



**HAL**  
open science

## Dimension de Heitmann des treillis distributifs et des anneaux commutatifs

Thierry Coquand, Henri Lombardi, Claude Quitté

► **To cite this version:**

Thierry Coquand, Henri Lombardi, Claude Quitté. Dimension de Heitmann des treillis distributifs et des anneaux commutatifs. Publications Mathématiques de Besançon: Algèbre et Théorie des Nombres, 2006, pp.57-100. hal-01656720

**HAL Id: hal-01656720**

**<https://hal.science/hal-01656720>**

Submitted on 6 Dec 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Dimension de Heitmann des treillis distributifs et des anneaux commutatifs

Thierry Coquand (\*) Henri Lombardi (†), Claude Quitté (‡)

Version corrigée : Octobre 2017.

Article original : *Publications mathématiques de Besançon. Algèbre et Théorie des Nombres.* (2006), pages 57–100.

## Résumé

Nous étudions la notion de dimension introduite par Heitmann dans son article remarquable de 1984 [22], ainsi qu’une notion voisine, seulement implicite dans ses preuves. Nous développons ceci d’abord dans le cadre général de la théorie des treillis distributifs et des espaces spectraux. Nous obtenons ensuite des versions constructives de certains théorèmes importants d’algèbre commutative. Les versions constructives de ces théorèmes s’avèrent en fin de compte plus simples, et parfois plus générales, que les versions classiques abstraites correspondantes.

MSC 2000 : 13C15, 03F65, 13A15, 13E05

Mots clés : Dimension de Krull, Dimension de Heitmann, Bord d’une sous variété, Théorème «Stable range» de Bass, Théorème «Splitting off» de Serre, Théorème de Forster-Swan, Théorème de Kronecker, Nombre de générateurs d’un module, Mathématiques constructives.

Key words : Krull dimension, Boundary of a subvariety, Constructive Mathematics, Kronecker theorem, Heitmann dimension, Forster-Swan Theorem, Serre’s Splitting Off, Bass cancellation theorem.

## Avertissement

L’article original est paru aux *Publications mathématiques de Besançon. Algèbre et Théorie des Nombres.* (2006), pages 57–100.

Nous corrigeons ici un certain nombre d’erreurs, répertoriées en post-scriptum à la fin du texte. Nous donnons aussi des références bibliographiques supplémentaires.

Signalons enfin que les sections 4 à 7 ont fait, bien après la parution de l’article présent, l’objet d’un exposé détaillé dans l’ouvrage :

LOMBARDI H. & QUITTÉ C. *Algèbre Commutative. Méthodes constructives.*

Calvage&Mounet (2011). Traduction anglaise chez Springer : *Commutative Algebra : Constructive Methods.* (2015)

---

\* Chalmers, University of Göteborg, Sweden, email : coquand@cs.chalmers.se

† Laboratoire de Mathématiques de Besançon, CNRS UMR 6623, Université Bourgogne Franche-Comté, 25030 BESANCON cedex, FRANCE, email : henri.lombardi@univ-fcomte.fr, <http://hlombardi.free.fr>.

‡ Laboratoire de Mathématiques, SP2MI, Boulevard 3, Teleport 2, BP 179, 86960 FUTUROSCOPE Cedex, FRANCE, email : quitte@math.univ-poitiers.fr

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Treillis distributifs</b>	<b>3</b>
1.1 Idéaux, filtres	4
Radical de Jacobson	5
1.2 Quotients	5
Recollement de treillis quotients	6
1.3 Algèbres de Heyting, de Brouwer, de Boole	10
1.4 Treillis distributifs noethériens	12
<b>2 Espaces spectraux</b>	<b>12</b>
2.1 Généralités	12
2.2 Treillis quotients et sous-espaces spectraux	15
Caractérisation des sous espaces spectraux	16
Fermés de $\text{Spec } T$	17
Fermés de $\text{Spec } T^\circ$	18
Recollement d'espaces spectraux	19
2.3 Spectre maximal et spectre de Heitmann	19
<b>3 Dimensions de Krull et de Heitmann : treillis distributifs</b>	<b>21</b>
3.1 Dimension de Krull des treillis distributifs	21
3.2 Dimensions et bord de Heitmann	25
J-dimension de Heitmann	25
Dimension de Heitmann	26
<b>4 Dimensions de Krull et Heitmann : anneaux commutatifs</b>	<b>30</b>
4.1 Le treillis de Zariski	30
4.2 Idéaux, filtres et quotients de $\text{Zar } A$	31
4.3 Le treillis de Heitmann	32
4.4 Dimension et bords de Krull	33
4.5 Dimensions de Heitmann	36
<b>5 Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass</b>	<b>38</b>
5.1 Le théorème de Kronecker	38
5.2 Le théorème «stable range» de Bass	39
5.3 Une généralisation de Heitmann	40
<b>6 Le splitting off de Serre et le théorème de Forster</b>	<b>42</b>
6.1 Manipulations élémentaires de colonnes	42
6.2 Quelques conséquences	44
Le théorème splitting off de Serre	44
Le théorème de Forster	44
<b>7 Théorème de Swan</b>	<b>45</b>
7.1 Manipulations élémentaires de colonnes	45
Les théorèmes de Serre et Swan avec la dimension de Heitmann	47
7.2 D'autres résultats	47
Le théorème de Swan, forme sophistiquée	47
Le théorème de simplification de Bass	48
<b>Bibliographie</b>	<b>48</b>
<b>Post-Scriptum</b>	<b>50</b>

## Introduction

Nous étudions la notion de dimension introduite par Heitmann dans son article de 1984 [22], ainsi qu'une notion voisine, seulement implicite dans ses preuves. Nous développons ceci d'abord dans le cadre général de la théorie des treillis distributifs et des espaces spectraux. Nous appliquons ensuite cette problématique dans le cadre de l'algèbre commutative.

Dans la dualité entre treillis distributifs et espaces spectraux, le spectre de Zariski d'un anneau commutatif correspond (comme l'a indiqué Joyal [26]) au treillis des idéaux qui sont radicaux d'idéaux de type fini. Nous montrons que l'espace spectral défini par Heitmann pour sa notion de dimension correspond au treillis formé par les idéaux qui sont radicaux de Jacobson d'idéaux de type fini. Ceci nous permet d'obtenir une définition constructive élémentaire de la dimension définie par Heitmann (que nous notons  $\mathbf{Jdim}$ ). Nous introduisons une autre dimension, que nous appelons dimension de Heitmann (et que nous notons  $\mathbf{Hdim}$ ), qui est «meilleure» en ce sens que  $\mathbf{Hdim} \leq \mathbf{Jdim}$  et qu'elle permet des preuves par récurrence naturelles.

Nous obtenons alors des versions constructives de certains théorèmes classiques importants, dans leur version non noethérienne (en général due à Heitmann).

Les versions constructives de ces théorèmes s'avèrent en fin de compte plus simples, et parfois plus générales, que les versions classiques abstraites correspondantes.

En particulier nous rappelons les versions non noethériennes des théorèmes de Swan et de Serre (splitting off) obtenues récemment pour la première fois dans [6] et [10].

Naturellement, le principal avantage que nous voyons dans notre traitement est son caractère tout à fait élémentaire. En particulier nous n'utilisons pas d'hypothèses «non nécessaires» comme l'axiome du choix et le principe du tiers exclu, inévitables pour faire fonctionner les preuves classiques antérieures.

Enfin, le fait de s'être débarrassé de toute hypothèse noethérienne est aussi non négligeable, et permet de mieux voir l'essence des choses.

En conclusion cet article peut être vu pour l'essentiel comme une mise au point constructive de la théorie des espaces spectraux via celle des treillis distributifs, avec une insistance particulière sur la dimension de Heitmann et quelques applications marquantes en algèbre commutative.

*Remarque.* Nous avons résolu de la manière suivante un problème de terminologie qui se pose en rédigeant cet article. Le mot «dualité» apparaît *a priori* dans le contexte des treillis distributifs avec deux significations différentes. Il y a d'une part la dualité qui correspond au renversement de la relation d'ordre dans un treillis. D'autre part il y a la dualité entre treillis distributifs et espaces spectraux, qui correspond à une antiéquivalence de catégorie. Nous avons décidé de réserver «dualité» pour ce dernier usage. Le terme «treillis dual» a donc été systématiquement remplacé par «treillis opposé». De même on a remplacé «la notion duale» par «la notion renversée» ou par «la notion opposée», et «par dualité» par «par renversement de l'ordre».

## 1 Treillis distributifs

Les axiomes des treillis distributifs peuvent être formulés avec des égalités universelles concernant uniquement les deux lois  $\wedge$  et  $\vee$  et les deux constantes  $0_{\mathbf{T}}$  (l'élément minimum du treillis distributif  $\mathbf{T}$ ) et  $1_{\mathbf{T}}$  (le maximum). La relation d'ordre est alors définie par  $a \leq_{\mathbf{T}} b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ . On obtient ainsi une théorie purement équationnelle, avec toutes les facilités afférentes. Par exemple on peut définir un treillis distributif par générateurs et relations, la catégorie comporte des limites inductives (qu'on peut définir par générateurs et relations) et des limites projectives (qui ont pour ensembles sous-jacents les limites projectives ensemblistes correspondantes).

Un ensemble totalement ordonné est un treillis distributif s'il possède un maximum et un minimum. On note  $\mathbf{n}$  un ensemble totalement ordonné à  $n$  éléments, c'est un treillis distributif si  $n \neq 0$ . Le treillis  $\mathbf{2}$  est le treillis distributif libre à 0 générateur, et  $\mathbf{3}$  celui à un générateur.

Pour tout treillis distributif  $\mathbf{T}$ , si l'on remplace la relation d'ordre  $x \leq_{\mathbf{T}} y$  par la relation symétrique  $y \leq_{\mathbf{T}} x$  on obtient le *treillis opposé*  $\mathbf{T}^{\circ}$  avec échange de  $\wedge$  et  $\vee$  (on dit parfois *treillis dual*).

### 1.1 Idéaux, filtres

Si  $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  est un morphisme de treillis distributifs,  $\varphi^{-1}(0)$  est appelé un *idéal de T*. Un idéal  $\mathfrak{J}$  de  $\mathbf{T}$  est une partie de  $\mathbf{T}$  soumise aux contraintes suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} 0 \in \mathfrak{J} \\ x, y \in \mathfrak{J} \implies x \vee y \in \mathfrak{J} \\ x \in \mathfrak{J}, z \in \mathbf{T} \implies x \wedge z \in \mathfrak{J} \end{array} \right\} \quad (1)$$

(la dernière se réécrit  $(x \in \mathfrak{J}, y \leq x) \implies y \in \mathfrak{J}$ ). Un *idéal principal* est un idéal engendré par un seul élément  $a$  : il est égal à

$$\downarrow a = \{x \in \mathbf{T} \mid x \leq a\} \quad (2)$$

L'idéal  $\downarrow a$ , muni des lois  $\wedge$  et  $\vee$  de  $\mathbf{T}$  est un treillis distributif dans lequel l'élément maximum est  $a$ . L'injection canonique  $\downarrow a \rightarrow \mathbf{T}$  n'est pas un morphisme de treillis distributifs parce que l'image de  $a$  n'est pas égale à  $1_{\mathbf{T}}$ . Par contre l'application surjective  $\mathbf{T} \rightarrow \downarrow a$ ,  $x \mapsto x \wedge a$  est un morphisme surjectif, qui définit donc  $\downarrow a$  comme une structure quotient.

La notion opposée à celle d'idéal est la notion de *filtre*. Le filtre principal engendré par  $a$  est noté  $\uparrow a$ .

L'idéal engendré par une partie  $J$  de  $\mathbf{T}$  est  $\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(J) = \{x \in \mathbf{T} \mid \exists J_0 \in \mathcal{P}_f(J), x \leq \bigvee J_0\}$ . En conséquence tout idéal de type fini est principal.

Si  $A$  et  $B$  sont deux parties de  $\mathbf{T}$  on note

$$A \vee B = \{a \vee b \mid a \in A, b \in B\} \quad \text{et} \quad A \wedge B = \{a \wedge b \mid a \in A, b \in B\}. \quad (3)$$

Alors l'idéal engendré par deux idéaux  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  est égal à

$$\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}) = \mathfrak{a} \vee \mathfrak{b} = \{z \mid \exists x \in \mathfrak{a}, \exists y \in \mathfrak{b}, z \leq x \vee y\}. \quad (4)$$

L'ensemble des idéaux de  $\mathbf{T}$  forme lui même un treillis distributif pour l'inclusion, avec pour inf de  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  l'idéal :

$$\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \wedge \mathfrak{b}. \quad (5)$$

Ainsi les opérations  $\vee$  et  $\wedge$  définies en (3) correspondent au sup et au inf dans le treillis des idéaux.

On notera  $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(S)$  le filtre de  $\mathbf{T}$  engendré par le sous ensemble  $S$ . Quand on considère le treillis des filtres il faut faire attention à ce que produit le renversement de la relation d'ordre :  $\mathfrak{f} \cap \mathfrak{g} = \mathfrak{f} \vee \mathfrak{g}$  est le inf de  $\mathfrak{f}$  et  $\mathfrak{g}$ , tandis que leur sup est égal à  $\mathcal{F}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{f} \cup \mathfrak{g}) = \mathfrak{f} \wedge \mathfrak{g}$ .

Le *treillis quotient de T par l'idéal J*, noté  $\mathbf{T}/(\mathfrak{J} = 0)$  est défini comme le treillis distributif engendré par les éléments de  $\mathbf{T}$  avec pour relations, les relations vraies dans  $\mathbf{T}$  d'une part, et les relations  $x = 0$  pour les  $x \in \mathfrak{J}$  d'autre part. Il peut aussi être défini par la relation de préordre

$$a \preceq b \iff a \leq_{\mathbf{T}/(\mathfrak{J}=0)} b \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists x \in \mathfrak{J} \ a \leq x \vee b$$

Ceci donne

$$a \equiv b \pmod{(\mathfrak{J} = 0)} \iff \exists x \in \mathfrak{J} \ a \vee x = b \vee x$$

et dans le cas du quotient par un idéal principal  $\downarrow a$  on obtient  $\mathbf{T}/(a = 0) \simeq \uparrow a$  avec le morphisme  $y \mapsto y \vee a$  de  $\mathbf{T}$  vers  $\uparrow a$ .

#### Transporteur, différence

Par analogie avec l'algèbre commutative, si  $\mathfrak{b}$  est un idéal et  $A$  une partie de  $\mathbf{T}$  on notera

$$\mathfrak{b} : A \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{T} \mid \forall a \in A \ a \wedge x \in \mathfrak{b}\} \quad (6)$$

Si  $\mathfrak{a}$  est l'idéal engendré par  $A$  on a  $\mathfrak{b} : A = \mathfrak{b} : \mathfrak{a}$ , on l'appelle le *transporteur de a dans b*.

On note aussi  $b : a$  l'idéal  $(\downarrow b) : (\downarrow a) = \{x \in \mathbf{T} \mid x \in \mathbf{T} \mid x \wedge a \leq b\}$ .

La notion opposée est celle de *filtre différence de deux filtres*

$$\mathfrak{f} \setminus \mathfrak{f}' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbf{T} \mid \forall a \in \mathfrak{f}' \ a \vee x \in \mathfrak{f}\} \quad (7)$$

On note aussi  $b \setminus a$  le filtre  $(\uparrow b) \setminus (\uparrow a) = \{x \in \mathbf{T} \mid b \leq x \vee a\}$ .

### Radical de Jacobson

Un idéal  $\mathfrak{m}$  d'un treillis distributif  $\mathbf{T}$  non trivial (i.e. distinct de  $\mathbf{1}$ ) est dit *maximal* si  $\mathbf{T}/(\mathfrak{m} = 0) = \mathbf{2}$ , c'est-à-dire si  $1 \notin \mathfrak{m}$  et  $\forall x \in \mathbf{T} (x \in \mathfrak{m} \text{ ou } \exists y \in \mathfrak{m} x \vee y = 1)$ .

Il revient au même de dire qu'il s'agit d'un idéal «maximal parmi les idéaux stricts».

En mathématiques classiques on a le lemme suivant.

**Lemme 1.1** *Dans un treillis distributif  $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$  l'intersection des idéaux maximaux est égale à l'idéal*

$$\{a \in \mathbf{T} \mid \forall x \in \mathbf{T} (a \vee x = 1 \Rightarrow x = 1)\}.$$

On l'appelle le radical de Jacobson de  $\mathbf{T}$ . On le note  $J_{\mathbf{T}}(0)$ .

Plus généralement l'intersection des idéaux maximaux contenant un idéal strict  $\mathfrak{J}$  est égale à l'idéal

$$J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J}) = \{a \in \mathbf{T} \mid \forall x \in \mathbf{T} (a \vee x = 1 \Rightarrow \exists z \in \mathfrak{J} z \vee x = 1)\} \quad (8)$$

On l'appelle le radical de Jacobson de l'idéal  $\mathfrak{J}$ . En particulier :

$$J_{\mathbf{T}}(\downarrow b) = \{a \in \mathbf{T} \mid \forall x \in \mathbf{T} (a \vee x = 1 \Rightarrow b \vee x = 1)\} \quad (9)$$

*Démonstration.*

La deuxième affirmation résulte de la première en passant au treillis quotient  $\mathbf{T}/(\mathfrak{J} = 0)$ . Voyons la première. On montre que  $a$  est en dehors d'au moins un idéal maximal si et seulement si  $\exists x \neq 1$  tel que  $a \vee x = 1$ . Si c'est le cas, un idéal maximal qui contient  $x$  (il en existe puisque  $x \neq 1$ ) ne peut pas contenir  $a$  car il contiendrait  $a \vee x$ . Inversement, si  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal ne contenant pas  $a$ , l'idéal engendré par  $\mathfrak{m}$  et  $a$  contient  $1$ . Or cet idéal est l'ensemble des éléments majorés par au moins un  $a \vee x$  où  $x$  parcourt  $\mathfrak{m}$ .  $\square$

En mathématiques classiques un treillis distributif est appelé *treillis de Jacobson* si tout idéal premier est égal à son radical de Jacobson. Comme tout idéal est intersection des idéaux premiers qui le contiennent, cela implique que tout idéal est égal à son radical de Jacobson.

En mathématiques constructives on adopte les *définitions* suivantes.

**Définitions 1.2** (radical de Jacobson, treillis faiblement Jacobson)

1. Si  $\mathfrak{J}$  est un idéal de  $\mathbf{T}$  son radical de Jacobson est défini par l'égalité (8) (on ne fait pas l'hypothèse que  $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$ ). On notera  $J_{\mathbf{T}}(a)$  pour  $J_{\mathbf{T}}(\downarrow a)$ .
2. Un treillis distributif est appelé un treillis faiblement Jacobson si tout idéal principal est égal à son radical de Jacobson, c'est-à-dire encore

$$\forall a, b \in \mathbf{T} [(\forall x \in \mathbf{1} \setminus a, b \vee x = 1) \Rightarrow a \leq b] \quad (10)$$

On vérifie sans difficulté que  $J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J})$  est un idéal et que  $1 \in J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J}) \Leftrightarrow 1 \in \mathfrak{J}$ .

## 1.2 Quotients

Un treillis distributif quotient  $\mathbf{T}'$  de  $\mathbf{T}$  est donné par une relation binaire  $\preceq$  sur  $\mathbf{T}$  vérifiant les propriétés suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} a \leq b \implies a \preceq b \\ a \preceq b, b \preceq c \implies a \preceq c \\ a \preceq b, a \preceq c \implies a \preceq b \wedge c \\ b \preceq a, c \preceq a \implies b \vee c \preceq a \end{array} \right\} \quad (11)$$

**Proposition 1.3** *Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif et  $(J, U)$  un couple de parties de  $\mathbf{T}$ . On considère le quotient  $\mathbf{T}'$  de  $\mathbf{T}$  défini par les relations  $x = 0$  pour les  $x \in J$  et  $y = 1$  pour les  $y \in U$ . Alors on a  $a \leq_{\mathbf{T}'} b$  si et seulement si il existe une partie finie  $J_0$  de  $J$  et une partie finie  $U_0$  de  $U$  telles que :*

$$a \wedge \bigwedge U_0 \leq_{\mathbf{T}} b \vee \bigvee J_0 \quad (12)$$

Nous noterons  $\mathbf{T}/(J = 0, U = 1)$  ce treillis quotient  $\mathbf{T}'$ .

### Idéaux dans un quotient

Le fait suivant résulte des égalités (1), (3), (4) et (5).

**Fait 1.4** Soit  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{L}$  un treillis quotient.

- L'image réciproque d'un idéal de  $\mathbf{L}$  par  $\pi^{-1}$  est un idéal de  $\mathbf{T}$ , ceci donne un morphisme pour  $\vee$  et  $\wedge$  (mais pas nécessairement pour 0 et 1).
- L'image d'un idéal de  $\mathbf{T}$  par  $\pi$  est un idéal de  $\mathbf{L}$ , ceci donne un homomorphisme surjectif de treillis.
- Un idéal de  $\mathbf{T}$  est de la forme  $\pi^{-1}(\mathfrak{a})$  si et seulement si il est saturé pour la relation  $=_{\mathbf{L}}$ .
- Résultats analogues pour les filtres.

Notez qu'en algèbre commutative, le morphisme de passage au quotient par un idéal ne se comporte pas aussi bien pour les idéaux dans le cas d'une intersection puisqu'on peut très bien avoir  $\mathfrak{a} + (\mathfrak{b} \cap \mathfrak{c}) \subsetneq (\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \cap (\mathfrak{a} + \mathfrak{c})$ .

Le lemme suivant donne quelques renseignements complémentaires pour les quotients par un idéal et par un filtre.

**Lemme 1.5** Soit  $\mathfrak{a}$  un idéal et  $\mathfrak{f}$  un filtre de  $\mathbf{T}$

1. Si  $\mathbf{L} = \mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$  alors la projection canonique  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{L}$  établit une bijection croissante entre les idéaux de  $\mathbf{T}$  contenant  $\mathfrak{a}$  et les idéaux de  $\mathbf{L}$ . La bijection réciproque est fournie par  $\mathfrak{j} \mapsto \pi^{-1}(\mathfrak{j})$ . En outre si  $\mathfrak{j}$  est un idéal de  $\mathbf{L}$ , on obtient  $\pi^{-1}(J_{\mathbf{L}}(\mathfrak{j})) = J_{\mathbf{T}}(\pi^{-1}(\mathfrak{j}))$ .
2. Si  $\mathbf{L} = \mathbf{T}/(\mathfrak{f} = 1)$  alors la projection canonique  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{L}$  établit une bijection croissante entre les idéaux  $\mathfrak{J}$  de  $\mathbf{T}$  vérifiant « $\forall f \in \mathfrak{f}, \mathfrak{J} : f = \mathfrak{J}$ » et les idéaux de  $\mathbf{L}$ .

*Remarque.* On notera que  $\mathbf{T} \mapsto J_{\mathbf{T}}(0)$  n'est pas une opération fonctorielle. La deuxième affirmation du point 1 du lemme précédent, qui admet une preuve constructive directe, s'explique facilement en mathématiques classiques par le fait que, dans le cas très particulier du quotient par un idéal, les idéaux maximaux de  $\mathbf{L}$  contenant  $\mathfrak{j}$  correspondent par  $\pi^{-1}$  aux idéaux maximaux de  $\mathbf{T}$  contenant  $\pi^{-1}(\mathfrak{j})$ .

### Recollement de treillis quotients

En algèbre commutative, si  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  sont deux idéaux d'un anneau  $\mathbf{A}$  on a une «suite exacte» de  $\mathbf{A}$ -modules (avec  $j$  et  $p$  des homomorphismes d'anneaux)

$$0 \rightarrow \mathbf{A}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \xrightarrow{j} (\mathbf{A}/\mathfrak{a}) \times (\mathbf{A}/\mathfrak{b}) \xrightarrow{p} \mathbf{A}/(\mathfrak{a} + \mathfrak{b}) \rightarrow 0$$

qu'on peut lire en langage courant : le système de congruences  $x \equiv a \pmod{\mathfrak{a}}, x \equiv b \pmod{\mathfrak{b}}$  admet une solution si et seulement si  $a \equiv b \pmod{\mathfrak{a} + \mathfrak{b}}$  et dans ce cas la solution est unique modulo  $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$ . Il est remarquable que ce «théorème des restes chinois» se généralise à un système *quelconque* de congruences si et seulement si l'anneau est *arithmétique* ([30, Théorème XII-1.6]), c'est-à-dire si le treillis des idéaux est distributif (le théorème des restes chinois «contemporain» concerne le cas particulier d'une famille d'idéaux deux à deux comaximaux, et il fonctionne sans hypothèse sur l'anneau de base).

D'autres épimorphismes de la catégorie des anneaux commutatifs sont les localisations. Et il y a un principe de recollement analogue au théorème des restes chinois pour les localisations, extrêmement fécond (le principe local-global).

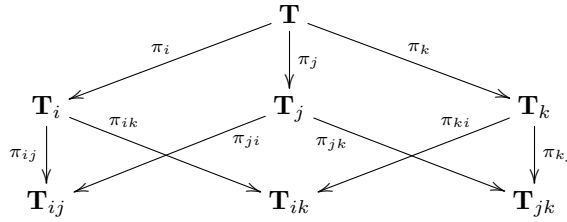
De la même manière on peut récupérer un treillis distributif à partir d'un nombre fini de ses quotients, si l'information qu'ils contiennent est «suffisante». On peut voir ceci au choix comme une procédure de recollement (de passage du local au global), ou comme une version du théorème des restes chinois pour les treillis distributifs. Voyons les choses plus précisément.

**Définition 1.6** Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif,  $(\mathfrak{a}_i)_{i=1,\dots,n}$  (resp.  $(\mathfrak{f}_i)_{i=1,\dots,n}$ ) une famille finie d'idéaux (resp. de filtres) de  $\mathbf{T}$ . On dit que les idéaux  $\mathfrak{a}_i$  recouvrent  $\mathbf{T}$  si  $\bigcap_i \mathfrak{a}_i = \{0\}$ . De même on dit que les filtres  $\mathfrak{f}_i$  recouvrent  $\mathbf{T}$  si  $\bigcap_i \mathfrak{f}_i = \{1\}$ .

Pour un idéal  $\mathfrak{b}$  nous écrivons  $x \equiv y \pmod{\mathfrak{b}}$  comme abréviation pour  $x \equiv y \pmod{(\mathfrak{b} = 0)}$ .

**Fait 1.7** Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif,  $(\mathfrak{a}_i)_{i=1,\dots,n}$  une famille finie d'idéaux principaux ( $\mathfrak{a}_i = \downarrow s_i$ ) de  $\mathbf{T}$  et  $\mathfrak{a} = \bigcap_i \mathfrak{a}_i$ .

1. Si  $(x_i)$  est une famille d'éléments de  $\mathbf{T}$  telle que pour chaque  $i, j$  on a  $x_i \equiv x_j \pmod{\mathfrak{a}_i \vee \mathfrak{a}_j}$ , alors il existe un unique  $x$  modulo  $\mathfrak{a}$  vérifiant :  $x \equiv x_i \pmod{\mathfrak{a}_i}$  ( $i = 1, \dots, n$ ).
2. Notons  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}/(\mathfrak{a}_i = 0)$ ,  $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji} = \mathbf{T}/(\mathfrak{a}_i \vee \mathfrak{a}_j = 0)$ ,  $\pi_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_i$  et  $\pi_{ij} : \mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}_{ij}$  les projections canoniques. Si les  $\mathfrak{a}_i$  recouvrent  $\mathbf{T}$ ,  $(\mathbf{T}, (\pi_i)_{i=1,\dots,n})$  est la limite projective du diagramme  $((\mathbf{T}_i)_{1 \leq i \leq n}, (\mathbf{T}_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}; (\pi_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n})$  (voir la figure ci-après)
3. Soit maintenant  $(\mathfrak{f}_i)_{i=1,\dots,n}$  une famille finie de filtres principaux, notons  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}/(\mathfrak{f}_i = 1)$ ,  $\mathbf{T}_{ij} = \mathbf{T}_{ji} = \mathbf{T}/(\mathfrak{f}_i \cup \mathfrak{f}_j = 1)$ ,  $\pi_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_i$  et  $\pi_{ij} : \mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}_{ij}$  les projections canoniques. Si les  $\mathfrak{f}_i$  recouvrent  $\mathbf{T}$ ,  $(\mathbf{T}, (\pi_i)_{i=1,\dots,n})$  est la limite projective du diagramme  $((\mathbf{T}_i)_{1 \leq i \leq n}, (\mathbf{T}_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}; (\pi_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq n})$ .



*Démonstration.*

1. Il suffit de le démontrer avec  $\mathfrak{a} = 0$ , ce qui est le point 2.

2. Soit  $(\mathbf{H}, (\psi_i)_{i \in I})$  la limite projective du diagramme. On a un unique morphisme

$$\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{H}$$

tel que  $\varphi \circ \psi_i = \pi_i$  pour chaque  $i$ . Et  $\varphi$  est injectif par hypothèse. On doit montrer qu'il est surjectif. Soit  $x = (x_i)_{i \in I}$  un élément de  $\mathbf{H}$  : on a  $x_i \in \mathbf{T}_i$  pour chaque  $i$  et  $\pi_{ij}(x_i) = \pi_{ji}(x_j)$  pour  $i \neq j$ . Si  $x_i = \pi_i(y_i)$  on a donc dans  $\mathbf{T}$

$$y_i \equiv y_j \pmod{\downarrow (s_i \vee s_j)}.$$

L'injectivité de  $\varphi$  signifie que  $\bigwedge_{i=1}^n s_i = 0$ . On a  $\pi_i(y_i) = \pi_i(y_i \vee s_i)$  donc on peut supposer que  $y_i \geq s_i$ . Les égalités  $\pi_{ij}(x_i) = \pi_{ji}(x_j)$  s'écrivent

$$y_i \vee s_j \vee s_i = y_j \vee s_j \vee s_i,$$

c'est-à-dire  $y_i \vee s_j = y_j \vee s_i$ . Posons  $y = \bigwedge_{i=1}^n y_i$ .

Alors, avec par exemple  $j = 1$ , on obtient

$$y \vee s_1 = y_1 \vee \bigwedge_{i=2}^n (y_i \vee s_1) = y_1 \wedge \bigwedge_{i=2}^n (y_1 \vee s_i) = y_1$$

(car  $a \wedge (a \vee b) = a$ ). Ainsi  $\pi_j(y) = x_j$  pour chaque  $j$ . Et  $\varphi$  est bien surjective.  $\square$

Il y a aussi une procédure de recollement proprement dit. Pour l'établir nous avons besoin du lemme suivant.

Rappelons que pour  $s \in \mathbf{T}$  le quotient  $\mathbf{T}/(s = 0)$  est isomorphe au filtre principal  $\uparrow s$  que l'on voit comme un treillis distributif dont l'élément 0 est  $s$ .

**Lemme 1.8** (Dans un treillis distributif, les quotients principaux sont «scindés»)

Soit  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  un morphisme de treillis distributifs,  $s \in \mathbf{T}$  et  $\mathfrak{a} = \downarrow s$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\pi$  est un morphisme de passage au quotient de  $\mathbf{T}$  par l'idéal principal  $\mathfrak{a}$ .
2. Il existe un morphisme  $\varphi : \mathbf{T}' \rightarrow \uparrow s$  tel que  $\pi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbf{T}'}$ .

Dans ce cas  $\varphi$  est uniquement déterminé par  $\pi$  et  $s$ .

Naturellement, l'énoncé renversé est valable pour un quotient par un filtre principal.



*Démonstration.*

1  $\Rightarrow$  2. Soit  $y \in \mathbf{T}'$ . On a  $y = \pi(x)$  pour un  $x \in \mathbf{T}$ .

On veut définir  $\varphi : \mathbf{T}' \rightarrow \uparrow s$  par l'égalité  $\varphi(y) = x \vee s$ . Tout d'abord c'est bien défini : si  $\pi(x) = \pi(x')$ , alors  $x \vee s = x' \vee s$  d'après le rappel précédent. Ensuite il est immédiat que  $\varphi$  est un morphisme de treillis distributifs et que  $\pi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbf{T}'}$ .

2  $\Rightarrow$  1. L'égalité  $\pi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbf{T}'}$  implique que  $\pi$  est surjectif et que  $\varphi$  est un isomorphisme de  $\mathbf{T}'$  sur  $\uparrow s$  avec la restriction de  $\pi$  pour isomorphisme réciproque. Ceci montre que  $\varphi$  est uniquement déterminé par  $\pi$  et  $s$ . On doit montrer l'équivalence

$$\pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow x_1 \vee s = x_2 \vee s.$$

Comme  $\varphi(0) = s$ , on a  $\pi(s) = 0$ , et  $x_1 \vee s = x_2 \vee s$  implique  $\pi(x_1) = \pi(x_2)$ .

Si  $\pi(x_1) = \pi(x_2)$  alors  $\pi(x_1 \vee s) = \pi(x_2 \vee s)$ , et puisque la restriction de  $\pi$  à  $\uparrow s$  est injective, cela implique  $x_1 \vee s = x_2 \vee s$ .  $\square$

*Remarque.* Nous avons utilisé en titre du lemme l'expression «les quotients principaux sont scindés» par analogie avec les surjections scindées entre  $\mathbf{A}$ -modules, vue l'égalité  $\pi \circ \varphi = \text{Id}_{\mathbf{T}'}$ , mais l'analogie est limitée. Ici la «section»  $\varphi$  de  $\pi$  est unique (une différence importante), et ce n'est «pas tout à fait» un morphisme de  $\mathbf{T}'$  dans  $\mathbf{T}$  (une autre différence importante).

**Proposition 1.9** (recollement abstrait de treillis distributifs) *Supposons donnés un ensemble fini  $I$  et dans la catégorie des treillis distributifs un diagramme*

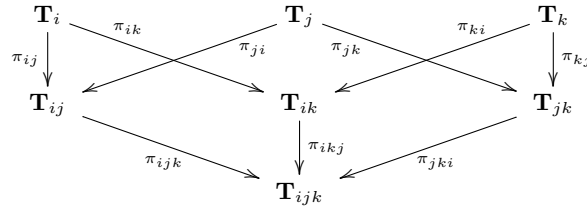
$$((\mathbf{T}_i)_{i \in I}, (\mathbf{T}_{ij})_{i < j \in I}, (\mathbf{T}_{ijk})_{i < j < k \in I}; (\pi_{ij})_{i \neq j}, (\pi_{ijk})_{i < j, j \neq k \neq i})$$

comme dans la figure ci-après, ainsi qu'une famille d'éléments

$$(s_{ij})_{i \neq j \in I} \in \prod_{i \neq j \in I} \mathbf{T}_i$$

satisfaisant les conditions suivantes :

- le diagramme est commutatif ( $\pi_{ijk} \circ \pi_{ij} = \pi_{ikj} \circ \pi_{ik}$  pour tous  $i, j, k$  distincts),
- pour  $i \neq j$ ,  $\pi_{ij}$  est un morphisme de passage au quotient par l'idéal  $\downarrow s_{ij}$ ,
- pour  $i, j, k$  distincts,  $\pi_{ijk}$  est un morphisme de passage au quotient par l'idéal  $\downarrow \pi_{ij}(s_{ik})$ , et aussi bien par l'idéal  $\downarrow \pi_{ji}(s_{jk})$ .



Alors si  $(\mathbf{T}; (\pi_i)_{i \in I})$  est la limite projective du diagramme, les  $\pi_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_i$  forment un recouvrement par quotients principaux de  $\mathbf{T}$ , et le diagramme est isomorphe à celui obtenu dans le fait 1.7. Plus précisément, chaque  $\pi_i$  est un morphisme de passage au quotient par un idéal  $\downarrow s_i$  et chaque  $\mathbf{T}_{ij}$  est somme amalgamée de  $\pi_i$  et  $\pi_j$ , i.e.  $\pi_i(s_j) = s_{ij}$  et  $\pi_j(s_i) = s_{ji}$ .

Le théorème analogue est valable pour les quotients par des filtres principaux.

*Démonstration.*

Nous posons  $s_{ii} = 0$ ,  $\mathbf{T}_{ii} = \mathbf{T}_i$ ,  $\varphi_{ii} = \pi_{ii} = \text{Id}_{\mathbf{T}_i}$ . Le lemme 1.8 nous donne des «sections»  $\varphi_{ij} : \mathbf{T}_{ij} \rightarrow \mathbf{T}_i$  et  $\varphi_{ijk} : \mathbf{T}_{ijk} \rightarrow \mathbf{T}_{ij}$ .

Les conditions imposées impliquent que les idéaux  $\downarrow \pi_{jk}(s_{ji})$  et  $\downarrow \pi_{kj}(s_{ki})$  sont égaux, i.e.  $\pi_{jk}(s_{ji}) = \pi_{kj}(s_{ki})$ .

Pour  $i \in I$ , on définit  $s_i \in \prod_k \mathbf{T}_k$  par  $s_i = (s_{ji})_{j \in I}$ , de sorte que  $\pi_j(s_i) = s_{ji}$ . Les coordonnées de  $s_i$  sont compatibles (i.e.  $s \in \mathbf{T}$ ) car  $\pi_{jk}(s_{ji}) = \pi_{kj}(s_{ki})$ .

Nous définissons ensuite une application  $\varphi_i = \mathbf{T}_i \rightarrow \prod_k \mathbf{T}_k$  par

$$\varphi_i(x) = y = (y_j)_{j \in I} \text{ avec } y_j = \varphi_{ji}(x_j) = \varphi_{ji}(\pi_{ij}(x)).$$

Montrons que les coordonnées de  $y$  sont compatibles (i.e.  $y \in \mathbf{T}$ ). En effet

$$y_j = s_{ji} \vee y_j, \text{ donc } \pi_{jk}(y_j) = \pi_{jk}(s_{ji} \vee y_j) = \pi_{jk}(s_{ji}) \vee \pi_{jk}(y_j),$$

de même  $\pi_{kj}(y_k) = \pi_{kj}(s_{ki}) \vee \pi_{kj}(y_k)$ . Et puisque  $\pi_{jki}$  est un morphisme de passage au quotient par l'idéal  $\downarrow \pi_{jk}(s_{ji}) = \downarrow \pi_{kj}(s_{ki})$ , l'égalité

$$\pi_{jk}(y_j) = \pi_{kj}(y_k)$$

peut être testée en prenant les images par  $\pi_{jki}$ .

Or, puisque  $\pi_{ji}(y_j) = \pi_{ji}(\varphi_{ji}(x_j)) = x_j = \pi_{ij}(x)$ , on obtient en utilisant la commutativité du diagramme

$$\pi_{jki}(\pi_{jk}(y_j)) = \pi_{ijk}(\pi_{ji}(y_j)) = \pi_{ijk}(\pi_{ij}(x)).$$

De même  $\pi_{kji}(\pi_{kj}(y_k)) = \pi_{ikj}(\pi_{ki}(x))$ . Et nous concluons en utilisant une deuxième fois la commutativité du diagramme.

Une fois établi que  $\varphi_i$  est bien une application  $\mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}$ , nous constatons facilement que  $\pi_i \circ \varphi_i = \text{Id}_{\mathbf{T}_i}$ , que l'image de  $\varphi_i$  est le filtre  $\uparrow s_i$  de  $\mathbf{T}$  et que  $\varphi_i$  est un morphisme de treillis distributifs de  $\mathbf{T}_i$  sur le filtre  $\uparrow s_i$ . Donc, par le lemme 1.8,  $\pi_i$  est un morphisme de passage au quotient par  $\downarrow s_i$ .  $\square$

### Treillis de Heitmann

Un quotient intéressant, qui n'est ni un quotient par un idéal ni un quotient par un filtre, est le treillis de Heitmann.

**Lemme 1.10** *Sur un treillis distributif arbitraire  $\mathbf{T}$  la relation  $J_{\mathbf{T}}(a) \subseteq J_{\mathbf{T}}(b)$  est une relation de préordre  $a \preceq b$  qui définit un quotient de  $\mathbf{T}$ . On a aussi :*

$$a \preceq b \iff a \in J_{\mathbf{T}}(b) \iff \forall x \in \mathbf{T} (a \vee x = 1 \Rightarrow b \vee x = 1) \quad (13)$$

*Démonstration.*

Les équivalences  $a \in J_{\mathbf{T}}(b) \Leftrightarrow J_{\mathbf{T}}(a) \subseteq J_{\mathbf{T}}(b) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{T} (a \vee x = 1 \Rightarrow b \vee x = 1)$  résultent de ce qui a été dit page 5 concernant le radical de Jacobson d'un idéal (voir l'égalité (9)).

Par ailleurs on vérifie sans difficulté les relations (11) nécessaires pour qu'un préordre définisse un quotient.  $\square$

**Définition 1.11** *On appelle treillis de Heitmann de  $\mathbf{T}$  et on note  $\text{He}(\mathbf{T})$  le treillis quotient de  $\mathbf{T}$  obtenu en remplaçant sur  $\mathbf{T}$  la relation d'ordre  $\leq_{\mathbf{T}}$  par la relation de préordre  $\preceq_{\text{He}(\mathbf{T})}$  définie comme suit*

$$a \preceq_{\text{He}(\mathbf{T})} b \stackrel{\text{def}}{\iff} J_{\mathbf{T}}(a) \subseteq J_{\mathbf{T}}(b) \quad (\text{cf. définition 1.2}) \quad (14)$$

*Ce treillis quotient peut être identifié à l'ensemble des idéaux  $J_{\mathbf{T}}(a)$ , avec la projection canonique*

$$\mathbf{T} \longrightarrow \text{He}(\mathbf{T}), \quad a \longmapsto J_{\mathbf{T}}(a)$$

Dire que le treillis  $\mathbf{T}$  est faiblement Jacobson revient à dire que  $\mathbf{T} = \text{He}(\mathbf{T})$ .

Notez qu'avec l'identification précédente on a les égalités :

$$J_{\mathbf{T}}(a \wedge b) = J_{\mathbf{T}}(a) \wedge_{\text{He}(\mathbf{T})} J_{\mathbf{T}}(b), \quad J_{\mathbf{T}}(a \vee b) = J_{\mathbf{T}}(a) \vee_{\text{He}(\mathbf{T})} J_{\mathbf{T}}(b) \quad (15)$$

Le lemme suivant est une précision (et une généralisation) de la première égalité ci-dessus. Il nous sera utile dans la suite.

**Lemme 1.12** *Si  $\mathfrak{a}$  et  $\mathfrak{b}$  sont deux idéaux de  $\mathbf{T}$ , on a  $J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) = J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a}) \cap J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{b})$ .*

*Démonstration.*

Il suffit de montrer que si  $z \in J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a}) \cap J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{b})$  alors  $z \in J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ . Soit  $t \in \mathbf{T}$  tel que  $z \vee t = 1$ , nous cherchons  $c \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  tel que  $c \vee t = 1$ . Or nous avons un  $a \in \mathfrak{a}$  tel que  $a \vee t = 1$  et un  $b \in \mathfrak{b}$  tel que  $b \vee t = 1$ . Il suffit donc de prendre  $c = a \wedge b$ .  $\square$

On notera que la preuve ne marcherait pas pour une intersection infinie d'idéaux.

**Fait 1.13** *Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif,  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}/(J_{\mathbf{T}}(0) = 0)$ ,  $x \in \mathbf{T}$  et  $\mathfrak{a}$  un idéal.*

1.  $x =_{\text{He}(\mathbf{T})} 1 \iff x = 1$ .
2.  $x =_{\text{He}(\mathbf{T})} 0 \iff x \in \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0)$ .
3.  $\text{He}(\text{He}(\mathbf{T})) = \text{He}(\mathbf{T}') = \text{He}(\mathbf{T})$ .
4. Si  $\mathbf{L} = \mathbf{T}/(\mathbf{a} = 0)$ ,  $\text{He}(\mathbf{L})$  s'identifie à  $\text{He}(\mathbf{T})/(\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(\mathbf{a}) = 0)$ .

*Remarque.* On notera cependant que  $\text{He}$  ne définit pas un foncteur.

*Démonstration.*

Les points 1 et 2 sont immédiats.

Le point 4 est laissé au lecteur. Il implique  $\text{He}(\mathbf{T}') = \text{He}(\mathbf{T})$ .

Dans le point 3  $\text{He}(\text{He}(\mathbf{T}))$  et  $\text{He}(\mathbf{T}')$  sont identifiés à des quotients de  $\mathbf{T}$ . Montrons que  $\text{He}(\text{He}(\mathbf{T})) = \text{He}(\mathbf{T})$ , c'est-à-dire que pour  $a, b \in \mathbf{T}$ ,  $a \preceq_{\text{He}(\text{He}(\mathbf{T}))} b \Rightarrow a \preceq_{\text{He}(\mathbf{T})} b$ . Par définition l'hypothèse signifie :  $\forall x \in \mathbf{T} (a \vee x =_{\text{He}(\mathbf{T})} 1 \Rightarrow b \vee x =_{\text{He}(\mathbf{T})} 1)$ . Or d'après le point 1 cela veut dire  $\forall x \in \mathbf{T} (a \vee x = 1 \Rightarrow b \vee x = 1)$ , c'est-à-dire  $a \preceq_{\text{He}(\mathbf{T})} b$ .  $\square$

### 1.3 Algèbres de Heyting, de Brouwer, de Boole

Un treillis distributif  $\mathbf{T}$  est appelé un *treillis implicatif* [9] ou une *algèbre de Heyting* [24] lorsqu'il existe une opération binaire  $\rightarrow$  vérifiant pour tous  $a, b, c$  :

$$a \wedge b \leq c \iff a \leq (b \rightarrow c) \quad (16)$$

Ceci signifie que pour tous  $b, c \in \mathbf{T}$ , l'idéal  $c : b$  est principal, son générateur étant noté  $b \rightarrow c$ . Donc si elle existe, l'opération  $\rightarrow$  est déterminée de manière unique par la structure du treillis. On définit alors la loi unaire  $\neg x = x \rightarrow 0$ . La structure d'algèbre de Heyting peut être définie comme purement équationnelle en donnant de bons axiomes. Précisément un treillis  $\mathbf{T}$  (non supposé distributif) muni d'une loi  $\rightarrow$  est une algèbre de Heyting si et seulement si les axiomes suivants sont vérifiés (cf. [24]) :

$$\begin{aligned} a \rightarrow a &= 1 \\ a \wedge (a \rightarrow b) &= a \wedge b \\ b \wedge (a \rightarrow b) &= b \\ a \rightarrow (b \wedge c) &= (a \rightarrow b) \wedge (a \rightarrow c) \end{aligned}$$

Notons aussi les faits importants suivants :

$$\begin{aligned} (a \vee b) \rightarrow c &= (a \rightarrow c) \wedge (b \rightarrow c) \\ \neg(a \vee b) &= \neg a \wedge \neg b \\ a &\leq \neg\neg a \\ \neg a \vee b &\leq a \rightarrow b \\ a \leq b &\iff a \rightarrow b = 1 \end{aligned}$$

Tout treillis distributif fini est une algèbre de Heyting, car tout idéal de type fini est principal.

Un cas particulier important d'algèbre de Heyting est une *algèbre de Boole* : c'est un treillis distributif dans lequel tout élément  $x$  possède un *complément*, c'est-à-dire un élément  $y$  vérifiant  $y \wedge x = 0$  et  $y \vee x = 1$  ( $y$  est noté  $\neg x$  et on a  $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ ).

Un *homomorphisme d'algèbres de Heyting* est un homomorphisme  $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  de treillis distributifs qui vérifie  $\varphi(a \rightarrow b) = \varphi(a) \rightarrow \varphi(b)$  pour tous  $a, b \in \mathbf{T}$ .

Le fait suivant est immédiat.

**Fait 1.14** Soit  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  un homomorphisme de treillis distributifs. Supposons que  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}'$  sont deux algèbres de Heyting et notons  $a \preceq b$  pour  $\varphi(a) \leq_{\mathbf{T}'} \varphi(b)$ . Alors  $\pi$  est un homomorphisme d'algèbres de Heyting si et seulement si on a pour tous  $a, a', b, b' \in \mathbf{T}$  :

$$a \preceq a' \Rightarrow (a' \rightarrow b) \preceq (a \rightarrow b) \quad \text{et} \quad b \preceq b' \Rightarrow (a \rightarrow b) \preceq (a \rightarrow b')$$

On a aussi :

**Fait 1.15** Si  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Heyting tout quotient  $\mathbf{T}/(y = 0)$  (c'est-à-dire tout quotient par un idéal principal) est aussi une algèbre de Heyting.

*Démonstration.*

Soit  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}' = \mathbf{T}/(y = 0)$  la projection canonique. On a  $\pi(x) \wedge \pi(a) \leq_{\mathbf{T}'} \pi(b) \Leftrightarrow \pi(x \wedge a) \leq_{\mathbf{T}'} \pi(b) \Leftrightarrow x \wedge a \leq b \vee y \Leftrightarrow x \leq a \rightarrow (b \vee y)$ . Or  $y \leq b \vee y \leq a \rightarrow (b \vee y)$ , donc  $\pi(x) \wedge \pi(a) \leq_{\mathbf{T}'} \pi(b) \Leftrightarrow x \leq (a \rightarrow (b \vee y)) \vee y$ , c'est-à-dire  $\pi(x) \leq_{\mathbf{T}'} \pi(a \rightarrow (b \vee y))$ , ce qui montre que  $\pi(a \rightarrow (b \vee y))$  vaut pour  $\pi(a) \rightarrow \pi(b)$  dans  $\mathbf{T}'$ .  $\square$

*Remarque.* La notion d'algèbre de Heyting est reminiscente de la notion d'anneau cohérent en algèbre commutative. En effet un anneau cohérent peut être caractérisé comme suit : l'intersection de deux idéaux de type fini est un idéal de type fini et le transporteur d'un idéal de type fini dans un idéal de type fini est un idéal de type fini. Si l'on «relit» ceci pour un treillis distributif en se rappelant que tout idéal de type fini est principal on obtient une algèbre de Heyting.

*Remarque.* Tout treillis distributif  $\mathbf{T}$  engendre une algèbre de Heyting de façon naturelle. Autrement dit on peut rajouter formellement un générateur pour tout idéal  $b : c$ . Mais si on part d'un treillis distributif qui se trouve être une algèbre de Heyting, l'algèbre de Heyting qu'il engendre est strictement plus grande. Prenons par exemple le treillis  $\mathbf{3}$  qui est le treillis distributif libre à un générateur. L'algèbre de Heyting qu'il engendre est donc l'algèbre de Heyting libre à un générateur. Or celle-ci est infinie (cf. [24]). A contrario le treillis booléen engendré par  $\mathbf{T}$  (cf. [3]) reste égal à  $\mathbf{T}$  lorsque celui-ci est booléen.

### Treillis avec négation

Un treillis distributif possède une négation si pour tout  $x$  l'idéal  $(0 : x)$  est principal, engendré par un élément que l'on note  $\neg x$ . Les règles suivantes sont immédiates.

$$\begin{array}{lcl} a \leq b & \Rightarrow & \neg b \leq \neg a \\ a \leq \neg\neg a & , & \neg a = \neg\neg\neg a \\ \neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b & , & \neg a \vee \neg b \leq \neg(a \wedge b) \\ \neg(x \vee \neg x) = 0 & , & \neg\neg(x \vee \neg x) = 1 \end{array}$$

Si pour tout  $a$ ,  $\neg\neg a = a$ , le treillis est une algèbre de Boole parce qu'alors  $x \vee \neg x = 1$ .

**Fait 1.16** Si  $\mathbf{T}$  possède une négation, notons  $F_{\min}(\mathbf{T}) = \mathfrak{f}$  le filtre engendré par les  $x \vee \neg x$ . Alors  $\text{He}(\mathbf{T}^\circ) = (\mathbf{T}/(\mathfrak{f} = 1))^\circ$ , et ce treillis est une algèbre de Boole.

*Démonstration.*

Il est clair que  $\neg x$  est un complément de  $x$  dans  $\mathbf{T}/(\mathfrak{f} = 1)$ , ce treillis est donc une algèbre de Boole. En présence de la négation, la relation  $a \leq_{\text{He}(\mathbf{T}^\circ)} b$  est équivalente à  $\neg a \leq \neg b$  et ceci est facilement équivalent à  $b \leq a \text{ mod } (\mathfrak{f} = 1)$ .  $\square$

**Fait 1.17** Si  $\mathbf{T}$  est un treillis avec négation, le treillis  $\mathbf{T}^\circ$  est faiblement Jacobson si et seulement si  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Boole.

*Démonstration.*

En présence de négation, les équations (13) et (14) donnent pour  $a \leq_{\text{He}(\mathbf{T}^\circ)} b$  la condition équivalente  $\neg b \leq \neg a$ . Le treillis  $\mathbf{T}^\circ$  est donc faiblement Jacobson si et seulement si  $\neg b \leq \neg a$  implique  $a \leq b$ . En particulier on doit avoir  $a = \neg\neg a$  pour tout  $a$ .  $\square$

### Algèbres de Brouwer

Un treillis distributif tel que le treillis opposé est une algèbre de Heyting est appelé une algèbre de Brouwer. C'est un treillis distributif dans lequel tous les filtres  $c \setminus b$  sont principaux. On note alors  $c - b$  le générateur de  $c \setminus b$ .

En passant au treillis opposé le fait suivant dit la même chose que le fait 1.16.

**Fait 1.18** *On dit que le treillis  $\mathbf{T}$  possède un complément de Brouwer lorsque pour tout  $x$  le filtre  $(1 \setminus x)$  est principal. Il est alors engendré par un unique élément que l'on note  $1 - x$ . Dans ce cas, notons  $\mathbf{I}_{\max}(\mathbf{T}) = \mathfrak{a}$  l'idéal engendré par les  $x \wedge (1 - x)$ . Alors  $\text{He}(\mathbf{T})$  est égal à l'algèbre de Boole  $\mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$ .*

Nous laissons au lecteur le soin de traduire le fait 1.17.

## 1.4 Treillis distributifs noethériens

En mathématiques classiques, pour un treillis distributif  $\mathbf{T}$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) Tout idéal est principal.
- (2) Toute suite croissante est stationnaire.
- (3) Toute suite croissante d'idéaux est stationnaire.

Un tel treillis est appelé *noethérien* (par analogie avec l'algèbre commutative, on pourrait l'appeler *principal*). C'est clairement est une algèbre de Heyting.

Tout sous treillis et tout treillis quotient d'un treillis noethérien est noethérien.

En mathématiques constructives la notion est plus délicate. Aucun treillis non trivial ne vérifie le point (2) (qui est *a priori* la formulation la plus faible des trois). On pourrait définir un treillis distributif noethérien comme un treillis vérifiant une condition «ACC constructive» du style : toute suite croissante admet deux termes consécutifs égaux. Cette condition est équivalente à (2) en mathématiques classiques. Mais il y a *a priori* plusieurs variantes intéressantes.

En pratique, il semble qu'on est en général intéressé par le fait que certains idéaux bien précis sont principaux, comme dans le cas des algèbres de Heyting. Or le fait qu'un treillis est une algèbre de Heyting ne résulte pas constructivement de la condition ACC constructive (de la même manière, en algèbre commutative, la cohérence, qui est souvent plus importante que la noethérianité, ne résulte d'aucune variante constructive connue de la noethériannité).

*Remarque.* Montrons en mathématiques classiques que si  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{T}^\circ$  sont noethériens alors  $\mathbf{T}$  est fini. Les idéaux maximaux sont des  $\downarrow x$  où  $x$  est un prédécesseur immédiat de 1. Et le spectre maximal est fini, parce que si  $(\mathfrak{m}_n) = (\downarrow x_n)$  est une suite infinie d'idéaux maximaux, la suite  $(\bigwedge_{i \leq n} x_i)$  est strictement décroissante. On peut ensuite appliquer le résultat à chacun des treillis quotients par les idéaux maximaux. On termine par le lemme de König. Rendre cette preuve constructive, avec une définition constructive suffisamment forte de la noethériannité est un défi intéressant.

## 2 Espaces spectraux

### 2.1 Généralités

#### En mathématiques classiques

Un *idéal premier*  $\mathfrak{p}$  d'un treillis  $\mathbf{T} \neq \mathbf{1}$  est un idéal dont le complémentaire  $\mathfrak{f}$  est un filtre (qui est alors un *filtre premier*). On a alors  $\mathbf{T}/(\mathfrak{p} = 0, \mathfrak{f} = 1) \simeq \mathbf{2}$ . Il revient au même de se donner un idéal premier de  $\mathbf{T}$  ou un morphisme de treillis distributifs  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{2}$ .

Dans cette section, nous noterons  $\theta_{\mathfrak{p}} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{2}$  l'homomorphisme associé à l'idéal premier  $\mathfrak{p}$ .

On vérifie facilement que si  $S$  est une partie génératrice du treillis distributif  $\mathbf{T}$ , un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $\mathbf{T}$  est complètement caractérisé par sa trace sur  $S$  (cf. [3]).

Un *idéal maximal* (resp. *premier minimal*) est un idéal maximal parmi les idéaux stricts (resp. minimal parmi les idéaux premiers). Il revient au même de dire que  $\mathfrak{m}$  est maximal ou que  $\mathbf{T}/(\mathfrak{m} = 0) \simeq \mathbf{2}$ , les idéaux maximaux sont donc premiers. Il revient au même de dire que  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier minimal ou que son complémentaire est un filtre maximal.

En mathématiques classiques tout idéal strict est contenu dans un idéal maximal et (par renversement) tout filtre est contenu dans le complémentaire d'un idéal premier minimal.

Le spectre d'un treillis distributif  $\mathbf{T}$  est l'ensemble  $\text{Spec } \mathbf{T}$  de ses idéaux premiers, muni de la topologie suivante : une base d'ouverts est donnée par les

$$D_{\mathbf{T}}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbf{T} \mid a \notin \mathfrak{p} \}, \quad a \in \mathbf{T}.$$

On vérifie que

$$\left. \begin{aligned} D_{\mathbf{T}}(a \wedge b) &= D_{\mathbf{T}}(a) \cap D_{\mathbf{T}}(b), & D_{\mathbf{T}}(0) &= \emptyset, \\ D_{\mathbf{T}}(a \vee b) &= D_{\mathbf{T}}(a) \cup D_{\mathbf{T}}(b), & D_{\mathbf{T}}(1) &= \text{Spec } \mathbf{T}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Le complémentaire de  $D_{\mathbf{T}}(a)$  est un fermé qu'on note  $V_{\mathbf{T}}(a)$ .

On étend la notation  $V_{\mathbf{T}}(a)$  comme suit : si  $I \subseteq \mathbf{T}$ , on pose  $V_{\mathbf{T}}(I) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{x \in I} V_{\mathbf{T}}(x)$ . Si  $\mathcal{I}_{\mathbf{T}}(I) = \mathfrak{J}$ , on a  $V_{\mathbf{T}}(I) = V_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J})$ . On dit parfois que  $V_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J})$  est la variété associée à  $\mathfrak{J}$ .

Les espaces topologiques homéomorphes à des espaces  $\text{Spec } \mathbf{T}$  ont été appelés *espaces spectraux* par Stone [31].

Avec la logique classique et l'axiome du choix, l'espace  $\text{Spec } \mathbf{T}$  a «suffisamment de points» : on peut retrouver le treillis  $\mathbf{T}$  à partir de son spectre. Voici comment.

Tout d'abord on a le

### Théorème de Krull

Supposons que  $\mathfrak{J}$  est un idéal,  $\mathfrak{F}$  un filtre et  $\mathfrak{J} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ . Alors il existe un idéal premier  $\mathfrak{P}$  tel que  $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{P}$  et  $\mathfrak{P} \cap \mathfrak{F} = \emptyset$ .

On en déduit que :

- L'application  $a \in \mathbf{T} \mapsto D_{\mathbf{T}}(a) \in \mathcal{P}(\text{Spec } \mathbf{T})$  est injective : elle identifie  $\mathbf{T}$  à un treillis d'ensembles (*théorème de représentation de Birkhoff*).
- Si  $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  est un homomorphisme injectif l'application  $\varphi^* : \text{Spec } \mathbf{T}' \rightarrow \text{Spec } \mathbf{T}$  obtenue par dualité est surjective.
- Tout idéal de  $\mathbf{T}$  est intersection des idéaux premiers qui le contiennent.
- L'application  $\mathfrak{J} \mapsto V_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J})$ , des idéaux de  $\mathbf{T}$  vers les fermés de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  est un isomorphisme d'ensembles ordonnés (pour l'inclusion et l'inclusion renversée).

On montre aussi que les ouverts quasi-compacts de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  sont exactement les  $D_{\mathbf{T}}(a)$ . D'après les égalités (17) les ouverts quasi-compacts de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  forment un treillis distributif de parties de  $\text{Spec } \mathbf{T}$ , isomorphe à  $\mathbf{T}$ .

À partir d'un espace spectral  $X$  on peut considérer le treillis distributif  $\text{Oqc}(X)$  formé par ses ouverts quasi-compacts. Puisque pour tout treillis distributif  $\mathbf{T}$ ,  $\text{Oqc}(\text{Spec}(\mathbf{T}))$  est canoniquement isomorphe à  $\mathbf{T}$ , pour tout espace spectral  $X$ ,  $\text{Spec}(\text{Oqc}(X))$  est canoniquement homéomorphe à  $X$ .

On dit qu'un point  $\mathfrak{q} \in X$  d'un espace spectral est le *point générique du fermé*  $F$  si  $F = \overline{\{\mathfrak{q}\}}$ . Ce point (s'il existe) est nécessairement unique car les espaces spectraux sont des espaces de Kolmogoroff (autrement dit, ils vérifient la condition de séparation  $T_0$ ). Les fermés  $\overline{\{\mathfrak{q}\}}$  sont exactement tous les fermés irréductibles de  $X$ . La relation d'ordre  $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$  sera notée  $\mathfrak{p} \leq_X \mathfrak{q}$ , et on a  $\mathfrak{p} \leq_X \mathfrak{q} \Leftrightarrow \overline{\{\mathfrak{q}\}} \subseteq \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ . Les points fermés de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  sont les idéaux maximaux de  $\mathbf{T}$ .

Si  $X = \text{Spec } \mathbf{T}$  la relation  $\mathfrak{p} \leq_X \mathfrak{q}$  est simplement la relation d'inclusion usuelle entre idéaux premiers.

Tout homomorphisme  $\varphi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  de treillis distributifs fournit par dualité une application continue  $\varphi^* : \text{Spec } \mathbf{T}' \rightarrow \text{Spec } \mathbf{T}$ , qui est appelée une *application spectrale*. Pour qu'une application continue entre espaces spectraux soit spectrale il faut et il suffit que l'image réciproque de tout ouvert quasi-compact soit un ouvert quasi-compact.

La catégorie spectrale ainsi définie est alors équivalente à la catégorie opposée à celle des treillis distributifs.

*Remarque.* Une définition purement topologique des espaces spectraux est la suivante [31] :

- L'espace est de Kolmogoroff (i.e., de type  $T_0$ ) : étant donnés deux points il existe un voisinage de l'un des deux qui ne contient pas l'autre.
- L'espace est quasi-compact.

- L'intersection de deux ouverts quasi-compacts est un ouvert quasi-compact.
- Tout ouvert est réunion d'ouverts quasi-compacts.
- Pour tout fermé  $F$  et pour tout ensemble  $S$  d'ouverts quasi-compacts tels que  $F \cap \bigcap_{U \in S'} U \neq \emptyset$  pour toute partie finie  $S'$  de  $S$ , on a aussi  $F \cap \bigcap_{U \in S} U \neq \emptyset$ .

En présence des quatre premières propriétés la dernière peut se reformuler comme suit : tout fermé irréductible admet un point générique.

On appelle *espace de Stone* un espace spectral  $\text{Spec } \mathbf{T}$  lorsque  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Boole. Il est bien connu que les espaces de Stone peuvent être caractérisés comme les espaces compacts totalement discontinus.

### En mathématiques constructives

D'un point de vue constructif,  $\mathbf{T}$  est une version «sans points» de  $\text{Spec } \mathbf{T}$ . En d'autres termes, à défaut d'avoir accès aux points de  $\text{Spec } \mathbf{T}$ , on peut se contenter de l'ensemble de ses ouverts quasi-compacts, qui sont directement visibles (sans recours à l'axiome du choix ni au principe du tiers exclu). La version sans points est plus facile à appréhender. Au contraire les points de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  ne sont pas en général des objets accessibles sans recours à des principes non constructifs.

En mathématiques constructives on a *a priori* plusieurs possibilités pour définir le spectre d'un treillis distributif (toutes équivalentes en mathématiques classiques). Le plus raisonnable semble de définir  $\text{Spec } \mathbf{T}$  comme l'ensemble des filtres premiers de  $\mathbf{T}$ , c'est-à-dire les filtres pour lesquels on a

$$x \wedge y \in \mathfrak{F} \implies x \in \mathfrak{F} \text{ ou } y \in \mathfrak{F}$$

avec un «ou» explicite. Mais de tels espaces  $\text{Spec } \mathbf{T}$  n'ont pas toujours suffisamment de points<sup>1</sup> et on ne peut pas affirmer constructivement que les deux catégories sont antiéquivalentes, du moins si l'on définit les morphismes entre espaces spectraux comme des applications, car les applications nécessitent des points.

Une solution alternative satisfaisante (mais un peu troublante au premier abord) est de considérer  $\text{Spec } \mathbf{T}$  comme un «espace topologique sans points», c'est-à-dire un espace topologique défini uniquement à travers sa base d'ouverts  $D_{\mathbf{T}}(a)$  (où  $a$  parcourt  $\mathbf{T}$ ). Les morphismes sont alors définis de manière purement formelle comme donnés par les morphismes des treillis correspondants, en renversant le sens des flèches. De ce point de vue l'antiéquivalence de la catégorie spectrale et de la catégorie des treillis distributifs devient une pure tautologie définitionnelle.

En tout état de cause, bien que la catégorie spectrale reste utile pour l'intuition, tout le travail se fait dans la catégorie des treillis distributifs. L'avantage est naturellement que l'on obtient des théorèmes constructifs.

Dans cet article les spectres seront étudiés uniquement du point de vue des mathématiques classiques, comme source d'inspiration importante pour de bonnes notions concernant les treillis distributifs.

### Espaces spectraux noethériens

Un espace spectral  $X$  est dit *noethérien* si toute suite croissante d'ouverts est stationnaire. Il revient au même de dire que tout ouvert est quasi-compact, ou encore que le treillis  $\text{Oqc}(X)$  est noethérien. Dans un espace spectral noethérien tout ouvert est un  $D_{\mathbf{T}}(a)$  et tout fermé un  $V_{\mathbf{T}}(b)$ .

### Deux autres topologies intéressantes sur $\text{Spec } \mathbf{T}$

En mathématiques classiques on a une bijection canonique entre les ensembles sous-jacents aux espaces  $\text{Spec } \mathbf{T}$  et  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$  (à un idéal premier on associe son complémentaire) qui permet d'identifier ces deux ensembles. La topologie n'est pas la même. Les ouverts de base de  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$  sont les  $V_{\mathbf{T}}(a)$ . Si  $X = \text{Spec } \mathbf{T}$  et  $X' = \text{Spec } \mathbf{T}^\circ$ , et si on identifie les ensembles sous-jacents à  $X$

1. On peut par exemple définir un treillis distributif infini dénombrable explicite qui ne possède pas d'idéaux premiers récurrents. Pour un tel treillis distributif, il ne peut pas y avoir de preuve constructive que  $\text{Spec } \mathbf{T}$  est non vide

et  $X'$ , la relation d'ordre  $\leq_{X'}$  est la relation symétrique de  $\leq_X$  (l'ordre est renversé), mais ce qui se passe pour la topologie est plus compliqué.

On doit également considérer la *topologie constructible* (patch topology) dont les ouverts de base sont les  $D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b)$ . Cela donne un espace compact naturellement homéomorphe à  $\text{Spec } \mathbf{T}^{\text{bool}}$  où  $\mathbf{T}^{\text{bool}}$  est le treillis booléen engendré par  $\mathbf{T}$ . En mathématiques classiques on obtient  $\mathbf{T}^{\text{bool}}$  comme la sous algèbre de Boole de l'ensemble des parties de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  engendrée par les  $D_{\mathbf{T}}(a)$ . Ce treillis peut aussi être décrit constructivement comme suit (cf. [3]). On considère une copie disjointe de  $\mathbf{T}$ , qu'on note  $\dot{\mathbf{T}}$ . Alors  $\mathbf{T}^{\text{bool}}$  est un treillis distributif défini par générateurs et relations. Les générateurs sont les éléments de l'ensemble  $T_1 = \mathbf{T} \cup \dot{\mathbf{T}}$  et les relations sont obtenues comme suit : si  $A, F, B, E$  sont quatre parties finies de  $\mathbf{T}$  on a

$$\bigwedge A \wedge \bigwedge E \leq_{\mathbf{T}} \bigvee B \vee \bigvee F \implies \bigwedge A \wedge \bigwedge \dot{F} \leq_{T_1} \bigvee B \vee \bigvee \dot{E}$$

On montre que  $\mathbf{T}$  et  $\dot{\mathbf{T}}$  s'injectent naturellement dans  $\mathbf{T}^{\text{bool}}$  et que l'implication ci-dessus est en fait une équivalence. On obtient par dualité deux applications spectrales bijectives  $\text{Spec } \mathbf{T}^{\text{bool}} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{T}$  et  $\text{Spec } \mathbf{T}^{\text{bool}} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{T}^{\circ}$ .

### Espaces spectraux finis

Dans le cas des treillis distributifs *finis* on obtient les espaces spectraux finis, qui ne sont rien d'autre que les ensembles ordonnés finis, (car il suffit de connaître l'adhérence des points pour connaître la topologie) avec pour base d'ouverts les  $\downarrow a$ . Les ouverts sont tous quasi-compacts, ce sont les parties initiales, et les fermés sont les parties finales. Enfin, une application entre espaces spectraux finis est spectrale si et seulement si elle est croissante (pour les relations d'ordres associées).

La notion d'espace spectral apparaît ainsi comme une généralisation pertinente de la notion d'ensemble ordonné fini au cas infini.

Si l'on identifie les ensembles sous-jacents à  $\text{Spec } \mathbf{T}$  et  $\text{Spec } \mathbf{T}^{\circ}$  les deux spectres sont presque les mêmes : c'est le même ensemble ordonné au renversement près de la relation d'ordre. En outre les ouverts et les fermés sont échangés.

## 2.2 Treillis quotients et sous-espaces spectraux

En utilisant l'antiéquivalence des catégories, on *définit* la notion de *sous-espace spectral* comme duale de la notion de treillis quotient. Ce sera l'objet du théorème 2.2.

Signalons les résultats généraux suivants concernant les morphismes dans la catégorie des treillis distributifs et celle des espaces spectraux (voir le théorème de Krull page 13 et [1, Balbes & Dwinger, Theorem IV-2.6]). Nous donnons dans la suite les énoncés précis et démonstrations concernant le point 3.

Soit  $f$  un morphisme de treillis distributifs et  $\text{Spec}(f)$ , noté  $f^*$ , le morphisme associé dans la catégorie des espaces spectraux. On a les équivalences suivantes.

1.  $f$  est injectif  $\Leftrightarrow f$  est un monomorphisme  $\Leftrightarrow f^*$  est un épimorphisme  $\Leftrightarrow f^*$  est surjectif
2.  $f$  est un épimorphisme  $\Leftrightarrow f^*$  est un monomorphisme  $\Leftrightarrow f^*$  est injectif
3.  $f$  est surjectif<sup>2</sup>  $\Leftrightarrow f^*$  est un isomorphisme sur son image, qui est un sous-espace spectral de  $\text{Spec}(T)$

Il peut cependant y avoir des épimorphismes de treillis distributifs non surjectifs (voir [1, section V-8]). Cela correspond à la possibilité d'un morphisme bijectif entre espaces spectraux qui ne soit pas un isomorphisme. Par exemple le morphisme spectral bijectif  $\text{Spec } \mathbf{T}^{\text{bool}} \rightarrow \text{Spec } \mathbf{T}$  n'est pas (en général) un isomorphisme et le morphisme de treillis  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}^{\text{bool}}$  est un «épimono» qui n'est pas (en général) surjectif.

2. Autrement dit, puisque c'est une structure équationnelle,  $f$  est un morphisme de passage au quotient.



### Caractérisation des sous-espaces spectraux

Nous commençons par un lemme facile, qui caractérise les points de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  qui «sont des éléments de  $\text{Spec } \mathbf{T}'$ » lorsque  $\mathbf{T}'$  est un quotient de  $\mathbf{T}$ .

**Lemme 2.1** *Soit  $\mathbf{T}'$  un treillis quotient de  $\mathbf{T}$  et  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  la projection canonique. Notons  $X = \text{Spec } \mathbf{T}'$ ,  $Y = \text{Spec } \mathbf{T}$  et  $\pi^* : X \rightarrow Y$  l'injection duale de  $\pi$ . Rappelons que pour un idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $\mathbf{T}$  nous notons  $\theta_{\mathfrak{p}} : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{2}$  l'homomorphisme correspondant de noyau  $\mathfrak{p}$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\mathfrak{p} \in \pi^*(\text{Spec } \mathbf{T}')$ .
- $\theta_{\mathfrak{p}}$  se factorise par  $\mathbf{T}'$ .
- $\forall a, b \in \mathbf{T} ((a \preceq b, b \in \mathfrak{p}) \Rightarrow a \in \mathfrak{p})$ .

*Cela peut se reformuler comme suit. Si le treillis quotient  $\mathbf{T}'$  est défini par un système  $R$  de relations  $x_i = y_i$ , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- $\mathfrak{p} \in \pi^*(\text{Spec } \mathbf{T}')$ .
- $\theta_{\mathfrak{p}}$  «réalise un modèle de  $R$ », c'est-à-dire  $\forall i \theta_{\mathfrak{p}}(x_i) = \theta_{\mathfrak{p}}(y_i)$ .
- $\forall i (x_i \in \mathfrak{p} \Leftrightarrow y_i \in \mathfrak{p})$ .

Dans le théorème suivant nous identifions  $\text{Spec } \mathbf{T}'$  à une partie de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  au moyen de l'injection  $\pi^*$ . Des résultats analogues énoncés dans un langage un peu différent se trouvent dans [13, section 3]<sup>3</sup>.

**Théorème 2.2** (définition et caractérisations des sous-espaces spectraux)

1. Avec les notations du lemme 2.1,  $X$  est un sous-espace topologique de  $Y$ . En outre  $\text{Oqc}(X) = \{U \cap X \mid U \in \text{Oqc}(Y)\}$ . On dit que  $X$  est un sous-espace spectral de  $Y$ .
2. Pour qu'une partie  $X$  d'un espace spectral  $Y$  soit un sous-espace spectral il faut et suffit que les conditions suivantes soient vérifiées :
  - La topologie induite par  $Y$  fait de  $X$  un espace spectral, et
  - $\text{Oqc}(X) = \{U \cap X \mid U \in \text{Oqc}(Y)\}$ .
3. Une partie  $X$  d'un espace spectral  $Y$  est un sous-espace spectral si et seulement si elle est fermée pour la topologie constructible.
4. Si  $Z$  est une partie arbitraire d'un espace spectral  $Y = \text{Spec } \mathbf{T}$  son adhérence pour la topologie constructible est égale à  $X = \text{Spec } \mathbf{T}'$  où  $\mathbf{T}'$  est le treillis quotient de  $\mathbf{T}$  défini par la relation de préordre  $\preceq$  suivante :

$$a \preceq b \iff (D_{\mathbf{T}}(a) \cap Z) \subseteq (D_{\mathbf{T}}(b) \cap Z) \quad (18)$$

En outre,  $X$  est le plus petit sous-espace spectral de  $Y$  contenant  $Z$ .

*Démonstration.*

Le point 1 est facile, et définit la notion de sous-espace spectral. Le point 2 en résulte. Le point 3 résulte des points 2 et 4. Montrons le point 4.

Remarquons tout d'abord que la relation (18) définit bien un treillis quotient  $\mathbf{T}'$  car les relations (11) sont trivialement vérifiées si on tient compte des relations (17).

Montrons que  $X = \text{Spec } \mathbf{T}'$  est le plus petit sous-espace spectral de  $Y$  contenant  $Z$ .

Tout d'abord  $Z \subseteq X$  : soit  $\mathfrak{p} \in Z$ , nous voulons montrer que si  $b \in \mathfrak{p}$  et  $a \preceq b$  alors  $a \in \mathfrak{p}$ . Si  $D_{\mathbf{T}}(a) \cap Z \subseteq D_{\mathbf{T}}(b)$  et  $b \in \mathfrak{p}$  alors  $\mathfrak{p} \notin D_{\mathbf{T}}(b)$  donc  $\mathfrak{p} \notin D_{\mathbf{T}}(a) \cap Z$  donc  $\mathfrak{p} \notin D_{\mathbf{T}}(a)$  c'est-à-dire  $a \in \mathfrak{p}$ . Par ailleurs  $X$  est minimal. En effet si  $X_1 = \text{Spec } \mathbf{T}_1$  est un sous-espace spectral de  $Y$  contenant  $Z$ , on a  $a \preceq_{\mathbf{T}_1} b \Leftrightarrow (D_{\mathbf{T}}(a) \cap X_1) \subseteq (D_{\mathbf{T}}(b) \cap X_1)$  ce qui implique  $(D_{\mathbf{T}}(a) \cap Z) \subseteq (D_{\mathbf{T}}(b) \cap Z)$  et donc  $a \preceq_{\mathbf{T}'} b$ , d'où  $X \subseteq X_1$ .

Il reste à montrer que  $X$  est l'adhérence de  $Z$  pour la topologie constructible. Notons  $\tilde{Z}$  cette adhérence. Nous voulons donc démontrer pour tout  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbf{T}$  l'équivalence des deux propriétés suivantes :

3. Escardó écrit son article dans le langage des locales. Il parle de patch-topology plutôt que de topologie constructible. Si  $Y = \text{Spec } \mathbf{T}$ , il note  $\text{Patch } Y$  pour l'espace de Stone  $\text{Spec } \mathbf{T}^{\text{bool}}$ .

- (1)  $\mathfrak{p} \in \tilde{Z}$ , c'est-à-dire :  $\forall a, b \in \mathbf{T}, (\mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \Rightarrow D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \cap Z \neq \emptyset)$ ,  
(2)  $\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbf{T}'$ .

Or (2) équivaut successivement à

$$\forall a, b \in \mathbf{T} ((a \preceq b, b \in \mathfrak{p}) \Rightarrow a \in \mathfrak{p}) \quad (3)$$

$$\forall a, b \in \mathbf{T} (a \preceq b, b \in \mathfrak{p}, a \notin \mathfrak{p}) \text{ sont incompatibles} \quad (4)$$

$$\forall a, b \in \mathbf{T} D_{\mathbf{T}}(a) \cap Z \subseteq D_{\mathbf{T}}(b) \text{ et } \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \text{ sont incompatibles} \quad (5)$$

$$\forall a, b \in \mathbf{T} D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \cap Z = \emptyset \text{ et } \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \text{ sont incompatibles} \quad (6)$$

et (6) est clairement équivalent à (1).  $\square$

**Corollaire 2.3** *Toute réunion finie et toute intersection de sous-espaces spectraux de  $X = \text{Spec } \mathbf{T}$  est un sous-espace spectral.*

- Si  $X_i = \text{Spec } \mathbf{T}_i$  pour un quotient  $\pi_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_i$  alors  $\bigcap_i X_i$  correspond au quotient engendré par toutes les relations  $\pi_i(x) = \pi_i(y)$ .
- Si la famille est finie alors  $\bigcup_i X_i$  correspond au quotient par la relation  $\&_i(\pi_i(x) = \pi_i(y))$ .

**Proposition 2.4** (Ouverts et fermés de base)

1.  $D_{\mathbf{T}}(a)$  est un sous-espace spectral de  $X$  canoniquement homéomorphe à  $\text{Spec}(\mathbf{T}/(a = 1))$ .
2.  $V_{\mathbf{T}}(b)$  est un sous-espace spectral de  $X$  canoniquement homéomorphe à  $\text{Spec}(\mathbf{T}/(b = 0))$ .

*Démonstration.*

Soit  $x \preceq y$  l'ordre partiel correspondant au sous-espace spectral  $D_{\mathbf{T}}(a)$ . On a donc :

$$x \preceq y \Leftrightarrow D_{\mathbf{T}}(x) \cap D_{\mathbf{T}}(a) \subseteq D_{\mathbf{T}}(y) \cap D_{\mathbf{T}}(a) \Leftrightarrow D_{\mathbf{T}}(x \wedge a) \subseteq D_{\mathbf{T}}(y \wedge a) \Leftrightarrow x \wedge a \leq y \wedge a$$

et ceci est bien la relation de préordre correspondant au quotient  $\text{Spec}(\mathbf{T}/(a = 1))$ .

Soit maintenant  $x \preceq' y$  l'ordre partiel correspondant au sous-espace spectral  $V_{\mathbf{T}}(b)$ . On a :

$$\begin{aligned} x \preceq' y &\iff D_{\mathbf{T}}(x) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \subseteq D_{\mathbf{T}}(y) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \iff D_{\mathbf{T}}(x) \cup D_{\mathbf{T}}(b) \subseteq D_{\mathbf{T}}(y) \cup D_{\mathbf{T}}(b) \\ &\iff D_{\mathbf{T}}(x \vee b) \subseteq D_{\mathbf{T}}(y \vee b) \iff x \vee b \leq y \vee b \end{aligned}$$

et ceci est bien la relation de préordre correspondant au quotient  $\text{Spec}(\mathbf{T}/(b = 0))$ .  $\square$

### Fermés de $\text{Spec } \mathbf{T}$

Dans ce paragraphe  $\mathbf{T}$  est un treillis distributif fixé et  $X = \text{Spec } \mathbf{T}$ . Si  $Z \subseteq X$  on notera  $\overline{Z}$  l'adhérence de  $Z$  pour la topologie usuelle de  $X$ .

**Proposition 2.5** (Fermés de  $\text{Spec } \mathbf{T}$ )

1. Un fermé arbitraire de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  est de la forme  $V_{\mathbf{T}}(\mathfrak{J}) = \bigcap_{x \in \mathfrak{J}} V_{\mathbf{T}}(x)$  où  $\mathfrak{J}$  est un idéal arbitraire de  $\mathbf{T}$ . C'est un sous-espace spectral et il correspond au quotient  $\mathbf{T}/(\mathfrak{J} = 0)$ .
2. L'intersection d'une famille de fermés correspond au sup de la famille d'idéaux. La réunion de deux fermés correspond à l'intersection des deux idéaux.
3. Le treillis  $\mathbf{T}/((a : b) = 0)$  est le quotient correspondant à  $\overline{V_{\mathbf{T}}(a) \cap D_{\mathbf{T}}(b)}$ .
4. Donc  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Heyting si et seulement si  $X$  vérifie la propriété suivante : pour tous ouverts quasi-compacts  $U_1$  et  $U_2$ , l'adhérence de  $U_1 \setminus U_2$  est le complémentaire d'un ouvert quasi-compact.
5. À l'adhérence de  $D_{\mathbf{T}}(x)$  correspond le quotient  $\mathbf{T}/((0 : x) = 0)$ .
6. Donc à la frontière de  $D_{\mathbf{T}}(x)$  correspond le quotient  $\mathbf{T}_K^x = \mathbf{T}/(\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^x = 0)$ , où

$$\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^x = \downarrow x \vee (0 : x) \quad (19)$$

Le treillis  $\mathbf{T}_K^x$  sera appelé le bord supérieur (de Krull) de  $x$  dans  $\mathbf{T}$ . On dira aussi que  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^x$  est l'idéal bord de Krull de  $x$  dans  $\mathbf{T}$ .

Lorsque  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Heyting,  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^x = \downarrow (x \vee \neg x)$  et  $\mathbf{T}_K^x \simeq \uparrow (x \vee \neg x)$  avec l'homomorphisme surjectif  $\pi_K^x : \left| \begin{array}{l} \mathbf{T} \rightarrow \uparrow (x \vee \neg x) \\ y \mapsto y \vee x \vee \neg x \end{array} \right.$

*Démonstration.*

Pour le seul point délicat (le point 3), on dit : puisque  $(a : b) = \{x \mid x \wedge b \leq a\}$ , la variété associée  $V_{\mathbf{T}}(a : b)$  est l'intersection des  $V_{\mathbf{T}}(x)$  tels que  $V_{\mathbf{T}}(a) \subseteq V_{\mathbf{T}}(x) \cup V_{\mathbf{T}}(b)$ , c'est-à-dire encore tels que  $V_{\mathbf{T}}(a) \cap D_{\mathbf{T}}(b) \subseteq V_{\mathbf{T}}(x)$ . Or tout fermé de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  est une intersection de fermés de base  $V_{\mathbf{T}}(x)$ , donc on obtient bien l'adhérence de  $V_{\mathbf{T}}(a) \cap D_{\mathbf{T}}(b)$ .  $\square$

*Remarques.*

- 1) On notera qu'un ouvert arbitraire de  $X$  n'est pas en général un sous-espace spectral.
- 2) La définition que nous avons donnée pour le treillis bord  $\mathbf{T}_K^x$  est constructive car elle ne nécessite pas que l'espace  $\text{Spec } \mathbf{T}$  ait suffisamment de points. Elle est motivée par l'interprétation qu'on donne de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  en mathématiques classiques.

Le lemme suivant permet de mieux cerner l'idéal bord de Krull de  $x$  dans  $\mathbf{T}$ .

**Lemme 2.6** *Pour tout  $x \in \mathbf{T}$  l'idéal  $\mathfrak{j}$  bord de Krull de  $x$  dans  $\mathbf{T}$  est régulier, c'est-à-dire « son annulateur est réduit à 0 » :  $0 : \mathfrak{j} = 0$ .*

*Démonstration.*

Soit  $u \in (0 : \mathfrak{j})$ . Puisque  $\mathfrak{j} = \downarrow x \vee (0 : x)$  on a  $u \wedge x = 0$  et, pour tout  $z \in (0 : x)$ ,  $u \wedge z = 0$ . En particulier  $u \wedge u = 0$ .  $\square$

Notez que dans le cas d'une algèbre de Heyting il ne s'agit de rien d'autre que de la loi découverte par Brouwer :  $\neg(x \vee \neg x) = 0$ .

La proposition qui suit est la version duale, constructive, «sans points» du fait topologique suivant : si  $A$  et  $B$  sont fermés, la réunion des bords de  $A \cup B$  et de  $A \cap B$  est égale à celle des bords de  $A$  et  $B$ .

**Proposition 2.7** *Pour tous  $x, y \in \mathbf{T}$  on a :  $K_{\mathbf{T}}^x \cap K_{\mathbf{T}}^y = K_{\mathbf{T}}^{x \vee y} \cap K_{\mathbf{T}}^{x \wedge y}$ .*

*Démonstration.*

Soit  $z \in K_{\mathbf{T}}^x \cap K_{\mathbf{T}}^y$ , autrement dit il existe  $u$  et  $v$  tels que  $z \leq x \vee u$  et  $u \wedge x = 0$ ,  $z \leq y \vee v$  et  $v \wedge y = 0$ . Alors  $z \leq (x \vee (u \vee v)) \wedge (y \vee (u \vee v)) = (x \wedge y) \vee (u \vee v)$  avec  $(u \vee v) \wedge (x \wedge y) = (u \wedge (x \wedge y)) \vee (v \wedge (x \wedge y)) = 0 \vee 0 = 0$  donc  $z \in K_{\mathbf{T}}^{x \wedge y}$ .

De même  $z \leq (x \vee y) \vee (u \wedge v)$  avec  $(u \wedge v) \wedge (x \vee y) = 0$  donc  $z \in K_{\mathbf{T}}^{x \vee y}$ .

Enfin supposons  $z \in K_{\mathbf{T}}^{x \vee y} \cap K_{\mathbf{T}}^{x \wedge y}$ , autrement dit il existe  $u$  et  $v$  tels que  $z \leq x \vee y \vee u$  et  $u \wedge (x \vee y) = 0$ ,  $z \leq (x \wedge y) \vee v$  et  $v \wedge x \wedge y = 0$ . Soit  $u_1 = (y \vee u) \wedge v$ . On a  $z \leq (x \wedge y) \vee v \leq x \vee v$  et  $z \leq x \vee (y \vee u)$  donc  $z \leq x \vee u_1$ . Par ailleurs  $x \wedge u_1 = x \wedge (y \vee u) \wedge v \leq x \wedge y \wedge v = 0$  et donc  $z \in K_{\mathbf{T}}^x$ .  $\square$

## Fermés de $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$

Rappelons que la notion opposée à l'idéal  $a : b$  est le filtre  $a \setminus b \stackrel{\text{def}}{=} \{z \mid z \vee b \geq a\}$ .

Introduisons aussi la notation suivante, pour  $F \subseteq \mathbf{T}$  :  $D_{\mathbf{T}}(F) = \bigcap_{a \in \mathfrak{F}} D_{\mathbf{T}}(a)$ . Si  $\mathfrak{F}$  est le filtre engendré par  $F$ , on a  $D_{\mathbf{T}}(F) = D_{\mathbf{T}}(\mathfrak{F})$ .

La proposition suivante découle de la proposition 2.5 par renversement de l'ordre (on n'a réécrit que les points 1 et 6) modulo l'identification des ensembles sous-jacents à  $\text{Spec } \mathbf{T}$  et  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$ .

**Proposition 2.8** (Fermés de  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$ )

1. Un fermé arbitraire de  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$  est de la forme  $\bigcap_{x \in \mathfrak{F}} D_{\mathbf{T}}(x)$  où  $\mathfrak{F}$  est un filtre arbitraire de  $\mathbf{T}$ . C'est le sous-espace spectral qui correspond au quotient  $\mathbf{T}/(\mathfrak{F} = 1)$ .
2. On définit le quotient  $\mathbf{T}_x^K = \mathbf{T}/(K_x^{\mathbf{T}} = 1)$ , où  $K_x^{\mathbf{T}}$  est le filtre

$$K_x^{\mathbf{T}} = \uparrow x \wedge (1 \setminus x) \quad (20)$$

Le treillis  $\mathbf{T}_x^K$  sera appelé le bord inférieur (de Krull) de  $x$  dans  $\mathbf{T}$ . On dira aussi que  $K_x^{\mathbf{T}}$  est le filtre bord de Krull de  $x$ .

Lorsque  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Brouwer,  $K_x^{\mathbf{T}} = \uparrow(x \wedge (1 - x))$  et  $\mathbf{T}_x^K \simeq \downarrow(x \wedge (1 - x))$  avec

$$\text{l'homomorphisme surjectif } \pi_x^K : \begin{array}{l} \mathbf{T} \rightarrow \downarrow (x \wedge (1-x)) \\ y \mapsto y \wedge x \wedge (1-x) \end{array} .$$

Le quotient  $\mathbf{T}_x^K$  correspond à la frontière de  $D_{\mathbf{T}}(x)$  pour la topologie de  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$ <sup>4</sup>.

### Recollement d'espaces spectraux

Comme la théorie des treillis distributifs est purement équationnelle, la catégorie possède des limites inductives et projectives arbitraires. Il en va donc de même dans la catégorie antiéquivalente des espaces spectraux (et morphismes spectraux). Dans certains cas ces limites correspondent à celles obtenues dans la catégorie des espaces topologiques (et applications continues).

Voici ce que donne par dualité la proposition 1.9 (on laisse au lecteur la traduction du fait 1.7).

**Proposition 2.9** (Recollement d'une famille finie d'espaces spectraux le long d'ouverts quasi-compacts)

1. Soit  $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille finie d'espaces spectraux, et pour chaque  $i \neq j$  un ouvert quasi-compact  $X_{ij}$  de  $X_i$  avec un isomorphisme  $\varphi_{ij} : X_{ij} \rightarrow X_{ji}$ . Si les relations de compatibilité naturelles sont vérifiées, la limite inductive du diagramme dans la catégorie des espaces spectraux est un espace  $X$  pour lequel chacun des  $X_i$  s'identifie à un ouvert quasi-compact.
2. En remplaçant « ouvert quasi-compact » par « fermé de base » le résultat analogue est également valable.

Notez que  $X$  est aussi la limite inductive des  $X_i$  dans la catégorie des espaces topologiques.

## 2.3 Spectre maximal et spectre de Heitmann

Dans un article remarquable [22] R. Heitmann explique que la notion usuelle de  $j$ -spectrum pour un anneau commutatif n'est pas la bonne dans le cas non noethérien car elle ne correspond pas à un espace spectral au sens de Stone. Il introduit la modification suivante de la définition usuelle : au lieu de considérer l'ensemble des idéaux premiers qui sont intersections d'idéaux maximaux il propose de considérer l'adhérence du spectre maximal dans le spectre premier, adhérence à prendre au sens de la topologie constructible (la « patch topology »).

**Définitions 2.10** Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif.

1. On note  $\text{Max } \mathbf{T}$  le sous-espace topologique de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  formé par les idéaux maximaux de  $\mathbf{T}$ . On l'appelle le spectre maximal de  $\mathbf{T}$ .
2. On note  $\text{jspec } \mathbf{T}$  le sous-espace topologique de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  formé par les  $\mathfrak{p}$  qui vérifient l'égalité  $J_{\mathbf{T}}(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$ , c'est-à-dire les idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  qui sont intersections d'idéaux maximaux (c'est le  $j$ -spectrum « usuel »).
3. On appelle  $J$ -spectre de Heitmann de  $\mathbf{T}$  et on note  $\text{Jspec } \mathbf{T}$  l'adhérence du spectre maximal dans  $\text{Spec } \mathbf{T}$ , adhérence à prendre au sens de la topologie constructible. Cet ensemble est muni de la topologie induite par  $\text{Spec } \mathbf{T}$ .
4. On note  $\text{Min } \mathbf{T}$  le sous-espace topologique de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  formé par les idéaux premiers minimaux de  $\mathbf{T}$ . On l'appelle le spectre minimal de  $\mathbf{T}$ .

Notez que malgré leurs dénominations,  $\text{Max } \mathbf{T}$ ,  $\text{jspec } \mathbf{T}$  et  $\text{Min } \mathbf{T}$  ne sont pas en général des espaces spectraux.

**Théorème 2.11** Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif. L'espace  $\text{Jspec } \mathbf{T}$  est un sous-espace spectral de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  canoniquement homéomorphe à  $\text{Spec He}(\mathbf{T})$ . Plus précisément, si  $M$  est l'ensemble des idéaux maximaux dans  $\text{Spec } \mathbf{T}$ , pour  $a, b \in \mathbf{T}$  on a :

$$D_{\mathbf{T}}(a) \cap M \subseteq D_{\mathbf{T}}(b) \cap M \iff a \preceq_{\text{He}(\mathbf{T})} b. \quad (21)$$

4. Il s'agit de la notion « opposée » à celle de frontière. L'intersection des adhérences de  $D_{\mathbf{T}}(x)$  et  $V_{\mathbf{T}}(x)$  est remplacée par la réunion de leurs intérieurs. Dans  $\text{Spec } \mathbf{T}$ , c'est donc le complémentaire de la frontière de  $D_{\mathbf{T}}(x)$ .

*Démonstration.*

Le treillis  $\text{He}(\mathbf{T})$  a été défini page 9.

La deuxième affirmation implique la première. En effet  $\text{Jspec } \mathbf{T}$ , d'après le théorème 2.2 (4), est le spectre du treillis quotient  $\mathbf{T}'$  correspondant à la relation de préordre  $a \leq_{\mathbf{T}'} b$  définie par  $D_{\mathbf{T}}(a) \cap M \subseteq D_{\mathbf{T}}(b) \cap M$ .

Pour le deuxième point on remarque que les propriétés suivantes sont équivalentes :

$$D_{\mathbf{T}}(a) \cap M \subseteq D_{\mathbf{T}}(b) \cap M \quad (1)$$

$$D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) \cap M = \emptyset \quad (2)$$

$$\forall \mathfrak{m} \in M \ (b \notin \mathfrak{m} \text{ ou } a \in \mathfrak{m}) \quad (3)$$

$$\forall \mathfrak{m} \in M \ (b \in \mathfrak{m} \Rightarrow a \in \mathfrak{m}) \quad (4)$$

Et l'assertion (4) revient à dire que, vu dans le treillis quotient  $\mathbf{T}/(b=0)$ ,  $a$  appartient au radical de Jacobson. Cela signifie  $a \in J_{\mathbf{T}}(b)$ , c'est-à-dire  $a \preceq_{\text{He}(\mathbf{T})} b$ .  $\square$

Quelques points de comparaison.

### Fait 2.12

1.  $\text{Spec } \mathbf{T} = \text{Jspec } \mathbf{T}$  si et seulement si  $\mathbf{T} = \text{He}(\mathbf{T})$ , c'est-à-dire si  $\mathbf{T}$  est faiblement Jacobson.
2.  $\text{Max } \mathbf{T} = \text{Jspec } \mathbf{T}$  si et seulement si  $\text{He}(\mathbf{T})$  est une algèbre de Boole.
3. Si  $\mathbf{T}$  possède un complément de Brouwer,  $\text{Max } \mathbf{T}$  est un fermé de  $\text{Spec } \mathbf{T}$ , correspondant à l'idéal  $I_{\text{max}}(\mathbf{T})$ . C'est un espace de Stone, il est égal à  $\text{Jspec } \mathbf{T}$ .
4.  $\text{Min } \mathbf{T} = \text{Jspec } \mathbf{T}^\circ$  si et seulement si  $\text{He}(\mathbf{T}^\circ)$  est une algèbre de Boole.
5. Si  $\mathbf{T}$  possède une négation,  $\text{Min } \mathbf{T}$  est un fermé de  $\text{Spec } \mathbf{T}^\circ$ , correspondant au filtre  $F_{\text{min}}(\mathbf{T})$ . C'est un espace de Stone, il est égal à  $\text{Jspec } \mathbf{T}^\circ$ .

*Démonstration.*

Le point 1 résulte du théorème 2.11. Pour le point 2, (on est en mathématiques classiques) on remarque qu'un treillis distributif est une algèbre de Boole si et seulement si ses idéaux premiers sont tous maximaux. Le point 3 résulte du point 2 et du fait 1.18. Les points 4 et 5 s'obtiennent à partir des points 2 et 3 en passant au treillis opposé.  $\square$

La proposition suivante est signalée par Heitmann dans [22].

### Proposition 2.13 (comparaison de $\text{Jspec}$ et de $\text{jspec}$ )

- On a toujours  $\text{jspec } \mathbf{T} \subseteq \text{Jspec } \mathbf{T}$ .
- Si  $\text{jspec } \mathbf{T}$  est noethérien,  $\text{jspec } \mathbf{T} = \text{Jspec } \mathbf{T}$ .

*Démonstration.*

On note  $M \subseteq \text{Spec } \mathbf{T}$  l'ensemble des idéaux maximaux. On considère un  $\mathfrak{p}$  fixé dans  $\text{Spec } \mathbf{T}$ . Tout d'abord les propriétés suivantes sont successivement équivalentes

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p} \in \text{jspec } \mathbf{T} \\ \forall a \in \mathbf{T} \quad [ \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) & \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \in (M \cap D_{\mathbf{T}}(a)), \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} ] \\ \forall a \in \mathbf{T} \quad [ \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) & \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \in M \cap D_{\mathbf{T}}(a) \cap \overline{\{\mathfrak{p}\}} ] \\ \forall a \in \mathbf{T} \quad [ \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) & \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \in (M \cap D_{\mathbf{T}}(a)), \forall b \in \mathbf{T} (\mathfrak{m} \in D_{\mathbf{T}}(b) \Rightarrow \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(b)) ] \\ \forall a \in \mathbf{T} \quad [ \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) & \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \in (M \cap D_{\mathbf{T}}(a)), \forall b \in \mathbf{T} (\mathfrak{p} \in V_{\mathbf{T}}(b) \Rightarrow \mathfrak{m} \in V_{\mathbf{T}}(b)) ] \\ \forall a \in \mathbf{T} \quad [ \mathfrak{p} \in D_{\mathbf{T}}(a) & \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \in M, \forall b \in \mathbf{T} (\mathfrak{p} \in V_{\mathbf{T}}(b) \Rightarrow \mathfrak{m} \in M \cap D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b)) ] \quad (*) \end{aligned}$$

De même sont équivalentes :

$$\begin{aligned} & \mathfrak{p} \in \text{Jspec } \mathbf{T} \\ \forall a, b \in \mathbf{T} \quad [ \mathfrak{p} \in (D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b)) & \Rightarrow \exists \mathfrak{m} \in M \cap D_{\mathbf{T}}(a) \cap V_{\mathbf{T}}(b) ] \quad (**) \end{aligned}$$

Ainsi on voit que (\*) est plus fort que (\*\*), puisque dans (\*\*),  $\mathfrak{m}$  peut dépendre de  $a$  et  $b$  tandis que dans (\*) il ne doit dépendre que de  $a$ .

Si  $Z = \text{jspec } \mathbf{T}$  est noethérien l'intersection  $\bigcap_{V_{\mathbf{T}}(b) \ni \mathfrak{p}} (Z \cap V_{\mathbf{T}}(b))$  est égale à un seul  $Z \cap V_{\mathbf{T}}(b_0)$  et (\*\*\*) avec ce  $b_0$  donne (\*).  $\square$

*Commentaire.* Comme le fait remarquer Heitmann, les théorèmes connus utilisant le  $\text{jspec}$  le font toujours sous l'hypothèse « $\text{jspec}$  noethérien». Il est donc probable que le  $\text{Jspec}$  soit la seule notion vraiment intéressante. Notez que  $\text{jspec } \mathbf{T}$  n'est un sous-espace spectral de  $\text{Spec } \mathbf{T}$  que lorsqu'il est égal à  $\text{Jspec } \mathbf{T}$ .

### 3 Dimensions de Krull et de Heitmann pour un treillis distributif

Nous arrivons dans cette section au coeur de l'article. Nous reprenons le point de vue des mathématiques constructives. Les seules preuves non constructives sont celles qui font le lien entre une notion classique et sa reformulation constructive.

#### 3.1 Dimension de Krull des treillis distributifs

En mathématiques classiques la *dimension de Krull* d'un treillis distributif est définie comme en algèbre commutative : c'est la borne supérieure des longueurs des chaînes strictement croissantes d'idéaux premiers.

Nous rappelons maintenant une version constructive élémentaire de la dimension de Krull ([5, 7]) en nous appuyant sur l'intuition suivante : une variété est de dimension  $\leq k$  si et seulement si le bord de toute sous variété est de dimension  $\leq k - 1$ .

Le théorème suivant en mathématiques classiques nous donne une bonne signification intuitive de la dimension de Krull dans un treillis distributif.

**Théorème 3.1** *Soit un treillis distributif  $\mathbf{T}$  engendré par une partie  $S$  et  $\ell$  un entier positif ou nul. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. Le treillis  $\mathbf{T}$  est de dimension  $\leq \ell$ .
2. Pour tout  $x \in S$  le bord  $\mathbf{T}_K^x$  est de dimension  $\leq \ell - 1$ .
3. Pour tout  $x \in S$  le bord  $\mathbf{T}_x^K$  est de dimension  $\leq \ell - 1$ .
4. Pour tous  $x_0, \dots, x_\ell \in S$  il existe  $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$  vérifiant :

$$a_0 \wedge x_0 \leq 0, \quad a_1 \wedge x_1 \leq a_0 \vee x_0, \dots, \quad a_\ell \wedge x_\ell \leq a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1}, \quad 1 \leq a_\ell \vee x_\ell. \quad (22)$$

Lorsque  $\mathbf{T}$  une algèbre de Heyting les conditions précédentes sont aussi équivalentes à

5. Pour toute suite  $x_0, \dots, x_\ell$  dans  $S$  on a l'égalité

$$1 = x_\ell \vee (x_\ell \rightarrow (\dots (x_1 \vee (x_1 \rightarrow (x_0 \vee \neg x_0))) \dots)) \quad (23)$$

Lorsque  $\mathbf{T}$  une algèbre de Brouwer les conditions précédentes sont aussi équivalentes à

6. Pour toute suite  $x_0, \dots, x_\ell$  dans  $S$  on a l'égalité

$$0 = x_0 \wedge (x_0 - (x_1 \wedge (x_1 - (\dots (x_\ell \wedge (1 - x_\ell)))) \dots)) \quad (24)$$

En particulier un treillis est de dimension  $\leq 0$  si et seulement si c'est une algèbre de Boole.

L'équivalence entre 1, 4 et 5 avait été établie précédemment dans [5], en poursuivant la problématique d'André Joyal [25, 26] et Luis Español [14, 15, 16, 17, 18]. Citons aussi l'article récent de Luis Español sur le sujet [19].

On notera aussi que la théorie des algèbres de Heyting de dimension  $\leq k$  est une théorie équationnelle.

*Démonstration du théorème 3.1.*

On commence par noter que le quotient  $\mathbf{T}_K^x = \mathbf{T}/K_{\mathbf{T}}^x$  peut aussi être vu comme l'ensemble ordonné obtenu à partir de la relation de préordre  $\leq^x$  définie sur  $\mathbf{T}$  comme suit :

$$a \leq^x b \iff \exists y \in \mathbf{T} (x \wedge y = 0 \ \& \ a \leq x \vee y \vee b) \quad (25)$$

$1 \Leftrightarrow 2$  : Nous montrons tout d'abord que tout filtre maximal  $\mathfrak{f}$  de  $\mathbf{T}$  devient trivial dans  $\mathbf{T}_K^x$ , c'est-à-dire qu'il contient 0. Autrement dit on doit trouver  $a$  dans  $\mathfrak{f}$  tel que  $a \leq^x 0$ . Si  $x \in \mathfrak{f}$  alors on prend  $a = x$  et  $y = 0$  dans (25). Si  $x \notin \mathfrak{f}$  il existe  $z \in \mathfrak{f}$  tel que  $x \wedge z = 0$  (puisque le filtre engendré par  $\mathfrak{f}$  et  $x$  est trivial dans  $\mathbf{T}$ ) et on prend  $a = y = z$  dans (25). Ceci montre que la dimension de  $\mathbf{T}_K^x$  chute de au moins une unité par rapport à celle de  $\mathbf{T}$  (supposée finie).

Ensuite nous montrons que si on a deux filtres premiers  $\mathfrak{f}' \subset \mathfrak{f}$ ,  $\mathfrak{f}$  maximal et  $x \in \mathfrak{f} \setminus \mathfrak{f}'$  alors  $\mathfrak{f}'$  ne devient pas trivial dans  $\mathbf{T}_K^x$  (ceci montre que la dimension de  $\mathbf{T}_K^x$  chute de seulement une unité si  $x$  est bien choisi). En effet, dans le cas contraire, on aurait un  $z \in \mathfrak{f}'$  tel que  $z \wedge x = 0$ , mais comme  $z$  et  $x \in \mathfrak{f}$  cela ferait  $0 \in \mathfrak{f}$ , ce qui est absurde.

Enfin nous remarquons que si  $\mathfrak{f}' \subset \mathfrak{f}$  sont des filtres premiers distincts et si  $S$  engendre  $\mathbf{T}$  on peut trouver  $x \in S$  tel que  $x \in \mathfrak{f} \setminus \mathfrak{f}'$ .

$1 \Leftrightarrow 3$  : conséquence de  $1 \Leftrightarrow 2$  par renversement de l'ordre.

$2 \Leftrightarrow 4$  : par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord.

$2 \Leftrightarrow 5$  : par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord dans le cas d'une algèbre de Heyting.

$3 \Leftrightarrow 6$  : par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord dans le cas d'une algèbre de Brouwer.  $\square$

On a montré (en mathématiques classiques) que si  $X$  est le spectre d'un treillis distributif  $\mathbf{T}$  et  $x \in \mathbf{T}$ , alors la *frontière* de l'ouvert quasi-compact  $D_{\mathbf{T}}(x)$  de  $X$  est (canoniquement isomorphe à)  $\text{Spec}(\mathbf{T}_K^x)$ . On obtient ainsi comme corollaire du théorème 3.1 le théorème suivant concernant la dimension des espaces spectraux (c'est-à-dire la longueur maximale des chaînes de fermés irréductibles, ou encore la longueur maximale des chaînes de points pour la relation  $\mathfrak{p} \leq_X \mathfrak{q}$ ). Rappelons que l'unique espace spectral de dimension  $-1$  est le vide.

**Théorème 3.2** *Soit  $k$  un entier  $\geq 0$ . Un espace spectral  $X$  est de dimension  $\leq k$  si et seulement si tout ouvert quasi-compact de  $X$  a une frontière (un bord) de dimension  $\leq k - 1$ .*

Concernant la dimension de Krull, on choisit en mathématiques constructives la définition suivante :

**Définition 3.3** (définition constructive de la dimension de Krull)

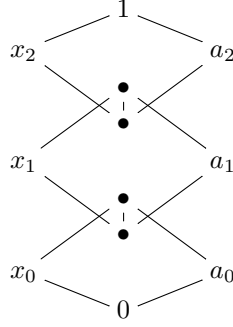
*La dimension de Krull (notée  $\text{Kdim}$ ) des treillis distributifs est définie comme suit :*

1.  $\text{Kdim}(\mathbf{T}) = -1$  si et seulement si  $1 =_{\mathbf{T}} 0$  (i.e. le treillis est réduit à un point).
2. Pour  $\ell \geq 0$  on définit  $\text{Kdim}(\mathbf{T}) \leq \ell$  par les conditions équivalentes suivantes :
  - (a)  $\forall x \in \mathbf{T}, \text{Kdim}(\mathbf{T}_K^x) \leq \ell - 1$
  - (b)  $\forall x \in \mathbf{T}, \text{Kdim}(\mathbf{T}_x^K) \leq \ell - 1$
  - (c)  $\forall x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{T} \exists a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$  vérifiant :

$$a_0 \wedge x_0 \leq 0, \quad a_1 \wedge x_1 \leq a_0 \vee x_0, \dots, \quad a_\ell \wedge x_\ell \leq a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1}, \quad 1 \leq a_\ell \vee x_\ell.$$

Notez qu'il y a en fait trois définitions possibles ci-dessus pour  $\text{Kdim}(\mathbf{T}) \leq \ell$ . Les définitions basées sur 2a et 2b sont inductives, tandis que la définition basée sur 2c est globale. L'équivalence des définitions basées sur 2a et 2c est immédiate par induction (même chose pour 2b et 2c).

Par exemple, pour  $\ell = 2$  les inégalités dans le point 2c correspondent au dessin suivant dans  $\mathbf{T}$ .



*Remarque.* On peut illustrer le point 2c dans la définition ci-dessus. Nous introduisons «l'idéal bord de Krull itéré». Pour  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{T}$  nous notons

$$\mathbf{T}_K[x_1] = \mathbf{T}_K^{x_1}, \mathbf{T}_K[x_1, x_2] = (\mathbf{T}_K^{x_1})_K^{x_2}, \mathbf{T}_K[x_1, x_2, x_3] = ((\mathbf{T}_K^{x_1})_K^{x_2})_K^{x_3}, \text{ etc } \dots$$

les treillis bords quotients successifs, et  $\mathbf{K}[\mathbf{T}; x_1, \dots, x_k] = \mathbf{K}_{\mathbf{T}}[x_1, \dots, x_k]$  désigne le noyau de la projection canonique  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_K[x_1, \dots, x_k]$ . Alors on a  $y \in \mathbf{K}_{\mathbf{T}}[x_0, \dots, x_\ell]$  si et seulement si  $\exists a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$  vérifiant :

$$a_0 \wedge x_0 \leq 0, \quad a_1 \wedge x_1 \leq a_0 \vee x_0, \dots, \quad a_\ell \wedge x_\ell \leq a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1}, \quad y \leq a_\ell \vee x_\ell.$$

Si  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Heyting on a :

$$\mathbf{K}_{\mathbf{T}}[x_0, \dots, x_\ell] = \downarrow (x_\ell \vee (x_\ell \rightarrow (\dots (x_1 \vee (x_1 \rightarrow (x_0 \vee \neg x_0))) \dots)))$$

La dimension de Krull du treillis est  $\leq \ell$  si et seulement si  $1 \in \mathbf{K}_{\mathbf{T}}[x_0, \dots, x_\ell]$  pour tous  $x_0, \dots, x_\ell$ .

En mathématiques constructives la dimension de Krull de  $\mathbf{T}$  n'est pas *a priori* un élément bien défini de  $\mathbb{N} \cup \{-1\} \cup \{\infty\}$ . En mathématiques classiques cet élément est défini comme la borne inférieure des entiers  $\ell$  tels que  $\text{Kdim}(\mathbf{T}) \leq \ell$ . On utilise en mathématiques constructives les *notations* suivantes<sup>5</sup>, pour se rapprocher du langage classique :

**Notation 3.4** Soient  $\mathbf{T}, \mathbf{L}, \mathbf{T}_i$  des treillis distributifs.

- $\text{Kdim } \mathbf{L} \leq \text{Kdim } \mathbf{T}$  signifie :  $\forall \ell \geq -1 (\text{Kdim } \mathbf{T} \leq \ell \Rightarrow \text{Kdim } \mathbf{L} \leq \ell)$ .
- $\text{Kdim } \mathbf{L} = \text{Kdim } \mathbf{T}$  signifie :  $\text{Kdim } \mathbf{L} \leq \text{Kdim } \mathbf{T}$  et  $\text{Kdim } \mathbf{L} \geq \text{Kdim } \mathbf{T}$ .
- $\text{Kdim } \mathbf{T} \leq \sup_i \text{Kdim } \mathbf{T}_i$  signifie :  $\forall \ell \geq -1 (\&_i (\text{Kdim } \mathbf{T}_i \leq \ell) \Rightarrow \text{Kdim } \mathbf{T} \leq \ell)$ .
- $\text{Kdim } \mathbf{T} = \sup_i \text{Kdim } \mathbf{T}_i$  signifie :  $\forall \ell \geq -1 (\&_i (\text{Kdim } \mathbf{T}_i \leq \ell) \Leftrightarrow \text{Kdim } \mathbf{T} \leq \ell)$ .

Le fait que la définition fonctionne aussi bien avec le bord supérieur qu'avec le bord inférieur donne la constatation suivante.

**Fait 3.5** *Un treillis distributif et le treillis opposé ont même dimension.*

En mathématiques classiques on peut s'en rendre compte directement en considérant les chaînes d'idéaux premiers qui ont pour complémentaires des chaînes de filtres premiers (et vice-versa) : si on identifie les ensembles sous-jacents à  $X = \text{Spec } \mathbf{T}$  et  $X' = \text{Spec } \mathbf{T}^\circ$  les relations d'ordre  $\leq_X$  et  $\leq_{X'}$  sont opposées.

Notons  $\text{Bd}(V, X)$  le bord de  $V$  dans  $X$  ( $X$  est un espace topologique et  $V$  est une partie de  $X$ ). Alors si  $Y$  est un sous espace de  $X$  on a  $\text{Bd}(V \cap Y, Y) \subseteq \text{Bd}(V, X) \cap Y$ , avec égalité si  $Y$  est un ouvert. La proposition suivante donne une version duale, constructive, sans points, de cette affirmation.

5. En fait si on regarde  $\text{Kdim}(\mathbf{T})$  comme l'ensemble des  $\ell$  pour lesquels  $\text{Kdim}(\mathbf{T}) \leq \ell$ , on raisonne avec des parties finales (éventuellement vides) de  $\mathbb{N} \cup \{-1\}$ , la relation d'ordre est alors l'inclusion renversée, la borne supérieure l'intersection et la borne inférieure la réunion.



**Proposition 3.6** (bord de Krull d'un treillis quotient)

Soit  $\mathbf{L}$  un treillis quotient d'un treillis distributif  $\mathbf{T}$ . Par abus, nous notons  $x$  l'image de  $x \in \mathbf{T}$  dans  $\mathbf{L}$ . Alors  $\mathbf{L}_K^x$  est un quotient de  $\mathbf{T}_K^x$  et  $\mathbf{L}_K^x$  est un quotient de  $\mathbf{T}_K^x$ . En outre si  $\mathbf{L}$  est le quotient de  $\mathbf{T}$  par un filtre  $\mathfrak{f}$ ,  $\mathbf{L}_K^x$  est le quotient de  $\mathbf{T}_K^x$  par le filtre image de  $\mathfrak{f}$  dans  $\mathbf{T}_K^x$ .

*Démonstration.*

Soient  $a, b, x \in \mathbf{T}$ , si  $a \leq_{\mathbf{T}_K^x} b$  il existe  $z \in \mathbf{T}$  tel que  $x \wedge z \leq_{\mathbf{T}} 0$  et  $a \leq_{\mathbf{T}} x \vee z \vee b$ . Puisque  $\mathbf{L}$  est un quotient de  $\mathbf{T}$ , on a fortiori  $x \wedge z \leq_{\mathbf{L}} 0$  et  $a \leq_{\mathbf{L}} x \vee z \vee b$  et donc  $a \leq_{\mathbf{L}_K^x} b$ . Voyons le deuxième point. Notons  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{L}$ ,  $\pi_K^x : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_K^x$  et  $\theta : \mathbf{T}_K^x \rightarrow \mathbf{L}_K^x$  les projections. Il est clair que  $\theta(\pi_K^x(\mathfrak{f})) = \{1\}$  de sorte l'on a une factorisation de  $\theta$  via  $\mathbf{T}_K^x/(\pi_K^x(\mathfrak{f}) = 1)$ . Inversement soient  $a, b \in \mathbf{T}$  tels que  $a \leq_{\mathbf{L}_K^x} b$ . Nous voulons montrer que  $a \leq_{\mathbf{T}_K^x/(\pi_K^x(\mathfrak{f})=1)} b$ . Par hypothèse il existe  $z \in \mathbf{T}$  tel que  $a \leq_{\mathbf{L}} x \vee z \vee b$  et  $x \wedge z \leq_{\mathbf{L}} 0$ . Cela signifie qu'il existe  $f_1$  et  $f_2 \in \mathfrak{f}$  tels que  $a \wedge f_1 \leq_{\mathbf{T}} b \vee x \vee z$  et  $x \wedge z \wedge f_2 \leq_{\mathbf{T}} 0$ . En prenant  $f = f_1 \wedge f_2$  et  $z' = z \wedge f_2$  on obtient  $a \wedge f \leq_{\mathbf{T}} b \vee x \vee z'$  et  $x \wedge z' \leq_{\mathbf{T}} 0$ , c'est-à-dire  $a \wedge f \leq_{\mathbf{T}_K^x} b$ .  $\square$

Le corollaire suivant donne une version duale, constructive, sans points, du fait suivant : la dimension d'un sous-espace spectral est toujours inférieure ou égale à celle de l'espace entier.

**Corollaire 3.7** Si  $\mathbf{L}$  est un treillis quotient de  $\mathbf{T}$  on a  $\text{Kdim } \mathbf{L} \leq \text{Kdim } \mathbf{T}$ .

Dans la proposition suivante le point 2 est une version duale, constructive, sans points, du fait topologique suivant : la notion de bord est locale. C'est surtout le point 1 qui nous sera utile. En renversant la relation d'ordre on aurait un énoncé analogue pour l'autre bord.

**Proposition 3.8** (caractère local du bord de Krull)

1. Soit  $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{T}$ , avec  $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i = \{0\}$ . Pour  $x \in \mathbf{T}$  notons encore  $x$  son image dans  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}/(\mathfrak{a}_i = 0)$ . Le bord  $\mathbf{T}_K^x$  peut être vu comme le quotient de  $\mathbf{T}_K^x$  par un idéal  $\mathfrak{b}_i$  et on a :  $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{b}_i = \{0\}$ .
2. Soit  $(\mathfrak{f}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie de filtres de  $\mathbf{T}$ , avec  $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{f}_i = \{1\}$ . Pour  $x \in \mathbf{T}$  notons encore  $x$  son image dans  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}/(\mathfrak{f}_i = 1)$ . Le bord  $\mathbf{T}_K^x$  peut être vu comme le quotient de  $\mathbf{T}_K^x$  par un filtre  $\mathfrak{g}_i$  et on a :  $\bigcap_{i=1}^m \mathfrak{g}_i = \{1\}$ .

*Démonstration.*

Voyons le point 1. Considérons la projection  $\pi_i : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_i$  puis la projection  $\pi_i' : \mathbf{T}_i \rightarrow \mathbf{T}_i^x$ . La composée  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_i^x$  montre que  $\mathbf{T}_i^x \simeq \mathbf{T}/(\pi_i^{-1}(\mathbf{K}_{\mathbf{T}_i}^x) = 0)$ , et l'idéal  $\pi_i^{-1}(\mathbf{K}_{\mathbf{T}_i}^x)$  contient  $\mathbf{K}_{\mathbf{T}}^x$ . Ceci prouve la première affirmation. Soit maintenant  $y \in \mathbf{T}$  tel que pour chaque  $i$ ,  $\pi_i(y) \in \mathbf{K}_{\mathbf{T}_i}^x$ . Cela revient à dire qu'il existe  $b_i$  tel que  $\pi_i(y) \leq \pi_i(x) \vee \pi_i(b_i)$  et  $\pi_i(b_i) \wedge \pi_i(x) = \pi_i(0)$ , c'est-à-dire pour un certain  $a_i \in \mathfrak{a}_i : y \leq x \vee a_i \vee b_i$  et  $x \wedge b_i \in \mathfrak{a}_i$ . En prenant  $c_i = a_i \vee b_i$  cela fait  $y \leq x \vee c_i$  et  $x \wedge c_i \in \mathfrak{a}_i$ . Enfin avec  $c = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$  on obtient  $y \leq x \vee c$  avec  $c \wedge x = 0$ . Donc  $y \in \mathbf{K}_{\mathbf{T}}^x$ , et cela montre qu'un  $z \in \mathbf{T}_K^x$  qui est dans tous les  $\mathfrak{b}_i$  est nul (car il est la classe d'un  $y$ ).

Pour le point 2 c'est une conséquence immédiate de la proposition 3.6 et du fait 1.4, qui affirme que tout passage au quotient est un homomorphisme pour les treillis des filtres (en particulier si une intersection finie de filtres est égale à 1 cela reste vrai après passage au quotient).  $\square$

**Corollaire 3.9** (caractère local de la dimension de Krull)

1. Soit  $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{T}$  et  $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i$ . Alors  $\text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)) = \sup_i \text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathfrak{a}_i = 0))$ .
2. Soit  $(\mathfrak{f}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie de filtres de  $\mathbf{T}$  et  $\mathfrak{f} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{f}_i$ . Alors  $\text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathfrak{f} = 1)) = \sup_i \text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathfrak{f}_i = 1))$ .

*Démonstration.*

Il suffit de prouver le point 1. En remplaçant  $\mathbf{T}$  par  $\mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$  on se ramène au cas où  $\mathfrak{a} = 0$ . Le résultat est clair pour  $\ell = -1$ . Et la preuve par induction fonctionne grâce à la proposition 3.8.

On peut aussi donner une preuve directe basée sur la caractérisation 2 (c) dans la définition 3.3.  $\square$

Notez qu'en mathématiques classiques la caractère local de la dimension de Krull est en général énoncé sous la forme

$$\text{Kdim}(\mathbf{T}) = \sup \{ \text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathfrak{f} = 1)) \mid \mathfrak{f} \text{ filtre premier minimal} \}.$$

Il s'agit d'une conséquence directe de la définition de la dimension en mathématiques classiques. On peut ensuite en déduire le corollaire 3.9 mais la preuve qu'on obtient ainsi n'est pas constructive.

On obtient également comme dans le théorème 3.1, mais avec une preuve constructive le résultat important suivant, qui nous dit qu'on peut se limiter aux bords construits avec les éléments d'un système générateur de  $\mathbf{T}$ .

**Proposition 3.10** *Soit un treillis distributif  $\mathbf{T}$  engendré par une partie  $S$  et  $\ell$  un entier positif ou nul. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

1. Le treillis  $\mathbf{T}$  est de dimension  $\leq \ell$
2. Pour tout  $x \in S$  le bord  $\mathbf{T}_K^x$  est de dimension  $\leq \ell - 1$ .
3. Pour tout  $x \in S$  le bord  $\mathbf{T}_x^K$  est de dimension  $\leq \ell - 1$ .
4. Pour tous  $x_0, \dots, x_\ell \in S$  il existe  $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$  vérifiant :

$$a_0 \wedge x_0 \leq 0, \quad a_1 \wedge x_1 \leq a_0 \vee x_0, \dots, \quad a_\ell \wedge x_\ell \leq a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1}, \quad 1 \leq a_\ell \vee x_\ell. \quad (26)$$

Lorsque  $\mathbf{T}$  est une algèbre de Heyting les conditions précédentes sont aussi équivalentes à

5. Pour toute suite  $x_0, \dots, x_\ell$  dans  $S$  on a l'égalité

$$1 = x_\ell \vee (x_\ell \rightarrow (\dots (x_1 \vee (x_1 \rightarrow (x_0 \vee \neg x_0))) \dots)) \quad (27)$$

Lorsque  $\mathbf{T}$  une algèbre de Brouwer les conditions précédentes sont aussi équivalentes à

6. Pour toute suite  $x_0, \dots, x_\ell$  dans  $S$  on a l'égalité

$$0 = x_0 \wedge (x_0 - (x_1 \wedge (x_1 - (\dots (x_\ell \wedge (1 - x_\ell)))) \dots)) \quad (28)$$

*Démonstration.*

(2)  $\Leftrightarrow$  (4) par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord.

3  $\Leftrightarrow$  4 : par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord.

2  $\Leftrightarrow$  5 : par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord dans le cas d'une algèbre de Heyting.

3  $\Leftrightarrow$  6 : par récurrence sur  $\ell$ , vue la définition du bord dans le cas d'une algèbre de Brouwer.

Il reste donc à voir que si 2 est vrai pour  $x \in S$ , alors 2 est vrai pour tout  $x \in \mathbf{T}$ . Cela résulte de la proposition 2.7, et des corollaires 3.7 et 3.9 : par exemple pour tous  $x, y \in \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{T}_K^{x \vee y}$  est un quotient de  $\mathbf{T}/(\mathbf{K}_\mathbf{T}^x \cap \mathbf{K}_\mathbf{T}^y)$  donc  $\text{Kdim}(\mathbf{T}_K^{x \vee y}) \leq \sup(\text{Kdim} \mathbf{T}_K^x, \text{Kdim} \mathbf{T}_K^y)$ .  $\square$

## 3.2 Dimensions et bord de Heitmann

### J-dimension de Heitmann pour un treillis distributif

Nous donnons maintenant la définition constructive de la Jdim de Heitmann, que nous appelons *J-dimension de Heitmann* du treillis  $\mathbf{T}$  (ou de l'espace spectral  $\text{Spec } \mathbf{T}$ ).

**Définition 3.11** *Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif. La J-dimension de Heitmann de  $\mathbf{T}$ , notée  $\text{Jdim } \mathbf{T}$ , est la dimension de Krull du treillis de Heitmann  $\text{He}(\mathbf{T})$  (cf. définition 1.11).*

En fait d'un point de vue constructif on se contente de définir, pour tout entier  $\ell \geq -1$ , la phrase «  $\text{Jdim } \mathbf{T} \leq \ell$  » par «  $\text{Kdim } \text{He}(\mathbf{T}) \leq \ell$  ».

Du point de vue classique on peut donner la définition directement, à la Heitmann, pour un espace spectral  $X$  comme suit : si  $M_X$  est l'ensemble des points fermés et  $J_X$  l'adhérence de  $M_X$  pour la topologie constructible, alors  $\text{Jdim } X = \text{Kdim } J_X$ .

**Fait 3.12** Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif,  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}/(\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0)$  et  $\mathfrak{a}$  un idéal de  $\mathbf{T}$ .

1.  $\text{Jdim}(\text{He}(\mathbf{T})) = \text{Jdim } \mathbf{T}' = \text{Jdim } \mathbf{T} \leq \text{Kdim}(\mathbf{T}') \leq \text{Kdim } \mathbf{T}$ .
2. Si  $\mathbf{L} = \mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$  est le quotient de  $\mathbf{T}$  par l'idéal  $\mathfrak{a}$ , alors  $\text{Jdim } \mathbf{L} \leq \text{Jdim } \mathbf{T}$ .

*Démonstration.*

Le point 1 est conséquence du point 3 dans le fait 1.13 et le point 2 conséquence du point 4.  $\square$

*Remarque.* L'opération  $\mathbf{T} \mapsto \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0)$  n'est pas fonctorielle. Même chose pour  $\mathbf{T} \mapsto \text{He } \mathbf{T}$ . En particulier l'item 2 dans le fait 3.12 ne fonctionne plus *a priori* pour un quotient plus général, par exemple pour un quotient par un filtre. Contrairement à la  $\text{Kdim}$ , la  $\text{Jdim}$  peut augmenter par passage à un quotient (on a des exemples simples en algèbre commutative).

*Exemple.* Voici un exemple dû à Heitmann d'un espace spectral pour lequel  $\text{Jdim}(\mathbf{T}) < \text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0))$ . On considère  $X = \text{Spec } \mathbb{Z}$  et  $Y = \mathbf{n}$  ( $n \geq 3$ ) on recolle ces deux es-

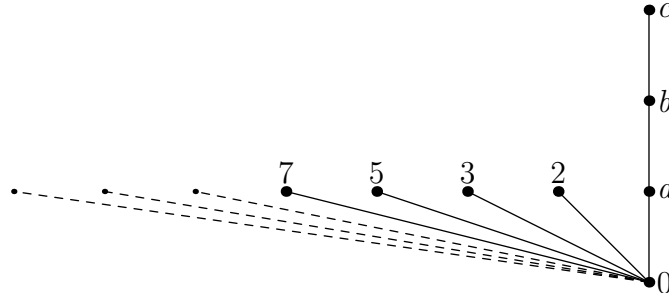


FIGURE 1 – Exemple de Heitmann

paces spectraux en identifiant les deux éléments minimaux (le singleton correspondant est bien dans les deux cas un sous-espace spectral). On obtient un espace  $Z = \text{Spec } \mathbf{T}$  avec  $M_Z = \text{Max } \mathbf{T}$  fermé donc égal à  $J_Z = \text{Jspec } \mathbf{T}$  et zéro dimensionnel, tandis que l'unique élément minimal est le seul minorant de  $M_Z$ , donc  $\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0$  et  $\text{Kdim}(\mathbf{T}/(\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0)) = \text{Kdim}(\mathbf{T}) = n - 2$ .

*Remarque.* Donnons la définition de la  $\text{Jdim}$  complètement mise à plat.

—  $\text{Jdim } \mathbf{T} \leq \ell$  signifie :  $\forall x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{T} \exists a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$  vérifiant :

$$a_0 \wedge x_0 \leq_{\text{He}(\mathbf{T})} 0, \quad a_1 \wedge x_1 \leq_{\text{He}(\mathbf{T})} a_0 \vee x_0, \dots, \quad a_\ell \wedge x_\ell \leq_{\text{He}(\mathbf{T})} a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1}, \quad 1 \leq_{\text{He}(\mathbf{T})} a_\ell \vee x_\ell.$$

c'est-à-dire encore  $\forall x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{T} \exists a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T} \forall y \in \mathbf{T}$

$$\begin{aligned} (a_0 \wedge x_0) \vee y = 1 &\Rightarrow y = 1 \\ (a_1 \wedge x_1) \vee y = 1 &\Rightarrow a_0 \vee x_0 \vee y = 1 \\ &\vdots \\ (a_\ell \wedge x_\ell) \vee y = 1 &\Rightarrow a_{\ell-1} \vee x_{\ell-1} \vee y = 1 \\ &\quad a_\ell \vee x_\ell = 1 \end{aligned}$$

— En particulier  $\text{Jdim } \mathbf{T} \leq 0$  signifie :

$$\forall x_0 \in \mathbf{T} \exists a_0 \in \mathbf{T} \forall y \in \mathbf{T}, ((a_0 \wedge x_0) \vee y = 1 \Rightarrow y = 1) \text{ et } a_0 \vee x_0 = 1.$$

— Et  $\text{Jdim } \mathbf{T} \leq 1$  signifie :  $\forall x_0, x_1 \in \mathbf{T} \exists a_0, a_1 \in \mathbf{T} \forall y \in \mathbf{T}$ ,

$$((a_0 \wedge x_0) \vee y = 1 \Rightarrow y = 1) \text{ et } ((a_1 \wedge x_1) \vee y = 1 \Rightarrow a_0 \vee x_0 \vee y = 1) \text{ et } a_1 \vee x_1 = 1.$$

### La dimension de Heitmann pour un treillis distributif

Bien que Heitmann définisse et utilise dans [22] la dimension  $\text{Jdim } X$  où  $X$  est le spectre d'un anneau commutatif, ses preuves sont en fait implicitement basées sur une notion voisine, mais non équivalente, que nous appellerons la *dimension de Heitmann* et que nous noterons  $\text{Hdim}$ .

Nous présentons cette notion directement au niveau des treillis distributifs, où les choses s'expliquent plus simplement.

La dimension  $\text{Hdim } \mathbf{T}$  est toujours inférieure ou égale à  $\text{Jdim } \mathbf{T}$ , ce qui fait que les théorèmes établis pour la  $\text{Hdim}$  seront a fortiori vrais avec la  $\text{Jdim}$  et avec la  $\text{Kdim}$ .

**Définition 3.13** Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif et  $x \in \mathbf{T}$ . On appelle bord de Heitmann de  $x$  dans  $\mathbf{T}$  le quotient  $\mathbf{T}_H^x \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{T}/(\text{H}_{\mathbf{T}}^x = 0)$ , où

$$\text{H}_{\mathbf{T}}^x = \downarrow x \vee (\text{J}_{\mathbf{T}}(0) : x) \quad (29)$$

On dira aussi que  $\text{H}_{\mathbf{T}}^x$  est l'idéal bord de Heitmann de  $x$  dans  $\mathbf{T}$ .

**Lemme 3.14** (bord de Krull et bord de Heitmann)

Soit  $\mathbf{T}$  un treillis distributif,  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}/(\text{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0)$ ,  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}'$  la projection canonique,  $x \in \mathbf{T}$  et  $\bar{x} = \pi(x)$ . Alors on a :

1.  $\text{H}_{\mathbf{T}'}^{\bar{x}} = \text{K}_{\mathbf{T}'}^{\bar{x}}$ .
2.  $\pi^{-1}(\text{K}_{\mathbf{T}'}^{\bar{x}}) = \text{H}_{\mathbf{T}}^x$  et  $\mathbf{T}'_{\text{H}}^{\bar{x}} \simeq \mathbf{T}'_{\text{K}}^{\bar{x}} \simeq \mathbf{T}_{\text{H}}^x$ .

*Démonstration.*

Clair d'après les définitions. □

**Lemme 3.15** Soit  $\mathbf{L} = \mathbf{T}/(\mathfrak{a} = 0)$  un treillis quotient d'un treillis distributif  $\mathbf{T}$  par un idéal. Par abus, nous notons  $x$  l'image de  $x \in \mathbf{T}$  dans  $\mathbf{L}$ . Alors  $\mathbf{L}_H^x$  est un quotient de  $\mathbf{T}_H^x$ .

*Démonstration.*

Notons  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{L}$  la projection canonique. On veut montrer que si  $z \in \text{H}_{\mathbf{T}}^x$  alors  $\pi(z) \in \text{H}_{\mathbf{L}}^{\pi(x)}$ . On suppose donc  $z \leq_{\mathbf{T}} x \vee u$  avec  $x \wedge u \in \text{J}_{\mathbf{T}}(0)$ . Comme  $\pi(\text{J}_{\mathbf{T}}(0)) \subseteq \text{J}_{\mathbf{L}}(0)$ , cela donne  $\pi(z) \leq_{\mathbf{L}} \pi(x) \vee \pi(u)$  avec  $\pi(x) \wedge \pi(u) \in \text{J}_{\mathbf{L}}(0)$ , ce qui implique  $\pi(z) \in \text{H}_{\mathbf{L}}^{\pi(x)}$ . □

*Remarque.* Le lemme précédent serait faux pour un quotient plus général, par exemple pour un quotient par un filtre. Il reste vrai chaque fois que  $\pi(\text{J}_{\mathbf{T}}(0)) \subseteq \text{J}_{\mathbf{L}}(0)$ .

**Proposition 3.16** (comparaison de deux bords à la Heitmann)

On considère pour  $x \in \mathbf{T}$  son image  $\hat{x} \in \text{He}(\mathbf{T})$ .

1. On compare les deux quotients de  $\mathbf{T}$  que sont  $\text{He}(\mathbf{T}_H^x)$  et  $(\text{He}(\mathbf{T}))_{\text{K}}^{\hat{x}}$  : le premier est un quotient du second.
2. Lorsque  $\text{He}(\mathbf{T})$  est une algèbre de Heyting, on a égalité.

*Démonstration.*

Le treillis  $(\text{He}(\mathbf{T}))_{\text{K}}^{\hat{x}}$  est un quotient de  $\mathbf{T}$  dont la relation de préordre  $a \preccurlyeq b$  peut être décrite de la manière suivante :

$$\exists y \ (x \wedge y \in \text{J}_{\mathbf{T}}(0) \text{ et } \forall z \ [ a \vee z = 1 \Rightarrow x \vee y \vee b \vee z = 1 ]) \quad (*)$$

Considérons le préordre qui définit  $\text{He}(\mathbf{T}_H^x)$  :

$$\forall u \ (1 \leq_{\mathbf{T}_H^x} a \vee u \Rightarrow 1 \leq_{\mathbf{T}_H^x} b \vee u) \quad (**)$$

Prouvons que la relation de préordre  $\preccurlyeq$  entraîne la relation de préordre (\*\*).

On a un  $y$  vérifiant (\*). On considère un  $u$  tel que  $1 \leq a \vee u$  dans  $\mathbf{T}_H^x$  et on cherche à montrer que  $1 \leq b \vee u$  dans  $\mathbf{T}_H^x$ .

La relation  $1 \leq a \vee u$  dans  $\mathbf{T}_H^x$  s'écrit  $1 \leq a \vee u \vee x \vee y'$  pour un  $y'$  tel que  $y' \wedge x \in \text{J}_{\mathbf{T}}(0)$ .

On pose  $z = u \vee x \vee y'$ , on applique (\*) et on obtient  $x \vee b \vee u \vee (y \vee y') = 1$ .

Mais  $(y \vee y') \wedge x \in \text{J}_{\mathbf{T}}(0)$  donc en posant  $y'' = y \vee y'$  on a  $1 \leq b \vee u \vee x \vee y''$  avec  $x \wedge y'' \in \text{J}_{\mathbf{T}}(0)$  c'est-à-dire  $1 \leq b \vee u$  dans  $\mathbf{T}_H^x$ .

Voyons le point 2. Nous notons  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \text{He}(\mathbf{T})$  la projection canonique. Rappelons (fait 1.13) que

$\pi^{-1}(0) = J_{\mathbf{T}}(0)$  et  $\pi^{-1}(1) = \{1\}$ . Nous supposons que  $\text{He}(\mathbf{T})$  est une algèbre de Heyting. Notons  $\tilde{x}$  un élément de  $\mathbf{T}$  tel que  $\pi(\tilde{x}) = \pi(x) \rightarrow 0$  dans  $\text{He}(\mathbf{T})$ . Alors on peut réécrire (\*) sous la forme

$$\forall z [ a \vee z = 1 \Rightarrow x \vee \tilde{x} \vee b \vee z = 1 ] \quad (*')$$

De même  $1 \leq_{\mathbf{T}_H^x} a \vee u$ , qui signifie

$$\exists y' (x \wedge y' \in J_{\mathbf{T}}(0) \text{ et } 1 \leq a \vee u \vee x \vee y'),$$

se réécrit  $1 \leq a \vee u \vee x \vee \tilde{x}$ . En conséquence (\*\*) se réécrit

$$\forall u [ a \vee u \vee x \vee \tilde{x} = 1 \Rightarrow b \vee u \vee x \vee \tilde{x} ] \quad (**')$$

et il est clair que (\*)' et (\*\*') sont équivalents.  $\square$

**Définition 3.17** La dimension de Heitmann d'un treillis distributif  $\mathbf{T}$ , notée  $\text{Hdim } \mathbf{T}$ , est définie de manière inductive comme suit :

- $\text{Hdim } \mathbf{T} = -1$  si et seulement si  $\mathbf{T} = \mathbf{1}$ .
- Pour  $\ell \geq 0$ ,  $\text{Hdim } \mathbf{T} \leq \ell$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbf{T}$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{T}_H^x) \leq \ell - 1$ .

Du lemme 3.15 on déduit par récurrence sur  $\ell$ , avec la même convention de notation qu'en 3.4 le lemme suivant.

**Lemme 3.18** Si  $\mathbf{L}$  est le quotient de  $\mathbf{T}$  par un idéal, alors  $\text{Hdim } \mathbf{L} \leq \text{Hdim } \mathbf{T}$ .

**Proposition 3.19** (comparaison des dimensions  $\text{Jdim}$  et  $\text{Hdim}$ )

- On a toujours  $\text{Hdim } \mathbf{T} \leq \text{Jdim } \mathbf{T}$ .
- Lorsque  $\text{He}(\mathbf{T})$  est une algèbre de Heyting, on a égalité :  $\text{Hdim } \mathbf{T} = \text{Jdim } \mathbf{T}$ .

En mathématiques classiques l'égalité a donc lieu lorsque  $\text{He}(\mathbf{T})$  est noethérien.

*Démonstration.*

Le point 1 se démontre par récurrence sur  $\text{Jdim } \mathbf{T}$  à partir du point 1 de la proposition 3.16.

Pour le point 2, on suppose que  $\text{He}(\mathbf{T})$  est une algèbre de Heyting et on fait une récurrence en utilisant le point 2 de la proposition 3.16. Pour que la récurrence fonctionne il faut montrer que  $(\text{He}(\mathbf{T}))_{\mathbf{K}}^{\tilde{x}} = \text{He}(\mathbf{H}_{\mathbf{T}}^x)$  est également une algèbre de Heyting. Or cela résulte de ce que  $(\text{He}(\mathbf{T}))_{\mathbf{K}}^{\tilde{x}}$  est un quotient de  $\text{He}(\mathbf{T})$  par un idéal principal (puisque  $\text{He}(\mathbf{T})$  est une algèbre de Heyting) et du fait 1.15.  $\square$

**Proposition 3.20** Notons  $\mathbf{T}'$  pour le quotient  $\mathbf{T}/(J_{\mathbf{T}}(0) = 0)$ .

1. On a toujours  $\text{Hdim } \mathbf{T} = \text{Hdim}(\mathbf{T}')$ .
2. On a les équivalences  $\text{Jdim } \mathbf{T} \leq 0 \iff \text{Hdim } \mathbf{T} \leq 0 \iff \text{Kdim}(\mathbf{T}') \leq 0$ , (autrement dit  $\mathbf{T}'$  est une algèbre de Boole). C'est le cas lorsque  $\text{He}(\mathbf{T})$  est fini.

*Démonstration.*

Le premier point résulte du lemme 3.14, point 2.

Pour le deuxième point on sait déjà que  $\text{Hdim } \mathbf{T} \leq \text{Jdim } \mathbf{T} \leq \text{Kdim } \mathbf{T}'$ . Le lemme 3.14, point 1, prouve que  $\text{Hdim } \mathbf{T} \leq 0$  implique  $\text{Kdim } \mathbf{T}' \leq 0$ .

Lorsque  $\mathbf{T}$  est fini l'espace  $\text{Jspec } \mathbf{T}$  est simplement l'ensemble des idéaux maximaux avec pour topologie toutes les parties (puisque les points sont fermés). Par ailleurs le fait 1.13.1 permet de conclure aussi lorsque  $\text{He}(\mathbf{T})$  est fini.  $\square$

*Remarque.* Au moins en mathématiques classiques  $\text{He}(\mathbf{T})$  est fini si et seulement si l'ensemble  $M$  des idéaux maximaux est fini (le cas semi-local en algèbre commutative).

La proposition suivante est l'analogie de la proposition 2.7, en remplaçant le bord de Krull par le bord de Heitmann.

**Proposition 3.21** *Pour tous  $x, y \in \mathbf{T}$  les idéaux bords de Heitmann de  $x \wedge y$  et  $x \vee y$  contiennent l'intersection des idéaux bords de Heitmann de  $x$  et  $y$ , plus précisément :*

$$\mathbf{H}_{\mathbf{T}}^x \cap \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^y = \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^{x \vee y} \cap \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^{x \wedge y}$$

*Démonstration.*

Résulte de la proposition 2.7 et du lemme 3.14.  $\square$

La proposition suivante est l'analogie du point 1 de la proposition 3.8.

**Proposition 3.22** *Soit  $(\mathbf{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{T}$ , avec  $\bigcap_{i=1}^m \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(\mathbf{a}_i) \subseteq \mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0)$  (c'est le cas en particulier si  $\bigcap_{i=1}^m \mathbf{a}_i = \{0\}$ ). Pour  $x \in \mathbf{T}$  notons encore  $x$  son image dans  $\mathbf{T}_i = \mathbf{T}/(\mathbf{a}_i = 0)$ . Alors le bord  $\mathbf{T}_{i\mathbf{H}}^x$  peut être vu comme le quotient de  $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^x$  par un idéal  $\mathbf{b}_i$  et on a :  $\bigcap_{i=1}^m \mathbf{b}_i = \{0\}$ .*

*Démonstration.*

Résulte du lemme 3.14 et de la proposition 3.8, appliquée au treillis  $\mathbf{T}' = \mathbf{T}/(\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0)$  et aux idéaux images des  $\mathbf{J}_{\mathbf{T}}(\mathbf{a}_i)$  dans  $\mathbf{T}'$ .  $\square$

Le corollaire suivant est l'analogie du corollaire 3.9 (avec les mêmes notations qu'en 3.4).

**Corollaire 3.23** *Soit  $(\mathbf{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{T}$  et  $\mathbf{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathbf{a}_i$ . Alors  $\text{Hdim}(\mathbf{T}/(\mathbf{a} = 0)) = \sup_i \text{Hdim}(\mathbf{T}/(\mathbf{a}_i = 0))$ .*

*Démonstration.*

En remplaçant  $\mathbf{T}$  par  $\mathbf{T}/(\mathbf{a} = 0)$  on se ramène au cas où  $\mathbf{a} = 0$ . La chose est claire pour  $\ell = -1$ . Et la preuve par récurrence fonctionne grâce à la proposition 3.22.  $\square$

**Proposition 3.24** *Soit  $S$  un système générateur du treillis distributif  $\mathbf{T}$  et  $\ell \geq 0$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. Pour tout  $x \in \mathbf{T}$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^x) \leq \ell - 1$ .
2. Pour tout  $x \in S$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^x) \leq \ell - 1$ .

*Démonstration.*

Cela résulte de la proposition 3.21, du lemme 3.15 et du corollaire 3.23 : par exemple pour tous  $x, y \in \mathbf{T}$ , puisque  $\mathbf{H}_{\mathbf{T}}^{x \vee y} \subseteq \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^x \cap \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^y$ , le treillis  $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^{x \vee y}$  est un quotient de  $\mathbf{T}/(\mathbf{H}_{\mathbf{T}}^x \cap \mathbf{H}_{\mathbf{T}}^y)$  par un idéal, donc  $\text{Hdim}(\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^{x \vee y}) \leq \sup(\text{Hdim} \mathbf{T}_{\mathbf{H}}^x, \text{Hdim} \mathbf{T}_{\mathbf{H}}^y)$ .  $\square$

*Remarque.* Explicitons encore un peu plus la dimension de Heitmann. Pour ceci nous introduisons «l'idéal bord de Heitmann itéré». Pour  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{T}$  nous notons  $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}[x_1] = \mathbf{T}_{\mathbf{H}}^{x_1}$ ,  $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}[x_1, x_2] = (\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^{x_1})_{\mathbf{H}}^{x_2}$ ,  $\mathbf{T}_{\mathbf{H}}[x_1, x_2, x_3] = ((\mathbf{T}_{\mathbf{H}}^{x_1})_{\mathbf{H}}^{x_2})_{\mathbf{H}}^{x_3}$ , etc... les treillis bords quotients successifs, et  $\mathbf{H}[\mathbf{T}; x_1, \dots, x_k] = \mathbf{H}_{\mathbf{T}}[x_1, \dots, x_k]$  désigne le noyau de la projection canonique  $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_{\mathbf{H}}[x_1, \dots, x_k]$ . Dire que  $\text{Hdim} \mathbf{T} \leq \ell$  revient à dire que pour tous  $x_0, \dots, x_{\ell} \in \mathbf{T}$  on a  $1 \in \mathbf{H}_{\mathbf{T}}[x_0, \dots, x_{\ell}]$ .

Il nous faut donc expliciter les idéaux  $\mathbf{H}_{\mathbf{T}}[x_0, \dots, x_{\ell}]$ . Pour ceci nous devons expliciter  $\pi^{-1}(\mathbf{H}[\mathbf{T}/(\mathbf{a} = 0); \pi(x)])$  (que nous noterons  $\mathbf{H}[\mathbf{T}, \mathbf{a}; x]$ ) lorsqu'on a une projection  $\pi : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}/(\mathbf{a} = 0)$ .

Par définition on a  $y \in \mathbf{H}[\mathbf{T}, \mathbf{a}; x]$  si et seulement si  $y \leq x \vee z \pmod{\mathbf{a}}$  pour un  $z$  qui vérifie  $\pi(z \wedge x) \in \mathbf{J}_{\mathbf{T}/(\mathbf{a}=0)}(0)$ . Cette dernière condition signifie :  $\forall u \in \mathbf{T}$ ,  $(\pi((z \wedge x) \vee u) = \pi(1) \Rightarrow \pi(u) = \pi(1))$ . Et ceci s'écrit encore

$$\forall u \in \mathbf{T}, ((\exists a \in \mathbf{a} (z \wedge x) \vee u \vee a = 1) \Rightarrow (\exists b \in \mathbf{a} u \vee b = 1))$$

Par ailleurs,  $y \leq x \vee z \pmod{\mathbf{a}}$  signifie  $\exists a' \in \mathbf{a} y \leq x \vee z \vee a'$  et la condition  $\pi(z \wedge x) \in \mathbf{J}_{\mathbf{T}/(\mathbf{a}=0)}(0)$  n'est pas changée si on remplace  $z$  par  $z \vee a'$ . En bref nous obtenons la condition suivante pour  $y \in \mathbf{H}[\mathbf{T}, \mathbf{a}; x]$  :

$$\exists z \in \mathbf{T} [y \leq x \vee z \text{ et } \forall u \in \mathbf{T}, ((\exists a \in \mathbf{a} (z \wedge x) \vee u \vee a = 1) \Rightarrow (\exists b \in \mathbf{a} u \vee b = 1))]$$

On voit donc apparaître une formule d'une complexité logique redoutable. Surtout si on songe que  $\exists a \in \mathfrak{a}$  et  $\exists b \in \mathfrak{a}$  devront être explicités avec  $\mathfrak{a} = \mathbb{H}_{\mathbf{T}}[x_1, \dots, x_k]$  si on veut obtenir une expression pour  $y \in \mathbb{H}_{\mathbf{T}}[x_1, \dots, x_k, x]$ . Contrairement à l'expression pour  $\text{Jdim } \mathbf{T} \leq \ell$  qui ne comportait que deux alternances de quantificateurs quel que soit l'entier  $\ell$ , on voit pour  $\text{Hdim} \leq \ell$  des expressions de plus en plus imbriquées au fur et à mesure que  $\ell$  augmente. En fait il se trouve que pour les anneaux commutatifs, c'est la  $\text{Hdim}$  qui fait fonctionner les preuves par récurrence dans les sections 5 et suivantes, et c'est la vraie raison pour laquelle on est amené à introduire cette dimension. Comme elle vérifie  $\text{Hdim } \mathbf{T} \leq \text{Jdim } \mathbf{T} \leq \text{Kdim}(\mathbf{T}/(\text{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0))$  on a quand même des moyens raisonnables pour la majorer. Mais on manque d'exemples avec une majoration meilleure que celle par  $\text{Kdim}(\mathbf{T}/(\text{J}_{\mathbf{T}}(0) = 0))$ .

## 4 Dimensions de Krull et Heitmann pour les anneaux commutatifs

Dans cette section,  $\mathbf{A}$  désigne toujours un anneau commutatif.

### 4.1 Le treillis de Zariski

Nous rappelons ici l'approche constructive de Joyal [26] pour le spectre d'un anneau commutatif.

Si  $J \subseteq \mathbf{A}$ , nous notons  $\mathcal{I}_{\mathbf{A}}(J) = \langle J \rangle_{\mathbf{A}}$  (ou  $\langle J \rangle$  si le contexte est clair) l'idéal engendré par  $J$ ; nous notons  $\text{D}_{\mathbf{A}}(J) = \text{D}(\mathbf{A}, J)$  (ou  $\text{D}(J)$  si le contexte est clair) le nilradical de l'idéal  $\langle J \rangle$  :

$$\text{D}_{\mathbf{A}}(J) = \sqrt{\langle J \rangle} = \{x \in \mathbf{A} \mid \exists m \in \mathbb{N} \ x^m \in \langle J \rangle\} \quad (30)$$

Lorsque  $J = \{x_1, \dots, x_n\}$  nous notons  $\text{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = \text{D}(\mathbf{A}, x_1, \dots, x_n)$  pour  $\text{D}_{\mathbf{A}}(J)$ . Si le contexte est clair, nous abrégeons  $\text{D}_{\mathbf{A}}(x)$  en  $\tilde{x}$ . Les  $\tilde{x}$  forment un système générateur de  $\text{Zar } \mathbf{A}$ , stable par  $\wedge$ .

Par définition le *treillis de Zariski* de  $\mathbf{A}$ , noté  $\text{Zar } \mathbf{A}$ , a pour éléments les radicaux d'idéaux de type fini : ce sont donc les  $\text{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ , c'est-à-dire les  $\text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$  pour les idéaux de type fini  $\mathfrak{a}$ . La relation d'ordre est l'inclusion, le inf et le sup sont donnés par

$$\text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \wedge \text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) = \text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) \quad \text{et} \quad \text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1) \vee \text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_2) = \text{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2).$$

Le treillis de Zariski de  $\mathbf{A}$  est un treillis distributif, et  $\text{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{x}_1 \vee \dots \vee \tilde{x}_n$ .

Si  $J \subseteq \mathbf{A}$  nous notons  $\tilde{J} = \{\tilde{x} \mid x \in J\} \subseteq \text{Zar } \mathbf{A}$ .

Soient  $U$  et  $J$  deux familles finies dans  $\mathbf{A}$ , on a les équivalences

$$\bigwedge \tilde{U} \leq_{\text{Zar } \mathbf{A}} \bigvee \tilde{J} \iff \prod_{u \in U} u \in \sqrt{\langle J \rangle} \iff \mathcal{M}(U) \cap \langle J \rangle \neq \emptyset$$

où  $\mathcal{M}(U)$  est le monoïde multiplicatif engendré par  $U$ .

Cela suffit à décrire le treillis  $\text{Zar } \mathbf{A}$ . Plus précisément on a [3, 5] :

**Proposition 4.1** *Le treillis  $\text{Zar } \mathbf{A}$  est (à isomorphisme près) le treillis engendré par des symboles  $\text{D}_{\mathbf{A}}(a)$  soumis aux relations suivantes*

$$\text{D}_{\mathbf{A}}(0_{\mathbf{A}}) = 0, \quad \text{D}_{\mathbf{A}}(1_{\mathbf{A}}) = 1, \quad \text{D}_{\mathbf{A}}(x + y) \leq \text{D}_{\mathbf{A}}(x) \vee \text{D}_{\mathbf{A}}(y), \quad \text{D}_{\mathbf{A}}(xy) = \text{D}_{\mathbf{A}}(x) \wedge \text{D}_{\mathbf{A}}(y)$$

L'opération  $\text{Zar}$  est un foncteur de la catégorie des anneaux commutatifs vers celle des treillis distributifs. Notez que via ce foncteur la projection  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}/\text{D}_{\mathbf{A}}(0)$  donne un isomorphisme  $\text{Zar } \mathbf{A} \simeq \text{Zar}(\mathbf{A}/\text{D}_{\mathbf{A}}(0))$ . On a  $\text{Zar } \mathbf{A} = \mathbf{1}$  si et seulement si  $1_{\mathbf{A}} = 0_{\mathbf{A}}$ .

Un théorème important de Hochster [23] affirme que tout espace spectral est homéomorphe au spectre d'un anneau commutatif. Une version sans point du théorème de Hochster est : tout treillis distributif est isomorphe au treillis de Zariski d'un anneau commutatif (pour une preuve non constructive voir [2]).

## 4.2 Idéaux, filtres et quotients de Zar $\mathbf{A}$

Rappelons qu'en mathématiques classiques le *spectre de Zariski*  $\text{Spec } \mathbf{A}$  d'un anneau commutatif est un espace topologique dont les points sont les idéaux premiers de l'anneau et dont la topologie est définie par la base d'ouverts formée par les  $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(a) = \{\mathfrak{p} \in \text{Spec } \mathbf{A} \mid a \notin \mathfrak{p}\}$ . On note aussi  $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$  pour  $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1) \cup \dots \cup \mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_n)$ .

### Idéaux de $\mathbf{A}$ et de Zar $\mathbf{A}$

Nous disons qu'un idéal  $\mathfrak{J}$  de  $\mathbf{A}$  est *radical* si  $\mathfrak{J} = \sqrt{\mathfrak{J}}$ . En mathématiques classiques, tout idéal radical est l'intersection des idéaux premiers qui le contiennent.

Introduisons la notation (lorsque  $J \subseteq \mathbf{A}$ )

$$\text{IZ}_{\mathbf{A}}(J) = \mathcal{I}_{\text{Zar } \mathbf{A}}(\tilde{J})$$

pour l'idéal de Zar  $\mathbf{A}$  engendré par  $\tilde{J}$ . En particulier

$$\text{IZ}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = \downarrow D_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = \downarrow (\tilde{x}_1 \vee \dots \vee \tilde{x}_n).$$

On a  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}(J) = \text{IZ}_{\mathbf{A}}(\sqrt{\langle J \rangle})$ , et on établit facilement le fait fondamental suivant.

#### Fait 4.2

- L'application  $\mathfrak{a} \mapsto \text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a})$  définit un isomorphisme du treillis des idéaux radicaux de  $\mathbf{A}$  vers le treillis des idéaux de Zar  $\mathbf{A}$ .
- Par restriction les idéaux premiers (resp. les idéaux maximaux) de l'anneau  $\mathbf{A}$  et ceux du treillis distributif Zar  $\mathbf{A}$  sont également en correspondance naturelle bijective.
- Pour tout anneau commutatif  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Spec } \mathbf{A}$  (au sens des anneaux commutatifs) s'identifie à  $\text{Spec}(\text{Zar } \mathbf{A})$  (au sens des treillis distributifs).

*Remarque.* En mathématiques classiques on a un isomorphisme entre le treillis Zar  $\mathbf{A}$  et le treillis des ouverts quasi-compacts de  $\text{Spec } \mathbf{A}$ . On peut alors identifier  $D_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$  (qui est un élément de Zar  $\mathbf{A}$ ),  $D_{\text{Zar } \mathbf{A}}(D_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n))$  (qui est un ouvert quasi-compact de  $\text{Spec}(\text{Zar } \mathbf{A})$ ) et  $\mathfrak{D}_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$  (qui est un ouvert quasi-compact de  $\text{Spec } \mathbf{A}$ ). Du point de vue constructif, on considère  $\text{Spec } \mathbf{A}$  comme un «espace topologique sans point», c'est-à-dire un espace défini uniquement à travers une base d'ouverts, et les «identifications» ci-dessus sont de pures identités.

On a aussi facilement :

#### Fait 4.3 (quotients)

Si  $J \subseteq \mathbf{A}$ , alors  $\text{Zar}(\mathbf{A}/\langle J \rangle) \simeq \text{Zar}(\mathbf{A}/D_{\mathbf{A}}(J)) \simeq \text{Zar}(\mathbf{A})/(\text{IZ}_{\mathbf{A}}(J) = 0)$ .

#### Fait 4.4 (transporteurs)

Soient  $\mathfrak{A}$  et  $\mathfrak{B}$  des idéaux de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathfrak{a} = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{A})$  et  $\mathfrak{b} = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{B})$ . Alors  $\mathfrak{a} : \mathfrak{b} = \mathfrak{a} : \mathfrak{B}$  est un idéal radical de  $\mathbf{A}$  et dans Zar  $\mathbf{A}$  on a  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}) : \text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{b}) = \text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a} : \mathfrak{b})$ .

#### Fait 4.5 (recouvrement par des idéaux)

Soit  $\mathfrak{a}_i$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{A}$ . Les  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{a}_i)$  recouvrent Zar  $\mathbf{A}$  (c'est-à-dire leur intersection est réduite à 0) si et seulement si  $\bigcap_i \mathfrak{a}_i \subseteq D_{\mathbf{A}}(0)$ .

En mathématiques classiques le treillis Zar  $\mathbf{A}$  est noethérien (ce qui revient à dire que  $\text{Spec } \mathbf{A}$  est noethérien) si et seulement si tout idéal  $D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$  est «radicalement de type fini», c'est-à-dire est un élément de Zar  $\mathbf{A}$ . Par ailleurs, Zar  $\mathbf{A}$  est une algèbre de Heyting si et seulement si  $\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \text{Zar } \mathbf{A} \ (\mathfrak{a} : \mathfrak{b}) \in \text{Zar } \mathbf{A}$ .

Le résultat suivant est important en mathématiques constructives.

**Proposition 4.6** (cf. [5]) Si  $\mathbf{A}$  est un anneau noethérien cohérent Zar  $\mathbf{A}$  est une algèbre de Heyting. Si en outre  $\mathbf{A}$  est fortement discret, la relation d'ordre dans Zar  $\mathbf{A}$  est décidable (on dit alors que le treillis est discret).



### Filtres de $\mathbf{A}$ et de $\text{Zar } \mathbf{A}$

Un *filtre* dans un anneau commutatif est un monoïde  $\mathfrak{F}$  qui vérifie  $xy \in \mathfrak{F} \Rightarrow x \in \mathfrak{F}$ . Un *filtre premier* est un filtre qui vérifie  $x + y \in \mathfrak{F} \Rightarrow x \in \mathfrak{F}$  ou  $y \in \mathfrak{F}$  (c'est le complémentaire d'un idéal premier).

Pour  $x \in \mathbf{A}$  le filtre  $\uparrow \tilde{x}$  de  $\text{Zar } \mathbf{A}$  est noté  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}(x)$ . Plus généralement pour  $S \subseteq \mathbf{A}$  on note  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}(S)$  le filtre de  $\text{Zar } \mathbf{A}$  :

$$\text{FZ}_{\mathbf{A}}(S) = \{ x \in \text{Zar } \mathbf{A} \mid \exists y \in \mathcal{M}(S) \ x \geq \tilde{y} \}.$$

On a aussi  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}(S) = \text{FZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F})$  où  $\mathfrak{F}$  est le filtre de  $\mathbf{A}$  engendré par  $S$ .

Les faits suivants sont faciles.

**Fait 4.7** *L'application  $\mathfrak{f} \mapsto \text{FZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{f})$  établit une correspondance injective croissante des filtres de  $\mathbf{A}$  vers les filtres de  $\text{Zar } \mathbf{A}$ , et un sup fini (le sup de  $\mathfrak{f}_1$  et  $\mathfrak{f}_2$  est engendré par les  $f_1 f_2$  où  $f_i \in \mathfrak{f}_i$ ) donne pour image le sup fini des filtres images. Cette correspondance  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}$  se restreint en une bijection entre les filtres premiers de  $\mathbf{A}$  et ceux de  $\text{Zar } \mathbf{A}$ .*

Notez cependant que le filtre principal de  $\text{Zar } \mathbf{A}$  engendré par  $\tilde{a}_1 \vee \dots \vee \tilde{a}_n$  (c'est-à-dire l'intersection des filtres  $\uparrow \tilde{a}_i$ ), ne correspond en général à aucun filtre de  $\mathbf{A}$ .

**Fait 4.8** (localisés)

Soit  $S$  un monoïde de  $\mathbf{A}$ ,  $\mathfrak{F}$  le filtre engendré par  $S$ , et  $\mathfrak{f} = \text{FZ}_{\mathbf{A}}(S) = \text{FZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{F})$ .

Alors  $S^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{A}_S = \mathbf{A}_{\mathfrak{F}}$  et  $\text{Zar}(\mathbf{A}_S) \simeq \text{Zar}(\mathbf{A})/(\mathfrak{f} = 1)$ .

**Fait 4.9** (filtre complémentaire)

Soit  $x \in \mathbf{A}$ , le filtre  $1_{\text{Zar } \mathbf{A}} \setminus \text{FZ}_{\mathbf{A}}(x)$  est égal à  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}(1 + x\mathbf{A})$ .

**Fait 4.10** (recouvrement par des filtres)

Soit  $(S_i)_{1 \leq i \leq n}$  une famille finie de monoïdes de  $\mathbf{A}$ . Les filtres  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}(S_i)$  recouvrent  $\text{Zar } \mathbf{A}$  (c'est-à-dire leur intersection est réduite à  $\{1\}$ ) si et seulement si les monoïdes  $S_i$  sont comaximaux c'est-à-dire que pour tous  $x_i \in S_i$  on a  $\langle x_1, \dots, x_n \rangle = \langle 1 \rangle$ .

Plus généralement on a  $\text{FZ}_{\mathbf{A}}(S_1) \cap \dots \cap \text{FZ}_{\mathbf{A}}(S_n) \subseteq \text{FZ}_{\mathbf{A}}(S)$  si et seulement si pour tous  $x_i \in S_i$  il existe  $x \in S$  tel que  $x \in \langle x_1, \dots, x_n \rangle$ .

### 4.3 Le treillis de Heitmann

Dans un anneau commutatif, le *radical de Jacobson d'un idéal  $\mathfrak{J}$*  est (du point de vue des mathématiques classiques) l'intersection des idéaux maximaux qui contiennent  $\mathfrak{J}$ . On le note  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J}) = J(\mathbf{A}, \mathfrak{J})$ , ou encore  $J(\mathfrak{J})$  si le contexte est clair. En mathématiques constructives on utilise la définition suivante, classiquement équivalente :

$$J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ x \in \mathbf{A} \mid \forall y \in \mathbf{A}, \ 1 + xy \text{ est inversible modulo } \mathfrak{J} \} \quad (31)$$

On notera  $J_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n) = J(\mathbf{A}, \langle x_1, \dots, x_n \rangle)$  pour  $J_{\mathbf{A}}(\langle x_1, \dots, x_n \rangle)$ . L'idéal  $J_{\mathbf{A}}(0)$  est appelé le *radical de Jacobson de l'anneau  $\mathbf{A}$* .

**Définition 4.11** *On appelle treillis de Heitmann d'un anneau commutatif  $\mathbf{A}$  le treillis  $\text{He}(\text{Zar } \mathbf{A})$ , on le note  $\text{Heit } \mathbf{A}$ .*

En mathématiques classiques, vu le fait 4.2 et vue la définition du radical de Jacobson via les intersections d'idéaux maximaux, le fait suivant, qui conduit à une interprétation simple du treillis  $\text{Heit } \mathbf{A}$ , est évident. Nous sommes néanmoins intéressés par une preuve constructive directe.

**Fait 4.12** (radical de Jacobson)

La correspondance bijective  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}$  préserve le passage au radical de Jacobson. Autrement dit si  $\mathfrak{J}$  est un idéal de  $\mathbf{A}$  et  $\mathfrak{j} = \text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$ , alors  $J_{\text{Zar } \mathbf{A}}(\mathfrak{j}) = \text{IZ}_{\mathbf{A}}(J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J}))$ .

*Démonstration.*

Il suffit de montrer que pour tout  $x \in \mathbf{A}$ ,  $\tilde{x} \in J_{\text{Zar } \mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  si et seulement si  $\tilde{x} \in \text{IZ}_{\mathbf{A}}(J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J}))$ . Puisque  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$  est un idéal radical, on cherche donc à montrer l'équivalence

$$\forall x \in \mathbf{A} \quad (\tilde{x} \in J_{\text{Zar } \mathbf{A}}(\mathfrak{j}) \Leftrightarrow x \in J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J}))$$

Par définition  $\tilde{x} \in J_{\text{Zar } \mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  signifie

$$\forall y \in \text{Zar } \mathbf{A} \quad (\tilde{x} \vee y = 1_{\text{Zar } \mathbf{A}} \Rightarrow \exists z \in \mathfrak{j} \quad z \vee y = 1_{\text{Zar } \mathbf{A}})$$

c'est-à-dire encore puisque tout  $y \in \text{Zar } \mathbf{A}$  est de la forme  $D_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_k)$ ,

$$\forall y_1, \dots, y_k \in \mathbf{A} \quad (\langle x, y_1, \dots, y_k \rangle = 1_{\mathbf{A}} \Rightarrow \exists z \in \mathfrak{j} \quad z \vee D_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_k) = 1_{\text{Zar } \mathbf{A}})$$

ceci est immédiatement équivalent à

$$\forall y_1, \dots, y_k \in \mathbf{A} \quad (\langle x, y_1, \dots, y_k \rangle = 1_{\mathbf{A}} \Rightarrow \exists u \in \mathfrak{J} \quad \langle u, y_1, \dots, y_k \rangle = 1_{\mathbf{A}})$$

puis à

$$\forall y \in \mathbf{A} \quad (\langle x, y \rangle = 1_{\mathbf{A}} \Rightarrow \exists u \in \mathfrak{J} \quad \langle u, y \rangle = 1_{\mathbf{A}})$$

ou encore à : tout  $y \in \mathbf{A}$  de la forme  $1 + xa$  est inversible modulo  $\mathfrak{J}$ . C'est-à-dire  $x \in J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$ .  $\square$

**Corollaire 4.13** *Soient  $\mathfrak{j}_1$  et  $\mathfrak{j}_2$  deux idéaux de type fini de  $\mathbf{A}$ . Les éléments  $D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1)$  et  $D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2)$  de  $\text{Zar } \mathbf{A}$  sont égaux dans le quotient  $\text{Heit } \mathbf{A}$  si et seulement si  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1) = J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2)$ . En conséquence  $\text{Heit } \mathbf{A}$  s'identifie à l'ensemble des  $J_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$ , avec  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1) \wedge J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2) = J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2)$  et  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1) \vee J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2) = J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2)$ .*

*Remarques.*

1. Vu les bonnes propriétés de la correspondance  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}$  on a, avec  $\mathbf{T} = \text{Zar } \mathbf{A}$ ,  $\text{Zar}(\mathbf{A}/J_{\mathbf{A}}(0)) \simeq \mathbf{T}/(J_{\mathbf{T}}(0) = 0)$ . Par contre il ne semble pas qu'il y ait une  $\mathbf{A}$ -algèbre  $\mathbf{B}$  naturellement attachée à  $\mathbf{A}$  pour laquelle on ait  $\text{Zar } \mathbf{B} \simeq \text{He}(\text{Zar } \mathbf{A})$ .
2. Notez que, en général  $J_{\mathbf{A}}(x_1, \dots, x_n)$  est un idéal radical mais pas le radical d'un idéal de type fini.
3. On voit aussi facilement que  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1) \wedge J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2) = J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1) \cap J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2) = J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2)$  (cela résulte d'ailleurs du lemme 1.12). Il peut sembler surprenant que  $J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1) \cap J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2) = J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2)$  (c'est *a priori* moins clair que pour les  $D_{\mathbf{A}}$ ). Voici le calcul élémentaire qui (re)démontre ce fait. On a  $x \in J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_1)$  si et seulement si  $\forall y (1 + xy)$  est inversible modulo  $\mathfrak{j}_1$ , et  $x \in J_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}_2)$  si et seulement si  $\forall y (1 + xy)$  est inversible modulo  $\mathfrak{j}_2$ . Mais si  $a = 1 + xy$  est inversible modulo  $\mathfrak{j}_1$  et  $\mathfrak{j}_2$ , il est inversible modulo leur produit : en effet  $1 + aa_1 \in \mathfrak{j}_1$  et  $1 + aa_2 \in \mathfrak{j}_2$  impliquent que  $(1 + aa_1)(1 + aa_2)$ , qui se réécrit  $1 + aa'$ , est dans  $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2$ .

## 4.4 Dimension et bords de Krull

En mathématiques constructives on donne la définition suivante.

**Définition 4.14** *La dimension de Krull d'un anneau commutatif est la dimension de Krull de son treillis de Zariski.*

Vus le fait 4.2 et le théorème 3.1, il s'agit d'une définition équivalente à la définition usuelle en mathématiques classiques.

**Définition 4.15** *Soit  $\mathbf{A}$  un anneau commutatif,  $x \in \mathbf{A}$  et  $\mathfrak{j}$  un idéal de type fini.*

- (1) *Le bord supérieur de Krull de  $\mathfrak{j}$  dans  $\mathbf{A}$  est l'anneau quotient  $\mathbf{A}_K^{\mathfrak{j}} := \mathbf{A}/K_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  où*

$$K_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}) := \mathfrak{j} + (D_{\mathbf{A}}(0) : \mathfrak{j}) \tag{32}$$

*On note aussi  $\mathbf{A}_K^x = \mathbf{A}_K^{x\mathbf{A}}$  et on l'appelle le bord supérieur de  $x$  dans  $\mathbf{A}$ . On dira aussi que  $K_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  est l'idéal bord de Krull de  $\mathfrak{j}$ . On notera aussi  $K_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_n)$  pour  $K_{\mathbf{A}}(\langle y_1, \dots, y_n \rangle)$  et  $K_{\mathbf{A}}^x$  pour  $K_{\mathbf{A}}(x)$ .*

- (2) Le bord inférieur de Krull de  $x$  dans  $\mathbf{A}$  est l'anneau localisé  $\mathbf{A}_x^K := \mathbf{A}_{S_x^K}$  où  $S_x^K = x^{\mathbb{N}}(1+x\mathbf{A})$ .  
On dira aussi que le monoïde  $x^{\mathbb{N}}(1+x\mathbf{A})$  est le monoïde bord de Krull de  $x$ .

Ainsi un élément arbitraire de  $K_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_n)$  s'écrit  $\sum_i a_i y_i + b$  avec tous les  $b y_i$  nilpotents.

**Proposition 4.16** Soit  $x \in \mathbf{A}$  et  $\mathfrak{j} = \langle j_1, \dots, j_n \rangle$  un idéal de type fini. Considérons  $\tilde{x} \in \text{Zar } \mathbf{A}$  et  $\varphi = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}) = \tilde{j}_1 \vee \dots \vee \tilde{j}_n \in \text{Zar } \mathbf{A}$ . Alors

1. L'idéal bord de Krull de  $\varphi = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  dans  $\text{Zar } \mathbf{A}$ ,  $K_{\text{Zar } \mathbf{A}}^{\varphi}$ , est égal à  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}(K_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}))$ . En conséquence  $(\text{Zar } \mathbf{A})_{\mathbf{K}}^{\varphi}$  s'identifie naturellement avec  $\text{Zar}(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{j}})$ .
2. Le filtre bord de Krull de  $\tilde{x}$  dans  $\text{Zar } \mathbf{A}$ ,  $K_x^{\text{Zar } \mathbf{A}}$ , est égal à  $\text{FZ}(S_x^K)$ . En conséquence  $(\text{Zar } \mathbf{A})_x^K$  s'identifie naturellement avec  $\text{Zar}(\mathbf{A}_x^K)$ .

*Démonstration.*

Pour l'idéal bord, on a par définition  $K_{\text{Zar } \mathbf{A}}^{\varphi} = K_{\text{Zar } \mathbf{A}}(D_{\mathbf{A}}\varphi) = D_{\mathbf{A}}\varphi \vee (D_{\mathbf{A}}(0) : D_{\mathbf{A}}\varphi)$ . D'après les faits 4.2 et 4.4, il est égal à  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}(\varphi + (D_{\mathbf{A}}(0) : \varphi))$  et aussi à  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j} + (D_{\mathbf{A}}(0) : \mathfrak{j})) = \text{IZ}_{\mathbf{A}}(K_{\mathbf{A}}^{\mathfrak{j}})$ . Enfin pour les passages au quotient on applique le fait 4.3.

Pour le filtre bord de Krull, cela fonctionne de la même manière en utilisant les faits 4.7 et 4.9 puis en passant au treillis quotient avec le fait 4.8.  $\square$

Comme corollaire des propositions 3.10 et 4.16 on obtient l'analogue suivant du théorème 3.1, dans une version entièrement constructive. Rappelons que la dimension de Krull d'un anneau est  $-1$  si et seulement si l'anneau est trivial (i.e.,  $1_{\mathbf{A}} = 0_{\mathbf{A}}$ ).

**Théorème 4.17** Pour un anneau commutatif  $\mathbf{A}$  et un entier  $\ell \geq 0$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La dimension de Krull de  $\mathbf{A}$  est  $\leq \ell$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbf{A}$  la dimension de Krull de  $\mathbf{A}_x^K$  est  $\leq \ell - 1$ .
3. Pour tout idéal de type fini  $\mathfrak{j}$  de  $\mathbf{A}$  la dimension de Krull de  $\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{\mathfrak{j}}$  est  $\leq \ell - 1$ .
4. Pour tout  $x \in \mathbf{A}$  la dimension de Krull de  $\mathbf{A}_x^K$  est  $\leq \ell - 1$ .

Ce théorème nous donne une bonne signification intuitive de la dimension de Krull.

Avec le fait 4.2 on obtient le même théorème en mathématiques classiques.

Vu son importance, nous allons donner des preuves directes simples des équivalences entre les points 1, 2 et 4 en mathématiques classiques.

*Démonstration directe en mathématiques classiques.*

Montrons d'abord l'équivalence des points 1 et 2. Rappelons que les idéaux premiers de  $S^{-1}\mathbf{A}$  sont de la forme  $S^{-1}\mathfrak{p}$  où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $\mathbf{A}$  qui ne coupe pas  $S$ . L'équivalence résulte alors clairement des deux affirmations suivantes.

(a) Soit  $x \in \mathbf{A}$ , si  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal de  $\mathbf{A}$  il coupe toujours  $S_x^K$ . En effet si  $x \in \mathfrak{m}$  c'est clair et sinon,  $x$  est inversible modulo  $\mathfrak{m}$  ce qui signifie que  $1 + x\mathbf{A}$  coupe  $\mathfrak{m}$ .

(b) Si  $\mathfrak{m}$  est un idéal maximal de  $\mathbf{A}$ , et si  $x \in \mathfrak{m} \setminus \mathfrak{p}$  où  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier contenu dans  $\mathfrak{m}$ , alors  $\mathfrak{p} \cap S_x^K = \emptyset$  : en effet si  $x(1 + xy) \in \mathfrak{p}$  alors, puisque  $x \notin \mathfrak{p}$  on a  $1 + xy \in \mathfrak{p} \subset \mathfrak{m}$ , ce qui donne la contradiction  $1 \in \mathfrak{m}$  (puisque  $x \in \mathfrak{m}$ ).

Ainsi, si  $\mathfrak{p}_0 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{p}_{\ell}$  est une chaîne avec  $\mathfrak{p}_{\ell}$  maximal, elle est raccourcie d'au moins son dernier terme lorsqu'on localise en  $S_x^K$ , et elle n'est raccourcie que de son dernier terme si  $x \in \mathfrak{p}_{\ell} \setminus \mathfrak{p}_{\ell-1}$ .

L'équivalence des points 1 et 4 se démontre de manière «opposée», en remplaçant les idéaux premiers par les filtres premiers. On remarque d'abord que les filtres premiers de  $\mathbf{A}/\mathfrak{J}$  sont de la forme  $(S + \mathfrak{J})/\mathfrak{J}$ , où  $S$  est un filtre premier de  $\mathbf{A}$  qui ne coupe pas  $\mathfrak{J}$ . Il suffit alors de démontrer les deux affirmations «opposées» de (a) et (b) qui sont les suivantes :

(a') Soit  $x \in \mathbf{A}$ , si  $S$  est un filtre maximal de  $\mathbf{A}$  il coupe toujours  $K_{\mathbf{A}}^x$ . En effet si  $x \in S$  c'est clair et sinon, puisque  $S$  est maximal  $Sx^{\mathbb{N}}$  contient 0, ce qui signifie qu'il y a un entier  $n$  et un élément  $s$  de  $S$  tels que  $sx^n = 0$ . Alors  $(sx)^n = 0$  et  $s \in (\sqrt{0} : x) \subset K_{\mathbf{A}}^x$ .

(b') Si  $S$  est un filtre maximal de  $\mathbf{A}$ , et si  $x \in S \setminus S'$  où  $S' \subset S$  est un filtre premier, alors  $S' \cap K_{\mathbf{A}}^x = \emptyset$ . En effet si  $ax + b \in S'$  avec  $(bx)^n = 0$  alors, puisque  $x \notin S'$  on a  $ax \notin S'$  et, vu que  $S'$  est premier,  $b \in S' \subset S$ , mais comme  $x \in S$ ,  $(bx)^n = 0 \in S$  ce qui est absurde.  $\square$

En outre le théorème 4.17 redonne la caractérisation constructive élémentaire de cette dimension en terme d'identités algébriques comme dans [5, 29] :

**Corollaire 4.18** *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) *La dimension de Krull de  $\mathbf{A}$  est  $\leq \ell$*
- (2) *Pour tous  $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$  il existe  $b_0, \dots, b_\ell \in \mathbf{A}$  tels que*

$$\left. \begin{array}{l} D_{\mathbf{A}}(b_0 x_0) = D_{\mathbf{A}}(0) \\ D_{\mathbf{A}}(b_1 x_1) \leq D_{\mathbf{A}}(b_0, x_0) \\ \vdots \\ D_{\mathbf{A}}(b_\ell x_\ell) \leq D_{\mathbf{A}}(b_{\ell-1}, x_{\ell-1}) \\ D_{\mathbf{A}}(1) = D_{\mathbf{A}}(b_\ell, x_\ell) \end{array} \right\} \quad (33)$$

- (3) *Pour tous  $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$  il existe  $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{A}$  et  $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$  tels que*

$$x_0^{m_0} (x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell} (1 + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0$$

*Démonstration.*

Montrons l'équivalence de (1) et (3). Utilisons par exemple pour (1) la caractérisation via les localisés  $\mathbf{A}_x^{\mathbf{K}}$ . L'équivalence pour la dimension 0 est claire. Supposons la chose établie pour la dimension  $\leq \ell$ . On voit alors que  $S^{-1}\mathbf{A}$  est de dimension  $\leq \ell$  si et seulement si pour tous  $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$  il existe  $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{A}$ ,  $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$  et  $s \in S$  tels que

$$x_0^{m_0} (x_1^{m_1} \cdots (x_\ell^{m_\ell} (s + a_\ell x_\ell) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Il reste donc à remplacer  $s$  par un élément arbitraire de la forme  $x_{\ell+1}^{m_{\ell+1}} (1 + a_{\ell+1} x_{\ell+1})$ .

On a (3)  $\Rightarrow$  (2) en prenant :  $b_\ell = 1 + a_\ell x_\ell$ , et  $b_{k-1} = x_k^{m_k} b_k + a_{k-1} x_{k-1}$ , pour  $k = \ell, \dots, 1$ .

On a (2)  $\Rightarrow$  (1) en considérant la caractérisation (4) de la dimension de Krull d'un treillis distributif donnée dans la proposition 3.10 et en l'appliquant au treillis de Zariski  $\text{Zar } \mathbf{A}$  avec  $S = \{D_{\mathbf{A}}(x) \mid x \in \mathbf{A}\}$ . On pourrait aussi vérifier par un calcul direct que (2)  $\Rightarrow$  (3).  $\square$

*Remarque.* Le système d'inégalités (33) dans le point (2) du corollaire précédent établit une relation intéressante et symétrique entre les deux suites  $(b_0, \dots, b_\ell)$  et  $(x_0, \dots, x_\ell)$ . Lorsque  $\ell = 0$ , cela signifie  $D_{\mathbf{A}}(b_0) \wedge D_{\mathbf{A}}(x_0) = 0$  et  $D_{\mathbf{A}}(b_0) \vee D_{\mathbf{A}}(x_0) = 1$ , c'est-à-dire que les deux éléments  $D_{\mathbf{A}}(b_0)$  et  $D_{\mathbf{A}}(x_0)$  sont complémentaires l'un de l'autre dans  $\text{Zar } \mathbf{A}$ . Dans  $\text{Spec } \mathbf{A}$  cela signifie que les ouverts de base correspondants sont complémentaires. Nous introduisons donc la terminologie suivante : lorsque deux suites  $(b_0, \dots, b_\ell)$  et  $(x_0, \dots, x_\ell)$  vérifient les inégalités (33) nous dirons qu'elles sont *complémentaires*.

Signalons aussi qu'il est facile d'établir constructivement que  $\text{Kdim}(\mathbf{K}[X_1, \dots, X_n]) = n$  lorsque  $\mathbf{K}$  est un corps, ou même un anneau zéro dimensionnel (cf. [5]). On peut aussi traiter de façon constructive la dimension de Krull des anneaux géométriques (les  $\mathbf{K}$ -algèbres de présentation finie). Donc les théorèmes des sections 5 et suivantes ont un contenu algorithmique clair pour ces anneaux (comme pour tout anneau où l'on est capable d'expliciter constructivement la dimension de Krull).

*Remarque.* On a aussi (déjà démontré pour les treillis distributifs) les résultats suivants :

- si  $\mathbf{B}$  est un quotient ou un localisé de  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Kdim } \mathbf{B} \leq \text{Kdim } \mathbf{A}$ ,
- si  $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{A}$  et  $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i$ , alors  $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \sup_i \text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i)$ .
- si  $(S_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie de monoïdes comaximaux de  $\mathbf{A}$  alors  $\text{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_i \text{Kdim}(\mathbf{A}_{S_i})$ .
- en mathématiques classiques on a  $\text{Kdim}(\mathbf{A}) = \sup_{\mathfrak{m}} \text{Kdim}(\mathbf{A}_{\mathfrak{m}})$ , où  $\mathfrak{m}$  parcourt tous les idéaux maximaux.

*Remarque.* On peut illustrer le corollaire 4.18 ci-dessus en introduisant «l'idéal bord de Krull itéré». Pour  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$  considérons  $(\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{x_1})_{\mathbf{K}}^{x_2}$ ,  $((\mathbf{A}_{\mathbf{K}}^{x_1})_{\mathbf{K}}^{x_2})_{\mathbf{K}}^{x_3}$ , etc... les anneaux bords supérieurs

successifs, et notons  $K_{\mathbf{A}}[x_1, \dots, x_\ell]$  le noyau de la projection canonique  $\mathbf{A} \rightarrow (\dots (\mathbf{A}_K^{x_1}) \dots)^{x_\ell}_K$ . Alors on a  $y \in K_{\mathbf{A}}[x_0, \dots, x_\ell]$  si et seulement si  $\exists a_0, \dots, a_\ell \in \mathbf{T}$  et  $m_0, \dots, m_\ell \in \mathbb{N}$  vérifiant :

$$x_0^{m_0} (x_1^{m_1} \dots (x_\ell^{m_\ell} (y + a_\ell x_\ell) + \dots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Et la dimension de Krull est  $\leq \ell$  si et seulement si pour tous  $x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A}$  on a  $1 \in K_{\mathbf{A}}[x_0, \dots, x_\ell]$ .

## 4.5 Dimensions de Heitmann

### Le spectre de Heitmann

L'espace spectral que Heitmann a défini pour remplacer le  $j$ -spectrum, c'est-à-dire l'adhérence pour la topologie constructible du spectre maximal dans  $\text{Spec } \mathbf{A}$ , correspond à la définition suivante.

**Définition 4.19** On appelle spectre de Heitmann d'un anneau commutatif  $\mathbf{A}$  le sous-espace  $\text{Jspec}(\text{Zar } \mathbf{A})$  de  $\text{Spec } \mathbf{A}$ . On le note aussi  $\text{Jspec } \mathbf{A}$ . On note  $\text{jspec } \mathbf{A}$  pour  $\text{jspec}(\text{Zar } \mathbf{A})$ , c'est-à-dire le  $j$ -spectrum de l'anneau au sens usuel.

En mathématiques classiques le théorème 2.11 donne :

**Fait 4.20** Pour tout anneau commutatif  $\mathbf{A}$ , le spectre de Heitmann de  $\mathbf{A}$  s'identifie à l'espace spectral  $\text{Spec}(\text{Heit } \mathbf{A})$  (au sens des treillis distributifs).

On a alors la définition constructive élémentaire sans points de la dimension introduite par Heitmann.

**Définition 4.21** La  $J$ -dimension de Heitmann de  $\mathbf{A}$ , notée  $\text{Jdim } \mathbf{A}$ , est la dimension de Krull de  $\text{Heit}(\mathbf{A})$ , autrement dit c'est la  $\text{Jdim}$  de  $\text{Zar } \mathbf{A}$ .

En mathématiques classiques  $\text{Jdim } \mathbf{A}$  est égal à la dimension de l'espace spectral  $\text{Jspec } \mathbf{A}$ , définie de manière abstraite «avec points».

On peut aussi noter  $\text{jdim } \mathbf{A}$  pour la dimension de  $\text{jspec } \mathbf{A}$ , qui n'est pas un espace spectral (et nous ne proposons pas de définition constructive sans point pour cette dimension).

*Remarque.* Précisons la signification de  $\text{Jdim } \mathbf{A} \leq \ell$  dans le cas des anneaux commutatifs. Comme il s'agit de la dimension de Krull de  $\text{Heit } \mathbf{A}$  et que les éléments de  $\text{Heit } \mathbf{A}$  s'identifient aux radicaux de Jacobson d'idéaux de type fini on obtient la caractérisation suivante :

$\forall x_0, \dots, x_\ell \in \mathbf{A} \exists \mathfrak{a}_0, \dots, \mathfrak{a}_\ell$ , idéaux de type fini de  $\mathbf{A}$  tels que :

$$\begin{aligned} x_0 \mathfrak{a}_0 &\subseteq J_{\mathbf{A}}(0) \\ x_1 \mathfrak{a}_1 &\subseteq J_{\mathbf{A}}(\langle x_0 \rangle + \mathfrak{a}_0) \\ &\vdots \\ x_\ell \mathfrak{a}_\ell &\subseteq J_{\mathbf{A}}(\langle x_{\ell-1} \rangle + \mathfrak{a}_{\ell-1}) \\ (1) &= J_{\mathbf{A}}(\langle x_\ell \rangle + \mathfrak{a}_\ell) \end{aligned}$$

On ne peut apparemment pas éviter le recours aux idéaux de type fini et cela fait que l'on n'obtient pas une définition «au premier ordre».

Notez que chaque appartenance  $x \in J_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_m)$  s'exprime elle-même par :  $\forall z \in \mathbf{A}, 1 + xz$  est inversible modulo  $\langle y_1, \dots, y_m \rangle$ , c'est-à-dire encore

$$\forall z \in \mathbf{A} \exists t, u_1, \dots, u_m \in \mathbf{A}, 1 = (1 + xz)t + u_1 y_1 + \dots + u_m y_m.$$

### Dimension et bord de Heitmann

**Définition 4.22** La dimension de Heitmann d'un anneau commutatif est la dimension de Heitmann de son treillis de Zariski.

**Définition 4.23** Soit  $\mathbf{A}$  un anneau commutatif,  $x \in \mathbf{A}$  et  $\mathfrak{j}$  un idéal de type fini. Le bord de Heitmann de  $\mathfrak{j}$  dans  $\mathbf{A}$  est l'anneau quotient  $\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  avec

$$\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}) := \mathfrak{j} + (\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(0) : \mathfrak{j})$$

qui est aussi appelé l'idéal bord de Heitmann de  $\mathfrak{j}$  dans  $\mathbf{A}$ . On notera aussi  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_n)$  pour  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\langle y_1, \dots, y_n \rangle)$ ,  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}}^x$  pour  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(x)$  et  $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}^x$  pour  $\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}^x$ .

Ainsi un élément arbitraire de  $\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(y_1, \dots, y_n)$  s'écrit  $\sum_i a_i y_i + b$  avec tous les  $by_i$  dans  $\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(0)$ .

La proposition suivante résulte des bonnes propriétés de la correspondance bijective  $\text{IZ}_{\mathbf{A}}$  (voir les faits 4.2, 4.4, 4.12 et 4.3).

**Proposition 4.24** Pour un idéal de type fini  $\mathfrak{j}$  le bord de Heitmann de  $\mathfrak{j}$  au sens des anneaux commutatifs et celui au sens des treillis distributifs se correspondent. Plus précisément, avec  $\mathfrak{j} = \mathbf{D}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})$  et  $\mathbf{T} = \text{Zar } \mathbf{A}$ , on a :

$$\text{IZ}_{\mathbf{A}}(\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})) = \mathbf{H}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{j}), \text{ et } \text{Zar}(\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})) \simeq \mathbf{T}/(\mathbf{H}_{\mathbf{T}}(\mathfrak{j}) = 0) = \mathbf{T}_{\mathbf{H}}^{\mathfrak{j}}.$$

Comme corollaire des propositions 3.24 et 4.24 on obtient.

**Proposition 4.25** Pour un anneau commutatif  $\mathbf{A}$  et un entier  $\ell \geq 0$  les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La dimension de Heitmann de  $\mathbf{A}$  est  $\leq \ell$ .
2. Pour tout  $x \in \mathbf{A}$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(x)) \leq \ell - 1$ .
3. Pour tout idéal de type fini  $\mathfrak{j}$  de  $\mathbf{A}$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j})) \leq \ell - 1$ .

*Remarque.* La dimension de Heitmann de  $\mathbf{A}$  peut donc être définie de manière inductive comme suit :

- $\text{Hdim } \mathbf{A} = -1$  si et seulement si  $1_{\mathbf{A}} = 0_{\mathbf{A}}$ .
- Pour  $\ell \geq 0$ ,  $\text{Hdim } \mathbf{A} \leq \ell$  si et seulement si pour tout  $x \in \mathbf{A}$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(x)) \leq \ell - 1$ .

On peut illustrer cette définition. Nous introduisons «l'idéal bord de Heitmann itéré». Pour  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$  nous notons  $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}[x_1] = \mathbf{A}_{\mathbf{H}}^{x_1}$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}[x_1, x_2] = (\mathbf{A}_{\mathbf{H}}^{x_1})_{\mathbf{H}}^{x_2}$ ,  $\mathbf{A}_{\mathbf{H}}[x_1, x_2, x_3] = ((\mathbf{A}_{\mathbf{H}}^{x_1})_{\mathbf{H}}^{x_2})_{\mathbf{H}}^{x_3}$ , etc... les anneaux bords de Heitmann successifs, et  $\mathbf{H}[\mathbf{A}; x_1, \dots, x_k] = \mathbf{H}_{\mathbf{A}}[x_1, \dots, x_k]$  désigne le noyau de la projection canonique  $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}_{\mathbf{H}}[x_1, \dots, x_k]$ . Pour décrire ces idéaux nous avons besoin de la notation

$$[z, x, a, y, b] = 1 + (1 + (z + ax)xy)b.$$

Alors on a :

- $z \in \mathbf{H}_{\mathbf{A}}[x_0]$  si et seulement si :

$$\exists a_0 \forall y_0 \exists b_0, [z, x_0, a_0, y_0, b_0] = 0$$

- $z \in \mathbf{H}_{\mathbf{A}}[x_0, x_1]$  si et seulement si :

$$\exists a_1 \forall y_1 \exists b_1 \exists a_0 \forall y_0 \exists b_0, [[z, x_1, a_1, y_1, b_1], x_0, a_0, y_0, b_0] = 0$$

- $z \in \mathbf{H}_{\mathbf{A}}[x_0, x_1, x_2]$  si et seulement si :

$$\exists a_2 \forall y_2 \exists b_2 \exists a_1 \forall y_1 \exists b_1 \exists a_0 \forall y_0 \exists b_0, [[[z, x_2, a_2, y_2, b_2], x_1, a_1, y_1, b_1], x_0, a_0, y_0, b_0] = 0$$

Et ainsi de suite. Et la dimension de Heitmann est  $\leq \ell$  si et seulement si pour tous  $x_0, \dots, x_{\ell} \in \mathbf{A}$  on a  $1 \in \mathbf{H}_{\mathbf{A}}[x_0, \dots, x_{\ell}]$ .

**Proposition 4.26** Soit  $\mathfrak{j} = \langle j_1, \dots, j_n \rangle$  un idéal de type fini. Notons  $\varphi = \mathbf{J}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}) = \mathbf{J}_{\mathbf{A}}(j_1) \vee \dots \vee \mathbf{J}_{\mathbf{A}}(j_n)$ . Alors  $\text{Heit}(\mathbf{A}/\mathbf{H}_{\mathbf{A}}(\mathfrak{j}))$  s'identifie naturellement avec un quotient de  $(\text{Heit } \mathbf{A})_{\mathbf{K}}^{\varphi}$ . Il y a égalité lorsque  $\text{Heit } \mathbf{A}$  est une algèbre de Heyting, donc en particulier lorsque  $\text{Jspec } \mathbf{A}$  est noethérien.

*Démonstration.*

Déjà démontré pour un treillis distributif arbitraire à la place de  $\mathbf{Zar} \mathbf{A}$  (proposition 3.16).  $\square$

*Remarque.* On a aussi (déjà démontré pour les treillis distributifs) les résultats suivants :

- on a toujours  $\text{Hdim} \mathbf{A} \leq \text{Jdim} \mathbf{A} \leq \text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(0))$ ,
- si  $(\mathfrak{a}_i)_{1 \leq i \leq m}$  une famille finie d'idéaux de  $\mathbf{A}$  et  $\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^m \mathfrak{a}_i$ , alors  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}) = \sup_i \text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{a}_i)$ .
- si  $\text{Heit} \mathbf{A}$  est une algèbre de Heyting (en particulier si  $\text{Jspec} \mathbf{A}$  est noethérien) on a  $\text{Hdim} \mathbf{A} = \text{Jdim} \mathbf{A}$ ,
- si  $\text{jspec} \mathbf{A}$  est noethérien, alors  $\text{jspec} \mathbf{A} = \text{Jspec} \mathbf{A}$  et  $\text{Hdim} \mathbf{A} = \text{Jdim} \mathbf{A} = \text{jdim} \mathbf{A}$ .
- $\text{Hdim} \mathbf{A} \leq 0 \Leftrightarrow \text{Jdim} \mathbf{A} \leq 0 \Leftrightarrow \text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathbf{J}_{\mathbf{A}}(0)) \leq 0$ .

Notez que le treillis  $\text{Heit} \mathbf{A}$  est une algèbre de Heyting si et seulement si est vérifiée la propriété suivante :

$$\forall \mathfrak{a}, \mathfrak{b} \in \text{Heit} \mathbf{A} \exists \mathfrak{c} \in \text{Heit} \mathbf{A} (\mathfrak{c}\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \text{ et } \forall x \in \mathbf{A} (x\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \Rightarrow x \in \mathfrak{c}))$$

$$(\mathfrak{a} = \mathbf{J}_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n), \mathfrak{b} = \mathbf{J}_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_m), \mathfrak{c} = \mathbf{J}_{\mathbf{A}}(c_1, \dots, c_\ell)).$$

## 5 Le théorème de Kronecker et le stable range de Bass (versions non noethériennes de Heitmann)

Dans cette section et celles qui suivent on établit la version élémentaire, non noethérienne et constructive des théorèmes cités dans les titres. La version classique de ces théorèmes est pour l'essentiel due à Heitmann [22], hormis pour le théorème de Swan et le « Bass cancellation theorem » traités dans la section 7.

Pour le théorème de Kronecker en particulier seule la dimension de Krull intervient, et le théorème se trouve donc dans [22] (voir aussi [21]).

Pour les autres théorèmes des sections 5 et 6, notre « dimension de Heitmann » peut être dans certains cas strictement plus petite que la dimension utilisée par Heitmann (celle de son  $\text{J-spectrum}$ ), et donc notre version est dans ce cas « meilleure ».

Enfin concernant le théorème de Swan et toute la section 7. Nos versions sont constructives et non noethériennes, et la « dimension de Heitmann » que nous utilisons coïncide dans le cas où  $\text{jspec} \mathbf{A}$  est noethérien avec celle utilisée par Swan, ce qui n'est pas le cas de la  $\delta$ -dim utilisée par Heitmann.

Les preuves données dans les sections suivantes sont essentiellement celles de [4] (pour le théorème de Kronecker) et de [6], quelquefois améliorées en tenant compte de [10]. Nous avons rajouté en outre quelques précisions, ainsi que les résultats de la section 5.3.

### 5.1 Le théorème de Kronecker

Ce théorème a d'abord été démontré par Kronecker sous la forme suivante ([27]) : une variété algébrique dans  $\mathbb{C}^n$  peut toujours être définie par  $n + 1$  équations.

Il a été étendu au cas des anneaux noethériens (par van der Waerden, dans [34]) sous la forme suivante : dans un anneau noethérien de dimension de Krull  $n$ , tout idéal a même radical qu'un idéal engendré par au plus  $n + 1$  éléments.

La version de Kronecker a été améliorée par divers auteurs dans [12, 32] qui ont montré que  $n$  équations suffisent en général. On peut trouver une preuve constructive de ce théorème dans [8]. Par ailleurs on ne sait toujours pas si toute courbe dans l'espace complexe de dimension 3 est ou non intersection de deux surfaces.

Heitmann [22] a enfin généralisé la version van der Waerden au cas non noethérien.

Le lemme suivant, bien que terriblement anodin, est une clef essentielle.

**Lemme 5.1** *Pour  $u, v \in \mathbf{A}$  on a*

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{A}}(u, v) &= D_{\mathbf{A}}(u + v, uv) = D_{\mathbf{A}}(u + v) \vee D_{\mathbf{A}}(uv) \quad \text{et donc aussi} \\ J_{\mathbf{A}}(u, v) &= J_{\mathbf{A}}(u + v, uv) = J_{\mathbf{A}}(u + v) \vee J_{\mathbf{A}}(uv) \end{aligned}$$

En particulier

- Si  $uv \in D_{\mathbf{A}}(0)$ , alors  $D_{\mathbf{A}}(u, v) = D_{\mathbf{A}}(u + v)$
- Si  $uv \in J_{\mathbf{A}}(0)$ , alors  $J_{\mathbf{A}}(u, v) = J_{\mathbf{A}}(u + v)$

Rappelons que deux suites qui vérifient les inégalités (33) dans le corollaire 4.18 sont dites complémentaires.

**Lemme 5.2** Si  $(b_1, \dots, b_n)$  et  $(x_1, \dots, x_n)$  sont deux suites complémentaires dans  $\mathbf{A}$  alors pour tout  $a \in \mathbf{A}$  on a :

$$D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n),$$

c'est-à-dire encore :  $a \in D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$ .

*Démonstration.*

Pour  $n = 0$  l'anneau est trivial et  $D_{\mathbf{A}}(a) = D_{\mathbf{A}}(\emptyset)$ .

Faisons aussi le cas  $n = 1$  bien que ce soit inutile (vue la preuve par récurrence). On a  $b_1x_1 \in D_{\mathbf{A}}(0)$  et  $1 \in D_{\mathbf{A}}(b_1, x_1)$ . A fortiori  $b_1ax_1 \in D_{\mathbf{A}}(0)$  et  $a \in D_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1)$ . Et le lemme 5.1 nous dit que  $D_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$ .

Donnons maintenant la preuve de la récurrence. On considère l'anneau  $\mathbf{B} = \mathbf{A}/D_{\mathbf{A}}(b_1, x_1)$ . Par hypothèse de récurrence on a pour tout  $a$ ,

$$a \in D_{\mathbf{B}}(b_2 + ax_2, \dots, b_n + ax_n).$$

Cela signifie dans  $\mathbf{A}$

$$a \in D_{\mathbf{A}}(b_1, x_1, b_2 + ax_2, \dots, b_n + ax_n).$$

On en déduit  $a \in D_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1, b_2 + ax_2, \dots, b_n + ax_n)$  (car  $a \in D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$  implique  $a \in D_{\mathbf{A}}(a\mathfrak{J})$ ). Mais  $D_{\mathbf{A}}(b_1x_1) = 0$  implique  $D_{\mathbf{A}}(b_1ax_1) = 0$  et le lemme 5.1 nous dit que  $D_{\mathbf{A}}(b_1, ax_1) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1)$ .  $\square$

**Théorème 5.3** (de Kronecker, avec la dimension de Krull, sans noethérianité)

Soit  $n \geq 0$ . Si  $\text{Kdim } \mathbf{A} < n$  et  $b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$  alors il existe  $x_1, \dots, x_n$  tels que pour tout  $a \in \mathbf{A}$   $D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$ .

En conséquence, dans un anneau de dimension de Krull  $\leq n$ , tout idéal de type fini a même radical qu'un idéal engendré par au plus  $n + 1$  éléments.

*Démonstration.*

Le premier point est clair d'après le lemme 5.2 et le corollaire 4.18. La deuxième affirmation en découle car il suffit d'itérer le processus. En fait, si  $\text{Kdim } \mathbf{A} \leq n$  et  $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_{n+r})$  ( $r \geq 2$ ) on obtient en fin de compte  $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(b_1 + c_1, \dots, b_{n+1} + c_{n+1})$  avec les  $c_i \in \langle b_{n+2}, \dots, b_{n+r} \rangle$ .  $\square$

## 5.2 Le théorème «stable range» de Bass

Le théorème suivant est dû à Bass dans le cas noethérien avec la dimension de Krull. La version non noethérienne avec la  $\text{Jdim}$  est due à Heitmann. Nous donnons ici la version non noethérienne avec la  $\text{Hdim}$ , a priori plus générale.

Notez que la version non noethérienne avec la dimension de Krull résulte directement du premier point dans le théorème 5.3.

**Théorème 5.4** (de Bass, avec la dimension de Heitmann, sans noethérianité)

Soit  $n \geq 0$ . Si  $\text{Hdim } \mathbf{A} < n$  et  $1 \in \langle a, b_1, \dots, b_n \rangle$  alors il existe  $x_1, \dots, x_n$  tels que  $1 \in \langle b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n \rangle$ .

*Démonstration.*

On remarque que pour toute liste  $L$

$$1 \in \langle L \rangle \Leftrightarrow 1 \in D_{\mathbf{A}}(L) \Leftrightarrow 1 \in J_{\mathbf{A}}(L).$$



La preuve qui suit peut être considérée comme une répétition de celle du théorème 5.3 lorsque  $a = 1$  en remplaçant le bord de Krull par le bord de Heitmann. La preuve est par récurrence sur  $n$ .

Lorsque  $n = 0$  l'anneau est trivial et  $D_{\mathbf{A}}(1) = D_{\mathbf{A}}(\emptyset)$ .

Supposons  $n \geq 1$ . Soit  $\mathfrak{j} = H_{\mathbf{A}}(b_n)$  l'idéal bord de Heitmann de  $b_n$ . Puisque  $\mathbf{A}/\mathfrak{j}$  est de dimension de Heitmann  $\leq n - 2$  l'hypothèse de récurrence nous donne  $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{A}$  tels que

$$1 \in D(b_1 + x_1 a, \dots, b_{n-1} + x_{n-1} a) \quad \text{dans } \mathbf{A}/\mathfrak{j}.$$

Notons  $L$  pour  $b_1 + x_1 a, \dots, b_{n-1} + x_{n-1} a$ . Par définition du bord de Heitmann, l'égalité ci-dessus implique qu'il existe  $x_n$  tel que

$$x_n b_n \in J_{\mathbf{A}}(0) \quad \text{et} \quad 1 \in D_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n) = D_{\mathbf{A}}(L, b_n) \vee D_{\mathbf{A}}(x_n)$$

Puisque

$$1 \in D_{\mathbf{A}}(L, b_n, a) = D_{\mathbf{A}}(L, b_n) \vee D_{\mathbf{A}}(a)$$

cela implique par distributivité

$$1 \in D_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a) = J_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a)$$

Puisque  $b_n x_n a \in J_{\mathbf{A}}(0)$  le lemme 5.1 nous dit que  $J_{\mathbf{A}}(b_n, x_n a) = J_{\mathbf{A}}(b_n + x_n a)$ , et donc que

$$J_{\mathbf{A}}(L, b_n + x_n a) = J_{\mathbf{A}}(L, b_n, x_n a) = \langle 1 \rangle,$$

ce qui était le but recherché.  $\square$

Rappelons qu'un vecteur  $L$  de  $\mathbf{A}^m$  est dit *unimodulaire* lorsque ses coordonnées engendrent l'idéal  $\langle 1 \rangle$ , c'est-à-dire encore lorsque  $D_{\mathbf{A}}(L) = 1$ .

**Corollaire 5.5** *Soit  $n \geq 0$ . Si  $\text{Hdim } \mathbf{A} \leq n$  et  $V \in \mathbf{A}^{n+2}$  est unimodulaire, il peut être transformé en le vecteur  $(1, 0, \dots, 0)$  par des manipulations élémentaires.*

Il s'ensuit alors directement qu'un module stablement libre de rang  $\geq n + 1$  sur un anneau dont la dimension de Heitmann est  $\leq n$  est libre (comme dans [28], p. 28), sans aucune hypothèse noethérienne.

### 5.3 Une généralisation de Heitmann

On traite ici constructivement le corollaire 2.2 de Heitmann [22], qui généralise à la fois les résultats de Bass et Kronecker. Cela débouche sur une amélioration du théorème de Kronecker. Dans [22] ces résultats sont établis pour la Jdim.

**Lemme 5.6** *Soient  $a, c_1, \dots, c_m, u, v, w \in \mathbf{A}$ . Notons  $Z = c_1, \dots, c_m$ .*

1. *On a  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z) \iff 1 \in \langle Z \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$ .*
2.  *$w \in J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$  et  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, w) \Rightarrow a \in D_{\mathbf{A}}(Z)$ .*
3.  *$uv \in J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$  et  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, u, v) \Rightarrow a \in D_{\mathbf{A}}(Z, u + v)$ .*

*Démonstration.*

1. Immédiat.

2. Supposons  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, w)$  et travaillons dans l'anneau  $\mathbf{A}[a^{-1}]$ . On a  $1 \in \langle Z \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]} + \langle w \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$  et comme  $w$  est dans  $J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$ , cela implique  $1 \in \langle Z \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$ , i.e.  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z)$ .

3. Résulte du point 2 car  $D_{\mathbf{A}}(Z, u, v) = D_{\mathbf{A}}(Z, u + v, uv)$  (lemme 5.1).  $\square$

*Remarque.* On peut se demander si l'idéal  $J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$  est le meilleur possible. La réponse est oui. L'implication du point 2 est vérifiée (pour tous  $c_1, \dots, c_m$ ) en remplaçant  $J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$  par  $\mathfrak{J}$  si et seulement si  $\mathfrak{J} \subseteq J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$ .

Voici le corollaire 2.2 de Heitmann [22], avec la Hdim qui remplace la Jdim. Si  $L = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbf{A}^n$  nous écrivons  $D_{\mathbf{A}}(L)$  pour  $D_{\mathbf{A}}(b_1, \dots, b_n)$ .

**Lemme 5.7** *Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) < n$ ,  $L \in \mathbf{A}^n$  et  $D_{\mathbf{A}}(b) \leq D_{\mathbf{A}}(a) \leq D_{\mathbf{A}}(b, L)$  alors il existe  $X \in \mathbf{A}^n$  tel que  $D_{\mathbf{A}}(L + bX) = D_{\mathbf{A}}(b, L)$ , ce qui équivaut à  $b \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$  ou encore à  $a \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$ . En outre nous pouvons prendre  $X = aY$  avec  $Y \in \mathbf{A}^n$ .*

*Démonstration.*

*Remarque préliminaire.* Si  $D_{\mathbf{A}}(L + bX) = D_{\mathbf{A}}(b, L)$ , on a évidemment  $b \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$  mais aussi  $a \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$  car  $a \in D_{\mathbf{A}}(b, L)$ . Réciproquement, si  $b \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$ , on a  $D_{\mathbf{A}}(L + bX) = D_{\mathbf{A}}(b, L)$ ; a fortiori, si  $a \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$ , on a  $b \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$  (puisque  $b \in D_{\mathbf{A}}(a)$ ), donc aussi  $D_{\mathbf{A}}(L + bX) = D_{\mathbf{A}}(b, L)$ .

On raisonne par récurrence sur  $n$ , le cas  $n = 0$  étant trivial. On commence par chercher  $X \in \mathbf{A}^n$ . Soient  $\mathfrak{j} = \text{H}_{\mathbf{A}[a^{-1}]}(b_n)$  et  $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/(\mathfrak{j} \cap \mathbf{A})$  où  $\mathfrak{j} \cap \mathbf{A}$  est mis pour «l'image réciproque de  $\mathfrak{j}$  dans  $\mathbf{A}$ ». On a une identification  $\mathbf{A}[a^{-1}]/\mathfrak{j} = \mathbf{A}'[a^{-1}]$ . Comme  $\text{Hdim}(\mathbf{A}'[a^{-1}]) < n - 1$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $\mathbf{A}'$  et  $a, b, b_1, \dots, b_{n-1}$  (en remarquant que  $b_n = 0$  dans  $\mathbf{A}'$ ); on obtient  $x_1, \dots, x_{n-1} \in \mathbf{A}$  tels que  $D(b_1 + bx_1, \dots, b_{n-1} + bx_{n-1}) = D(b, b_1, \dots, b_{n-1})$  dans  $\mathbf{A}'$ . D'après la remarque préliminaire, cette égalité équivaut, en notant  $Z$  pour  $(b_1 + bx_1, \dots, b_{n-1} + bx_{n-1})$ , à

$$a \in D(Z) \quad \text{dans } \mathbf{A}'.$$

L'appartenance ci-dessus signifie  $1 \in \langle Z \rangle$  dans  $\mathbf{A}'[a^{-1}]$ , i.e.  $1 \in \langle Z \rangle + \mathfrak{j}$  dans  $\mathbf{A}[a^{-1}]$ . Par définition du bord de Heitmann, cela veut dire qu'il existe  $x_n$  que l'on peut choisir dans  $\mathbf{A}$ , tel que  $x_n b_n \in J_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}[a^{-1}], 0)$  et  $1 \in \langle Z, b_n, x_n \rangle_{\mathbf{A}[a^{-1}]}$ . On a donc  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, b_n, x_n)$ . Mais on a aussi  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, b_n, b)$ , puisque

$$\langle Z, b_n, b \rangle = \langle b_1, \dots, b_{n-1}, b_n, b \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \langle L, b \rangle$$

et que  $a \in D_{\mathbf{A}}(L, b)$  par hypothèse. Bilan :  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, b_n, x_n)$ ,  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, b_n, b)$  donc  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, b_n, bx_n)$ . L'application du lemme 5.6  $\mathcal{P}$  avec  $u = b_n$ ,  $v = bx_n$  fournit  $a \in D_{\mathbf{A}}(Z, b_n + bx_n)$ , i.e.  $a \in D_{\mathbf{A}}(L + bX)$  où  $X = (x_1, \dots, x_n)$ .

Enfin, si  $b^p \in \langle a \rangle_{\mathbf{A}}$ , nous pouvons appliquer le résultat avec  $b^{p+1}$  à la place de  $b$  puisque  $D_{\mathbf{A}}(b) = D_{\mathbf{A}}(b^{p+1})$ . Alors  $L + b^{p+1}X$  se réécrit  $L + baY$ .  $\square$

Pour  $a \in \mathbf{A}$  on a toujours  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) \leq \text{Kdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) \leq \text{Kdim}(\mathbf{A})$ . Par conséquent le théorème suivant améliore le théorème de Kronecker.

**Théorème 5.8** (de Kronecker, variante dimension de Heitmann)

1. Soit  $n \geq 0$ . Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) < n$  et  $a, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$  alors il existe  $x_1, \dots, x_n \in \mathbf{A}$  tels que  $D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n)$ .
2. En conséquence, si  $a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n \in \mathbf{A}$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a_i^{-1}]) < n$  pour  $1 \leq i \leq r$  alors il existe  $y_1, \dots, y_n \in \langle a_1, \dots, a_r \rangle$  tels que

$$D_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(b_1 + y_1, \dots, b_n + y_n).$$

*Démonstration.*

1. Conséquence directe du lemme 5.7 en faisant  $a = b$ .

2. Se déduit de 1 par récurrence sur  $r$  :  $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_n) = D_{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_{r-1}, b_1, \dots, b_n) \vee D_{\mathbf{A}}(a_r) = \mathfrak{J} \vee D_{\mathbf{A}}(a_r)$ ,  $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(b_1 + z_1, \dots, b_n + z_n)$  avec  $z_1, \dots, z_n \in \langle a_1, \dots, a_{r-1} \rangle$ , donc  $\mathfrak{J} = D_{\mathbf{A}}(a_r, b_1 + z_1, \dots, b_n + z_n)$  et on applique une nouvelle fois le résultat.  $\square$

*Remarque.* Dans le cas d'un anneau local noethérien  $\mathbf{A}$ , l'idéal maximal est radicalement engendré par  $n = \text{Kdim } \mathbf{A}$  éléments, mais pas moins. Ceci montre que parmi  $n$  «générateurs radicaux» du maximal, il n'y en a aucun vérifiant  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[x^{-1}]) < n - 1$ . Par ailleurs  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) = 0$  puisque  $\mathbf{A}$  est local.

## 6 Le splitting off de Serre et le théorème de Forster, à la Heitmann

Dans cette section nous donnons une version constructive du travail de Heitmann [22] concernant le splitting off de Serre, le théorème de Forster et une variation sur le théorème de Swan. Nous remplaçons la  $\text{Jdim}$  par la  $\text{Hdim}$ , qui est plus facile à manipuler et donne des résultats *a priori* plus précis.

Dans la section suivante, nous donnerons des théorèmes qui sont « meilleurs » dans la mesure où ils sont plus faciles à mettre en œuvre (l'hypothèse est moins lourde car elle ne fait pas intervenir la dimension de nombreux localisés) et où la dimension de Heitmann est mal contrôlée lors d'une localisation.

### 6.1 Manipulations élémentaires de colonnes

**Lemme 6.1** *Si  $a \in \mathbf{A}$ ,  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) < n$  et  $L \in \mathbf{A}^n$  il existe  $X \in \mathbf{A}^n$  tel que  $a \in D_{\mathbf{A}}(L - aX)$ . En outre nous pouvons prendre  $X = aY$  avec  $Y \in \mathbf{A}^n$ .*

*Démonstration.*

Cas particulier du lemme 5.7 : faire  $a = b$ . □

Pour  $n = 1$  cela donne : si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[a^{-1}]) \leq 0$  alors pour tout  $b$  on peut trouver  $x$  tel que  $a \in D_{\mathbf{A}}(b + xa)$ .

**Corollaire 6.2** *Soit  $M$  une matrice dans  $\mathbf{A}^{n \times n}$  et  $\delta$  son déterminant. Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[\delta^{-1}]) < n$  alors pour tout  $C \in \mathbf{A}^n$  il existe  $X \in \mathbf{A}^n$  tel que  $\delta \in D_{\mathbf{A}}(MX - C)$ . En outre nous pouvons trouver  $X$  de la forme  $\delta Y$ ,  $Y \in \mathbf{A}^n$ .*

*Démonstration.*

La preuve est basée sur les formules de Cramer. Soit  $\widetilde{M}$  la matrice adjointe de  $M$ , et  $L = \widetilde{M}C$ . Nous avons  $\widetilde{M}(MX - C) = \delta X - L$  pour un vecteur colonne arbitraire  $X \in \mathbf{A}^n$ . Donc l'idéal engendré par les coordonnées de  $\delta X - L$  est inclus dans celui engendré par les coordonnées de  $MX - C$ , et

$$D_{\mathbf{A}}(\delta X - L) \leq D_{\mathbf{A}}(MX - C)$$

D'après le lemme 6.1 nous pouvons trouver un  $X \in \mathbf{A}^n$  tel que  $\delta \in D_{\mathbf{A}}(\delta X - L)$ , et donc  $\delta \in D_{\mathbf{A}}(MX - C)$  comme demandé. □

Pour la fin de cette section nous fixons les notations suivantes :

**Notation 6.3** Soit  $F$  une matrice dans  $\mathbf{A}^{n \times p}$  avec pour colonnes  $C_0, C_1, \dots, C_p$ , et  $G$  la matrice ayant pour colonnes  $C_1, C_2, \dots, C_p$ . Soit  $\Delta_k(F)$  l'idéal déterminantiel d'ordre  $k$  de  $F$  (l'idéal engendré par les mineurs  $\nu$  d'ordre  $k$  de  $F$ ).

**Théorème 6.4** *Fixons  $0 < k \leq p$ . Supposons que pour chaque mineur  $\nu$  d'ordre  $k$  de  $G$  l'anneau  $\mathbf{A}[\nu^{-1}]$  est de dimension de Heitmann  $< k$ . Alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que*

$$D_{\mathbf{A}}(C_0, \Delta_k(F)) \leq D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p),$$

(i.e.,  $\Delta_k(F) \subseteq D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p)$  et  $D_{\mathbf{A}}(C_0) \leq D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p)$ ).

*Démonstration.*

L'inclusion  $\Delta_k(F) \subseteq D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p) = D_{\mathbf{A}}(C'_0)$  signifie que pour tout mineur  $\nu$  d'ordre  $k$  de  $F$  on a  $\nu \in D_{\mathbf{A}}(C'_0)$ . Soit  $\Delta_k(G)$  l'idéal déterminantiel d'ordre  $k$  de  $G$ . Remarquons que si le mineur  $\nu$  fait intervenir la colonne  $C_0$  et les colonnes  $C_{i_j}$  ( $1 \leq i_1 < \dots < i_{k-1} \leq p$ ) alors on peut y remplacer la colonne  $C_0$  par la colonne  $C'_0 = C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p$  sans modifier sa valeur autrement qu'en ajoutant une combinaison linéaire de mineurs d'ordre  $k$  de  $G$ , de sorte

que  $\nu \in D_{\mathbf{A}}(C'_0, \Delta_k(G))$ . En conclusion il nous suffit de réaliser  $\Delta_k(G) \subseteq D_{\mathbf{A}}(C'_0)$  pour avoir  $\Delta_k(F) \subseteq D_{\mathbf{A}}(C'_0)$ .

En fait il suffit de savoir réaliser

$$D_{\mathbf{A}}(C_0, \nu_1) \leq D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p) = D_{\mathbf{A}}(C'_0)$$

pour un mineur  $\nu_1$  d'ordre  $k$  de  $G$ . Car alors nous remplaçons  $C_0$  par  $C'_0$  dans  $F$  (ce qui ne change pas  $G$ ) et nous pouvons passer à un autre mineur  $\nu_2$  de  $G$  pour lequel nous obtiendrons  $t'_1, \dots, t'_p$  avec

$$D_{\mathbf{A}}(C_0, \nu_1, \nu_2) \leq D_{\mathbf{A}}(C'_0, \nu_2) \leq D_{\mathbf{A}}(C'_0 + t'_1 C_1 + \cdots + t'_p C_p) = D_{\mathbf{A}}(C''_0)$$

avec  $C''_0 = C_0 + t''_1 C_1 + \cdots + t''_p C_p$  et ainsi de suite.

Pour réaliser

$$\nu \in D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p) \quad \text{et} \quad D_{\mathbf{A}}(C_0) \leq D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p)$$

pour un mineur  $\nu$  d'ordre  $k$  de  $G$  nous utilisons le corollaire 6.2 : nous trouvons  $t_1, \dots, t_p \in \nu \mathbf{A}$  (avec  $t_i = 0$  pour les colonnes qui n'interviennent pas dans le mineur  $\nu$ ) tels que

$$\nu \in D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p) = D_{\mathbf{A}}(C'_0)$$

Puisque  $t_1, \dots, t_p$  sont des multiples de  $\nu$  nous avons aussi  $D_{\mathbf{A}}(C_0) \leq D_{\mathbf{A}}(\nu, C'_0) = D_{\mathbf{A}}(C'_0)$  comme demandé.  $\square$

Toujours avec les notations 6.3, nous obtenons le corollaire suivant.

**Théorème 6.5** *Supposons que  $1 \in \Delta_1(F)$  et que pour  $k = 1, \dots, p$  et chaque mineur  $\nu$  d'ordre  $k$  de  $G$  l'anneau  $\mathbf{A}[\nu^{-1}]/\Delta_{k+1}(F)$  est de dimension de Heitmann  $< k$ . Alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que le vecteur  $C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p$  est unimodulaire. En particulier si  $k \leq p$ ,  $1 \in \Delta_k(F)$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}[\nu^{-1}]) < k$  pour tout  $\nu \in \mathbf{A}$ , il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que le vecteur  $C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p$  est unimodulaire.*

*Démonstration.*

En utilisant le théorème 6.4, nous définissons une suite de vecteurs  $C_0^k$ ,  $k = 1, \dots, p$  avec  $C_0^1 = C_0$ . Pour  $k = 1, \dots, p$ , nous raisonnons dans  $\mathbf{A}_k = \mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$ . Nous construisons  $C_0^{k+1}$  de la forme  $C_0^k + u_1^k C_1 + \cdots + u_p^k C_p$  tel que  $D_{\mathbf{A}_k}(C_0^k, \Delta_k(F)) \leq D_{\mathbf{A}_k}(C_0^{k+1})$ . Cela signifie que nous avons, dans  $\mathbf{A}$

$$D_{\mathbf{A}}(C_0^k, \Delta_k(F)) \leq D_{\mathbf{A}}(C_0^{k+1}, \Delta_{k+1}(F))$$

D'où le résultat puisque  $\Delta_1(F) = 1$  et  $\Delta_{p+1}(F) = 0$ .  $\square$

Un cas particulier plus simple s'énonce avec la dimension de Krull. Notez que la matrice  $G$  ne figure plus dans l'hypothèse. La conclusion resterait donc valable après avoir permuté des colonnes.

**Théorème 6.6** *Supposons que  $1 = \Delta_1(F)$  et que pour  $k = 1, \dots, p$ , l'anneau  $\mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$  est de dimension de Krull  $< k$ . Alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que le vecteur  $C_0 + t_1 C_1 + \cdots + t_p C_p$  est unimodulaire.*

*En particulier si  $\text{Kdim } \mathbf{A} < k \leq p$  et  $\Delta_k(F) = 1$ , il existe un vecteur unimodulaire dans le module image de  $F$ .*

Notez que la condition  $1 \in \Delta_1(F)$  peut se relire « $\mathbf{A}/\Delta_1(F)$  est de dimension de Krull  $< 0$ ». On aurait donc pu énoncer l'hypothèse du théorème sous la forme : pour chaque  $k \geq 0$  l'anneau  $\mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$  est de dimension de Krull  $< k$ .

Nous donnons maintenant en mathématiques classiques une reformulation «avec idéaux premiers» du théorème 6.5 dans lequel on remplace la dimension de Heitmann par la dimension de Krull. Dans l'énoncé qui suit,  $D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$  pour un idéal de type fini  $\mathfrak{J}$  est identifié à l'ouvert quasi-compact correspondant de  $\text{Spec } \mathbf{A}$  et  $V_{\mathbf{A}}(\mathfrak{J})$  est son complémentaire.

**Théorème 6.7** *Pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  notons  $r_{\mathfrak{p}}$  le rang de la matrice  $F$  vue dans le corps des fractions de  $\mathbf{A}/\mathfrak{p}$  (on a  $0 \leq r_{\mathfrak{p}} \leq p+1$ ). On donne deux formulations équivalentes pour les hypothèses du théorème.*

1. *Supposons que pour  $k = 0, \dots, p$  la dimension de Krull du sous-espace spectral  $D_{\mathbf{A}}(\Delta_k(G)) \cap V_{\mathbf{A}}(\Delta_{k+1}(F))$  de  $\text{Spec } \mathbf{A}$  soit  $< k$  (pour  $k = 0$  cela signifie simplement  $1 \in \Delta_1(F)$ ).*
2. *Supposons que pour tout  $\mathfrak{p} \in D_{\mathbf{A}}(\Delta_{r_{\mathfrak{p}}-1}(G))$  on a  $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) < r_{\mathfrak{p}}$ .*

*Alors il existe un vecteur unimodulaire dans le module image de  $F$ . En outre ce vecteur peut être écrit sous la forme donnée dans le théorème 6.5.*

*Démonstration.*

Fixons  $k \leq p$  et posons  $\mathbf{B}_k = \mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$ . Soit  $\nu$  un mineur d'ordre  $k$  de  $G$ . Les idéaux premiers de  $\mathbf{B}_k[1/\nu]$  peuvent être identifiés aux idéaux premiers  $\mathfrak{p}$  de  $\mathbf{A}$  qui contiennent  $\Delta_{k+1}(F)$  mais ne contiennent pas  $\nu$ . Donc le maximum des  $\text{Kdim } \mathbf{B}_k[1/\nu]$  est la longueur maximum d'une chaîne d'idéaux premiers qui contiennent  $\Delta_{k+1}(F)$  mais évitent au moins un mineur d'ordre  $k$  de  $G$ . C'est donc la dimension de Krull de  $D_{\mathbf{A}}(\Delta_k(G)) \cap V_{\mathbf{A}}(\Delta_{k+1}(F))$ . Ainsi la première formulation de l'hypothèse nous ramène aux hypothèses du théorème 6.5.

Soit  $\mathfrak{p}$  un idéal premier de  $\mathbf{A}$ . Dire que  $r_{\mathfrak{p}} \leq k$  signifie que modulo  $\mathfrak{p}$  tous les mineurs d'ordre  $p+1$  sont nuls, c'est-à-dire  $\Delta_{k+1}(F) \subseteq \mathfrak{p}$ . La deuxième condition est donc bien équivalente à la première.  $\square$

## 6.2 Quelques conséquences

### Le théorème splitting off de Serre, version non noethérienne

On déduit directement du théorème 6.5, comme dans [11, 22], la version suivante «améliorée» du Splitting-off de Serre.

**Théorème 6.8** *(théorème de Serre non noethérien à la Heitmann, version dimension de Krull) Soit  $M$  un  $\mathbf{A}$ -module projectif de rang  $\geq k$  sur un anneau  $\mathbf{A}$  tel que  $\text{Kdim } \mathbf{A} < k$ . Alors  $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$  pour un certain  $N$ .*

*Démonstration.*

Si  $F$  est une matrice de projection dont l'image est (isomorphe à)  $M$ , l'hypothèse que  $M$  est de rang  $\geq k$  signifie que  $\Delta_k(F) = \langle 1 \rangle$ . Le théorème 6.5 nous donne dans l'image de  $F$  un vecteur unimodulaire. C'est un élément  $C$  de  $M$  tel que  $\mathbf{A}C$  est facteur direct dans  $M$ .  $\square$

*Remarque.* Dans le fonctionnement de cette preuve, on voit qu'on aurait pu se contenter de supposer que  $M$  est un module image d'une matrice  $F$  telle que  $\Delta_k(F) = 1$ .

### Le théorème de Forster, versions non noethériennes

Voici une version du théorème de Forster [20].

**Théorème 6.9** *Soit  $M$  un module de type fini sur un anneau  $\mathbf{A}$  et  $\mathfrak{J}$  l'annulateur de  $M$ . Si la dimension de Krull de  $\mathbf{A}/\mathfrak{J}$  est  $\leq d$ . et si  $M$  est localement engendré par  $r$  éléments alors  $M$  peut être engendré par  $d+r$  éléments.*

*Démonstration.*

$M$  est un quotient d'un module de présentation finie  $M'$  dont l'idéal de Fitting d'ordre  $r$  égal à 1, et nous pouvons donc supposer  $M$  de présentation finie. On regarde  $M$  comme un  $\mathbf{A}/\mathfrak{J}$ -module. Soit  $m_0, m_1, \dots, m_p$  un système de générateurs de  $M$  et  $F$  une matrice de présentation de  $M$  correspondant à ce système générateur. Dire que  $M$  est localement engendré par  $r$  éléments signifie que  $1 = \Delta_{p+1-r}(F)$ . Si  $p \geq d+r$  on a  $1 = \Delta_{d+1}(F)$  et d'après le théorème 6.4, appliqué à la matrice transposée de  $F$ , nous pouvons trouver  $t_1, \dots, t_p$  tels que  $M$  soit engendré par  $m_1 - t_1 m_0, \dots, m_p - t_p m_0$ .  $\square$

Dans le cas d'un module de présentation finie le théorème 6.5 appliqué à une matrice de présentation du module nous donne des énoncés plus sophistiqués comme dans [22].

Donnons par exemple une formulation avec la dimension de Krull, plus facile à formuler.

**Théorème 6.10** (de Forster, version non noethérienne de Heitmann)

Soit  $M$  un module de présentation finie sur  $\mathbf{A}$ . Notons  $\mathfrak{f}_k$  son idéal de Fitting d'ordre  $k$  et  $V_k = V_{\mathbf{A}}(\mathfrak{f}_k) \subseteq \text{Spec } \mathbf{A}$ .

- Version constructive (sans points). Si  $\text{Kdim}(\mathbf{A}[\nu^{-1}]/\mathfrak{f}_k) < m - k$  pour  $k = 0, \dots, m$  et pour tout générateur  $\nu$  de  $\mathfrak{f}_{k+1}$ , alors  $M$  peut être engendré par  $m$  éléments.
- Version classique (avec points). Pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $\mathbf{A}$ , notons  $\mu_{\mathfrak{p}}$  la dimension de l'espace vectoriel  $M \otimes_{\mathbf{A}} \text{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$  sur le corps  $\text{Frac}(\mathbf{A}/\mathfrak{p})$  (autrement dit  $\mu_{\mathfrak{p}} = k$  si et seulement si  $\mathfrak{p} \in V_{k-1} \setminus V_k$ ).
- Si pour  $k = 0, \dots, m$  et pour tout  $\mathfrak{p} \in V_k \setminus V_{k+1}$  on a  $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) \leq m - k$ , ou ce qui revient au même,
- si pour tout  $\mathfrak{p} \in V_0$  on a  $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) + \mu_{\mathfrak{p}} \leq m$ , alors  $M$  peut être engendré par  $m$  éléments.

Rappelons que le support du module  $M$  est le fermé  $V_0$ . La version avec points peut donc être énoncée en demandant que pour tout  $\mathfrak{p}$  dans le support de  $M$  on ait  $\text{Kdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{p}) + \mu_{\mathfrak{p}} \leq m$ .

La version sans points reste valable en remplaçant la dimension de Krull par celle de Heitmann, mais pas la version avec points, car on n'obtient pas alors l'équivalent de la version sans points.

La version sans points avec la  $\text{Jdim}$  (reformulée avec points) est la variante du théorème de Swan obtenue par Heitmann dans [22].

## 7 Théorème de Swan, version non noethérienne

Nous passons maintenant à des versions où la dimension de Heitmann qui intervient n'utilise plus de localisations.

Ceci nous permet d'améliorer le théorème de Swan lui-même [33], répondant ainsi positivement à une question posée dans [22].

### 7.1 Manipulations élémentaires de colonnes

**Lemme 7.1** Soient  $L, L_1, \dots, L_k \in \mathbf{A}^m$  et  $b_1, \dots, b_k \in \mathbf{A}$ . Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$  et

$$1 = D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_k) \vee D_{\mathbf{A}}(L)$$

alors il existe  $x_1, \dots, x_k \in a\mathbf{A}$  tels que

$$1 = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_k + ax_k) \vee D_{\mathbf{A}}(L + x_1L_1 + \dots + x_kL_k)$$

*Démonstration.*

La preuve est par induction sur  $k$ . Pour  $k = 0$ , c'est clair. Si  $k > 0$ , soit  $\mathfrak{j} = H_{\mathbf{A}}(b_k)$  l'idéal bord de Heitmann  $b_k$ . On a  $b_k \in \mathfrak{j}$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{j}) < k - 1$ , donc par induction, on peut trouver  $y_1, \dots, y_{k-1}$  tels que

$$1 = D(b_1 + a^2y_1, \dots, b_{k-1} + a^2y_{k-1}) \vee (L + ay_1L_1 + \dots + ay_{k-1}L_{k-1}) \quad \text{dans } \mathbf{A}/\mathfrak{j} \quad (\alpha)$$

Posons  $L' = L + ay_1L_1 + \dots + ay_{k-1}L_{k-1}$ ,  $X = (b_1 + a^2y_1, \dots, b_{k-1} + a^2y_{k-1})$  et remarquons que  $D_{\mathbf{A}}(L', a) = D_{\mathbf{A}}(L, a)$  et  $D_{\mathbf{A}}(X, a) = D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_{k-1})$ . L'égalité  $(\alpha)$  signifie qu'il existe  $y_k$  tel que  $b_k y_k \in J_{\mathbf{A}}(0)$  et

$$1 = D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L') \vee D_{\mathbf{A}}(y_k) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) \quad (\beta)$$

On a

$$D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L' + ay_kL_k) \vee D_{\mathbf{A}}(a^2) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) = D_{\mathbf{A}}(a, b_1, \dots, b_k, L) = 1 \quad (\gamma)$$

et, d'après  $(\beta)$ ,

$$D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L' + ay_k L_k) \vee D_{\mathbf{A}}(y_k) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) = D_{\mathbf{A}}(X) \vee D_{\mathbf{A}}(L') \vee D_{\mathbf{A}}(y_k) \vee D_{\mathbf{A}}(b_k) = 1 \quad (\delta)$$

$(\gamma)$  et  $(\delta)$  impliquent

$$D_{\mathbf{A}}(X, L' + ay_k L_k, b_k, a^2 y_k) = 1 = J_{\mathbf{A}}(X, L' + ay_k L_k, b_k, a^2 y_k) \quad (\eta)$$

et d'après le lemme 5.1 puisque  $b_k a^2 y_k \in J_{\mathbf{A}}(0)$

$$1 = J_{\mathbf{A}}(X, L' + ay_k L_k, b_k + a^2 y_k)$$

c'est-à-dire

$$1 \in \langle b_1 + a^2 y_1, \dots, b_{k-1} + a^2 y_{k-1}, b_k + a^2 y_k, L + ay_1 L_1 + \dots + ay_{k-1} L_{k-1} + ay_k L_k \rangle.$$

□

*Remarques.*

1) Lorsqu'on remplace la dimension de Heitmann par celle de Krull, le lemme précédent admet une version « uniforme » dans laquelle les  $x_i$  ne dépendent pas de  $a$  (comme dans le lemme 5.2).

2) Le lemme ci-dessus peut être vu comme une variante raffinée du théorème 5.4. En fait dans la suite, nous utilisons ce lemme uniquement avec l'hypothèse renforcée comme suit : Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$  et  $1 = D_{\mathbf{A}}(a, L) \dots$

On en déduit le corollaire suivant (qui simplifie l'argument dans [6] et a été suggéré par Lionel Ducos [10]).

**Corollaire 7.2** *Supposons que  $C, C_1, \dots, C_k$  sont des vecteurs dans  $\mathbf{A}^m$  et  $\nu$  est un mineur d'ordre  $k$  de  $C_1, \dots, C_k$ . Si  $1 = D_{\mathbf{A}}(\nu) \vee D_{\mathbf{A}}(C)$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$  alors il existe  $x_1, \dots, x_k \in A$  tels que  $1 = D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_k C_k)$ .*

*Démonstration.*

On prend  $a = \nu$  et  $b_i$  le mineur obtenu en remplaçant  $C_i$  par  $C$  dans  $C_1, \dots, C_k$ . On applique le lemme 7.1. On remarque alors que  $b_i + ax_i$  est aussi le mineur obtenu en remplaçant  $C_i$  par  $C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n$  dans  $C_1, \dots, C_n$  de sorte que  $b_i + ax_i \in D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n)$  et

$$1 = D_{\mathbf{A}}(b_1 + ax_1, \dots, b_n + ax_n) \vee D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n)$$

implique que  $D_{\mathbf{A}}(C + x_1 C_1 + \dots + x_n C_n) = 1$ .

□

Nous allons prouver une variante du théorème 6.4. Nous reprenons les notations 6.3.

**Lemme 7.3** *Si  $D_{\mathbf{A}}(C) \vee \Delta_k(G) = 1$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$  alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que  $C + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p$  est unimodulaire.*

*Démonstration.*

Comme  $D_{\mathbf{A}}(C) \vee \Delta_k(G) = 1$ , on a une famille  $\nu_1, \dots, \nu_p$  de mineurs de  $G$  d'ordre  $k$  tels que  $1 = D_{\mathbf{A}}(C) \vee \bigvee_i D_{\mathbf{A}}(\nu_i)$ . On applique alors le corollaire 7.2 pour avoir  $D_{\mathbf{A}}(C) \vee D_{\mathbf{A}}(\nu_k) = 1$  dans  $\mathbf{A}/J_k$  avec  $J_k = \bigvee_{i>k} D_{\mathbf{A}}(\nu_i)$  jusqu'à ce que nous obtenions  $D_{\mathbf{A}}(C) = 1$  dans  $\mathbf{A}$ . □

**Théorème 7.4** *Fixons  $k \leq p$ . Supposons que la dimension de Heitmann de  $\mathbf{A}$  est  $< k$  et  $\Delta_k(F) = 1$ . Alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que  $1 = D_{\mathbf{A}}(C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p)$ .*

*Démonstration.*

Cela résulte directement du lemme 7.3.

□

### Les théorèmes de Serre et Swan avec la dimension de Heitmann

On a alors les résultats suivants, que l'on prouve à partir du théorème 7.4 par les mêmes arguments que pour les théorèmes 6.8 et 6.9.

**Théorème 7.5** (théorème de Serre, version dimension de Heitmann)

Soit  $M$  un  $\mathbf{A}$ -module projectif de rang  $\geq k$  sur un anneau  $\mathbf{A}$  tel que  $\text{Hdim} \mathbf{A} < k$ . Alors  $M \simeq N \oplus \mathbf{A}$  pour un certain  $N$ .

**Théorème 7.6** (théorème de Swan, version dimension de Heitmann)

Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) \leq d$  et si  $M$  est un module de type fini sur  $\mathbf{A}$  localement engendré par  $r$  éléments, alors  $M$  peut être engendré par  $d + r$  éléments.

## 7.2 D'autres résultats

### Le théorème de Swan, forme sophistiquée

Un raffinement du théorème 7.4 est le résultat suivant.

**Théorème 7.7** Supposons que  $1 \in \Delta_1(F)$  et que pour  $k = 1, \dots, p$ , l'anneau  $\mathbf{A}/\Delta_{k+1}(F)$  est de dimension de Heitmann  $< k$ . Alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que le vecteur  $C_0 + t_1 C_1 + \dots + t_p C_p$  est unimodulaire.

*Démonstration.*

On applique le lemme 7.3 successivement avec  $\mathbf{A}/\Delta_2(F)$ ,  $\mathbf{A}/\Delta_3(F)$ , ... (raisonner comme dans la preuve du théorème 6.5).  $\square$

**Théorème 7.8** (théorème de Swan général, version dimension de Heitmann)

Soit  $M$  un module de type fini sur  $\mathbf{A}$  et  $\mathfrak{f}_k$  son idéal de Fitting d'ordre  $k$ . Si  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\mathfrak{f}_k) < m - k$  pour  $k = 0, \dots, m$ , alors  $M$  peut être engendré par  $m$  éléments.

*Démonstration.*

Si le module est de présentation finie il suffit d'appliquer le théorème 7.7 à la matrice transposée d'une matrice de présentation de  $M$  (de la même manière que pour le théorème 6.10).

Le raisonnement dans le cas général est un peu plus subtil. Notons  $h_1, \dots, h_q$  des générateurs de  $M$  et supposons  $q > m$ . Notons  $h = (h_1, \dots, h_q)$ . Toute relation entre les  $h_i$  peut être écrite comme un vecteur colonne  $C \in \mathbf{A}^q$  qui vérifie  $hC = 0$ . L'idéal de Fitting  $\mathfrak{f}_{q-i}$  de  $M$  est l'idéal  $\Delta_i$  engendré par les mineurs d'ordre  $i$  des matrices  $F \in \mathbf{A}^{q \times n}$  qui vérifient  $hF = 0$  (c'est-à-dire les matrices dont les colonnes sont des relations entre les  $h_i$ ). Nous les appellerons des « matrices de relation ». Comme  $D_{\mathbf{A}}(\Delta_q) = D_{\mathbf{A}}(\mathfrak{f}_0) = D_{\mathbf{A}}(\text{Ann}(M))$  et que nous pouvons remplacer  $\mathbf{A}$  par  $\mathbf{A}/\text{Ann}(M)$ , nous supposons sans perte de généralité que  $D_{\mathbf{A}}(\Delta_q) = D_{\mathbf{A}}(0)$ .

Les hypothèses impliquent que  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\Delta_k) < k - 1$  pour  $k = 1, \dots, q$  (ce sont les hypothèses lorsque  $q = m + 1$ ).

On a donc  $\Delta_1 = 1$ , ce qui se constate sur une matrice de relations  $F$ . On peut alors appliquer le lemme 7.3 avec la matrice  $F$ , l'entier  $k = 1$  et l'anneau  $\mathbf{A}/\Delta_2$ . Ceci nous donne une relation  $C$  telle que  $D_{\mathbf{A}/\Delta_2}(C) = 1$ , c'est-à-dire encore telle qu'il existe  $a \in \Delta_2$  vérifiant  $1 + a \in D_{\mathbf{A}}(C)$ .

Le fait que  $a \in \Delta_2$  se constate sur une matrice de relations  $G$  et on considère la nouvelle matrice  $F = (C|G)$ . On a donc  $D_{\mathbf{A}}(C) \vee \Delta_2(G) = 1$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}/\Delta_3) < 2$ . On peut alors appliquer le lemme 7.3 avec la nouvelle matrice  $F$ , l'entier  $k = 2$  et l'anneau  $\mathbf{A}/\Delta_3$ . Ceci nous donne une relation  $C$  telle que  $D_{\mathbf{A}/\Delta_3}(C) = 1$ , et ainsi de suite.

On obtient en fin de compte une relation  $C$  telle que  $D_{\mathbf{A}}(C) = 1$ , puisque  $D_{\mathbf{A}}(\Delta_q) = 0$ . Et  $\text{Hdim} \mathbf{A} = \text{Hdim}(\mathbf{A}/\Delta_q) < q - 1$ . En conséquence le corollaire 5.5 du théorème stable range de Bass s'applique et nous pouvons transformer la colonne  $C$  en  $(1, 0, \dots, 0)$  par des manipulations élémentaires, ce qui revient à remplacer le système générateur  $h$  par une autre système de  $q$  éléments dont le premier est nul, bref à réduire de 1 le nombre de générateurs.  $\square$



Notons qu'il n'y a pas *a priori* de version « avec points » du théorème précédent car la  $\text{Hdim}$  n'est pas (à notre connaissance) la dimension de Krull d'un espace spectral. Pour obtenir une version avec points, nous devrions considérer la variante (*a priori* plus faible) dans laquelle la  $\text{Hdim}$  est remplacée par la  $\text{Jdim}$ . On aurait alors sans doute une formulation classique utilisant les points du  $\text{J-spectre}$  de Heitmann.

### Le théorème de simplification de Bass, avec la dimension de Heitmann, sans hypothèse nothérienne

Nous prouvons maintenant le théorème de simplification de Bass.

**Lemme 7.9** *Si  $\Delta_k(G) = 1 = D_{\mathbf{A}}(C) \vee D_{\mathbf{A}}(a)$  et  $\text{Hdim}(\mathbf{A}) < k$  alors il existe  $t_1, \dots, t_p$  tels que  $1 = D_{\mathbf{A}}(C + at_1C_1 + \dots + at_pC_p)$ .*

*Démonstration.*

Il suffit d'appliquer le lemme 7.3 aux vecteurs  $C, aC_1, \dots, aC_n$  (ce qui remplace  $G$  par  $aG$ ).  $\square$

**Théorème 7.10** (théorème de simplification de Bass, version dimension de Heitmann)

*Soit  $M$  un  $\mathbf{A}$ -module projectif de rang  $\geq k$  sur un anneau  $\mathbf{A}$  tel que  $\text{Hdim} \mathbf{A} < k$ , et  $N, Q$  deux autres  $\mathbf{A}$ -modules projectifs de type fini. Alors  $M \oplus Q \simeq N \oplus Q$  implique  $M \simeq N$ .*

*Démonstration.*

Pour être complet, on redonne l'argument de [11]. On peut supposer que  $Q = \mathbf{A}$  et que  $N \subset \mathbf{A}^m$  est image d'une matrice idempotente. On a un isomorphisme  $\phi : M \oplus \mathbf{A} \rightarrow N \oplus \mathbf{A} \subset \mathbf{A}^{m+1}$ . Soit  $(C, a) \in \mathbf{A}^{m+1}$  le vecteur  $\phi(0, 1)$ . Il nous faut construire un automorphisme de  $N \oplus \mathbf{A}$  qui envoie  $(C, a)$  sur  $(0, 1)$ .

Soit  $\alpha : M \oplus \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}, (U, x) \mapsto x$ . La forme linéaire  $\alpha \circ \phi^{-1}$  envoie  $(C, a)$  sur 1, d'où  $D_{\mathbf{A}}(C) \vee D_{\mathbf{A}}(a) = 1$ . Donc, par le lemme 7.9, il existe  $C' \in N$  tel que  $D_{\mathbf{A}}(C + aC') = 1$ . On a donc une forme linéaire  $\lambda : N \rightarrow \mathbf{A}$  vérifiant  $\lambda(C + aC') = 1$  (obtenue comme restriction d'une forme linéaire sur  $\mathbf{A}^m$ ). On a alors les trois automorphismes suivants de  $N \oplus \mathbf{A}$  qui p ar composition réalisent le but fixé :

$$\begin{aligned} \psi_1 : (V, x) &\mapsto (V + xC', \lambda(xC - aV)) & , & & (C, a) &\mapsto (C + aC', 0) \\ \psi_2 : (V, x) &\mapsto (V, x + \lambda(V)) & , & & (C + aC', 0) &\mapsto (C + aC', 1) \\ \psi_3 : (V, x) &\mapsto (V - x(C + aC'), x) & , & & (C + aC', 1) &\mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

(on vérifie que  $\psi_1$  est un automorphisme en remarquant que si  $\psi_1(V, x) = (W, y)$  alors  $x = y + a\lambda(W)$ ).  $\square$

*Remarques.* Dans le fonctionnement de cette preuve, on voit qu'on aurait pu se contenter de supposer que  $N$  est un module image d'une matrice  $F$  telle que  $\Delta_k(F) = 1$  et  $M \oplus Q \simeq N \oplus Q$  pour un module projectif  $Q$ .

Notons aussi que les automorphismes  $\psi_i$  sont réalisés en pratique comme des automorphismes de  $\mathbf{A}^{n+1}$  qui fixent  $N \oplus \mathbf{A}$ . De manière plus générale tous les théorèmes d'algèbre commutative que nous avons démontrés se ramènent en fin de compte à des théorèmes concernant les matrices et leurs manipulations élémentaires.

**Remerciements.** Juillet 2008. Nous remercions Peter Schuster qui a fait un relecture très attentive de l'article et nous a signalé des erreurs, notamment dans les lemmes 5.6 et 5.7, corrigées dans cette version.

## Références

- [1] BALBES, R. & AND DWINGER, P., *Distributive lattices*, (1974), University of Missouri Press, Columbia, Mo. **15**
- [2] BANASCHEWSKI B. *Radical ideals and coherent frames*. Comment. Math. Univ. Carolin. **37** no. 2, (1996), 349–370. **30**
- [3] CEDERQUIST J., COQUAND T. *Entailment relations and Distributive Lattices* Logic Colloquium '98 (Prague), 127–139, Lect. Notes Log., 13. Assoc. Symbol. Logic, Urbana, (2000). **11, 12, 15, 30**

- [4] COQUAND T. *Sur un théorème de Kronecker concernant les variétés algébriques* C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **338** (2004), 291–294. [38](#)
- [5] COQUAND T., LOMBARDI H. *Hidden constructions in abstract algebra (3) Krull dimension of distributive lattices and commutative rings*. dans : Commutative ring theory and applications. Eds : Fontana M., Kabbaj S.-E., Wiegand S. Lecture notes in pure and applied mathematics vol 231. M. Dekker. (2002) 477–499 . [21](#), [30](#), [31](#), [35](#)
- [6] COQUAND T., LOMBARDI H., QUITTÉ C. *Generating non noetherian modules constructively*. Manuscripta mathematica **115**, (2004), 513–520. [3](#), [38](#), [46](#)
- [7] COQUAND T., LOMBARDI H., ROY M.-F. *Une caractérisation élémentaire de la dimension de Krull*. Dans «From Sets and Types to Analysis and Topology : Towards Practicable Foundations for Constructive Mathematics» (L. Crosilla, P. Schuster, eds.). Oxford University Press. (2005) 239–244. [21](#)
- [8] COQUAND T., LOMBARDI H., SCHUSTER P. *A nilregular element property*. Archiv der Mathematik. **85** (2005), 49–54. [38](#)
- [9] CURRY H. B. *Foundations of mathematical logic* McGraw-Hill Book Co., Inc., New York-San Francisco, Calif.-Toronto-London 1963 [10](#)
- [10] DUCOS L. *Vecteurs unimodulaires et systèmes générateurs*. Journal of Algebra **297**, (2006), 566–583. [3](#), [38](#), [46](#)
- [11] EISENBUD D., EVANS E. G., JR. *Generating modules efficiently : theorems from algebraic K-theory*. J. Algebra **27** (1973), 278–305. [44](#), [48](#)
- [12] EISENBUD D., EVANS E. G., JR. *Every algebraic set in n-space is the intersection of n hypersurfaces*. Inventiones math. **19** (1973), 107–112. [38](#)
- [13] ESCARDÓ MARTÍN *The regular-locally compact coreflection of a stably locally compact locale*. J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 41–55. [16](#)
- [14] ESPAÑOL L. *Dimensión en álgebra constructiva*. Thèse doctorale. Université de Zaragoza, Zaragoza, (1978). [21](#)
- [15] ESPAÑOL L. *Constructive Krull dimension of lattices*. Rev. Acad. Cienc. Zaragoza (2) **37** (1982), 5–9. [21](#)
- [16] ESPAÑOL L. *Le spectre d'un anneau dans l'algèbre constructive et applications à la dimension*. Cahiers de topologie et géométrie différentielle catégorique. **24** n°2 (1983), 133–144. [21](#)
- [17] ESPAÑOL L. *Dimension of Boolean Valued Lattices and Rings*. Journal of Pure and Applied Algebra **42** (1986), 223–236. [21](#)
- [18] ESPAÑOL L. *The spectrum lattice of Baer rings and polynomials*. Categorical algebra and its applications. (Louvain-La-Neuve, 1987), 118–124, Lecture Notes in Math., 1348, Springer, Berlin-New York, (1988). [21](#)
- [19] ESPAÑOL L. *Finite chain calculus in distributive lattices and elementary Krull dimension*. Contribuciones científicas en honor de Mirian Andres Gomez. Eds. L. Lamban, A. Romero y J. Rubio, Servicio de Publicaciones, Universidad de La Rioja, Logrono, Spain, (2010). [21](#)
- [20] FORSTER O. *Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring*. Math. Z. **84** (1964) 80–87. [44](#)
- [21] HEITMANN R. *Generating ideals in Prüfer domains*. Pacific J. Math. **62** (1976) 117–126. [38](#)
- [22] HEITMANN R. *Generating non-Noetherian modules efficiently*. Michigan Math. **31** 2 (1984) 167–180. [1](#), [3](#), [19](#), [20](#), [26](#), [38](#), [40](#), [42](#), [44](#), [45](#)
- [23] HOCHSTER M. *Prime ideal structure in commutative rings*. Trans. Amer. Math. Soc. **142** (1969) 43–60. [30](#)
- [24] JOHNSTONE P. *Stone Spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 3. Cambridge University Press, Cambridge, (1986). [10](#), [11](#)
- [25] JOYAL A. *Spectral spaces and distributive lattices*. Notices AMS **18** (1971), 393. [21](#)
- [26] JOYAL A. *Le théorème de Chevalley-Tarski*. Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle, (1975). [3](#), [21](#), [30](#)
- [27] KRONECKER L. *Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen*. J. reine angew. Math. **92**, (1882) 1–123. Réimprimé dans *Leopold Kronecker's Werke*, II, 237–387. [38](#)
- [28] LAM T. Y. *Serre's conjecture*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 635. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978. [40](#)
- [29] LOMBARDI H. *Dimension de Krull, Nullstellensätze et Évaluation dynamique*. Math. Zeitschrift, **242**, (2002), 23–46. [35](#)
- [30] LOMBARDI H. & QUITTÉ C. *Algèbre Commutative. Méthodes constructives*. Calvage&Mounet (2011). Traduction anglaise, corrigée et augmentée, chez Springer : *Commutative Algebra : Constructive Methods*. (2015) [6](#)
- [31] STONE M. H. *Topological representations of distributive lattices and Brouwerian logics*. Cas. Mat. Fys. **67**, (1937), 1–25. [13](#)
- [32] STORCH U. *Bemerkung zu einem Satz van M. Kneser*. Arch. Math. **23**, (1972), 403–404. [38](#)
- [33] SWAN R. G. *The Number of Generators of a Module*. Math. Z. **102** (1967), 318–322. [45](#)
- [34] VAN DER WAERDEN. *Review Zentralblatt für Math* **24**, (1941) 276. [38](#)

### Post-Scriptum : Errata dans l'article original.

• Le fait 1.7 et la proposition 1.9 ne semblent pas corrects dans la formulation générale qui était proposée. On donne maintenant des énoncés corrects (moins forts) avec leurs démonstrations. Un lemme est ajouté, ce qui décale les numéros qui suivent d'une unité.

• Dans la section 1.3 *Algèbres de Heyting, de Brouwer, de Boole*. il faut lire  $a \leq \neg\neg a$  et non pas l'inégalité contraire.

• Dans la proposition 2.5 point 4, il faut dire :

pour tous ouverts quasi-compacts  $U_1$  et  $U_2$ , l'adhérence de  $U_1 \setminus U_2$  est le complémentaire d'un ouvert quasi-compact.

• La proposition 3.13 de l'article original a été ramenée en 2.13, où elle a mieux sa place.

• Juste avant la proposition 4.1 l'équivalence

$$\tilde{U} \leq_{\text{Zar}\mathbf{A}} \tilde{J} \iff \prod_{u \in U} u \in \sqrt{\langle J \rangle} \iff \mathcal{M}(U) \cap \langle J \rangle \neq \emptyset$$

doit être remplacée par la suivante, dans laquelle le premier terme est changé

$$\bigwedge \tilde{U} \leq_{\text{Zar}\mathbf{A}} \bigvee \tilde{J} \iff \prod_{u \in U} u \in \sqrt{\langle J \rangle} \iff \mathcal{M}(U) \cap \langle J \rangle \neq \emptyset$$

• Dans la section 5.3, les lemmes 5.6 et 5.7 sont modifiés, une erreur dans la preuve a été rectifiée.