



**HAL**  
open science

**Transport de masse ou d'énergie dans les milieux  
fortement hétérogènes: Passage du régime elliptique  
vers l'hyperbolique Loïc**

**DIJOUX(loic.dijoux2@univ-reunion.fr), Vincent  
FONTAINE(vincent.fontaine@univ-reunion.fr)**

Loïc Dijoux, Vincent Fontaine

► **To cite this version:**

Loïc Dijoux, Vincent Fontaine. Transport de masse ou d'énergie dans les milieux fortement hétérogènes: Passage du régime elliptique vers l'hyperbolique Loïc DIJOUX(loic.dijoux2@univ-reunion.fr), Vincent FONTAINE(vincent.fontaine@univ-reunion.fr). Assemblée générale du laboratoire PIMENT, Nov 2017, Petit île, La Réunion. hal-01657657

**HAL Id: hal-01657657**

**<https://hal.science/hal-01657657>**

Submitted on 7 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Transport de masse ou d'énergie dans les milieux fortement hétérogènes: Passage du régime elliptique vers l'hyperbolique



Loïc DIJOUX(loic.dijoux2@univ-reunion.fr), Vincent FONTAINE(vincent.fontaine@univ-reunion.fr)  
Université de la Réunion



## Contexte – 1

- Equation de diffusion-convection ou équation de transport

$$\nabla \cdot (-\tilde{K} \nabla u + \beta u) = f \quad \text{in } \Omega$$

Où  $\tilde{K}$ : le tenseur de conductivité,  $u$ : la variable étudiée,  $\beta$ : le champ des vitesses and  $f$ : le terme source.

Champs d'applications:

- Transport de soluté au sein d'un fluide
- Transport de chaleur au sein d'un fluide où des milieux solides/poreux
- Écoulement au sein des milieux poreux (Loi de Darcy)

## Grands principes des HdG – 2

Construction d'un flux stabilisé aux frontières des éléments:

$$\tilde{\sigma}_h \cdot \vec{n}_e = \tilde{\sigma}_h \cdot \vec{n}_e + \tau_e (u_h + \hat{u}_h) \quad (1)$$

Dans notre cas nous avons:

$$\tau_e = \tilde{n}_e^t \tilde{K} \tilde{n}_e + \max(-\beta \cdot \vec{n}_e, 0) \quad (2)$$

Le choix du paramètre  $\tau_e$  aux frontières de chaque élément permet d'agir directement sur les propriétés de la conservation de la masse et sur l'expression de la continuité du flux à l'interface des éléments. [1]

## Bases d'approximations polynomiales – 3

$\mathcal{P}_k(A)$  désigne l'ensemble des polynômes d'ordre  $k$  dans un domaine  $A$ . Pour tout éléments  $K$  de  $\mathcal{T}_h$  nous définissons les espaces d'approximations tels que:

$$\mathcal{Q}_h^k = \{q \in L^2(\Omega) : q|_K \in \mathcal{Q}^k(K) \forall K \in \mathcal{T}_h\},$$

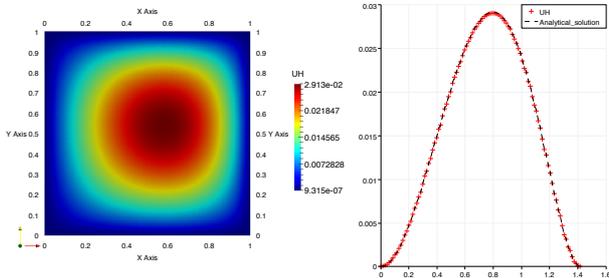
et nous ajoutons l'espace des traces de  $u_h$ :

$$\mathcal{M}_h^k = \{\mu \in L^2(\varepsilon_h) : \mu|_e \in \mathcal{P}^k(e) \forall e \in \varepsilon_h\}$$

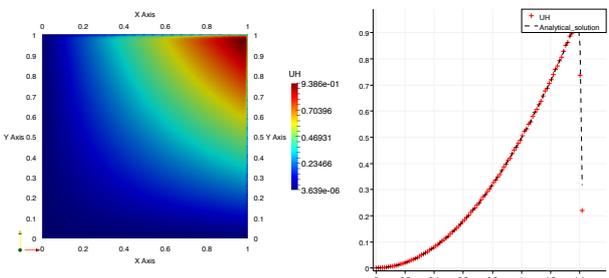
## Écoulement dans un milieu poreux – 6

Solution exacte  $u(x, y) = \left[ x + \frac{(\beta_1 x - 1)}{(1 - e^{\beta_1 x})} \right] \cdot \left[ y + \frac{(\beta_2 y - 1)}{(1 - e^{\beta_2 y})} \right]$  tenseur de diffusion  $\tilde{K} = \varepsilon \cdot \tilde{I}$

Solution numérique pour  $\varepsilon = 1 \cdot 10^0$ ,  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1$  (51200 éléments pour  $k = 0$  | CPU = 18.38s):



Solution numérique pour  $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\beta_1 = 2$  et  $\beta_2 = 1$  (51200 éléments pour  $k = 0$  | CPU = 18.44s):



## Propriétés des bases de Raviar-Thomas – 4

Expression générale de la base vectorielle de dimension  $d$  et d'ordre  $k$  sur un élément  $A$  [2]:

$$(\mathcal{RT}_h^k)^d(A) = (\mathcal{P}^k)^d(A) + \mathcal{X}^d \times \mathcal{P}^k(A) \quad (3)$$

Définition des degrés de liberté sur un élément quelconque  $A$  dont les frontières sont notées  $\partial A$  et tel que  $\tilde{\omega} \in (\mathcal{RT}_h^k)^d(A)$ :

$$\langle \tilde{\omega}_i \cdot \vec{n}_j, \mu_l \rangle_{\partial K} = \delta_{ij} \delta_{il} \quad \forall \mu_l \in \mathcal{P}^k \quad (4)$$

$$\langle \tilde{\omega}_i, \vec{\beta}_j \rangle_K = \delta_{ij} \quad \forall \vec{\beta}_j \in (\mathcal{P}^{k-1})^d \quad (5)$$

## Formulation faible discrète – 5

Trouver  $(\tilde{\sigma}_h, u_h, \hat{u}_h) \in \mathcal{RT}_h^k \times \mathcal{Q}_h^k \times \mathcal{M}_h^k$  tel que:

$$\left( \tilde{\sigma}_h, \tilde{\omega}_h \right)_A - (u_h, \nabla \cdot \tilde{\omega}_h)_A + (\hat{u}_h, \tilde{\omega}_h \cdot \vec{n}_e)_{\partial A} = 0 \quad (6)$$

$$\left( \tilde{\sigma}_h - \tilde{K} \tilde{\sigma}_h - \beta u_h, \tilde{\omega}_h \right)_A = 0 \quad (7)$$

$$(\nabla \cdot \tilde{\sigma}_h, q_h)_A + \langle \tau(u_h - \hat{u}_h), q_h \rangle_{\partial A} = (f, q_h)_A \quad (8)$$

$$\langle [\tilde{\sigma}], \mu_h \rangle_{\partial A} = 0 \quad (9)$$

Avec :

$$\tilde{\sigma}_h = -\tilde{K} \nabla u_h + \beta u_h$$

$$\tilde{\sigma}_h = \sum_{i=1}^{ddl} \sigma_i \tilde{\omega}_i \quad u_h = \sum_{i=1}^{ddl} u_i q_i \quad \hat{u}_h = \sum_{i=1}^{ddl} \hat{u}_i \mu_i \quad (10)$$

## Transport de masse sans diffusion – 7

Solution exacte  $u(x, y) = e^{\cos(x-y)}$  tenseur de diffusion  $\tilde{K} = \tilde{0}$  Champ de vitesse  $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  (6480 éléments pour  $k = 0$  | CPU = 2s)

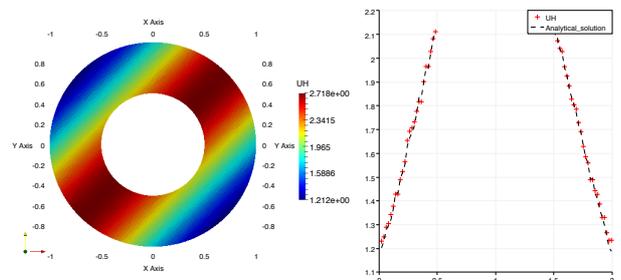


Tableau 1 : Historique de convergence

$h^{-1}$	$\ u - u_h\ _2$	Ordre	$\ \tilde{\sigma} - \tilde{\sigma}_h^*\ _2$	Ordre
8	$9.37 \cdot 10^{-2}$	-	$1.49 \cdot 10^{-1}$	-
16	$4.56 \cdot 10^{-2}$	1.04	$7.35 \cdot 10^{-2}$	1.02
32	$2.33 \cdot 10^{-2}$	0.97	$3.73 \cdot 10^{-2}$	0.98
64	$1.20 \cdot 10^{-2}$	0.96	$1.91 \cdot 10^{-2}$	0.97

## Conclusion – 8

- Flux stabilisé aux interfaces des éléments
- Souplesse de passage du régime elliptique vers le régime hyperbolique

## References

- [1] N. C. NGUYEN, J. PERIRE, AND B. COCKBURN, An implicit high-order hybridizable discontinuous Galerkin method for linear convection-diffusion equations, Journal of Computational Physics, 228 (2009), pp. 3232-3254.
- [2] P. A. RAVIART AND J. M. THOMAS, A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1977, pp. 292-315.

Ce travail a été financé par:

