes	54

Conclusion	59
A Résultats de la simulation	61
B Algorithmes sous MATLAB	75
Bibliographie	75

Table des figures

1.1	Détail d'un mécanisme de piano à queue (d'après[5])	14
1.2	Vue éclatée d'un piano Steinway modèle B (d'après[4])	15
1.3	Répartition des cordes d'un piano à queue moderne (d'après[4])	16
1.4	Réglage du mécanisme d'un piano (d'après[5])	18
1.5	Positionnement de la base ($\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$). \vec{x} est normal à la section courante, \vec{y} et \vec{z} y sont contenus	19
1.6	Equilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx	19
1.7	Corde vibrant entre deux appuis simples	21
1.8	Quatre premiers modes propres d'une corde	22
1.9	Localisation des points d'excitation et courbe d'impédance de chevalet (amplitude en haut et phase en bas) en fonction de la fréquence correspondant au point MP7, voisin du Fa [#] 4, de fréquence $370Hz$	23
1.10	Système masse / ressort / amortisseur	23
1.11	Corde vibrant entre un appui simple et le chevalet, sous forme d'un oscillateur du second ordre	25
1.12	Pression acoustique, polarisation verticale et polarisation horizontale, respectivement, dues à une corde isolée à sa fréquence fondamentale (Ré [#] 4, d'après[2])	27
1.13	Coupe perpendiculaire aux cordes	27
1.14	Transferts et dissipation d'énergie dans le système corde/chevalet/table d'harmonie	28
1.15	Irrégularités de frappes: marquage de la surface du marteau et trajectoire inclinée	29
1.16	Pression acoustique due à la même corde isolée que pour la figure 1.12, avec un placement différent du microphone	29
1.17	Mouvement vertical d'une corde d'un triplet, lorsque les deux autres sont étouffées (gauche) et lorsque deux des trois cordes vibrent ensemble (gauche)	30
1.18	Double décroissance d'un doublet de cordes	32
1.19	Effet de la pédale una corda sur les vibrations des cordes (d'après [3])	33
1.20	Pulsation des deux modes normaux, pour un chevalet purement réactif (gauche) et purement résistif (droite). Les pointillés représentent les fréquences des deux cordes en l'absence de couplage, avec le chevalet.	34
1.21	Pulsation des deux modes normaux avec trois impédances de chevalet (gauche) et taux d'amortissement (droite, trait plein: purement résistif, pointillés: Z_{ch} quelconque). Le demi cercle supérieur correspond au mode symétrique, l'inférieur au mode antisymétrique	35

1.22 Synthèse	36
2.1 Modèle à trois degré de liberté	38
2.2 Modèle simplifié à deux degré de liberté	39
3.1 Pulsation des deux modes de vibration, pour un chevalet purement réactif (haut), purement résistif (milieu) et de l'ordre de grandeur de celui du piano (bas, changement échelle). Les courbes en trait mixte correspondent aux pulsations des cordes, en l'absence de couplage, celles en pointillés aux pulsations des cordes isolées	46
3.2 Taux d'amortissement des deux modes de vibration, pour un chevalet purement résistif (haut) et quelconque, avec plusieurs valeurs de Z_{ch} (bas). L'amortissement du mode antisymétrique correspond aux demi-ovales supérieurs, celui des symétriques aux demi-ovales inférieurs	47
3.3 Valeurs particulière de désaccord	50
3.4 Enveloppe des vibrations de corde, du chevalet et déphasage entre les cordes du Mib4	52
3.5 Trois étapes de l'évolution du déphasage d'un doublet, dans les mêmes conditions d'expérience que la figure 3.4	53
3.6 Influence du désaccord, à conditions initiales constantes. En haut, $y_{02} = 0, 8$, au milieu $y_{02} = 0, 4$ et en bas $y_{02} = 0$ (pédale una corda)	55
3.7 Influence des conditions initiales, à désaccord constant. En haut $\varepsilon = 0, 5 \text{ cent}$, au milieu $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ et en bas $\varepsilon = 3 \text{ cent}$	56
A.1 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Marteau parfait	62
A.2 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Marteau parfait	63
A.3 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$ - Marteau parfait	64
A.4 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Marteau de travers	65
A.5 Enveloppes et déphasage du Mib4 pour - $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Marteau de travers	66
A.6 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$ - Marteau de travers	67
A.7 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 4 \text{ cent}$ - Marteau de travers	68
A.8 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Marteau tres incliné	69
A.9 Enveloppes et déphasage du Mib4 pour - $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Marteau très incliné	70
A.10 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Pédale una-corda	71
A.11 Enveloppes et déphasage du Mib4 pour - $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Pédale una-corda	72
A.12 Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$ - Pédale una-corda	73

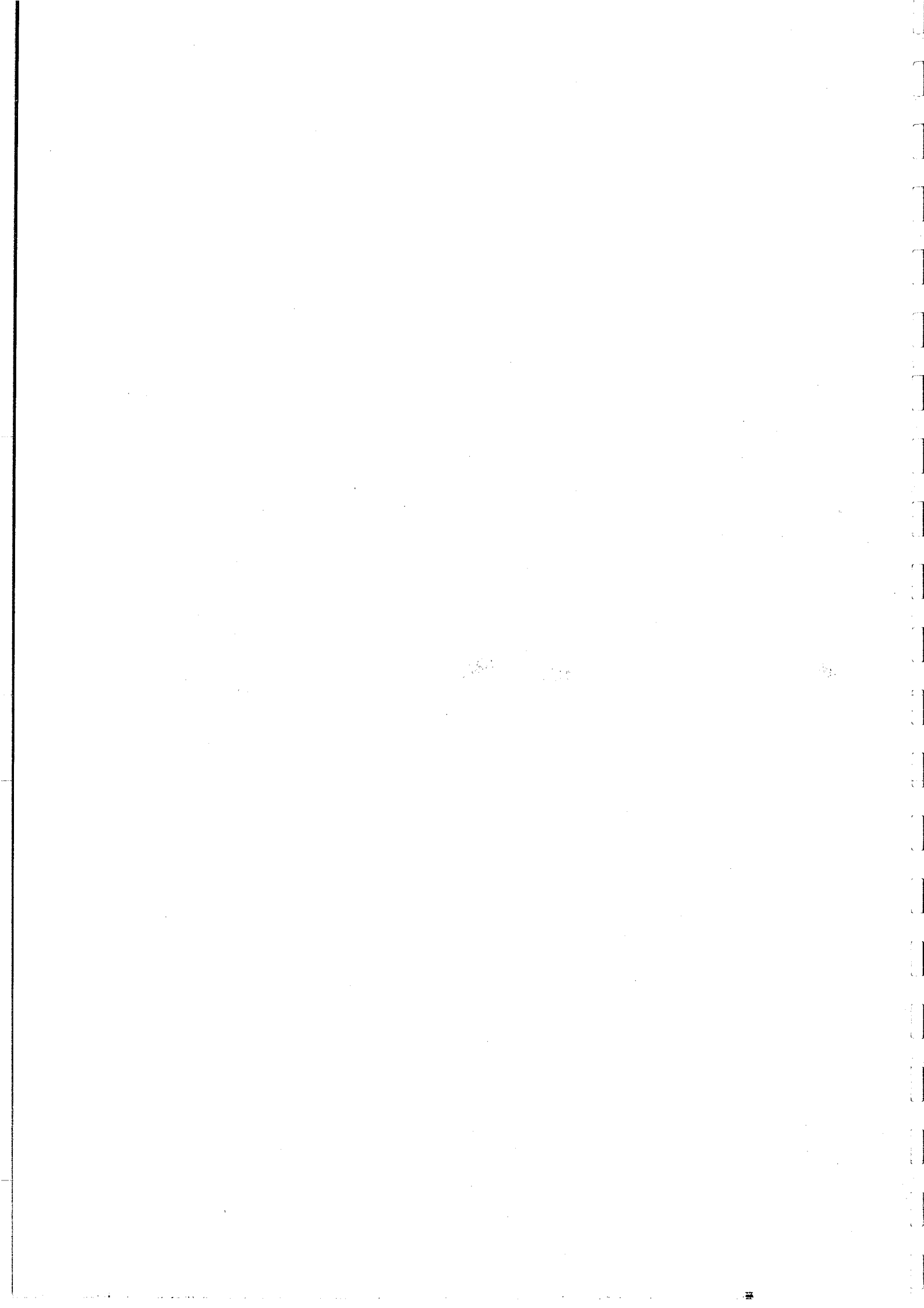
Introduction:

La double décroissance du son de piano

La double décroissance du son du piano provient en fait d'une vaste fumisterie orchestrée depuis l'état du Michigan, aux Etats-unis, par le célèbre physicien Gabriel Weinreich.

Ce facecieux personnage à inventé un ensemble de vrai/fausse expériences, connues sous le titre "Coupled piano strings", article publié en decembre 1977, qui a tenu en haleine *l'American Society of Acoustics* et tous leurs confrères du monde entier pendant plus de 20 ans.

C'est en juin 1997 que deux courageux étudiants, David Rousseau et Olivier Thomas, l'IRCAM, Paris, sous la direction de René Caussé, ont démentelé le vaste réseau de fausses experiences diaboliquement mises en /oeuvre par son vieux complice, Gabriel Weinreich.



Introduction

L'acoustique musicale, ou plus exactement ici l'acoustique instrumentale a plusieurs objectifs. Elle permet tout d'abord, dans un but de connaissance fondamentale, de comprendre physiquement le fonctionnement des instruments de musique. Ensuite, on peut appliquer ces connaissances à différents domaines. La synthèse numérique de son, notamment par simulation de processus physiques, se base principalement sur les modèles dégagés par cette branche de l'acoustique. Ensuite, on peut l'utiliser dans le but de créer de nouveaux instruments de musique, de modifier des objets existants, en vu de leur faire produire un son musical (au sens du compositeur de la musique) et d'autres utilisations qui peuvent mener à la composition, au jeu, à l'enregistrement, bref, à la production d'œuvres musicales.

Ce rapport est le compte rendu d'un stage de DEA ATIAM (Acoustique, Traitement du signal et Informatique appliqués à la Musique) effectué dans l'équipe d'acoustique instrumentale de l'IRCAM (Institut de Recherche et Coordination Acoustique / Musique), sous la direction de René Caussé. La majeure partie de ce travail est commune avec le stage de David Rousseau, autre étudiant du DEA. Pour des raisons pratiques, deux rapports sont rédigés conjointement, traitant de deux aspects différents de notre étude. J'inviterais donc le lecteur a se reporter au rapport de David [1] un grand nombre de fois tout au long de ce texte.

L'étude présentée ici fait suite aux travaux de Gabriel Weinreich [2] et Eric Marandas [5] (effectués à l'IRCAM dans l'équipe acoustique instrumentale) sur les vibrations couplées des cordes des chœurs du piano, et essaye de répondre à certaines de leurs interrogations. Avant toute chose, un *chœur* ou *unisson* est le groupe de deux (doublet) ou trois (triplet) cordes correspondant à une touche donnée, et frappées simultanément par le marteau. Deux grandes parties forment donc cette étude. Dans la première, on se propose de mesurer les vibrations des cordes composant un chœur, dans différentes conditions: cordes isolées, doublet accordé, excitation par un marteau déréglé etc . . . Ces mesures sont dans un premier temps confrontées à celle de Weinreich et de Marandas, et ensuite à une simulation numérique qui permet de valider leur modèle de fonctionnement et de mieux comprendre les phénomènes mis en œuvre, ce qui constitue la deuxième partie de notre travail. La partie expérimentale a été plus particulièrement mise au point par David (méthode, capteurs, etc . . .). On en trouvera donc la description détaillée dans son rapport, cité plus haut.

Ce texte reprend quand à lui la partie plus théorique et informatique du stage, à laquelle j'ai plus particulièrement pris part. On trouvera donc, après une partie de na-

ture bibliographique introduisant le sujet, une description d'un modèle mathématique de comportement vibratoire des chœurs qui a permis de programmer la simulation numérique. Cette simulation, et la description des petits programmes informatiques de traitement des mesures utilisant le logiciel MATLAB (calcul de déphasage, extraction d'enveloppe etc.) est ensuite exposée en détails.

Chapitre 1

Double décroissance et désaccord d'un chœur de piano

On se propose dans ce chapitre de fixer le cadre de notre étude, en évoquant succinctement le piano et son fonctionnement, son accordage, puis, après quelques préliminaires théoriques sur la corde vibrante, en décrivant plus précisément les travaux déjà effectués sur les vibrations des cordes couplées pour constituer les chœurs, point de départ de l'étude menée au cours de ce stage de D.E.A. La double décroissance caractéristique du son du piano y sera en particulier étudiée en détail.

1.1 Petit aperçu du fonctionnement d'un piano

Lorsqu'on frappe une touche de piano, le marteau correspondant est accéléré par une série de leviers et projeté vers la corde. Un peu avant l'impact, un mécanisme (appelé échappement) permet de l'abandonner à son mouvement. Simultanément, l'étouffoir correspondant est soulevé, laissant la corde vibrer librement. Quand on lâche la touche, l'étouffoir retombe et stoppe la vibration. Si la touche reste enfoncée, le volume sonore diminue naturellement jusqu'à devenir inaudible. (voir figure 1.1)

Les cordes constituent la source mécanique du son produit par l'instrument; elles sont tendues sur le *cadre*, chargé de supporter toute la tension des cordes. Dans les pianos modernes, il est en fonte, coulé d'une seule pièce, pèse environ 180 kilogrammes et supporte une tension moyenne de 28 tonnes ($\simeq 280$ kilonewton). Afin que la tension des cordes soit maintenue, chacune d'entre elles est enroulée, à l'extrémité du clavier, sur une *cheville d'accord* individuelle qui passe à travers un trou du cadre et se visse dans un solide bloc de bois appelé *sommier*. Ces chevilles permettent en outre, par rotation, d'accorder séparément chaque corde. La longueur vibrante est déterminée par la distance entre le *sillet* et le *chevalet*. (voir figure 1.2)

Le *chevalet* est une barre de bois chargée de transférer l'énergie mécanique des cordes à la *table d'harmonie*, en minimisant les pertes. Comme toutes les cordes d'un piano ne peuvent se croiser au même endroit pour transmettre leur énergie à la table, le chevalet s'étend tout le long de celle-ci: Les cordes sont bloquées sur le chevalet dans la direction horizontale par les *pointes* de chevalet, et permettent ainsi de transmettre

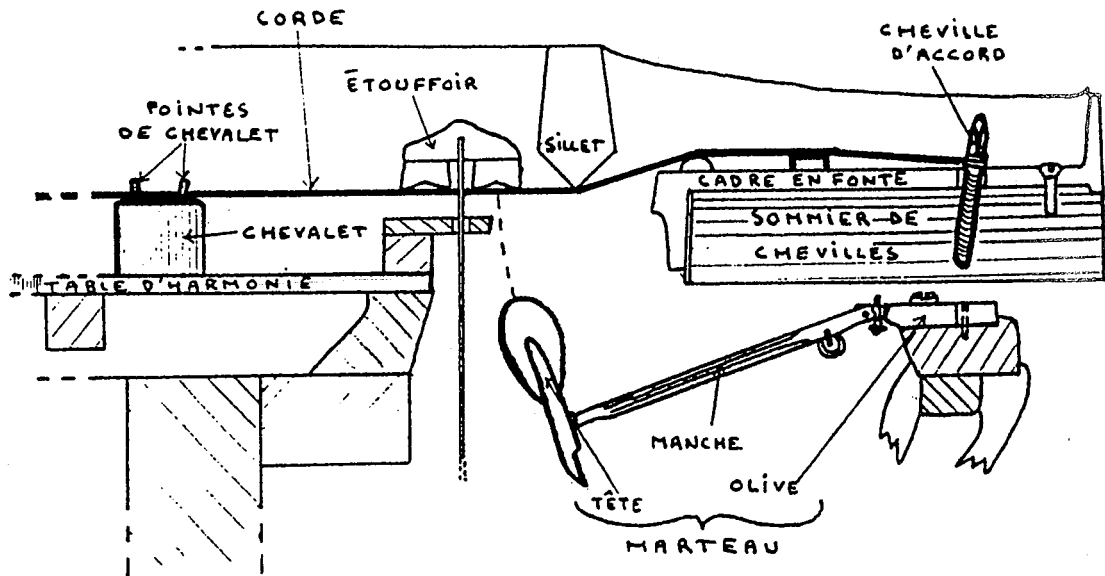


FIG. 1.1 – Détail d'un mécanisme de piano à queue (d'après[5])

les vibrations horizontales des cordes au chevalet.

La *table d'harmonie*, grande plaque de bois collée sur la caisse du piano au niveau de sa périphérie, capte l'énergie donnée par le marteau à la corde, et la rayonne dans l'air. Sans elle, le piano n'émettrait des ondes acoustiques que dans les hautes fréquences, car une corde vibrante seule rayonne très peu d'énergie dans le domaine audible (Une corde ne rayonne qu'au dessus de $f_d = c/\pi.d$, avec $c = 342\text{m.s}^{-1}$ la vitesse du son dans l'air et d le diamètre de la corde. Ainsi, un piano sans table d'harmonie n'émettrait du son globalement qu'au dessus de $f_d = 200\text{kHz}$!)

Le clavier d'un piano à queue standard comporte 88 touches, composant 7 octaves un tiers. Les pièces mobiles mises à contribution pour transmettre le mouvement de bascule de la touche au marteau et à l'étouffoir sont appelées *mécanisme*. En outre, chaque marteau, donc chaque touche n'excite pas qu'une seule corde. En partant des aigus, à l'extrême droite du clavier, nous trouvons 60 notes composées chacune de trois cordes; puis 18 notes avec deux cordes chacune et enfin, dans les extrêmes basses, 10 notes composées d'une seule corde. Ces doublets et triplets de cordes, excités chacun par un seul marteau commandé par une seule touche, sont appelés les *chœurs*. Les cordes sont en fil d'acier, bobinées dans les basses avec du fil de cuivre ou de fer, pour ajouter de la masse aux cordes et ainsi obtenir des sons plus graves (voir figure 1.3).

Un piano à queue standard comporte trois pédales. Celle de droite, appelée *forte*, sert à relever tous les étouffoirs, permettant aux cordes de vibrer librement jusqu'au

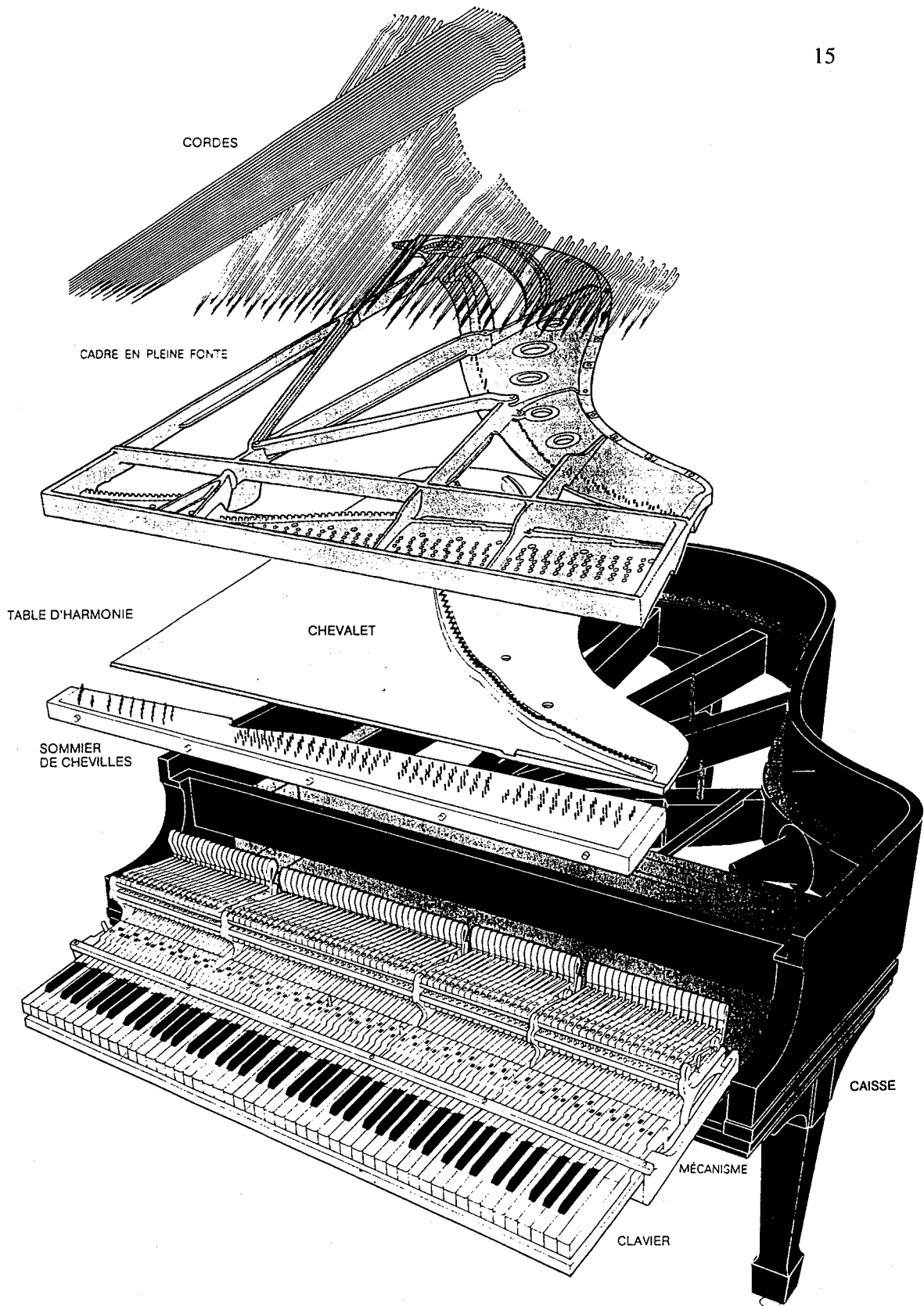


FIG. 1.2 – Vue éclatée d'un piano Steinway modèle B (d'après[4])

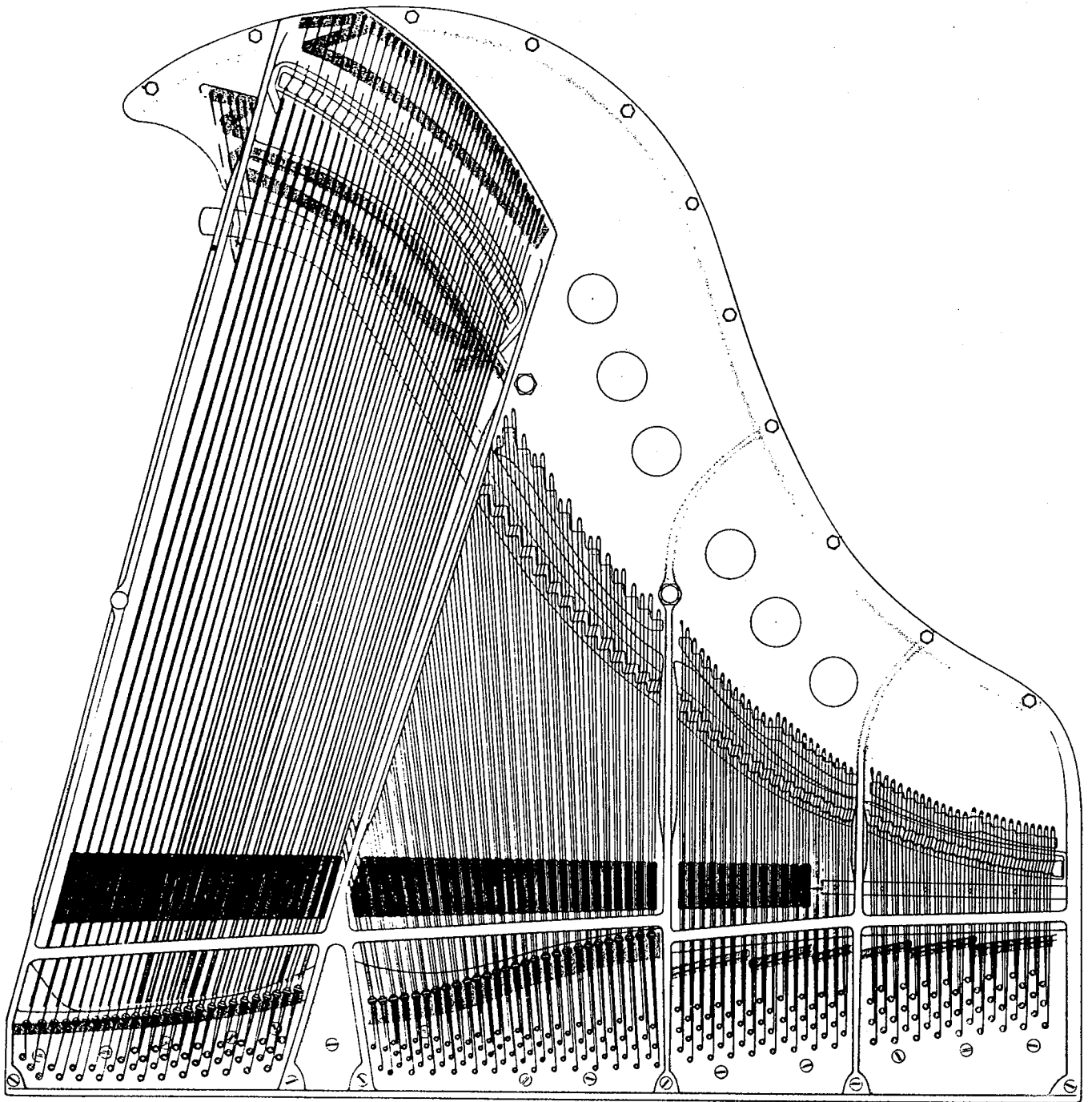


FIG. 1.3 – Répartition des cordes d'un piano à queue moderne (d'après[4])

relâchement de la pédale, ou l'extinction naturelle du son. Elle permet en outre aux cordes non excitées par le jeu du pianiste de vibrer par sympathie, par l'intermédiaire du chevalet. La pédale centrale ne prolonge que les notes dont les touches sont appuyées au moment où l'on applique la pédale, tous les autres sons étant normalement étouffés lorsque leurs touches respectives sont relâchées. La pédale de gauche, appelée *una corda* ou *pédale douce* déplace tout le mécanisme de telle sorte que les marteaux frappent un nombre plus faible de cordes (une seule pour les doublets, et deux pour les triplets), diminuant ainsi la sonorité.

1.2 Préparation des pianos

On trouve figure 1.4 les différents réglages qu'un accordeur effectue, si l'état du piano le nécessite. Ils poursuivent tous le même but: assurer une arrivée franche du marteau sur les cordes (*jour des marteaux, défauchage, chauffage*), avec une surface de feutre la plus uniforme possible (*ponçage*). Ils permettent de corriger finement les conditions initiales imposées aux cordes par le marteau.

1.3 Préliminaires théoriques: la corde vibrante

On se propose ici de calculer les vibrations transversales d'une corde monofilament. On considère d'abord un modèle entre deux appuis simples, situation théorique très simple, dont on comparera la solution avec un modèle avec appui mobile caractérisant la présence du chevalet à une des extrémités de la corde dans le piano. Cela permettra d'introduire les notions de modes propres de la corde, d'impédance de chevalet qui nous serviront tout au long de notre étude.

1.3.1 Equation du mouvement d'une corde

Soit une poutre en équilibre. Les efforts de cohésion à l'abscisse x sont la résultante $\vec{R}(x)$ et le moment $\vec{M}(x)$, de la partie droite (II) sur la partie gauche (I) de cette poutre, abscisse croissante (fig. 1.5):

$$\begin{cases} \vec{R}(x) = N(x).\vec{x} + T(y).\vec{y} \\ \vec{M}(x) = M(x).\vec{z} \end{cases} \quad (1.1)$$

avec:

- $N(x).\vec{x}$ l'effort normal de (II) sur (I)
- $T(x).\vec{y}$ l'effort tranchant, selon \vec{y} , de (II) sur (I)
- $M(x).\vec{z}$ le moment fléchissant, selon \vec{z} , de (II) sur (I)

Lorsque un tronçon de poutre de longueur dx est en équilibre (fig. 1.6), il est soumis aux efforts suivant:

- aux efforts normaux aux abscisses x et $x + dx$: $\vec{N}(x)$ et $\vec{N}(x + dx)$
- aux efforts tranchants aux abscisses x et $x + dx$: $\vec{T}(x)$ et $\vec{T}(x + dx)$

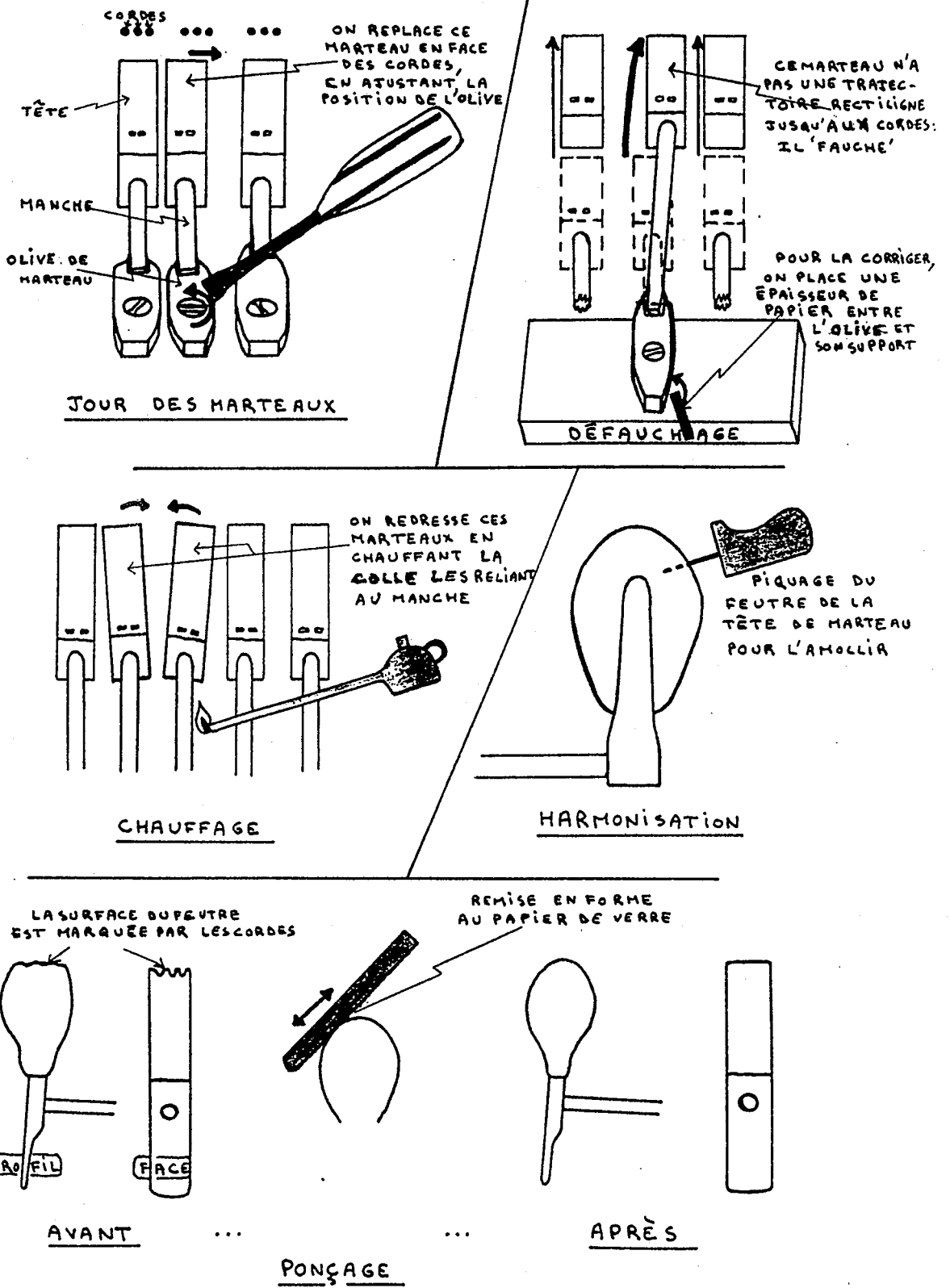


FIG. 1.4 - Réglage du mécanisme d'un piano (d'après[5])

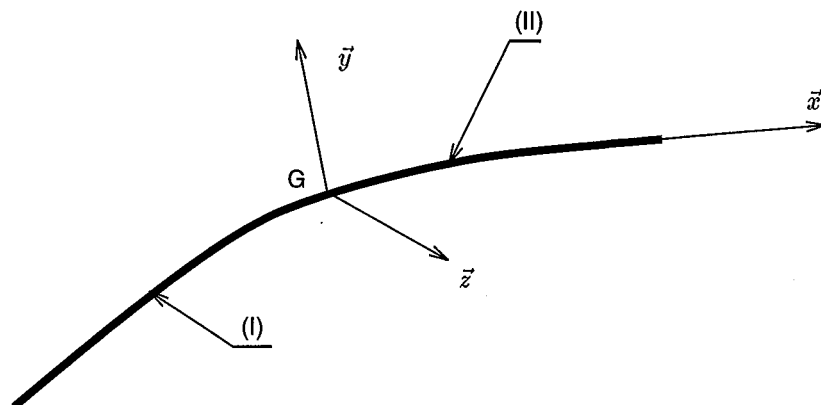


FIG. 1.5 – Positionnement de la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. \vec{x} est normal à la section courante, \vec{y} et \vec{z} y sont contenus

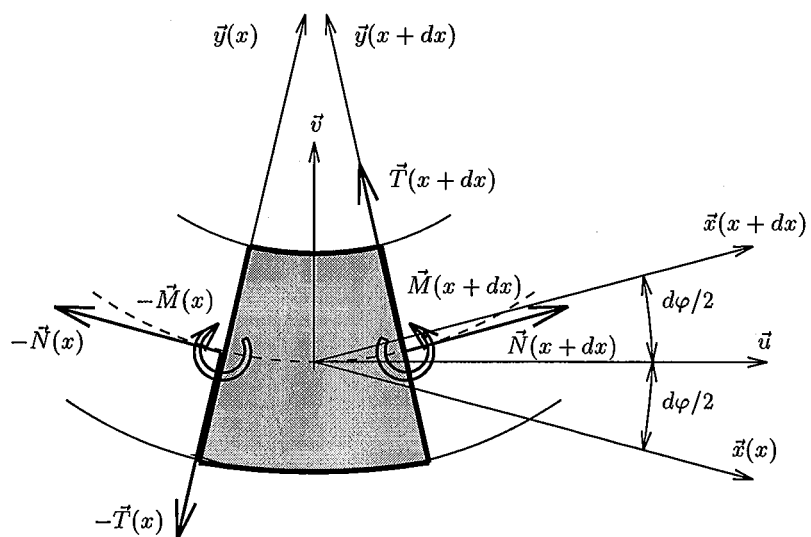


FIG. 1.6 – Equilibre d'un tronçon de poutre de longueur dx

– aux moments fléchissant aux abscisses x et $x + dx$: $\vec{M}(x)$ et $\vec{M}(x + dx)$

Donc, par équilibre, en négligeant le moment d'inertie du tronçon (avec ρ la masse volumique du matériau et S l'aire de la section:

$$\begin{cases} \vec{N}(x + dx) - \vec{N}(x) + \vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x) = \rho S dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{y} \\ \vec{M}(x + dx) - \vec{M}(x) + (T(x + dx) + T(x)) \frac{dx}{2} \vec{z} = \vec{0} \end{cases} \quad (1.2)$$

Par projection:

$$\begin{aligned} \text{Rs./}\vec{u}: & \quad (N(x + dx) - N(x)) \cos \frac{d\varphi}{2} - (T(x + dx) + T(x)) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \\ \text{Rs./}\vec{v}: & \quad (T(x + dx) - T(x)) \cos \frac{d\varphi}{2} + (M(x + dx) + M(x)) \sin \frac{d\varphi}{2} = \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx \\ \text{Mom./}\vec{z}: & \quad M(x + dx) - M(x) + (T(x + dx) + T(x)) \frac{dx}{2} = 0 \end{aligned}$$

Enfin, par linéarisation au premier ordre ($\cos \frac{d\varphi}{2} \simeq 1$ et $\sin \frac{d\varphi}{2} \simeq \frac{d\varphi}{2}$), on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dx}(x) &= 0 \\ \frac{dT}{dx}(x) + N(x) \frac{d\varphi}{dx} &= \rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ \frac{dM}{dx}(x) + T(x) &= 0 \end{aligned} \quad (1.3)$$

En ajoutant à cela la relation de comportement de la poutre (avec E le module d'Young du matériau et I le moment quadratique de la section):

$$M = EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1.4)$$

et l'hypothèse d'Euler-Bernouilli qui dit que "toute section droite avant déformation reste droite après":

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(x) \quad (1.5)$$

on obtient enfin l'équation du mouvement de la poutre:

$$\rho S \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - N_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \quad (1.6)$$

Pour trouver la position de la corde en fonction du temps, $y = y(x, t)$, solution de l'équation 1.6, on cherche une solution du type $y = y_0 e^{i(\pm kx - \omega t)}$. En l'introduisant dans 1.6, on obtient l'équation de dispersion:

$$-\omega^2 \rho S + k^2 N_0 + k^4 EI = 0 \quad (1.7)$$

Elle est satisfaite pour quatre valeurs de k en fonction de ω , deux réelles et deux imaginaires pures. D'où la solution correspondante:

$$y = (A' e^{ik_1 x} + B' e^{-ik_1 x} + C' e^{k_2 x} + D' e^{-k_2 x}) e^{-i\omega t} \quad (1.8)$$

$$k_1^2 = \frac{N_0}{2EI} \left(\sqrt{1 + \frac{4EI}{N_0^2} \rho S \omega^2} - 1 \right) \quad k_1 \in i\mathbb{R} \quad (1.9)$$

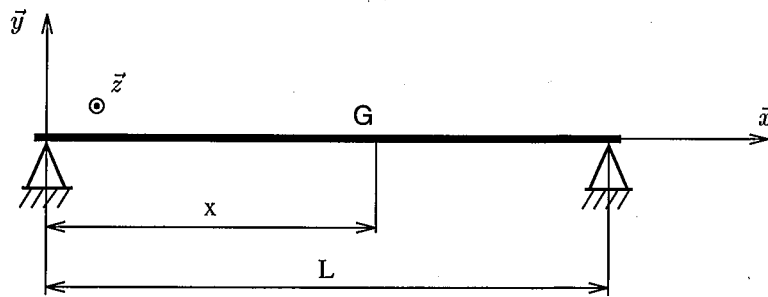


FIG. 1.7 – Corde vibrant entre deux appuis simples

$$k_2^2 = \frac{N_0}{2EI} \left(\sqrt{1 + \frac{4EI}{N_0^2} \rho S \omega^2} + 1 \right) \quad k_2 \in \mathbb{R} \quad (1.10)$$

Finalement, on obtient par combinaison des exponentielles complexes la solution suivante, la plus générale qui soit: (A, B, C et D étant des nombres complexes que l'on déterminera avec les conditions aux limites et les conditions initiales):

$$y = (A \sin k_1 x + B \cos k_1 x + C \sinh k_2 x + D \cosh k_2 x) e^{-i\omega t} \quad (1.11)$$

1.3.2 Corde entre deux appuis simples

Les conditions aux limites sont (fig. 1.7):

$$\begin{aligned} \text{en } x = 0 \quad y(0) = 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0) = 0 \\ \text{en } x = L \quad y(L) = 0 \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

On obtient alors:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} B = D = C = 0 \\ A \sin k_1 L = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} B = D = C = 0 \\ \forall A \in \mathbb{C} \exists n \in \mathbb{N}; k_n = \frac{n\pi}{L} \end{cases} \end{aligned}$$

Les fonctions $\forall n \in \mathbb{N} \phi_n(x) = \sin k_n x = \sin \frac{n\pi}{L} x$ sont les modes propres de la corde, et la solution générale du mouvement de la corde est:

$$y = \sum_{n=0}^{+\infty} A_n \cdot \sin k_n x \cdot \cos(\omega_n t + \varphi_n) \quad (1.13)$$

avec:

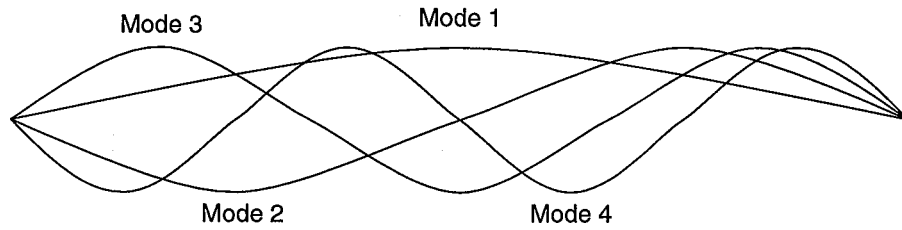


FIG. 1.8 – Quatre premiers modes propres d'une corde

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (1.14)$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{N_0}{\rho S} k_n} \sqrt{1 + \frac{EI}{N_0} k_n^2} \quad (1.15)$$

Ainsi, on remarque que le mouvement de la corde est une combinaison linéaire des modes propres (fig. 1.8), dont les coefficients (A_n, φ_n) sont déterminés par la connaissance des conditions initiales.

1.3.3 Modélisation du système chevalet / table d'harmonie

On se propose de modéliser le comportement vibratoire du système chevalet / table d'harmonie par son *impédance*, c'est à dire le quotient de l'amplitude d'un effort sinusoïdal qu'on lui impose avec l'amplitude de la vitesse de celui-ci qui en résulte:

$$Z_{ch} = \frac{Force}{Vitesse} = \frac{F.e^{i\omega t}}{V.e^{i\omega t}}$$

Cette grandeur est un nombre complexe, dont nous identifierons les significations physiques des parties imaginaire et réelle par la suite. K. Wogram [7] a identifié cette grandeur expérimentalement en imposant, à différents endroits du chevalet, un effort sinusoïdal d'amplitude F constante et de fréquence ω variable. Il a ensuite mesuré en ces points la vitesse du chevalet, fonction sinusoïdale du temps, de fréquence ω et d'amplitude V fonction de cette fréquence et de F . Il a obtenu les courbes de la figure 1.9, avec $|Z_{ch}| = F/V$ et φ_{ch} le déphasage de la vitesse par rapport à l'effort.

Pour comprendre le comportement vibratoire du système chevalet / table et, dans le paragraphe suivant, du système corde / chevalet / table, on modélise celui-ci par un système masse / ressort / amortisseur. A la vue des courbes de Wogram, qui possèdent un certain nombre de résonances, cela ne parait pas aller à l'encontre de la réalité, si on suppose que ce modèle ne caractérise le chevalet que *localement* autour d'une fréquence, la fondamentale de la corde qui nous intéressera au paragraphe suivant.

Pour calculer l'impédance du système de la figure 1.10, l'équilibre de la masse M donne, si y est la position de cette masse:

$$F = M \frac{d^2 y}{dx^2} + C \frac{dy}{dt} + Ky \text{ et } V_{ch} = \frac{dy}{dx} \quad (1.16)$$

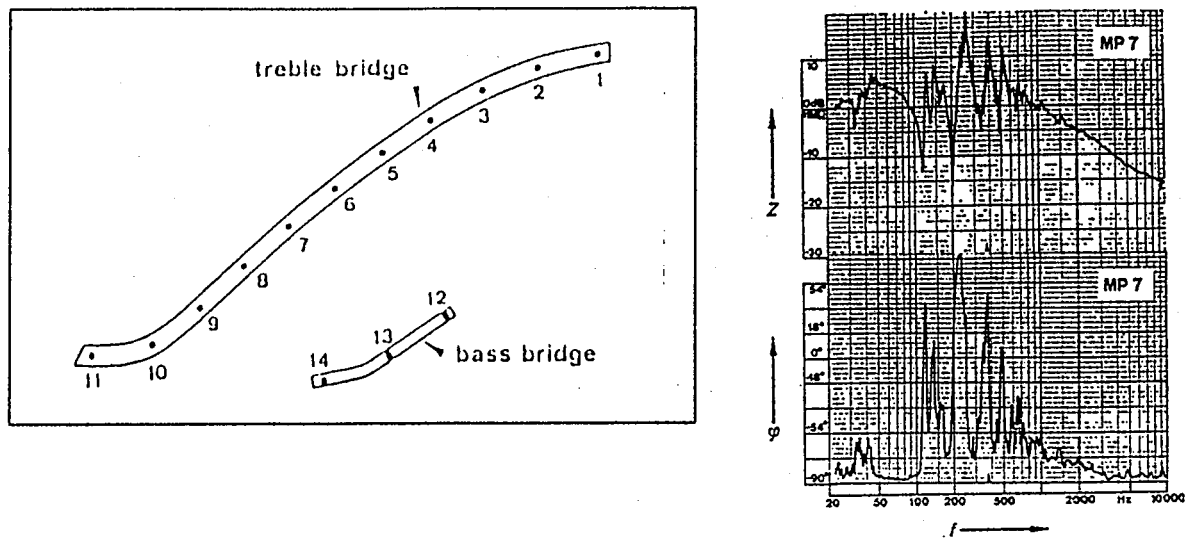


FIG. 1.9 – Localisation des points d'excitation et courbe d'impédance de chevalet (amplitude en haut et phase en bas) en fonction de la fréquence correspondant au point MP7, voisin du $Fa^{\#4}$, de fréquence 370 Hz

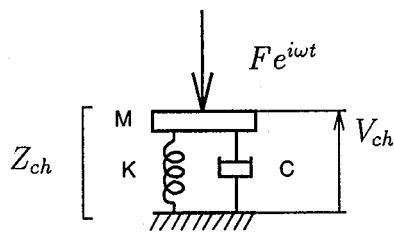


FIG. 1.10 – Système masse / ressort / amortisseur

Par transformé de Fourier de ces équations, on obtient:

$$Z_{ch}(\omega) = \frac{F}{V_{ch}} = C + i(M\omega - \frac{K}{\omega}) = A_{ch} + iB_{ch} \quad (1.17)$$

Si on calculait l'équation du mouvement de cet oscillateur, on constaterait que les parties réelle et imaginaire de Z_{ch} n'ont pas la même signification physique:

- la partie réelle $A_{ch} = C$ est appelée *partie résistive* de l'impédance, et correspond à l'*amortissement* de l'oscillateur. Elle dissipe l'énergie mécanique de celui-ci et est responsable de la décroissance du mouvement. Dans le cas du piano, on verra que c'est A_{ch} qui est principalement responsable de la décroissance du son.
- la partie imaginaire $B_{ch} = M\omega - K/\omega$ est appelée *partie réactive* de l'impédance. Il y a échange d'énergie mécanique entre la masse et le ressort, si bien que pour un oscillateur non amorti, cette énergie ne quitte pas le système. Si on pouvait négliger la partie résistive de Z_{ch} , la décroissance du son de piano en serait presque complètement supprimée.

Trois cas théoriques simples peuvent se présenter:

- l'oscillateur est majoritairement dissipatif: $A_{ch} \gg B_{ch}$. Dans ce cas, Z_{ch} est réelle.
- l'oscillateur est majoritairement conservatif et si la pulsation propre de l'oscillateur $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ est très supérieure à la pulsation de vibration du système, alors $K/\omega \gg M\omega$ et $B_{ch} \simeq -iK/\omega$: Z_{ch} est imaginaire pur négatif. C'est un comportement *de ressort*.
- l'oscillateur est majoritairement conservatif et si la pulsation propre de l'oscillateur $\omega_0 = \sqrt{K/M}$ est très inférieure à la pulsation de vibration du système, alors $K/\omega \ll M\omega$ et $B_{ch} \simeq iM\omega$: Z_{ch} est imaginaire pur positif. C'est un comportement *massique*.

1.3.4 Corde sur appuis mobiles: influence du chevalet (d'après [6])

On s'intéresse ici au comportement de la corde en présence du système chevalet / table a une de ses extrémités, à l'abscisse $x = L$ (fig. 1.11), et à l'influence qu'a celui-ci sur le mouvement de la corde. On modélise celui-ci comme prévu par une impédance complexe Z_{ch} , ne dépendant pas de la pulsation ω . On s'intéressera au cas où Z_{ch} représente le système masse / ressort / amortisseur du paragraphe précédent, en considérant que l'on se trouve loin de sa fréquence propre $\omega_0 = \sqrt{K/M}$.

Les nouvelles conditions aux limites sont donc:

$$\text{en } x = 0 : y(0, t) = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(0, t) = 0 \quad (1.18)$$

$$\text{en } x = L ; Z_{ch} = \frac{F_{corde/ch}}{\partial y / \partial t}(L, t) \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(L, t) = 0 \quad (1.19)$$

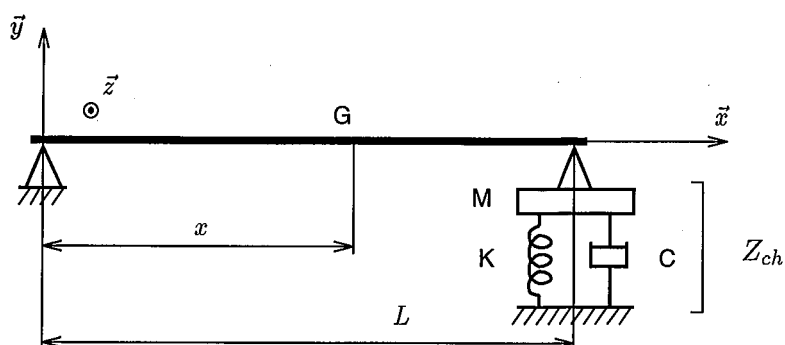


FIG. 1.11 – Corde vibrant entre un appui simple et le chevalet, sous forme d'un oscillateur du second ordre

Sans approximation, le calcul analytique étant impossible, nous supposons que le déplacement occasionné par la présence du chevalet en $x = L$ est négligeable devant ceux de la corde ailleurs. Cela nous permet d'utiliser les modes propres calculés dans le cas de deux appuis simples: $\varphi_n(x) = \sin k_n x$, l'expression de k_n en fonction de ω_n étant celle de l'équation 1.9. Il reste donc à calculer les valeurs de k_n avec les équations:

$$y(x, t) = A \cdot \sin k x \cdot e^{i\omega t} \quad (1.20)$$

$$Z_{ch} = \frac{F(L)}{V(L)} \quad (1.21)$$

L'effort de la corde sur le chevalet est:

$$F_{corde/ch} = EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}(L) - N_0 \frac{\partial y}{\partial x}(L) \quad (1.22)$$

par transformé de Fourier:

$$F_{corde/ch} = -A \cdot k \cos k L (EI k^2 + N_0) e^{i\omega t} \quad (1.23)$$

La vitesse en $x = L$ est:

$$V(L) = i\omega A \sin k x \cdot e^{i\omega t} \quad (1.24)$$

d'où l'expression de l'impédance:

$$Z_{ch} = -\frac{k}{i\omega \tan k L} (EI k^2 + N_0) \quad (1.25)$$

avec l'équation de dispersion 1.7, et en supposant que $\omega/k \simeq cte = c = \sqrt{T_0/\rho S}$ (ce qui revient incidemment à négliger la rigidité E de la corde), on obtient:

$$iZ_{ch} \tan k L = -\rho S c \quad (1.26)$$

	Z_{ch}		$\omega_n = \beta_n + j\alpha_n$	α_n	β_n
résistif	$A_{ch} > 0$	C	complexe	$1/\tau$	$c \frac{n\pi}{L}$
réactif masse	$B_{ch} > 0$	$iM\omega$	réelle et augmentée	0	$c \frac{n\pi}{L} (1 + \varepsilon)$
réactif ressort	$B_{ch} < 0$	$-iK/\omega$	réelle et diminuée	0	$c \frac{n\pi}{L} (1 - \varepsilon)$

$$\tau = \frac{L|Z_{ch}|}{rhoSc^2C} \text{ et } \varepsilon = \frac{\rhoSc^2K}{L\omega|Z_{ch}|}$$

TAB. 1.1 – Résumé sur l'influence de l'impédance de chevalet

Enfin, si on suppose que les perturbations apportées par le chevalet sont minimales, $\tan kL \simeq kL - n\pi$, on peut écrire:

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \left(1 + i \frac{\rhoSc}{n\pi Z_{ch}} \right) = \frac{n\pi}{L} \left(1 + \frac{\rhoScB_{ch}}{n\pi|Z_{ch}|^2} + i \frac{\rhoScA_{ch}}{n\pi|Z_{ch}|^2} \right) \quad (1.27)$$

Ce qui permet de trouver un ordre de grandeur des pulsations propres ω_n :

$$\omega_n \simeq kc = k \sqrt{T_0/\rho S} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{T_0/\rho S} \left(1 + \frac{\rhoScB_{ch}}{n\pi|Z_{ch}|^2} + i \frac{\rhoScA_{ch}}{n\pi|Z_{ch}|^2} \right) \quad (1.28)$$

Cette expression va nous permettre de retrouver certaines propriétés du mouvement de la corde qui dépendent de la nature de Z_{ch} . On voit déjà que la partie résistive de Z_{ch} introduit une partie imaginaire dans l'expression de ω_n , qui se répercute comme un taux d'amortissement sur le mouvement de la corde. (si $\omega_n = \beta_n + i\alpha_n$, alors $\exp(i\omega_n t) = \exp(-\alpha_n t + i\beta_n t)$). Comme $|Z_{ch}| \gg 1$ et $A_{ch} \geq 0$, $0 \leq \alpha_n < 1$. Cela introduit une exponentielle décroissante responsable de l'amortissement du mouvement). Ensuite, selon la nature masse ou ressort de la partie imaginaire de Z_{ch} , à savoir positive ou négative, on remarque que la partie réelle, donc la pulsation responsable de l'oscillation, est faiblement augmentée ou diminuée, respectivement. Ainsi, *ajouter une impédance de chevalet non infinie revient à augmenter ou diminuer la pulsation d'oscillation* (tableau 1.1)

1.4 Vibration des chœurs de piano

C'est essentiellement G. Weinreich dans [2], puis dans [3] qui a expliqué les phénomènes de *double décroissance* du son d'une note de piano, par trois phénomènes:

- l'existence de mouvements horizontaux d'une corde de piano
- le couplage des cordes d'un chœur au niveau de leur passage sur le chevalet
- le faible désaccord des fréquences fondamentales des cordes formant ce chœur.

Pour tous les explications, tant qualitative que quantitatives, on se restreindra au cas du doublet de cordes, dont le comportement est plus simple, et qui possède une solution analytique [2].

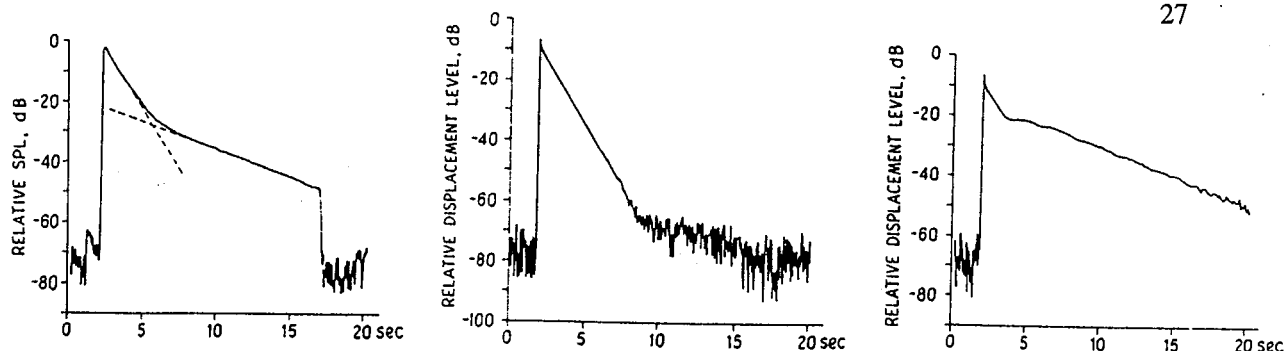


FIG. 1.12 – Pression acoustique, polarisation verticale et polarisation horizontale, respectivement, dues à une corde isolée à sa fréquence fondamentale ($Re^{th}4$, d'après[2])

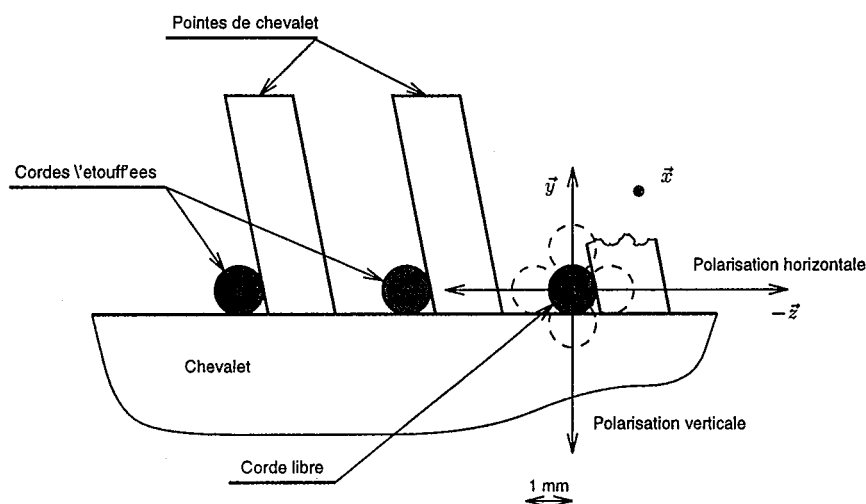


FIG. 1.13 – Coupe perpendiculaire aux cordes

1.4.1 Cas d'une corde seule. Polarisation verticale et horizontale

On s'intéresse tout d'abord aux vibrations d'une corde de piano isolée (par exemple, une corde d'un triplet, les deux autres étant étouffées complètement). G. Weinreich [2], a mesuré pour une corde seule la pression acoustique filtrée autour de la fréquence fondamentale pour isoler le rayonnement du au mode fondamental de vibration de cette corde (Fig. 1.12). Il constate alors une double décroissance de l'amplitude du signal de pression, qu'il interprète comme la superposition de deux vibrations possédant des taux de décroissance différents. Le fort amortissement initial correspond au *son immédiat*, et la décroissance atténuée qui lui succède au *son rémanent*. Pour vérifier cela, il a mesuré les projections du mouvement de la corde dans les plans perpendiculaire (polarisation verticale, direction \vec{y}) et parallèle (polarisation horizontale, direction \vec{z}) à la table d'harmonie (fig. 1.13). Ces deux directions sont pertinentes, puisque elles correspondent à priori aux "directions principales" de géométrie (forme de la table,

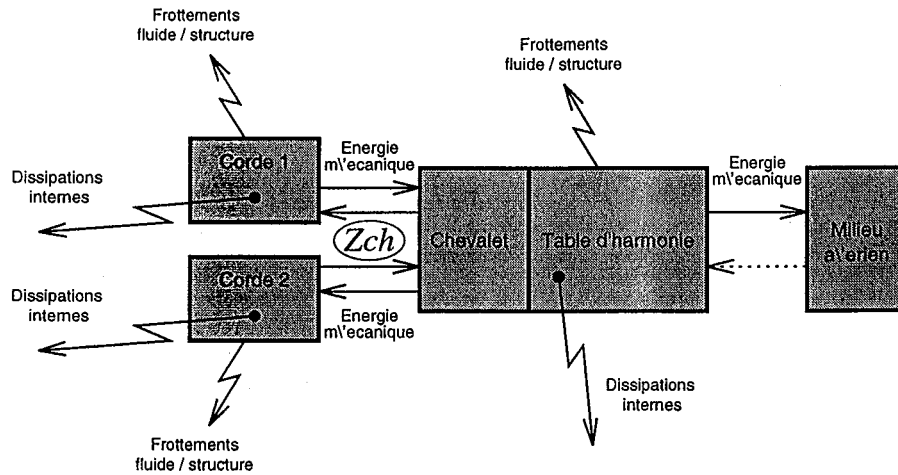


FIG. 1.14 – Transferts et dissipation d'énergie dans le système corde/chevalet/table d'harmonie

sens des fibres du bois, collage des raidisseurs et du chevalet sur la table).

Intéressons nous tout d'abord aux deux polarisations. On remarque que le taux de décroissance de la verticale est supérieure à celui de l'horizontale. Weinreich l'explique par trois considérations:

- la décroissance de la vibration des cordes est due principalement aux frottement internes à la structure de la corde (viscoélasticité, thermoélasticité), aux frottements fluide de la surface de la corde avec l'air ambiant et à l'énergie transmise à la table d'harmonie qui est dissipée par rayonnement, la partie résistive de Z_{ch} (fig.1.14)
- cette différence de taux de décroissance ne peut provenir que du chevalet, car les dissipations intrinsèques à la corde se manifestent par les mêmes phénomènes quelle que soit la direction du mouvement transversal de la corde.
- le chevalet a manifestement une liberté de mouvement plus importante verticalement, car la rigidité, et donc l'amplitude des mouvements pour un effort donné, de la table d'harmonie est bien plus petite dans cette direction. Donc, le rayonnement acoustique due aux déformations verticales de la table est plus important. Ainsi, l'énergie de la polarisation verticale des cordes est plus rapidement rayonnée que celle de l'horizontale, d'où la différence de taux de décroissance des deux polarisations observées.

La conséquence de cela est que, en comparant les taux de décroissance des cordes seules et de la courbe de pression aérienne, Weinreich identifie facilement le taux de décroissance du son immédiat comme celui de la polarisation verticale, et celui du son rémanent comme celui de la polarisation horizontale. Cela est possible, car le mouvement horizontal des cordes est créé par les irrégularités de surface du marteau, et un mauvais réglage de sa trajectoire de frappe (fig. 1.15); il est donc d'amplitude beaucoup plus faible que le mouvement vertical. En conséquence, Weinreich conclut que

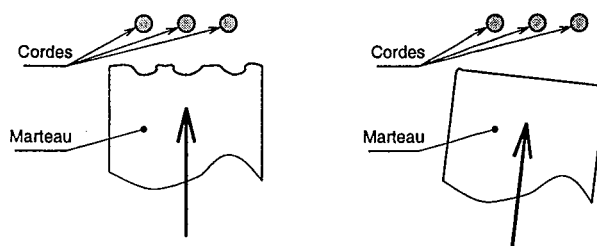


FIG. 1.15 – *Irrégularités de frappes: marquage de la surface du marteau et trajectoire inclinée*

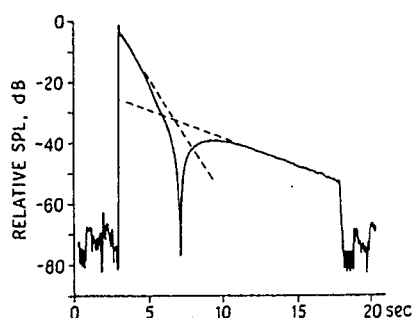


FIG. 1.16 – *Pression acoustique due à la même corde isolée que pour la figure 1.12, avec un placement différent du microphone*

la pression aérienne est la superposition de deux contributions, prépondérantes à des instants différents. Dans le son immédiat, c'est la composante verticale qui domine. Son taux de décroissance étant élevé, son mouvement est rapidement amorti, et s'est alors à la composante horizontale de devenir dominante dans la partie rémanente du son.

Weinreich évoque d'autre part le phénomène de la figure 1.16 où il a observé, pour une position particulière non communiquée de son microphone, des interférences destructrices entre les ondes dues aux deux polarisations au moment où leurs amplitudes sont voisines lui permettant de renforcer l'hypothèse comme quoi la polarisation horizontale est capable de rayonner, et que son rayonnement n'est pas isotrope, si bien que pour la figure 1.12, les deux contributions des polarisations sont en phase, alors que pour l'autre, elles sont déphasées, probablement à cause d'un court circuit acoustique.

Une dernière expérience de Weinreich lui a permis d'obtenir un ordre de grandeur de la partie réactive de l'impédance de chevalet correspondant à la polarisation horizontale. Avant d'aller plus loin, il convient de préciser une hypothèse implicite dans l'article. Dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ de la figure 1.13, c'est à dire la "base propre" du système chevalet / table, sans entrer dans les détails, l'impédance de l'ensemble chevalet / table peut être représentée par une matrice 3×3 diagonale, dont les trois valeurs propres sont les quotients $Z_{ch}^x = \vec{F} \cdot \vec{x} / \vec{V} \cdot \vec{x}$, $Z_{ch}^y = \vec{F} \cdot \vec{y} / \vec{V} \cdot \vec{y}$ et $Z_{ch}^z = \vec{F} \cdot \vec{z} / \vec{V} \cdot \vec{z}$. Plus physiquement, on suppose implicitement ici qu'il y a *découplage* de vibration entre les

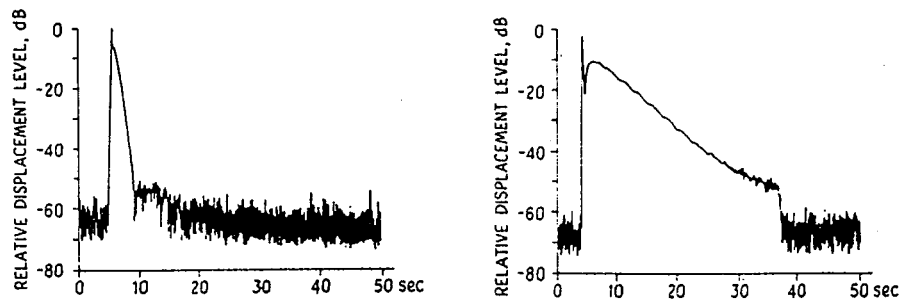


FIG. 1.17 – *Mouvement vertical d'une corde d'un triplet, lorsque les deux autres sont étouffées (gauche) et lorsque deux des trois cordes vibrent ensemble (gauche)*

trois directions principales. Sous cette hypothèse, par exemple, une excitation verticale de la corde ne peut entraîner un mouvement horizontal de celle-ci. Comme on l'a vu dans la partie précédente (§1.3.4), l'ajout d'une impédance réactive au support d'une corde introduit un décalage dans la fréquence propre de la corde, proportionnel à cette partie réactive. Weinreich a mesuré les différents passages par zéro des polarisations d'une même corde, et a constaté que la différence de pulsation d'oscillation de ces deux vibrations se situe en dessous de la sensibilité de son système de mesure, c'est à dire de 0.1cent . Parallèlement, il a comparé les taux de décroissance des deux polarisations, et a trouvé une différence de 1cent , soit 10 fois plus. Il montre de plus que les parties résistive et réactive dans la direction horizontale sont d'un ordre de grandeur comparable. Cela nous servira par la suite, en particulier pour identifier les valeurs des paramètres de la simulation.

En résumé:

- L'impédance dans la direction verticale est majoritairement dissipative. On a $A_{ch}^v \simeq 10 \cdot B_{ch}^v$
- Dans la direction horizontale, $A_{ch}^h \simeq B_{ch}^h \simeq B_{ch}^v$

1.4.2 Cas de deux cordes couplées. Modes de vibration

Modes de vibration

Etant donné que les cordes d'un même doublet / triplet passent très près les unes des autres sur le chevalet, leurs vibrations sont *couplées*, c'est à dire que lorsque une corde vibre, elle transmet sa vibration au chevalet qui la transmet aux autres. Les courbes de la figure 1.17 montrent une première conséquence de ce phénomène: une diminution de taux de décroissance.

Ce changement de taux de décroissance provient en fait de l'existence de deux famille de *modes de vibration* du système couplé (on a maintenant deux cordes, donc deux fois plus de modes !). Qualitativement, le taux de vibration d'une corde, on l'a vu, est lié au mouvement du chevalet: plus l'amplitude du chevalet est grande, plus la table rayonne, donc plus la décroissance de la corde est rapide. Si les deux cordes

vibrent à la même pulsation, avec la même amplitude, mais en *opposition de phase*, à tout instant, les efforts de chaque corde sur le chevalet sont égaux et opposés. Leur résultante est donc nulle, si bien que le chevalet ne bouge pas, la table ne rayonne pas, la décroissance des vibrations des cordes est nulle (aux pertes par frottement fluide / structure, par thermoélasticité et viscoélasticité près, qui, selon C. Valette [6], §4.2 sont négligeables devant la dissipation due au rayonnement). Dans le cas contraire, où cette fois les deux cordes vibrent en *phase*, la résultante des efforts des cordes sur le chevalet est deux fois plus importante que dans le cas d'une corde seule, mais la quantité d'énergie transmise et dissipée par la table est la même: vu de la corde, tout se passe comme si elle était couplée seule avec le chevalet. Ces deux cas extrêmes constituent les deux familles de modes: *symétrique et antisymétrique*. La figure 1.17 correspond à un cas intermédiaire, plus général, où la vibration des cordes est une superposition des modes symétrique et antisymétrique, additionné d'un désaccord qui est responsable de la chute du taux de décroissance. On y reviendra au §1.4.3.

Double décroissance d'un chœur à l'unisson

Nous avons jusque là étudié les cas théorique où les deux cordes reçoivent les mêmes conditions initiales. Pratiquement, on l'a vu (fig. 1.15 et §1.4.1), les deux cordes ne sont jamais frappées exactement de la même façon, si bien qu'elles ne reçoivent pas la même quantité d'énergie. Au début, l'excitation du marteau leur impose de vibrer en phase, avec des amplitudes différentes. Leur énergie étant dissipée à la même vitesse par la table, leur amplitude décroît parallèlement et rapidement jusqu'à ce que l'une des deux approche de zéro. Le chevalet continuant de vibrer sous l'influence de la première corde, la seconde corde se met à vibrer en opposition de phase avec la première, entraînée par le mouvement du chevalet. C'est à ce moment là que le doublet se met à vibrer sur son mode antisymétrique, les deux cordes s'échangeant de l'énergie via le chevalet. On obtient alors un son à *double décroissance*, le mode symétrique correspondant au son initial, le mode antisymétrique au son rémanent. La figure 1.18 représente une mesure de pression aérienne sur un triplet accordé, le Fa4, dont l'une des cordes a été enlevée, effectuée à l'IRCAM avec David Rousseau. Le deuxième graphique, extrait de [3] schématise le changement de phase. Ce phénomène est analogue à celui de la double décroissance observée pour une corde seule: c'est la superposition de deux modes couplés, possédant chacun un taux de décroissance, et chacun d'eux étant prépondérant à des instants différents. Pour une corde seule, le couplage est *aérien*, pour le doublet, le couplage est *vibratoire à l'intérieur* de la structure.

Pédale *una corda*

Le son rémanent se situe à environ $-20dB$ du son immédiat. Cela convient parfaitement lorsque le pianiste joue suffisamment fort, mais lorsque celui-ci joue *pianissimo*, l'intensité du son immédiat se rapproche du bruit de fond de la salle, rendant le son rémanent inaudible et ne gardant que l'attaque métallique du timbre du piano. La pédale douce, en décalant le mécanisme, et obligeant les marteaux à ne frapper que une (deux) cordes sur deux (trois), excite principalement le(s) mode antisymétrique des chœurs, augmentant largement le niveau du son rémanent par rapport au son immédiat.

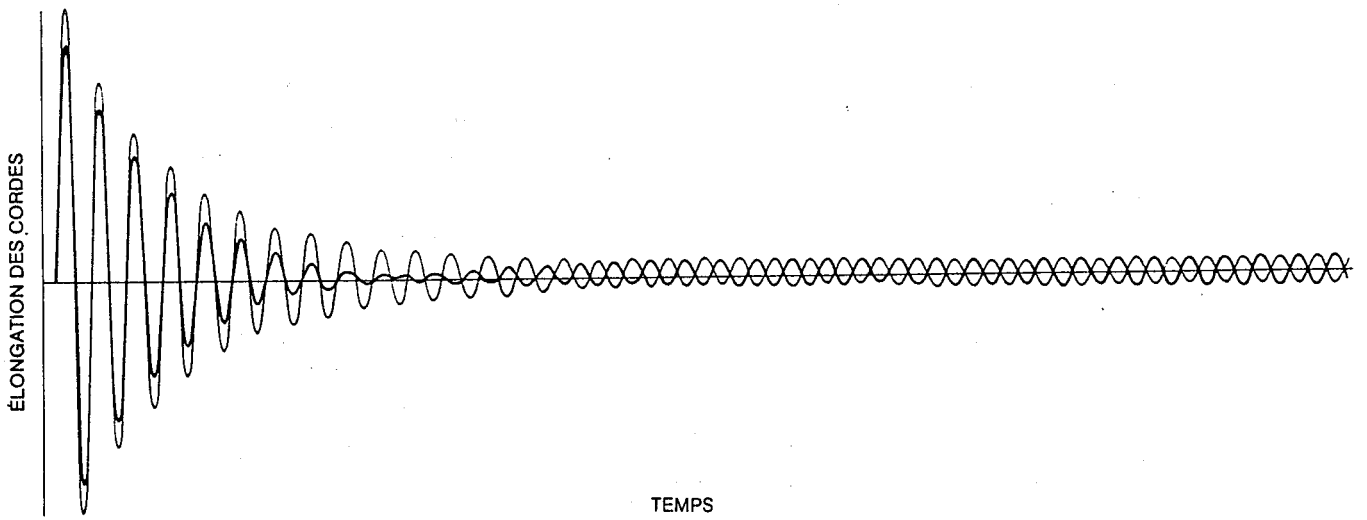
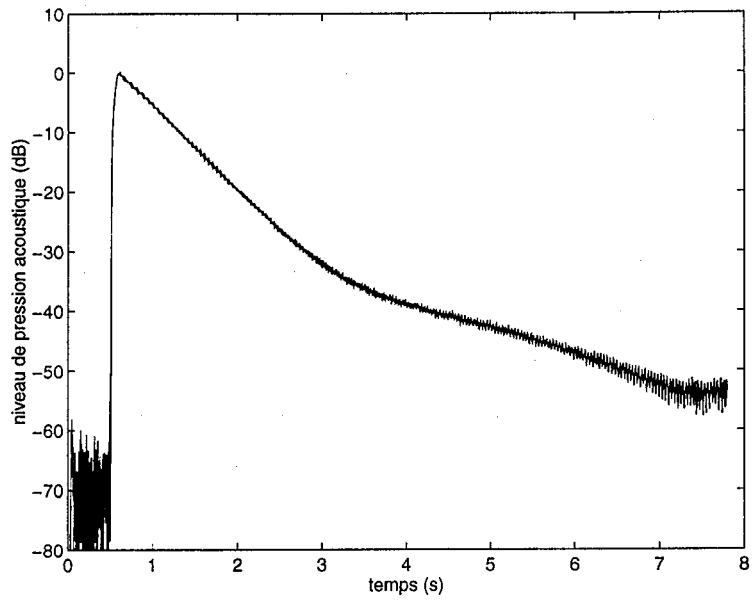


FIG. 1.18 – *Double décroissance d'un doublet de cordes*

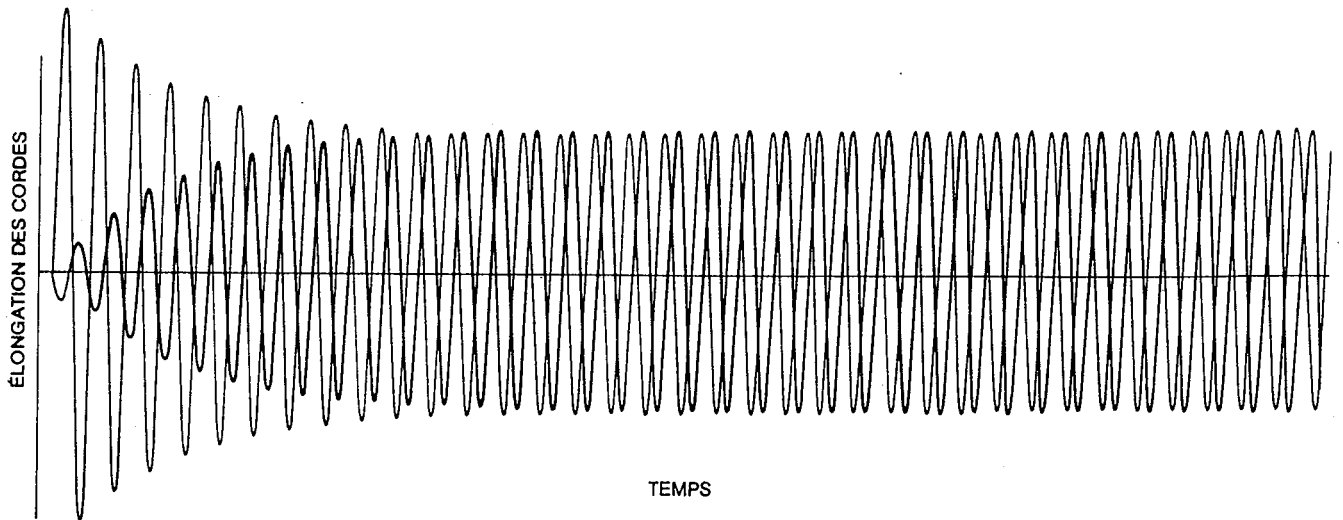


FIG. 1.19 – Effet de la pédale una corda sur les vibrations des cordes (d'après [3])

(fig. 1.19)

1.4.3 Effets d'un défaut d'unisson

Il a été souvent remarqué que les groupes de cordes constituant un chœur ne sont pas accordés à l'unisson par les meilleurs accordeurs; c'est à dire que les fréquences fondamentales de vibration des cordes, excitées séparément, ne sont pas identiques. E. Marandas, accordeur et acousticien, dans [5], a mesuré les défauts d'unisson, pour une trentaine de triplets de la partie médium d'un piano quart de queue de marque Petrof. Il a constaté des valeurs de désaccord entre les deux notes extrême de chaque triplet autour de 1 cent.

Pour caractériser l'influence de ce désaccord qui, a priori, ne produit pas de battements audibles, Weinreich a utilisé un modèle constitué de deux oscillateurs concavatifs du second ordre couplés par une impédance de chevalet, qui possède, avec des petites hypothèses, une solution analytique. Chaque oscillateur (un système masse / ressort) représente le mode fondamental de la corde correspondante. C'est un système à deux degrés de liberté (il considère en effet le chevalet, qui serait un troisième degré de liberté, comme une petite perturbation du cas "cordes sur appuis simples", possédant une impédance de chevalet infinie). Les équations considérées sont:

$$\begin{cases} \ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = f_1(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i) \\ \ddot{q}_2 + \omega_0^2 q_2 = f_2(\ddot{q}_i, \dot{q}_i, q_i) \end{cases} \quad (1.29)$$

Les solutions sont de la forme:

$$q_i = \sum_{k=1}^2 A_{ik} e^{i\beta_k t} \quad (1.30)$$

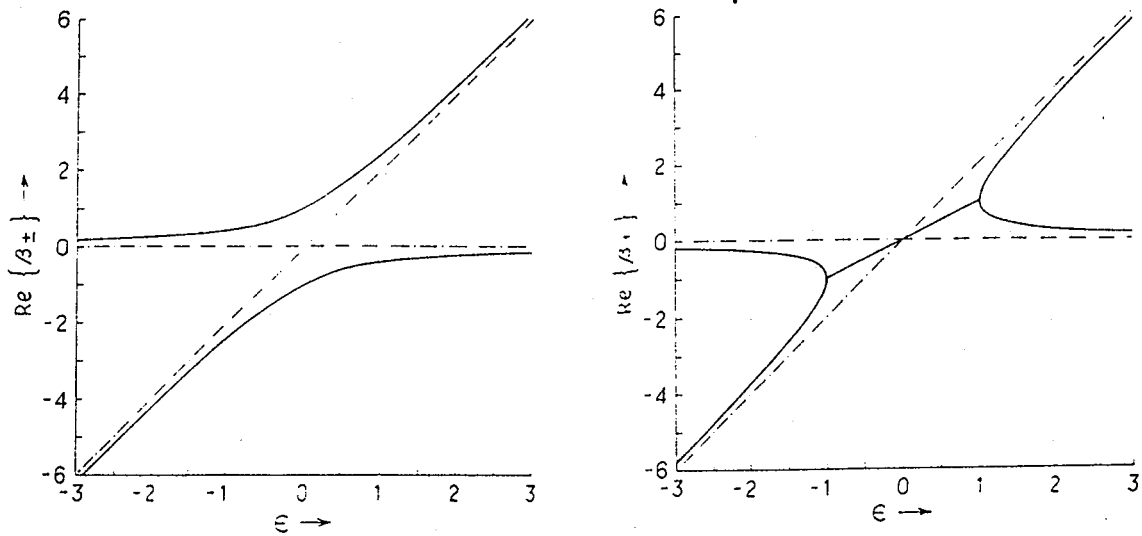


FIG. 1.20 – Pulsation des deux modes normaux, pour un chevalet purement réactif (gauche) et purement résistif (droite). Les pointillés représentent les fréquences des deux cordes en l'absence de couplage, avec le chevalet.

Après un petit développement non rappelé ici, Weinreich calcule les fonctions f_i en tenant compte de l'impédance finie du chevalet et du désaccord des deux oscillateurs. Il utilise un paramètre ε représentant la moitié du désaccord, tel que $\omega_{10} = \omega_{20} + 2\varepsilon$. Cela lui permet de calculer la valeur des pulsations propres, β^+ et β^- . Il obtient comme prévu deux pulsations propres, complexes du fait de la nature de l'impédance de chevalet. Les deux parties réelles $Re(\beta^+)$ et $Re(\beta^-)$ représentent les deux pulsations d'oscillation des modes propres symétrique et antisymétrique, qui ne le sont d'ailleurs totalement que pour $\varepsilon = 0$, comme on le verra lors de la simulation, dans le chapitre 3. Les parties imaginaires $Im(\beta^+)$ et $Im(\beta^-)$ représentent les taux d'amortissement des modes propres.

Pour identifier les effets du désaccord sur le comportement du système, Weinreich étudie trois cas:

- le couplage est purement réactif (fig. 1.20, gauche). Les deux pulsations tendent vers les valeurs qu'elles auraient en l'absence de couplage, lorsque le désaccord devient grand. Elles ne se coupent pas, si bien que les deux modes ont des pulsations d'oscillation différentes quelque soit ε , ce qui introduit des battements dans le son. Dans ce cas, les oscillations ne sont pas amorties.
- le couplage est purement résistif (fig. 1.20, droite). Deux zones sont à distinguer, selon si $-1 < \varepsilon < 1$ ou non. Si tel est le cas, les parties réelles des pulsations des deux modes sont égales, donc on n'observe pas de battement. En dehors de cette zone, les fréquences tendent vers la valeur qu'elles auraient en l'absence de couplage. Pour les parties imaginaires, on retrouve les deux zones précédentes. Si $\varepsilon = 0$, on a coïncidence des fréquences du mode symétrique et du mode

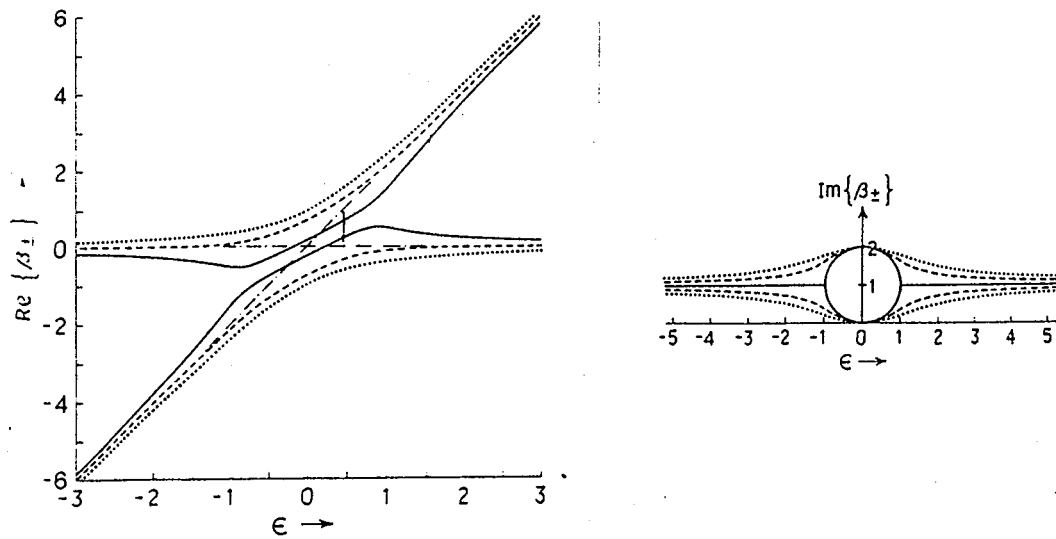


FIG. 1.21 – Pulsation des deux modes normaux avec trois impédances de chevalet (gauche) et taux d'amortissement (droite, trait plein: purement résistif, pointillés: Z_{ch} quelconque). Le demi cercle supérieur correspond au mode symétrique, l'inférieur au mode antisymétrique.

antisymétrique, le taux d'amortissement du mode symétrique est celui d'une corde seule, et le mode antisymétrique n'est pas amorti, ce qui est figuré sur le graphe du bas de la figure 1.18.

- le couplage est quelconque (fig. 1.21). On se trouve dans une situation intermédiaire aux deux premiers cas. On retrouve approximativement deux zones. Dans la première, pour $|\epsilon| > 1$, les fréquences tendent vers les valeurs qu'elles auraient en l'absence de couplage. Pour $|\epsilon| < 1$, les fréquences sont très voisines, mais pas confondues, ce qui introduit des battements dans le son. Nous calculerons lors de la simulation leurs fréquences afin d'estimer leur incidence sur le son, ce que Weinreich ne précise pas dans son article.

Cette dernière situation correspond en fait au comportement classique du piano, l'impédance de son chevalet possédant à la fois une partie réactive et une partie résistive (§1.4.1). Si on revient sur les courbes 1.17, on s'aperçoit que leurs taux de décroissance correspondent au son immédiat du doublet, donc à celui du mode symétrique. La courbe 1.21 indique justement une décroissance de ce taux lorsque ϵ augmente à partir de zéro. On vient donc d'expliquer la question posée au §1.4.2.

Une dernière question liée à ces différences de taux de décroissance entre les vibrations couplées et découplées, très intéressante musicalement, est abordée par Weinreich. Lorsque le doublet se trouve dans le son rémanent, les vibrations de ses cordes sont à peu près en opposition de phase, et donc le rayonnement est faible, puisque la majorité de l'énergie mécanique du système est échangée entre les deux cordes (voir §1.4.2, *modes de vibration*). Si on étouffe à ce moment là une des cordes, la vibration

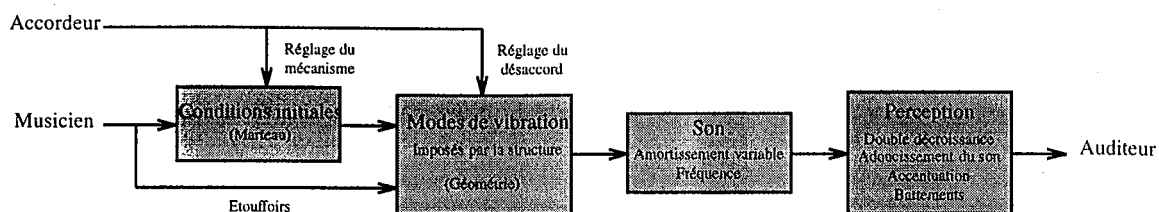


FIG. 1.22 – Synthèse

du système passe d'un mode antisymétrique peut rayonnant à un mode de corde isolée fortement rayonnant. On obtient alors dans le signal de pression acoustique un saut d'amplitude permettant, par exemple d'accentuer la note jouée. Weinreich propose en conclusion de [3] d'inclure une pédale supplémentaire sur les pianos qui actionnerait une série de demi-étouffoirs, permettant détouffer l'une des deux cordes d'un doublet (deux des trois cordes dans le cas d'un triplet).

1.5 Conclusion

Le graphe synthétique de la figure 1.22 permet de résumer l'essentiel de ce chapitre. Comme beaucoup de structures vibrantes, leur géométrie, c'est à dire plus précisément la forme de la structure et les conditions aux limites (appui simple, impédance de chevalet...) imposent la nature du mouvement, c'est à dire les modes de la structure. L'instrumentiste détermine essentiellement la vitesse avec laquelle le marteau est lancé sur les cordes, et quelle corde celui-ci va frapper. L'accordeur contrôle la forme de la surface du marteau, sa trajectoire, les caractéristiques superficielles du matériau feutre. Ce sont les conditions initiales; elles permettent de déterminer comment les modes vont être excités, et comment leur contribution à la vibration évolue au cours du temps. L'instrumentiste peut aussi agir directement sur la répartition des modes, en cours de jeu (au moyen des étouffoirs, qu'il contrôle avec les pédales). L'accordeur, en réglant l'accord de toutes les cordes influence directement sur la forme des modes (plus ou moins amorti, plus ou moins déphasé). Cela produit certaines caractéristiques fréquentielles et d'amortissement du son, que l'auditeur perçoit comme une double ou simple décroissance, associée à des battements d'amplitude, ou des atténuations / accents provoqués par le musicien.

Chapitre 2

Modèle théorique de comportement des chœurs

La raison d'être de ce chapitre est d'exposer la théorie d'un modèle, en vue de son implémentation sur le logiciel de calcul MATLAB, dans le chapitre suivant.

Dans son article [2], G. Weinreich ne s'intéresse qu'au mode fondamental des cordes, qui se modélise comme un oscillateur du deuxième ordre, conservatif puisqu'on néglige les pertes intrinsèques à la corde (frottement fluide, thermoélasticité et viscoélasticité, §1.4.1). En fait, étant la nature des solutions du mouvement de la corde vibrante, celle-ci est équivalente à la superposition d'une infinité d'oscillateurs du second ordre, de fréquences propres celles de la corde (une corde est un système *continu*, et possède donc ainsi une infinité de degrés de liberté). Ainsi, on modélise les deux cordes d'un doublet par un système masse ressort.

Pour le chevalet, deux solutions presque équivalentes s'offrent à nous. La première revient à considérer le chevalet comme un autre oscillateur du deuxième ordre, dissipatif cette fois-ci, pour prendre en compte le rayonnement de la table d'harmonie (voir §1.3.3). On obtient alors un système couplé de trois oscillateurs, qui se trouve avoir trois degrés de liberté. Sauf miracle, il n'existe pas de solution analytique, ce qui nous oblige à résoudre numériquement.

Une autre solution se rapproche de l'idée de Weinreich de considérer l'impédance de chevalet comme à peu près constante autour de la pulsation du fondamental de la corde. On verra ainsi que l'on peut se ramener facilement par le calcul à un système à deux degrés de liberté, en éliminant le mouvement du chevalet dans les autres équations, qui cette fois-ci a une solution analytique, lourde si on ne fait pas d'hypothèses supplémentaires, ce qu'a fait Weinreich.

La première partie expose la méthode "sans hypothèses", à titre indicatif et comparatif, puisqu'elle est plus compliquée à implémenter. La deuxième partie expose, la deuxième méthode, plus élégante, et surtout beaucoup plus immédiate à mettre en œuvre.

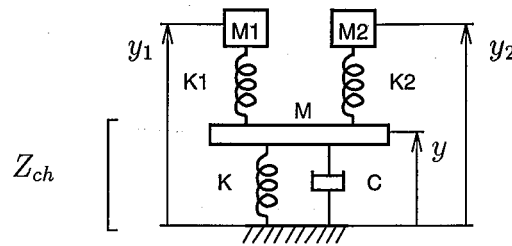


FIG. 2.1 – Modèle à trois degrés de liberté

2.1 Méthode à trois degrés de liberté

On applique, par exemple, les équations de Lagrange au système (M_1, M_2, M) de la figure 2.1. C'est un système à trois degrés de liberté (y_1, y_2, y) . Après écriture des trois équations \mathcal{L}_{y_1} , \mathcal{L}_{y_2} et \mathcal{L}_y , par rapport aux paramètres y_1 , y_2 et y , on obtient le système des trois équations suivantes:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 + K_1 y_1 - K_1 y = 0 \\ M_2 \ddot{y}_2 + K_2 y_2 - K_2 y = 0 \\ M \ddot{y} + C \dot{y} + (K_1 + K_2 + K)y - K_1 y_1 - K_2 y_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Les solutions sont de la forme $\vec{Y} = \vec{P}e^{\lambda t}$, avec $\vec{Y} = (y_1 \ y_2 \ y)^t$. On obtient alors le système $A(\lambda)\vec{Y} = \vec{0}$, avec

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} M_1 \lambda^2 + K_1 & 0 & -K_1 \\ 0 & M_2 \lambda^2 + K_2 & -K_2 \\ -K_1 & -K_2 & M \lambda^2 + C \lambda + K_1 + K_2 + K \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Le système $A(\lambda)\vec{Y} = \vec{0}$ a des solutions \vec{Y} non nulles si, et seulement si $\det A(\lambda) = 0$, c'est à dire si, après calcul:

$$\begin{aligned} & M_1 M_2 M && \cdot \lambda^6 \\ & + M_1 M_2 C && \cdot \lambda^5 \\ & + (M_1 M_2 (K_1 + K_2 + K) + M_1 M K_2 + M_2 M K_1) && \cdot \lambda^4 \\ & + (M_1 K_2 + M_2 K_1) C && \cdot \lambda^3 \\ & + (M_1 K_1 K_2 + M_2 K_1 K_2 + M_1 K_2 K + M_2 K_1 K + M K_1 K_2) && \cdot \lambda^2 \\ & + C K_1 K_2 && \cdot \lambda \\ & + K_1 K_2 K && = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cela revient à chercher la nullité d'un polynôme du sixième degré, à coefficients réels. L'équation possède donc six solutions soit réelles, soit complexes conjuguées deux à deux. La résolution numérique avec des valeurs de paramètres en relation avec la réalité du piano montre que quatre de ces valeurs sont complexes conjuguées $\lambda_i = -\alpha_i \pm i\omega_i$. Les deux α_i correspondent aux taux d'amortissement des deux modes principaux de vibration des cordes, symétrique et antisymétrique, et les deux ω_i à leurs pulsations propres. Un petit algorithme permettra, au chapitre suivant, de les calculer pour différentes valeurs du désaccord entre les cordes et de l'impédance de chevalet, et de vérifier ainsi que les approximations de la deuxième méthode sont, on le verra,

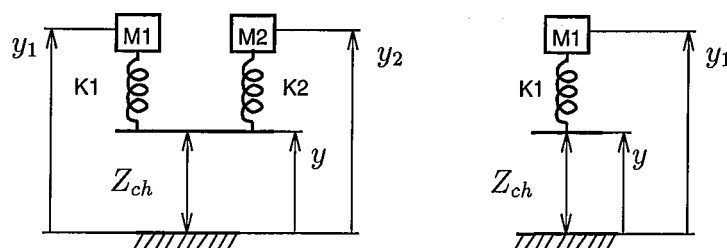


FIG. 2.2 – Modèle simplifié à deux degré de liberté

largement justifiées.

On pourrait continuer la résolution du problème. Elle met en jeu le calcul des "vecteurs propres" \vec{P}_i , tels que $A(\lambda_i)\vec{P}_i = \vec{0}$, qui nécessite de connaître le rang de $A(\lambda_i)$, et de résoudre le système singulier, ce qui n'est pas facile numériquement. La solution générale serait alors la partie réelle de:

$$\vec{Y} = \sum_{i=1}^2 e^{-\alpha_i t} (A_i \vec{P}_i e^{i\omega_i t} + B_i \vec{P}_i^* e^{-i\omega_i t}) + C \vec{P}_3 e^{\lambda_{reel3} t} + D \text{vec} P_4 e^{\lambda_{reel4} t} \quad (2.4)$$

avec A_i, B_i, C et D des complexes quelconques et \vec{P}_i^* le complexe conjugué de \vec{P}_i . Les conditions initiales sont au nombre de six (pour chaque degré de liberté, on impose sa position et sa vitesse initiale), et celles associées au chevalet sont nulles. Cela permet d'annuler C et D :

$$Y_{reel} = \sum_{i=1}^2 A_i |\vec{P}_i| e^{-\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i) \quad (2.5)$$

avec les (A_i, φ_i) des réels dépendant des conditions initiales (et de la phase de \vec{P}_i pour φ_i),

2.2 Modèle simplifié à deux degrés de liberté

2.2.1 Equation du mouvement - Modes propres du système

Pour résoudre le problème de la figure 2.2, à gauche, on remplace la dernière équation du système 2.6 par l'expression de l'impédance de chevalet $Z_{ch} = \text{Force}/\text{Vitesse}$. La force des deux ressorts K_1 et K_2 sur le chevalet est $F_{crd/ch} = K_1(y_1 - y) + K_2(y_2 - y)$. La vitesse, si on suppose toujours que les solutions sont de la forme $y = pe^{\lambda t}$, est $V = \lambda y$. Si on fait l'hypothèse que le taux d'amortissement est négligeable devant la pulsation ($0 < \alpha < 10$, valeurs classiques, et $\omega_0 = 1954 \text{ rad.s}^{-1}$, pulsation fondamentale du Mib4 du piano, qui nous intéresse), on peut approximer λ par $i\omega_0$. Donc $V = i\omega_0 y$. On obtient alors le système:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 + K_1 y_1 - K_1 y = 0 \\ M_2 \ddot{y}_2 + K_2 y_2 - K_2 y = 0 \\ i\omega_0 y Z_{ch} = K_1 (y_1 - y) + K_2 (y_2 - y) \end{cases} \quad (2.6)$$

Il suffit alors d'éliminer y , dans les deux premières équations, et on obtient les équations caractéristiques d'un système à deux degrés de liberté:

$$M_1 \ddot{y}_1 + K_1 y_1 = \frac{1}{K_1 + K_2 + i\omega_0 Z_{ch}} (K_1^2 y_1 + K_1 K_2 y_2) \quad (2.7)$$

$$M_2 \ddot{y}_2 + K_2 y_2 = \frac{1}{K_1 + K_2 + i\omega_0 Z_{ch}} (K_1 K_2 y_1 + K_2^2 y_2) \quad (2.8)$$

Ce système peut s'écrire sous la forme $M\ddot{\vec{Y}} + K\vec{Y} = 0$, si $\vec{Y} = (y_1 \ y_2)^t$, avec:

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & 0 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

$$K = \frac{1}{K_1 + K_2 + i\omega_0 Z_{ch}} \begin{pmatrix} K_1(K_2 + i\omega_0 Z_{ch}) & -K_1 K_2 \\ -K_1 K_2 & K_2(K_1 + i\omega_0 Z_{ch}) \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Ce problème est bien connu. On cherche toujours les solutions sous la forme $\vec{Y} = \vec{P}e^{\lambda t}$. Le système s'écrit alors $(\lambda^2 M + K)\vec{Y} = 0$, où encore, comme M est inversible, $(M^{-1}K + \lambda^2 \text{Id})\vec{Y} = 0$. Par les mêmes raisonnements que dans la partie précédente, on a à résoudre l'équation $\det(\lambda^2 \text{Id} + M^{-1}K) = 0$, ce qui correspond à calculer les *valeurs propres* l_i de la matrice $M^{-1}K$. On obtient alors deux valeurs de λ^2 complexes, telles que $\lambda_i^2 = -l_i$, soit quatre de λ opposées deux à deux. Comme on veut un système stable, donc des vibrations amorties, les deux solutions sont les $\lambda_i = -\alpha_i + i\omega_i$, avec $\alpha_i > 0$, c'est à dire celles dont leur *partie réelle est négative* (car $e^{\lambda_i} = e^{\text{Re}(-\lambda_i)} + e^{i \cdot \text{Im}(\lambda_i)}$). Si les deux couples (\vec{P}_i, λ_i) , avec \vec{P}_i les vecteurs propres, complexes aussi, sont issus du problème précédent, la solution complexe générale est:

$$\vec{Y} = \sum_{i=1}^2 A_i \vec{P}_i e^{-\alpha_i t} e^{i\omega_i t} \quad (2.11)$$

en extrayant la partie réelle:

$$Y_{reel} = \sum_{i=1}^2 A_i |\vec{P}_i| e^{-\alpha_i t} \cos(\omega_i t + \varphi_i + \psi_i) \quad (2.12)$$

Le grand intérêt de cette solution est la facilité avec laquelle on peut accéder aux vecteurs propres. On peut aussi remarquer que les modes propres du système couplé sont calculés. Pour identifier si ces modes sont symétriques ou antisymétriques, il suffit d'observer les phases ψ_{ij} des composantes complexes des vecteurs propres (voir §refsec:casdetude).

2.2.2 Conditions aux limites

La première idée qui vient à l'esprit est d'essayer de recréer les conditions imposées par le marteau aux cordes. Cela impose, si on veut être rigoureux, de prendre en compte des phénomènes non linéaires caractérisant le matériau "feutre". Une idée de départ, très classique, est de simplement imposer une position et une vitesse initiale aux deux cordes. Cela doit suffire dans un premier temps pour comprendre les phénomènes moins simples mis en œuvre par le chœur en vibration.

Rappelons les équations du mouvement du paragraphe précédent (on rappelle que les vecteurs \vec{P} sont complexes du fait de la présence de Z_{ch} dans les coefficients de la matrice):

$$y_1 = A|P_{11}|e^{-\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \psi_{11}) + B|P_{12}|e^{-\alpha_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \psi_{12}) \quad (2.13)$$

$$y_2 = A|P_{21}|e^{-\alpha_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \psi_{21}) + B|P_{22}|e^{-\alpha_2 t} \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \psi_{22}) \quad (2.14)$$

Les conditions initiales sont:

$$\vec{C}I = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \\ v_1(0) \\ v_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{01} \\ y_{02} \\ v_{01} \\ v_{02} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Les inconnues sont $a, B, \varphi_1, \varphi_2$. Si on remplace dans les équations ci-dessus, on s'aperçoit qu'il est plus facile d'identifier $\vec{X} = (A \cos \varphi_1 \ A \cos \varphi_2 \ B \cos \varphi_1 \ B \cos \varphi_2)^t$. Ainsi, on obtient un système linéaire du premier ordre à quatre inconnues, quatre équations, qu'il faut résoudre (les inconnues sont ici rangées dans le vecteur \vec{X}): $A\vec{X} = \vec{C}I$, avec:

$$A = \begin{pmatrix} |P_{11}| \cos \psi_{11} & -|P_{11}| \sin \psi_{11} & & \\ |P_{21}| \cos \psi_{21} & -|P_{21}| \sin \psi_{21} & & \\ |P_{11}|(-\alpha_1 \cos \psi_{11} - \omega_1 \sin \psi_{11}) & |P_{11}|(\alpha_1 \sin \psi_{11} - \omega_1 \cos \psi_{11}) & & \\ |P_{21}|(-\alpha_1 \cos \psi_{21} - \omega_1 \sin \psi_{21}) & |P_{21}|(\alpha_1 \sin \psi_{21} - \omega_1 \cos \psi_{21}) & & \\ & & |P_{12}| \cos \psi_{12} & -|P_{12}| \sin \psi_{12} \\ & & |P_{22}| \cos \psi_{22} & -|P_{22}| \sin \psi_{22} \\ |P_{12}|(-\alpha_2 \cos \psi_{12} - \omega_2 \sin \psi_{12}) & |P_{12}|(\alpha_2 \sin \psi_{12} - \omega_2 \cos \psi_{12}) & & \\ |P_{22}|(-\alpha_2 \cos \psi_{22} - \omega_2 \sin \psi_{22}) & |P_{22}|(\alpha_2 \sin \psi_{22} - \omega_2 \cos \psi_{22}) & & \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

Ensuite, lorsque \vec{X} est calculé, par une méthode du *pivot de Gauss*, par exemple, il suffit d'appliquer les formules $A = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $B = \sqrt{X_3^2 + X_4^2}$, $\varphi_1 = \arctan(X_2/X_1)$ et $\varphi_2 = \arctan(X_4/X_3)$ pour identifier toutes les grandeurs.

2.2.3 Modèle de corde couplée au chevalet

Ce paragraphe peut apparaître aux premiers abords comme une redite, mais il n'expose en fait que le calcul de la pulsation d'oscillation du modèle masse/ressort (fig. 2.2, à droite) associé au système à deux degrés de liberté ne représentant qu'une seule corde couplée au chevalet.

On se retrouve avec les équations suivantes:

$$\begin{cases} M_1 \ddot{y}_1 + K_1 y_1 - K_1 y = 0 \\ i\omega_0 y Z_{ch} = K_1 (y_1 - y) \end{cases} \quad (2.17)$$

Soit, en éliminant y :

$$M_1 \ddot{y}_1 + K_1 y_1 = \frac{K_1^2}{K_1 + i\omega_{10} Z_{ch}} y_1 \quad (2.18)$$

avec la solution $y = pe^{\lambda t}$, si $\omega_{10} = \sqrt{K_1/M_1}$, on a:

$$\lambda^2 = \omega_{10}^2 \left(\frac{K_1}{K_1 + i\omega_{10} Z_{ch}} - 1 \right) \quad (2.19)$$

Soit, en fonction des parties réactives et résistives de l'impédance de chevalet ($Z_{ch} = A_{ch} + iB_{ch}$):

$$\lambda^2 = \omega_{10}^2 \left(\frac{K_1(K_1 - B_{ch}\omega_{10})}{(K_1 - B_{ch}\omega_{10})^2 + A_{ch}^2\omega_{10}^2} - 1 - i \frac{A_{ch}\omega_{10}}{(K_1 - B_{ch}\omega_{10})^2 + A_{ch}^2\omega_{10}^2} \right) \quad (2.20)$$

De surcroît, on retrouve les conclusions de la partie 1.3.4, à savoir qu'un chevalet purement résistif ajoute un taux d'amortissement (ici la partie imaginaire de λ , qui est négative, pour pouvoir donner une exponentielle décroissante), et qu'un chevalet réactif de type massique augmente la pulsation, et inversement, la diminue pour un type ressort (ici, si $A_{ch} = 0$, comme $B_{ch} \gg 1$, $\lambda^2 \simeq (i\omega_{10})^2 (K_1/B_{ch}\omega_{10} + 1)$). Un support massique a une impédance positive, ce qui augmente bien la pulsation, et l'inverse est vrai pour un support de type ressort).

Chapitre 3

Simulation numérique des vibrations d'un chœur de piano

On se propose ici de regarder plus concrètement le comportement couplé des cordes de piano à partir d'une simulation numérique des modèles du chapitre 2.

Les programmes de simulations utilisent le code de calcul MATLAB. Seules les vibrations *verticales* des cordes et du chevalet sont abordées. Simuler la double décroissance d'une corde isolée, notamment, apparaît suffisamment compliquée au travers des mesures de Weinreich et de celles menées à l'IRCAM avec David Rousseau pour nécessiter une étude à part entière (voir §1.4.1 et [1]).

Une première partie va nous permettre d'identifier les valeurs des paramètres de réglage des algorithmes qui caractérisent la structure vibrante, et donc qu'il faut calculer à partir du comportement d'un vrai piano. En préliminaire aux discussions sur les simulations de vibrations de cordes, une petite partie expose brièvement le principe de fonctionnement de deux petits programmes, rédigés en code MATLAB, qui permettent d'extraire le déphasage instantané de deux signaux pseudo-périodiques, et d'un programme de calcul de l'enveloppe d'un signal oscillant. Les parties suivantes testent le programme de simulation dans des cas réels (cas du piano accordé, cas de la pédale *una corda*), déjà évoqués dans le chapitre 1. L'objectif du stage était aussi de simuler des comportements de corde non décrits par Weinreich, que l'on aurait mis en évidence à partir de mesures des vibrations de cordes de piano, notamment l'influence des conditions d'excitation de la corde (forme et trajectoire du marteau) sur la double décroissance. N'ayant pas à notre disposition des mesures correctes de vibration des cordes, on ne peut pas vérifier les résultats simulés. Néanmoins, on verra que l'on peut dégager quelques propriétés intéressantes.

3.1 Identification des paramètres - valeurs numériques

On se propose ici de préciser les valeurs des paramètres des modèles ($M_i, K_i \dots$), en accordant les fréquences propres des deux oscillateurs sur celles des fondamentales

Module d'Young de l'acier	$E = 206000$	MPa
Masse volumique de l'acier	$\rho = 7854$	$kg.m^{-3}$
Longueur de la corde (Mib4)	$L = 510$	mm
Diamètre de la corde (Mib4)	$d = 1$	mm
Impédance de chevalet (module)	$ Z_{ch} = 1000$	$kg.s^{-1}$
Fréquence de la corde (Mib4)	$f_0 = 311, 13$	Hz
Section de la corde	$S = 7,85.10^{-7}$	m^2
Moment quadratique polaire	$I = 4,909.10^{-14}$	m^4
Effort normal dans la corde (tension)	$N_0 = 621$	N
Pulsation du fondamental du (Mib4)	$\omega_0 = 1955$	$rad.s^{-1}$
Masse linéique de la corde	$M = \rho S = 6,17.10^{-3}$	$kg.m^{-1}$
Rigidité de l'oscillateur (Mib4)	$K_0 = 23564$	$N.m^{-2}$

TAB. 3.1 – Valeurs numériques

des cordes du doublet que l'on étudie, à savoir le Mib4, de fréquence annoncée $311Hz$ (On a choisit le Mib4, car c'est la note sur laquelle les mesures de vibrations ont été faites, avec David Rousseau [1], et nous devons initialement comparer les résultats de la simulation aux expériences, ce que l'on a pas eu le temps de faire).

D'après l'équation 1.15, la pulsation du mode fondamental est (pour $n = 1$), avec $k_{fond.} = \pi/L$:

$$\omega_{fond.} = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{N_0}{\rho S}} \sqrt{1 + \frac{EI\pi^2}{N_0 L^2}} \quad (3.1)$$

Les valeurs numériques sont présentées dans le tableau 3.1. Le terme d'inharmonicité due à la raideur de la corde vaut $EI\pi^2/N_0 L^2 = 6,18.10^{-4}$. On peut donc le négliger devant l'unité (on justifie ici l'approximation utilisée pour simplifier les résultat du §2.2.3). De ce fait, l'expression de la pulsation propre de la corde devient $\omega_0 = \pi/L \sqrt{N_0/\rho S}$, que l'on veut identifier à $\sqrt{K/M}$.

- On égale la *masse* des oscillateurs masse/ ressort au produit ρS , masse linéique de la corde, identique pour les trois cordes d'un même triplet.
- Leur *raideur* est ajustée à partir de la fréquence fondamentale désirée. Ainsi, comme on a décidé de fixer la valeur de M , K est analogue à N_0 et L . C'est sur N_0 que l'accordeur joue pour régler le désaccord d'un chœur. Dans notre modèle, c'est donc K_1 ou K_2 qui nous permettront de faire varier le désaccord.

Pour caractériser le désaccord entre ω_{01} et ω_{02} , on choisit une grandeur ε telle que:

$$\omega_{02} = (1 + \varepsilon)\omega_{01} \quad (3.2)$$

La formule pour exprimer le désaccord en *cent* est:

$$\varepsilon(\text{cent}) = 1200 \frac{\log \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}}{\log 2} = 1200 \frac{\log(1 + \varepsilon)}{\log 2} \quad (3.3)$$

Inversement, lorsque l'on connaît le désaccord en *cent*,

$$\varepsilon = 10^{\frac{\varepsilon(\text{cent}) \log 2}{1200}} - 1 \quad (3.4)$$

Ainsi, les valeurs de M_1 , M_2 , K_1 et K_2 sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_{01} = \omega_0 & (\text{rad.s}^{-1}) \\ \omega_{02} = (1 + \varepsilon)\omega_0 & (\text{rad.s}^{-1}) \\ M_1 = M_2 = M = \rho S & (\text{kg.m}^{-1}) \\ K_1 = K_0 = \rho S \omega_0^2 & (\text{N.m}^{-2}) \\ K_2 = M \omega_{02}^2 = (1 + \varepsilon)^2 K_0 & (\text{N.m}^{-2}) \end{array} \right. \quad (3.5)$$

3.2 Simulation des pulsations et de l'amortissement d'un chœur

On se propose ici de calculer la valeur des deux pulsations propres, et des deux taux de décroissances des modes symétrique et antisymétriques, en fonction des valeurs de l'impédance de chevalet et du désaccord imposé aux cordes. L'algorithme proposé calcule les valeurs propres de la matrice $M^{-1}K$, en fonction du désaccord ε , exprimé en *cent*. En outre, il calcule aussi la valeur des pulsations des deux modes normaux dans les cas où les cordes sont découplées, avec et sans l'influence du chevalet. On retrouve alors les trois cas principaux étudiés par Weinreich, lorsque l'impédance est purement résistive, purement réactive, et le cas général où Z_{ch} est un complexe quelconque.

La figure 3.1 représente ces courbes pour trois valeurs caractéristiques de Z_{ch} . On peut remarquer déjà que l'on retrouve bien les remarques du §1.3.4, à savoir que les pulsations des cordes influencées par la présence d'un chevalet de type massif ($Im(Z_{ch}) > 0$) sont augmentées par rapport à la situation sur appuis simples. Cela est très visible sur la courbe du haut, où $Z_{ch} = 20000.i \text{ kg.s}^{-1}$. On retrouve bien l'allure générale des courbes issues du modèle de Weinreich (§1.4.2). La figure 3.2 montre les variations des taux d'amortissement, en fonction du désaccord. Le cas de l'impédance purement réactive ne figure pas, puisque par définition il n'est pas dissipatif.

Les courbes situées au bas de ces deux figures représentent le cas du piano. L'impédance de chevalet a été réglée à $Z_{ch} = 10000 + 1000i$. K. Wogram a en effet mesuré des impédances de cet ordre de grandeur, et Weinreich a prouvé que la partie réactive de l'impédance verticale est dix fois moindre que la partie résistive. Les autres paramètres ont été réglés aux valeurs indiquées dans le §3.1 et le tableau 3.1. On peut dégager plusieurs constatations:

- il existe, comme prévu par Weinreich, deux zones de comportement différent. En particulier, dans la zone médiane, entre $-1.5 < \varepsilon < 1.5 \text{ cent}$, la différence entre les deux pulsations est à peu près *constante*, avoisinant les 0.2 cent . Cela correspond à un facteur multiplicatif sur la fréquence de $\varepsilon = 10^{-4}$, soit une différence de l'ordre de $3,6 \cdot 10^{-2} \text{ Hz}$ entre les pulsations des deux modes, soit une période de battements de 28 s , c'est à dire de l'ordre de la durée totale d'un son de piano.

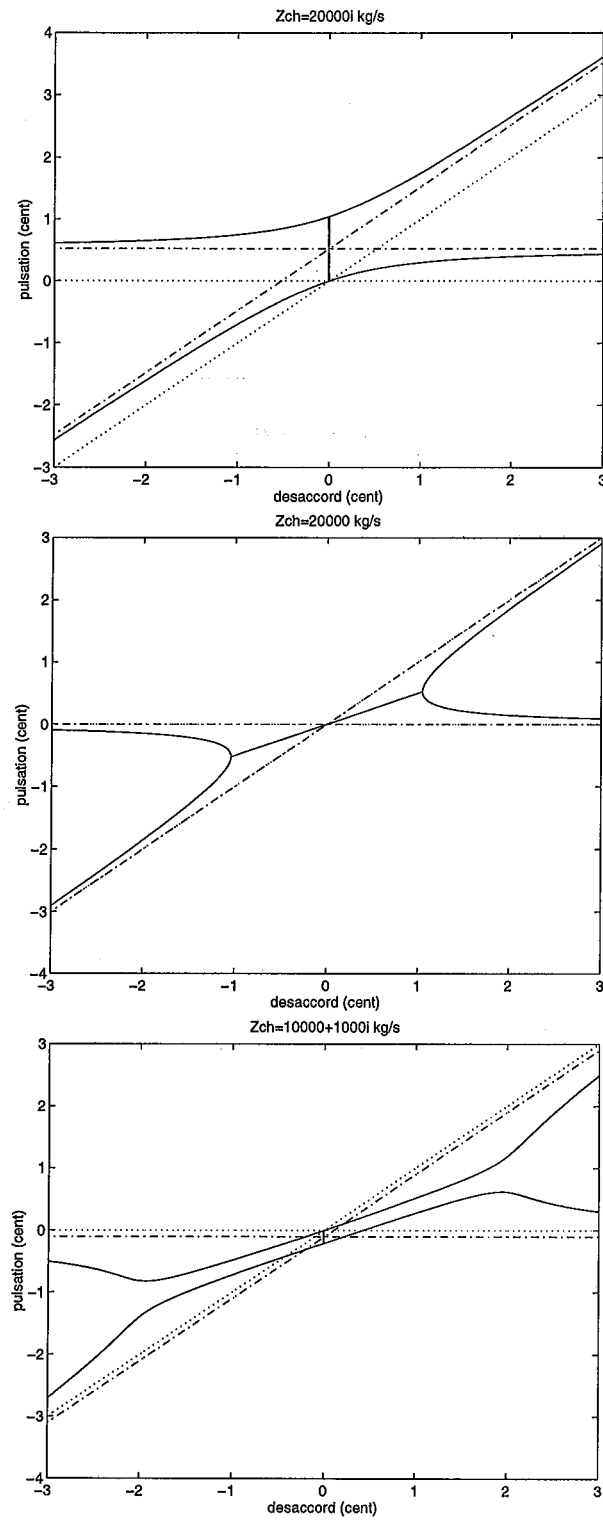


FIG. 3.1 – Pulsation des deux modes de vibration, pour un chevalet purement réactif (haut), purement résistif (milieu) et de l'ordre de grandeur de celui du piano (bas, changement d'échelle). Les courbes en trait mixte correspondent aux pulsations des cordes, en l'absence de couplage, celles en pointillés aux pulsations des cordes isolées

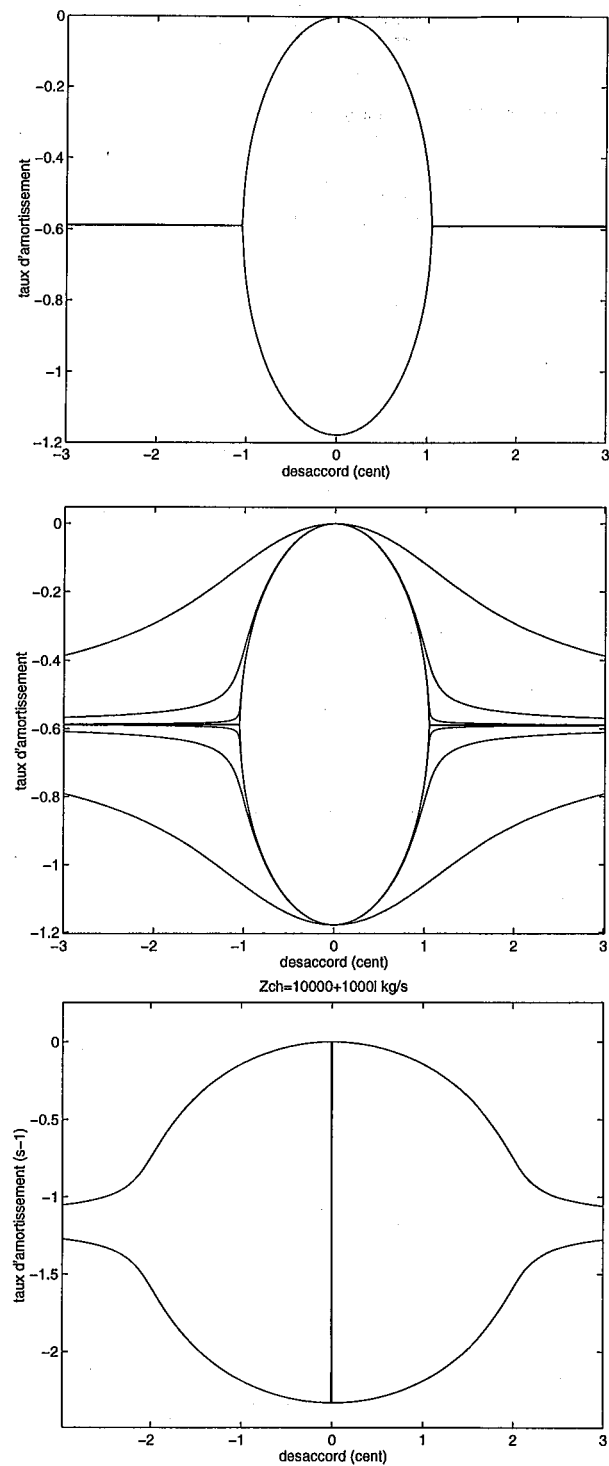


FIG. 3.2 – Taux d'amortissement des deux modes de vibration, pour un chevalet purement résistif (haut) et quelconque, avec plusieurs valeurs de Z_{ch} (bas). L'amortissement du mode antisymétrique correspond aux demi-ovales supérieurs, celui des symétriques aux demi-ovales inférieurs

- l'accordeur a donc une marge de $\pm 1,5$ cent de désaccord, dans laquelle la période de battements est à peu près constante, non perceptible, et où il va se placer inconsciemment pour régler l'accord du piano. On verra comment le désaccord influe sur les taux d'amortissement et la double décroissance (fig. ??).
- Pour fixer quelques ordres de grandeur, la relation entre le taux de décroissance α , exprimé en s^{-1} , et la pente mesurable directement sur les figures, en $dB.s^{-1}$ est:

$$\alpha(dB.s^{-1}) = 20 \log e . \alpha(s^{-1}) = 8.686 . \alpha(s^{-1}) \quad (3.6)$$

Pour le cas du piano (fig. 3.2, en bas), par exemple, le cas où le désaccord est nul, on obtient une pente de son immédiat de $-20 dB.s^{-1}$, qui correspond à la pente d'une corde isolée vibrant avec le chevalet, et une pente nulle pour le mode antisymétrique. Pour l'autre cas extrême où ε devient grand, la double décroissance perd de son acuité. A la frontière de la zone d'utilisation ($-1.5 < \varepsilon < 1.5/cent$), la pente devrait passer de $-8,5 dBs^{-1}$ à $-10 dBs^{-1}$ pour la rémanence. On vérifiera ces cas en détail avec la simulation de la vibration des cordes dans le chapitre suivant.

3.3 Présentation et résultat du programme de simulation

3.3.1 présentation des programmes

Programme de simulation

Ce programme de simulation d'un doublet de cordes par calcul des valeurs propres du système (eigenvalues), appelé `sim_2crd_eig.m`, permet de résoudre le problème dynamique de couplage exposé théoriquement au paragraphe 2.2. Il calcule d'abord les pulsations propres et les taux d'amortissement des deux modes symétrique et antisymétrique (valeurs propres et vecteurs propres de la matrice $M^{-1}K$, équation 2.9 et 2.10.), en fonction de:

- la "fréquence fondamentale" f_0 de la note simulée
- le désaccord ε installé entre les cordes du doublet
- la rigidité K_0 de l'oscillateur
- l'impédance verticale du chevalet Z_{ch}
- la fréquence d'échantillonnage désirée pour les signaux y_1 et y_2
- les conditions initiales en position et vitesse ($y_{01}, y_{02}, v_{01}, v_{02}$)

Ensuite, par résolution du système $A\vec{X} = \vec{C}I$ (équations 2.15 et 2.16), on obtient la valeur des constantes des équations 2.13 et 2.14. Le programme fournit alors les courbes des vibrations des deux cordes et du chevalet, la dernière étant calculée à partir des deux premières par la troisième équation du système 2.6.

Programme de calcul d'enveloppe

Un programme de calcul de l'enveloppe d'un signal oscillant, `env1.m` permet de visualiser l'évolution temporelle de ses extrema. Il a été conçu initialement pour s'adapter au traitement des signaux expérimentaux issus des mesures sur le piano effectuées avec David Rousseau. Il extrait d'un signal oscillant $y(t)$ un vecteur t contenant les dates de toutes les annulations de dérivées avec changement de signe de y , et il fournit l'ensemble des valeurs de y correspondant aux dates contenues dans t , qui correspond à l'ensemble des extrema de ce signal oscillant, son *enveloppe*.

Programme de calcul de déphasage

Un programme, nommé `phase.m`, de calcul de déphasage instantané entre deux signaux oscillants y_1 et y_2 a aussi été conçu pour pouvoir étudier les données expérimentales de vibrations des chœurs de piano, en liaison avec le modèle de Weinreich. Il sera utilisé dans les parties suivantes pour étudier le déphasage des signaux issus du programme de simulation. Il crée tout d'abord deux vecteurs t_1 et t_2 contenant les dates interpolées de changement de signe décroissant des signaux discrets y_1 et y_2 . Si on calcule le déphasage instantané de y_2 par rapport à y_1 , pour tous les éléments $t_1(i)$ et $t_1(i+1)$ consécutifs de t_1 , `phase.m` extrait de t_2 le plus petit $t_2^*(i)$ de ses éléments contenus dans $[t_1(i) t_1(i+1)]$. Il crée ensuite deux vecteurs:

- un vecteur d contenant les différences $d(i) = t_2^*(i) - t_1(i)$, qui représente le décalage temporel instantané de y_2 par rapport à y_1 .
- un vecteur période instantanée T_1 dont tout élément est $T_1(i) = t_1(i+1) - t_1(i)$. En bref, chacun de ses éléments est la différence de deux éléments consécutifs de t_1 , c'est dire la période à la date $t_1(i)$ de y_1 .

Chaque élément du vecteur contenant le déphasage instantané en *degre* de y_2 par rapport à y_1 est alors $\varphi(i) = 360.d(i)/T_1(i)$

3.3.2 Présentation des cas d'étude

On trouvera en annexe A un certains nombre d'exemples de simulation. Pour chaque cas d'étude, on a tracé l'évolution temporelle des amplitudes des deux cordes et du chevalet, et le déphasage instantané d'un signal par rapport à l'autre. On a d'autre part choisi de n'étudier que les cas se rapprochant le plus de la réalité, à savoir avec l'impédance du chevalet réglée à la valeur préconisée par Wogram et Weinreich §3.2, c'est à dire $Z_{ch} = 10000 + 1000i \text{ kg.s}^{-1}$, Cela correspond aux graphiques situés en bas des figures 3.1 et 3.2. Pour étudier un éventail de cas *réels* représentatifs des paramètres sur lesquels un accordeur ou un instrumentiste peuvent jouer, on a choisi trois valeurs de désaccord se rapportant à des zones différentes de la courbe (fig. 3.3):

- E. Marandas, dans [5], a mesuré les défauts d'unissons installés sur un piano accordé. $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ correspond à une valeur moyenne de ce désaccord; elle représente donc le cas classique de fonctionnement d'un chœur de piano accordé.

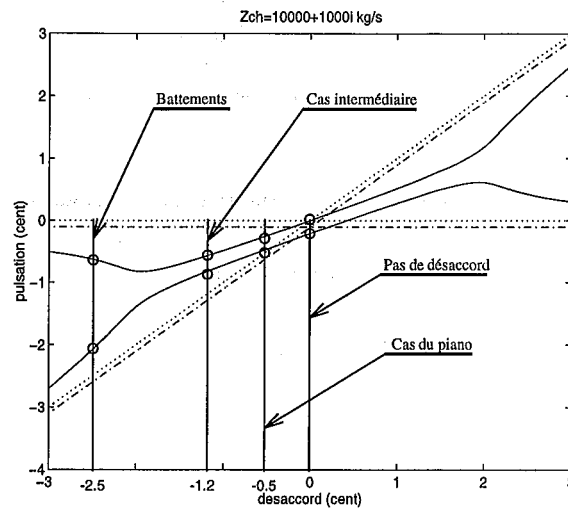


FIG. 3.3 – Valeurs particulière de désaccord

- lorsque nous avons effectué, David Rousseau et moi, des mesures de vibration de cordes (voir [1]) avec Eric Marandas, nous avons enregistré les vibrations d'un doublet qui était *faux* selon son avis d'accordeur, mais qui ne présentait pas de battements audibles. J'ai donc choisi une valeur, $\varepsilon = 1,2 \text{ cent}$ comprise entre la zone où le doublet est accordé et celle où les battements deviennent suffisamment rapides pour être perceptibles.
- c'est dans cette dernière zone que se situe $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$.

En ce qui concerne les conditions initiales, vu leur simplicité dans ce modèle, on ne peut jouer que sur quatre paramètres: les *positions* et *vitesse*s initiales. Faute de temps, nous n'avons étudié que les cas avec vitesse initiale nulle, ce qui réduit les paramètres à la seule différence de positions initiales (le système est linéaire, donc des conditions d'excitation doubles entraînent un doublement de l'amplitude). On a donc décidé de garder $y_{01} = 1$, et on a choisi quatre valeurs de y_{02} entre 1 et 0.

- La valeur $y_{01}=1$ correspond à la situation théorique d'un marteau parfait, les conditions initiales étant identiques sur les deux cordes (surface du marteau parfaitement plane, trajectoire d'arrivée normale aux cordes).
- $y_{02} = 0,8$ peut représenter une situation pratique fréquente, où le marteau a été réglé par l'accordeur, mais il subsiste quand même une petite différence d'excitation entre les deux cordes.
- $y_{02} = 0$ modélise les conditions initiales imposées par une pédale *una corda*, où seule l'une des deux cordes a des conditions initiales non nulles.
- Les autres valeurs sont intermédiaires.

Les courbes classiques de double décroissance du son de piano sont issues de prises de pression aérienne. Pour pouvoir obtenir des courbes simulées qui s'en rapprochent,

le programme calcule les vibrations du chevalet. Comme les couplages dynamiques des vibrations de cordes qui permettent d'expliquer la double décroissance s'effectuent au niveau du chevalet, et que celui-ci est en quelque sorte l'excitateur de la table d'harmonie qui est responsable du rayonnement, et donc de la pression aérienne, on peut penser que les vibrations du chevalet sont une bonne image du signal mesuré à partir d'un microphone (Il va s'en dire que identifier correctement la liaison qui existe entre les vibrations du chevalet et la pression aérienne en un point donné au dessus du piano est loin d'être trivial, puisque cela est fortement corrélé, entre autre, au rayonnement non isotrope de la table d'harmonie).

Les valeurs précisées dans le tableau en bas de chaque planche de figures sont issues du calcul des modes normaux de vibration. En particulier, le *déphasage modal* permet de chiffrer l'état de symétrie et d'antisymétrie des modes. Le déphasage modal du mode i est en fait $\Delta\phi = (\varphi_i + \psi_{2i}) - (\varphi_i + \psi_{1i}) = \psi_{2i} - \psi_{1i}$ (voir les équations 2.13 et 2.14). Il ne dépend que de la nature des modes (les ψ_{ij} sont les phases des composantes des vecteurs propres). Si $\Delta\phi = 0 \text{ deg.}$ ou $\Delta\phi = 180 \text{ deg.}$, alors les modes sont vraiment *symétrique* et *antisymétrique*. Dans le cas contraire, ce ne sont plus des modes *normaux*, dans le sens où on ne peut plus décomposer n'importe quel mouvement sur leur base; mais s'est souvent le cas, comme on le verra.

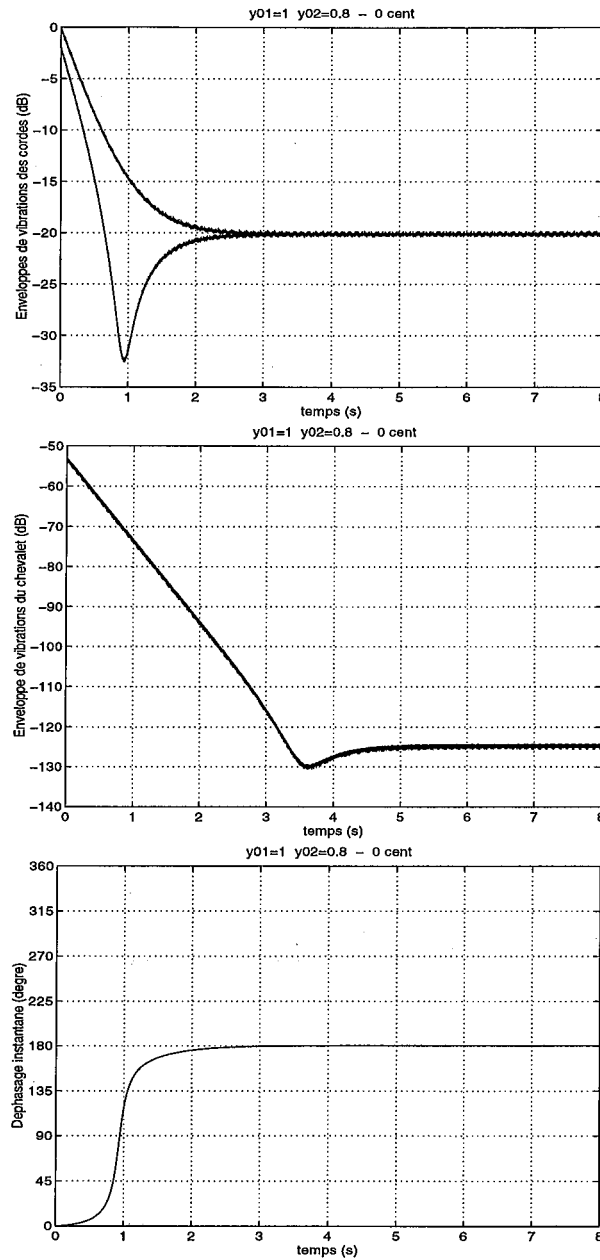
3.3.3 Cas trivial où le désaccord est nul

C'est le cas le plus simple, qui permet d'expliquer physiquement le mécanisme de la double décroissance, que l'on a décrit en détail dans la partie 1.4.2. Notre simulation permet d'illustrer cela, à partir des figures 3.4 et 3.5.

Les conditions de simulation sont les suivantes: l'impédance de chevalet est réglée à la valeur préconisée au §3.3.2, le désaccord est annulé, et les conditions initiales sont légèrement différentes pour les deux cordes: une est lâchée sans vitesse initiale à 1 mm de sa position d'équilibre, l'autre à 0,8 mm.

Au vu de la figure 3.4, on peut émettre les remarques suivantes:

- Lorsque le désaccord est nul, les modes sont véritablement *symétrique* et *antisymétrique*. Le premier, de taux de décroissance -20.26 dB , est prépondérant dans la partie immédiate du son, et impose un déphasage initial nul. Le second, d'amortissement nul, conditionne la partie rémanente, avec les deux cordes en opposition de phase ($\Delta\phi = 180 \text{ deg.}$). Ce changement de taux de décroissance, la double décroissance, est bien visible sur la courbe d'amplitude du chevalet. On peut ajouter aussi que le cas présent, avec $\varepsilon = 0$, est le seul où les modes sont véritablement symétriques et antisymétriques (on pourra le vérifier avec les valeurs des déphasages modaux donnés dans les tableaux de l'annexe A).
- le minimum d'amplitude de la corde la plus faiblement excitée, qui arrive au bout de 1 s de son, est caractérisé par un déphasage de 90 deg. . C'est pour cela que le minimum d'amplitude du chevalet n'arrive pas en même temps. Il arrive au bout de 3.5 s pour un déphasage de 180 deg. A cet instant, le chevalet n'est plus excité par les deux cordes, elles sont en opposition de phase. Elles



$\varepsilon = 0 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.0018
Conditions initiales	(mm)	1	0,8
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	310.96	311.00
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-20.26	0
Déphasage modal	(deg.)	0	180

FIG. 3.4 – Enveloppe des vibrations de corde, du chevalet et déphasage entre les cordes du Mib4

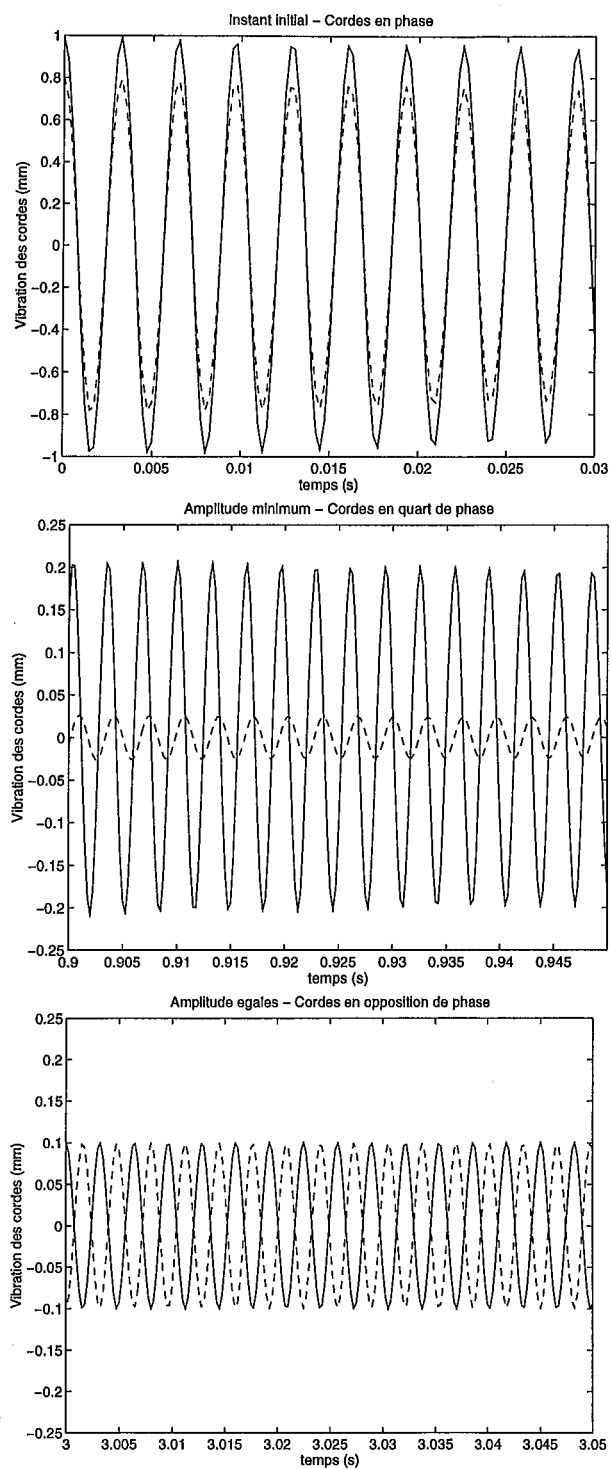


FIG. 3.5 – Trois étapes de l'évolution du déphasage d'un doublet, dans les mêmes conditions d'expérience que la figure 3.4

conservent toute leur énergie mécanique en l'échangeant alternativement. *Du fait de la présence de deux cordes, un minimum d'amplitude du chevalet ne correspond pas à un minimum d'amplitude des cordes, mais à une opposition de phase des vibrations de ces cordes.*

La figure 3.5 illustre trois phases de l'évolution du déphasage. Au début du son (courbe du haut), les deux cordes sont lâchées en phase sans vitesse avec une petite différence d'amplitude. Au moment du minimum d'amplitude de la moins excitée des deux, les deux cordes sont en quadrature de phase (courbe du milieu); le chevalet donne une partie de son énergie mécanique gagnée auprès de la corde de plus grande amplitude, à l'autre qui continue à ce déphaser. Pour finir, cette corde va se caler en opposition de phase (courbe du bas).

3.3.4 Influence du désaccord et des conditions d'excitation des cordes

Pour plus de clarté, on a extrait de l'annexe A les courbes de vibration du chevalet pour pouvoir les comparer. On se propose de dégager quelques conséquences du désaccord et des conditions initiales des cordes d'un chœur sur la double décroissance de celui-ci. On a placé figure 3.6 et 3.7 des familles de courbes, en faisant varier un des paramètres, désaccord ou conditions initiales tout en gardant l'autre constant.

On peut dégager 3 paramètres de caractérisation de la double décroissance, qui ont à priori une influence sur le son, ce sont:

- les deux *pent*es de la double décroissance
- la *profondeur du minimum de la courbe*, due à l'opposition de phase franche qui apparaît entre les deux zones de prépondérance des modes. Si on retrouve un minimum similaire dans le signal de pression aérienne, il est fort probable pour que l'on entende, une courte baisse de niveau, d'autant plus forte que le minimum est profond.
- le *niveau* du son rémanent par rapport au son immédiat.

Voici quelques remarques que l'on peut dégager de ces courbes:

- Le désaccord est responsable de la pente des décroissances. Un faible désaccord entraîne une double décroissance marquée. Plus il augmente, plus le changement de pente est atténué, pour arriver à imposer plus qu'une seule pente et faire place à des battements. Néanmoins, le désaccord n'influe, en ce qui concerne les vibrations du chevalet, que sur la pente du son rémanent: la pente du son immédiat reste constante (fig. 3.6). Hélas, les différences de traits pour le tracé des différentes courbes permettent difficilement de les identifier. On appliquera donc la remarque précédente sur les taux de décroissance pour les identifier.
- La profondeur de la zone d'interférence destructive est plus influencée par les conditions d'excitation que par le désaccord. Celle-ci a tendance à être plus prononcée lorsque les conditions initiales tendent à être identiques. Pour les courbes caractérisant la pédale *una corda*, la zone d'interférences est très peu profonde

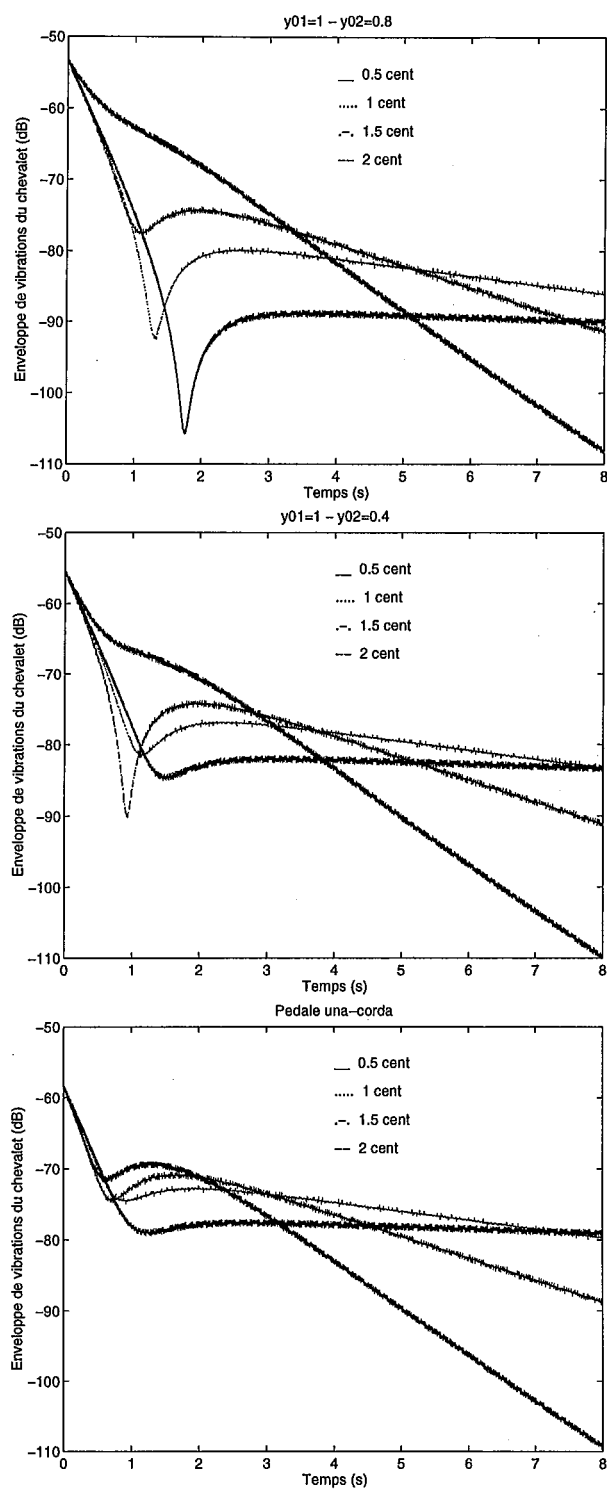


FIG. 3.6 – Influence du désaccord, à conditions initiales constantes. En haut, $y_{02} = 0, 8$, au milieu $y_{02} = 0, 4$ et en bas $y_{02} = 0$ (pédale una corda)

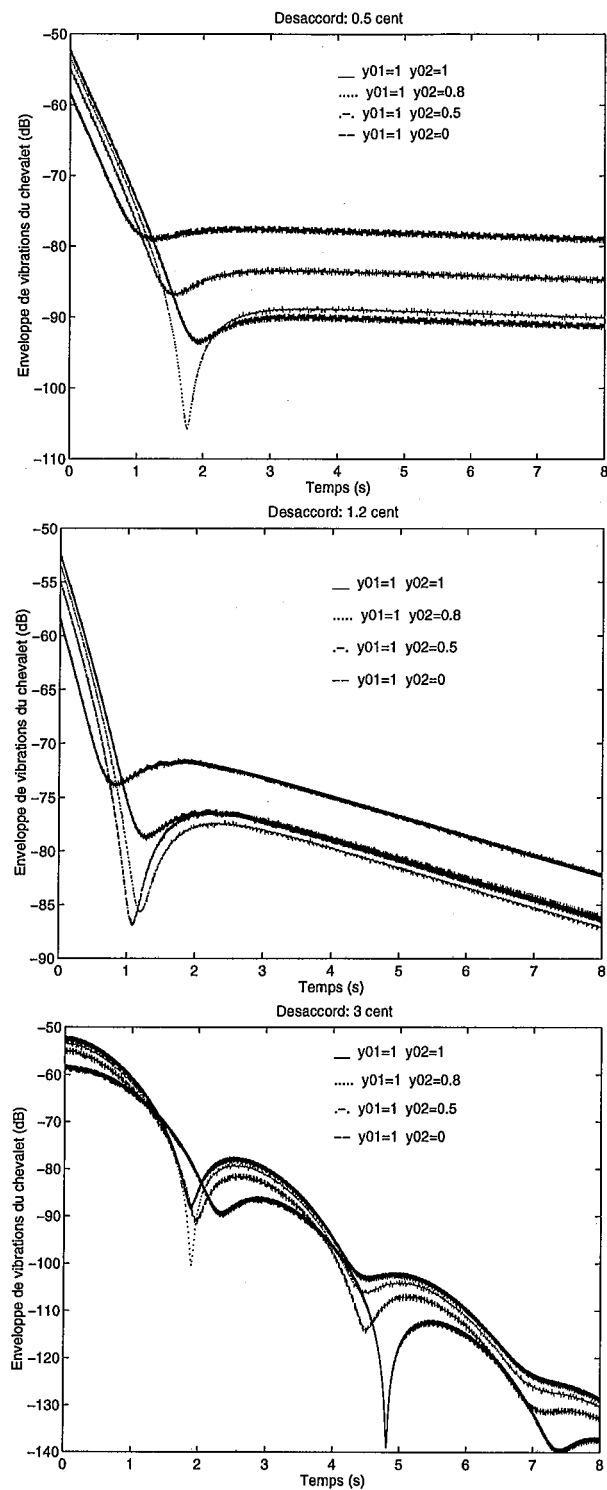


FIG. 3.7 – Influence des conditions initiales, à désaccord constant. En haut $\varepsilon = 0,5$ cent, au milieu $\varepsilon = 1.2$ cent et en bas $\varepsilon = 3$ cent

- Le niveau du son rémanent est principalement influencé par la valeur des conditions initiales. Le niveau du son rémanent est augmenté, par rapport à celui du son immédiat, lorsque les conditions initiales sont différentes pour les deux cordes (on excite d'autant plus le mode antisymétrique que la frappe du marteau est irrégulière). L'effet de la pédale *una corda* est ici très visible. Avec un piano normalement réglé, on obtient un gain de 10 dB pour le son rémanent, si le désaccord n'est pas trop important. Si le piano est désaccordé, la pédale n'a plus d'effet (fig. 3.7).
- Un des rôles de l'accordeur est aussi d'uniformiser le volume sonore de toutes les notes, pour que des notes côte à côte aient la même intensité pour une nuance de jeu donnée. Une conclusion de Weinreich [3], est que l'accordeur peut jouer sur le désaccord pour compenser les irrégularités de frappe. En fait, les résultats de la figure 3.6 iraient dans ce sens, car on s'aperçoit que pour des conditions initiales imposées, on peut jouer sur le désaccord pour compenser de faible différence de niveau sonore, au détriment de la double décroissance. Par exemple, sur les deux graphiques du haut de cette figure, pour $\varepsilon = 0.5\text{ cent}$, avec $y_{02} = 0.4$, on a un niveau de son rémanent de -80 dB , alors que pour $y_{02} = 0.8$, le niveau est de -90 dB . On peut désaccorder un peu plus le marteau bien réglé ($y_{02} = 0.8$) pour augmenter le niveau. On peut donc égaliser les niveaux de son rémanent de cette manière, mais cela ne remplace pas un bon réglage régulier des marteaux. En plus, si les marteaux sont déréglés, la différence son immédiat / son rémanent est moins importante, et, même si le piano sonne juste, il est probablement plus difficile de faire des nuances significatives. On se retrouve tout le temps dans un cas de pédale *una-corda*, qui n'a d'ailleurs plus d'effet significatif.

Conclusion

Le but premier de cette étude, proposée par René Caussé et Eric Marandas était d'étudier, à la fois expérimentalement et numériquement, les vibrations des chœurs de piano, et en particulier l'influence de l'excitation de ces groupes de cordes par les marteaux sur ce qu'Eric, en tant qu'accordeur, appelle la "qualité de l'unisson". Si on regarde plus précisément ce que signifie ce sujet, on remarque que deux grandes études s'en dégagent.

La première, qui n'est pas évidente et immédiate, consiste à définir la "qualité de l'unisson". Plus précisément, cela définit en fait la notion d'accord d'un instrument, et en particulier ici, pour le piano, l'accord d'une seule note. Si beaucoup de personnes sont capables de s'entendre sur la question de savoir si tel ou tel piano est accordé, bien peu peuvent donner une définition précise de l'accord. De surcroît, il est connu que tous les accordeurs n'accordent pas les pianos de la même façon. En résumé, on s'aperçoit donc que pour essayer de comprendre scientifiquement l'influence des paramètres d'accordage, à savoir le réglage des marteaux et le désaccord des cordes d'un même chœur, il faut d'abord définir psychoacoustiquement quels sont les critères physiques caractérisant l'accord d'un unisson. Ensuite, et c'est cette deuxième partie sur laquelle David Rousseau et moi-même avons travaillé, on peut s'attacher à mesurer et simuler les vibrations des cordes de piano et essayer de relier ces résultats aux conditions d'expérience définies par le désaccord et les conditions d'excitation imposées par les marteaux. Par exemple, un phénomène à étudier est le fait que lorsque Eric accorde un piano, il soit capable de juger de la qualité de l'unisson uniquement à partir des premières secondes du son, c'est à dire qu'il n'écoute que la partie immédiate du son.

Pour ma part, je suis arrivé à retrouver par la simulation des remarques d'Eric sur l'accordage, à savoir que l'accordeur peut *dans une certaine mesure*, s'il n'a pas le choix, aboutir à l'accord correct d'un piano en jouant sur le désaccord pour compenser un mauvais réglage du mécanisme, mais il ne peut pas, comme semblait le penser Weinreich, *remplacer* un bon réglage du mécanisme. Ce n'est que par cette opération que le piano pourra sonner correctement, avec la double décroissance qui le caractérise.

Néanmoins, cette étude est loin d'être achevée. En ce qui concerne la simulation, le modèle utilisé ne peut être plus simple. En conséquence, les paramètres sur lesquels on peut agir pour modéliser la frappe du marteau notamment, sont très réducteurs de la réalité. Il faudrait donc introduire dans la simulation quelques modèles plus complets, prenant en compte, par exemple, le transitoire d'attaque lié au choc du marteau, le contact non instantané de celui-ci sur la corde, l'évolution de l'effort du marteau

sur la corde durant la frappe . . . En ce qui concerne la double décroissance, nous nous sommes heurtés avec David sur un problème à priori résolu par Weinreich et qui à posteriori s'est révélé très compliqué: la double décroissance du son pour une seule corde. En effet, on peut supposer qu'elle est due aux deux polarisations du son. Mais comment s'effectue le couplage entre ces deux polarisations ? Cela nécessiterait d'abord des mesures des impédances de chevalet dans les trois directions principales du piano et une étude poussée de son rayonnement sous l'action unique des polarisations horizontales des cordes.

D'autres perspectives d'étude sont possibles, comme l'excitation des cordes par sympathie, l'introduction d'une troisième corde dans nos doublets. Etudier également si ces phénomènes de double décroissance se retrouvent pour les autres modes de vibration que le fondamental, peut conduire à une synthèse d'instruments à cordes par modèles physiques, qui nécessiterait probablement aussi l'étude des cordes aiguës et graves, que l'on a volontairement écartée, notamment à cause du fait qu'elles ne donnent pas naissance à des doubles décroissances.

Annexe A

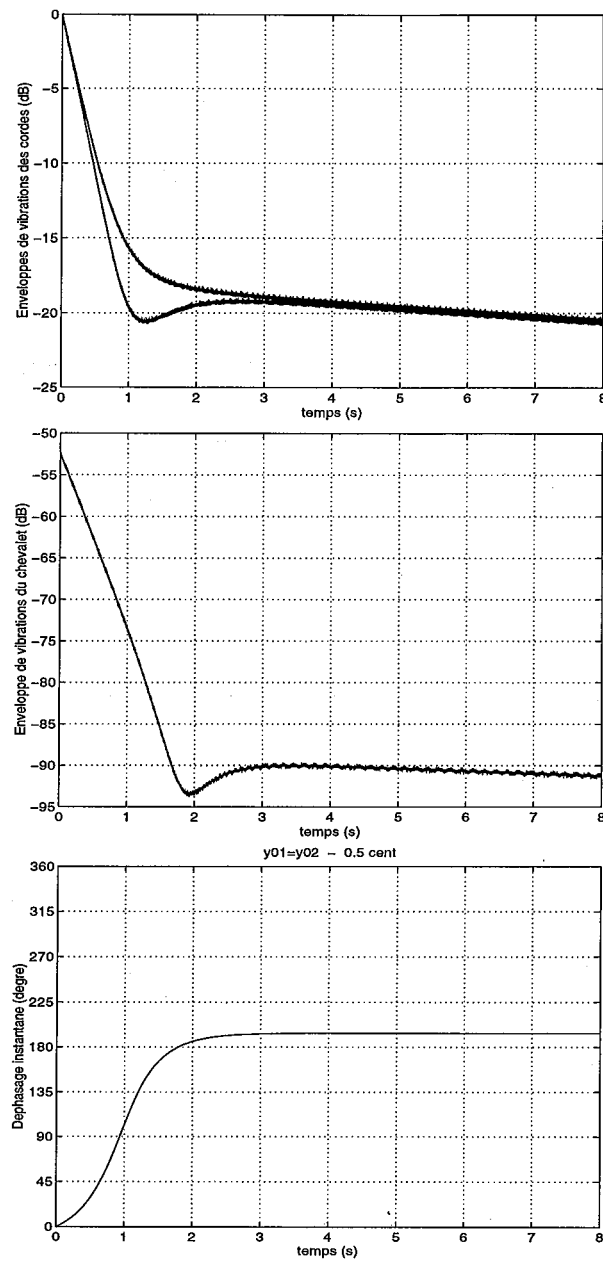
Résultats de la simulation

Cette annexe présente un certain nombre de courbes issues du programme de simulation, qui se rapportent au §3.3.2. Chaque planche de trois courbe correspond à une situation de désaccord et de conditions initiales. Sur chaque planche, on retrouve:

- en haut, l'enveloppe de vibration des deux corde
- au milieu l'enveloppe de vibration du chevalet
- en bas le déphasage entre les deux cordes
- en bas de page, un tableau donnant la valeur du désaccord et des conditions initiales (partie du haut) et des valeurs issues du calcul des modes de vibration (on peut se reporter au §3.3.2 pour plus de précisions).

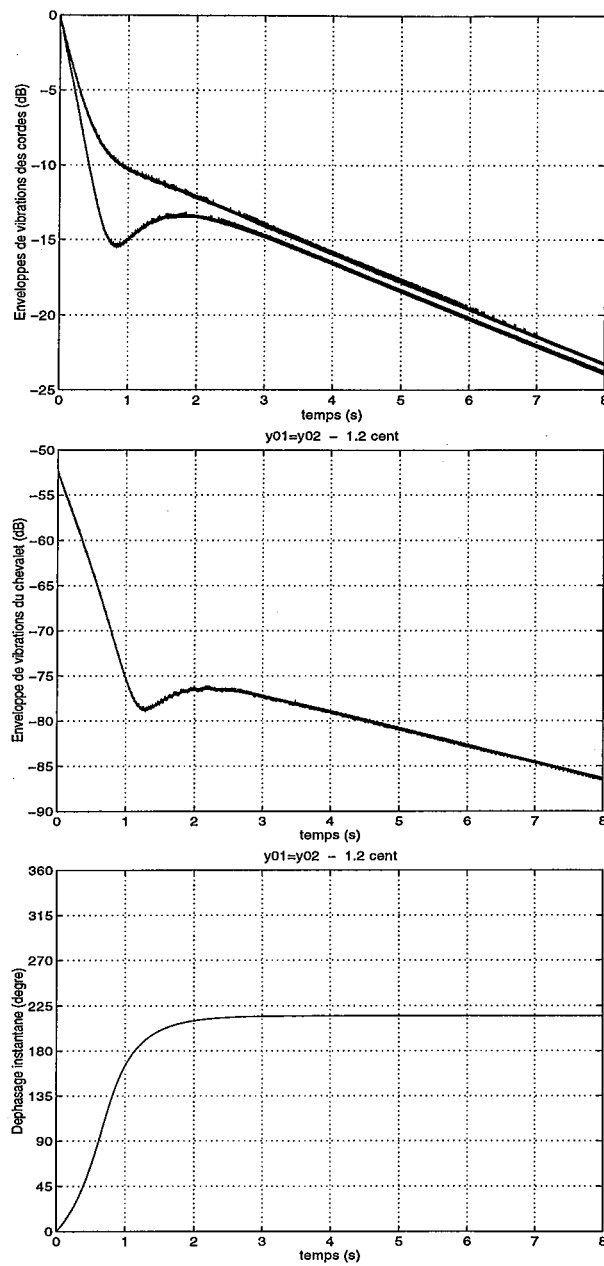
Voici un petit tableau qui résume le contenu des planches qui suivent, en indiquant la valeurs du désaccord et des conditions initiales:

Conditions initiales	Désaccord (<i>cent</i>)			
	$\varepsilon = 0,5$	$\varepsilon = 1,2$	$\varepsilon = 2,5$	$\varepsilon = 4$
$y_{01} = 1 \quad y_{02} = 1$	A.1	A.2	A.3	*
$y_{01} = 1 \quad y_{02} = 0.8$	A.4	A.5	A.6	A.7
$y_{01} = 1 \quad y_{02} = 0.5$	A.8	A.9	*	*
Pédale <i>una corda</i>	A.10	A.11	A.12	*



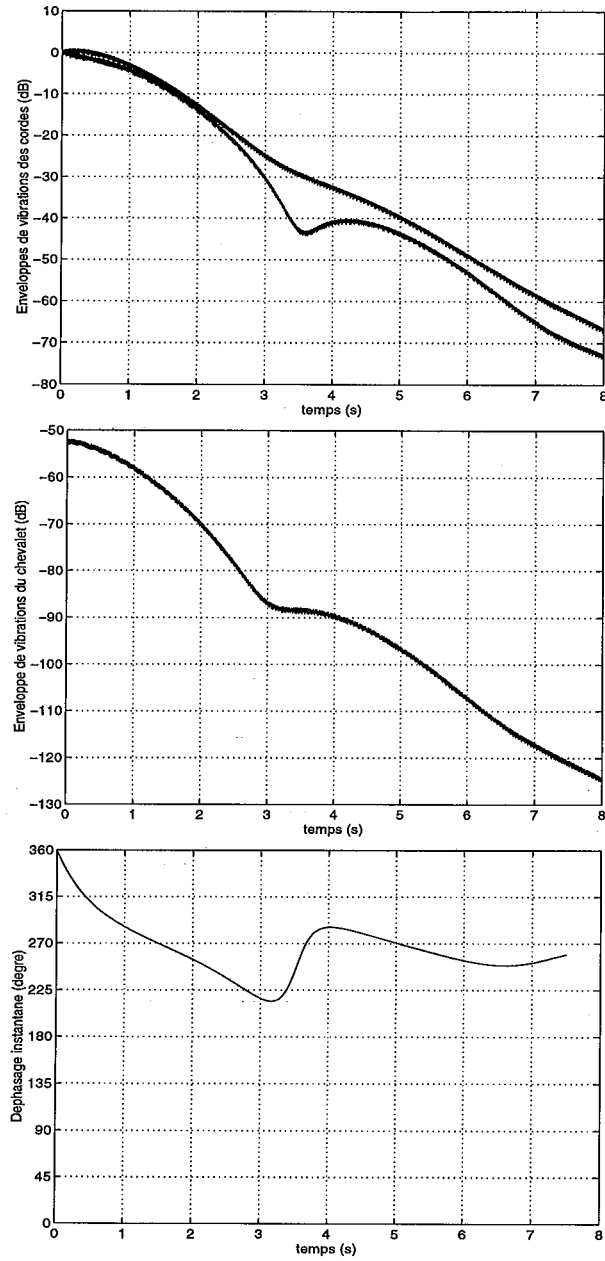
$\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.09
Conditions initiales	(mm)	1	1
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.007	311.046
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-19.99	-0.30
Déphasage modale	(deg.)	14	197
Période de battements	(s)		25.6

FIG. A.1 – Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Marteau parfait



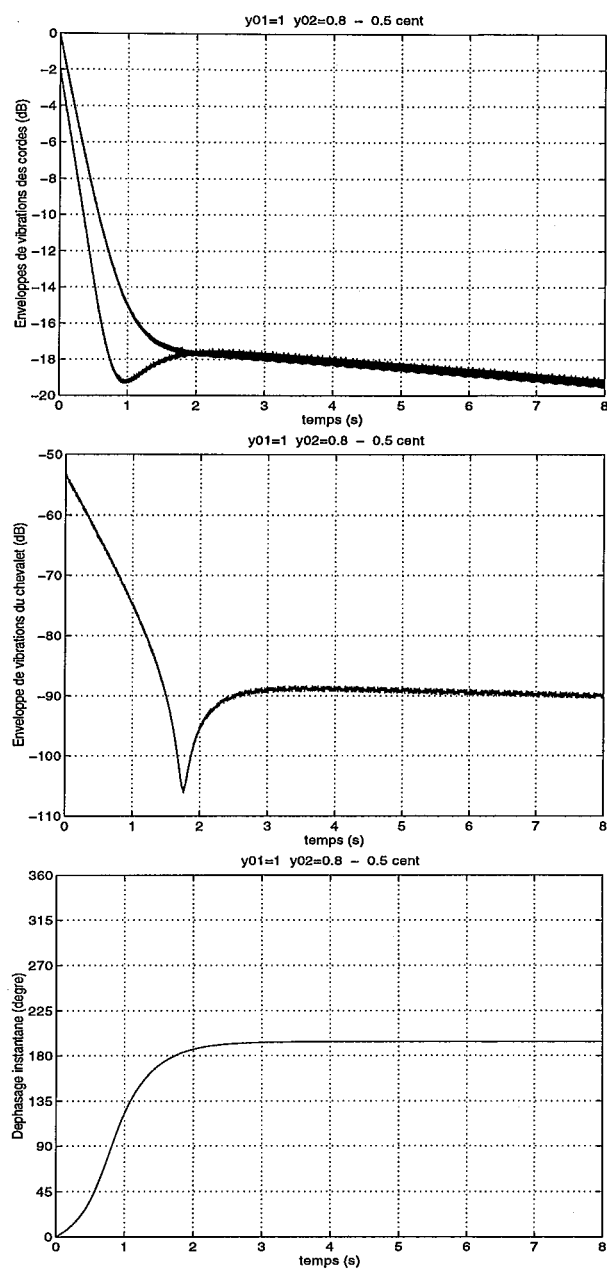
$\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.22
Conditions initiales	(mm)	1	1
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.066	311.112
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-18.43	-1.85
Déphasage modale	(deg.)	35	215
Période de battements	(s)		21.7

FIG. A.2 – Enveloppes et déphasage du *Mib*4 - $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Marteau parfait



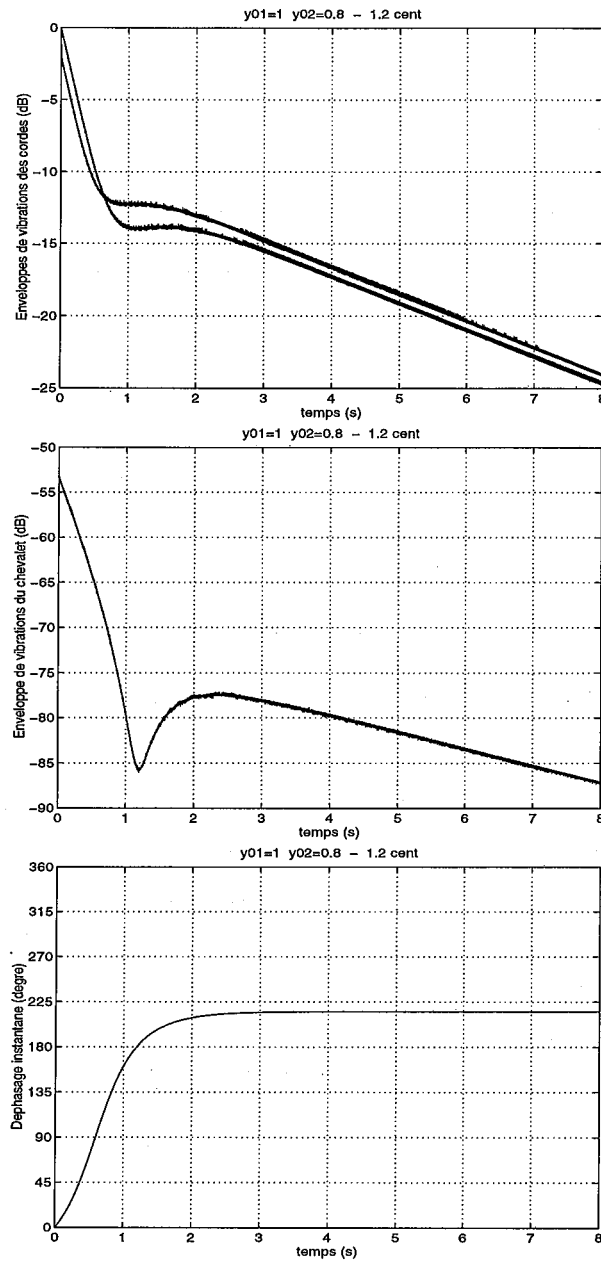
$\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.45
Conditions initiales	(mm)	1	1
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.076	311.336
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-11.59	-8.71
Déphasage modale	(deg.)	116	260
Période de battements	(s)		3.85

FIG. A.3 – Envelopes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$ - Marteau parfait



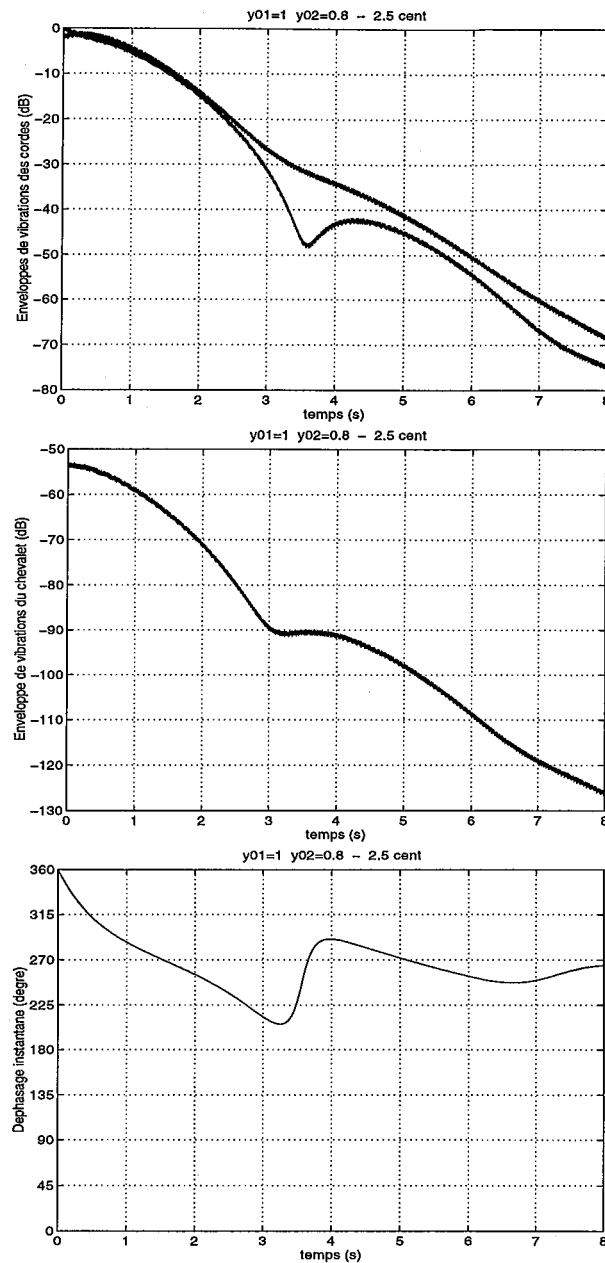
$\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.09
Conditions initiales	(mm)	1	0.8
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.007	311.046
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-19.99	-0.30
Déphasage modale	(deg.)	14	194
Période de battements	(s)		25.6

FIG. A.4 – Enveloppes et déphasage du *Mib*4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Marteau de travers



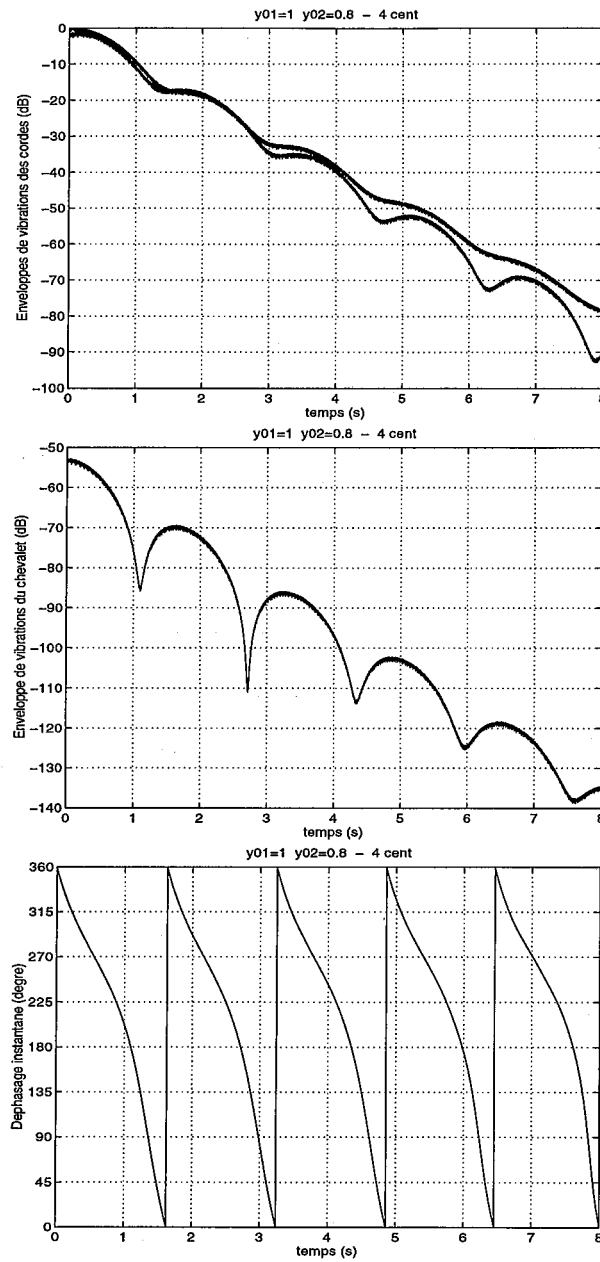
$\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.22
Conditions initiales	(mm)	1	0.8
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.066	311.112
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-18.43	-1.85
Déphasage modale	(deg.)	35	215
Période de battements	(s)		21.7

FIG. A.5 – Enveloppes et déphasage du Mib4 pour $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Marteau de travers



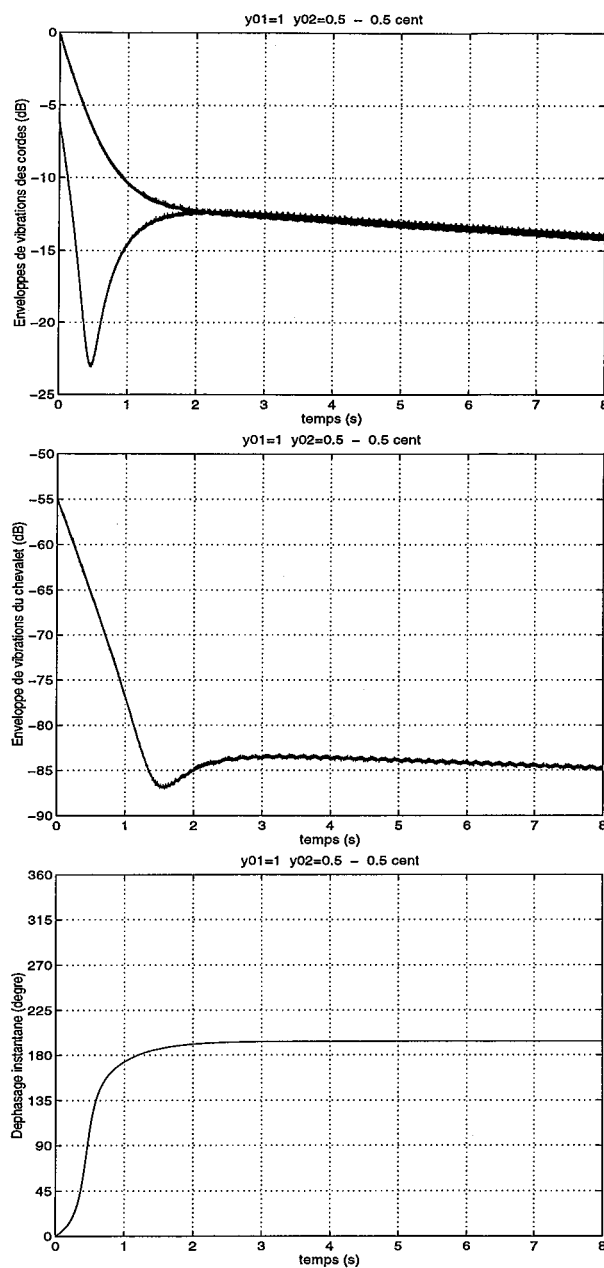
$\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.45
Conditions initiales	(mm)	1	0.8
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.076	311.336
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-11.59	-8.71
Déphasage modale	(deg.)	116	260
Période de battements	(s)		3.85

FIG. A.6 – Enveloppes et déphasage du *Mib*4 - $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$ - Marteau de travers



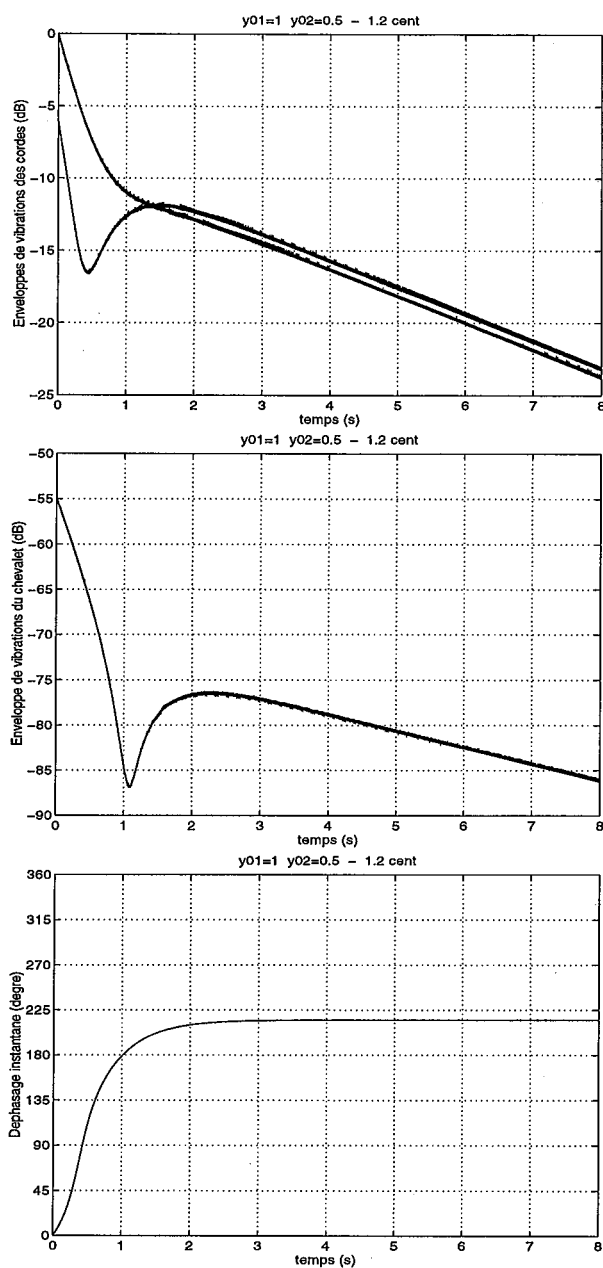
$\varepsilon = 4 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.72
Conditions initiales	(mm)	1	0.8
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.032	311.649
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-10.75	-9.59
Déphasage modale	(deg.)	106	263
Période de battements	(s)		1.62

FIG. A.7 – Enveloppes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 4 \text{ cent}$ - Marteau de travers



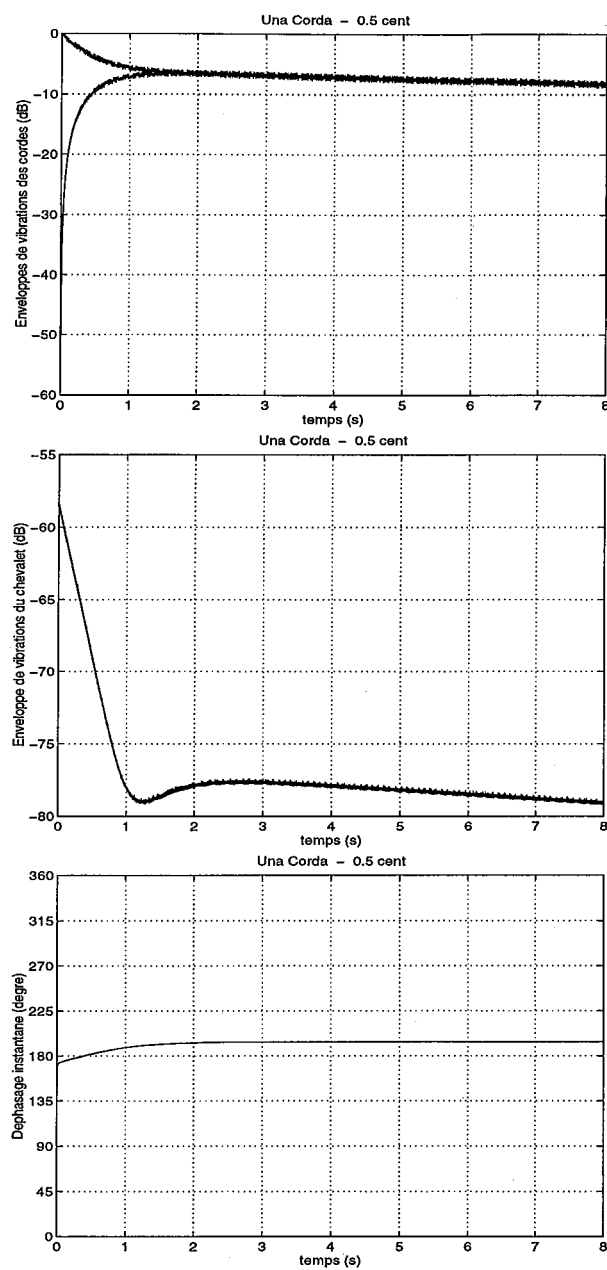
$\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.09
Conditions initiales	(mm)	1	0.5
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.007	311.046
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-19.99	-0.30
Déphasage modale	(deg.)	14	194
Période de battements	(s)	25.6	

FIG. A.8 – Envelopes et déphasage du Mib4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Marteau tres incliné



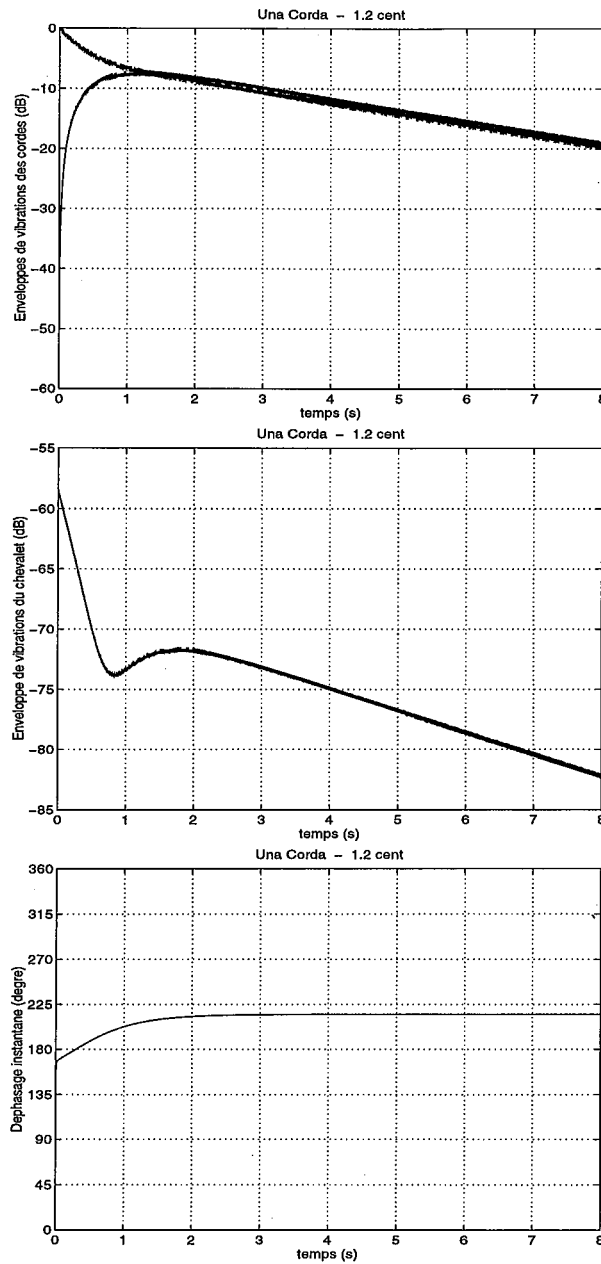
$\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.22
Conditions initiales	(mm)	1	0.5
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.066	311.112
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-18.43	-1.85
Déphasage modale	(deg.)	35	215
Période de battements	(s)		21.7

FIG. A.9 – Enveloppes et déphasage du *Mib*4 pour $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Marteau très incliné



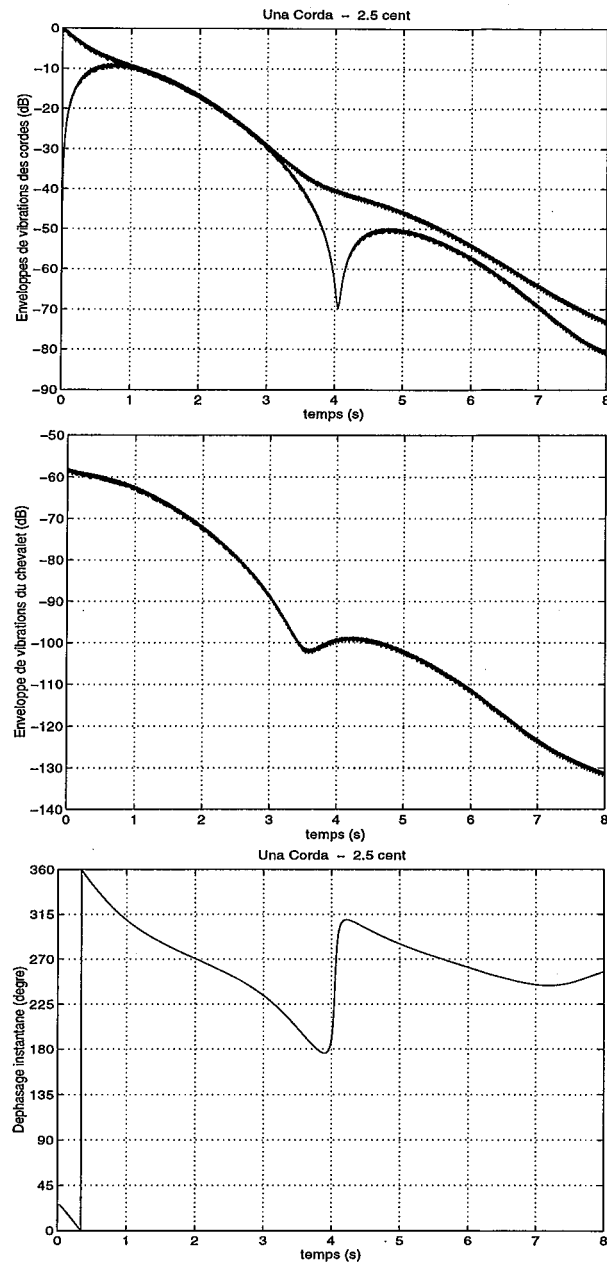
$\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.09
Conditions initiales	(mm)	1	0
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.007	311.046
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-19.99	-0.30
Déphasage modale	(deg.)	14	194
Période de battements	(s)		25.6

FIG. A.10 - Enveloppes et déphasage du *Mib*4 - $\varepsilon = 0.5 \text{ cent}$ - Pédale *una-corda*



$\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.22
Conditions initiales	(mm)	1	0
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.066	311.112
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-18.43	-1.85
Déphasage modale	(deg.)	35	215
Période de battements	(s)		21.7

FIG. A.11 - Enveloppes et déphasage du *Mib*4 pour - $\varepsilon = 1.2 \text{ cent}$ - Pédale una-corda

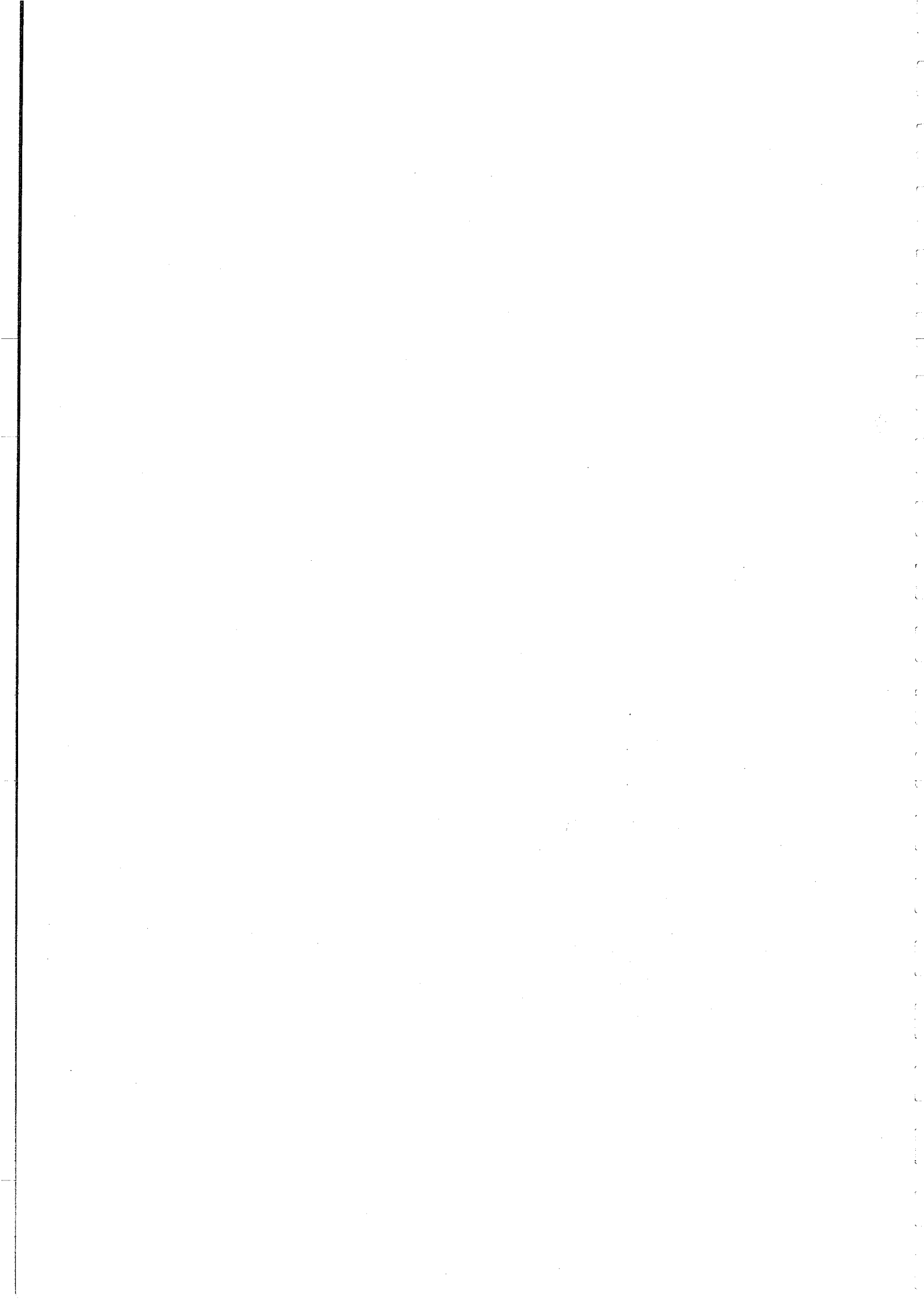


$\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$		Corde n.1	Corde n.2
Fréquence	(Hz)	311	311.45
Conditions initiales	(mm)	1	0
		Mode symétrique	Mode antisymétrique
Fréquence	(Hz)	311.076	311.336
Amortissement	(dB.s ⁻¹)	-11.59	-8.71
Déphasage modale	(deg.)	116	260
Période de battements	(s)		3.85

FIG. A.12 - Enveloppes et déphasage du Miv4 - $\varepsilon = 2.5 \text{ cent}$ - Pédale una-corda

Annexe B

Algorithmes sous MATLAB



```
%freq_2crd_eig(311,1,23564,5e-5+5e-7*i)

function [w1,w2,w01,w02,w001,w002]=freq_2crd_eig(f0,detu,K0,Y);

w0=2*pi*f0;
detu=10^(detu*log10(2)/1200)-1;
Z=1/Y;

DETU=-3:0.01:3;
l=size(DETU);l=l(2)
for j=1:l
    detu=DETU(j);detu=10^(detu*log10(2)/1200)-1;
    WW(1,1)=i*w0*Z+(1+detu)^2*K0;
    WW(1,2)=- (1+detu)^2*K0;
    WW(2,1)=- (1+detu)^2*K0;
    WW(2,2)=(i*w0*Z+K0)*(1+detu)^2;
    WW=w0^2/(i*w0*Z+K0*(1+(1+detu)^2))*WW;

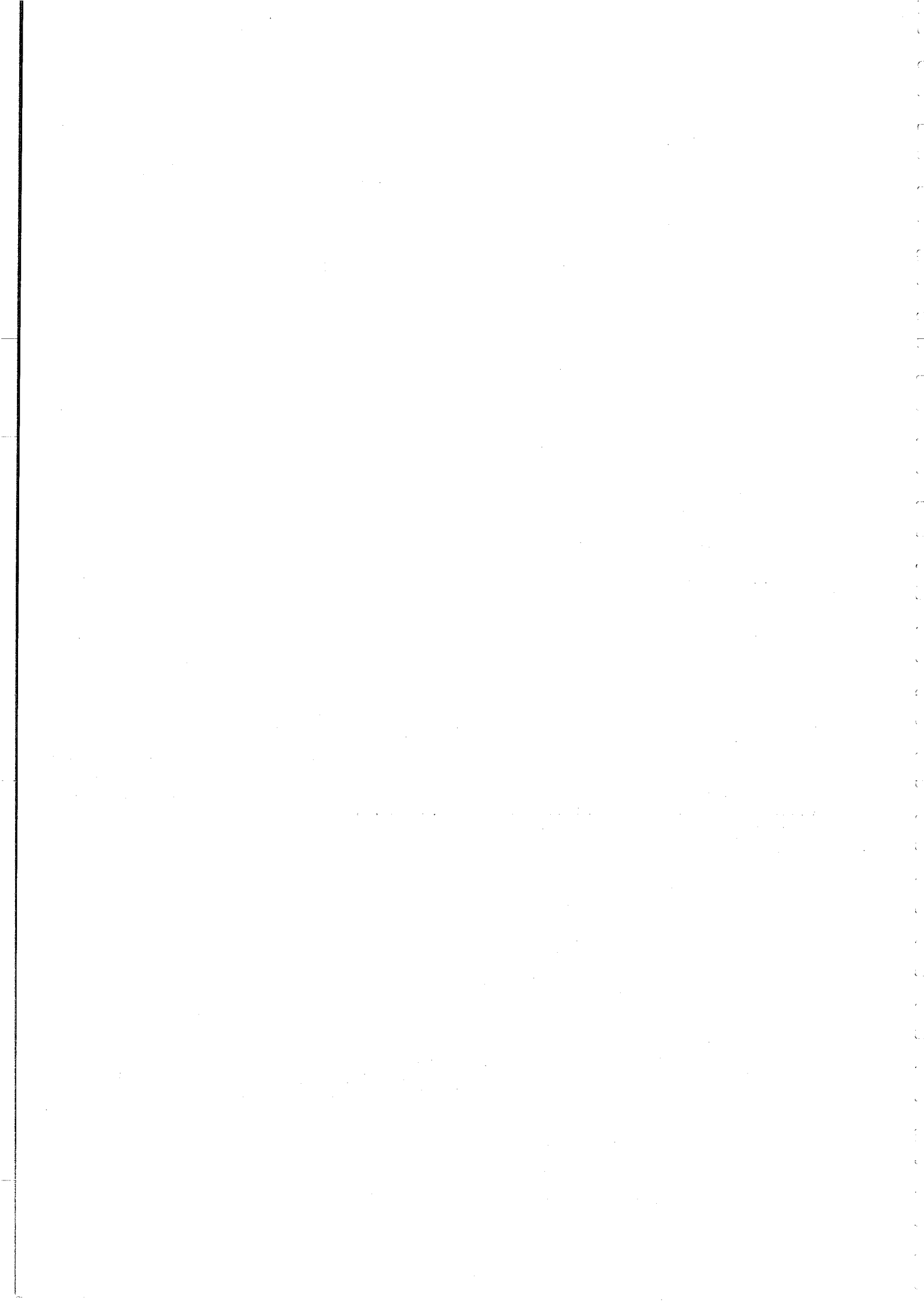
    [V,D]=eig(WW);
    w1(j)=D(1,1)^0.5;
    w2(j)=D(2,2)^0.5;
    p11(j)=abs(V(1,1));
    p12(j)=abs(V(1,2));
    p21(j)=abs(V(2,1));
    p22(j)=abs(V(2,2));

    w10(j)=sqrt(w0^2*(K0/(K0+i*w0*Z)-1));
    w20(j)=sqrt((1+detu)^2*w0^2*(K0*(1+detu)^2/(K0*(1+detu)^2+i*w0*Z)-1));
end

w100=w0*ones(1,l);
w200=w100.*10.^(DETU*log10(2)/1200);

bet1=w1./w100-1;bet1=log10(1+bet1)*1200/log10(2);
bet2=w2./w100-1;bet2=log10(1+bet2)*1200/log10(2);
bet10=w10./w100-1;bet10=log10(1+bet10)*1200/log10(2);
bet20=w20./w100-1;bet20=log10(1+bet20)*1200/log10(2);

figure(3);plot(DETU,real(bet1),'g',DETU,real(bet2),'g',DETU,zeros(size(DETU)),'b',DETU,DETU,'b',DETU,real(bet10),'r',DETU,real(bet20),'r')
%figure(3);plot(DETU,real(bet1),'-',DETU,real(bet2),'-',DETU,zeros(size(DETU)),'.',DETU,DETU,'.',DETU,real(bet10),'-.',DETU,real(bet20),'-.')
figure(4);plot(DETU,imag(w1),DETU,imag(w2))
%figure(3);plot(DETU,p11,DETU,p21)
%figure(4);plot(DETU,p22,DETU,p12)
```

```

%[c1,c2,ch,t]=sim_2crd_eig(311,1,23564,5e-5+5e-7*i,1,1,0,0,4000);

function [c1,c2,ch,t]=sim_2crd_eig(f0,detu,K0,Y,y01,y02,v01,v02,Fe);

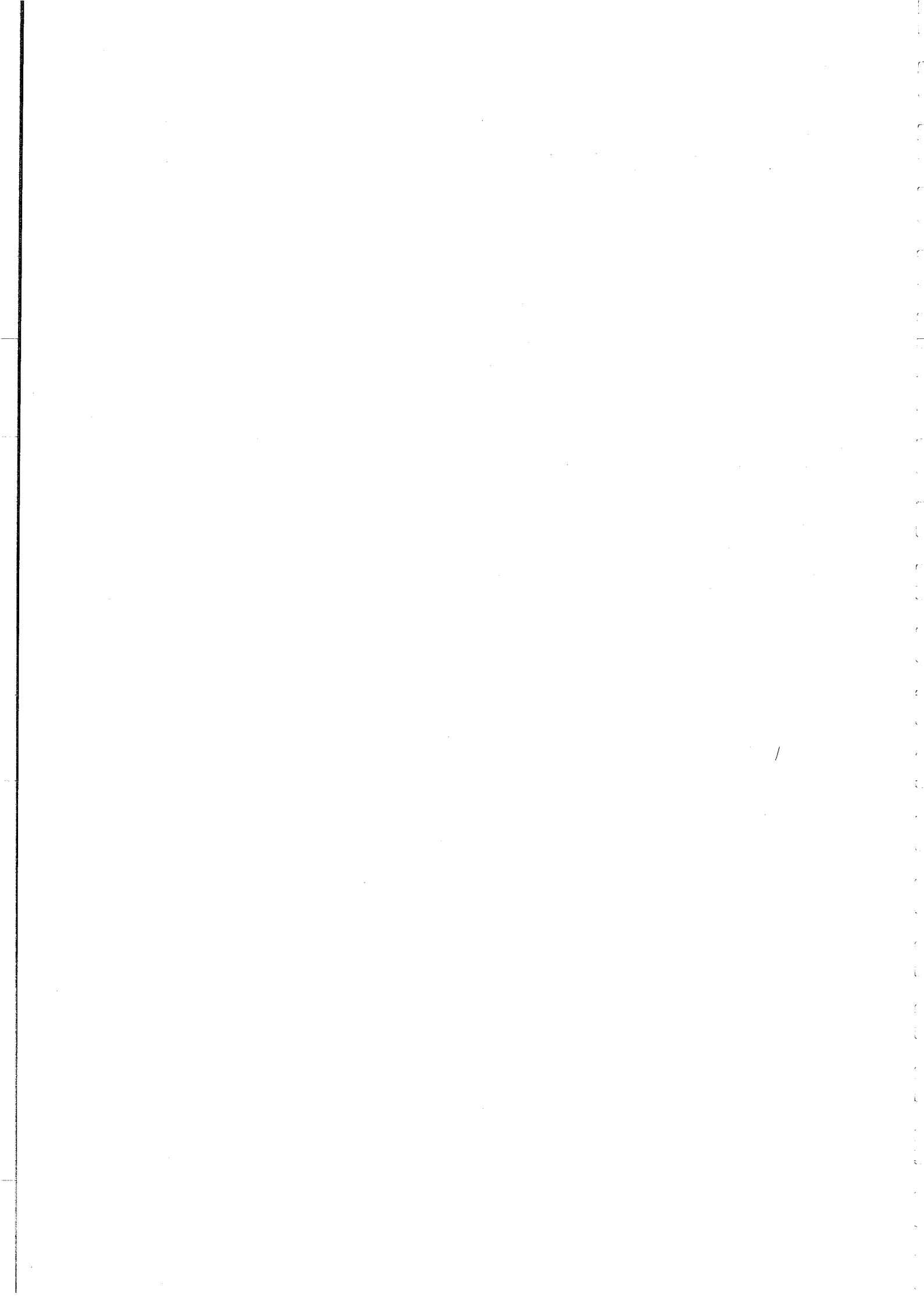
w0=2*pi*f0;
detu=10^(detu*log10(2)/1200)-1;
Z=1/Y;

WW(1,1)=-i*w0*Z+(1+detu)^2*K0;
WW(1,2)=- (1+detu)^2*K0;
WW(2,1)=- (1+detu)^2*K0;
WW(2,2)=(-i*w0*Z+K0)*(1+detu)^2;
WW=w0^2/(-i*w0*Z+K0*(1+(1+detu)^2))*WW;
[V,D]=eig(WW)
D=D.^(0.5);
w1=real(D(1,1));
w2=real(D(2,2));
a1=abs(imag(D(1,1)));
a2=abs(imag(D(2,2)));
p11=abs(V(1,1));
ps11=angle(V(1,1));
p12=abs(V(1,2));
ps12=angle(V(1,2));
p21=abs(V(2,1));
ps21=angle(V(2,1));
p22=abs(V(2,2));
ps22=angle(V(2,2));
CI=[y01 y02 v01 v02]';
CL=[p11*cos(ps11) -p11*sin(ps11) p12*cos(ps12) -p12*sin(ps12);
    p21*cos(ps21) -p21*sin(ps21) p22*cos(ps22) -p22*sin(ps22);
    p11*(-a1*cos(ps11)-w1*sin(ps11)) p11*(a1*sin(ps11)-w1*cos(ps11)) p12*(-a2*cos(p
s12)-w2*sin(ps12)) p12*(a2*sin(ps12)-w2*cos(ps12));
    p21*(-a1*cos(ps21)-w1*sin(ps21)) p21*(a1*sin(ps21)-w1*cos(ps21)) p22*(-a2*cos(p
s22)-w2*sin(ps22)) p22*(a2*sin(ps22)-w2*cos(ps22))];
A=CL\CI;
A1=abs(A(1)+i*A(2));
A2=sqrt(A(3)^2+A(4)^2);
ph1=angle(A(1)+i*A(2));
ph2=angle(A(3)+i*A(4)); %pour que phi soit ds [-pi,pi]
[f0,(1+detu)*f0]
[A1*p11,a1,w1/2/pi,(ph1+ps11)/pi*180;
 A2*p12,a2,w2/2/pi,(ph2+ps12)/pi*180;
 A1*p21,a1,w1/2/pi,(ph1+ps21)/pi*180;
 A2*p22,a2,w2/2/pi,(ph2+ps22)/pi*180]

t=(0:1/Fe:16)';
c1=A1*p11*exp(-a1*t).*cos(w1*t+ph1+ps11)+A2*p12*exp(-a2*t).*cos(w2*t+ph2+ps12);
c2=A1*p21*exp(-a1*t).*cos(w1*t+ph1+ps21)+A2*p22*exp(-a2*t).*cos(w2*t+ph2+ps22);
ch=real((K0*c1*(1+detu)^2*K0*c2)/(-i*w0*Z+K0*(1+(1+detu)^2)));

%subplot(3,1,1);semilogy(t,abs(c1));grid
%subplot(3,1,2);semilogy(t,abs(c2));grid
%subplot(3,1,1);plot(t,c1);grid;zoom on
%subplot(3,1,2);plot(t,c2);grid;zoom on
%subplot(3,1,3);plot(t,ch);grid;zoom on

```



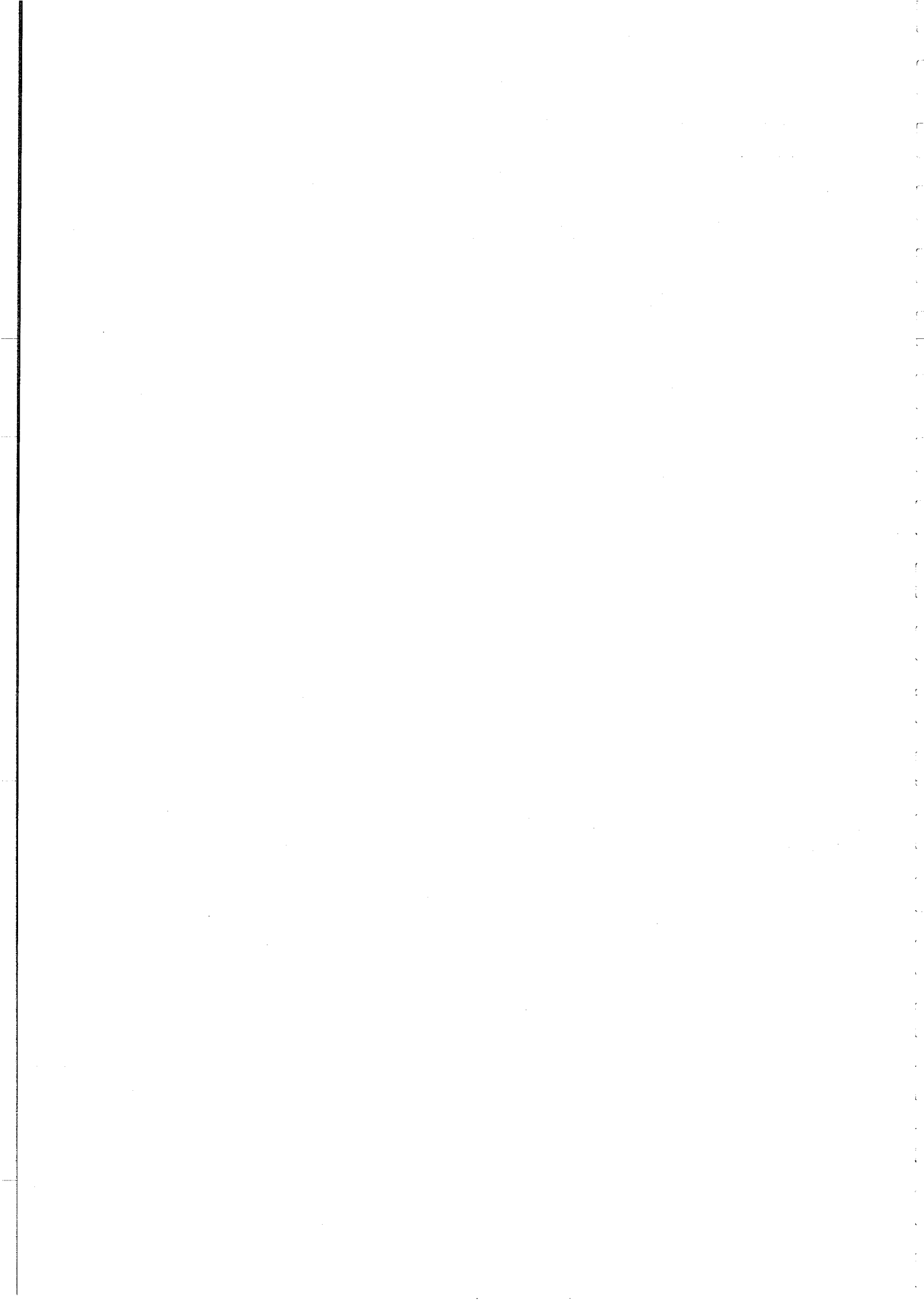
```
% Cette fonction permet de calculer l'enveloppe
% d'une fonction sf (vecteur colonne), echantillonnee a Fe.
%
% Elle est plus rapide que envl2.
% Elle utilise au maximum des calculs matriciels
%
% elle renvoie deux vecteurs extraits de sf:
% - ev contient les points extrema de sf
% - te contient les dates correspondantes.
%
%syntaxe: [ev,te]=envl(sf,Fe);

function[ev,te]=envl(sf,Fe)

cpu=cputime;
l=size(sf);l=l(1);

dsf=diff(sf);
dsfinc(1:l-2)=dsf(2:l-1);dsfinc(l-1)=0;dsfinc=dsfinc';
indice=find((sign(dsf)+sign(dsfinc))==0);
ev=abs(sf(indice+ones(size(indice))));
te=indice+ones(size(indice));

te=te/Fe;
temps=cputime-cpu
```



```
% Cette fonction permet de calculer la dephasage
% de 2 fonction sf1 et sf2 (vecteur colonne),
% echantillonnee a Fe, et supposees de forme periodiques.
%
% Elle est plus rapide que phase2.
% Elle utilise au maximum des calculs matriciels
%
% Elle renvoie quatres vecteurs extraits de sf:
% - ph contient le dephasage de sf2 par rapport a sf1
% - f1 et f2 contiennent les frequences d'oscillation
%   de sf1 et sf2
% - tf contient les dates correspondantes,
%   pour ph, f1 et f2.
%
%syntaxe: [ph,f1,f2,tf]=phase(sf1,sf2,Fe);

function [ph,f1,f2,tf]=phase(sf1,sf2,Fe)

cpu=cputime;
l1=size(sf1);l1=l1(1)
l2=size(sf2);l2=l2(1)

sf1=sf1+0.00001;
sf2=sf2+0.00001; %pour eviter les valeurs nulles!!!

sf1inc(1:l1-1)=sf1(2:l1);sf1inc(l1)=0;sf1inc=sf1inc';
indice=find((sign(sf1)+sign(sf1inc))==0 & sign(sf1)==1);
tf1=indice+sf1(indice)./(sf1(indice)-sf1(indice+ones(size(indice)))));

sf2inc(1:l2-1)=sf2(2:l2);sf2inc(l2)=0;sf2inc=sf2inc';
indice=find((sign(sf2)+sign(sf2inc))==0 & sign(sf2)==1);
tf2=indice+sf2(indice)./(sf2(indice)-sf2(indice+ones(size(indice)))));

tf1=tf1';
tf2=tf2';
lp1=length(tf1);
d=[];
tf=[];
dd=0;
for i=1:(lp1-1)
    ind=min(find(tf2>tf1(i) & tf2<tf1(i+1)));
    if ind~=[]
        dd=tf2(ind)-tf1(i);
    end
    d=[d dd];
    tf=[tf tf1(i)];
end

T1=diff(tf1);
T2=diff(tf2);
ph=d./T1*360;
tf=tf/Fe;
f1=Fe./T1;
f2=Fe./T2;

lp2=size(tf2);lp2=lp2(2);
if lp2<lp1 f2=[f2 zeros(1,(lp1-lp2))]; end
if lp2>lp1 f2=f2(1:lp1); end
```

```
% La routine qui suit permet d'enlever dans ph, f1, f2 et tf
% tous les echantillons qui correspondent a une valeur
% de ph>360 degres. (bruit de mesure...)
```

```
s=find(ph>360);
s=sort([s (s+1)]);
```

```
ph(s)=(ones(size(s))*10000);u=find(ph~=10000);ph=ph(u);
f1(s)=(ones(size(s))*10000);u=find(f1~=10000);f1=f1(u);
f2(s)=(ones(size(s))*10000);u=find(f2~=10000);f2=f2(u);
tf(s)=(ones(size(s))*10000);u=find(tf~=10000);tf=tf(u);
```

```
ph=ph';f1=f1';f2=f2';tf=tf';
```

```
temps=cputime-cpu
```

Bibliographie

- [1] D. Rousseau. *Influence des irrégularités de frappe du marteau sur la double décroissance du son d'un chœur de cordes de piano (aspect expérimental)*. Rapport de stage de DEA. IRCAM, 1997.
- [2] G. Weinreich. *Coupled piano strings*. J. Acoust. Soc. Am, Vol. 62, No. 6, Décembre 1977.
- [3] G. Weinreich. *Comment vibrent les cordes d'un piano*. Les instruments de l'orchestre. Bibliothèque Pour La Science, Belin, 1985
- [4] E. Blackham. *Le piano*. Les instruments de l'orchestre. Bibliothèque Pour La Science, Belin, 1985
- [5] E. Marandas. *Trichords in the Piano*. International Symposium of Musical Acoustics, Juillet 1995
- [6] C. Valette. *Oscillateurs mécaniques simples - Ondes et vibrations - Mécanique des vibrations*. Cours de DEA ATIAM, 1996
- [7] K. Wogram *Etudes acoustiques sur le piano. Particularités vibratoires de la table d'harmonie*. Das Musikinstrument, No.24, 1981

