



**HAL**  
open science

## Analyse dans les espaces métriques

Hervé Pajot, Emmanuel Russ

► **To cite this version:**

Hervé Pajot, Emmanuel Russ. Analyse dans les espaces métriques. CNRS Edition. EDP Sciences, 2018, Collection Savoirs Actuels. hal-01649911

**HAL Id: hal-01649911**

**<https://hal.science/hal-01649911v1>**

Submitted on 27 Nov 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse dans les espaces métriques

Hervé Pajot et Emmanuel Russ

27 novembre 2017



# Table des matières

<b>Motivations et plan</b>	<b>2</b>
<b>Notations</b>	<b>2</b>
<b>1 Éléments de théorie de la mesure</b>	<b>13</b>
1 Mesures . . . . .	13
1.1 Définitions et propriétés générales . . . . .	13
1.2 Fonctions mesurables . . . . .	22
1.3 Mesure image . . . . .	22
1.4 Prolongements d'applications continues . . . . .	22
1.5 Approximation par des fonctions continues . . . . .	23
2 La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ . . . . .	25
2.1 Définition . . . . .	25
2.2 Caractérisation de la mesure de Lebesgue . . . . .	26
2.3 Changement de variables pour la mesure de Lebesgue . . . . .	27
2.4 Inégalité isodiamétrique . . . . .	31
2.5 Une autre approche via l'inégalité de Brunn-Minkowski . . . . .	34
3 Lemmes de recouvrement . . . . .	37
3.1 Un lemme de recouvrement $5r$ . . . . .	38
3.2 Un lemme de recouvrement de Vitali . . . . .	39
3.3 Un lemme de recouvrement de Besicovitch . . . . .	40
4 Espaces de nature homogène . . . . .	46
4.1 Définitions et premières propriétés . . . . .	46
4.2 Espaces doublants . . . . .	49
4.3 Un lemme de recouvrement de Vitali dans les espaces de nature homogène . . . . .	50
4.4 Théorème de plongement d'Assouad . . . . .	51
5 Compléments sur les groupes de Lie . . . . .	54
5.1 Champs de vecteurs . . . . .	54
5.2 Algèbres de Lie . . . . .	55
5.3 Groupes de Lie . . . . .	56
5.4 Application exponentielle . . . . .	57
5.5 Distance de Carnot . . . . .	58
5.6 Groupes de Carnot . . . . .	59
5.7 Mesure de Haar . . . . .	61
6 Fonction maximale de Hardy Littlewood . . . . .	61
7 Différentiation de mesures . . . . .	66
7.1 Le théorème de différentiation de Lebesgue . . . . .	66
7.2 Le théorème de Radon Nikodym . . . . .	67
7.3 Introduction aux fonctions absolument continues . . . . .	72

7.4	Différentiation de Lebesgue dans les espaces de nature homogène . . . . .	80
8	Exercices . . . . .	87
<b>2</b>	<b>Applications lipschitziennes et théorie géométrique de la mesure</b>	<b>97</b>
1	Définition, exemples et propriétés élémentaires des applications lipschitziennes . . . . .	97
2	Mesures et dimension de Hausdorff . . . . .	100
2.1	Construction de Carathéodory, mesures et dimension de Hausdorff . . . . .	100
2.2	L'inégalité isodiamétrique dans $\mathbb{R}^n$ et l'égalité $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ . . . . .	102
2.3	Exemples de calculs de dimension de Hausdorff . . . . .	103
2.4	Mesures de Hausdorff et applications lipschitziennes . . . . .	113
2.5	Résultats de densité pour les mesures de Hausdorff . . . . .	114
2.6	Constructions de mesures via la convergence faible . . . . .	117
3	Différentiabilité des applications lipschitziennes et approximation par des fonctions lisses	119
3.1	Théorèmes de différentiabilité de Rademacher et de Stepanov . . . . .	119
3.2	Théorème d'extension de Whitney et approximation $C^1$ . . . . .	123
3.3	Norme du jacobien généralisé d'une application lipschitzienne . . . . .	126
3.4	Théorèmes de type Rademacher dans les espaces de Banach . . . . .	128
3.5	Cas du groupe d'Heisenberg : Théorème de Pansu et non-plongement bilipschitzien dans les espaces euclidiens . . . . .	134
3.6	Fonctions lipschitziennes et dérivée métrique . . . . .	136
4	Théorèmes de prolongement des applications lipschitziennes . . . . .	138
4.1	Le cas euclidien . . . . .	139
4.2	Topologie faible $*$ et le cas hilbertien . . . . .	141
4.3	Extension des fonctions lipschitziennes dans les espaces de Banach et les groupes de Carnot . . . . .	143
4.4	Dimension de Nagata et extension dans le cas métrique . . . . .	143
5	Autour de la théorie de la rectifiabilité . . . . .	147
5.1	Ensembles rectifiables et purement non rectifiables . . . . .	147
5.2	Diverses caractérisations classiques des ensembles rectifiables . . . . .	152
5.3	Quelques applications de la théorie de la rectifiabilité . . . . .	156
5.4	Vers une théorie de la rectifiabilité dans les groupes de Carnot ou les espaces métriques ? . . . . .	164
6	Formules de l'aire et de la coaire . . . . .	165
6.1	Formule de l'aire dans les espaces euclidiens . . . . .	165
6.2	Formule de la coaire dans le cas euclidien . . . . .	169
6.3	Mesure intégrale-géométrique et formule de Crofton . . . . .	171
6.4	Formules de l'aire et de la coaire dans les groupes de Carnot . . . . .	173
6.5	Formules de l'aire et de la coaire dans les espaces métriques . . . . .	175
7	Exercices . . . . .	179
<b>3</b>	<b>Espaces de Sobolev</b>	<b>189</b>
1	Espaces de Sobolev dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$ . . . . .	189
1.1	Introduction . . . . .	189
1.2	Espaces de Hölder . . . . .	190
1.3	Dérivée faible . . . . .	190
1.4	Définition des espaces de Sobolev $W^{1,p}$ . . . . .	192
1.5	Un premier résultat d'approximation : le théorème de Friedrichs . . . . .	194
1.6	Une caractérisation de $W^{1,p}(U)$ en termes de fonction translatée . . . . .	196
1.7	Résultat d'extension . . . . .	200
1.8	Autres résultats d'approximation . . . . .	203

1.9	Traces . . . . .	204
1.10	Espaces de traces . . . . .	207
1.11	Plongements de Sobolev . . . . .	212
1.12	Inégalités de Poincaré . . . . .	220
1.13	Introduction aux fonctions à variation bornée . . . . .	222
1.14	Meilleure constante dans un plongement de Sobolev . . . . .	225
2	Espaces de Sobolev dans les espaces métriques . . . . .	227
2.1	Module d'une famille de courbes . . . . .	228
2.2	Gradients supérieurs . . . . .	230
2.3	Espaces de Sobolev $N^{1,p}$ . . . . .	233
2.4	Espaces de Sobolev à valeurs dans un espace de Banach . . . . .	240
2.5	Espaces de Sobolev $M^{1,p}$ . . . . .	240
3	Exercices . . . . .	250
<b>4</b>	<b>Inégalités de Poincaré, espaces de Loewner et applications</b>	<b>257</b>
1	Le cas euclidien . . . . .	257
1.1	Et tout commença avec Poincaré ! . . . . .	257
1.2	Le théorème fondamental de l'analyse . . . . .	258
1.3	Une preuve dans le cas euclidien via les potentiels de Riesz . . . . .	258
1.4	De Sobolev à Poincaré . . . . .	264
2	Inégalités de Poincaré dans les espaces métriques . . . . .	266
2.1	Gradients supérieurs et inégalités de Poincaré . . . . .	266
2.2	Une caractérisation par la fonction maximale . . . . .	267
2.3	Une caractérisation par la capacité ou le module de familles de courbes . . . . .	269
2.4	Persistance des inégalités de Poincaré sous la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée . . . . .	277
2.5	Inégalité de Poincaré et quasiconvexité . . . . .	284
3	Exemples d'espaces de Loewner . . . . .	286
3.1	Pinceaux de courbes et la géométrie des poids $A_\infty$ -forts . . . . .	286
3.2	Groupes de Heisenberg . . . . .	291
3.3	Espaces à courbure de Ricci positive . . . . .	292
4	Applications . . . . .	311
4.1	Différentiabilité des applications lipschitziennes dans les espaces de Loewner . . . . .	311
4.2	Théorie quasi-conforme et rigidité des espaces hyperboliques . . . . .	314
4.3	Fonctions harmoniques à croissance polynômiale . . . . .	325
4.4	Estimations gaussiennes du noyau de la chaleur . . . . .	327
5	Quelques exercices . . . . .	329
	<b>Index</b>	<b>338</b>



# Motivations et plan

Les notes qui suivent correspondent à un cours de M2 recherche donné par les auteurs à l'Université Joseph Fourier en 2014-2015 mais ont été complétées pour aller plus loin qu'un cours de niveau master. On s'y consacre à l'analyse dans les espaces métriques mesurés, en se concentrant essentiellement sur les questions de différentiabilité dans les espaces métriques et contient aussi bien des résultats et outils classiques (lemmes de recouvrement, fonction maximale, différentiation de mesures) que des développements récents concernant la théorie géométrique de la mesure et le calcul des variations, les espaces de Sobolev et les inégalités de Poincaré dans les espaces métriques.

Les espaces de Sobolev dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  jouent depuis longtemps un rôle essentiel dans diverses branches des mathématiques (analyse, équations aux dérivées partielles, géométrie). Rappelons que, si  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, une fonction  $u \in L^p(U)$  appartient à l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(U)$  si, et seulement si,  $u$  possède un gradient faible (au sens des distributions) qui appartient à  $L^p(U)$ . Les propriétés de base de cet espace (densité des fonctions lisses, prolongement en une fonction de  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , règle de composition, changement de variables, existence de la trace sur  $\partial U$ , plongements dans des espaces  $L^p$  ou des espaces de fonctions hölderiennes) sont bien connues et classiques (voir par exemple [1, 22, 45, 102, 154]). Certaines propriétés de ces espaces (notamment les inégalités données par les plongements de Sobolev) ont pu être étendues à des contextes géométriques plus généraux. En particulier, certaines inégalités de Sobolev sont reliées au comportement du semigroupe de la chaleur engendré par l'opérateur de Laplace-Beltrami sur des variétés, et des phénomènes comparables ont été découverts dans des contextes discrets (groupes, graphes). On se reportera à [145] pour ces différents contextes géométriques.

La théorie des espaces de Sobolev dans des espaces métriques a commencé à être développée à la fin des années 1990. Une motivation de ce développement était l'étude (motivée elle-même par des questions de rigidité en géométrie hyperbolique par exemple) des applications quasi-conformes dans les espaces à géométrie bornée. Rappelons que, dans  $\mathbb{R}^n$ , un homéomorphisme quasi-conforme entre des domaines de  $\mathbb{R}^n$  est différentiable presque partout et appartient localement à  $W^{1,n}$ . La notion d'application quasi-conforme s'étend sans difficulté aux espaces métriques. Toutefois, l'identification des conditions géométriques sur l'espace qui permettent de donner une description analytique des applications quasi-conformes dans un espace métrique a été une étape essentielle du développement de l'analyse dans les espaces métriques mesurés, mettant en évidence le rôle central joué par la condition de doublement et les inégalités de Poincaré sur les boules. Ceci a amené à la notion d'espace de Loewner, ce qui est devenu un cadre général pour traiter de questions d'analyse géométrique.

Un objectif majeur de ce cours est de présenter des développements récents de l'analyse dans les espaces métriques, en mettant l'accent sur la différentiabilité dans les espaces métriques, la théorie géométrique de la mesure et le calcul des variations, les espaces de Sobolev et les inégalités de Poincaré. On commencera toujours par rappeler la situation classique, c'est à dire dans les espaces euclidiens munis de la mesure de Lebesgue. Puis, nous expliquerons comment l'étendre à d'autres contextes géométriques (espaces de Banach, groupes de Carnot, espaces métriques à géométrie bornée, ...). Ces notes ne prétendent pas donner une présentation exhaustive de l'analyse dans les espaces métriques, un domaine qui a connu un fort développement ces dernières années. Le cours est accessible à tout étudiant ayant un niveau M1



et comporte notamment les compléments nécessaires en théorie de la mesure. Nous insisterons sur les aspects “géométrie métrique”. Ainsi, des connaissances en géométrie riemannienne ne sont pas nécessaires (même si elles peuvent être utiles parfois, voir le chapitre 4 pour une introduction à la notion de courbure). Plus de 70 exercices et problèmes sont aussi proposés.

On décrit maintenant brièvement le contenu des 4 chapitres. Le premier présente des résultats fondamentaux d’analyse dans les espaces de nature homogène. Ces espaces ont été introduits dans les années 1970 par Coifman et Weiss ([28]) comme un cadre général pour faire de l’analyse harmonique (sans théorie des représentations). Un espace de nature homogène est un espace métrique  $(X, d)$  muni d’une mesure de Radon  $\mu$  qui vérifie la condition de doublement, *i.e.*  $\mu(B(x, 2r)) \leq C_{DV}\mu(B(x, r))$  pour une certaine constante uniforme  $C_{DV} > 0$  (appelée souvent constante de doublement). On commence par donner des compléments de théorie de la mesure et d’analyse (théorèmes de représentation de Riesz, de Radon-Nikodym, d’Egoroff, lemme d’Urysohn, inégalité isodiamétrique,...). On introduit ensuite les espaces de nature homogène et décrit un exemple fondamental qui sera repris plusieurs fois dans le cours : le groupe d’Heisenberg (ou plus généralement les groupes de Carnot). On démontre les théorèmes de recouvrement classique (lemme  $5r$ , Vitali, Besicovitch, ...) et on en donne des applications : théorème de différentiation de Lebesgue, fonction maximale de Hardy-Littlewood, dérivation de mesures, fonctions absolument continues... Ce chapitre doit être considéré comme un prolongement des cours classiques d’analyse et d’intégration de L3 et M1.

Le chapitre 2 porte sur les fonctions lipschitziennes et propose une introduction à la théorie géométrique de la mesure et au calcul des variations. On démontre les principales propriétés des fonctions lipschitziennes dans le cas euclidien : théorème de Rademacher sur la différentiabilité, théorème de Kirszbraun sur l’extension, théorème de Whitney (approximation par des fonctions lisses). Les cas non euclidiens (espaces de Banach, groupes de Carnot, espaces métriques) sont toujours discutés à la suite des résultats classiques. Après avoir défini les notions de mesures et dimension de Hausdorff, on définit les concepts fondamentaux autour de la théorie de la rectifiabilité et puis on discute de ses applications en analyse réelle (intégrales singulières), analyse complexe (effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées), segmentation d’images (minimisation de fonctionnelles de type Mumford-Shah), autour du problème de Kakeya (comment retourner efficacement une aiguille) ou des problèmes de type Plateau en lien avec la théorie des courants et des varifolds... La dernière partie du chapitre concerne les formules d’aire et de coaire qui sont des outils fondamentaux en théorie géométrique de la mesure. Nous insistons sur le fait que nous présentons toujours dans un premier temps les résultats classiques. Le lecteur doit bien les assimiler avant de s’attaquer aux généralisations dans des cadres non euclidiens qui sont discutées dans la suite.

Le chapitre 3 est consacré aux espaces de Sobolev dans les espaces métriques. On commence par décrire les espaces de Sobolev  $W^{1,p}$  dans les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et leurs principales propriétés (densité des fonctions lisses, extension, trace, plongements de Sobolev, ...). Puis on explique comment étendre cette théorie dans le cadre des espaces métriques. Une approche passe par la notion de gradient supérieur, qui généralise la longueur de gradient dans le cas euclidien et que l’on présente d’abord. Cela permet de définir les espaces de Newton  $N^{1,p}$  sur un espace métrique (introduits par Shanmugalingam, [134]), dont on montre les propriétés principales. Ces espaces coïncident avec  $W^{1,p}$  dans le cadre euclidien, et permettent notamment de caractériser les fonctions de  $W^{1,p}$  en termes d’absolue continuité. Une autre approche des espaces de Sobolev dans le cadre métrique, via une inégalité faisant intervenir la fonction maximale de Hardy-Littlewood, est celle due à Hajłasz ([54]). On obtient ainsi les espaces  $M^{1,p}$  qui généralisent eux aussi les espaces  $W^{1,p}$  du cadre euclidien. Ce chapitre et le suivant décrivent des travaux récents (remontant aux années 1990).

Le chapitre 4 concerne les inégalités de Poincaré dans les espaces métriques et leurs applications. Après avoir présenté le cas euclidien et le lien avec les inégalités de Sobolev (déjà évoqué au chapitre 3), on décrit la situation dans le cas des espaces métriques. On donne des propriétés des espaces métriques

qui admettent des inégalités de Poincaré : quasiconvexité, persistance sous la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée, ... On présente ensuite des exemples d'espaces de Loewner (c'est à dire des espaces métriques Ahlfors-réguliers qui vérifient des inégalités de Poincaré) : Géométrie des poids forts  $A_\infty$  au sens de David-Semmes, groupes de Carnot, espaces à courbure de Ricci positive (critère de Bakry-Emery pour les diffusions, condition de courbure-dimension au sens de Lott-Villani-Sturm en transport optimal, espaces d'Alexandrov en géométrie métrique, ...). On discute aussi du cas des groupes et des graphes discrets. On termine par des applications dans les espaces de Loewner : théorème de Cheeger de différentiabilité des applications lipschitziennes, théorie quasiconforme de Heinonen-Koskela et applications à la géométrie hyperbolique (théorème de rigidité de type Mostow par exemple pour l'espace hyperbolique réel), fonctions harmoniques à croissance polynomiale, estimations gaussiennes du noyau de la chaleur. Ce chapitre est peut-être plus ambitieux que les précédents mais propose une ouverture vers des sujets de recherche très actuels.

Le premier auteur a bénéficié pendant la rédaction de ces notes du soutien financier des projets ANR "GEOMETRYA" et "SRGI".

Les auteurs tiennent à remercier Claude Sabbah et les éditions EDP Sciences, qui ont accepté le principe de ce livre et en ont accompagné la rédaction, ainsi que les relecteurs anonymes dont les nombreuses remarques et suggestions ont grandement contribué à enrichir le texte. Nous remercions aussi Gilles Lancien, Antoine Lemenant et Luca Rizzi pour des discussions stimulantes concernant le contenu de ce livre.



# Notations

## Espaces métriques

Si  $X$  est un ensemble, une distance  $d$  sur  $X$  est une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui vérifie

(i) Pour tous  $x, y$  dans  $X$ ,  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  ;

(ii) Pour tous  $x, y$  dans  $X$ ,  $d(x, y) = d(y, x)$  ;

(iii) Pour tous  $x, y, z$  dans  $X$ ,  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ .

L'axiome (iii) s'appelle l'inégalité triangulaire et jouera un rôle important dans ce livre.

Si  $x \in X$  et  $R > 0$ , on note  $B(x, R)$  la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $R$ , c'est à dire  $B(x, R) = \{y \in X; d(x, y) < R\}$ . La boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $R$  sera notée  $B_f(x, R) = \{y \in X, d(x, y) \leq R\}$ . Nous rappelons qu'un espace métrique est dit propre si ses boules fermées sont compactes.

## Structures euclidiennes

On supposera toujours  $\mathbb{R}^n$  muni de la base canonique notée  $(e_1, \dots, e_n)$ . Un point  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  sera associé à ses coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans la base canonique et on écrira souvent  $x = (x_1, \dots, x_n)$ .

Si  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ , on définit leur produit scalaire usuel par  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ . La norme euclidienne de  $x$  est alors

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , la distance euclidienne de  $x$  à  $y$ , qui vaut  $\|x - y\|$ , sera notée  $|x - y|$ , et, sauf mention du contraire,  $\mathbb{R}^n$  sera muni de la distance euclidienne.

## Mesures

Les mesures que nous utiliserons le plus souvent dans ce livre sont :

- les mesures de Dirac en un point  $x$  d'un ensemble  $X$ , c'est à dire  $\delta_x(A) = 1$  si  $x \in A$  et  $\delta_x(A) = 0$  sinon (pour tout sous-ensemble  $A$  de  $X$ ). On notera d'autre part  $\chi_A$  la fonction caractéristique de  $A$ , c'est à dire  $\chi_A(x) = \delta_x(A)$ .

- la mesure de Lebesgue  $n$ -dimensionnelle notée  $\mathcal{L}^n$  dans le cas  $X = \mathbb{R}^n$ .

- la mesure de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle notée  $\mathcal{H}^s$  dans le cas d'un espace métrique quelconque  $(X, d)$ .

On note  $\alpha(n) := \mathcal{L}^n(B(0, 1))$ .

Si  $\mu$  est une mesure sur  $X$ ,  $A \subset X$ ,  $\mu \lfloor A$  est la restriction de  $\mu$  à  $A$ .

On écrira qu'une propriété (P) est  $\mu$ -presque partout vraie (ou  $\mu$ -pp) si l'ensemble des points pour lesquels la propriété (P) n'est pas vérifiée est de  $\mu$ -mesure nulle.

Si  $\mu$  est une mesure sur l'espace métrique  $(X, d)$  et si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction localement intégrable, sa moyenne (si elle existe) sur la boule  $B(x, R)$  sera définie et notée par

$$\int_{B(x,R)} f d\mu = \frac{1}{\mu(B(x,R))} \int_{B(x,R)} f d\mu.$$

## Espaces fonctionnels

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On notera  $C(X)$  l'espace des fonctions continues  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $C_c(X)$  l'espace des fonctions continues  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  à support compact dans  $X$ .

Dans le cas où  $X = \mathbb{R}^n$ , on note  $C^p(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions de  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^p$  et  $C_c^p(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^p$  à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ . On englobe ici le cas des fonctions  $C^\infty$ , c'est à dire pour  $p = \infty$ .

Si  $X$  est muni d'une mesure  $\mu$ , on note  $\|f\|_p = (\int_X |f(x)|^p d\mu(x))^{1/p}$  si  $p < \infty$  et  $\|f\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq C \text{ pour } \mu - \text{presque tout } x \in \mathbb{R}^n\}$ . On note alors  $L^p(X) = \{f; \|f\|_p < \infty\}$ .

Si  $f$  est une fonction différentiable sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on note  $Df$  sa différentielle,  $Jf$  sa matrice jacobienne et  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  ses dérivées partielles. Si  $f$  est à valeurs réelles, on note  $\nabla f$  le gradient de  $f$ . Enfin, on note  $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$  le laplacien.

# Chapitre 1

## Eléments de théorie de la mesure

### 1 Mesures

Le matériel présenté dans cette section est principalement issu de [45, Chapter 1].

#### 1.1 Définitions et propriétés générales

Si  $X$  est un ensemble, on notera  $\mathcal{P}(X)$  l'ensemble des parties de  $X$ .

**Définition 1.1.** Soit  $X$  un ensemble. Une mesure positive sur  $X$  est une application  $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$  telle que

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2. pour toute suite  $(A_k)_{k \geq 1}$  de parties de  $X$  et tout  $A \subset \bigcup_{k \geq 1} A_k$ ,

$$\mu(A) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(A_k).$$

On dit aussi que  $(X, \mu)$  est un espace mesuré.

On donne ici des premiers exemples de mesures.

**Exemple 1.2.** Soit  $X$  un ensemble.

1. Pour tout  $x \in X$ , on définit  $\delta_x$  sur  $X$  par  $\delta_x(A) = \chi_A(x)$  (où  $\chi_A$  désigne la fonction indicatrice de  $A$ ). On vérifie facilement que  $\delta_x$  est une mesure sur  $X$ , appelée mesure de Dirac au point  $x$ .
2. Pour toute partie  $A \subset X$ , on pose  $\mu(A) = \sharp A$ , où  $\sharp A$  désigne le cardinal de  $A$  dans  $[0, +\infty]$ . L'application  $\mu$  est clairement une mesure sur  $X$ , appelée mesure de comptage sur  $X$ .

**Remarque 1.3.** 1. La définition d'une mesure donnée dans la définition 1.1 correspond à ce qui est souvent appelé une mesure extérieure. Ici,  $\mu(A)$  est définie pour toute partie  $A$  de  $X$ , même si  $A$  n'est pas mesurable (cette notion d'ensemble mesurable n'a pas encore été définie). Voir aussi la remarque 1.14 plus bas.

2. Si  $\mu$  est une mesure sur  $X$ , alors pour toutes parties  $A \subset B \subset X$ , on a  $\mu(A) \leq \mu(B)$ .

On définit maintenant la restriction d'une mesure à une partie :

**Définition 1.4.** Soient  $X$  un ensemble,  $\mu$  une mesure sur  $X$  et  $A \subset X$ . On définit la mesure  $\mu$  restreinte à  $A$ , notée  $\mu \lfloor A$ , par

$$\mu \lfloor A(B) = \mu(A \cap B)$$

pour tout  $B \subset X$ . On notera que  $\mu \lfloor A$  est encore une mesure sur  $X$ .

Si  $(X, \mu)$  est un ensemble mesuré, certaines parties sont dites mesurables :

**Définition 1.5.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . Si  $A \subset X$ , on dit que  $A$  est mesurable (ou  $\mu$ -mesurable) si, et seulement si, pour tout  $B \subset X$ ,

$$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B \setminus A).$$

Voici quelques propriétés des ensembles mesurables :

**Proposition 1.6.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$ .

1. Si  $A \subset X$  et  $\mu(A) = 0$ , alors  $A$  est mesurable.
2. Si  $A \subset X$ ,  $A$  est mesurable si, et seulement si,  $X \setminus A$  est mesurable.
3. Si  $A \subset X$ , tout ensemble mesurable pour  $\mu$  est aussi mesurable pour  $\mu \llcorner A$ .
4. Si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'ensembles mesurables, alors  $\bigcup_{k \geq 1} A_k$  et  $\bigcap_{k \geq 1} A_k$  sont mesurables.
5. Si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'ensembles mesurables deux à deux disjoints, alors

$$\mu \left( \bigcup_{k \geq 1} A_k \right) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k).$$

6. Si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'ensembles mesurables avec  $A_k \subset A_{k+1}$  pour tout  $k$ , alors

$$\mu \left( \bigcup_{k \geq 1} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k).$$

7. Si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'ensembles mesurables avec  $A_k \supset A_{k+1}$  pour tout  $k$  et  $\mu(A_1) < +\infty$ , alors

$$\mu \left( \bigcap_{k \geq 1} A_k \right) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A_k).$$

La preuve est laissée en exercice (cf [45, Chapter 1, Section 1.1, Theorem 1]). On peut ajouter :

**Proposition 1.7.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$ .

1. Si  $A, B \subset X$  sont mesurables, alors

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

2. Si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'ensembles mesurables tels que, pour tous  $k, l \geq 1$  avec  $k \neq l$ ,  $\mu(A_k \cap A_l) = 0$ , alors

$$\mu \left( \bigcup_{k \geq 1} A_k \right) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k).$$

*Démonstration.* Pour 1, on remarque que  $A \cup B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ ,  $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$ ,  $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$ , et que ces unions sont disjointes. On en déduit la formule annoncée si  $\mu(A \cap B) < +\infty$  (car dans ce cas,  $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$  et  $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A \cap B)$ ). Si  $\mu(A \cap B) = +\infty$ , on a aussi  $\mu(A) = \mu(B) = \mu(A \cup B) = +\infty$ , et la formule est encore valable.

Pour 2, on vérifie par récurrence sur  $n$  et en utilisant 1 que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\mu \left( \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k \right) =$

$\sum_{1 \leq k \leq n} \mu(A_k)$ . On en déduit 2 car  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{1 \leq k \leq n} A_k \right) = \mu \left( \bigcup_{k \geq 1} A_k \right)$ , par le point 6 de la proposition 1.6. □

**Remarque 1.8.** Un cas particulier de la propriété 2 de la proposition 1.7 est le cas où les  $A_k$  sont deux à deux disjoints, rappelé en 5 de la proposition 1.6.

Voici une autre propriété ([98, Exercice 1.2]) :

**Lemme 1.9.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . Soient  $A \subset B \subset X$ . On suppose  $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$ . Alors, pour tout  $C \subset X$  mesurable,  $\mu(A \cap C) = \mu(B \cap C)$ .

*Démonstration.* Comme  $C$  est mesurable, on a  $\mu(A) = \mu(A \setminus C) + \mu(A \cap C)$  et  $\mu(B) = \mu(B \setminus C) + \mu(B \cap C)$ . Comme  $A \subset B$ , on a aussi  $A \setminus C \subset B \setminus C$ , donc  $\mu(A \setminus C) \leq \mu(B \setminus C)$ . Comme  $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$ , on obtient

$$\mu(B \cap C) = \mu(B) - \mu(B \setminus C) \leq \mu(A) - \mu(A \setminus C) = \mu(A \cap C),$$

et comme  $\mu(A \cap C) \leq \mu(B \cap C)$  par inclusion, on obtient la conclusion.  $\square$

**Définition 1.10.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$ . On dit que  $\mathcal{T}$  est une tribu si, et seulement si :

1.  $\emptyset \in \mathcal{T}$ ,
2. pour tout  $A \in \mathcal{T}$ ,  $X \setminus A \in \mathcal{T}$ ,
3. pour toute suite  $(A_k)_{k \geq 1} \in \mathcal{T}$ ,  $\bigcup_{k \geq 1} A_k \in \mathcal{T}$ .

Si  $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$  est une famille de tribus de  $X$ , alors

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i := \{A \subset X; A \in \mathcal{T}_i \text{ pour tout } i \in I\}$$

est aussi une tribu de  $X$ . Cela permet de définir la tribu engendrée par une partie  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  comme l'intersection de toutes les tribus de  $X$  contenant  $\mathcal{A}$ . C'est la plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant  $\mathcal{A}$ .

On définit aussi la notion de classe monotone, qui servira pour la preuve du Lemme 1.47 plus loin :

**Définition 1.11.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ . On dit que  $\mathcal{M}$  est une classe monotone si, et seulement si :

1.  $X \in \mathcal{M}$ ,
2. si  $A, B \in \mathcal{M}$  et  $A \subset B$ , alors  $B \setminus A \in \mathcal{M}$ ,
3. pour toute suite  $(A_n)_{n \geq 1}$  d'éléments de  $\mathcal{M}$  avec  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ ,  $\bigcup_{n \geq 1} A_n \in \mathcal{M}$ .

Comme dans le cas des tribus, on définit la classe monotone engendrée par une partie  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  comme l'intersection de toutes les classes monotones de  $X$  contenant  $\mathcal{A}$ . C'est la plus petite classe monotone (au sens de l'inclusion) contenant  $\mathcal{A}$ .

On vérifie qu'une tribu est une classe monotone, et qu'une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.

On énonce ici le lemme des classes monotones :

**Théorème 1.12.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  stable par intersection finie. Alors la classe monotone engendrée par  $\mathcal{A}$  et la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$  coïncident.

On pourra se reporter à [13, Théorème I.3.3] pour la preuve. Une conséquence importante de ce théorème est le résultat suivant d'unicité des mesures :

**Corollaire 1.13.** Soient  $X$  un ensemble,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$  stable par intersection finie et  $\mathcal{T}$  la tribu engendrée par  $\mathcal{A}$ .



1. Soient  $\mu, \nu$  deux mesures sur  $X$ , telles que  $\mu(X) = \nu(X) < +\infty$ . On suppose que  $\mu(E) = \nu(E)$  pour tout  $E \in \mathcal{A}$ . Alors  $\mu(E) = \nu(E)$  pour tout  $E \in \mathcal{T}$ .
2. Soient  $\mu, \nu$  deux mesures sur  $X$ . On suppose que  $\mu(E) = \nu(E)$  pour tout  $E \in \mathcal{A}$  et qu'il existe une suite croissante  $(X_n)_{n \geq 1} \in \mathcal{A}$  telle que  $\bigcup_{n \geq 1} X_n = X$  et  $\mu(X_n) = \nu(X_n)$  pour tout  $n \geq 1$ .

Alors  $\mu(E) = \nu(E)$  pour tout  $E \in \mathcal{T}$ .

*Démonstration.* On commence par le cas 1. Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble des  $E \in \mathcal{T}$  tel que  $\mu(E) = \nu(E)$ . On vérifie que  $\mathcal{M}$  est une classe monotone. En effet,  $X \in \mathcal{M}$  car  $\mu(X) = \nu(X)$ . Soient  $A \subset B$  dans  $\mathcal{M}$ . Alors, comme  $\mu(B) < +\infty$  et  $\nu(B) < +\infty$ ,

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = \nu(B) - \nu(A) = \nu(B \setminus A).$$

Soit enfin  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite d'éléments de  $\mathcal{M}$  avec  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ . Alors

$$\mu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(A_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \nu(A_n) = \nu\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right).$$

Comme  $\mathcal{M}$  est une classe monotone contenant  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{M}$  contient donc la classe monotone engendrée par  $\mathcal{A}$ , qui est égale à  $\mathcal{T}$  par le théorème 1.12.

Pour 2, soit  $n \geq 1$ . D'après le cas 1, les mesures  $\mu \llcorner X_n$  et  $\nu \llcorner X_n$  coïncident sur  $\mathcal{T}$ , ce qui signifie que, pour tout  $E \in \mathcal{T}$  et tout  $n \geq 1$ ,  $\mu(E \cap X_n) = \nu(E \cap X_n)$ . Il suffit alors de faire tendre  $n$  vers  $+\infty$  pour conclure que  $\mu(E) = \nu(E)$ .  $\square$

#### Remarque 1.14.

Une mesure est souvent définie sur une tribu et non sur l'ensemble de toutes les parties d'un ensemble donné. Le lien entre la notion usuelle de mesure et celle présentée ici est le suivant. Si  $X$  est un ensemble et  $\mu$  est une mesure sur  $X$  au sens de la définition 1.1, alors l'ensemble des parties mesurables pour  $\mu$  forme une tribu de  $X$  (proposition 1.1) et :

1.  $\mu(\emptyset) = 0$ ,
2. pour toute suite de parties mesurables deux à deux disjointes  $(A_k)_{k \geq 1}$ ,

$$\mu\left(\bigcup_{k \geq 1} A_k\right) = \sum_{k \geq 1} \mu(A_k).$$

Cet énoncé est attribué à Carathéodory (voir [89, Theorem 1.15]). Réciproquement, si  $\mathcal{T}$  est une tribu de  $X$  et  $\mu : \mathcal{T} \rightarrow [0, +\infty]$  vérifie les propriétés 1 et 2 précédentes pour toute suite de parties deux à deux disjointes  $(A_k)_{k \geq 1}$  appartenant à  $\mathcal{T}$ , et si on définit, pour toute partie  $A \subset X$ ,

$$\mu^*(A) := \inf_{B \in \mathcal{T}; B \supset A} \mu(B), \tag{1.15}$$

alors  $\mu^*$  est une mesure au sens de la définition 1.1 (exercice, voir [98, Chapter 1, Section 1.1]). On a  $\mu^*(A) = \mu(A)$  pour toute  $A \in \mathcal{T}$ .

On vérifie de plus que, si  $E \in \mathcal{T}$ , alors  $E$  est mesurable pour  $\mu^*$ . En effet, soient  $A \subset X$  et  $k \geq 1$ . Il existe  $B \supset A$  appartenant à  $\mathcal{T}$  tel que  $\mu(B) \leq \mu^*(A) + \frac{1}{k}$ . Alors, comme  $B$  et  $E$  appartiennent à  $\mathcal{T}$ ,

$$\mu^*(A) \geq \mu(B) - \frac{1}{k} = \mu(B \cap E) - \mu(B \setminus E) - \frac{1}{k} \geq \mu^*(A \cap E) - \mu^*(A \setminus E) - \frac{1}{k},$$

et comme c'est vrai pour tout  $k \geq 1$ , on obtient

$$\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) - \mu^*(A \setminus E),$$

et comme la majoration  $\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap E) - \mu^*(A \setminus E)$  est vraie par inclusion et sous-additivité de  $\mu^*$ , on obtient bien que  $E$  est mesurable pour  $\mu^*$ .

**Définition 1.16.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . On dit que  $\mu$  est  $\sigma$ -finie si, et seulement si, il existe une famille dénombrable de parties  $(X_k)_{k \geq 1} \subset X$  telles que  $X = \bigcup_{k \geq 1} X_k$  et  $\mu(X_k) < +\infty$  pour tout  $k \geq 1$ .

**Définition 1.17.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. La tribu engendrée par les ouverts de  $X$  s'appelle tribu borélienne de  $X$ . Les éléments de la tribu borélienne sont appelés ensembles boréliens.

**Définition 1.18.** Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$ .

1. La mesure  $\mu$  est dite régulière si, et seulement si, pour tout  $A \subset X$ , il existe un ensemble mesurable  $B \supset A$  tel que  $\mu(A) = \mu(B)$ .
2. Si  $(X, d)$  est un espace métrique,  $\mu$  est dite borélienne si, et seulement si, tout ensemble borélien est mesurable.
3. Si  $(X, d)$  est un espace métrique,  $\mu$  est dite borélienne régulière si, et seulement si,  $\mu$  est borélienne et, pour tout  $A \subset X$ , il existe un borélien  $B \supset A$  tel que  $\mu(A) = \mu(B)$ .
4. Si  $(X, d)$  est un espace métrique,  $\mu$  est une mesure de Radon si, et seulement si,  $\mu$  est borélienne régulière et  $\mu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K \subset X$ .

**Remarque 1.19.** On revient à la remarque 1.14. Soient  $X$  un ensemble et  $\mu$  une mesure sur  $X$  (au sens de la définition 1.1). On commence par restreindre  $\mu$  aux parties mesurables, puis on définit  $\tilde{\mu}$  par (1.15). Alors  $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$  pour toute  $A \subset X$  si, et seulement si,  $\mu$  est régulière. En effet, si  $\mu$  est régulière et  $A \subset X$ , il existe  $B \supset A$  tel que  $\mu(B) = \mu(A)$ , donc  $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ . Réciproquement, supposons  $\tilde{\mu} = \mu$  et soit  $A \subset X$ . Pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $A_k \supset A$  mesurable tel que  $\mu(A_k) \leq \mu(A) + \frac{1}{k}$ . On pose alors  $B := \bigcap_{k \geq 1} A_k$ , qui est mesurable. On a bien  $B \supset A$  et  $\mu(A) \leq \mu(B) \leq \mu(A_k)$  pour tout  $k \geq 1$ , de sorte que  $\mu(B) = \mu(A)$ .

La propriété suivante sera utilisée par la suite :

**Proposition 1.20.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure borélienne régulière sur  $X$ . Soit  $A \subset X$  mesurable avec  $\mu(A) < +\infty$ . Alors  $\nu := \mu \llcorner A$  est une mesure de Radon.

*Démonstration.* Il est clair que  $\nu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K \subset X$  et que tout borélien est  $\nu$ -mesurable (proposition 1.6, assertion 3).

On peut supposer que  $A$  est borélien. En effet, il existe un borélien  $B$  tel que  $A \subset B$  et  $\mu(A) = \mu(B) < +\infty$ . Alors

$$\mu \llcorner A = \mu \llcorner B. \quad (1.21)$$

En effet, comme  $A$  est  $\mu$ -mesurable,

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A) = 0.$$

De plus, pour tout  $C \subset X$ ,

$$\begin{aligned} (\mu \llcorner B)(C) &= \mu(B \cap C) \\ &= \mu(C \cap B \cap A) + \mu((C \cap B) \setminus A) \\ &\leq \mu(C \cap A) + \mu(B \setminus A) \\ &= (\mu \llcorner A)(C). \end{aligned}$$

Comme on a aussi clairement  $(\mu \llcorner A)(C) \leq (\mu \llcorner B)(C)$ , on obtient bien (1.21).

On peut donc supposer  $A$  borélien. Soit  $C \subset X$ . Comme  $\mu$  est borélienne régulière, il existe un borélien  $E \supset A \cap C$  tel que  $\mu(E) = \mu(A \cap C)$ . On définit  $D := E \cup (X \setminus A)$ , qui est un borélien qui contient  $C$ . De plus,

$$(\mu \llcorner A)(D) = \mu(A \cap D) = \mu(A \cap E) \leq \mu(E) = \mu(A \cap C) = (\mu \llcorner A)(C),$$

et l'inégalité  $(\mu \llcorner A)(C) \leq (\mu \llcorner A)(D)$  est immédiate. Ainsi,  $(\mu \llcorner A)(D) = (\mu \llcorner A)(C)$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Voici une variante :

**Proposition 1.22.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$ . Soit  $A \subset X$  borélien. Alors  $\nu := \mu \llcorner A$  est une mesure de Radon.

*Démonstration.* Il est clair à nouveau que  $\nu(K) = \mu(A \cap K) \leq \mu(K) < +\infty$  pour tout compact  $K \subset X$  (car  $\mu$  est de Radon) et que tout borélien est  $\nu$ -mesurable (proposition 1.6, assertion 3).

Soit  $C \subset X$ . Comme  $\mu$  est borélienne régulière, il existe un borélien  $E \supset A \cap C$  tel que  $\mu(E) = \mu(A \cap C)$ . On définit  $D := E \cup (X \setminus A)$ , qui est un borélien (rappelons que  $A$  est borélien par hypothèse !) qui contient  $C$ . De plus,

$$(\mu \llcorner A)(D) = \mu(A \cap D) = \mu(A \cap E) \leq \mu(E) = \mu(A \cap C) = (\mu \llcorner A)(C),$$

et l'inégalité  $(\mu \llcorner A)(C) \leq (\mu \llcorner A)(D)$  est immédiate. Ainsi,  $(\mu \llcorner A)(D) = (\mu \llcorner A)(C)$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Un phénomène important concernant les mesures boréliennes est constitué par leurs propriétés d'approximation ([98, Theorem 1.10]) :

**Lemme 1.23.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $\mu$  une mesure borélienne sur  $X$  et  $B \subset X$  un ensemble borélien.

1. Si  $\mu(B) < +\infty$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un fermé  $F \subset B$  tel que  $\mu(B \setminus F) < \varepsilon$ .
2. S'il existe une famille dénombrable d'ouverts  $(V_k)_{k \geq 1}$  tels que  $\mu(V_k) < +\infty$  pour tout  $k \geq 1$  et  $B \subset \bigcup_{k \geq 1} V_k$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ouvert  $U \supset B$  tel que  $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$ .

*Démonstration.* Pour 1, on pose  $\nu := \mu \llcorner B$ . La mesure  $\nu$  est borélienne et finie (i.e.  $\nu(X) < +\infty$ ). On définit

$\mathcal{F} := \{A \subset X; \text{ pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un fermé } F \subset A \text{ et un ouvert } U \supset A \text{ tels que } \nu(U \setminus F) < \varepsilon\}$ .  $\blacksquare$

On vérifie d'abord que  $\mathcal{F}$  contient tous les fermés de  $X$ . En effet, soient  $F$  un fermé de  $X$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , soit

$$U_k := \left\{ x \in X; d(x, F) < \frac{1}{k} \right\},$$

qui est un ouvert de  $X$ . Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$V_k := U_k \setminus F = \left\{ x \in X; 0 < d(x, F) < \frac{1}{k} \right\}$$

est un ouvert de  $X$ ,  $V_{k+1} \subset V_k$  et  $\bigcap_{k \geq 1} V_k = \emptyset$ . Comme  $\nu(V_1) < +\infty$ , il existe  $k \geq 1$  tel que  $\nu(V_k) < \varepsilon$ ,

ce qui donne la conclusion.

On vérifie ensuite que  $\mathcal{F}$  est une tribu. En effet,  $\emptyset \in \mathcal{F}$  et si  $A \in \mathcal{F}$ ,  $X \setminus A \in \mathcal{F}$ . Enfin, si  $(A_k)_{k \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{F}$  et  $\varepsilon > 0$ , alors, pour tout  $k \geq 1$ , il existe un fermé  $F_k \subset A_k$  et un ouvert  $U_k \supset A_k$  tels que  $\nu(U_k \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ . Soit  $U := \bigcup_{k \geq 1} U_k$ , qui est un ouvert de  $X$ . Comme  $\nu(U) < +\infty$ ,

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow +\infty} \nu \left( U \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq m} F_k \right) &= \nu \left( \bigcup_{k \geq 1} U_k \setminus \bigcup_{k \geq 1} F_k \right) \\ &\leq \nu \left( \bigcup_{k \geq 1} (U_k \setminus F_k) \right) \\ &\leq \sum_{k \geq 1} \nu(U_k \setminus F_k) < \varepsilon, \end{aligned}$$

de sorte qu'il existe un entier  $m \geq 1$  tel que

$$\nu \left( U \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq m} F_k \right) < \varepsilon,$$

$\bigcup_{1 \leq k \leq m} F_k$  est un fermé et  $\bigcup_{1 \leq k \leq m} F_k \subset A \subset U$ .

Ainsi,  $\mathcal{F}$  est une tribu contenant tous les fermés de  $X$ , donc tous les boréliens, ce qui termine la preuve de 1.

Pour 2, par le point 1, pour tout  $k \geq 1$ , il existe un fermé  $F_k \subset V_k \setminus B$  tel que  $\mu((V_k \setminus B) \setminus F_k) < \frac{\varepsilon}{2^k}$ .

Soit  $U := \bigcup_{k \geq 1} (V_k \setminus F_k)$ , qui est donc un ouvert de  $X$ . On vérifie facilement que  $B \subset U$  et que  $\mu(U \setminus B) < \varepsilon$ .  $\square$

**Théorème 1.24.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$ .

1. Soit  $A \subset X$ . On suppose qu'il existe une famille dénombrable d'ouverts  $(V_k)_{k \geq 1}$  tels que  $\mu(V_k) < +\infty$  pour tout  $k \geq 1$  et  $A \subset \bigcup_{k \geq 1} V_k$ , alors

$$\mu(A) = \inf_{U \text{ ouvert}, U \supset A} \mu(U),$$

2. On suppose qu'il existe une famille dénombrable de compacts  $(K_m)_{m \geq 1}$  tels que  $X = \bigcup_{m \geq 1} K_m$ .

Alors, pour tout ensemble  $\mu$ -mesurable  $A \subset X$ ,

$$\mu(A) = \sup_{K \text{ compact}, K \subset A} \mu(K).$$

On notera que  $A$  n'est pas supposé mesurable dans 1.

*Démonstration.* Pour 1, il suffit clairement de traiter le cas  $\mu(A) < +\infty$ . Si  $A$  est borélien, et si  $\varepsilon > 0$ , le lemme 1.23 fournit un ouvert  $U \supset A$  tel que  $\mu(U \setminus A) < \varepsilon$ , ce qui donne la conclusion car  $\mu(U) = \mu(A) + \mu(U \setminus A) < +\infty$ . Dans le cas général, il existe un borélien  $B \supset A$  tel que  $\mu(A) = \mu(B)$ . Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \mu(A) = \mu(B) &= \inf_{U \text{ ouvert}, U \supset B} \mu(U) \\ &\geq \inf_{U \text{ ouvert}, U \supset A} \mu(U), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve puisque l'inégalité inverse est immédiate.

Pour 2, soit  $A$  un ensemble mesurable tel que  $\mu(A) < +\infty$ . On définit  $\nu := \mu \llcorner A$ , qui est une mesure de Radon par la proposition 1.20. Soit  $\varepsilon > 0$ . Par le point 1 appliqué avec  $\nu$  et  $X \setminus A$ , il existe un ouvert  $U \supset X \setminus A$  tel que  $\nu(U) < \nu(X \setminus A) + \varepsilon = \varepsilon$ . Si  $F = X \setminus U$ ,  $F$  est fermé et  $F \subset A$ . De plus,

$$\mu(A \setminus F) = \nu(X \setminus F) = \nu(U) < \varepsilon,$$

si bien que

$$0 \leq \mu(A) - \mu(F) < \varepsilon.$$

On a donc établi

$$\mu(A) = \sup_{F \text{ fermé}; F \subset A} \mu(F). \quad (1.25)$$

On passe maintenant au cas où  $\mu(A) = +\infty$ . On peut supposer la suite  $(K_m)_{m \geq 1}$  croissante (remplacer chaque  $K_m$  par l'union des  $K_l$  pour  $1 \leq l \leq m$ ), et on pose  $K'_m := K_m \setminus K_{m-1}$  pour tout  $m \geq 2$  et  $K'_1 := K_1$ , de sorte que les  $K'_m$  sont deux à deux disjoints et  $X = \bigcup_{m \geq 1} K'_m$ . Comme  $\mu(A) = +\infty$ , on a

$$+\infty = \mu(A) = \sum_{m \geq 1} \mu(A \cap K'_m).$$

Comme  $\mu$  est une mesure de Radon,  $\mu(A \cap K'_m) < +\infty$  et le cas précédemment traité fournit un fermé  $F_m \subset A \cap K'_m$  tel que  $\mu(F_m) \geq \mu(A \cap K'_m) - \frac{1}{2^m}$ . On a  $\bigcup_{m \geq 1} F_m \subset A$  et

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow +\infty} \mu \left( \bigcup_{1 \leq m \leq l} F_m \right) &= \mu \left( \bigcup_{m \geq 1} F_m \right) \\ &= \sum_{m \geq 1} \mu(F_m) \\ &\geq \sum_{m \geq 1} \left( \mu(A \cap K'_m) - \frac{1}{2^m} \right) \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Comme  $\bigcup_{1 \leq m \leq l} F_m$  est un fermé pour tout  $l$ , on obtient bien (1.25) également dans ce cas.

Enfin, comme, pour tout fermé  $F \subset X$ ,  $\mu(F) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \mu(F \cap K_m)$  et  $F \cap K_m$  est compact, on obtient finalement la conclusion de l'assertion 2 du théorème 1.24.  $\square$

Voici des exemples de mesures de Radon :

- Exemple 1.26.**
1. La mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ , qui sera définie plus bas (section 2) est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  (voir la proposition 1.46).
  2. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Pour tout  $x \in X$ , la mesure  $\delta_x$  (voir l'exemple 1.2) est une mesure de Radon.
  3. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. La mesure de comptage sur  $A$  (voir l'exemple 1.2) est une mesure borélienne régulière. C'est une mesure de Radon si, et seulement si, tout compact de  $X$  est un ensemble fini, c'est-à-dire  $X$  est un espace discret.

Pour poursuivre cette section, voici une condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure soit borélienne :

**Théorème 1.27.** [Critère de Caratheodory] ([45, Chapter 1, Theorem 5], [64, Lemma 3.3.5]) Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . Alors  $\mu$  est borélienne si, et seulement si, pour tous  $A, B \subset X$  avec  $d(A, B) > 0$ , on a  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ .

*Démonstration.* On suppose d'abord  $\mu$  borélienne. Soient  $A, B \subset X$  avec  $d(A, B) > 0$ . On définit  $U := \{x \in X; d(x, A) < d(x, B)\}$ . Alors  $U$  est un ouvert contenant  $A$  et  $U \cap B = \emptyset$ . On a  $(A \cup B) \setminus U = B$  et  $(A \cup B) \cap U = A$ . Comme  $U$  est ouvert,  $U$  est borélien donc mesurable, de sorte que

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \cup B) \setminus U) + \mu((A \cup B) \cap U) = \mu(B) + \mu(A).$$

On suppose maintenant que, pour tous  $A, B \subset X$  avec  $d(A, B) > 0$ , on a  $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ . On cherche à montrer que  $\mu$  est borélienne. Il suffit de montrer que les fermés sont mesurables, car les ouverts le seront donc aussi, donc les boréliens. Soit donc  $F \subset X$  un fermé. On veut montrer que  $F$  est

mesurable, ce qui signifie que, pour tout  $A \subset X$ ,  $\mu(A) = \mu(A \setminus F) + \mu(A \cap F)$ . On a clairement, par inclusion et sous-additivité de  $\mu$ ,  $\mu(A) \leq \mu(A \setminus F) + \mu(A \cap F)$ . Il suffit donc de vérifier

$$\mu(A \setminus F) + \mu(A \cap F) \leq \mu(A). \quad (1.28)$$

Il suffit de le voir quand  $\mu(A) < +\infty$ . Pour tout  $k \geq 1$ , soit

$$F_k := \left\{ x \in X; d(x, F) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Comme  $d(A \setminus F_k, A \cap F) \geq \frac{1}{k}$ , l'hypothèse sur  $\mu$  montre que

$$\mu(A \setminus F_k) + \mu(A \cap F) = \mu((A \setminus F_k) \cup (A \cap F)) \leq \mu(A).$$

Il suffit donc, pour terminer la preuve du théorème 1.27, de montrer que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(A \setminus F_k) = \mu(A \setminus F). \quad (1.29)$$

Pour cela, pour tout  $k \geq 1$ , on définit

$$R_k := \left\{ x \in A; \frac{1}{k+1} < d(x, F) \leq \frac{1}{k} \right\}.$$

Pour tous  $i, j \geq 1$  avec  $j \geq i + 2$ ,  $d(R_i, R_j) > 0$ . On a donc, pour tout  $m \geq 1$  et en utilisant à nouveau l'hypothèse sur  $\mu$ ,

$$\mu(A) \geq \mu \left( \bigcup_{1 \leq i \leq m} R_{2i} \right) = \sum_{1 \leq i \leq m} \mu(R_{2i}),$$

et de même

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \mu(R_{2i+1}) \leq \mu(A),$$

de sorte que

$$\sum_{i \geq 1} \mu(R_i) \leq 2\mu(A) < +\infty. \quad (1.30)$$

Comme  $F$  est fermé, pour tout  $x \in X$ ,  $x \notin F$  si, et seulement si,  $d(x, F) > 0$ . On a donc, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$A \setminus F = (A \setminus F_k) \cup \left( \bigcup_{m \geq k} R_m \right),$$

si bien que

$$\mu(A \setminus F) - \sum_{m \geq k} \mu(R_m) \leq \mu(A \setminus F_k) \leq \mu(A \setminus F),$$

et, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  et utilisant (1.30), on obtient bien (1.29).  $\square$

On termine cette section en définissant le support d'une mesure.

**Définition 1.31.** Soient  $X$  un espace métrique séparable et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . On définit le support de  $\mu$ , noté  $\text{Supp}(\mu)$ , comme

$$\text{spt } \mu := X \setminus \{x \in X; \text{il existe } r > 0 \text{ tel que } \mu(B(x, r)) = 0\}.$$

En d'autres termes, le support de  $\mu$  est le plus petit fermé  $F$  tel que  $\mu(X \setminus F) = 0$ .

## 1.2 Fonctions mesurables

**Définition 1.32.** Soient  $X$  un ensemble,  $Y$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . Si  $f : X \rightarrow Y$ ,  $f$  est mesurable (ou  $\mu$ -mesurable) si, et seulement si, pour tout ouvert  $\omega \subset Y$ ,  $f^{-1}(\omega)$  est  $\mu$ -mesurable.

On notera que, si  $f$  est mesurable, alors pour tout borélien  $E \subset Y$ ,  $f^{-1}(E)$  est  $\mu$ -mesurable.

**Proposition 1.33.** ([45, Chapter 1, Section 1.1, Theorem 6]) Soit  $(f_k)_{k \geq 1} : X \rightarrow [-\infty, +\infty]$  une suite de fonctions mesurables. Alors  $\sup_k f_k$ ,  $\inf_k f_k$ ,  $\overline{\lim} f_k$  et  $\underline{\lim} f_k$  sont mesurables.

Dans cette proposition,  $[-\infty, +\infty]$  est muni de la topologie, donnée par la métrique standard  $d(x, y) := |\arctan x - \arctan y|$ , avec la convention  $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$  et  $\arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2}$ .

## 1.3 Mesure image

**Définition 1.34.** Soient  $X, Y$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $\mu$  une mesure sur  $X$ . La mesure image, notée  $f_{\#}\mu$ , de  $\mu$  par  $f$  est donnée par  $f_{\#}\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$  pour tout  $A \subset Y$ .

Il est laissé au lecteur le soin de vérifier que  $f_{\#}\mu$  est une mesure sur  $Y$ . Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques séparables et si  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $X$  (à support compact), alors  $f_{\#}\mu$  est une mesure de Radon (et  $\text{Supp}(f_{\#}\mu) = f(\text{Supp}(\mu))$ ). Il est facile de voir que si  $f : X \rightarrow Y$  et  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}^+$  sont des fonctions boréliennes et si  $\mu$  est une mesure de Borel sur  $X$ ,

$$\int_Y g df_{\#}\mu = \int_X (g \circ f) d\mu. \quad (1.35)$$

En particulier,  $g$  est intégrable par rapport à  $f_{\#}\mu$  si et seulement si  $g \circ f$  est intégrable pour  $\mu$ . Voir [98] chapitre 1 pour plus de détails.

## 1.4 Prolongements d'applications continues

On commence par le lemme d'Urysohn ([125, Theorem 2.12]) :

**Lemme 1.36.** [Lemme d'Urysohn] Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $F, G$  deux fermés disjoints dans  $X$ . Alors il existe une fonction continue  $f : X \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f = 0$  sur  $F$  et  $f = 1$  sur  $G$ .

*Démonstration.* Il suffit de poser

$$f(x) := \frac{d(x, F)}{d(x, F) + d(x, G)}$$

pour tout  $x \in X$ . □

**Remarque 1.37.** On peut donner une version de ce lemme pour des fonctions  $C^\infty$ , voir l'exercice 1.232 plus loin.

**Théorème 1.38.** [Théorème de Tietze Urysohn] Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $K \subset X$  un compact et  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. Alors il existe une fonction  $F : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue bornée telle que  $F(x) = f(x)$  pour tout  $x \in K$  et

$$\|F\|_\infty = \|f\|_\infty.$$

*Démonstration.* Comme  $f$  est bornée sur  $K$  (fonction continue sur un compact), on peut supposer que  $-1 \leq f(x) \leq 1$  pour tout  $x \in K$ . On définit

$$K^+ := \left\{ x \in K; f(x) \geq \frac{1}{3} \right\}, \quad K^- := \left\{ x \in K; f(x) \leq -\frac{1}{3} \right\}.$$

Les ensembles  $K^+$  et  $K^-$  sont des fermés de  $X$  disjoints. Le lemme 1.36 fournit une fonction  $f_1 : X \rightarrow \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$  telle que  $f_1(x) = \frac{1}{3}$  pour tout  $x \in K^+$  et  $f_1(x) = -\frac{1}{3}$  pour tout  $x \in K^-$ . On a donc

$$|f(x) - f_1(x)| \leq \frac{2}{3} \text{ pour tout } x \in K$$

et

$$|f_1(x)| \leq \frac{1}{3} \text{ pour tout } x \in X.$$

On construit ainsi par récurrence une suite de fonctions  $(f_n)_{n \geq 1}$  continues sur  $X$  telles que

$$\left| f(x) - \sum_{j=1}^n f_j(x) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour tout } x \in K$$

et

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \text{ pour tout } x \in X.$$

La fonction  $F$  sur  $X$  définie par  $F(x) := \sum_{n \geq 1} f_n(x)$  pour tout  $x \in X$  vérifie les conclusions voulues.  $\square$

## 1.5 Approximation par des fonctions continues

**Théorème 1.39.** [Théorème de Lusin] Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mu$ -mesurable. On suppose qu'il existe une famille dénombrable de compacts  $(X_m)_{m \geq 1}$  tels que  $X = \bigcup_{m \geq 1} X_m$ . Soit  $A \subset X$  mesurable avec  $\mu(A) < +\infty$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un compact  $K \subset X$  tel que :

1.  $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ ,
2.  $f|_K$  est continue.

*Démonstration.* Soit  $(I_n)_{n \geq 1}$  la famille dénombrable de tous les intervalles ouverts de  $\mathbb{R}$  dont les bornes appartiennent à  $\mathbb{Q}$  ou valent  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Comme  $f^{-1}(I_n)$  et  $f^{-1}(\mathbb{R} \setminus I_n)$  sont mesurables, il existe, par le théorème 1.24, des compacts  $K_n$  et  $K'_n$  tels que  $K_n \subset f^{-1}(I_n)$  et  $\mu(f^{-1}(I_n) \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ ,  $K'_n \subset f^{-1}(\mathbb{R} \setminus I_n)$  et  $\mu(f^{-1}(\mathbb{R} \setminus I_n) \setminus K'_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ , de sorte que  $\mu(A \setminus (K_n \cup K'_n)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ . On pose  $K := \bigcap_{n \geq 1} (K_n \cup K'_n)$ , qui est bien compact et vérifie  $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$ . De plus, la restriction de

$f$  à  $K$  est continue. En effet, soient  $n \geq 1$  et  $x \in f^{-1}(I_n) \cap K$ . Comme  $f(x) \in I_n$  et  $x \in K$ , on a  $x \in U_n := X \setminus K'_n$ . Ainsi,  $x \in K \cap U_n$  et  $K \cap U_n$  est ouvert dans  $K$ , ce qui montre bien que  $f^{-1}(I_n) \cap K$  est un ouvert de  $K$ . Comme tout ouvert de  $\mathbb{R}$  est une réunion d'intervalles  $I_n$  (exercice 1.233 plus loin), on a terminé la preuve.  $\square$

**Corollaire 1.40.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique,  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mu$ -mesurable. On suppose qu'il existe une famille dénombrable de compacts  $(K_m)_{m \geq 1}$  tels que  $X = \bigcup_{m \geq 1} K_m$ . Soit  $A \subset X$  mesurable avec  $\mu(A) < +\infty$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction continue  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\mu(\{x \in A; f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$ .

*Démonstration.* Par le théorème 1.39, il existe un compact  $K \subset A$  tel que  $\mu(A \setminus K) < \varepsilon$  et  $f|_K$  est continue. Le théorème 1.38 donne alors une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  continue telle que  $g(x) = f(x)$  pour tout  $x \in K$ , de sorte que

$$\mu(\{x \in A; f(x) \neq g(x)\}) \leq \mu(A \setminus K) < \varepsilon.$$

$\square$



**Théorème 1.41.** [Théorème d'Egoroff] Soient  $(X, \mu)$  un espace mesuré tel que  $\mu(X) < +\infty$  et  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions mesurables de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$  pour tout  $x \in X$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $E \subset X$  mesurable tel que  $\mu(X \setminus E) < \varepsilon$  tel que  $f_n \rightarrow f$  uniformément sur  $E$ .

*Démonstration.* Soit  $\varepsilon > 0$ . Pour tous  $j, k \geq 1$ , on pose

$$E_{j,k} := \bigcup_{i \geq j} \left\{ x \in X; |f_i(x) - f(x)| > 2^{-k} \right\}.$$

Comme  $f$  est mesurable,  $E_{j,k}$  est mesurable. Soit  $k \geq 1$ . Pour tout  $j \geq 1$ ,  $E_{j+1,k} \subset E_{j,k}$  et  $\bigcap_{j \geq 1} E_{j,k} = \emptyset$ ,

de sorte qu'il existe  $J_k \geq 1$  tel que, pour tout  $j \geq J_k$ ,  $\mu(E_{j,k}) < \varepsilon 2^{-k}$  (on utilise ici le fait que  $\mu(X) < +\infty$ ). Ainsi, on peut construire une suite d'entiers  $(j_k)_{k \geq 1}$  strictement croissante telle que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\mu(E_{j_k,k}) < \varepsilon 2^{-k}$ . Posons alors  $E := \bigcup_{k \geq 1} E_{j_k,k}$ . On a bien  $\mu(E) < \varepsilon$ . De plus, si  $k \geq 1$

et  $x \notin E$ , alors, pour tout  $i \geq j_k$ ,  $|f_i(x) - f(x)| \leq 2^{-k}$ , ce qui montre bien la convergence uniforme de  $(f_i)_{i \geq 1}$  vers  $f$  sur  $X \setminus E$ .  $\square$

On notera que la conclusion du théorème 1.41 est fautive si on suppose  $\mu(X) = +\infty$  (voir l'exercice 1.228 plus loin).

Dans la suite, on supposera connus les résultats de base concernant le calcul intégral : définition de l'intégrale de Lebesgue, théorèmes de convergence monotone, de convergence dominée et de Fatou. On pourra se reporter à [45, 48, 125].

On rappelle toutefois la construction de la mesure produit :

**Définition 1.42.** Soient  $X, Y$  des ensembles,  $\mu$  une mesure sur  $X$ ,  $\nu$  une mesure sur  $Y$ . On définit la mesure  $\mu \times \nu : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  de la façon suivante : si  $S \subset X \times Y$ , on pose

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf \left( \sum_{i \geq 1} \mu(A_i) \nu(B_i) \right)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les familles dénombrables d'ensembles  $\mu$ -mesurables  $(A_i)_{i \geq 1}$  inclus dans  $X$  et toutes les familles dénombrables d'ensembles  $\nu$ -mesurables  $(B_i)_{i \geq 1}$  inclus dans  $Y$  telles que

$$S \subset \bigcup_{i \geq 1} A_i \times B_i.$$

La mesure  $\mu \times \nu$  est appelée mesure produit de  $\mu$  et de  $\nu$ .

On rappelle également le théorème de Fubini :

**Théorème 1.43.** ([45, Chapter 1, section 1.4, Theorem 1]) Soient  $X, Y$  des ensembles,  $\mu$  une mesure sur  $X$  et  $\nu$  une mesure sur  $Y$  (on ne suppose pas  $\mu$  ni  $\nu$  régulière).

1. La mesure  $\mu \times \nu$  est régulière sur  $X \times Y$ .
2. Si  $A \subset X$  est  $\mu$ -mesurable et  $B \subset Y$  est  $\nu$ -mesurable, alors  $A \times B$  est  $\mu \times \nu$ -mesurable et  $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A) \nu(B)$ .
3. Soit  $S \subset X \times Y$ , supposé  $\sigma$ -fini pour  $\mu \times \nu$  (voir la définition 1.16). Alors, pour  $\nu$ -presque tout  $y \in Y$ , l'ensemble  $S_y := \{x \in X; (x, y) \in S\}$  est  $\mu$ -mesurable, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ , l'ensemble  $S^x := \{y \in Y; (x, y) \in S\}$  est  $\nu$ -mesurable, et

$$(\mu \times \nu)(S) = \int_Y \mu(S_y) d\nu(y) = \int_X \nu(S^x) d\mu(x).$$

4. Soit  $f : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction  $\mu \times \nu$ -mesurable et  $\sigma$ -finie (ce qui veut dire que  $\{x \in X \times Y; f(x, y) \neq 0\}$  est une réunion dénombrable de parties de  $X \times Y$  de mesure finie pour la mesure  $\mu \times \nu$ ). Alors la fonction  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  est  $\nu$ -mesurable, la fonction  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  est  $\mu$ -mesurable et

$$\int_{X \times Y} f(x, y) d(\mu \times \nu)(x, y) = \int_Y \left( \int_X f(x, y) d\mu(x) \right) d\nu(y) = \int_X \left( \int_Y f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x). \quad (1.44)$$

5. Soit  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction  $\mu \times \nu$ -intégrable et  $\sigma$ -finie. Alors, pour  $\nu$ -presque tout  $y \in Y$ ,  $\int_X |f(x, y)| d\mu(x) < +\infty$  et la fonction  $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu(x)$  est  $\nu$ -intégrable. Pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ ,  $\int_Y |f(x, y)| d\nu(y) < +\infty$  et la fonction  $x \mapsto \int_Y f(x, y) d\nu(y)$  est  $\mu$ -intégrable et (1.44) est vérifiée.

On notera que les conclusions de 4 et 5 dans le théorème de Fubini ne subsistent plus si on supprime certaines hypothèses, voir l'exercice 1.231 plus loin.

## 2 La mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$

### 2.1 Définition

On définit la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  de la façon suivante :

- Définition 1.45.** 1. Un cube  $Q$  de  $\mathbb{R}^n$  est un produit d'intervalles ayant tous la même longueur, appelée longueur du côté de  $Q$ .
2. Si  $Q \subset \mathbb{R}^n$  est un cube, dont la longueur du côté est égale à  $l$ , on définit la mesure de Lebesgue de  $Q$  par

$$\mathcal{L}^n(Q) := l^n.$$

3. On définit, pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  de  $A$  par

$$\mathcal{L}^n(A) := \inf \sum_{j \geq 1} \mathcal{L}^n(Q_j)$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les familles dénombrables de cubes  $(Q_j)_{j \geq 1}$  de  $\mathbb{R}^n$  telles que  $A \subset \bigcup_{j \geq 1} Q_j$ .

On rappelle les propriétés suivantes ([48, Theorem 2.40], [45, Chapter 1]) :

- Proposition 1.46.** 1. La fonction  $\mathcal{L}^n$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ .
2. Si  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $A$  est mesurable pour  $\mathcal{L}^n$  si, et seulement si, il existe des boréliens  $A_0 \subset A \subset A_1$  tels que  $\mathcal{L}^n(A_1 \setminus A_0) = 0$ .
3. Pour tout ensemble mesurable  $E \subset \mathbb{R}^n$ , il existe des ensembles  $A_1, A_2, N_1, N_2$  tels que  $E = A_1 \cup N_1 = A_2 \setminus N_2$ ,  $\mathcal{L}^n(N_1) = \mathcal{L}^n(N_2) = 0$ ,  $A_1$  est une réunion dénombrable de fermés et  $A_2$  une intersection dénombrable d'ouverts.
4. La mesure  $\mathcal{L}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$  vérifie la propriété de récurrence suivante : si  $n = k + l$  avec  $k, l \in \llbracket 1, n \rrbracket$  et si on considère que  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ , alors  $\mathcal{L}^n = \mathcal{L}^k \times \mathcal{L}^l$ .
5. Les conclusions du théorème 1.24 s'appliquent à la mesure  $\mathcal{L}^n$ , et portent habituellement le nom de "propriété de régularité de la mesure de Lebesgue".

## 2.2 Caractérisation de la mesure de Lebesgue

On termine ce paragraphe par une caractérisation de la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  comme mesure borélienne invariante par translation :

**Lemme 1.47.** On note  $Q_0 := [0, 1]^n$ . Soit  $m$  une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que :

1. pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^n$  et tout  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $m(A + a) = m(A)$  (autrement dit,  $A$  est invariante par translation),
2.  $m(Q_0) = 1$ .

Alors  $m(B) = \mathcal{L}^n(B)$  pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* On l'écrit pour  $n = 2$ , mais l'argument est analogue en toute dimension.

Soient  $J, K \geq 1$  des entiers. Comme

$$Q_0 = \bigcup_{1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K} \left[ \frac{j-1}{J}, \frac{j}{J} \right] \times \left[ \frac{k-1}{K}, \frac{k}{K} \right],$$

on a donc, d'après l'invariance de  $m$  par translation,

$$1 = m(Q_0) = \sum_{1 \leq j \leq J, 1 \leq k \leq K} m \left( \left[ \frac{j-1}{J}, \frac{j}{J} \right] \times \left[ \frac{k-1}{K}, \frac{k}{K} \right] \right) = JK m \left( \left[ 0, \frac{1}{J} \right] \times \left[ 0, \frac{1}{K} \right] \right).$$

Ainsi, toujours par invariance par translation, pour tous  $l, m \in \mathbb{N}$ ,

$$m \left( \left[ \frac{l}{J}, \frac{l+1}{J} \right] \times \left[ \frac{m}{K}, \frac{m+1}{K} \right] \right) = \frac{1}{JK}.$$

Si maintenant  $L, M \geq 1$  sont des entiers,

$$\left[ 0, \frac{L}{J} \right] \times \left[ 0, \frac{M}{K} \right] = \bigcup_{0 \leq l \leq L-1, 0 \leq m \leq M-1} \left[ \frac{l}{J}, \frac{l+1}{J} \right] \times \left[ \frac{m}{K}, \frac{m+1}{K} \right],$$

donc, en utilisant encore l'invariance par translation, on obtient

$$m \left( \left[ 0, \frac{L}{J} \right] \times \left[ 0, \frac{M}{K} \right] \right) = \frac{LM}{JK}.$$

On a donc montré que, pour tous  $r, s > 0$  rationnels,

$$m([0, r[ \times [0, s]) = rs. \tag{1.48}$$

Si  $r, s > 0$ , il existe une suite  $(r_k)_{k \geq 1}$  de rationnels qui converge vers  $r$  en croissant et une suite  $(s_k)_{k \geq 1}$  de rationnels qui converge vers  $s$  en croissant, et on a donc encore (1.48). Une nouvelle utilisation de l'invariance par translation montre alors que, pour tous  $a < a'$  et tous  $b < b'$ ,

$$m([a, a'[ \times [b, b'[) = (a' - a)(b' - b).$$

Enfin, comme la tribu borélienne est engendrée par les ensembles du type  $[a, a'[ \times [b, b'[$  (il suffit de voir que tout ouvert de  $\mathbb{R}^2$  peut s'écrire comme réunion au plus dénombrable de tels ensembles, voir le lemme 1.51 plus bas), on obtient bien, grâce au corollaire 1.13, que  $m(B) = \mathcal{L}^2(B)$  pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^2$ .  $\square$

**Corollaire 1.49.** Soit  $m$  une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$  invariante par translation. Alors, si  $C = m(Q_0)$  (où  $Q_0 = [0, 1]^n$ ), on a  $m(B) = C \mathcal{L}^n(B)$  pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* Si  $C > 0$ , on applique le lemme 1.47 à  $\frac{1}{C}m$ . Si  $C = 0$ , alors pour tous  $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ , par invariance par translation,

$$m([k_1, k_1 + 1[ \times \dots [k_n, k_n + 1[) = 0,$$

et comme

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}} [k_1, k_1 + 1[ \times \dots [k_n, k_n + 1[,$$

on a  $m(\mathbb{R}^n) = 0$ . □

### 2.3 Changement de variables pour la mesure de Lebesgue

On commence par une définition :

**Définition 1.50.** Soient  $j \in \mathbb{Z}$  et  $n \geq 1$ . On appelle  $\mathcal{Q}_j$  la famille des cubes de  $\mathbb{R}^n$  de la forme  $\prod_{k=1}^n [a_k 2^j, (a_k + 1) 2^j[$  avec  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ . Un cube  $Q \subset \mathbb{R}^n$  est appelé cube dyadique si, et seulement si,  $Q \in \mathcal{Q}_j$  pour un  $j \in \mathbb{Z}$ .

On vérifie que, si deux cubes dyadiques ont des intérieurs non disjoints, alors l'un des cubes est inclus dans l'autre.

On aura besoin dans cette section du résultat suivant :

**Lemme 1.51.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Alors il existe une famille au plus dénombrable de cubes fermés  $(Q_k)_{k \geq 1}$  d'intérieurs deux à deux disjoints tels que  $\Omega = \bigcup_{k \geq 1} Q_k$ .

*Démonstration.* Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert différent de  $\mathbb{R}^n$ , pour chaque  $x \in \Omega$ , il existe un cube dyadique maximal  $Q_x$  contenant  $x$  et inclus dans  $\Omega$ , et pour tout point  $y \in Q_x$ ,  $Q_x$  est aussi le cube dyadique maximal contenant  $y$  et inclus dans  $\Omega$ . Les cubes dyadiques ainsi obtenus ont des intérieurs deux à deux disjoints par la remarque suivant la définition 1.50 et la propriété de maximalité, et ils forment une famille dénombrable de cubes recouvrant  $\Omega$ . Enfin, si  $\Omega = \mathbb{R}^n$ , la conclusion est immédiate. □

**Remarque 1.52.** 1. La décomposition  $\Omega = \bigcup_{k \geq 1} Q_k$  obtenue dans le lemme 1.51 est une décomposition de  $\Omega$  en cubes de type Whitney. Voir aussi l'exercice 1.234 plus bas et le théorème 2.59 du chapitre 2.  
2. Une version du lemme 1.51 dans les espaces métriques doublants sera donnée dans la proposition 1.216 plus loin.

On commence par considérer le cas de changements de variables linéaires :

**Proposition 1.53.** Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  linéaire. Alors, pour tout ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  mesurable,  $\mathcal{L}^n(T(A)) = |\det T| \mathcal{L}^n(A)$ .

*Démonstration.* Si  $T$  n'est pas un isomorphisme, alors  $T(A)$  est contenu dans un sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  de dimension au plus  $n - 1$  et on a donc  $\mathcal{L}^n(T(A)) = 0$  comme annoncé. On peut donc supposer que  $T$  est un isomorphisme.

On remarque d'abord que, pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $T(B)$  est borélien. Pour le voir, il suffit de considérer  $\{A \subset \mathbb{R}^n; T(A) \text{ est un borélien}\}$ , qui est une tribu contenant tous les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  (parce que  $T$  est un homéomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ ), donc les boréliens.

On définit alors, pour tout  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,  $m(B) := \mathcal{L}^n(T(B))$ . Alors  $m$  est une mesure invariante par translation et  $C := m(Q_0) < +\infty$  car  $T(Q_0)$  est borné (on rappelle que  $Q_0 = [0, 1[^n$ ). Le corollaire

1.49 montre que  $m = C\mathcal{L}^n$ . Ainsi, on a montré que, pour tout isomorphisme  $T$ , il existe  $C(T) > 0$  tel que

$$\mathcal{L}^n(T(B)) = C(T)\mathcal{L}^n(B) \quad (1.54)$$

pour tout borélien  $B$ .

Il reste à montrer que  $C(T) = |\det T|$  pour tout isomorphisme  $T$  et que (1.54) reste valable pour tout ensemble mesurable  $B \subset \mathbb{R}^n$ .

Or on vérifie facilement que

$$C(T_1)C(T_2) = C(T_1 \circ T_2) \quad (1.55)$$

pour tous isomorphismes  $T_1, T_2$  de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . De plus,  $C(\text{Id}) = 1$ .

Si  $T$  est une isométrie de  $\mathbb{R}^n$ , et si  $B_0$  est la boule unité euclidienne ouverte, comme  $T(B_0) = B_0$ , on a

$$C(T)\mathcal{L}^n(B_0) = \mathcal{L}^n(T(B_0)) = \mathcal{L}^n(B_0),$$

et comme  $\mathcal{L}^n(B_0) > 0$ ,  $C(T) = 1 = |\det T|$ .

Si  $T$  est de la forme  $T(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \neq 0$ , on a  $C(T) = \mathcal{L}^n([0, \lambda_1[ \times \dots \times [0, \lambda_n[) = |\lambda_1 \dots \lambda_n| = |\det T|$  (noter que les  $\lambda_i$  peuvent être négatifs).

Si  $T$  est diagonalisable dans une base orthonormée  $(f_1, \dots, f_n)$  et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ , soit  $U$  l'isométrie telle que  $U(f_i) = e_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors  $T = U^{-1}T_0U$  où  $T_0$  est de la forme  $T_0(x_1, \dots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n)$ . On a donc encore  $C(T) = |\det T|$ . Finalement, si  $T$  est un isomorphisme, il existe une isométrie  $U$  et un isomorphisme symétrique  $S$  tels que  $T = US$ . Comme  $S$  est diagonalisable dans une base orthonormée, on obtient que  $C(T) = |\det T|$  en combinant les observations précédentes.

On vérifie maintenant que (1.54) est encore vraie si  $B \subset \mathbb{R}^n$  est mesurable (pour  $\mathcal{L}^n$ ). Si  $B$  est un tel ensemble, par la proposition 1.46, il existe des boréliens  $B_0 \subset B \subset B_1$  tels que  $B_1 \setminus B_0$  soit de mesure nulle. On a alors  $T(B_0) \subset T(B) \subset T(B_1)$ ,  $T(B_0)$  et  $T(B_1)$  sont des boréliens car  $T$  est un homéomorphisme et

$$\mathcal{L}^n(T(B_1) \setminus T(B_0)) = \mathcal{L}^n(T(B_1 \setminus B_0)) = |\det T| \mathcal{L}^n(B_1 \setminus B_0) = 0,$$

ce qui termine la preuve. □

On étend la proposition 1.53 au cas où  $T$  est un  $C^1$  difféomorphisme entre ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Pour fixer les notations de la suite, on rappelle la définition d'une fonction différentiable en un point de  $\mathbb{R}^n$  :

**Définition 1.56.** 1. Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. Une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  est différentiable en  $x \in U$  s'il existe une application linéaire  $Df(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

$$f(y) = f(x) + Df(x)(y - x) + o(\|x - y\|) \text{ quand } y \rightarrow x.$$

L'application linéaire  $Df(x)$  s'appelle alors la différentielle de  $f$  en  $x$ .

2. On appelle matrice jacobienne de  $f$  en  $x$  la matrice de  $Df(x)$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ . Cette matrice, notée  $Jf(x)$ , est formée des dérivées partielles des coordonnées de  $f$ , c'est-à-dire des  $\frac{\partial f^i}{\partial x_j}$ .
3. On dit que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $U$  si  $f$  est différentiable sur  $U$  et  $x \mapsto Df(x)$  est continue sur  $U$ .
4. La fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est différentiable presque partout si l'ensemble des points  $x \in \mathbb{R}^n$  où  $f$  n'est pas différentiable est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ .
5. Soient  $U, V \subset \mathbb{R}^n$  des ouverts. Un  $C^1$ -difféomorphisme de  $U$  sur  $V$  est une bijection  $f : U \rightarrow V$  de classe  $C^1$  telle que  $f^{-1}$  soit aussi de classe  $C^1$  sur  $V$ .

**Théorème 1.57.** [Changement de variables dans l'intégrale pour la mesure de Lebesgue] Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  et  $T : \Omega \rightarrow V := T(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$  un  $C^1$ -difféomorphisme. Si  $f$  est une fonction mesurable sur  $V$ , alors  $f \circ T$  est mesurable sur  $\Omega$ . De plus, si  $f \geq 0$  ou si  $f \in L^1(V)$ , alors

$$\int_V f(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ T)(x) |\det JT(x)| dx, \quad (1.58)$$

où, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $JT(x)$  la matrice jacobienne de  $T$  au point  $x$ .

*Démonstration.* La première étape est de montrer que, si  $E \subset \Omega$  est un borélien, alors

$$\mathcal{L}^n(T(E)) \leq \int_E |\det JT(x)| dx. \quad (1.59)$$

Soit  $Q \subset \Omega$  un cube fermé de centre  $a$ . Pour tout  $x \in Q$ ,

$$|T(x) - T(a)| \leq \sup_{y \in Q} \|DT(y)\| |x - a|$$

(ici,  $|w| = \sup_{1 \leq i \leq n} |w_i|$  pour tout  $w \in \mathbb{R}^n$ ), donc

$$\mathcal{L}^n(T(Q)) \leq \sup_{y \in Q} \|DT(y)\|^n \mathcal{L}^n(Q). \quad (1.60)$$

Soit  $S$  un isomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Appliquant (1.60) avec  $S^{-1} \circ T$  au lieu de  $T$  et utilisant la proposition 1.53, on obtient

$$\mathcal{L}^n(T(Q)) = |\det S| \mathcal{L}^n((S^{-1} \circ T)(Q)) \leq |\det S| \sup_{y \in Q} \|S^{-1} \circ DT(y)\|^n \mathcal{L}^n(Q).$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $T$  est  $C^1$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tous  $y, z \in Q$  avec  $|y - z| < \delta$ , on ait  $\|(DT(z))^{-1} \circ DT(y)\| \leq 1 + \varepsilon$ . On peut trouver des cubes  $Q_1, \dots, Q_N$  d'intérieurs deux à deux disjoints, dont la longueur des côtés est inférieure à  $\delta$  et dont la réunion vaut  $Q$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ , il existe  $x_i \in Q_i$  tel que

$$|\det DT(x_i)| \mathcal{L}^n(Q_i) = \int_{Q_i} |\det DT(x)| dx.$$

En effet, on a

$$\inf_{z \in Q_i} |\det DT(z)| \leq \int_{Q_i} |\det DT(x)| dx \leq \sup_{z \in Q_i} |\det DT(z)|,$$

et il suffit d'appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à  $z \mapsto |\det DT(z)|$  sur  $Q_i$ . On a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(T(Q)) &\leq \sum_{i=1}^N \mathcal{L}^n(T(Q_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^N |\det DT(x_i)| \sup_{y \in Q_i} \|(DT(x_i))^{-1} \circ DT(y)\|^n \mathcal{L}^n(Q_i) \\ &\leq (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^N |\det DT(x_i)| \mathcal{L}^n(Q_i) \\ &= (1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^N \int_{Q_i} |\det DT(x)| dx \\ &= (1 + \varepsilon) \int_Q |\det DT(x)| dx. \end{aligned}$$

Comme cela est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient

$$\mathcal{L}^n(T(Q)) \leq \int_Q |\det DT(x)| dx. \quad (1.61)$$

On montre maintenant que (1.61) reste vraie si  $Q \subset \Omega$  est un ouvert. En effet, si  $Q$  est un ouvert, on peut trouver une famille  $(Q_j)_{j \geq 1}$  dénombrable de cubes fermés d'intérieurs deux à deux disjoints tels que  $Q = \bigcup_{j \geq 1} Q_j$  (lemme 1.51). On obtient (1.61) pour  $Q$  en l'écrivant pour  $Q_j$  et en sommant sur  $j$ .

Soit maintenant  $E \subset \Omega$  borélien avec  $\mathcal{L}^n(E) < +\infty$ . Par régularité de la mesure de Lebesgue, il existe, pour tout  $j \geq 1$ , un ouvert  $U_j \subset \Omega$  contenant  $E$  tel que  $\mathcal{L}^n(U_j \setminus E) < 2^{-j}$ , et on peut supposer tous les  $U_j$  inclus dans un même ouvert de mesure finie. On a donc, pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\mathcal{L}^n(T(E)) \leq \mathcal{L}^n(T(U_j)) \leq \int_{U_j} |\det DT(x)| dx,$$

et en faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$  et utilisant le théorème de convergence dominée, on obtient

$$\mathcal{L}^n(T(E)) \leq \int_E |\det DT(x)| dx. \quad (1.62)$$

Cette inégalité reste valable pour tout borélien  $E \subset \Omega$ , car  $E$  est une union dénombrable croissante de boréliens de mesure finie inclus dans  $\Omega$ .

On déduit de (1.62) que, pour toute fonction  $g$  borélienne sur  $\Omega$ , positive et étagée (c'est-à-dire combinaison linéaire de fonctions indicatrices de boréliens),

$$\int_{T(\Omega)} (g \circ T^{-1})(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) |\det DT(x)| dx. \quad (1.63)$$

Le théorème de convergence croissante montre que (1.63) reste vraie pour toute fonction  $g$  borélienne positive sur  $\Omega$ . Soit alors  $f$  borélienne et positive sur  $T(\Omega)$ . En appliquant (1.63) à  $g := f \circ T$ , on obtient

$$\int_{T(\Omega)} f(x) dx \leq \int_{\Omega} (f \circ T)(x) |\det DT(x)| dx. \quad (1.64)$$

Soit maintenant  $g$  une fonction borélienne positive sur  $\Omega$ . Appliquant (1.64) à  $g$  et au  $C^1$ -difféomorphisme  $T^{-1} : T(\Omega) \rightarrow \Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} g(x) dx \leq \int_{T(\Omega)} (g \circ T^{-1})(x) |\det DT^{-1}(x)| dx. \quad (1.65)$$

Si  $f$  est borélienne positive sur  $T(\Omega)$ , l'application de (1.65) à  $g := (f \circ T) |\det DT(x)|$  donne

$$\int_{\Omega} (f \circ T)(x) |\det DT(x)| dx \leq \int_{T(\Omega)} f(x) |\det DT(T^{-1}(x))| |\det DT^{-1}(x)| dx,$$

et comme  $|\det DT(T^{-1}(x))| |\det DT^{-1}(x)| = 1$  pour tout  $x \in T(\Omega)$ , on obtient que

$$\int_{\Omega} (f \circ T)(x) |\det DT(x)| dx \leq \int_{T(\Omega)} f(x) dx, \quad (1.66)$$

et la conjonction de (1.64) et (1.66) donne bien (1.58) pour  $f$  borélienne positive.

Il reste à étendre cette conclusion au cas mesurable. Soit  $E \subset \Omega$  mesurable. Il existe un borélien  $A$  et un ensemble de mesure nulle  $N$  disjoints tels que  $E = A \cup N$ . La conclusion (1.58) appliquée à  $\chi_A$  donne

$$\mathcal{L}^n(T(A)) = \int_A |\det DT(x)| dx.$$

De plus,  $\mathcal{L}^n(T(N)) = 0$ . En effet, il existe un borélien  $B$  de mesure nulle tel que  $N \subset B$ , de sorte que  $T(N) \subset T(B)$  et (1.58) appliquée à  $\chi_B$  montre que  $\mathcal{L}^n(T(B)) = 0$ . Ainsi,  $\mathcal{L}^n(T(N))$  est de mesure nulle et

$$\mathcal{L}^n(T(E)) = \mathcal{L}^n(T(A)) = \int_A |\det DT(x)| dx = \int_E |\det DT(x)| dx.$$

On raisonne alors comme dans le cas borélien pour obtenir que, si  $f$  est mesurable positive, alors  $f \circ T$  l'est aussi et (1.58) est valable pour  $f$  mesurable positive. Si  $f$  est intégrable réelle, on raisonne avec  $f^+$  et  $f^-$ , et si  $f$  est intégrable et complexe, on passe par ses parties réelle et imaginaire.  $\square$

**Remarque 1.67.** On peut affaiblir l'hypothèse sur  $T$  dans le théorème 1.57 en supposant seulement que  $T$  est différentiable sur  $\Omega$  et que  $T^{-1}$  est continue sur  $T(\Omega)$ , voir l'exercice 1.247 plus loin.

## 2.4 Inégalité isodiamétrique

Le but de cette section est de montrer l'inégalité isodiamétrique pour  $\mathcal{L}^n$  :

**Théorème 1.68.** [Inégalité isodiamétrique] Pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \alpha(n) \left( \frac{\text{diam}(A)}{2} \right)^n, \quad (1.69)$$

où

$$\alpha(n) := \mathcal{L}^n(B(0, 1))$$

et  $\text{diam}(A)$  désigne le diamètre de  $A$ , c'est-à-dire

$$\text{diam}(A) = \sup_{x, y \in A} |x - y|.$$

En d'autres termes, la mesure de  $A$  est inférieure à celle de la boule euclidienne de même diamètre que  $A$ .

La preuve de cette inégalité repose sur une construction géométrique, appelée symétrisation de Steiner, que l'on présente maintenant.

On fixe des vecteurs  $a, b \in \mathbb{R}^n$  avec  $|a| = 1$ . On définit

$$L_b^a := \{b + ta; t \in \mathbb{R}\}$$

et

$$P_a := \{x \in \mathbb{R}^n; \langle x, a \rangle = 0\}.$$

**Définition 1.70.** Soit  $a \in \mathbb{R}^n$  avec  $|a| = 1$ . On définit la symétrisation de Steiner par rapport à l'hyperplan  $P_a$  de la manière suivante : si  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$S_a(A) := \bigcup_{b \in P_a; A \cap L_b^a \neq \emptyset} \left\{ b + ta; |t| \leq \frac{1}{2} \mathcal{L}^1(A \cap L_b^a) \right\}.$$

En termes plus intuitifs, on écrit  $A$  comme la réunion disjointe des  $A \cap L_b^a$  pour  $b \in P_a$ . Si  $A \cap L_b^a$  n'est pas vide, on considère sa mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle, et on le remplace par le segment centré en  $b$ , de même direction que  $L_b^a$ , de longueur totale égale à la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle de  $A \cap L_b^a$ .

Voici des propriétés de la symétrisation de Steiner :

**Proposition 1.71.** [45, Chapter 1, Section 2.2, Lemma 2] On reprend les notations de la définition 1.70. Alors :



1.  $\text{diam}(S_a(A)) \leq \text{diam}(A)$ ,
2. si  $A$  est mesurable, alors  $S_a(A)$  l'est aussi, et  $\mathcal{L}^n(S_a(A)) = \mathcal{L}^n(A)$ .

Pour la preuve de la proposition 1.71, on aura besoin du

**Lemme 1.72.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  mesurable. Alors

$$A := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^{n+1}; 0 \leq y \leq f(x) \right\}$$

est  $\mathcal{L}^{n+1}$  mesurable.

*Preuve du lemme 1.72 :* soient

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = +\infty\}$$

et

$$C := \{x \in \mathbb{R}^n; 0 \leq f(x) < +\infty\}.$$

Pour tout  $j \in \mathbb{N}$  et tout  $k \geq 1$ , soit

$$C_{j,k} := \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \frac{j}{k} \leq f(x) < \frac{j+1}{k} \right\},$$

de sorte que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $C = \bigcup_{j \geq 0} C_{j,k}$ . On définit aussi

$$D_k = \bigcup_{j \geq 0} \left( C_{j,k} \times \left[ 0, \frac{j}{k} \right] \right) \cup (B \times [0, +\infty])$$

et

$$E_k = \bigcup_{j \geq 0} \left( C_{j,k} \times \left[ 0, \frac{j+1}{k} \right] \right) \cup (B \times [0, +\infty])$$

et

$$D = \bigcup_{k \geq 1} D_k, \quad E = \bigcap_{k \geq 1} E_k.$$

Pour tout  $k \geq 1$ ,  $D_k$  et  $E_k$  sont  $\mathcal{L}^{n+1}$  mesurables et  $D_k \subset A \subset E_k$ . On a donc  $D \subset A \subset E$ , et les ensembles  $D$  et  $E$  sont  $\mathcal{L}^{n+1}$  mesurables. De plus, pour tout  $R > 0$  et tout  $k \geq 1$ ,

$$\mathcal{L}^{n+1}((E \setminus D) \cap B(0, R)) \leq \mathcal{L}^{n+1}((E_k \setminus D_k) \cap B(0, R)) \leq \frac{1}{k} \mathcal{L}^{n+1}(B(0, R)),$$

ce qui implique que  $\mathcal{L}^{n+1}((E \setminus D) \cap B(0, R)) = 0$ , donc que  $\mathcal{L}^{n+1}(E \setminus D) = 0$ . Ainsi,  $\mathcal{L}^{n+1}(A \setminus D) = 0$ , ce qui montre que  $A$  est  $\mathcal{L}^{n+1}$  mesurable.  $\square$

*Preuve de la proposition 1.71 :* pour 1, il suffit de le faire quand  $\text{diam}(A) < +\infty$ . Il suffit aussi de supposer que  $A$  est fermé (en effet, en général, on aura  $S_a(A) \subset S_a(\overline{A})$ , donc  $\text{diam}(S_a(A)) \leq \text{diam}(S_a(\overline{A})) \leq \text{diam}(\overline{A}) = \text{diam}(A)$ ). Ainsi, on peut supposer  $A$  compact. Comme  $A$  est borné, donc inclus dans une boule euclidienne de centre 0,  $S_a(A)$  est inclus dans la même boule, donc borné aussi. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $x, y \in S_a(A)$  tels que  $\text{diam}(S_a(A)) \leq |x - y| + \varepsilon$ . On décompose

$$x = b + \langle x, a \rangle a \text{ et } y = c + \langle y, a \rangle a.$$

En d'autres termes,  $b$  (resp.  $c$ ) est la projection orthogonale de  $x$  (resp.  $y$ ) sur  $P_a$ . On définit

$$r := \inf \{t; b + ta \in A\},$$

$$\begin{aligned}
s &:= \sup \{t; b + ta \in A\}, \\
u &:= \inf \{t; c + ta \in A\}, \\
v &:= \sup \{t; c + ta \in A\}.
\end{aligned}$$

On suppose que  $v - r \geq s - u$  (raisonnement analogue si  $v - r < s - u$ ). Alors

$$\begin{aligned}
v - r &\geq \frac{1}{2}(v - r) + \frac{1}{2}(s - u) \\
&= \frac{1}{2}(s - r) + \frac{1}{2}(v - u) \\
&\geq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A \cap L_b^a) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A \cap L_c^a).
\end{aligned}$$

Comme  $x \in S_a(A)$  et  $|\langle x, a \rangle| = |x - b|$ , on a  $|\langle x, a \rangle| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A \cap L_b^a)$ , et de même  $|\langle y, a \rangle| \leq \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(A \cap L_c^a)$ . Ainsi,

$$v - r \geq |\langle x, a \rangle| + |\langle y, a \rangle| \geq |\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle|.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
(\text{diam}(S_a(A)) - \varepsilon)^2 &\leq |x - y|^2 \\
&= |b - c|^2 + |\langle x, a \rangle - \langle y, a \rangle|^2 \\
&\leq |b - c|^2 + |v - r|^2 \\
&\leq |(b + ra) - (c + va)|^2 \\
&\leq \text{diam}(A)^2,
\end{aligned} \tag{1.73}$$

car  $b + ra \in A$  et  $c + va \in A$  puisque  $A$  est fermé. Comme (1.73) est vraie pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient bien 1.

Pour 2, il suffit de le faire quand  $a = e_n = (0, \dots, 0, 1)$ , par invariance de  $\mathcal{L}^n$  par rotation (voir la proposition 1.53). Ainsi,  $P_a = \mathbb{R}^{n-1}$ . Le théorème de Fubini (théorème 1.43) montre que, si  $f(b) := \mathcal{L}^1(A \cap L_b^{e_n})$  pour tout  $b \in \mathbb{R}^{n-1}$ , alors  $f$  est  $\mathcal{L}^{n-1}$  mesurable et

$$\mathcal{L}^n(A) = \int_{b \in \mathbb{R}^{n-1}} f(b) db.$$

Comme

$$S_{e_n}(A) = \left\{ (b, y) \in \mathbb{R}^n; -\frac{f(b)}{2} \leq y \leq \frac{f(b)}{2} \right\} \setminus \{(b, 0); A \cap L_b^a = \emptyset\},$$

le lemme 1.72 montre que  $S_{e_n}(A)$  est mesurable et

$$\mathcal{L}^n(S_{e_n}(A)) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(b) db = \mathcal{L}^n(A).$$

□

*Preuve du théorème 1.68 :* l'idée est la suivante : si  $A$  est inclus dans la boule euclidienne de centre 0 et de même diamètre que  $A$ , la conclusion est immédiate. Cette inclusion n'est pas vraie en général, mais on va appliquer plusieurs symétrisations de Steiner à  $A$  pour le rendre symétrique par rapport à 0, ce qui diminuera son diamètre sans changer sa mesure, et on pourra conclure ainsi car l'ensemble obtenu par ces transformations sera inclus dans la boule euclidienne de centre 0 et de même diamètre que  $A$ .

Il suffit de faire la preuve quand  $A$  est de diamètre fini. On note  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A_1 = S_{e_1}(A)$ ,  $A_k := S_{e_k}(A_{k-1})$  pour tout  $k \in \llbracket 2, n \rrbracket$  et  $A^* := A_n$ .

On montre d'abord que  $A^*$  est symétrique par rapport à 0. Pour cela, on vérifie par récurrence sur  $k$  que, pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_k$  est symétrique par rapport à  $P_{e_1}, \dots, P_{e_k}$ . C'est clair pour  $k = 1$ . Supposons

que ce soit vrai pour  $A_k$ . Alors  $A_{k+1}$  est clairement symétrique par rapport à  $P_{e_{k+1}}$ . De plus, soient  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$  et  $S_j$  la réflexion orthogonale par rapport à  $P_{e_j}$ . Soit  $b \in P_{e_{k+1}}$ . Alors, comme  $S_j(A_k) = A_k$  par hypothèse de récurrence,

$$\mathcal{L}^1(A_k \cap L_b^{e_{k+1}}) = \mathcal{L}^1(A_k \cap L_{S_j(b)}^{e_{k+1}}).$$

Cela implique que

$$\mathcal{L}^1(\{t; b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}) = \mathcal{L}^1(\{t; S_j b + te_{k+1} \in A_{k+1}\}).$$

Ainsi,  $S_j(A_{k+1}) = A_{k+1}$ .

Finalement,  $A^*$  est symétrique par rapport à  $P_{e_1}, \dots, P_{e_n}$ , donc par rapport à 0.

On en déduit que

$$A^* \subset B\left(0, \frac{1}{2} \text{diam}(A^*)\right). \quad (1.74)$$

En effet, soit  $x \in A^*$ . Comme  $-x \in A^*$ ,  $2|x| \leq \text{diam}(A^*)$ , ce qui donne bien (1.74). On déduit de (1.74) que

$$\mathcal{L}^n(A^*) \leq \alpha(n) \left(\frac{1}{2} \text{diam}(A^*)\right)^n.$$

Pour conclure (rappelons que  $A$  n'a pas été supposé mesurable dans les hypothèses du théorème 1.68), comme  $\overline{A}$  est mesurable, la proposition 1.71 montre que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(A) &\leq \mathcal{L}^n(\overline{A}) \\ &\leq \mathcal{L}^n((\overline{A})^*) \\ &\leq \alpha(n) \left(\frac{1}{2} \text{diam}((\overline{A})^*)\right)^n \\ &\leq \alpha(n) \left(\frac{1}{2} \text{diam}(\overline{A})\right)^n \\ &= \alpha(n) \left(\frac{1}{2} \text{diam}(A)\right)^n, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (1.69). □

L'inégalité isodiamétrique jouera un rôle central dans le chapitre suivant à propos de la mesure de Hausdorff.

Avant de passer aux lemmes de recouvrement, on propose ici une autre approche de l'inégalité isodiamétrique, qui repose sur une inégalité importante concernant la mesure de Lebesgue : l'inégalité de Brunn-Minkowski.

## 2.5 Une autre approche via l'inégalité de Brunn-Minkowski

Nous allons donner une autre approche de l'inégalité isodiamétrique, qui repose sur l'inégalité de Brunn-Minkowski, que nous présentons maintenant.

Si  $A, B \subset \mathbb{R}^n$ , on définit la somme de Minkowski de  $A$  et  $B$  par

$$A + B = \{x \in \mathbb{R}^n, \exists a \in A \text{ et } b \in B \text{ tels que } x = a + b\}.$$

**Proposition 1.75.** Soient  $A, B \subset \mathbb{R}^n$  des ensembles mesurables non vides. On suppose  $A + B$  mesurable. Alors

$$\mathcal{L}^n(A + B)^{\frac{1}{n}} \geq \mathcal{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}.$$

**Remarque 1.76.** Il peut arriver que  $A + B$  ne soit pas mesurable, même si  $A$  et  $B$  le sont !

La proposition 1.75 possède une version fonctionnelle, appelée inégalité de Prekopa-Leindler :

**Proposition 1.77.** Soient  $\theta \in [0, 1]$  et  $u, v, w$  des fonctions mesurables positives sur  $\mathbb{R}^n$ , telles que

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geq u(x)^\theta v(y)^{1-\theta} \quad (1.78)$$

pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x) dx \geq \left( \int_{\mathbb{R}^n} u(x) dx \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}^n} v(x) dx \right)^{1-\theta}. \quad (1.79)$$

On va d'abord prouver la proposition 1.75 pour  $n = 1$ , puis la proposition 1.77 pour tout  $n \geq 1$ , et enfin, la proposition 1.75 pour tout  $n \geq 2$ .

**Preuve de la proposition 1.75 quand  $n = 1$  :** on suppose d'abord que  $A$  et  $B$  sont des compacts non vides de  $\mathbb{R}$ . Si on remplace  $A$  et  $B$  par  $A + x$  et  $B + y$  respectivement (avec  $x, y \in \mathbb{R}$  quelconques),  $A + B$  est transformé en  $A + B + x + y$ , de sorte que les mesures de Lebesgue de  $A, B$  et  $A + B$  restent inchangées. Comme  $A$  et  $B$  sont compacts, on peut les translater de sorte que  $\sup A = \inf B = a \in \mathbb{R}$ , et, quitte à translater encore, on peut supposer que  $a = 0$ , de sorte que  $A \cap B = \{0\}$ . On a donc  $A + B \supset A \cup B$ , donc

$$\mathcal{L}^1(A + B) \geq \mathcal{L}^1(A \cup B) = \mathcal{L}^1(A) + \mathcal{L}^1(B),$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Si maintenant  $A$  et  $B$  sont des ensembles mesurables quelconques de mesure finie, soit  $\varepsilon > 0$ . Par la proposition 1.46, il existe des compacts  $A_\varepsilon$  et  $B_\varepsilon$ , inclus respectivement dans  $A$  et  $B$  et tels que

$$\mathcal{L}^1(A_\varepsilon) \geq \mathcal{L}^1(A) - \varepsilon \text{ et } \mathcal{L}^1(B_\varepsilon) \geq \mathcal{L}^1(B) - \varepsilon$$

Alors

$$\mathcal{L}^1(A + B) \geq \mathcal{L}^1(A_\varepsilon + B_\varepsilon) \geq \mathcal{L}^1(A_\varepsilon) + \mathcal{L}^1(B_\varepsilon) \geq \mathcal{L}^1(A) + \mathcal{L}^1(B) - 2\varepsilon,$$

et comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient l'inégalité voulue.

Enfin, si par exemple,  $\mathcal{L}^1(A) = +\infty$ ,  $A + B$  contient un translaté de  $A$ , donc est aussi de mesure infinie, ce qui rend l'inégalité triviale.

**Preuve de la proposition 1.77 :** on raisonne par récurrence sur la dimension. Commençons par le cas  $n = 1$ . On suppose d'abord  $u$  et  $v$  bornées, et on peut donc supposer que  $\|u\|_\infty = \|v\|_\infty = 1$ . Soient  $t \in [0, 1]$ ,  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $u(x) > t$  et  $y \in \mathbb{R}$  tel que  $v(y) > t$ . On a alors  $w(\theta x + (1 - \theta)y) > t$  par l'hypothèse (1.78). Ainsi, d'après le cas  $n = 1$  de la proposition 1.75 et le fait que  $\{u > t\}$  et  $\{v > t\}$  sont non vides,

$$\mathcal{L}^1(\{z \in \mathbb{R}; w(z) > t\}) \geq \theta \mathcal{L}^1(\{x \in \mathbb{R}; u(x) > t\}) + (1 - \theta) \mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R}; v(y) > t\}).$$

On en déduit, en utilisant (1.159), la proposition 1.75 pour  $n = 1$  et l'inégalité arithmético-géométrique, que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w(x) dx &\geq \int_0^1 \mathcal{L}^1(\{z \in \mathbb{R}; w(z) > t\}) dt \\ &\geq \theta \int_0^1 \mathcal{L}^1(\{x \in \mathbb{R}; u(x) > t\}) dt + (1 - \theta) \int_0^1 \mathcal{L}^1(\{y \in \mathbb{R}; v(y) > t\}) dt \\ &= \theta \int_{\mathbb{R}} u(x) dx + (1 - \theta) \int_{\mathbb{R}} v(x) dx \\ &\geq \left( \int_{\mathbb{R}} u(x) dx \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}} v(x) dx \right)^{1-\theta} \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Dans le cas général, pour tout entier  $j \geq 0$ , on pose

$$u_j(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } u(x) \leq j, \\ 0 & \text{si } u(x) > j, \end{cases}$$

et on définit  $v_j$  de façon analogue. Comme  $u_j \leq u$  et  $v_j \leq v$ , l'inégalité (1.78) est vérifiée avec  $u_j$  et  $v_j$  à la place de  $u$  et  $v$  dans le membre de droite. On en déduit (1.79) avec  $u_j$  et  $v_j$  dans le membre de droite, et on obtient la conclusion en faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$  et utilisant le théorème de convergence croissante.

On suppose maintenant le résultat prouvé en dimension  $n - 1$  pour un  $n \geq 2$ . On considère  $u, v, w$  vérifiant l'hypothèse de la proposition 1.77. Pour tout  $q \in \mathbb{R}$ , on pose

$$u_q(x) = u(x, q), \quad v_q(x) = v(x, q) \text{ et } w_q(x) = w(x, q)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Le théorème de Fubini (théorème 1.43) montre que  $u_q, v_q$  et  $w_q$  sont mesurables pour presque tout  $q \in \mathbb{R}$ . De plus, par hypothèse, pour tous  $q_0, q_1 \in \mathbb{R}$  tels que  $q = \theta q_0 + (1 - \theta)q_1$  et tous  $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$w_q(\theta x + (1 - \theta)y) \geq u_{q_0}(x)^\theta v_{q_1}(y)^{1-\theta}.$$

En appliquant l'hypothèse de récurrence à  $w_q, u_{q_0}$  et  $v_{q_1}$ , on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_q(x) dx \geq \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_{q_0}(x) dx \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_{q_1}(x) dx \right)^{1-\theta}.$$

D'après l'inégalité en dimension 1 appliquée aux fonctions

$$q \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_q(x) dx, \quad q \mapsto \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_q(x) dx \right) \text{ et } q \mapsto \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_q(x) dx \right),$$

et le théorème de Fubini, on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} w(z) dz &= \int_{q \in \mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w_q(x) dx \right) dq \\ &\geq \left( \int_{q \in \mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u_q(x) dx \right) dq \right)^\theta \left( \int_{q \in \mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v_q(x) dx \right) dq \right)^{1-\theta} \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^n} u(z) dz \right)^\theta \left( \int_{\mathbb{R}^n} v(z) dz \right)^{1-\theta}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

**Preuve de la proposition 1.75 pour  $n \geq 2$  :** tout comme dans le cas  $n = 1$ , on peut supposer que  $A$  et  $B$  sont de mesure finie. On fixe  $\theta \in [0, 1]$  et on applique la proposition 1.77 avec  $u = \chi_{A'}$ ,  $v = \chi_{B'}$  et  $w = \chi_{\theta A' + (1-\theta)B'}$  où  $A'$  et  $B'$  sont des parties mesurables de  $\mathbb{R}^n$  qui seront choisies ensuite. L'inégalité (1.78) est trivialement satisfaite et on obtient donc

$$\mathcal{L}^n(\theta A' + (1 - \theta)B') \geq \mathcal{L}^1(A')^\theta \mathcal{L}^1(B')^{1-\theta}. \quad (1.80)$$

et ce pour tout choix de  $\theta \in [0, 1]$ . Si on choisit maintenant

$$A' = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)^{\frac{1}{n}}} A \text{ et } B' = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}} B,$$

(1.80) signifie que

$$\mathcal{L}^n(\theta A' + (1 - \theta)B') \geq 1. \quad (1.81)$$

Si on pose

$$\theta = \frac{\mathcal{L}^n(A)^{\frac{1}{n}}}{\mathcal{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}},$$

on voit que

$$\theta A' + (1 - \theta)B' = \frac{1}{\mathcal{L}^n(A)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n(B)^{\frac{1}{n}}}(A + B),$$

et l'inégalité (1.81) donne bien la conclusion de la proposition 1.75.  $\square$

On explique maintenant comment déduire l'inégalité isodiamétrique (Théorème 1.68) de l'inégalité de Brunn-Minkowski. Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  une partie compacte. Il suffit de prouver (1.69) quand  $\mathcal{L}^n(A) = 1$  (en effet, dans le cas général, on peut bien sûr supposer que  $\mathcal{L}^n(A) > 0$ ; on pose alors  $A' = \lambda A$  avec  $\lambda > 0$  et  $\lambda^{-n} = \mathcal{L}^n(A)$ , et on obtient la conclusion en utilisant le fait que  $\text{diam}(A') = \lambda \text{diam}(A)$ ).

On suppose donc  $A$  compact avec  $\mathcal{L}^n(A) = 1$ . Soit  $B := \{x \in \mathbb{R}^n; -x \in A\}$ . Par la proposition 1.75 (on note que  $\frac{1}{2}A$  et  $\frac{1}{2}B$  sont compacts, donc aussi  $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ ),

$$\mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right)^{\frac{1}{n}} \geq \mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}A\right)^{\frac{1}{n}} + \mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}B\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Comme  $\mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}A\right) = \mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}B\right)$ , on obtient donc

$$\mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \geq \mathcal{L}^n(A) = \mathcal{L}^n(B).$$

On vérifie maintenant que  $d\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \leq 1$ . En effet, soient  $x, y \in \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$ . Il existe  $x_1, x_2, y_1, y_2 \in A$  tels que  $x = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$  et  $y = \frac{1}{2}(y_1 - y_2)$ . On a donc

$$|x - y| = \frac{1}{2} |(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)| \leq 1.$$

De plus,  $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$  est symétrique par rapport à 0, et est donc inclus dans la boule euclidienne de centre 0 et de rayon  $\frac{1}{2}$ . Ainsi,

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{L}^n\left(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B\right) \leq \mathcal{L}^n\left(B\left(0, \frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\alpha(n)}{2^n},$$

ce qui termine la preuve quand  $A$  est compact. Dans le cas général, il suffit de prouver l'inégalité pour  $\overline{A}$ , comme dans la preuve donnée dans la section 3.142.  $\square$

### 3 Lemmes de recouvrement

Soient  $(X, d)$  un espace métrique. Pour toute partie  $A \subset X$  non vide, on rappelle que le diamètre de  $A$  est défini par

$$\text{diam}(A) := \sup_{x, y \in A} d(x, y) \in [0, +\infty].$$

Soit  $B$  une boule fermée incluse dans  $X$ . On définit  $5B$  comme la réunion des boules fermées  $B' \subset X$  telles que

$$B' \cap B \neq \emptyset \text{ et } \text{diam}(B') \leq 2\text{diam}(B).$$

**Remarque 1.82.** Dans le cas  $X = \mathbb{R}^n$  avec la distance euclidienne, si  $B = B(x, r)$ , alors  $5B = B(x, 5r)$ . En général, le centre et le rayon d'une boule ne sont pas déterminés de façon unique, ce qui justifie la définition précédente. Par exemple, si  $X = \mathbb{N} \setminus \{2\}$  muni de la distance usuelle, alors  $B(0, 1) = B(1, 1) = \{0, 1\}$  (on considère ici des boules fermées), alors que  $B(0, 5) \neq B(1, 5)$  (ce dernier ensemble contient 6, ce qui n'est pas le cas de  $B(0, 5)$ ).

### 3.1 Un lemme de recouvrement 5r

Pour la preuve du lemme de recouvrement de cette section, on aura besoin du résultat suivant, qu'on admettra ici et dont la preuve repose sur le lemme de Zorn :

**Lemme 1.83.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Soit  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées de  $X$ . Alors il existe une sous-famille maximale  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  formée de boules deux à deux disjointes.

Par maximale, on entend que, si  $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}' \subset \mathcal{F}$  et si les boules de  $\mathcal{G}'$  sont deux à deux disjointes, alors  $\mathcal{G}' = \mathcal{G}$ .

Par ailleurs, on note que, si  $X$  est séparable (ce qui signifie que  $X$  possède une partie dense au plus dénombrable) et si toutes les boules de  $\mathcal{F}$  sont d'intérieur non vide, alors les boules de la famille  $\mathcal{G}$  fournie par le lemme 1.83 forment une famille au plus dénombrable. En effet, si  $A \subset X$  est une partie dense et au plus dénombrable, alors, pour toute boule  $B \in \mathcal{G}$ , il existe  $x \in B \cap A$ , ce qui permet de définir une application injective de  $\mathcal{G}$  dans  $A$ .

**Proposition 1.84.** [Lemme de recouvrement 5r] ([98, Theorem 2.1], [47, Section 2.8]) Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable. Soit  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées de  $X$ . On suppose qu'aucune boule de  $X$  n'est réduite à son centre et que

$$\sup_{B \in \mathcal{F}} \text{diam}(B) < +\infty. \quad (1.85)$$

Alors il existe une sous-famille au plus dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  telle que :

1. les boules de  $\mathcal{G}$  sont deux à deux disjointes,
2.  $\bigcup_{B \in \mathcal{F}} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B$ .

On notera que la conclusion n'est plus vraie sans l'hypothèse (1.85). On peut considérer le cas  $X = \mathbb{R}^n$  et les boules fermées  $B_f(0, n)$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Par ailleurs, la proposition 1.84 ne fait intervenir aucune mesure.

*Preuve de la proposition 1.84 :* on définit  $D := \sup_{B \in \mathcal{F}} \text{diam}(B)$ . Pour tout  $j \geq 1$ , on pose

$$\mathcal{F}_j := \left\{ B \in \mathcal{F}; \frac{D}{2^j} < \text{diam}(B) \leq \frac{D}{2^{j-1}} \right\}.$$

On note que  $\mathcal{F} = \bigcup_{j \geq 1} \mathcal{F}_j$  en raison du fait qu'aucune boule de  $\mathcal{F}$  n'est réduite à son centre.

Soit  $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{F}_1$  une famille maximale de boules deux à deux disjointes de  $\mathcal{F}_1$ , fournie par le lemme 1.83. Soit  $k \geq 2$ . On suppose construites des familles  $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$  pour  $j \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$ . Soit alors  $\mathcal{G}_k$  une sous-famille maximale de boules deux à deux disjointes de la famille

$$\left\{ B \in \mathcal{F}_k; B \cap B' = \emptyset \text{ pour tout } B' \in \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{G}_j \right\}.$$

Comme chaque famille  $\mathcal{G}_k$  est au plus dénombrable, c'est aussi vrai pour la famille  $\mathcal{G} := \bigcup_{k \geq 1} \mathcal{G}_k$ , et les boules de  $\mathcal{G}$  sont deux à deux disjointes. On notera qu'il peut arriver que  $\mathcal{G}_k$  soit vide à partir d'un certain rang.

Soit maintenant  $B \in \mathcal{F}$  et  $k \geq 1$  tel que  $B \in \mathcal{F}_k$ . Par maximalité de  $\mathcal{G}_k$ , il existe  $B' \in \bigcup_{1 \leq j \leq k} \mathcal{G}_j$  telle que  $B \cap B' \neq \emptyset$  (si  $B \in \mathcal{G}_k$ , il suffit de prendre  $B' = B$ , si ce n'est pas le cas, il existe  $B' \in \bigcup_{1 \leq j \leq k-1} \mathcal{G}_j$  telle que  $B \cap B' \neq \emptyset$ , car sinon, la famille  $\mathcal{G}_k \cup \{B\}$  contredirait la maximalité de  $\mathcal{G}_k$ ).

Comme  $\text{diam}(B') > \frac{D}{2^k}$  et  $\text{diam}(B) \leq \frac{D}{2^{k-1}}$ , on a  $\text{diam}(B) \leq 2\text{diam}(B')$ , ce qui montre que  $B \subset 5B'$ . La preuve est terminée.  $\square$

**Remarque 1.86.** On peut aussi remplacer les boules fermées par des boules ouvertes dans le lemme 5r ([64, Section 3.3]).

**Remarque 1.87.** La preuve du lemme 5r montre que, pour toute boule  $B \in \mathcal{F}$  de rayon  $r$ , il existe une boule  $B' \in \mathcal{G}$  de rayon au moins  $\frac{r}{2}$  telle que  $B \cap B' \neq \emptyset$ .

### 3.2 Un lemme de recouvrement de Vitali

**Proposition 1.88.** [Lemme de recouvrement de Vitali pour la mesure de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ ] ([98, Theorem 2.2]) Soient  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées d'intérieurs non vides. On suppose que :

1. pour tout  $x \in A$ , il existe  $B \in \mathcal{F}$  telle que  $x \in B$ ,
2. pour tout  $x \in A$ ,

$$\inf_{B \in \mathcal{F}; x \in B} \text{diam}(B) = 0.$$

Alors il existe une sous-famille au plus dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  telle que :

1. les boules de  $\mathcal{G}$  sont deux à deux disjointes,

2.  $\mathcal{L}^n \left( A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0,$

*Démonstration.* On suppose d'abord  $A$  borné, de sorte que  $\mathcal{L}^n(A) < +\infty$ . Comme  $\mathcal{L}^n$  est une mesure de Radon (voir l'exemple 1.26) et par la régularité de la mesure de Lebesgue, il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $A \subset U$  et

$$\mathcal{L}^n(U) \leq (1 + 7^{-n})\mathcal{L}^n(A).$$

Notons qu'on peut supposer  $U$  borné car  $\lim_{R \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^n(A \cap B(0, R)) = \mathcal{L}^n(A)$  et  $A \subset B(0, R)$  pour  $R$  assez grand.

On vérifie d'abord que

$$A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{F}; B \subset U} B. \quad (1.89)$$

En effet, soit  $x \in A$ . Comme  $A \subset U$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U$  (ici  $B(x, r)$  est la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ ). Soit  $B = B_f(y, \eta) \in \mathcal{F}$  telle que  $\eta < \frac{r}{2}$  et  $x \in B$  (où  $B_f$  désigne la boule fermée). Alors

$$x \in B_f(y, \eta) \subset B_f(x, \eta + |x - y|) \subset B_f(x, 2\eta) \subset B(x, r) \subset U,$$

ce qui prouve (1.89). La proposition 1.84, appliquée à la famille  $\{B \in \mathcal{F}; B \subset U\}$  (noter que les rayons de ces boules sont uniformément bornés car  $U$  est borné), fournit donc une famille au plus dénombrable formée de boules fermées appartenant à la famille  $\mathcal{F}$ , deux à deux disjointes et incluses dans  $U$ , notée  $(B_i)_{i \geq 1}$ , telle que

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} 5B_i.$$

Alors

$$5^{-n} \mathcal{L}^n(A) \leq 5^{-n} \sum_{i \geq 1} \mathcal{L}^n(5B_i) = \sum_{i \geq 1} \mathcal{L}^n(B_i).$$

Il existe donc  $k_1 \geq 1$  tel que

$$6^{-n} \mathcal{L}^n(A) \leq \sum_{1 \leq i \leq k_1} \mathcal{L}^n(B_i).$$

Posons alors

$$A_1 := A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k_1} B_i.$$



On vérifie que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(A_1) &\leq \mathcal{L}^n\left(U \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k_1} B_i\right) \\ &= \mathcal{L}^n(U) - \sum_{i=1}^{k_1} \mathcal{L}^n(B_i) \\ &\leq \alpha \mathcal{L}^n(A),\end{aligned}$$

où  $\alpha := 1 + 7^{-n} - 6^{-n} < 1$ .

Comme  $A_1$  est inclus dans  $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$  qui est ouvert, par la régularité de la mesure de Lebesgue, il

existe un ouvert  $U_1$  tel que  $A_1 \subset U_1 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B_i$  et

$$\mathcal{L}^n(U_1) \leq (1 + 7^{-n})\mathcal{L}^n(A_1).$$

En raisonnant comme précédemment, on trouve un entier  $k_2 > k_1$  et des boules fermées deux à deux disjointes  $B_i$  appartenant à  $\mathcal{F}$  avec  $B_i \subset U_1$  pour  $i \in \llbracket k_1 + 1, k_2 \rrbracket$  et, si

$$A_2 := A_1 \setminus \bigcup_{k_1+1 \leq i \leq k_2} B_i = A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k_2} B_i,$$

alors

$$\mathcal{L}^n(A_2) \leq \alpha \mathcal{L}^n(A_1) \leq \alpha^2 \mathcal{L}^n(A).$$

On note aussi que les boules  $B_i$  pour  $i \in \llbracket 1, k_2 \rrbracket$  sont deux à deux disjointes. Après l'étape  $m$ , on a obtenu des boules  $B_i$  deux à deux disjointes appartenant à  $\mathcal{F}$  pour  $i \in \llbracket 1, k_m \rrbracket$  et telles que

$$\mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq k_m} B_i\right) \leq \alpha^m \mathcal{L}^n(A),$$

ce qui permet de conclure pour (i) et (ii) car  $0 < \alpha < 1$ .

Enfin, si on ne suppose plus  $A$  borné, on écrit

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{i \geq 1} \overline{Q_i},$$

où  $(Q_i)_{i \geq 1}$  est une famille dénombrable de cubes ouverts deux à deux disjointes. On applique le cas

précédent à chaque  $A \cap Q_i$  et on utilise le fait que  $\mathcal{L}^n\left(A \setminus \bigcup_{i \geq 1} Q_i\right) = 0$ . □

### 3.3 Un lemme de recouvrement de Besicovitch

La conclusion de la proposition 1.88 n'est plus vraie si on remplace la mesure de Lebesgue par d'autres mesures de Radon dans  $\mathbb{R}^n$  (voir l'exercice 1.235 plus loin).

Il est toutefois possible de donner une version du lemme de recouvrement de Vitali pour des mesures de Radon générales (voir la proposition 1.95 plus loin). Dans l'exemple présenté dans l'exercice 1.235, seules les frontières des boules considérées rencontrent l'ensemble considéré. On va voir dans la suite que la situation est différente lorsque tout point de l'ensemble considéré est le centre (ou est proche du centre) d'une boule de la famille considérée. C'est l'objet du lemme de recouvrement de Besicovitch.

**Proposition 1.90.** [Lemme de recouvrement de Besicovitch] ([98, 2.7], [45, Chapter 1, Theorem 2]) Soit  $n \geq 1$ . Il existe des entiers  $P(n) \geq 1$  et  $Q(n) \geq 1$  avec les propriétés suivantes. Soient  $A \subset \mathbb{R}^n$  une partie bornée et  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées de rayons strictement positifs telle que tout point de  $A$  soit le centre d'une boule de  $\mathcal{F}$ . Alors :

1. il existe une famille au plus dénombrable de boules  $(B_i)_{i \geq 1}$  appartenant à  $\mathcal{F}$  telle que  $A \subset \bigcup_{i \geq 1} B_i$  et, pour tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , le cardinal de  $\{i \geq 1; x \in B_i\}$  est inférieur ou égal à  $P(n)$ ,
2. il existe des sous-familles  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{Q(n)}$  de boules appartenant à  $\mathcal{F}$  telles que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{Q(n)} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_i} B$$

et, pour tout  $i \in \llbracket 1, Q(n) \rrbracket$ , les boules de  $\mathcal{F}_i$  sont deux à deux disjointes.

**Remarque 1.91.** 1. Contrairement au lemme 5r, l'ensemble  $A$  est inclus dans une réunion de boules de la famille  $\mathcal{F}$  non dilatées. Par contre, les boules sélectionnées ne sont pas deux à deux disjointes.  
2. La conclusion de la proposition 1.90 est fautive si  $A$  n'est pas borné. Considérer, dans  $\mathbb{R}$ , la famille des boules  $B_f(n, 2^n)$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $A = \mathbb{N}$ .

La preuve de la proposition 1.90 repose sur deux lemmes.

**Lemme 1.92.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}^2$  tels que  $0 < |a| < |a - b|$  et  $0 < |b| < |a - b|$ . Alors

$$\left| \frac{1}{|a|}a - \frac{1}{|b|}b \right| \geq 1.$$

*Démonstration.* Comme  $|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - 2\langle a, b \rangle > |a|^2$ , on a  $2\langle a, b \rangle < |b|^2$ . De même,  $2\langle a, b \rangle < |a|^2$ . Si  $u = \frac{a}{|a|}$  et  $v = \frac{b}{|b|}$ , on a donc  $2\langle u, v \rangle < \min\left(\frac{|b|}{|a|}, \frac{|a|}{|b|}\right) \leq 1$ . On en déduit que  $|u - v|^2 = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle = 2 - 2\langle u, v \rangle > 1$ .  $\square$

**Lemme 1.93.** Il existe un entier  $N(n) \geq 1$  avec la propriété suivante : si  $k \geq 1$ ,  $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$  et  $r_1, \dots, r_k > 0$  sont tels que

$$a_i \notin B(a_j, r_j) \text{ pour tous } j \neq i$$

et

$$\bigcap_{i=1}^k B(a_i, r_i) \neq \emptyset,$$

alors  $k \leq N(n)$ .

*Démonstration.* Si  $x \in \bigcap_{i=1}^k B(a_i, r_i)$ , on a  $x \neq a_i$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Quitte à remplacer  $a_i$  par

$b_i = a_i - x$ , on peut donc supposer que  $0 \in \bigcap_{i=1}^k B(a_i, r_i)$  et  $a_i \neq 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Alors, pour tous  $i \neq j$ ,  $|a_i| \leq r_i < |a_i - a_j|$ . Pour tous  $i \neq j$ , le lemme 1.92 appliqué dans le plan contenant  $0$ ,  $a_i$  et  $a_j$  montre que

$$\left| \frac{1}{|a_i|}a_i - \frac{1}{|a_j|}a_j \right| \geq 1.$$

Les points  $\frac{1}{|a_i|}a_i$  sont situés sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  et sont mutuellement distants d'au moins 1, ce qui donne la conclusion.  $\square$

*Preuve de la proposition 1.90 :* pour tout  $x \in A$ , soit  $r(x) > 0$  tel que  $B(x, r(x)) \in \mathcal{F}$ . On peut supposer que

$$M_1 := \sup_{x \in \mathcal{F}} r(x) < +\infty.$$

En effet, si  $M_1 = +\infty$ , comme  $A$  est borné, on peut trouver  $x \in A$  tel que  $A \subset B(x, r_x)$  et la preuve est terminée. On supposera donc que  $M_1 < +\infty$  dans la suite de cette preuve et on note que  $M_1 > 0$ .

Soit  $x_1 \in A$  tel que  $r(x_1) \geq \frac{1}{2}M_1$ . Si  $j \geq 1$  et si  $x_1, \dots, x_j$  sont construits, on construit par récurrence  $x_{j+1} \in A$  tel que

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^j B(x_i, r(x_i)) \text{ et } r(x_{j+1}) \geq \frac{1}{2}M_1.$$

Cette construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes, car les  $x_j$  sont des points de  $A$  mutuellement distants d'au moins  $\frac{1}{2}M_1$  et  $A$  est borné. On a donc construit  $x_1, \dots, x_{k_1}$  avec  $k_1 \geq 1$ .

On pose alors

$$M_2 := \sup_{x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r(x_i))} r(x).$$

Par construction,  $0 < M_2 \leq \frac{1}{2}M_1$ , sinon la construction de l'étape précédente se serait poursuivie après  $k_1$ . On choisit alors

$$x_{k_1+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r(x_i))$$

tel que  $r(x_{k_1+1}) \geq \frac{1}{2}M_2$ . On poursuit la construction des  $x_j$  tels que

$$x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^j B(x_i, r(x_i)) \text{ et } r(x_{j+1}) \geq \frac{1}{2}M_2.$$

A nouveau, la construction s'arrête au bout d'un nombre fini d'étapes. On construit ainsi par récurrence une suite strictement croissante d'entiers  $k_0 = 1 \leq k_1 < k_2 < \dots$ , une suite strictement décroissante de nombres strictement positifs  $(M_i)_{i \geq 1}$  tels que  $2M_{i+1} \leq M_i$ , et une suite de boules  $B_i = B(x_i, r(x_i)) \in \mathcal{F}$  avec les propriétés suivantes. Si  $I_j := \llbracket k_{j-1} + 1, \dots, k_j \rrbracket$  pour tout  $j \geq 1$ , on a, pour tout  $j \geq 1$  et tout  $k \geq 1$ ,

1.  $\frac{1}{2}M_j \leq r(x_i) \leq M_j$  pour tout  $i \in I_j$ ,
2.  $x_{j+1} \in A \setminus \bigcup_{i=1}^j B_i$ ,
3.  $x_i \in A \setminus \bigcup_{m \neq k} \bigcup_{j \in I_m} B_j$  pour tout  $i \in I_k$ .

Seule la propriété 3 demande une justification. Soit  $i \in I_k$ ,  $m \neq k$  et  $j \in I_m$ . Si  $m < k$ ,  $i > j$ , de sorte que  $x_i \notin B_j$  par la propriété 2. Si  $k < m$ ,  $r(x_j) \leq M_m \leq \frac{1}{2}M_k \leq r(x_i)$ . De plus,  $i < j$  donc  $x_j \notin B_i$  par la propriété 2. Ainsi,  $|x_i - x_j| > r(x_i) \geq r(x_j)$ , ce qui montre que  $x_i \notin B_j$ .

Comme  $\lim_{i \rightarrow +\infty} M_i = 0$ , on a aussi  $\lim_{i \rightarrow +\infty} r(x_i) = 0$  par la propriété 1 ci-dessus. Par suite,

$$A \subset \bigcup_{i \geq 1} B_i.$$

En effet, soit  $x \in A$ . Il existe  $j \geq 1$  tel que  $r(x_j) < \frac{1}{2}r(x)$ . Si  $x \in A \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{j-1}} B_i$ , alors, par définition de  $M_j$ ,  $r(x) \leq M_j \leq 2r(x_j)$ , ce qui donne une contradiction.

Soit maintenant  $x \in \mathbb{R}^n$ , on suppose que

$$x \in \bigcap_{i=1}^p B_{m_i}.$$

Pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , soit  $j_i \geq 1$  tel que  $m_i \in I_{j_i}$ . Soient  $k, l \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tels que  $j_k \neq j_l$ . D'après la propriété 3 ci-dessus, pour tout  $m \neq j_k$  et tout  $j \in I_m$ ,  $x_{m_k} \notin B_j$ . En particulier,  $x_{m_k} \notin B_{m_l}$ . De plus, les boules  $B_{m_i}$  sont d'intersection non vide. Le lemme 1.93 montre donc que

$$\# \{j \geq 1; \text{ il existe } i \in \llbracket 1, p \rrbracket \text{ tel que } m_i \in I_j\} \leq N(n).$$

Pour terminer la preuve du point 1 de la proposition 1.90, il suffit donc de vérifier que, pour tout  $j \geq 1$ ,

$$\#(\{m_1, \dots, m_p\} \cap I_j) \leq 16^n. \quad (1.94)$$

Soit  $j \geq 1$  et notons  $\{m_1, \dots, m_p\} \cap I_j = \{l_1, \dots, l_q\}$ . Les boules  $B\left(x_{l_i}, \frac{1}{4}r(x_{l_i})\right)$  pour  $1 \leq i \leq q$  sont deux à deux disjointes et incluses dans  $B(x, 2M_j)$ , par les propriétés 1 et 2 ci-dessus. Par suite, en notant toujours  $\alpha(n) := \mathcal{L}^n(B(0, 1))$ ,

$$\begin{aligned} q\alpha(n) \left(\frac{M_j}{8}\right)^n &\leq \sum_{j=1}^q \mathcal{L}^n \left( B \left( x_{l_i}, \frac{1}{4}r(x_{l_i}) \right) \right) \\ &\leq \mathcal{L}^n(B(x, 2M_j)) \\ &\leq \alpha(n)(2M_j)^n, \end{aligned}$$

ce qui montre bien (1.94).

On prouve maintenant le point 2 de la proposition 1.90. Comme  $\lim_{i \rightarrow +\infty} r_i = 0$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble des  $i$  tels que  $r_i \geq \varepsilon$  est fini. Quitte à réindexer, on peut donc supposer la suite  $(r_i)_{i \geq 1}$  décroissante. On définit  $B_{1,1} := B_1$ . Si on a construit des boules  $B_{1,1}, \dots, B_{1,j}$  deux à deux disjointes avec  $j \geq 1$ , on définit  $B_{1,j+1} = B_k$  où  $k$  est le plus petit entier tel que

$$B_k \cap \left( \bigcup_{i=1}^j B_{1,i} \right) = \emptyset.$$

On construit de la sorte une famille au plus dénombrable  $\mathcal{F}_1 := \{B_{1,i}\}$  formée de boules deux à deux disjointes. Si les boules de  $\mathcal{F}_1$  ne recouvrent pas  $A$ , on définit  $B_{2,1} = B_k$  où  $k$  est le plus petit entier tel que  $B_k \notin \mathcal{F}_1$ . Si on a construit des boules  $B_{2,1}, \dots, B_{2,j}$  deux à deux disjointes et n'appartenant pas à  $\mathcal{F}_1$  avec  $j \geq 1$ , on définit  $B_{2,j+1} = B_l$  où  $l$  est le plus petit entier tel que

$$B_l \cap \left( \bigcup_{i=1}^j B_{2,i} \right) = \emptyset.$$

On construit ainsi par récurrence des sous-familles  $\mathcal{F}_j$  de  $\mathcal{F}$ , chaque  $\mathcal{F}_j$  étant formée de boules deux à deux disjointes. Il reste à montrer qu'il existe  $m \leq 4^n P(n) + 1$  tel que

$$A \subset \bigcup_{1 \leq j \leq m} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B.$$

Soit donc  $m$  tel qu'il existe  $x \in A \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq m} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B$ . On veut prouver que  $m \leq 4^n P(n)$ . Soit  $i$  tel que

$x \in B_i$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $B_i \notin \mathcal{F}_j$ . En raison de la décroissance des rayons et de la construction de la famille  $\mathcal{F}_j$ , il existe donc  $i_j$  tel que  $B_i \cap B_{j,i_j} \neq \emptyset$  et  $r_i \leq r_{j,i_j}$ . Pour tout  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , il existe donc

une boule  $B'_j$  de rayon  $\frac{1}{2}r_i$  contenue dans  $(2B_i) \cap B_{j,i_j}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , le cardinal de l'ensemble des  $j \in \llbracket 1, m \rrbracket$  tels que  $x \in B'_j$  est inférieur à  $P(n)$ , puisque  $B'_j \subset B_{j,i_j}$ . Cela s'écrit

$$\sum_{1 \leq j \leq m} \chi_{B'_j} \leq P(n) \chi_{\bigcup_{1 \leq j \leq m} B'_j},$$

où  $\chi_E$  désigne la fonction indicatrice de  $E \subset \mathbb{R}^n$ . On a donc

$$\begin{aligned} 2^n \alpha(n) r_i^n &= \mathcal{L}^n(2B_i) \\ &\geq \mathcal{L}^n \left( \bigcup_{1 \leq j \leq m} B'_j \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\bigcup_{1 \leq j \leq m} B'_j}(x) d\mathcal{L}^n(x) \\ &\geq P(n)^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{1 \leq j \leq m} \chi_{B'_j}(x) d\mathcal{L}^n(x) \\ &= P(n)^{-1} \sum_{1 \leq j \leq m} \mathcal{L}^n(B'_j) \\ &= m P(n)^{-1} \alpha(n) \left( \frac{1}{2} r_i \right)^n, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

On poursuit cette section par une version du lemme de recouvrement de Vitali pour les mesures de Radon :

**Proposition 1.95.** [Lemme de recouvrement de Vitali pour les mesures de Radon] ([98, Theorem 2.8])  
Soit  $\mu$  une mesure de Radon dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées d'intérieur non vide. On suppose que, pour tout  $x \in A$ ,

$$\inf_{B(x,r) \in \mathcal{F}} r = 0.$$

En d'autres termes, tout  $x \in A$  est le centre d'une boule de rayon arbitrairement petit et appartenant à la classe  $\mathcal{F}$ . Alors il existe une sous-famille au plus dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  telle que :

1. les boules de  $\mathcal{G}$  sont deux à deux disjointes,

2.  $\mu \left( A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0.$

*Démonstration.* On utilisera l'observation suivante : si  $X$  est un ensemble,  $\mu$  une mesure,  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de parties deux à deux disjointes de  $X$  (indexée par un ensemble  $I$  quelconque) et s'il existe  $B$  de mesure finie tel que  $A_i \subset B$  pour tout  $i \in I$ , alors  $\{i \in I; \mu(A_i) > 0\}$  est au plus dénombrable. En effet, pour tout  $k \geq 1$ , si  $I_k := \{i \in I; \mu(A_i) \geq \frac{1}{k}\}$ , alors

$$\mu(B) \geq \sum_{i \in I_k} \mu(A_i) \geq \frac{1}{k} \# I_k,$$

ce qui montre que  $I_k$  est fini, et l'ensemble  $\{i \in I; \mu(A_i) > 0\}$  est la réunion des  $I_k$ .

On passe donc à la preuve de la proposition 1.95. Si  $\mu(A) = 0$ , il n'y a rien à faire. On peut donc supposer  $\mu(A) > 0$ . On suppose d'abord  $A$  borné, de sorte que  $\mu(A) < +\infty$ . Il existe un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  contenant  $A$  et tel que

$$\mu(U) \leq (1 + (4Q(n))^{-1}) \mu(A),$$

où  $Q(n)$  est donné par la proposition 1.90. Comme dans la preuve de la proposition 1.88,  $A$  est inclus dans la réunion des boules  $B \in \mathcal{F}$  qui sont incluses dans  $U$ . La proposition 1.90 fournit des familles  $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_{Q(n)} \subset \mathcal{F}$ , chacune formée de boules deux à deux disjointes, telles que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{Q(n)} \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B \subset U.$$

Par suite,

$$\mu(A) \leq \sum_{j=1}^{Q(n)} \mu \left( \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B \right).$$

Il existe donc  $j \in \llbracket 1, Q(n) \rrbracket$  tel que

$$\mu(A) \leq Q(n) \mu \left( \bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B \right).$$

Il existe donc une sous-famille finie  $\mathcal{F}'_j \subset \mathcal{F}_j$  telle que

$$\mu(A) \leq 2Q(n) \mu \left( \bigcup_{B \in \mathcal{F}'_j} B \right).$$

Si  $A_1 := A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}'_j} B$ , on a donc

$$\begin{aligned} \mu(A_1) &\leq \mu \left( U \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{F}'_j} B \right) \\ &= \mu(U) - \mu \left( \bigcup_{B \in \mathcal{F}'_j} B \right) \\ &\leq \alpha \mu(A), \end{aligned}$$

avec  $0 < \alpha := 1 - \frac{1}{4}Q(n)^{-1} < 1$ . On conclut comme pour la proposition 1.88.

Dans le cas général, soit  $(r_m)_{m \geq 1}$  une suite de rayons strictement positifs tels que  $2^{2m} \leq r_m \leq 2^{2m+1}$  et  $\mu(\partial B(0, r_m)) = 0$ . Noter qu'une telle suite existe bien : comme les frontières de  $B(0, r)$  pour  $r \in [2^{2m}, 2^{2m+1}]$  sont deux à deux disjointes et incluses dans  $B_f(0, 2^{2m+1})$  et  $\mu(B_f(0, 2^{2m+1})) < +\infty$ , l'ensemble des  $r \in [2^{2m}, 2^{2m+1}]$  tels que  $\mu(\partial B(0, r)) > 0$  est au plus dénombrable d'après la remarque initiale de cette preuve. On pose

$$V_0 = B(0, r_0) \text{ et } V_m = B(0, r_m) \setminus B_f(0, r_{m-1}) \text{ pour } m \geq 1.$$

On applique le cas précédent à chaque  $A \cap V_m$ , en observant que

$$\mu(\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{m \geq 0} V_m) \leq \sum_{m \geq 0} \mu(\partial B(0, r_m)) = 0.$$

□

## 4 Espaces de nature homogène

### 4.1 Définitions et premières propriétés

**Définition 1.96.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. On suppose que  $\mu$  est une mesure borélienne régulière sur  $X$ . Pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ ,  $B(x, r) := \{y \in X; d(y, x) < r\}$  est la boule ouverte de centre  $x$  et de rayon  $r$ , alors que  $B_f(x, r) := \{y \in X; d(y, x) \leq r\}$  est la boule fermée de centre  $x$  et de rayon  $r$ . On dira que  $(X, d, \mu)$  est un *espace de nature homogène* si, et seulement si :

1. pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ ,  $0 < \mu(B(x, r)) < +\infty$ ,
2. il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ ,

$$\mu(B(x, 2r)) \leq C\mu(B(x, r)). \quad (D)$$

Une conséquence importante de (D) est qu'il existe  $D > 0$  tel que, pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$  et tout  $\theta > 1$ ,

$$\mu(B(x, \theta r)) \leq C\theta^D \mu(B(x, r)). \quad (1.97)$$

En effet, posons  $D := \frac{\ln C}{\ln 2}$ . Soient  $\theta > 1$  et  $j \in \mathbb{N}$  tel que  $2^j < \theta \leq 2^{j+1}$ . Alors, pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ , comme  $j \ln C < D \ln \theta$ ,

$$\begin{aligned} \mu(B(x, \theta r)) &\leq \mu(B(x, 2^{j+1}r)) \\ &\leq C^{j+1} \mu(B(x, r)) \\ &\leq C\theta^D \mu(B(x, r)), \end{aligned}$$

comme annoncé.

**Remarque 1.98.** Si  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène, alors la mesure  $\mu$  est de Radon. En effet,  $\mu$  est borélienne régulière et, si  $K$  est un compact,  $K$  est inclus dans une boule ouverte qui est de mesure finie.

**Remarque 1.99.** Dans certains cas, on supposera seulement que  $d$  est une quasi-distance, ce qui signifie que  $d$  est symétrique,  $d(x, y) = 0$  si et seulement si  $x = y$  et il existe  $C > 0$  tel que, pour tous  $x, y, z \in X$ ,

$$d(x, z) \leq C(d(x, y) + d(y, z)). \quad (1.100)$$

Pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ , on définit la boule ouverte  $B(x, r)$  comme dans le cas métrique. Si  $d$  est une quasi-distance sur  $X$ , la topologie sur  $X$  associée à  $d$  est définie de manière usuelle : si  $U \subset X$ ,  $U$  est ouvert si, et seulement si, pour tout  $x \in U$ , il existe  $r > 0$  tel que  $B(x, r) \subset U$ .

Il peut arriver dans cette situation qu'une boule ouverte ne soit pas un ensemble ouvert. Pour le voir, on considère la fonction  $s : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  définie comme suit :

$$s(t) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 2 & \text{si } 1 < t \leq 2, \\ t & \text{si } t \geq 2. \end{cases}$$

On vérifie que  $t \leq s(t) \leq 2t$  pour tout  $t \geq 0$ . Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on pose  $d(x, y) = s(|x - y|)$ . Alors  $d$  est une quasi-distance sur  $\mathbb{R}$ , qui définit la même topologie sur  $\mathbb{R}$  que la distance usuelle. Toutefois,  $B\left(0, \frac{3}{2}\right) = [-1, 1]$  n'est pas un ouvert.

Il est important de souligner que tout espace de nature homogène est séparable :

**Lemme 1.101.** [64, Lemma 3.3.30]

1. Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène. Alors  $(X, d)$  est un espace métrique séparable.

2. Plus généralement, soit  $\mu$  une mesure borélienne sur un espace métrique  $(X, d)$ . On suppose que  $X$  est l'union dénombrable d'ensembles ouverts de mesure finie et que toute boule ouverte est de mesure strictement positive. Alors  $(X, d)$  est séparable.

*Démonstration.* Il suffit clairement de prouver le point 2. On remarque d'abord ceci : si  $I$  est un ensemble et  $(\alpha_i)_{i \in I}$  est une famille de réels positifs, et si

$$S := \sup_{J \subset I; J \text{ fini}} \sum_{j \in J} \alpha_j < +\infty,$$

alors  $\{i \in I; \alpha_i > 0\}$  est au plus dénombrable. En effet, soient  $k \geq 1$  et  $J_k := \{i \in I; \alpha_i > \frac{1}{k}\}$ . Si  $J' \subset J_k$  est une partie finie de  $J$ , alors

$$\frac{1}{k} \#J' \sum_{j \in J'} \alpha_j \leq S,$$

de sorte que le cardinal des parties finies de  $J_k$  est uniformément borné. Ainsi,  $J_k$  est fini et  $\{i \in I; \alpha_i > 0\}$  est la réunion des  $J_k$ .

Pour tout entier  $k \geq 1$ , soit  $(x_i^k)_{i \in I_k}$  une famille maximale de points dans  $X$  telle que  $d(x_i^k, x_j^k) \geq \frac{1}{k}$  pour tous  $i \neq j$  dans  $I_k$  (une telle famille existe par le lemme de Zorn). Soit  $(X_j)_{j \geq 1}$  une famille dénombrable d'ouverts de mesure finie tels que  $X = \bigcup_{j \geq 1} X_j$ . Alors, pour tous  $k, j \geq 1$ , l'ensemble

$E_k^j := \{x_i^k; i \in I_k\} \cap X_j$  est au plus dénombrable. En effet, pour toute partie finie  $F_k^j$  de  $E_k^j$ ,

$$\sum_{x_i^k \in F_k^j} \mu \left( B \left( x_i^k, \frac{1}{2k} \right) \cap X_j \right) \leq \mu(X_j) < +\infty.$$

Or, comme  $x_i^k \in X_j$  et  $X_j$  est ouvert,  $B \left( x_i^k, \frac{1}{2k} \right) \cap X_j$  contient une boule ouverte de centre  $x_i^k$  et de rayon strictement positif, si bien que  $\mu \left( B \left( x_i^k, \frac{1}{2k} \right) \cap X_j \right) > 0$ . La remarque faite au début de la preuve permet de conclure.

On en déduit que  $\{x_i^k; i \in I_k\}$  est dénombrable, et il est facile de vérifier que l'ensemble des points  $\{x_i^k; k \geq 1, i \in I_k\}$  est dense dans  $X$ .  $\square$

Voici des exemples d'espaces de nature homogène ([29, Section 2]) :

- Exemple 1.102.**
1. Si  $X = \mathbb{R}^n$ ,  $d$  est la distance euclidienne et  $\mu$  la mesure de Lebesgue, alors  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène.
  2. Si  $X = [0, 1[$ ,  $d(x, y)$  est la longueur du plus petit intervalle dyadique fermé à gauche et ouvert à droite (voir la définition 1.50 où seuls des cubes fermés sont considérés) contenant  $x$  et  $y$  et  $\mu = \mathcal{L}^1$  la mesure de Lebesgue, alors  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène.
  3. Si  $X = [0, +\infty[$ ,  $d$  est la distance euclidienne et  $d\mu = r^{n-1}dr$  avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , alors  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène.
  4. On considère  $X = \mathbb{R}^3$ , qu'on munit de la loi de groupe suivante : si  $x = (x_1, x_2, t)$  et  $y = (y_1, y_2, s)$ , on pose

$$x \cdot y := \left( x_1 + y_1, x_2 + y_2, t + s + \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{2} \right).$$

On notera  $\mathbb{H} = \mathbb{R}^3$  muni de cette loi. Le groupe  $\mathbb{H}$  est appelé *groupe de Heisenberg*.



Pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $x \in \mathbb{H}$ , on pose

$$T_\lambda(x) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda^2 t).$$

Pour tout  $\lambda > 0$ ,  $T_\lambda$  est un automorphisme de groupes, appelé dilatation.

Pour tout  $x \in \mathbb{H}$ , on pose

$$\|x\| := \left( (x_1^2 + x_2^2)^2 + t^2 \right)^{1/4}$$

On vérifie immédiatement que  $\|x^{-1}\| = \|-x\| = \|x\|$  pour tout  $x \in \mathbb{H}$ . De plus, pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $x \in \mathbb{H}$ ,

$$\|T_\lambda x\| = \lambda \|x\|. \quad (1.103)$$

Enfin, il existe  $C > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in \mathbb{H}$ ,

$$\|x \cdot y\| \leq C (\|x\| + \|y\|).$$

En effet, il suffit de le voir quand  $\|x\| \geq \|y\|$ , puis, en raison de (1.103), on peut supposer que  $\|x\| = 1$  et  $\|y\| \leq 1$ , et on conclut par compacité.

On définit alors, pour tous  $x, y \in \mathbb{H}$ ,

$$d(x, y) = \|y^{-1} \cdot x\|.$$

On vérifie que  $d$  est une quasi-distance sur  $\mathbb{H}$ , et que  $d$  est invariante à gauche, ce qui signifie que, pour tous  $a, x, y \in \mathbb{H}$ ,  $d(a \cdot x, a \cdot y) = d(x, y)$ . Enfin, si  $\mu = \mathcal{L}^3$  est la mesure de Lebesgue, on montre que  $(\mathbb{H}, d, \mu)$  est un espace de nature homogène. Plus précisément, pour tout  $x \in \mathbb{H}$  et tout  $r > 0$ , par l'invariance à gauche de la distance,  $\mu(B(x, r)) = \mu(B(e, r)) := V(r)$  et on vérifie ([59, Theorem 9.27]) qu'il existe des constantes  $0 < c < C$  telles que

$$cr^4 \leq V(r) \leq Cr^4 \text{ pour tout } r > 0.$$

5. Soit  $G$  un groupe. On suppose qu'il existe  $s \geq 1$  et  $\gamma_1, \dots, \gamma_s \in G$  tels que  $G$  soit engendré par  $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ . On note  $e$  l'élément neutre de  $G$ . Pour tout  $x \in G$ , on définit  $\rho(x)$  comme le plus petit entier  $n$  tel que  $x = x_1 \dots x_n$  avec  $x_i \in \{e, \gamma_1^{\pm 1}, \dots, \gamma_s^{\pm 1}\}$ . On définit une métrique  $d$  sur  $G$  par  $d(x, y) := \rho(y^{-1}x)$ . On munit  $G$  de la mesure de comptage, i.e.  $m(A) = \#A$  pour tout  $A \subset G$ . On dira que  $G$  est à croissance polynomiale d'ordre  $D > 0$  si, et seulement si, il existe  $0 < c < C$  tels que  $cr^D \leq m(B(e, r)) \leq Cr^D$  pour tout  $r > 0$ . Dans ce cas,  $(G, d, m)$  est un espace de nature homogène. Un théorème de Gromov affirme que cela se produit si, et seulement si,  $G$  contient un sous-groupe nilpotent d'indice fini ([32, Section 1]).
6. Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. On suppose que  $\mu$  une mesure borélienne régulière sur  $X$ . On dit que  $(X, d, \mu)$  est Ahlfors régulier ([59, Section 8]) si, et seulement si, il existe  $C, Q > 0$  tel que, pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ ,

$$C^{-1}r^Q \leq \mu(B(x, r)) \leq Cr^Q.$$

Si  $(X, d, \mu)$  est Ahlfors régulier, alors c'est un espace de nature homogène.

7. Plus généralement, soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. Soit  $\alpha > 0$ . On dit que  $\mu$  est  $\alpha$ -homogène s'il existe une constante  $C \geq 1$  telle que

$$\frac{\mu(B(x, r))}{\mu(B(x, R))} \geq C^{-1} \left( \frac{r}{R} \right)^\alpha \quad (1.104)$$

pour tout  $x \in X$  et tout  $0 < r < R$ . Si  $\mu$  est  $\alpha$ -homogène, alors  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène.

8. Soient  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré et  $s > 0$ . On suppose que  $\mu$  est une mesure de Radon non identiquement nulle. On dit que  $\mu$  est  $s$ -uniforme si, et seulement si, il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x$  appartenant au support de  $\mu$  et tout  $r > 0$ ,

$$0 < \mu(B(x, r)) = Cr^s.$$

Sous cette hypothèse,  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène. On retrouvera cette notion au chapitre 2 (voir la section 5.1).

Voici une remarque utile :

**Remarque 1.105.** On suppose  $(X, d, \mu)$  de nature homogène. Alors il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ ,  $\mu(B_f(x, 2r)) \leq C\mu(B_f(x, r))$ . En effet, comme, pour tout  $x \in X$  et tout  $s > 0$ ,  $B_f(x, s) = \bigcap_{k \geq 1} B\left(x, s + \frac{1}{k}\right)$ , de sorte que  $\mu(B_f(x, s)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \mu\left(B\left(x, s + \frac{1}{k}\right)\right)$ . On a donc, pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$  et tout  $k \geq 1$ ,

$$\mu(B_f(x, 2r)) \leq \mu\left(B\left(x, 2r + \frac{2}{k}\right)\right) \leq C\mu\left(B\left(x, r + \frac{1}{k}\right)\right),$$

et on obtient la conclusion en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ .

On termine ce paragraphe avec le résultat suivant :

**Proposition 1.106.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène complet. Alors  $(X, d)$  est propre (ce qui signifie que toute boule ouverte est relativement compacte).

*Démonstration.* Cette preuve est reprise de [106, Proposition 2]. Soient  $x_0 \in X$  et  $r_0 > 0$ . Comme  $(X, d)$  est complet, il suffit de montrer que  $\overline{B(x_0, r_0)}$  est précompacte. Soit donc  $\varepsilon > 0$ . Par le lemme 5r, il existe une famille au plus dénombrable de points  $(x_i)_{i \in I} \in B(x_0, r_0)$  tels que les boules  $B(x_i, \varepsilon)$  soient deux à deux disjointes et  $\overline{B(x_0, r_0)} \subset \bigcup_{i \in I} B(x_i, 5\varepsilon)$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \mu(\overline{B(x_0, r_0)}) &\leq C \sum_{i \in I} \mu(B(x_i, \varepsilon)) \\ &\leq C\mu(B(x_0, r_0 + \varepsilon)). \end{aligned}$$

Si  $I$  est infini, il existe donc une suite  $(i_n)_{n \geq 1} \in I$  telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu(B(x_{i_n}, \varepsilon)) = 0. \quad (1.107)$$

Or, pour tout  $n \geq 1$ ,  $0 < \mu(B(x_0, r_0)) \leq \mu(B(x_{i_n}, 2r_0)) \leq C'\mu(B(x_{i_n}, \varepsilon))$ , ce qui est en contradiction avec (1.107). Ainsi,  $I$  est fini, ce qui termine la preuve.  $\square$

## 4.2 Espaces doublants

**Définition 1.108.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Si  $A \subset X$ , on dit que  $A$  est  $\varepsilon$ -séparé si, et seulement si, pour tous  $x, y \in A$ ,  $d(x, y) \geq \varepsilon$ .
2. Soit  $N \geq 1$  un entier. On dit que  $X$  est doublant de constante  $N$  si, et seulement si, pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ , toute partie  $\frac{r}{2}$ -séparée dans la boule  $B(x, r)$  a au plus  $N$  points.

Voici une observation utile :

**Lemme 1.109.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique doublant de constante  $N$ . Soient  $k \geq 1$ ,  $x \in X$  et  $r > 0$ . Alors tout ensemble  $2^{-k}r$ -séparé dans la boule  $B(x, r)$  possède au plus  $N^k$  points.

On vérifie facilement :

**Proposition 1.110.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène. Alors  $X$  est doublant.

*Démonstration.* Soient  $x \in X$  et  $r > 0$ . Soient  $x_1, \dots, x_k$  des points de  $B(x, r)$  tels que  $d(x_i, x_j) \geq \frac{r}{2}$  pour tous  $i \neq j$ . Alors les boules  $B(x_i, \frac{r}{4})$  sont deux à deux disjointes et incluses dans  $B(x, 2r)$ , et, pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $B(x, 2r) \subset B(x_i, 3r)$ , de sorte que

$$k\mu(B(x, 2r)) \leq C \sum_{i=1}^k \mu(B(x_i, \frac{r}{4})) \leq C\mu(B(x, 2r)),$$

ce qui donne la conclusion car  $0 < \mu(B(x, 2r)) < +\infty$ . □

Réciproquement, on peut montrer (voir [92]) :

**Théorème 1.111.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique doublant complet. Alors il existe une mesure  $\mu$  sur  $X$  telle que  $(X, d, \mu)$  soit un espace de nature homogène.

Ce théorème découle (comme le lemme de Frostman) d'arguments de convergence faible de suites de mesures (voir la section 2.6 du chapitre 2). En réalité, dans la conclusion du théorème 1.111, la mesure  $\mu$  peut être construite  $\alpha$ -homogène pour un  $\alpha > 0$  (voir la condition (1.104) plus haut). On notera aussi que la conclusion du théorème 1.111 est fautive sans hypothèse de complétude, même pour des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  (voir [126]).

### 4.3 Un lemme de recouvrement de Vitali dans les espaces de nature homogène

On poursuit cette section en donnant un lemme de Vitali dans les espaces de nature homogène :

**Proposition 1.112.** [Lemme de Vitali dans les espaces de nature homogène] ([59, Theorem 1.6]) Soient  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène,  $A \subset X$  et  $\mathcal{F}$  une famille de boules fermées d'intérieur non vide. On suppose que, pour tout  $x \in A$ ,

$$\inf_{B_f(x,r) \in \mathcal{F}} r = 0. \tag{1.113}$$

Alors il existe une sous-famille au plus dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  telle que :

1. les boules de  $\mathcal{G}$  sont deux à deux disjointes,

2.  $\mu \left( A \setminus \bigcup_{B \in \mathcal{G}} B \right) = 0.$

*Démonstration.* On suppose d'abord  $A$  borné. On peut aussi supposer que les rayons des boules de  $\mathcal{F}$  sont bornés (sinon,  $A$ , qui est borné, est inclus dans l'une des boules de  $\mathcal{F}$ ). Le lemme 5r permet de trouver une sous-famille dénombrable  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  formée de boules deux à deux disjointes et  $A \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}} 5B$

(on rappelle que  $(X, d)$  est séparable, voir le lemme 1.101). On note que, comme  $A$  est borné et les rayons des boules de  $\mathcal{F}$  sont bornés, les boules de  $\mathcal{G}$  sont contenues dans une boule fixe. En notant  $\mathcal{G} = \{B_i; i \geq 1\}$  et en utilisant la remarque 1.105, on en déduit que

$$\sum_{i \geq 1} \mu(5B_i) \leq C \sum_{i \geq 1} \mu(B_i) = \mu \left( \bigcup_{i \geq 1} B_i \right) < +\infty,$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i > N} \mu(5B_i) = 0.$$

Il suffit donc, pour conclure, de montrer que

$$A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i \subset \bigcup_{i > N} 5B_i. \quad (1.114)$$

En effet, comme  $\mu(A) < +\infty$ , on aura alors

$$\mu \left( A \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_i \right) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \mu \left( A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i \right) = 0.$$

Montrons donc (1.114). Soit  $x \in A \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i$ . Comme  $\bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i$  est un fermé de  $X$  et  $x \notin \bigcup_{1 \leq i \leq N} B_i$ ,

il existe  $r_0 > 0$  tel que  $B_f(x, r) \cap B_i = \emptyset$  pour tout  $r \in ]0, r_0[$ . Par (1.113), il existe donc  $r > 0$  tel que  $B_f(x, r) \in \mathcal{F}$  et  $B_f(x, r) \cap B_i = \emptyset$  pour tout  $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$ . De plus, la famille  $\mathcal{G}$  est construite de sorte qu'il existe  $j \geq 1$  tel que  $B_j$  soit de rayon au moins  $\frac{r}{2}$  et  $B_f(x, r) \cap B_j \neq \emptyset$  (voir la remarque 1.87). On a donc  $j > N$  et  $B_f(x, r) \subset 5B_j$ , ce qui termine la preuve dans le cas où  $A$  est borné.

On traite ensuite le cas général comme dans la preuve de la proposition 1.95.  $\square$

**Remarque 1.115.** La conclusion du lemme de recouvrement de Besicovitch n'est pas satisfaite dans un espace métrique de nature homogène en général. Cette conclusion est fautive en particulier dans le groupe de Heisenberg ([78, 1.4]). L'inégalité isodiamétrique n'est pas non plus satisfaite dans le groupe de Heisenberg (au sens où les boules ne maximisent pas la mesure à diamètre fixé, [123]). Il est toutefois possible de donner une description de certains ensembles isodiamétriques ([88]).

#### 4.4 Théorème de plongement d'Assouad

On présente ici un théorème de plongement pour les espaces doublants. On précise d'abord ce qu'on entend par plongement :

**Définition 1.116.** Soient  $X, Y$  des espaces métriques.

1. Un plongement de  $X$  dans  $Y$  est une application  $f : X \rightarrow Y$  qui est un homéomorphisme de  $X$  sur  $f(X)$ .
2. Si  $f$  est un plongement de  $X$  dans  $Y$ , on dit que  $f$  est bilipschitzien si, et seulement si, il existe  $K \geq 1$  tel que, pour tous  $x, y \in X$ ,

$$\frac{1}{K}d(x, y) \leq d(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y).$$

Si  $K = 1$ ,  $f$  s'appelle un plongement isométrique.

**Théorème 1.117.** [Théorème de plongement d'Assouad] ([8]) Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Alors  $(X, d)$  est doublant si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe un espace euclidien dans lequel l'espace métrique  $(X, d^\varepsilon)$  possède un plongement bilipschitzien.

**Remarque 1.118.**

1. On vérifie que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ ,  $d^\varepsilon$  est une distance sur  $X$ .
2. On ne peut pas prendre  $\varepsilon = 1$  dans le théorème 1.117. Le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}$ , muni de la métrique décrite dans l'exemple 1.102, ne possède pas de plongement bilipschitzien dans un espace euclidien. En effet, d'après [113], toute application lipschitzienne de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{R}^n$  est presque partout différentiable et sa différentielle en presque tout point est un morphisme d'algèbres de l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{R}^n$  (voir la section 5 pour la définition de l'algèbre de

Lie). Si  $f$  est un plongement bilipschitzien de  $\mathbb{H}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , comme l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  n'est pas commutative alors que  $\mathbb{R}^n$  est commutatif, cela oblige  $Df(x)$  à être non injective pour presque tout  $x$ , ce qui est impossible puisque  $f$  est bilipschitzienne. Plus généralement, le groupe de Heisenberg ne possède aucun plongement bilipschitzien dans un espace de Banach possédant la propriété de Radon-Nikodym. On pourra aussi consulter [5, 106]. On reviendra sur ces questions au chapitre 2, voir le théorème 2.85.

D'autres exemples d'espaces doublants qui ne possèdent aucun plongement bilipschitzien dans un espace euclidien se trouvent dans [18, 26, 82, 131].

La preuve du théorème 1.117 utilise le produit tensoriel de deux espaces euclidiens, que nous présentons brièvement ici. Soient  $E_1, E_2$  deux espaces euclidiens. Si  $u_1 \in E_1$  et  $u_2 \in E_2$ , on définit  $u_1 \otimes u_2 : E_1 \times E_2 \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$(u_1 \otimes u_2)(x_1, x_2) := \langle u_1, x_1 \rangle \langle u_2, x_2 \rangle$$

pour tout  $(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2$ . Il s'agit d'une forme bilinéaire sur  $E_1 \times E_2$ . On note  $\mathcal{E}$  le sous-espace de l'espace des formes bilinéaires sur  $E_1 \times E_2$  engendré par les  $u_1 \otimes u_2$ . On définit une forme bilinéaire sur  $\mathcal{E}$  par

$$\langle u_1 \otimes u_2, v_1 \otimes v_2 \rangle := \langle u_1, v_1 \rangle \langle u_2, v_2 \rangle. \quad (1.119)$$

On vérifie qu'il existe bien une unique forme bilinéaire sur  $\mathcal{E}$  vérifiant (1.119), et que cette forme bilinéaire est en fait un produit scalaire sur  $\mathcal{E}$ . On appelle  $\mathcal{E}$  le produit tensoriel de  $E_1$  et  $E_2$  et on le note  $E_1 \otimes E_2$ . On vérifie enfin que, si  $(f_1, \dots, f_k)$  est une base orthonormée de  $E_1$  et  $(g_1, \dots, g_l)$  est une base orthonormée de  $E_2$ , alors la famille  $(f_i \otimes g_j)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq l}$  est une base orthonormée de  $E_1 \otimes E_2$ .

*Preuve du théorème 1.117 :* on suppose d'abord que, pour tout  $\varepsilon \in ]0, 1[$ , il existe un espace euclidien dans lequel l'espace métrique  $(X, d^\varepsilon)$  possède un plongement bilipschitzien. Soit  $f$  un plongement bilipschitzien de  $(X, d^{1/2})$  dans  $\mathbb{R}^N$  pour un entier  $N \geq 1$ . On note  $E = f(X) \subset \mathbb{R}^N$ . Il existe  $C > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in X$ ,  $cd^{1/2}(x, y) \leq |f(x) - f(y)| \leq Cd^{1/2}(x, y)$ . Soit  $B \subset X$  une boule de rayon  $r > 0$ . Alors  $f(B)$  est une partie de  $E$  de diamètre inférieur ou égal à  $2Cr^{1/2}$ , que l'on peut recouvrir par une famille de boules  $B_1, \dots, B_k$  de rayon  $\frac{\varepsilon}{2} (\frac{r}{2})^{1/2}$ , avec  $k \leq C'$ , où  $C' > 0$  ne dépend que de  $N$ . On a  $B \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} f^{-1}(B_i)$  et, pour tout  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$ ,  $\text{diam}(f^{-1}(B_i)) \leq \frac{r}{2}$ . Ainsi,  $(X, d)$  est

doublant.

On suppose maintenant  $(X, d)$  doublant. Soit  $N_0 \subset X$  un ensemble 1-séparé maximal (en utilisant le lemme 1.109, on vérifie que  $N_0$ , qui existe par le lemme de Zorn, est au plus dénombrable). Il existe un entier  $M \geq 1$  tel que, pour tout  $x \in X$ ,  $\sharp(N_0 \cap B(x, 12)) \leq M$ .

On construit d'abord une application  $\kappa : N_0 \rightarrow \{e_1, \dots, e_M\}$  (où  $e_1, \dots, e_M$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^M$ ) telle que

$$\kappa(x) \neq \kappa(y) \text{ si } d(x, y) < 12. \quad (1.120)$$

Pour cela, on note  $N_0 = \{a_i; i \geq 0\}$ . On choisit  $\kappa(a_0)$  arbitrairement. Si on a construit  $\kappa(a_0), \dots, \kappa(a_i)$  vérifiant (1.120), comme

$$\sharp\{a_1, \dots, a_i\} \cap B(a_{i+1}, 12) \leq M - 1$$

(en effet le membre de gauche est inclus dans  $(N_0 \cap B(a_{i+1}, 12)) \setminus \{a_{i+1}\}$ ), on peut donc choisir  $\kappa(a_{i+1})$  de sorte que (1.120) soit encore satisfaite.

On définit alors, pour tout  $x \in X$ ,

$$\varphi_0(x) := \sum_{i \geq 0} \max(2 - d(x, a_i), 0) \kappa(a_i) \in \mathbb{R}^M.$$

Cette fonction est bien définie. En effet, soit  $x \in X$ . Comme  $X$  est doublant et l'ensemble  $N_0$  est 1-séparé,  $B(x, 2) \cap N_0$  est un ensemble fini, ce qui montre que la somme définissant  $\varphi_0(x)$  n'a qu'un nombre fini de termes non nuls.

Si  $x, y \in X$  sont tels que  $4 < d(x, y) \leq 8$ , alors

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \geq 1.$$

De plus, pour tous  $x, y \in X$ ,

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq C \min(d(x, y), 1).$$

Pour vérifier ces propriétés, on pose  $\Delta_i(x) := \max(2 - d(x, a_i), 0)$  pour tout  $i \geq 0$  et tout  $x \in X$ . Pour tout  $x \in X$  et tout  $i \geq 0$ , soit  $B_x := \{i \geq 0; \Delta_i(x) \neq 0\}$ .

Soient  $x, y \in X$  tels que  $4 < d(x, y) \leq 8$ . Alors  $B_x \cap B_y = \emptyset$ , ce qui implique que  $\kappa(a_i) \neq \kappa(a_j)$  pour tous  $i, j \in B_x \cup B_y$  tels que  $i \neq j$ . On a donc

$$\begin{aligned} |\varphi_0(x) - \varphi_0(y)|^2 &= \left| \sum_{i \in B_x \cup B_y} (\Delta_i(x) - \Delta_i(y)) \kappa(a_i) \right|^2 \\ &= \sum_{i \in B_x \cup B_y} |\Delta_i(x) - \Delta_i(y)|^2 \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

Soient  $x, y \in X$  quelconques. Pour tout  $i \geq 0$ ,  $|\Delta_i(x) - \Delta_i(y)| \leq 2 \min(d(x, y), 1)$ . Comme  $\kappa$  est injective sur  $\{a_i; i \in B_x\}$  et sur  $\{a_i; i \in B_y\}$ , on a donc  $\sharp(B_x \cup B_y) \leq 2M$ . Ainsi,

$$|\varphi_0(x) - \varphi_0(y)| \leq \sum_{i \in B_x \cup B_y} |\Delta_i(x) - \Delta_i(y)| \leq C \min(d(x, y), 1).$$

Soit  $j \in \mathbb{Z}$ . En appliquant ce raisonnement à l'espace  $(X, 2^j d)$ , on obtient une fonction  $\varphi_j : X \rightarrow \mathbb{R}^M$  telle que, si  $x, y \in X$  sont tels que  $8 \times 2^{-j-1} < d(x, y) \leq 8 \times 2^{-j}$ , alors

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \geq 1.$$

De plus, pour tous  $x, y \in X$ ,

$$|\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \leq C \min(2^j d(x, y), 1).$$

On peut choisir les  $\varphi_j$  de façon à ce qu'il existe  $x_0 \in X$  tel que  $\varphi_j(x_0) = 0$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ .

Soit maintenant  $N \geq 1$  (qu'on fixera plus tard). On considère une famille de vecteurs  $(\hat{e}_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^{2N}$  telle que  $\widehat{e_{j+2N}} = \hat{e}_j$  pour tout  $j \in \mathbb{Z}$  et  $(\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{2N})$  est une base orthonormale de  $\mathbb{R}^{2N}$ . On définit, pour tout  $x \in X$ ,

$$\varphi(x) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\varepsilon j} \varphi_j(x) \otimes \hat{e}_j \in \mathbb{R}^M \otimes \mathbb{R}^{2N}.$$

La fonction  $\varphi$  est bien définie car

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\varepsilon j} |\varphi_j(x)| = \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\varepsilon j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(x_0)| \leq C \sum_{j \in \mathbb{Z}} 2^{-\varepsilon j} 2^j \min(d(x, x_0), 1) < +\infty.$$

Soient  $x, y \in X$  et  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $8 \times 2^{-k-1} < d(x, y) \leq 8 \times 2^{-k}$ . Alors

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \varphi(y)| &\leq \sum_{j \geq k+1} 2^{-\varepsilon j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| + \sum_{j \leq k} 2^{-\varepsilon j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \\ &\leq C \left( 2^{-\varepsilon k} + 2^{k(1-\varepsilon)} d(x, y) \right) \\ &\leq C d(x, y)^\varepsilon. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
|\varphi(x) - \varphi(y)| &\geq \left| \sum_{-N+k < j \leq N+k} 2^{-\varepsilon j} (\varphi_j(x) - \varphi_j(y)) \otimes \widehat{e}_j \right| \\
&- \sum_{j > N+k} 2^{-\varepsilon j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \\
&- \sum_{j \leq -N+k} 2^{-\varepsilon j} |\varphi_j(x) - \varphi_j(y)| \\
&\geq 2^{-\varepsilon k} |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| \\
&\quad - c 2^{-\varepsilon(N+k)} - c 2^{-\varepsilon(-N+k)} 2^{-N+k} d(x, y) \\
&\geq 2^{-\varepsilon k} |\varphi_k(x) - \varphi_k(y)| - \frac{1}{2} 2^{-\varepsilon k} \\
&\geq c 2^{-\varepsilon k} \geq c d(x, y)^\varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. On a utilisé le fait que les vecteurs  $(\widehat{e}_j)_{-N+k < j \leq N+k}$  sont deux à deux orthogonaux et de norme 1 dans  $\mathbb{R}^{2N}$ , de sorte que les vecteurs  $((\varphi_j(x) - \varphi_j(y)) \otimes \widehat{e}_j)_{-N+k < j \leq N+k}$  sont deux à deux orthogonaux dans  $\mathbb{R}^M \otimes \mathbb{R}^{2N}$ .  $\square$

**Remarque 1.121.** Il est possible de montrer ([37]) que, si  $(X, d)$  est doublant, alors il existe  $N \geq 1$  tel que, pour tout  $\varepsilon \in (\frac{1}{2}, 1)$ , on peut trouver un plongement bilipschitzien de  $(X, d^\varepsilon)$  dans  $\mathbb{R}^N$ . La différence avec le théorème 1.117 est que  $N$  ne dépend pas de  $\varepsilon$ , mais cela n'est possible qu'en restreignant l'intervalle de  $\varepsilon$ .

Pour terminer cette section, on indique que les espaces de nature homogène jouent un rôle crucial vis-à-vis des inégalités de Poincaré, voir le chapitre 4.

## 5 Compléments sur les groupes de Lie

Le groupe de Heisenberg est un exemple de groupe de Lie non commutatif, et appartient à la classe des groupes de Carnot ([56, Section 11]). On donne ici quelques définitions et énoncés à ce sujet, souvent sans preuve. Cette présentation s'inspire de [15, Chapter 1]. On pourra aussi consulter [24, Chapter 2], [137, Chapter 12] et [58].

### 5.1 Champs de vecteurs

**Définition 1.122.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert.

1. Un champ de vecteurs sur  $\Omega$  est un opérateur différentiel de la forme

$$X = \sum_{1 \leq j \leq N} a_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (1.123)$$

où  $a_1, \dots, a_N : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions.

2. Pour toute fonction  $f$  différentiable dans  $\Omega$  et tout  $x \in \Omega$ ,

$$Xf(x) = \sum_{j=1}^N a_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}(x). \quad (1.124)$$

Si les  $a_j$  sont  $C^\infty$ , on dira que  $X$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$ . Dans ce cas,  $Xf$  est  $C^\infty$  si  $f$  est  $C^\infty$  et  $f \mapsto Xf$  est linéaire de  $C^\infty(\Omega)$  dans lui-même. On notera  $T(\mathbb{R}^n)$  l'espace de tous les champs de vecteurs  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$ .

3. Si  $X$  et  $Y$  sont des champs de vecteurs  $C^\infty$ , on notera  $XY$  le produit qui consiste à composer  $X$  et  $Y$  comme opérateurs différentiels.

4. Si  $X$  est donné par (1.123), on notera aussi  $XI$  l'application de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  qui, à  $x \in \mathbb{R}^n$ , associe le vecteur  $(a_1(x), \dots, a_n(x))$ . On a donc  $XI(x) = (a_1(x), \dots, a_n(x))$ .

On définit maintenant les courbes intégrales associées à un champ de vecteurs.

**Définition 1.125.** Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une application  $\gamma$  de classe  $C^1$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}^n$  est appelée courbe intégrale de  $X$  si, et seulement si, pour tout  $t \in I$ ,

$$\gamma'(t) = XI(\gamma(t)).$$

Si  $X$  est un champ de vecteurs  $C^\infty$  et  $x \in \mathbb{R}^n$ , le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \gamma'(t) = XI(\gamma(t)) & \text{pour tout } t \\ \gamma(0) = x \end{cases}$$

possède une unique solution maximale, notée  $\gamma_X(\cdot, x)$  et définie sur un intervalle  $I(X, x)$ . Cette solution est de classe  $C^\infty$  sur  $I(X, x)$ .

On peut vérifier que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\gamma^{(k)}(0) = X^k I(x).$$

En appliquant la formule de Taylor avec reste intégral, on a donc, pour tout  $j \geq 1$ , tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \in I(X, x)$ ,

$$\gamma(t, x) = x + \sum_{k=1}^j \frac{t^k}{k!} X^k I(x) + \frac{1}{j!} \int_0^t (t-s)^j X^{j+1} I(\gamma(s, x)) ds.$$

On est conduit à définir l'application exponentielle d'un champ de vecteurs de la façon suivante :

**Définition 1.126.** Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$ . Avec les notations précédentes, on pose

$$\exp(tX)(x) := \gamma(t, x),$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \in I(X, x)$ .

On vérifie que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $t \in I(-X, x)$ ,  $-t \in I(X, x)$  et

$$\exp(-tX)(\exp(tX)(x)) = x.$$

On en déduit que  $x \mapsto \exp(tX)$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^n$  sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.127.** Soient  $X, Y$  deux champs de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On définit le crochet de Lie de  $X, Y$ , noté  $[X, Y]$ , par

$$[X, Y] := XY - YX.$$

On notera que  $[X, Y]$  est encore un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$  (en effet, le calcul de  $[X, Y]f$  montre que les termes faisant intervenir des dérivées de  $f$  d'ordre 2 s'annulent).

## 5.2 Algèbres de Lie

**Définition 1.128.** On appelle algèbre de Lie un espace vectoriel  $V$  muni d'une application bilinéaire  $V \times V \rightarrow V$ , appelé crochet de Lie, notée  $(X, Y) \rightarrow [X, Y]$  et vérifiant :

1. pour tout  $X \in V$ ,  $[X, X] = 0$ ,
2. pour tous  $X, Y, Z \in V$ ,  $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ .

L'espace  $T(\mathbb{R}^n)$ , muni du crochet de Lie, est une algèbre de Lie. On appelle sous-algèbre de Lie de  $T(\mathbb{R}^n)$  tout sous-espace vectoriel  $\mathcal{A}$  de  $T(\mathbb{R}^n)$  tel que, pour tous  $X, Y \in \mathcal{A}$ ,  $[X, Y] \in \mathcal{A}$ .

**Définition 1.129.** Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$ , on appelle algèbre de Lie engendrée par  $B$  l'intersection de toutes les sous-algèbres de Lie de  $T(\mathbb{R}^n)$  contenant  $B$ . C'est, au sens de l'inclusion, la plus petite sous-algèbre de Lie de  $G$  contenant  $B$ , noté  $\text{Lie}(B)$ . On définit, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , le rang de  $\text{Lie}(B)$  en  $x$  comme la dimension du sous-espace de  $\mathbb{R}^n$  engendré par les  $ZI(x)$  pour  $Z \in \text{Lie}(B)$ .



### 5.3 Groupes de Lie

On définit maintenant les groupes de Lie dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.130.** Un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  est la donnée d'une loi de composition, notée  $(x, y) \mapsto x \cdot y$ , de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ , telle que :

1.  $\mathbb{R}^n$ , muni de  $\cdot$ , est un groupe,
2. l'application  $(x, y) \mapsto x \cdot y$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est  $C^\infty$ ,
3. l'application  $x \mapsto x^{-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  est  $C^\infty$ .

On notera  $G$  le groupe de Lie  $\mathbb{R}^n$  muni de cette loi.

On supposera toujours dans la suite que l'élément neutre de  $(G, \cdot)$  est 0.

**Définition 1.131.** Soit  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$ .

1. Soit  $a \in G$ . La translation à gauche de vecteur  $a$  est l'application  $\tau_a(x) := a \cdot x$  de  $G$  dans  $G$ . La translation à droite de vecteur  $a$  est l'application  $\tau'_a(x) := x \cdot a$  de  $G$  dans  $G$ .
2. Soit  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $X$  est invariant à gauche sur  $G$  si, et seulement si, pour toute  $f \in C^\infty$ ,

$$X(f \circ \tau_a) = (Xf) \circ \tau_a.$$

On notera  $\mathcal{G}$  l'ensemble des champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$ . On vérifie que  $\mathcal{G}$  est une sous-algèbre de Lie de  $T(\mathbb{R}^n)$ , appelée algèbre de Lie de  $G$ .

On peut caractériser les champs de vecteurs invariants à gauche sur  $G$  de la façon suivante :

**Proposition 1.132.** Soient  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $X$  est invariant à gauche sur  $G$  si, et seulement si, pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(XI)(a \cdot x) = J\tau_a(x) \cdot (XI)(x)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . On a noté  $J\tau_a(x)$  la matrice jacobienne de  $\tau_a$  au point  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $(XI)(x)$  désigne le vecteur colonne des  $a_j(x)$ , si  $X$  est donné par (1.123).

Une conséquence importante de cette proposition est que, si  $X$  est invariant à gauche sur  $G$ , alors pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(XI)(x) = J\tau_x(0) \cdot (XI)(0).$$

Ainsi, un champ de vecteurs invariant à gauche sur  $G$  est entièrement déterminé par sa valeur en 0. Réciproquement, si  $\eta \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur, alors le champ de vecteurs

$$XI(x) := J\tau_x(0) \cdot \eta$$

est invariant à gauche sur  $G$ . On en déduit :

**Proposition 1.133.** Soient  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $X$  un champ de vecteurs  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $X$  est invariant à gauche sur  $G$  si, et seulement si, pour tout  $x \in G$ ,

$$(XI)(x) = J\tau_x(0) \cdot (XI)(0).$$

Si  $G$  est un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$ , l'algèbre de Lie de  $G$  est isomorphe à  $\mathbb{R}^n$  (isomorphisme d'espaces vectoriels). Plus précisément :

**Proposition 1.134.** Soient  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . Pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^n$ , on définit le champ de vecteurs  $J(\eta)$  par

$$J(\eta)I(x) := J\tau_x(0) \cdot \eta$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

1. pour tout  $\eta \in \mathbb{R}^n$ ,  $J(\eta) \in \mathcal{G}$ ,
2. l'application  $J : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{G}$  est un isomorphisme d'espaces vectoriels. En particulier,  $\mathcal{G}$  est de dimension  $n$ .

Revenons au cas du groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}$ . On considère les champs

$$X := \frac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2 \frac{\partial}{\partial t} \text{ et } Y := \frac{\partial}{\partial x_2} - 2x_1 \frac{\partial}{\partial t},$$

dont on vérifie qu'ils sont invariants à gauche. Si  $T := [X, Y]$ , on vérifie que  $T = -4 \frac{\partial}{\partial t}$ . D'autres choix pour  $X$  et  $Y$  sont possibles et se trouvent dans les références citées plus haut.

On vérifie que l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  est engendrée (en tant qu'espace vectoriel) par  $X, Y$  et  $T$ . En effet,  $X, Y$  et  $T$  sont linéairement indépendants, et la proposition 1.134 montre que l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  est de dimension 3.

On précise le lien entre rang d'un système de champs de vecteurs et rang d'un système de vecteurs :

**Proposition 1.135.** Soient  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{G}$  l'algèbre de Lie de  $G$ . Soient  $X_1, \dots, X_k \in \mathcal{G}$ . Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

1.  $X_1, \dots, X_k$  sont libres dans  $\mathcal{G}$ ,
2.  $X_1 I(0), \dots, X_k I(0)$  sont libres dans  $\mathbb{R}^n$ ,
3. il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $X_1 I(x), \dots, X_k I(x)$  sont libres dans  $\mathbb{R}^n$ ,
4. pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $X_1 I(x), \dots, X_k I(x)$  sont libres dans  $\mathbb{R}^n$ .

On notera que la conclusion de la proposition 1.135 est fautive pour des champs de vecteurs non invariants à gauche. Prenons

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad X_2 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$$

qui sont des champs de vecteurs dans  $\mathbb{R}^2$ . Les champs de vecteurs  $X_1$  et  $X_2$  sont libres, mais les vecteurs  $X_1 I(0)$  et  $X_2 I(0)$  ne le sont pas dans  $\mathbb{R}^2$ , ce qui montre qu'on ne peut pas munir  $\mathbb{R}^2$  d'une loi de groupe de Lie pour laquelle  $X_1$  et  $X_2$  seraient invariants à gauche.

## 5.4 Application exponentielle

On peut maintenant définir l'application exponentielle entre un groupe de Lie et son algèbre de Lie :

**Définition 1.136.** Soient  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie. On définit l'application exponentielle de  $G$  comme l'application  $\text{Exp} : \mathcal{G} \rightarrow G$  donnée par

$$\text{Exp}(X) := \exp(1X)(0).$$

Autrement dit, on considère  $\gamma$  solution de

$$\begin{cases} \gamma'(t) = X I(\gamma(t)), \\ \gamma(0) = 0, \end{cases}$$

et on pose  $\gamma(1) := \text{Exp}(X)$ .

On montre que, pour tout  $X \in \mathcal{G}$ ,

$$\text{Exp}(X) \cdot \text{Exp}(-X) = 0.$$

En d'autres termes,

$$\text{Exp}(-X) = (\text{Exp}(X))^{-1}.$$

Reprenons le cas du groupe  $\mathbb{H}$ . On a vu qu'une base de l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  est  $X, Y, T$ . Un calcul sans difficulté montre que, si  $Z$  est un champ de vecteurs sur  $\mathbb{H}$  invariant à gauche,  $Z = t_1 X + t_2 Y + t_3 T$  pour un unique  $(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3$  et

$$\text{Exp}(Z) = (t_1, t_2, -4t_3).$$

On remarque que  $\text{Exp}$  est une bijection de l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  sur  $\mathbb{R}^3$ .

## 5.5 Distance de Carnot

On introduit maintenant la distance de Carnot associée à des champs de vecteurs. On aura besoin pour cela de la notion de fonction absolument continue :

**Définition 1.137.** Soient  $n \geq 1$ ,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On dit que  $f$  est absolument continue sur  $I$  si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $N \geq 1$  et tous intervalles deux à deux disjoints  $]a_k, b_k[ \subset I$  ( $1 \leq k \leq N$ ) tels que  $\sum_{i=1}^N |b_k - a_k| < \delta$ , on ait

$$\sum_{i=1}^N |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Une fonction absolument continue est clairement uniformément continue. On montrera dans la section 7.3 que toute fonction absolument continue  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  est dérivable presque partout, et que, si  $f'$  est intégrable sur tout segment inclus dans  $I$ , alors

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$$

pour tous  $a < b \in I$ .

Pour la suite, on se donne des champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_k$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$|XI(x)| := \left( \sum_{i=1}^k |X_i I(x)|^2 \right)^{1/2}.$$

**Définition 1.138.** Soient  $X_1, \dots, X_k$  des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . Une courbe absolument continue  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (avec  $T > 0$ ) est dite admissible si, et seulement si, il existe des fonctions mesurables  $c_1, \dots, c_k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, pour presque tout  $t \in [a, b]$ ,  $\sum_{i=1}^k c_i(t)^2 \leq 1$  et

$$\gamma'(t) = \sum_{j=1}^k c_j(t) X_j I(\gamma(t)).$$

On remarque que, par Cauchy-Schwarz, si  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe admissible, alors

$$|\gamma'(t)| \leq |XI(\gamma(t))| \text{ pour presque tout } t \in [0, T]. \quad (1.139)$$

On en déduit qu'une courbe admissible est lipschitzienne. En effet, si  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe admissible, alors, pour tous  $a < b \in [0, T]$ ,

$$|\gamma(b) - \gamma(a)| \leq \int_a^b |\gamma'(t)| dt \leq \max_{t \in [0, T]} |XI(\gamma(t))| |b - a|. \quad (1.140)$$

On peut à présent définir la distance de Carnot associée à des champs de vecteurs.

**Définition 1.141.** Soient  $X_1, \dots, X_k$  des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , on définit  $d(x, y)$  comme la borne inférieure des  $T > 0$  tels qu'il existe une courbe admissible  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(T) = y$ . Si une telle courbe n'existe pas, on pose  $d(x, y) = +\infty$ . La fonction  $d$  s'appelle la distance de Carnot associée à  $X_1, \dots, X_k$ .

Il peut arriver que  $d(x, y) = +\infty$ . Par exemple, si on prend seulement  $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}$  dans  $\mathbb{R}^2$ , alors  $d(x, y) = |x - y|$  si  $y - x \in \mathbb{R}(1, 0)$  et  $d(x, y) = +\infty$  sinon. Si on prend  $X_1$  et  $X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}$ , alors  $d$  est la distance euclidienne usuelle.

**Proposition 1.142.** Avec les notations précédentes, on suppose que  $d(x, y) < +\infty$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Alors :

1.  $d$  est une distance sur  $\mathbb{R}^n$ ,
2. pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , il existe  $c_K > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in K$ ,

$$|x - y| \leq c_K d(x, y).$$

Pour prouver cet énoncé, on commence par montrer le lemme suivant :

**Lemme 1.143.** Soient  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . On pose  $M := \sup_{y \in B(x, R)} |XI(y)|$ . Si  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe admissible telle que  $\gamma(0) = x$  avec  $T < \frac{R}{M}$ , alors  $\gamma([0, T]) \subset B(x, R)$ . Ici,  $B(x, R)$  désigne la boule euclidienne (et non pour la métrique  $d$ ) de centre  $x$  et de rayon  $R$ .

*Preuve du lemme 1.143 :* on suppose que la conclusion n'est pas satisfaite. Soit alors  $t_0$  le plus petit  $t \in ]0, T]$  tel que  $|x - \gamma(t_0)| = R$ . Alors, en utilisant (1.139), on obtient

$$R = |x - \gamma(t_0)| = \left| \int_0^{t_0} \gamma'(t) dt \right| \leq \int_0^{t_0} |XI(\gamma(t))| dt \leq MT,$$

contrairement à l'hypothèse. □

*Preuve de la proposition 1.142 :* on commence par le point 2. Soient  $x, y \in K$  et  $\gamma : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe admissible telle que  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(T) = y$ . Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $K^\varepsilon := \{z \in \mathbb{R}^n; d(z, K) < \varepsilon\}$  et  $M := \sup_{z \in K^\varepsilon} |XI(z)|$ . Soit  $R := \min(|x - y|, \varepsilon)$ , de sorte que  $B(x, R) \subset K^\varepsilon$  et  $y \notin B(x, R)$ . Le lemme 1.143 montre alors que

$$T \geq \frac{R}{M} \geq c \frac{|x - y|}{M},$$

avec  $c := \min\left(1, \frac{\varepsilon}{\text{diam}(K)}\right)$ . Cela termine la preuve du point 2. Le point 1 en résulte facilement. □

## 5.6 Groupes de Carnot

On décrit une classe de groupes de Lie, appelés groupes de Carnot, pour lesquels on peut définir une distance de Carnot qui est une "vraie" distance, au sens où  $d(x, y) < +\infty$  pour tous  $x, y$ .

**Définition 1.144.**

1. Soit  $V$  une algèbre de Lie. On pose  $V_{(1)} := V$  et  $V_{(j+1)} := [V, V_{(j)}]$  pour tout  $j \geq 1$ , où  $[V, V_{(j)}]$  désigne le sous-espace de  $V$  engendré par tous les  $[v, v_j]$  avec  $v \in V$  et  $v_j \in V_j$ . Si  $m \geq 1$ , on dira que  $V$  est nilpotente d'ordre  $m$  si, et seulement si,  $V_{(m)} \neq \{0\}$  et  $V_{(m+1)} = \{0\}$ .
2. Soit  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $G$  est nilpotent si, et seulement si, l'algèbre de Lie de  $G$  est nilpotente.
3. Soit  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $G$  est un groupe de Carnot (ou un groupe stratifié) si, et seulement si,  $\mathcal{G}$  possède une stratification, c'est-à-dire que  $\mathcal{G} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ , où chaque  $V_i$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{G}$ ,  $V_{i+1} = [V_1, V_i]$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$  et  $[V_1, V_m] = \{0\}$ .

On vérifie qu'un groupe de Carnot est nilpotent, et que, si  $m$  est comme dans le point 3 avec  $V_m \neq \{0\}$ , alors  $\mathcal{G}$  est nilpotente d'ordre  $m$ . Si  $(X_1, \dots, X_k)$  est une base de  $V_1$ , alors l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  est engendrée par  $X_1, \dots, X_k$ . Le groupe de Heisenberg  $\mathbb{H}$  est un groupe de Carnot, dont l'algèbre de Lie est nilpotente d'ordre 2. Ici,  $V_1$  est engendré par  $X$  et  $Y$ , et  $V_2$  par  $T = [X, Y]$ .

Un fait important est que, pour un groupe de Carnot,  $\text{Exp}$  est un difféomorphisme *global* :

**Théorème 1.145.** Soient  $G$  un groupe de Carnot et  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie. L'application  $\text{Exp}$  est un  $C^\infty$  difféomorphisme de  $\mathcal{G}$  sur  $G$ , dont la réciproque est notée  $\text{Log}$ .

Ce théorème permet notamment de définir des dilatations sur un groupe de Carnot.

**Définition 1.146.** Soient  $G$  un groupe de Carnot et  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie, décomposée comme dans la définition 1.144.

1. Pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ , tout  $X \in V_i$  et tout  $r > 0$ , on définit la dilatation  $\delta_r$  par

$$\delta_r(X_i) := r^i X_i.$$

2. On définit ainsi une dilatation linéaire  $\delta_r : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ , qui est un automorphisme.
3. Si  $x \in G$ , on écrit  $x = \text{Exp} X$  pour un unique  $X \in \mathcal{G}$ , et on pose  $\delta_r(x) = \text{Log}(\delta_r(X))$ .

Un autre fait important est que, sur les groupes de Carnot, la distance de Carnot est finie pour tout couple de points :

**Théorème 1.147.** Soit  $G$  un groupe de Carnot, dont l'algèbre de Lie  $\mathcal{G}$  possède la stratification  $\mathcal{G} = V_1 \oplus \dots \oplus V_m$ , avec  $V_{i+1} = [V_1, V_i]$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m-1 \rrbracket$  et  $[V_1, V_m] = \{0\}$ . Soit  $(X_1, \dots, X_k)$  une base de  $V_1$ . Alors, si  $d$  est la distance de Carnot sur  $G$  associée aux champs  $X_1, \dots, X_k$  :

1.  $d(x, y) < +\infty$  pour tous  $x, y \in G$ ,
2.  $d$  est invariante à gauche, ce qui signifie que, pour tous  $a, x, y \in G$ ,  $d(x, y) = d(a \cdot x, a \cdot y)$ ,
3. pour tous  $x, y \in G$ ,

$$d(x, y) = d(y^{-1} \cdot x, 0)$$

et

$$d(x^{-1}, 0) = d(x, 0),$$

4. pour tous  $x, y \in G$  et tout  $r > 0$ ,  $d(\delta_r x, \delta_r y) = r d(x, y)$ .

On peut aussi considérer des “normes” sur un groupe de Carnot.

**Définition 1.148.** Soit  $G$  un groupe de Carnot. On appelle norme sur  $G$  toute application  $x \mapsto \|x\|$  de  $G$  dans  $[0, +\infty[$  telle que :

1.  $\|x\| = \|x^{-1}\|$  pour tout  $x \in G$ ,
2.  $\|\delta_r x\| = r \|x\|$  pour tout  $x \in G$  et tout  $r > 0$ ,
3.  $\|x\| = 0$  si, et seulement si,  $x = 0$ .

Par exemple,  $\|x\| := d(x, 0)$  est une norme, si  $d$  est la distance de Carnot considérée plus haut. On résume ici les principales propriétés des normes sur  $G$  (voir [50, Chapter 1]) :

**Proposition 1.149.** Soient  $G$  un groupe de Carnot,  $\|\cdot\|$  une norme sur  $G$  et  $|\cdot|$  la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ .

1. Il existe  $0 < c < C$  tels que, pour tout  $x \in G$  avec  $\|x\| \leq 1$ , on ait

$$c|x| \leq \|x\| \leq C|x|^{1/m}$$

où  $m$  est comme dans la définition 1.144.

2. Si  $\rho(x, y) = \|x^{-1} \cdot y\|$ ,  $\rho$  est une quasi-distance (voir la remarque 1.99).
3. Pour tout  $x \in G$  et tout  $r > 0$ ,  $B(x, r)$  est l'image de  $B(0, r)$  par la translation  $\tau_x$ . De plus,  $B(0, r) = \delta_r(B(0, 1))$ .
4. Pour tout  $E \subset G$  et tout  $a \in G$ ,  $\mathcal{L}^n(\tau_a(E)) = \mathcal{L}^n(\tau'_a(E)) = \mathcal{L}^n(E)$ , où  $\tau_a$  (resp.  $\tau'_a$ ) est la translation à gauche (resp. à droite) de vecteur  $a$  (voir la définition 1.131).
5. On définit  $Q := \sum_{j=1}^m j \dim V_j$ . L'entier  $Q$  s'appelle la dimension homogène de  $G$ . Pour tout  $E \subset G$ ,  $\mathcal{L}^n(\delta_r(E)) = r^Q \mathcal{L}^n(E)$  pour tout  $r > 0$ . En particulier,  $|B(x, r)| = Cr^Q$ .

6. Si  $\|\cdot\|'$  est une autre norme sur  $G$ , alors il existe  $0 < c < C$  tels que, pour tout  $x \in G$ ,

$$c\|x\| \leq \|x\|' \leq C\|x\|.$$

Voici un autre exemple de norme sur  $G$  : si  $x \in G$  et  $x = \text{Exp}(X)$  avec  $X \in \mathcal{G}$ , on décompose  $X = \sum_{j=1}^m X_j$  et on pose

$$\|x\| := \sum_{j=1}^m |X_j I(0)|_j^{1/j},$$

où  $|\cdot|_j$  est la norme euclidienne sur  $\mathbb{R}^{\dim V_j}$ .

## 5.7 Mesure de Haar

Pour les résultats présentés dans ce paragraphe, on pourra consulter [49, Chapter 2]. On donne d'abord la définition d'une mesure de Haar dans un groupe de Lie :

**Définition 1.150.** Soit  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$ . On appelle mesure de Haar à gauche sur  $G$  toute mesure de Radon  $\mu$  sur  $G$ , non identiquement nulle et invariante par translation à gauche, c'est-à-dire telle que, pour tout borélien  $A \subset G$  et tout  $a \in G$ ,

$$\mu(\tau_a(B)) = \mu(B).$$

On a le résultat d'unicité suivant pour les mesures de Haar :

**Proposition 1.151.** Soient  $G$  un groupe de Lie sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\mu, \nu$  des mesures de Haar à gauche sur  $G$ . Alors il existe  $\lambda > 0$  tel que  $\nu = \lambda\mu$ .

On peut effectivement construire des mesures de Haar à gauche sur les groupes de Carnot (et ces mesures sont aussi invariantes par translation à droite !). Soient  $G$  un groupe de Carnot et  $\mathcal{G}$  son algèbre de Lie. La mesure de Haar  $m$  sur  $G$  est la mesure image, par l'application exponentielle, de la mesure de Lebesgue sur  $\mathcal{G}$  ([24, p.16]). Dans le cas du groupe de Heisenberg, la mesure de Haar coïncide avec la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^3$  ([24, p.14]). On peut montrer ceci ([24, p.22]) :

**Proposition 1.152.** 1. la mesure  $m$  est Ahlfors-régulières d'exposant  $Q$ , la dimension homogène de  $G$ ,

2. la mesure  $m$  est  $Q$ -homogènes vis-à-vis des dilatations, au sens où, pour tout  $A \subset G$  et tout  $\lambda > 0$ ,

$$\mathcal{H}^Q(\delta_\lambda(A)) = \lambda^Q \mathcal{H}^Q(A) \text{ et } \mathcal{S}^Q(\delta_\lambda(A)) = \lambda^Q \mathcal{S}^Q(A).$$

## 6 Fonction maximale de Hardy Littlewood

Soient  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  et  $\nu$  une mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$M_\mu \nu(x) := \sup_{r>0} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))},$$

avec la convention  $\frac{0}{0} = 0$  et  $\frac{u}{0} = +\infty$  si  $u \in ]0, +\infty]$ . La fonction  $M_\mu \nu$  est appelée fonction maximale centrée (de Hardy-Littlewood).

**Lemme 1.153.** La fonction  $M_\mu \nu$  est borélienne.

*Démonstration.* On commence par vérifier que, pour tout  $r > 0$ , la fonction  $x \mapsto \nu(B(x, r))$  est semicontinue inférieurement, ce qui signifie que, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n; \nu(B(x, r)) > \lambda\}$  est un ouvert. En effet, si  $\nu(B(x, r)) > \lambda$  et si  $(r_k)_{k \geq 1}$  est une suite strictement croissante de rayons qui tend vers  $r$ , alors  $\nu(B(x, r)) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \nu(B(x, r_k))$ , ce qui fait qu'il existe  $k \geq 1$  tel que  $\nu(B(x, r_k)) > \lambda$ . Alors, pour tout  $y \in B(x, r - r_k)$ ,  $\nu(B(y, r)) \geq \nu(B(x, r_k)) > \lambda$ . La même conclusion vaut pour  $x \mapsto \mu(B(x, r))$ .

On vérifie maintenant que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$M_\mu \nu(x) = \sup_{r > 0, r \in \mathbb{Q}} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}.$$

Il suffit de vérifier que  $M_\mu \nu(x) \leq \sup_{r > 0, r \in \mathbb{Q}} \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}$ . Soient  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$  et  $(r_k)_{k \geq 1}$  une suite strictement croissante de rationnels qui tend vers  $r$ . Si  $\mu(B(x, r)) > 0$ , on a clairement

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\nu(B(x, r_k))}{\mu(B(x, r_k))} = \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}. \quad (1.154)$$

Si  $\mu(B(x, r)) = 0$ , on a aussi  $\mu(B(x, r_k)) = 0$  pour tout  $k$ . Si  $\nu(B(x, r)) > 0$ , on a  $\nu(B(x, r_k)) > 0$  pour  $k$  assez grand, de sorte que (1.154) est satisfaite (les deux membres valant  $+\infty$ ). Si  $\nu(B(x, r)) = 0$ , on a  $\nu(B(x, r_k)) = 0$  pour tout  $k$ , de sorte que (1.154) est encore satisfaite (les deux membres valant 0).

Ainsi,  $\frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))} \leq \sup_{s > 0, s \in \mathbb{Q}} \frac{\nu(B(x, s))}{\mu(B(x, s))}$ , ce qui termine la vérification.

Comme, pour tout  $r > 0$ , la fonction  $x \mapsto \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}$  est borélienne (comme quotient de fonctions boréliennes),  $x \mapsto M_\mu \nu(x)$  est borélienne comme borne supérieure d'une famille dénombrable de fonctions boréliennes.  $\square$

Dans la suite, on va s'intéresser aux propriétés de continuité de  $M_\mu \nu$  dans des espaces  $L^p$ . On commence par introduire l'espace  $L_w^1(\mu)$  :

**Définition 1.155.** On appelle espace de Marcinkiewicz, et on note  $L_w^1(\mu)$ , l'espace vectoriel des fonctions  $\mu$ -mesurables  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  pour lesquelles il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda}$$

pour tout  $\lambda > 0$ . Etant donné  $f \in L_w^1(\mu)$ , on note

$$\|f\|_{L_w^1(\mu)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \mu(\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}).$$

On notera que  $L_w^1(\mu)$  est un espace vectoriel, qui contient  $L^1(\mu)$ . L'inclusion est stricte en général (exercice 1.236 plus loin).

L'application  $f \mapsto \|f\|_{L_w^1(\mu)}$  n'est pas une norme. On a par contre

$$\|f + g\|_{L_w^1(\mu)} \leq 2 \left( \|f\|_{L_w^1(\mu)} + \|g\|_{L_w^1(\mu)} \right).$$

**Lemme 1.156.** On suppose  $\nu(\mathbb{R}^n) < +\infty$ . Alors  $M_\mu \nu \in L_w^1(\mu)$  et

$$\|M_\mu \nu\|_{L_w^1(\mu)} \leq P(n) \nu(\mathbb{R}^n),$$

où  $P(n)$  est donné par la proposition 1.90.

*Démonstration.* Soient  $\lambda > 0$  et  $O := \{x \in \mathbb{R}^n; M_\mu \nu(x) > \lambda\}$ . Pour tout  $x \in O$ , il existe  $r_x > 0$  tel que  $\nu(B(x, r_x)) > \lambda \mu(B(x, r_x))$ . Soit  $R > 0$ . Les boules  $B(x, r_x)$  recouvrent  $O \cap B(0, R)$ , qui est borné. On applique le lemme de Besicovitch (proposition 1.90), qui donne une famille au plus dénombrable de points  $x_i \in O$  tels que  $O \cap B(0, R) \subset \bigcup_{i \geq 1} B(x_i, r_{x_i})$  et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , le cardinal de l'ensemble des  $i \geq 1$  tels que  $x \in B(x_i, r_{x_i})$  est inférieur ou égal à  $P(n)$ . Alors

$$\begin{aligned} \mu(O \cap B(0, R)) &\leq \sum_{i \geq 1} \mu(B(x_i, r_{x_i})) \\ &< \frac{1}{\lambda} \sum_{i \geq 1} \nu(B(x_i, r_{x_i})) \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_{i \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B(x_i, r_{x_i})}(x) d\nu(x) \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i \geq 1} \chi_{B(x_i, r_{x_i})}(x) d\nu(x) \\ &\leq \frac{P(n)}{\lambda} \nu(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout  $R > 0$ , on obtient la conclusion voulue.  $\square$

Un cas particulier important est celui où il existe  $f \in L^1_{loc}(\mu)$  telle que  $d\nu = |f| d\mu$ . Dans ce cas, on note  $M_\mu \nu = M_\mu f$  et on a donc

$$M_\mu f(x) := \sup_{r>0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y)| d\mu(y)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Un corollaire immédiat du lemme 1.156 est :

**Corollaire 1.157.** Si  $f \in L^1(\mu)$ , alors  $M_\mu f \in L^1_w(\mu)$  et

$$\|M_\mu f\|_{L^1_w(\mu)} \leq P(n) \|f\|_{L^1(\mu)}.$$

On donne maintenant une version  $L^p$  du corollaire 1.157 :

**Théorème 1.158.** Soit  $p \in ]1, +\infty]$ . Il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $n$  et  $p$  avec la propriété suivante : pour toute mesure de Radon  $\mu$  dans  $\mathbb{R}^n$  et toute fonction  $f \in L^p(\mu)$ ,  $M_\mu f \in L^p(\mu)$  et

$$\|M_\mu f\|_{L^p(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

La preuve utilise :

**Lemme 1.159.** [Principe de Cavalieri] Soit  $1 \leq p < \infty$ . Pour toute mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  et toute fonction  $f \in L^p(\mu)$ ,

$$\|f\|_{L^p(\mu)}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n; |f(x)| > \lambda\}) d\lambda.$$

*Preuve du lemme 1.159 :* par le théorème de Fubini (noter que la mesure  $\mu$  est  $\sigma$ -finie),

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\mu)}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^{|f(x)|} p\lambda^{p-1} d\lambda d\mu(x) \\ &= p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \int_{\{x: |f(x)| > \lambda\}} d\mu(x) d\lambda. \end{aligned}$$

$\square$



*Preuve du théorème 1.158 :* on remarque d'abord que le cas  $p = +\infty$  est immédiat. On supposera  $1 < p < +\infty$  dans la suite de cette preuve et il suffit de considérer le cas  $f \geq 0$ . Soit  $\lambda > 0$ . On pose, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq \frac{1}{2}\lambda, \\ 0 & \text{si } f(x) < \frac{1}{2}\lambda. \end{cases}$$

Comme  $f \leq g + \frac{1}{2}\lambda$ ,  $M_\mu f \leq M_\mu g + \frac{1}{2}\lambda$ , de sorte que

$$\{x \in \mathbb{R}^n; M_\mu f(x) > \lambda\} \subset \left\{x \in \mathbb{R}^n; M_\mu g(x) > \frac{1}{2}\lambda\right\},$$

donc, par le corollaire 1.157,

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n; M_\mu f(x) > \lambda\}) &\leq \mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; M_\mu g(x) > \frac{1}{2}\lambda\right\}\right) \\ &\leq \frac{2P(n)}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} g(x) d\mu(x) \\ &= \frac{2P(n)}{\lambda} \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq \frac{1}{2}\lambda\}} f(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

Par le lemme 1.159,

$$\begin{aligned} \|M_\mu f\|_{L^p(\mu)}^p &= p \int_0^{+\infty} \lambda^{p-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n; M_\mu f(x) > \lambda\}) d\lambda \\ &\leq 2pP(n) \int_0^{+\infty} \lambda^{p-2} \left( \int_{\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \geq \frac{1}{2}\lambda\}} f(x) d\mu(x) \right) d\lambda \\ &= 2pP(n) \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left( \int_0^{2f(x)} \lambda^{p-2} d\lambda \right) d\mu(x) \\ &= \frac{2^p p P(n)}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p d\mu(x), \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

**Remarque 1.160.** La conclusion du théorème 1.158 est fautive si  $p = 1$ , voir l'exercice 1.251 plus loin.

Diverses variantes de ces résultats peuvent être données. On peut considérer une version non centrée de la fonction maximale. Si  $\mu$  et  $\nu$  sont comme plus haut, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on définit

$$\overline{M}_\mu \nu(x) := \sup_{B \ni x} \frac{\nu(B)}{\mu(B)},$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules ouvertes  $B$  contenant  $x$ . De même, on définit  $\overline{M}_\mu f$  si  $f \in L^1_{loc}(\mu)$ . On vérifie facilement que, pour tout  $\lambda > 0$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu \nu(x) > \lambda\}$  est ouvert, si bien que  $\overline{M}_\mu \nu$  est borélienne.

On fait l'hypothèse que  $(\mathbb{R}^n, d, \mu)$  est un espace de nature homogène ( $d$  désignant la distance euclidienne), ce qui signifie que  $\mu$  vérifie (D) (voir la section 4).

**Lemme 1.161.** On suppose  $\nu(\mathbb{R}^n) < +\infty$  et que  $\mu$  vérifie (D). Alors  $\overline{M}_\mu \nu \in L^1_w(\mu)$ . Plus précisément, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu \nu(x) > \lambda\right\}\right) \leq \frac{C}{\lambda} \nu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu \nu(x) > \lambda\right\}\right),$$

où  $C$  ne dépend que de la constante apparaissant dans (D).

*Démonstration.* Soit  $R > 0$ . On notera  $\overline{M}_\mu^R \nu$  la fonction maximale définie comme  $\overline{M}_\mu \nu$ , où la borne supérieure est prise sur toutes les boules ouvertes de rayon inférieur ou égal à  $R$ . On note  $O_R := \{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu^R \nu(x) > \lambda\}$ . Pour tout  $x \in O_R$ , il existe une boule ouverte  $B_x$  contenant  $x$  et de rayon inférieur ou égal à  $R$ , telle que  $\nu(B_x) > \lambda \mu(B_x)$ . La version du lemme 5r pour des boules ouvertes (voir la remarque 1.86) donne une famille au plus dénombrable de points  $(x_i)_{i \geq 1}$  dans  $O_R$  tels que les boules  $B_{x_i}$  sont deux à deux disjointes et  $O_R \subset \bigcup_{i \geq 1} 5B_{x_i}$ . Alors, en utilisant (D) dans la deuxième ligne,

$$\begin{aligned}
\mu(O_R) &\leq \sum_{i \geq 1} \mu(5B_{x_i}) \\
&\leq C \sum_{i \geq 1} \mu(B_{x_i}) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \sum_{i \geq 1} \nu(B_{x_i}) \\
&= \frac{C}{\lambda} \nu \left( \bigcup_{i \geq 1} B_{x_i} \right) \\
&\leq \frac{C}{\lambda} \nu \left( \{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu \nu(x) > \lambda\} \right).
\end{aligned} \tag{1.162}$$

La dernière inégalité se justifie ainsi : si  $x \in B_{x_i}$ ,  $\overline{M}_\mu \nu(x) \geq \frac{\nu(B_{x_i})}{\mu(B_{x_i})} > \lambda$ . Ainsi,

$$\bigcup_{i \geq 1} B_{x_i} \subset \{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu \nu(x) > \lambda\}.$$

Pour terminer, on observe que  $\{x \in \mathbb{R}^n; \overline{M}_\mu \nu(x) > \lambda\}$  est la réunion croissante des ensembles  $O_R$  et on passe à la limite dans l'inégalité (1.162).  $\square$

En raisonnant comme pour le théorème 1.158, on obtient :

**Théorème 1.163.** Soient  $p \in ]1, +\infty[$  et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  vérifiant (D). Il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $p$  et de la constante apparaissant dans (D) avec la propriété suivante : pour toute fonction  $f \in L^p(\mu)$ ,  $\overline{M}_\mu f \in L^p(\mu)$  et

$$\|\overline{M}_\mu f\|_{L^p(\mu)} \leq C \|f\|_{L^p(\mu)}.$$

On peut également donner des versions du lemme 1.161 et du théorème 1.163 dans le cadre général d'espaces métriques mesurés de nature homogène. Plus précisément, soit  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène. Pour toute fonction  $f \in L^1_{loc}(X)$ , on définit la fonction maximale (non centrée) de  $f$  en  $x$  par

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)| d\mu(y), \tag{1.164}$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les boules ouvertes contenant  $x$ . On a alors :

**Théorème 1.165.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène. Alors il existe  $C_1 > 0$  ne dépendant que de la constante de (D) et, pour tout  $p \in ]1, +\infty[$ , il existe  $C_p > 0$  ne dépendant que de  $p$  et de la constante de (D) tels que :

1. pour toute  $f \in L^1(X)$  et tout  $\lambda > 0$ ,

$$\mu(\{Mf > \lambda\}) \leq \frac{C_1}{\lambda} \int_X |f(y)| d\mu(y),$$

2. pour toute  $f \in L^p(X)$ ,

$$\int_X |Mf|^p d\mu \leq C_p \int_X |f|^p d\mu.$$

La preuve est analogue à celles du lemme 1.161 et du théorème 1.163. Il suffit de remarquer que  $(X, d)$  est séparable (lemme 1.101), si bien que le lemme 5r (version pour des boules ouvertes) donne bien des familles de boules au plus dénombrables. On utilise aussi le principe de Cavalieri (lemme 1.159), valable dans ce contexte car la mesure  $\mu$  est  $\sigma$ -finie (il suffit d'écrire  $X$  comme la réunion des boules  $B(x_0, n)$ , où  $x_0 \in X$ ).

Une autre variante de la fonction maximale dans  $\mathbb{R}^n$  consiste à considérer la fonction maximale dyadique, voir l'exercice 1.249 plus loin.

## 7 Différentiation de mesures

### 7.1 Le théorème de différentiation de Lebesgue

On commence par le théorème de différentiation de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$  :

**Théorème 1.166.** [Théorème de différentiation de Lebesgue dans  $\mathbb{R}^n$ ] ([64, Section 3.4]) Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  (pour la mesure de Lebesgue). Alors, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy = 0. \quad (1.167)$$

Par conséquent, pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy.$$

Les points  $x \in \mathbb{R}^n$  en lesquels (1.167) est vérifiée s'appellent les points de Lebesgue de  $f$ .

*Démonstration.* La deuxième assertion provient facilement de la première car

$$\left| f(x) - \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) dy \right| \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy.$$

On prouve donc la première assertion. On peut supposer que  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . En effet, si  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \chi_{B(0, R)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $R > 0$ , ce qui permet de montrer le résultat pour presque tout  $x \in B(0, R)$  et de considérer ensuite les boules  $B(0, n)$  avec  $n \geq 1$ .

Si  $f$  est continue, la conclusion est claire. Si  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ , on définit, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\omega_f(x) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| dy.$$

On vérifie que  $\omega_{f+g} \leq \omega_f + \omega_g$  pour toutes fonctions  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . De plus,

$$\omega_f \leq |f| + M_{\mathcal{L}^n} f.$$

Enfin, si  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ , alors  $\omega_f = 0$ .

Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $g$  continue à support compact dans  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$ . Alors

$$\omega_f \leq \omega_{f-g} + \omega_g = \omega_{f-g} \leq |f - g| + M_{\mathcal{L}^n}(f - g).$$

Par conséquent, pour tout  $\lambda > 0$ , d'après le Corollaire 1.157,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; \omega_f(x) > \lambda\}) &\leq \mathcal{L}^n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; |(f-g)(x)| > \frac{1}{2}\lambda\right\}\right) \\ &\quad + \mathcal{L}^n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n; M_{\mathcal{L}^n}(f-g)(x) > \frac{1}{2}\lambda\right\}\right) \\ &\leq \frac{2}{\lambda} \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \frac{C}{\lambda} \|f-g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{C\varepsilon}{\lambda}. \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient que  $\omega_f(x) \leq \lambda$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , et on en déduit que  $\omega_f = 0$  presque partout, ce qui est le résultat attendu.  $\square$

## 7.2 Le théorème de Radon Nikodym

On commence par rappeler la définition suivante :

**Définition 1.168.** Soient  $\mu, \nu$  des mesures boréliennes positives sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  si, et seulement si, pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ , si  $\mu(A) = 0$ , alors  $\nu(A) = 0$ . On note alors  $\nu \ll \mu$ .

**Remarque 1.169.** Si  $f \in L^1_{loc}(\mu)$ , la mesure  $\nu = fd\mu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ .

On peut traduire l'absolue continuité par une propriété analogue à la définition d'une fonction absolument continue :

**Proposition 1.170.** Soient  $\mu, \nu$  des mesures boréliennes positives sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $\nu \ll \mu$ ,
2. pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ , si  $\mu(B) < \delta$ , alors  $\nu(B) < \varepsilon$ .

*Démonstration.* On suppose 1. Soit  $\varepsilon > 0$ . Si la conclusion de 2 est fautive, alors, pour tout  $k \geq 1$ , il existe un borélien  $B_k \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\mu(B_k) < \frac{1}{2^k}$  et  $\nu(B_k) \geq \varepsilon$ . Pour tout  $k \geq 1$ , on pose  $C_k := \bigcup_{i \geq k+1} B_i$ ,

de sorte que  $\mu(C_k) \leq \frac{1}{2^k}$  et  $\nu(C_k) \geq \varepsilon$ . Si maintenant  $C := \bigcap_{k \geq 1} C_k$ , on a donc  $\mu(C) = 0$  et  $\nu(C) \geq \varepsilon$ ,

contrairement à l'hypothèse 1.

On suppose maintenant 2. Si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un borélien avec  $\mu(E) = 0$  et si  $\varepsilon > 0$ , on a  $\nu(E) < \varepsilon$  où  $\delta$  est donné par la condition 2, donc  $\nu(E) < \varepsilon$ , ce qui donne 1.  $\square$

Soient  $\nu$  et  $\mu$  des mesures de Radon dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $r > 0$ , on pose

$$D_\mu \nu(x, r) = \frac{\nu(B(x, r))}{\mu(B(x, r))}$$

et, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\overline{D}_\mu \nu(x) = \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} D_\mu \nu(x, r)$$

et

$$\underline{D}_\mu \nu(x) = \underline{\lim}_{r \rightarrow 0} D_\mu \nu(x, r).$$

Si, pour un  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\overline{D}_\mu \nu(x) = \underline{D}_\mu \nu(x)$ , cette quantité est notée  $D_\mu \nu(x)$  et est appelée dérivée de  $\nu$  par rapport à  $\mu$  au point  $x$ .

On vérifie, comme dans la section 6, que ces fonctions sont boréliennes. On va montrer :

**Théorème 1.171.** [98, Theorem 2.12] Soient  $\mu, \nu$  des mesures de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors :

1. pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_\mu \nu(x)$  existe dans  $[0, +\infty[$ ,
2. pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\int_B D_\mu \nu(x) d\mu(x) \leq \nu(B), \quad (1.172)$$

et si  $\nu \ll \mu$ , il y a égalité dans (1.172),

3.  $\nu \ll \mu$  si, et seulement si, pour  $\nu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\underline{D}_\mu \nu(x) < +\infty$ .

La preuve utilise :

**Lemme 1.173.** Soient  $\mu, \nu$  des mesures de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $t \in ]0, +\infty[$  et  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Alors :

1. si  $\underline{D}_\mu \nu(x) \leq t$  pour tout  $x \in A$ , alors  $\nu(A) \leq t\mu(A)$ ,
2. si  $\overline{D}_\mu \nu(x) \geq t$  pour tout  $x \in A$ , alors  $\nu(A) \geq t\mu(A)$ .

*Preuve du lemme 1.173 :* on se contente de l'assertion 1, la preuve de 2 étant analogue. On peut supposer  $\mu(A) < +\infty$ , sinon la preuve est triviale. Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $\mu$  est une mesure de Radon, par le théorème 1.24, il existe un ouvert  $U$  contenant  $A$  tel que  $\mu(U) \leq \mu(A) + \varepsilon$ .

L'hypothèse entraîne que, pour tout  $x \in A$ , il existe  $\eta_x > 0$  tel que, pour tout  $r \in ]0, \eta_x[$ ,  $B(x, r) \subset U$  et  $\nu(B(x, r)) \leq (t + \varepsilon)\mu(B(x, r))$ . Le lemme de recouvrement de Vitali (proposition 1.95) montre qu'il existe une famille au plus dénombrable de points  $(x_i)_{i \geq 1}$  dans  $A$  et une famille au plus dénombrable de réels strictement positifs  $(r_i)_{i \geq 1}$  tels que les boules  $B(x_i, r_i)$  sont deux à deux disjointes et incluses dans  $U$ ,  $\nu(B(x_i, r_i)) \leq (t + \varepsilon)\mu(B(x_i, r_i))$  pour tout  $i \geq 1$  et  $\nu\left(A \setminus \bigcup_{i \geq 1} B(x_i, r_i)\right) = 0$ . On en déduit que

$$\begin{aligned} \nu(A) &\leq \sum_{i \geq 1} \nu(B(x_i, r_i)) \\ &\leq (t + \varepsilon) \sum_{i \geq 1} \mu(B(x_i, r_i)) \\ &\leq (t + \varepsilon)\mu(U) \\ &\leq (t + \varepsilon)(\mu(A) + \varepsilon), \end{aligned}$$

et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on conclut que  $\nu(A) \leq t\mu(A)$ . □

*Preuve du théorème 1.171 :* soient  $0 < s < t < +\infty$  et  $R > 0$ . On définit

$$A(s, t, R) := \left\{ x \in B(0, R); \underline{D}_\mu \nu(x) \leq s < t \leq \overline{D}_\mu \nu(x) \right\}$$

et

$$E(t, R) := \left\{ x \in B(0, R); \overline{D}_\mu \nu(x) \geq t \right\}.$$

Par le lemme 1.173,

$$t\mu(A(s, t, R)) \leq \nu(A(s, t, R)) \leq s\mu(A(s, t, R)) < +\infty,$$

ce qui implique que  $\mu(A(s, t, R)) = 0$ . Toujours par le lemme 1.173,

$$t\mu(E(t, R)) \leq \nu(E(t, R)) \leq \nu(B(0, R)),$$

ce qui montre que

$$\mu\left(\bigcap_{t>0, t \in \mathbb{Q}} E(t, R)\right) = 0.$$

Or, si  $R > 0$ , le complémentaire dans  $\mathbb{R}^n$  de l'ensemble des  $x \in B(0, R)$  tels que  $D_\mu \nu(x)$  existe dans  $[0, +\infty[$  est égal à

$$\left( \bigcup_{0 < s < t < +\infty, s, t \in \mathbb{Q}} A(s, t, R) \right) \cup \left( \bigcap_{t > 0, t \in \mathbb{Q}} E(t, R) \right),$$

ce qui montre que  $D_\mu \nu(x)$  existe dans  $\mathbb{R}$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in B(0, R)$ . On applique cela pour tout  $R$  entier, ce qui conclut pour le point 1.

Soit maintenant  $B \subset \mathbb{R}^n$  un borélien et

$$C := \{x \in B; D_\mu \nu(x) \in ]0, +\infty[ \}.$$

On fixe  $t > 1$ . Pour tout entier  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$B_k := \{x \in B; t^k \leq D_\mu \nu(x) < t^{k+1}\} \subset C,$$

de sorte que  $C = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B_k$ . Alors, en utilisant le fait que  $D_\mu \nu$  existe et est fini pour  $\mu$ -presque tout point et l'assertion 2 du lemme 1.173,

$$\begin{aligned} \int_B D_\mu \nu(x) d\mu(x) &= \int_C D_\mu \nu(x) d\mu(x) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{B_k} D_\mu \nu(x) d\mu(x) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^{k+1} \mu(B_k) \\ &\leq t \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu(B_k) \\ &\leq t \nu(B). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $t$  vers 1, on obtient que  $\int_B D_\mu \nu(x) d\mu(x) \leq \nu(B)$ .

On suppose maintenant que  $\nu \ll \mu$ . On note que

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu(x) \text{ n'existe pas ou vaut } +\infty\}) = 0$$

de sorte que

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu(x) \text{ n'existe pas ou vaut } +\infty\}) = 0.$$

De plus,

$$\{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n; D_\nu \mu(x) = +\infty\},$$

ce qui montre que

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^n; D_\mu \nu(x) = 0\}) = 0.$$

Il s'ensuit que, si  $t > 1$ , en appliquant à nouveau le lemme 1.173,

$$\begin{aligned} \nu(B) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu(B_k) \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} t^{k+1} \mu(B_k) \\ &\leq t \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{B_k} D_\mu \nu(x) d\mu(x) \\ &\leq t \int_B D_\mu \nu(x) d\mu(x). \end{aligned}$$

On fait tendre  $t$  vers 1 pour conclure la preuve du point 2.

On passe maintenant au point 3. On suppose d'abord que  $\nu \ll \mu$ . Pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_\mu \nu(x) < +\infty$ , donc aussi pour  $\nu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Réciproquement, on suppose que  $D_\mu \nu(x) < +\infty$  pour  $\nu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un borélien tel que  $\mu(A) = 0$ . Pour tout entier  $k \geq 1$ , le lemme 1.173 montre que

$$\nu \left( \left\{ x \in A; D_\mu \nu(x) \leq k \right\} \right) \leq k\mu(A) = 0,$$

de sorte que, par l'hypothèse sur  $\nu$ ,

$$\nu(A) = \nu \left( \left\{ x \in A; D_\mu \nu(x) < +\infty \right\} \right) = 0,$$

ce qui termine la preuve. □

Un corollaire du théorème 1.171 est une extension du théorème de différentiation de Lebesgue pour les mesures de Radon :

**Corollaire 1.174.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $f \in L^1_{loc}(\mu)$ . Alors :

1. pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(y) d\mu(y) = f(x),$$

2. pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0.$$

**Remarque 1.175.** On notera que la conclusion de l'assertion 2 est plus forte que celle de l'assertion 1. Toutefois, on va utiliser 1 pour prouver 2.

*Preuve du corollaire 1.174 :* pour 1, il suffit de faire la preuve quand  $f \geq 0$ . On définit la mesure  $\nu$  par  $\nu(A) := \int_A f(x) d\mu(x)$  pour tout borélien  $A \subset \mathbb{R}^n$ , puis, pour  $A \subset \mathbb{R}^n$  quelconque,  $\nu(A) := \inf \nu(B)$  où la borne inférieure est prise sur tous les boréliens  $B$  contenant  $A$  (voir la remarque 1.14). Il s'agit d'une mesure de Radon positive, absolument continue par rapport à  $\mu$ . Pour tout borélien borné  $B \subset \mathbb{R}^n$ , l'assertion 2 du théorème 1.171 montre que

$$\int_B D_\mu \nu(x) d\mu(x) = \nu(B) = \int_B f(x) d\mu(x),$$

ce qui implique que, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $f(x) = D_\mu \nu(x)$ , ce qui exactement la conclusion attendue.

Pour 2, soit  $\rho \in \mathbb{Q}$ . On applique la conclusion de 1 à la fonction  $|f - \rho|$ , ce qui donne

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - \rho| d\mu(y) = |f(x) - \rho|$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il existe donc un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\mu(A) = 0$  et tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$  et tout  $\rho \in \mathbb{Q}$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - \rho| d\mu(y) = |f(x) - \rho|.$$

Soient  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$  et  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\rho \in \mathbb{Q}$  tel que  $|f(x) - \rho| < \varepsilon$ . On a donc

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) &\leq \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(y) - \rho| d\mu(y) + |f(x) - \rho| \\ &= 2|f(x) - \rho| < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

et comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient la conclusion. □

**Remarque 1.176.** Soient  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  et  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $\mu$ -mesurable. En appliquant la conclusion du corollaire 1.174 avec  $f = \chi_A$ , on obtient que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\mu(B(x, r))} = 1 \quad (1.177)$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x \in A$ , alors que

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(A \cap B(x, r))}{\mu(B(x, r))} = 0$$

pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ .

La conclusion (1.177) est vraie même si  $A$  n'est pas supposé mesurable. En effet, il suffit de le voir quand  $\mu(A) < +\infty$  (en effet, comme  $\mathbb{R}^n$  est une réunion dénombrable de boules de  $\mu$ -mesure finie, il suffit de le voir quand  $x$  appartient à une boule, et comme on peut supposer  $r \leq 1$ ,  $B(x, r)$  reste incluse dans une boule fixe, et on peut donc remplacer  $A$  par l'intersection de  $A$  avec une boule, qui est un ensemble de  $\mu$ -mesure finie). Il existe alors un borélien  $B$  tel que  $A \subset B$  et  $\mu(A) = \mu(B)$ , et on a donc, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in B$ , donc aussi pour  $\mu$ -presque tout  $x \in A$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B \cap B(x, r))}{\mu(B(x, r))} = 1.$$

Or, d'après le lemme 1.9,  $\mu(A \cap B(x, r)) = \mu(B \cap B(x, r))$ , ce qui termine la preuve.

On peut à présent énoncer une version du théorème de Radon-Nikodym. On aura besoin de la définition suivante :

**Définition 1.178.** Soient  $\mu, \nu$  des mesures de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . On dit que  $\mu$  et  $\nu$  sont mutuellement singulières si, et seulement si, il existe un ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $0 = \mu(A) = \nu(\mathbb{R}^n \setminus A)$ .

**Remarque 1.179.** Soient  $\mu$  et  $\nu$  des mesures de Radon mutuellement singulières sur  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $\nu \ll \mu$ . Alors  $\nu = 0$ . En effet, soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\nu(A) = 0$  et  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ . Alors  $\nu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ , de sorte que  $\nu = 0$ .

**Théorème 1.180.** [Théorème de Radon-Nikodym] ([98, Theorem 2.17], [45, Chapter 1, Theorem 3]) Soient  $\mu$  et  $\nu$  des mesures de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors :

1. il existe une unique mesure de Radon  $\nu_{ac}$  et une unique mesure de Radon  $\nu_s$  telles que  $\nu_{ac} \ll \mu$ ,  $\mu$  et  $\nu_s$  sont mutuellement singulières et  $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$ ,
2. il existe une unique fonction borélienne  $f$  localement intégrable et positive  $\mu$ -presque partout telle que, pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\nu_{ac}(B) = \int_B f(x) d\mu(x).$$

*Démonstration.* On commence par les résultats d'unicité. Pour 1, on suppose que  $\nu = \nu_{ac} + \nu_s = \tilde{\nu}_{ac} + \tilde{\nu}_s$ , où  $\nu_{ac}$  et  $\tilde{\nu}_{ac}$  sont des mesures de Radon absolument continues par rapport à  $\mu$  et  $\nu_s$  et  $\tilde{\nu}_s$  sont des mesures de Radon telles que  $\mu$  et  $\nu_s$  sont mutuellement singulières et  $\mu$  et  $\tilde{\nu}_s$  sont mutuellement singulières.

Alors, si  $m := \nu_{ac} - \tilde{\nu}_{ac} = \tilde{\nu}_s - \nu_s$ ,  $m$  est une mesure de Radon absolument continue par rapport à  $\mu$  et  $m$  et  $\mu$  sont mutuellement singulières (en effet, si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est tel que  $\nu_s(A) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$  et  $\tilde{A} \subset \mathbb{R}^n$  est tel que  $\nu_s(\tilde{A}) = \mu(\mathbb{R}^n \setminus \tilde{A}) = 0$ , alors  $m(A \cap \tilde{A}) = 0$  et  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus (A \cap \tilde{A})) = \mu((\mathbb{R}^n \setminus A) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \tilde{A})) = 0$ ). Par la remarque 1.179,  $m = 0$ .



Soient maintenant  $f$  et  $g$  des fonctions boréliennes positives, localement  $\mu$ -intégrables et telles que  $\int_B f(x)d\mu(x) = \int_B g(x)d\mu(x)$  pour tout borélien  $B$ . Si  $h := f - g$ ,  $h$  est borélienne et localement  $\mu$ -intégrable et  $\int_B h(x)d\mu(x) = 0$  pour tout borélien  $B$  tel que  $\mu(B) < +\infty$ . Cela implique que  $h(x) = 0$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

En effet, si  $B$  est une boule fermée de  $\mathbb{R}^n$ ,  $k \geq 1$  et  $B_k := \left\{x \in B; h(x) > \frac{1}{k}\right\}$ , on a  $0 = \int_{B_k} h(x)d\mu(x) \geq \frac{1}{k}\mu(B_k)$ , donc  $\mu(B_k) = 0$ . Cela montre que  $h(x) \leq 0$  pour presque tout  $x \in B$ , et de même,  $h(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in B$ . On conclut en remarquant que  $\mathbb{R}^n$  est une réunion dénombrable de boules fermées. On a prouvé l'unicité pour 2.

On passe maintenant aux résultats d'existence. On définit

$$A := \left\{x \in \mathbb{R}^n; \underline{D}_\mu \nu(x) < +\infty\right\}$$

puis

$$\nu_{ac} := \nu \llcorner A \text{ et } \nu_s := \nu \llcorner (\mathbb{R}^n \setminus A).$$

On note que  $A$  est borélien, car, si, pour tout entier  $k$ ,

$$A_k := \left\{x \in \mathbb{R}^n; \underline{D}_\mu \nu(x) \leq k\right\},$$

$A_k$  est borélien parce que  $\underline{D}_\mu \nu$  est borélienne et  $A = \bigcup_{k \geq 1} A_k$ .

On a bien  $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$  et  $\nu_{ac}$  et  $\nu_s$  sont des mesures de Radon par la proposition 1.22. De plus,  $\mu$  et  $\nu_s$  sont mutuellement singulières par l'assertion 1 du théorème 1.171. On vérifie aussi que  $\nu_{ac} \ll \mu$ . En effet, si  $B \subset \mathbb{R}^n$  est tel que  $\mu(B) = 0$ , alors l'assertion 1 du lemme 1.173 donne

$$\nu(B \cap A_k) \leq k\mu(B \cap A_k) = 0$$

pour tout entier  $k \geq 1$ , de sorte que  $\nu_{ac}(B) = \nu(B \cap A) = 0$ . Cela termine la preuve de 1.

Si on pose maintenant  $f(x) := \underline{D}_\mu \nu_{ac}(x)$ , l'assertion 2 du théorème 1.171 assure que

$$\nu_{ac}(B) = \int_B f(x)d\mu(x)$$

pour tout borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$ . □

### 7.3 Introduction aux fonctions absolument continues

On a déjà défini les fonctions absolument continues (définition 1.137). On notera qu'une fonction absolument continue sur  $I$  est en particulier uniformément continue sur  $I$ .

On examine ici les liens entre absolue continuité et dérivabilité :

**Théorème 1.181.** *Soient  $a < b$  et  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et croissante. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1.  $f$  est absolument continue sur  $[a, b]$ ,
2. pour tout  $E \subset [a, b]$  avec  $\mathcal{L}^1(E) = 0$ ,  $\mathcal{L}^1(f(E)) = 0$ ,
3.  $f$  est dérivable presque partout sur  $[a, b]$ ,  $f' \in L^1([a, b])$  et, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt.$$

La preuve utilise :

**Lemme 1.182.** *Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction croissante. Si  $A, B \subset [a, b]$  avec  $A \cap B = \emptyset$ , alors  $f(A) \cap f(B)$  est au plus dénombrable.*

*Preuve du lemme 1.182 :* soit  $z \in f(A) \cap f(B)$ . Il existe  $x \in A$  et  $y \in B$  tels que  $z = f(x) = f(y)$ . On a, par exemple,  $x < y$ . Comme  $f$  est croissante sur  $[a, b]$ , elle est constante sur  $[x, y]$ , donc il existe  $w \in \mathbb{Q} \cap [x, y]$  tel que  $f(w) = z$ . On peut donc définir une application  $g : f(A) \cap f(B) \rightarrow \mathbb{Q}$  telle que, pour tout  $z \in f(A) \cap f(B)$ ,  $f(g(z)) = z$ . Cela entraîne que  $g$  est injective, donc que  $f(A) \cap f(B)$  est au plus dénombrable.  $\square$

*Preuve du théorème 1.181 :* on suppose 1. Soit  $E \subset [a, b]$  de mesure nulle. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  donnés par la définition 1.137. Il existe un ouvert  $\omega \subset [a, b]$  contenant  $E$  tel que  $\mathcal{L}^1(\omega) < \delta$ . On écrit  $\omega$  comme l'union disjointe dénombrable d'intervalles  $]a_k, b_k[$ . Comme  $f$  est continue et croissante,

$$f(E) \subset \bigcup_{k \geq 1} [f(a_k), f(b_k)]. \text{ Si } N \geq 1, \text{ comme } \sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta, \text{ on a donc } \sum_{i=1}^N (f(b_i) - f(a_i)) < \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout  $N \geq 1$ , on a donc  $\sum_{i=1}^N (f(b_i) - f(a_i)) \leq \varepsilon$ , donc  $\mathcal{L}^1(f(E)) \leq \varepsilon$ . Comme

c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit que  $f(E)$  est de mesure nulle.

On suppose maintenant 2. Pour tout  $E \subset [a, b]$  borélien, on définit  $\mu(E) := \mathcal{L}^1(f(E))$ . Les lemmes 1.7 et 1.182 montrent que, si  $(E_k)_{k \geq 1}$  est une famille dénombrable de parties mesurables de  $[a, b]$  deux à deux disjointes,  $\mu(E) = \sum_{k \geq 1} \mu(E_k)$ . De plus,  $\mu([a, b]) < +\infty$ . Si on étend maintenant  $\mu$  à toutes les

parties de  $[a, b]$  en utilisant la remarque 1.14, le prolongement, qu'on note encore  $\mu$ , est une mesure de Radon. En effet, tout borélien de  $[a, b]$  est mesurable pour  $\mu$  par la remarque 1.14.

De plus,  $\mu$  est borélienne régulière. En effet, si  $E \subset [a, b]$  et  $k \geq 1$ , il existe  $\widetilde{E}_k$  borélien contenant  $E$  tel que  $\mu(\widetilde{E}_k) \leq \mu(E) + \frac{1}{k}$ . Alors  $\bigcap_{k \geq 1} \widetilde{E}_k$  est un borélien contenant  $E$  et  $\mu\left(\bigcap_{k \geq 1} \widetilde{E}_k\right) \leq \mu(E)$ , ce qui

montre que  $\mu\left(\bigcap_{k \geq 1} \widetilde{E}_k\right) = \mu(E)$ . Enfin,  $\mu$  est une mesure finie.

L'hypothèse 2 montre que  $\mu \ll \mathcal{L}^1$ . Par le théorème de Radon-Nikodym, il existe  $h \in L^1([a, b])$  tel que, pour tout borélien  $E \subset [a, b]$ ,

$$\mu(E) = \int_E h(t) dt.$$

En particulier, pour tout  $x \in [a, b]$ , comme  $f([a, x]) = [f(a), f(x)]$ ,

$$f(x) - f(a) = \mathcal{L}^1(f([a, x])) = \mu([a, x]) = \int_a^x h(t) dt.$$

Le théorème de différentiation de Lebesgue montre donc que  $f$  est dérivable presque partout et  $f' = h$ . Ainsi, 3 est montré.

On suppose maintenant 3. Pour tout  $E \subset [a, b]$  Lebesgue mesurable, on pose  $\mu(E) := \int_E f'(t) dt$ . On étend  $\mu$  en une mesure sur  $[a, b]$  en utilisant à nouveau la remarque 1.14. Alors  $\mu$  est une mesure absolument continue par rapport à  $\mathcal{L}^1$ . En conséquence (voir la proposition 1.170), si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $E \subset [a, b]$  vérifiant  $\mathcal{L}^1(E) < \delta$ , on ait  $\int_E f'(t) dt < \varepsilon$ . Si les intervalles  $(]a_k, b_k[)_{1 \leq k \leq N}$

sont deux à deux disjointes et  $\sum_{1 \leq k \leq N} (b_k - a_k) < \delta$ , alors  $\sum_{k=1}^N f(b_k) - f(a_k) = \sum_{k=1}^N \int_{a_k}^{b_k} f'(t) dt < \varepsilon$ . On

a donc 1.  $\square$

On va montrer dans la suite que tout fonction absolument continue (non nécessairement monotone) est différentiable en presque tout point.

**Proposition 1.183.** On suppose  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  absolument continue. Pour tout  $x \in [a, b]$ , on définit

$$F(x) := \sup \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})|,$$

où la borne supérieure est prise sur toutes les subdivisions  $a = t_0 < \dots < t_N = x$  (la fonction  $F$  s'appelle la variation totale de  $f$ ). Alors  $F$ ,  $F + f$  et  $F - f$  sont croissantes et absolument continues sur  $[a, b]$ .

*Démonstration.* Soient  $x < y \in [a, b]$ ,  $N \geq 1$  et  $a = t_0 < \dots < t_N = x$ . Alors  $F(y) \geq |f(y) - f(x)| + \sum_{i=1}^N |f(t_i) - f(t_{i-1})|$ , donc  $F(y) \geq |f(y) - f(x)| + F(x)$ . Cela montre que  $F$  est croissante. Comme  $F(y) \geq f(y) - f(x) + F(x)$ ,  $F - f$  est croissante. Comme  $F(y) \geq f(x) - f(y) + F(x)$ ,  $F + f$  est croissante.

On montre maintenant que  $F$  est absolument continue. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$  fourni par la définition 1.137 pour  $f$ . Si  $(]a_k, b_k])_{1 \leq k \leq N}$  sont des intervalles deux à deux disjoints avec  $\sum_{k=1}^N (b_k - a_k) < \delta$ , alors

la définition de  $F$  montre que  $\sum_{k=1}^N F(b_k) - F(a_k) < \varepsilon$ . Ainsi,  $F$  est absolument continue, et comme  $f$  l'est aussi,  $F + f$  et  $F - f$  le sont aussi.  $\square$

On en déduit :

**Théorème 1.184.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ . Alors  $f$  est absolument continue si, et seulement si,  $f$  est dérivable presque partout,  $f' \in L^1([a, b])$  et, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t) dt. \quad (1.185)$$

*Démonstration.* On suppose d'abord que  $f$  est dérivable presque partout,  $f' \in L^1([a, b])$  et (1.185) est satisfaite pour tout  $x \in [a, b]$ . Alors l'argument utilisé pour la preuve de l'implication 3.  $\Rightarrow$  1. dans le théorème 1.181 montre que  $f$  est absolument continue sur  $[a, b]$ .

Il suffit de montrer la réciproque quand  $f$  est à valeurs réelles. On définit  $F$  comme dans la proposition 1.183 et on pose  $g := \frac{1}{2}(F + f)$ ,  $h := \frac{1}{2}(F - f)$ . Comme  $g$  et  $h$  sont absolument continues et croissantes, le théorème 1.181 montre qu'elles sont dérivables presque partout, que  $g'$  et  $h'$  sont dans  $L^1([a, b])$  et que, pour tout  $x \in [a, b]$ ,

$$g(x) - g(a) = \int_a^x g'(t) dt \quad \text{et} \quad h(x) - h(a) = \int_a^x h'(t) dt,$$

et comme  $f = g - h$ , on obtient la conclusion.  $\square$

Une fonction lipschitzienne sur  $[a, b]$  est absolument continue. On a donc prouvé ceci :

**Corollaire 1.186.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  lipschitzienne. Alors  $f$  est dérivable presque partout sur  $[a, b]$ ,  $f' \in L^1([a, b])$  et, pour tout  $x \in [a, b]$ , (1.185) est satisfaite.

Le corollaire 1.186 est la version en dimension 1 du théorème de Rademacher, qui sera prouvé en toute dimension au chapitre 2 (Théorème 2.53).

En complément des résultats précédents :

**Théorème 1.187.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable en tout point  $x \in [a, b]$ . On suppose  $f' \in L^1([a, b])$ . Alors, pour tout  $x \in [a, b]$ , (1.185) est satisfaite. En conséquence,  $f$  est absolument continue sur  $[a, b]$ .

**Remarque 1.188.** Le théorème 1.184 affirme qu'une fonction absolument continue  $f$  sur  $[a, b]$  est dérivable presque partout et que (1.185) est vérifiée pour tout  $x \in [a, b]$ . Dans le théorème 1.187, on suppose  $f$  dérivable *partout* sur  $[a, b]$  et  $f' \in L^1([a, b])$ , et on en déduit (1.185), puis que  $f$  est absolument continue sur  $[a, b]$ .

Il peut arriver que  $f$  soit dérivable partout sur  $[a, b]$  sans que  $f'$  ne soit intégrable sur  $[a, b]$  (exercice 1.252). Il se peut aussi que  $f$  soit croissante et dérivable *presque partout* sur  $[a, b]$ , que  $f'$  soit nulle partout où elle est définie, sans que  $f$  ne soit constante, de sorte que (1.185) n'est pas satisfaite dans ce cas (exercice 1.254). Il est même possible (voir encore l'exercice 1.254) de construire une fonction continue et strictement croissante sur  $[0, 1]$ , dérivable presque partout et de dérivée nulle presque partout sur  $[0, 1]$ . Enfin on verra à la fin de la présente section (théorème 1.194) qu'une fonction croissante (non nécessairement continue) est dérivable presque partout.

Pour prouver le théorème 1.187, on rappelle les définitions suivantes (la semicontinuité inférieure a déjà été rencontrée dans la preuve du lemme 1.153) :

**Définition 1.189.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

1. Soit  $f : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ . On dit que  $f$  est semicontinue inférieurement si, et seulement si, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\{x \in X; f(x) \leq \lambda\}$  est fermé.
2. Soit  $f : X \rightarrow [-\infty, +\infty[$ . On dit que  $f$  est semicontinue supérieurement si, et seulement si, pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\{x \in X; f(x) \geq \lambda\}$  est fermé.

On vérifie ([22, Section 1.4]) :

**Proposition 1.190.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $f, g : X \rightarrow ]-\infty, +\infty]$ . Alors

1.  $f$  est semicontinue inférieurement si, et seulement si, pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  dans  $X$  et tout point  $x \in X$  tels que  $x_n \rightarrow x$ ,  $\liminf f(x_n) \geq f(x)$ ,
2. si  $f$  et  $g$  sont semicontinues inférieurement, alors  $f + g$  est semicontinue inférieurement,
3. si  $(f_i)_{i \in I}$  est une famille de fonctions semicontinues inférieurement sur  $X$ , alors  $\sup_{i \in I} f_i$  est aussi semicontinue inférieurement sur  $X$ ,
4.  $f$  est semicontinue inférieurement si, et seulement si,  $-f$  est semicontinue supérieurement.

*Démonstration.* On suppose  $f$  semicontinue inférieurement. Soient  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite dans  $X$  qui converge vers  $x \in X$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . L'ensemble  $\{y \in X; f(y) > f(x) - \varepsilon\}$  est un ouvert contenant  $x$ , donc il existe  $N \geq 1$  tel que  $f(x_n) > f(x) - \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ , ce qui montre que  $\liminf f(x_n) \geq f(x) - \varepsilon$ . Comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient que  $\liminf f(x_n) \geq f(x)$ .

On suppose réciproquement que, pour toute suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  dans  $X$  et tout point  $x \in X$  tels que  $x_n \rightarrow x$ ,  $\liminf f(x_n) \geq f(x)$ . Soit  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de points de  $X$  telle que  $f(x_n) \leq \lambda$  pour tout  $n \geq 1$ . On suppose que  $x_n \rightarrow x$ . Alors  $f(x) \leq \liminf f(x_n) \leq \lambda$ , ce qui montre que  $\{y \in X; f(y) \leq \lambda\}$  est fermé dans  $X$ .

Pour 2, soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $X$  qui converge vers  $x \in X$ . On a

$$\liminf f(x_n) + g(x_n) \geq \liminf f(x_n) + \liminf g(x_n) \geq f(x) + g(x),$$

ce qui montre que  $f + g$  est semicontinue inférieurement.

Pour 3, on note  $f(x) := \sup_{i \in I} f_i(x) \in ]-\infty, +\infty]$  pour tout  $x \in X$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$\{x \in X; f(x) \leq \lambda\} = \bigcap_{i \in I} \{x \in X; f_i(x) \leq \lambda\}$$

est fermé comme intersection de fermés. Enfin, la preuve de 4 est immédiate. □

La preuve du théorème 1.187 utilise :

**Proposition 1.191.** Soient  $(X, d)$  un espace métrique et  $\mu$  une mesure de Radon sur  $X$ . Soit  $f \in L^1(X, \mu)$  à valeurs réelles. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des fonctions  $u$  et  $v$  avec :

1.  $u$  semicontinue supérieurement,  $v$  semicontinue inférieurement,
2. pour presque tout  $x \in X$ ,  $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ ,
3.  $\int_X (v(x) - u(x)) d\mu(x) < \varepsilon$ .

*Preuve de la proposition 1.191 :* on suppose d'abord  $f \geq 0$ . Soit  $(s_n)_{n \geq 0}$  une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge vers  $f$  presque partout. Alors  $f = \sum_{n \geq 1} t_n + s_0$  où  $t_n = s_n - s_{n-1}$ ,

et comme chaque  $t_n$  est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables, tout comme  $s_0$ , il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables  $(E_n)_{n \geq 1}$  et des coefficients  $(c_n)_{n \geq 1}$  positifs ou nuls tels que, pour presque tout  $x \in X$ ,

$$f(x) = \sum_{n \geq 1} c_n \chi_{E_n}(x). \quad (1.192)$$

On a

$$\sum_{n \geq 1} c_n \mu(E_n) = \int_X f(x) d\mu(x),$$

donc la série  $\sum_{n \geq 1} c_n \mu(E_n)$  converge. On peut supposer que  $\mu(E_n) < +\infty$  pour tout  $n \geq 1$  (en effets,

si  $\mu(E_n) = +\infty$  pour un  $n \geq 1$ ,  $c_n = 0$ , de sorte que le terme correspondant peut être retiré dans (1.192)). Pour tout  $n \geq 1$ , il existe un compact  $K_n$  et un ouvert  $U_n$  tels que  $K_n \subset E_n \subset U_n$  et  $c_n \mu(U_n \setminus K_n) < \varepsilon 2^{-n-1}$ . On définit, pour tout  $x \in X$ ,

$$v(x) := \sum_{n \geq 1} c_n \chi_{U_n}(x) \text{ et } u(x) := \sum_{n=1}^N c_n \chi_{K_n}(x)$$

pour  $N \geq 1$  tel que  $\sum_{n \geq N+1} c_n \mu(E_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ . On vérifie en appliquant la proposition 1.190 que  $v$  est semicontinue inférieurement,  $u$  est semicontinue supérieurement,  $u \leq f \leq v$  et

$$v - u = \sum_{n=1}^N c_n (\chi_{U_n} - \chi_{K_n}) + \sum_{n \geq N+1} c_n \chi_{U_n} \leq \sum_{n \geq 1} c_n (\chi_{U_n} - \chi_{K_n}) + \sum_{n \geq N+1} c_n \chi_{E_n},$$

ce qui implique  $\int_X (v - u)(x) d\mu(x) < \varepsilon$ .

Dans le cas général, on décompose  $f = f^+ - f^-$  et on applique le cas précédent (on prendra  $u = u_1 - v_2$  et  $v = v_1 - u_2$  avec des notations intuitives).  $\square$

*Preuve du théorème 1.187 :* il suffit de faire la preuve pour  $x = b$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Par la proposition 1.191, il existe une fonction  $g$  semi-continue inférieurement telle que  $f'(x) \leq g(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$  et

$$\int_a^b (g - f')(x) dx < \varepsilon.$$

Pour  $c > 0$  assez petit, si  $h := g + c$ , on a  $f'(x) < h(x)$  pour tout  $x \in [a, b]$  et

$$\int_a^b (h - f')(x) dx < \varepsilon.$$

Soit  $\eta > 0$ . Pour tout  $x \in [a, b]$ , on pose

$$F_\eta(x) := \int_a^x h(t)dt - (f(x) - f(a) - \eta(x - a)).$$

Pour tout  $x \in [a, b]$ , comme  $g(x) > f'(x)$ , par la semi-continuité de  $g$  et la définition de  $f'(x)$ , il existe  $\delta_x > 0$  tel que, pour tout  $y \in [a, b]$  tel que  $|y - x| < \delta_x$ ,

$$h(y) > f'(x) \text{ et } \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < f'(x) + \eta.$$

Soit  $y \in [a, b]$  tel que  $|y - x| < \delta_x$ . Alors

$$\begin{aligned} F_\eta(y) - F_\eta(x) &= \int_x^y h(t)dt - (f(y) - f(x) - \eta(y - x)) \\ &> (y - x)f'(x) - (y - x)(f'(x) + \eta) + \eta(y - x) = 0. \end{aligned} \quad (1.193)$$

Soit  $x := \sup \{t \in [a, b]; F_\eta(t) = 0\}$ . On notera que  $x$  existe car  $F_\eta(a) = 0$ , et que, par continuité de  $F_\eta$ ,  $F_\eta(x) = 0$ . Si  $x < b$ , alors (1.193) montre qu'il existe  $y > x$  tel que  $F_\eta(y) > F_\eta(x) = 0$ . Si  $F_\eta(b) < 0$ , le théorème des valeurs intermédiaires montre qu'il existe  $z \in ]y, b[$  tel que  $F_\eta(z) = 0$ , ce qui est contraire à la définition de  $x$ . On a donc  $F_\eta(b) \geq 0$ . Si  $x = b$ , on a  $F_\eta(b) = 0$ . Finalement, dans tous les cas,  $F_\eta(b) \geq 0$ . Cela signifie que

$$f(b) - f(a) - \eta(b - a) \leq \int_a^b h(t)dt < \int_a^b f'(t)dt + \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout  $\eta > 0$ , on en déduit

$$f(b) - f(a) < \int_a^b f'(t)dt + \varepsilon,$$

et en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0,

$$f(b) - f(a) \leq \int_a^b f'(t)dt.$$

Raisonnant de même avec  $-f$ , on termine la preuve. □

On termine cette section en montrant que toute fonction monotone est dérivable presque partout :

**Théorème 1.194.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Alors  $f$  est dérivable presque partout sur  $I$ .

La preuve de ce résultat utilise la notion de dérivée au sens de Dini .

**Définition 1.195.** Soient  $I \subset \mathbb{R}$  et  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. On définit, pour tout  $x \in I$ ,

$$D^+ f(x) := \overline{\lim}_{y \rightarrow x, y > x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ et } D^- f(x) := \overline{\lim}_{y \rightarrow x, y < x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

et

$$D_+ f(x) := \underline{\lim}_{y \rightarrow x, y > x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ et } D_- f(x) := \underline{\lim}_{y \rightarrow x, y < x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

On montre d'abord que, si  $f$  est monotone, alors  $D^+ f$  et  $D^- f$  sont finis presque partout :

**Lemme 1.196.** On suppose  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Alors  $D^+ f(x) < +\infty$  et  $D^- f(x) < +\infty$  pour presque tout  $x \in I$ .

*Démonstration.* on peut supposer que  $I = ]a, b[$  avec  $a < b \in \mathbb{R}$  et que  $f$  est croissante sur  $]a, b[$ . On définit  $E := \{x \in ]a, b[; D^+ f(x) = +\infty\}$  et on va montrer que  $\mathcal{L}^1(E) = 0$ .

On suppose d'abord que  $f$  est bornée sur  $]a, b[$  : il existe  $M > 0$  tel que  $|f(x)| \leq M$  pour tout  $x \in ]a, b[$ . On fixe un entier  $m \geq 1$  et un réel  $\varepsilon > 0$ . Soit  $\mathcal{I}$  la famille de tous les intervalles  $[x, y] \subset I$  tels que :

1.  $x \in E$ ,
2.  $x < y < b$ ,
3.  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} > m$ .

On vérifie que la famille  $\mathcal{I}$  satisfait les hypothèses du lemme de recouvrement de Vitali (proposition 1.88). Il existe donc une famille de segments  $([x_k, y_k])_{k \geq 1}$ , deux à deux disjoints et appartenant tous à  $I$ , tels que

$$\mathcal{L}^1 \left( E \setminus \bigcup_{k \geq 1} [x_k, y_k] \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Par la proposition 1.6, assertion 7, il existe donc  $K \geq 1$  tel que

$$\mathcal{L}^1 \left( E \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq K} [x_k, y_k] \right) \leq \varepsilon.$$

Il suit que

$$\mathcal{L}^1(E) \leq \varepsilon + \sum_{k=1}^K (y_k - x_k),$$

donc

$$\sum_{k=1}^K f(y_k) - f(x_k) \geq m (\mathcal{L}^1(E) - \varepsilon).$$

Comme  $f$  est croissante, les intervalles  $]f(x_k), f(y_k)[$  sont deux à deux disjoints et tous inclus dans  $[-M, M]$ , donc

$$m (\mathcal{L}^1(E) - \varepsilon) \leq 2M.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, puis  $m$  vers  $\infty$ , on obtient que  $\mathcal{L}^1(E) = 0$ . Ainsi  $D^+ f(x) < +\infty$  pour presque tout  $x \in ]a, b[$ .

Si  $f$  n'est pas supposée bornée, on applique cette conclusion à l'intervalle  $]a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}[$  pour tout entier  $n \geq 1$ . Enfin, en appliquant cette conclusion à  $x \mapsto f(-x)$ , on conclut que  $D^- f(x) < +\infty$  pour presque tout  $x \in ]a, b[$ .  $\square$

On va maintenant établir que, si  $f$  est monotone, alors  $D^+ f = D^- f$  presque partout :

**Lemme 1.197.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  monotone. Alors  $D^+ f(x) = D_+ f(x)$  pour presque tout  $x \in I$  et  $D^- f(x) = D_- f(x)$  pour presque tout  $x \in I$ .

*Démonstration.* Là encore, on peut supposer  $I = ]a, b[$  et  $f$  croissante. Soient  $r < s$  des rationnels. Il suffit de montrer que, si

$$E := \left\{ x \in ]a, b[, D_+ f(x) < r < s < D^+ f(x) \right\},$$

alors  $\mathcal{L}^1(E) = 0$ . Soient  $\varepsilon > 0$  et  $O$  un ouvert contenant  $E$  tels que  $\mathcal{L}^1(O) \leq \mathcal{L}^1(E) + \varepsilon$ . Soit  $\mathcal{I}$  la famille de tous les intervalles  $[x, y]$  tels que :

1.  $x \in E$ ,
2.  $x < y$ ,

3.  $]x, y[ \subset O$ ,
4.  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < r$ .

On vérifie que la famille  $\mathcal{I}$  satisfait à nouveau les hypothèses du lemme de recouvrement de Vitali (proposition 1.88). Par le lemme de Vitali, il existe donc  $K \geq 1$  et des intervalles  $([x_k, y_k])_{1 \leq k \leq K}$  deux à deux disjoints, appartenant à la famille  $\mathcal{I}$ , tels que

$$\mathcal{L}^1 \left( E \setminus \bigcup_{1 \leq k \leq K} [x_k, y_k] \right) < \varepsilon.$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^K (f(y_k) - f(x_k)) < r \sum_{k=1}^K (y_k - x_k).$$

On pose alors  $U := \bigcup_{1 \leq k \leq K} ]x_k, y_k[$ . On définit  $\mathcal{J}$  comme la famille des intervalles  $[u, v]$  tels que

1.  $u \in E \cap U$ ,
2.  $u < v$ ,
3.  $]u, v[ \subset U$ ,
4.  $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} > s$ .

Appliquant à nouveau le lemme de Vitali, on trouve un entier  $M \geq 1$  et des intervalles  $([u_m, v_m])_{1 \leq m \leq M}$  deux à deux disjoints, appartenant à la famille  $\mathcal{J}$ , tels que

$$\mathcal{L}^1 \left( (E \cap U) \setminus \bigcup_{1 \leq m \leq M} [u_m, v_m] \right) < \varepsilon.$$

On a donc

$$\sum_{m=1}^M (f(v_m) - f(u_m)) > s \sum_{m=1}^M (v_m - u_m).$$

Comme  $f$  est croissante, les intervalles  $]f(u_m), f(v_m)[$  sont deux à deux disjoints. Comme chacun d'entre eux est inclus dans un intervalle de la forme  $[f(x_k), f(y_k)]$  (toujours parce que  $f$  est croissante), on a donc

$$s \sum_{m=1}^M (v_m - u_m) < \sum_{m=1}^M (f(v_m) - f(u_m)) \leq \sum_{k=1}^K (f(y_k) - f(x_k)) < r \sum_{k=1}^K (y_k - x_k). \quad (1.198)$$

Mais les intervalles  $]x_k, y_k[$  sont deux à deux disjoints et inclus dans  $O$ , de sorte que

$$\sum_{k=1}^K (y_k - x_k) \leq \mathcal{L}^1(O) \leq \mathcal{L}^1(E) + \varepsilon. \quad (1.199)$$

De même,

$$s \sum_{m=1}^M (v_m - u_m) \geq s(\mathcal{L}^1(E \cap U) - \varepsilon) > s(\mathcal{L}^1(E) - 2\varepsilon). \quad (1.200)$$

Rassemblant (1.198), (1.199) et (1.200), on obtient

$$s(\mathcal{L}^1(E) - 2\varepsilon) < r(\mathcal{L}^1(E) + \varepsilon),$$

et en faisant tendre  $\varepsilon > 0$  et utilisant que  $r < s$ , on obtient que  $\mathcal{L}^1(E) = 0$ . □



Le dernier lemme nécessaire pour la preuve du théorème 1.194 affirme que, pour toute fonction  $f$  (non supposée monotone),  $D_-f \leq D^+f$  et  $D_+f \leq D^-f$  en dehors d'un ensemble dénombrable :

**Lemme 1.201.** Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction quelconque. Alors :

1. l'ensemble des  $x \in I$  en lesquels  $f$  possède un extremum strict est au plus dénombrable,
2.  $\{x \in I; D^+f(x) < D_-f(x)\}$  et  $\{x \in I; D^-f(x) < D_+f(x)\}$  sont au plus dénombrables.

*Démonstration.* il suffit de traiter le cas  $I = ]a, b[$ . Soit  $\delta > 0$ . On définit l'ensemble

$$E_\delta := \{x \in I; f \text{ possède un maximum strict en } x \text{ sur } ]x - \delta, x + \delta[ \}.$$

Soient  $x_1, x_2 \in E_\delta$ . On a  $f(x) < f(x_1)$  pour tout  $x \in ]x_1 - \delta, x_1 + \delta[$  avec  $x \neq x_1$ . Ainsi, si  $|x_2 - x_1| < \delta$ , alors  $f(x_2) < f(x_1)$ . Par ailleurs,  $f(x) < f(x_2)$  pour tout  $x \in ]x_2 - \delta, x_2 + \delta[$  avec  $x \neq x_2$ , donc, si  $x_1 \neq x_2$ , alors  $f(x_1) < f(x_2)$ , ce qui donne une contradiction. On a donc montré que, si  $x_1, x_2 \in E$  et sont différents, alors  $|x_2 - x_1| \geq \delta$ , ce qui garantit que  $E$  est fini. Comme l'ensemble des  $x \in I$  en lesquels  $f$  possède un maximum strict est égal à  $\bigcup_{k \geq 1} E_{\frac{1}{k}}$ , cet ensemble est au plus dénom-

brable. En appliquant cette conclusion à  $-f$ , on obtient la même conclusion pour l'ensemble des  $x \in I$  en lesquels  $f$  possède un minimum strict.

Pour le deuxième point, on pose  $A := \{x \in I; D^+f(x) < D_-f(x)\}$ . Comme

$$A \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \{x \in I; D^+f(x) < q < D_-f(x)\} := \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} A_q,$$

il suffit de vérifier que, pour tout  $q \in \mathbb{Q}$ ,  $A_q$  est au plus dénombrable. Or, si  $x \in A_q$ , et si  $g(y) = f(y) - qy$  pour tout  $y \in I$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $g(y) > g(x)$  pour tout  $y \in ]x - \delta, x + \delta[ \setminus \{x\}$ . En d'autres termes,  $g$  possède un minimum strict en  $x$ , et le point 1 donne la conclusion pour  $A$ . On termine en appliquant cette conclusion à  $f$ .  $\square$

*Preuve du théorème 1.194 :* d'après les lemmes 1.196 et 1.197,  $f$  possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en presque tout point, et le lemme 1.201 assure que ces dérivées sont égales presque partout, ce qui termine la preuve.  $\square$

## 7.4 Différentiation de Lebesgue dans les espaces de nature homogène

On termine avec une version du théorème de différentiation de Lebesgue dans un espace de nature homogène.

**Théorème 1.202.** [Théorème de différentiation de Lebesgue dans un espace de nature homogène] [64, Section 3.4] Soit  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène. Soit  $f$  une fonction mesurable telle que, pour tout  $x \in X$ , il existe  $r > 0$  tel que  $f$  soit intégrable sur  $B_f(x, r)$ . Alors, pour presque tout  $x \in X$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) = f(x). \quad (1.203)$$

On a même

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0$$

pour presque tout  $x \in X$ .

*Démonstration.* La dernière assertion résulte de la précédente comme dans la preuve du corollaire 1.174. Il suffit de faire la preuve quand  $f \geq 0$ . Comme  $X$  est une réunion dénombrable de boules, qui sont toutes de mesure finie, il suffit de montrer le résultat pour presque tout  $x$  dans l'une de ces boules, ce qui permet de supposer que  $\mu(X) < +\infty$  et que  $f \in L^1(X)$ .

**Première étape :** on montre que, pour presque tout  $x \in X$ ,

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) < +\infty. \quad (1.204)$$

Pour cela, pour tout  $\lambda > 0$ , on définit

$$E_\lambda := \left\{ x \in X; \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) > \lambda \right\}.$$

Soit  $U_\lambda \subset X$  un ouvert contenant  $E_\lambda$ . Pour tout  $x \in E_\lambda$ , il existe  $r_x > 0$  tel que, pour tout  $r \in ]0, r_x[$ ,  $B_f(x, r) \subset U_\lambda$  et

$$\frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) > \lambda.$$

Le lemme de Vitali (lemme 1.112) donne une famille dénombrable de points  $(x_i)_{i \geq 1} \in E_\lambda$  et de rayons  $(r_i)_{i \geq 1} > 0$  tels que les boules  $B_f(x_i, r_i)$  soient deux à deux disjointes et incluses dans  $U_\lambda$  et  $\mu(E_\lambda \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)) = 0$ , de sorte que

$$\lambda \mu(E_\lambda) \leq \lambda \sum_{i \geq 1} \mu(B_f(x_i, r_i)) \leq \sum_{i \geq 1} \int_{B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) \leq \int_{U_\lambda} f(y) d\mu(y) \leq \int_X f(y) d\mu(y),$$

ce qui donne bien (1.204) en considérant une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1}$  strictement croissante de réels strictement positifs.

**Deuxième étape :** soient  $s < t \in ]0, +\infty[$ . On définit

$$A_{s,t} := \left\{ x \in X; \underline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) < s < t < \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) \right\}.$$

On va montrer que

$$\mu(A_{s,t}) = 0. \quad (1.205)$$

Soit  $\tilde{A}_{s,t} \subset X$  un borélien contenant  $A_{s,t}$  tel que  $\mu(A_{s,t}) = \mu(\tilde{A}_{s,t})$ . En raisonnant comme à la première étape, on obtient que, pour tout ouvert  $U$  contenant  $\tilde{A}_{s,t}$ ,

$$t\mu(A_{s,t}) \leq \int_U f(y) d\mu(y) \leq \int_{\tilde{A}_{s,t}} f(y) d\mu(y) + \int_{U \setminus \tilde{A}_{s,t}} f(y) d\mu(y).$$

Comme  $f \in L^1(X)$  et comme  $\mu(U \setminus \tilde{A}_{s,t})$  peut être rendu arbitrairement petit pour un choix convenable de  $U$ , on en déduit que

$$t\mu(A_{s,t}) \leq \int_{\tilde{A}_{s,t}} f(y) d\mu(y). \quad (1.206)$$

Soit maintenant  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f \in L^1(X)$ , il existe  $\delta \in ]0, \varepsilon[$  tel que, pour tout borélien  $A \subset X$  vérifiant  $\mu(A) < \delta$ ,  $\int_A f(y) d\mu(y) < \varepsilon$ . Soit  $U$  un ouvert contenant  $\tilde{A}_{s,t}$  et tel que

$$\mu(U \setminus \tilde{A}_{s,t}) < \delta.$$

Pour tout  $x \in A_{s,t}$ , il existe  $r_x > 0$  tel que, pour tout  $r \in ]0, r_x[$ ,  $B_f(x, r) \subset U$  et

$$\frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) < s.$$

Le lemme de Vitali (lemme 1.112) donne une famille dénombrable de points  $(x_i)_{i \geq 1} \in A_{s,t}$  et de rayons  $(r_i)_{i \geq 1} > 0$  tels que les boules  $B_f(x_i, r_i)$  soient deux à deux disjointes et incluses dans  $U$  et  $\mu(A_{s,t} \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)) = 0$ . On a

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}_{s,t}} f(y) d\mu(y) &\leq \int_{\tilde{A}_{s,t} \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) + \sum_{i \geq 1} \int_{B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) \\ &\leq \int_{U \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) + \sum_{i \geq 1} \int_{B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y). \end{aligned} \quad (1.207)$$

Comme

$$\begin{aligned} \mu\left(U \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)\right) &= \mu(U) - \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)\right) \\ &= \mu(U \setminus \tilde{A}_{s,t}) + \mu(\tilde{A}_{s,t}) - \mu\left(\bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)\right) \\ &\leq \delta, \end{aligned}$$

on a

$$\int_{U \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) < \varepsilon.$$

Revenant à (1.207), on obtient que

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{A}_{s,t}} f(y) d\mu(y) &\leq \varepsilon + \sum_{i \geq 1} \int_{B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) \\ &\leq \varepsilon + s \sum_{i \geq 1} \mu(B_f(x_i, r_i)) \\ &\leq \varepsilon + s\mu(U) \\ &\leq \varepsilon + s(\delta + \mu(\tilde{A}_{s,t})) \\ &\leq \varepsilon(s+1) + s\mu(\tilde{A}_{s,t}). \end{aligned}$$

Comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on en déduit

$$\int_{\tilde{A}_{s,t}} f(y) d\mu(y) \leq s\mu(A_{s,t}). \quad (1.208)$$

Combinant (1.206) et (1.208), et utilisant le fait que  $s < t$  et  $\mu(\tilde{A}_{s,t}) < +\infty$ , on obtient bien (1.205).

**Troisième étape :** soit  $E$  l'ensemble des  $x \in X$  tels que la limite dans le membre de gauche de (1.203) n'existe pas. Alors

$$E \subset \left( \bigcup_{0 \leq s < t; s, t \in \mathbb{Q}} A_{s,t} \right) \cup \left\{ x \in X; \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) = +\infty \right\}. \quad (1.209)$$

Les étapes précédentes assurent que  $\mu(E) = 0$ . On a donc montré que, pour presque tout  $x \in X$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y)$$

existe, et on pose

$$g(x) := \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y).$$

Il reste à montrer que  $g(x) = f(x)$  pour presque tout  $x \in X$ .

**Quatrième étape :** on vérifie d'abord que  $g$  est mesurable. Pour presque tout  $x \in X$ , par définition de  $g$ ,  $g(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x)$ , avec

$$g_n(x) := \frac{1}{\mu\left(B_f\left(x, \frac{1}{n}\right)\right)} \int_{B_f\left(x, \frac{1}{n}\right)} f(y) d\mu(y).$$

Il suffit donc, d'après la proposition 1.33, de montrer que, pour tout  $n \geq 1$ ,  $g_n$  est mesurable, ce qu'on fera en montrant que, pour tout  $\eta > 0$  et toute fonction  $h \in L^1(X)$  positive,

$$x \mapsto \int_{B_f(x, \eta)} h(y) d\mu(y)$$

est mesurable. Soient  $\lambda \in \mathbb{R}$  et  $x \in X$  tels que  $\int_{B_f(x, \eta)} h(y) d\mu(y) < \lambda$ . Il existe  $\eta' > \eta$  tel que  $\int_{B(x, \eta')} h(y) d\mu(y) < \lambda$ . Pour tout  $y \in B(x, \eta' - \eta)$ ,  $B_f(y, \eta) \subset B(x, \eta')$ , de sorte que  $\int_{B_f(y, \eta)} h(y) d\mu(y) < \lambda$ . L'ensemble des  $x \in X$  tels que  $\int_{B_f(x, \eta)} h(y) d\mu(y) < \lambda$  est donc ouvert, donc mesurable. On vérifie de même que  $x \mapsto \mu(B_f(x, \eta))$  est mesurable.

**Cinquième étape :** on vérifie maintenant que  $g = f$  presque partout. On note déjà que  $g \geq 0$ . Soient  $F \subset X$  mesurable et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$ , soit

$$A_n := \left\{ x \in F; (1 + \varepsilon)^n \leq g(x) < (1 + \varepsilon)^{n+1} \right\}.$$

On vérifie d'abord que

$$(1 + \varepsilon)^n \mu(A_n) \leq \int_{A_n} f(y) d\mu(y), \quad (1.210)$$

En effet,  $A_n$  est mesurable. Soient  $\delta > 0$  et  $U$  un ouvert contenant  $A_n$ . Pour tout  $x \in A_n$ , il existe  $r_x > 0$  tel que, pour tout  $r \in ]0, r_x[$ ,  $B_f(x, r) \subset U$  et  $\frac{1}{\mu(B_f(x, r))} \int_{B_f(x, r)} f(y) d\mu(y) \geq (1 + \varepsilon)^n - \delta$ . Par le lemme de Vitali, il existe une famille au plus dénombrable  $(x_i)_{i \geq 1} \in A_n$  et une famille au plus dénombrable  $(r_i)_{i \geq 1} > 0$  tels que  $\mu\left(A_n \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_f(x_i, r_i)\right) = 0$ . Alors

$$\begin{aligned} ((1 + \varepsilon)^n - \delta) \mu(A_n) &\leq ((1 + \varepsilon)^n - \delta) \sum_{i \geq 1} \mu(B_f(x_i, r_i)) \\ &\leq \sum_{i \geq 1} \int_{B_f(x_i, r_i)} f(y) d\mu(y) \\ &\leq \int_U f(y) d\mu(y). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient

$$(1 + \varepsilon)^n \mu(A_n) \leq \int_U f(y) d\mu(y),$$

et en prenant la borne inférieure sur tous les ouverts  $U$  contenant  $A_n$ , on obtient bien (1.210). On en déduit

$$\begin{aligned}
\int_F g(x) d\mu(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{A_n} g(x) d\mu(x) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + \varepsilon)^{n+1} \mu(A_n) \\
&\leq (1 + \varepsilon) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{A_n} f(x) d\mu(x) \\
&= (1 + \varepsilon) \int_F f(x) d\mu(x).
\end{aligned} \tag{1.211}$$

On vérifie ensuite, comme pour (1.208), que

$$\int_{A_n} f(y) d\mu(y) \leq (1 + \varepsilon)^{n+1} \mu(A_n). \tag{1.212}$$

De plus,  $\int_{\{z \in X; g(z)=0\}} f(y) d\mu(y) = 0$ , car pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , l'inégalité (1.212) et le fait que  $\mu(A_n) \leq \mu(X) < +\infty$  donnent

$$\int_{\{z \in X; g(z)=0\}} f(y) d\mu(y) \leq \sum_{k \leq n} \int_{A_k} f(y) d\mu(y) \leq C(1 + \varepsilon)^n,$$

et il suffit de faire tendre  $n$  vers  $-\infty$ . On en déduit que

$$\begin{aligned}
\int_F f(x) d\mu(x) &= \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{A_n} f(x) d\mu(x) \\
&\leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (1 + \varepsilon)^{n+1} \mu(A_n) \\
&\leq (1 + \varepsilon) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \int_{A_n} g(x) d\mu(x) \\
&= (1 + \varepsilon) \int_F g(x) d\mu(x).
\end{aligned} \tag{1.213}$$

En combinant (1.211) et (1.213), on obtient que, pour tout  $F \subset X$ ,  $\int_F f(x) d\mu(x) = \int_F g(x) d\mu(x)$ , ce qui montre que  $f = g$  presque partout sur  $X$ .  $\square$

**Remarque 1.214.** En partant du théorème 1.202, on peut développer une théorie de la différentiation des mesures de Radon dans des espaces de nature homogène et obtenir une version du théorème de Radon-Nikodym dans ce cadre ([64, p.82]).

Voici une application importante du théorème 1.202 : la décomposition de Calderón-Zygmund pour des fonctions de  $L^1(X)$ .

**Théorème 1.215.** [137, Chapter 1, Theorem 2] Soient  $(X, d, \mu)$  un espace de nature homogène. Alors il existe  $C > 0$  et  $N \geq 1$  avec les propriétés suivantes : pour tous  $f \in L^1(X)$  et  $\lambda > \frac{C_1}{\mu(X)} \|f\|_1$ , où  $C_1$  est la constante apparaissant dans l'assertion 1 du théorème 1.165, il existe des fonctions  $g$  et  $b$  sur  $X$ , une famille au plus dénombrable de fonctions  $(b_k)_{k \geq 1}$  sur  $X$  et une famille au plus dénombrable de boules  $(B_k)_{k \geq 1}$  telles que :

1. pour tout  $x \in X$ ,  $x$  appartient au plus à  $N$  boules  $B_k$ ,
2. pour tout  $x \in X$ ,  $f(x) = g(x) + b(x)$  et  $b(x) = \sum_{k \geq 1} b_k(x)$ ,
3.  $|g(x)| \leq C\lambda$  pour presque tout  $x \in X$ ,
4. pour tout  $k \geq 1$ , le support de  $b_k$  est inclus dans  $B_k$ ,  $\int_{B_k} b_k(x) d\mu(x) = 0$  et  $\|b_k\|_1 \leq C\lambda\mu(B_k)$ ,

$$5. \sum_{k \geq 1} \mu(B_k) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1.$$

La preuve utilise une version de la décomposition de Whitney dans les espaces doublants (voir le lemme 1.51, l'exercice 1.234 et le théorème 2.59 du chapitre 2) :

**Proposition 1.216.** [64, Proposition 4.1.15] Soit  $(X, d)$  un espace doublant (voir la définition 1.108). Alors, il existe  $M \geq 1$  avec la propriété suivante : pour tout ouvert  $O \subsetneq X$ , il existe une famille au plus dénombrable de boules  $(B_k)_{k \geq 1}$  telles que :

1.  $\bigcup_{k \geq 1} B_k = O$ ,
2. tout point de  $X$  appartient au plus à  $M$  boules  $2B_k$ ,
3. pour tout  $k \geq 1$ ,  $16B_k \cap (X \setminus O) \neq \emptyset$ ,

où, pour toute boule  $B = B(z, r)$  et tout  $\lambda > 0$ ,  $\lambda B := B(z, \lambda r)$ .

*Preuve de la proposition 1.216 :* pour tout  $x \in X$ , on pose  $d(x) = d(x, X \setminus O)$ . Alors, pour tout  $x \in O$ ,  $d(x) > 0$  car  $O$  est ouvert et  $d(x) < +\infty$  car  $O \neq X$ .

Pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , soit  $\mathcal{F}_j$  la famille des boules  $B\left(x, \frac{1}{40}d(x)\right)$  avec  $x \in O$  et  $2^{j-1} < d(x) \leq 2^j$ . Par le lemme 5r, il existe une famille  $\mathcal{G}_j \subset \mathcal{F}_j$  au plus dénombrable et formée de boules deux à deux disjointes, et telle que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{F}_j} B \subset \bigcup_{B \in \mathcal{G}_j} 5B.$$

On note  $(B_k)_{k \geq 1}$  la famille des boules obtenues en réunissant toutes les boules  $5B$  pour toutes les boules  $B$  de  $\bigcup_{j \geq 1} \mathcal{G}_j$ . Les boules  $B_k$  sont de la forme  $B(x, \frac{1}{8}d(x))$ , donc elles satisfont les propriétés 1 et 3.

On vérifie maintenant la propriété 2. Soit  $x \in X$ . On suppose que  $x$  appartient aux boules  $2B_1, \dots, 2B_N$  pour un  $N \geq 1$ . On peut supposer que  $d(x_1) \geq d(x_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ .

Soit  $i \in \llbracket 2, N \rrbracket$ . Alors

$$d(x_1, x_i) \leq d(x_1, x) + d(x, x_i) \leq \frac{1}{4}(d(x_1) + d(x_i)), \quad (1.217)$$

ce qui montre que  $d(x_1) \leq d(x_1, x_i) + d(x_i) \leq \frac{1}{4}d(x_1) + \frac{5}{4}d(x_i)$ , donc

$$d(x_1) \leq \frac{5}{3}d(x_i). \quad (1.218)$$

De plus, par (1.217) et le fait que  $d(x_i) \leq d(x_1)$ ,

$$B\left(x_i, \frac{1}{4}d(x_i)\right) \subset B\left(x_1, \frac{1}{2}d(x_i) + \frac{1}{4}d(x_1)\right) \subset B\left(x_1, \frac{3}{4}d(x_1)\right).$$

Ces conclusions restent vraies si  $i = 1$ .

Si  $i \neq k$  et si  $x_i, x_k$  sont les centres de boules de la même famille  $\mathcal{F}_j$ , les boules  $B(x_i, \frac{1}{40}d(x_i))$  et  $B(x_k, \frac{1}{40}d(x_k))$  sont disjointes, de sorte que

$$d(x_i, x_k) \geq \min\left(\frac{1}{40}d(x_i), \frac{1}{40}d(x_k)\right) \geq \frac{1}{80}d(x_1),$$

où la dernière inégalité provient de (1.218). Cela signifie que les  $x_i$  qui sont les centres de boules de la même famille  $\mathcal{F}_j$  forment une famille  $\frac{1}{80}d(x_1)$ -séparée de points appartenant tous à la boule  $B\left(x_1, \frac{3}{4}d(x_1)\right)$ , donc il y a au plus  $L$  points dans cette famille, où  $L \geq 1$  est un entier ne dépendant que de  $X$  (voir le lemme 1.109).

Finalement, on suppose que  $x_1 \in \mathcal{F}_{j_1}$ . Pour tout  $i \in \llbracket 2, M \rrbracket$ ,

$$d(x_1) \geq d(x_i) \geq \frac{1}{2}d(x_1),$$

de sorte que

$$2^{j_1-2} < d(x_i) \leq 2^{j_1}.$$

Cela signifie que les points  $x_1, \dots, x_M$  sont les centres de boules de la famille  $\mathcal{F}_{j_1}$  ou de la famille  $\mathcal{F}_{j_1-1}$ , donc que tout point  $x$  de  $X$  appartient au plus à  $2L$  boules de la famille  $(B_k)_{k \geq 1}$ .  $\square$

*Preuve du théorème 1.215 :* on définit

$$O := \{x \in X; Mf(x) > \lambda\},$$

où  $M$  est la fonction maximale de Hardy-Littlewood non centrée définie par (1.164). L'ensemble  $O$  est un ouvert de  $X$  et, par le théorème 1.165,

$$\mu(O) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1 < \mu(X), \quad (1.219)$$

si bien que  $O \neq X$ . Soient  $(B_k)$  les boules fournies par le lemme 1.216, de sorte que la propriété 1 est satisfaite. Pour tout  $k \geq 1$ , on appelle  $\chi_k$  la fonction caractéristique de  $B_k$ . On observe que

$$\sum_{k \geq 1} \mu(B_k) = \int_X \chi_{B_k}(x) d\mu(x) \leq M\mu(O) \leq \frac{C}{\lambda} \|f\|_1,$$

ce qui donne bien 5.

On définit, pour tout  $k \geq 1$ , la fonction  $\eta_k$  par

$$\eta_k(x) := \frac{\chi_k(x)}{\sum_{l \geq 1} \chi_l(x)},$$

puis, pour tout  $x \in X$ ,

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \notin O, \\ \sum_{k \geq 1} \frac{1}{\mu(B_k)} \left( \int_X f(y) \eta_k(y) d\mu(y) \right) \chi_k(x) & \text{si } x \in O, \end{cases}$$

et, pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in X$ ,

$$b_k(x) := f(x) \chi_k(x) - \frac{1}{\mu(B_k)} \left( \int_X f(y) \eta_k(y) d\mu(y) \right) \chi_k(x).$$

La propriété 2 est clairement vérifiée. Si  $x \notin O$ , le théorème de différentiation de Lebesgue montre que

$$|g(x)| = |f(x)| \leq Mf(x) \leq \lambda.$$

Si  $x \notin O$  et si  $k \geq 1$  est tel que  $x \in B_k$ , soit  $y \in 16B_k \cap (X \setminus O)$ . Alors

$$\frac{1}{\mu(B_k)} \left| \int_X f(y) \eta_k(y) d\mu(y) \right| \chi_k(x) \leq \frac{C}{\mu(16B_k)} \int_{16B_k} |f(y)| d\mu(y) \leq CMf(y) \leq C\lambda,$$

et comme tout point de  $X$  appartient à au plus  $M$  boules  $B_k$ , on obtient bien 3.

Les deux premières conclusions de 4 sont immédiates. De plus, par le même raisonnement,

$$\int_X |f(x)\chi_k(x)| d\mu(x) = \int_{B_k} |f(x)| d\mu(x) \leq C\lambda\mu(B_k)$$

et

$$\int_X |f(x)\eta_k(x)| d\mu(x) \leq \int_{B_k} |f(x)| d\mu(x) \leq C\lambda\mu(B_k),$$

de sorte que

$$\int_X |b_k(x)| d\mu(x) \leq 2C\lambda\mu(B_k),$$

ce qui termine la preuve. □

## 8 Exercices

Les exercices qui suivent concernent les mesures et le calcul intégral.

**Exercice 1.220.** Soit  $X$  un ensemble non vide.

1. Quelle est la tribu de  $X$  engendrée par les singletons de  $X$  ?
2. On suppose que  $X$  a au moins 2 éléments. Quelle est la tribu de  $X$  engendrée par toutes les paires de  $X$  ?
3. On fixe  $A \subset X$ . Quelle est la tribu de  $X$  engendrée par toutes les parties de  $X$  contenant  $A$  ?
4. Montrer que  $X$  est fini si, et seulement si, l'ensemble de toutes les parties finies de  $X$  est une tribu.
5. Montrer que  $X$  est au plus dénombrable si, et seulement si, l'ensemble de toutes les parties au plus dénombrables de  $X$  est une tribu.

**Exercice 1.221.** Soit  $X$  un ensemble.

1. On suppose que  $X = \bigcup_{1 \leq i \leq n} X_i$  où les  $X_i$  sont tous non vides et deux à deux disjoints.
  - (a) Montrer que la tribu de  $X$  engendrée par  $X_1, \dots, X_n$  est exactement l'ensemble des parties de  $X$  de la forme  $\bigcup_{i \in I} X_i$ , où  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ .
  - (b) En déduire que cette tribu est finie et de cardinal  $2^n$ .
2. On suppose maintenant que  $X = \bigcup_{n \geq 1} X_n$  où les  $X_n$  sont tous non vides et deux à deux disjoints. Décrire la tribu de  $X$  engendrée par les  $(X_n)_{n \geq 1}$  et montrer qu'elle n'est pas dénombrable.

**Exercice 1.222** (Il n'existe pas de tribu dénombrable). Soit  $X$  un ensemble. Soit  $\mathcal{T}$  une tribu sur  $X$ , supposée finie ou dénombrable. Pour tout  $x \in X$ , on pose  $T(x) := \bigcap_{A \subset X, A \ni x} A$ . En d'autres termes,

$T(x)$  est l'intersection des parties de  $X$  appartenant à  $\mathcal{T}$  et contenant  $x$ .

1. Montrer que, pour tout  $x \in X$ ,  $T(x) \in \mathcal{T}$ .
2. Vérifier que, pour tout  $x \in X$ ,  $T(x)$  est le plus petit élément de  $\mathcal{T}$  (au sens de l'inclusion) contenant  $x$ .
3. Soient  $x, y \in X$ . On suppose que  $y \in T(x)$ . Montrer que  $T(x) = T(y)$ .
4. Soient  $x, y \in X$ . Montrer que  $T(x) = T(y)$  ou  $T(x) \cap T(y) = \emptyset$ .
5. Soit  $\mathcal{E}$  l'ensemble des parties de  $X$  qui sont de la forme  $T(x)$  pour un  $x \in X$ . Montrer que la tribu de  $X$  engendrée par  $\mathcal{E}$  est  $\mathcal{T}$ .



6. En déduire que  $\mathcal{T}$  est finie.

**Exercice 1.223.** Soit  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}^n$ . Montrer que  $\mu$  est une mesure de Radon si, et seulement si,  $\mu$  est borélienne régulière et localement finie (ce qui veut dire que, pour tout  $x \in X$ , il existe  $r > 0$  tel que  $\mu(B(x, r)) < +\infty$ ).

**Exercice 1.224.** [Lemme de Steinhaus] Soient  $n \geq 1$  et  $A \subset \mathbb{R}^n$  tel que  $\mathcal{L}^n(A) > 0$ . On veut montrer que 0 appartient à l'intérieur de  $A - A$ .

1. Justifier qu'il suffit de le faire quand  $\mathcal{L}^n(A) < +\infty$ .
2. Vérifier qu'il existe un compact  $K$  et un ouvert  $U$  tels que  $K \subset A \subset U$  et  $2\mu(K) > \mu(U)$ .
3. Montrer qu'il existe un ouvert  $V \subset \mathbb{R}^n$  contenant 0 tel que  $K + V \subset U$ .
4. Vérifier que, pour tout  $v \in V$ ,  $(K + v) \cap K \neq \emptyset$  et conclure.

**Exercice 1.225** (Application du lemme de Steinhaus aux sous-groupes additifs de  $\mathbb{R}^n$ ). Soit  $G \subset \mathbb{R}^n$  un sous-groupe additif de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $G \neq \mathbb{R}^n$  et que  $G$  est mesurable (pour la mesure de Lebesgue). Montrer que  $\mathcal{L}^n(G) = 0$ .

**Exercice 1.226** (Une partie de  $\mathbb{R}$  non mesurable). Pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , on dit que  $x \sim y$  si, et seulement si,  $x - y \in \mathbb{Q}$ .

1. Vérifier que  $\sim$  est une relation d'équivalence sur  $\mathbb{R}$ .
2. Pour toute classe d'équivalence  $C$  pour  $\sim$ , on choisit un élément  $x \in C \cap [0, 1[$  (pourquoi est-il possible d'en trouver un dans cet intervalle ?). Soit  $A$  l'ensemble ainsi obtenu.
3. Vérifier que

$$[0, 1[ \subset \bigcup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} A + q \subset [-1, 2],$$

et que, si  $q_1 \neq q_2$  avec  $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ , alors  $(A + q_1) \cap (A + q_2) = \emptyset$ .

4. Montrer que  $A$  n'est pas mesurable.

**Exercice 1.227** (Une variante du lemme d'Egoroff). Soient  $(X, \mu)$  un espace mesuré de mesure finie,  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$  telle que  $\int_X |f_n(x)|^2 d\mu(x) < +\infty$  pour tout  $n \geq 1$  et  $f$  une fonction mesurable sur  $X$  telle que  $\int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty$ . On suppose que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour presque tout  $x \in X$ . Montrer que, pour tout  $p \in ]0, 2[$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_X |f_n(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0,$$

mais que cette conclusion n'est plus valable si  $p = 2$ .

**Exercice 1.228.** Pour tout  $n \geq 1$  et tout entier  $j \in \mathbb{N}$ , on pose

$$f_n(j) := \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq j \leq n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que  $f_n(j) \rightarrow 0$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$  mais que la conclusion du théorème d'Egoroff n'est pas satisfaite dans ce cas.

**Exercice 1.229.** Soient  $(X, \mu)$  un espace mesuré,  $1 \leq p < \infty$ ,  $(f_n)_{n \geq 1}$  une suite de fonctions mesurables sur  $X$  et  $f$  une fonction mesurable sur  $X$  telles que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  pour presque tout  $x \in X$  et  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$ . On veut montrer que  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ .

1. Justifier qu'il suffit de le faire quand  $\|f_n\|_p = \|f\|_p = 1$  pour tout  $n \geq 1$ .

2. Soit  $\varepsilon > 0$ .
  - (a) Justifier qu'on peut écrire  $X = A \cup B$  avec  $A \cap B = \emptyset$  et  $\int_A |f(x)|^p d\mu(x) < \varepsilon$ .
  - (b) Vérifier que  $\overline{\lim} \int_A |f_n(x)|^p d\mu(x) \leq \varepsilon$ .
  - (c) Conclure en utilisant le lemme d'Egoroff sur  $B$ .
3. Que se passe-t-il si on ne suppose plus  $\|f_n\|_p \rightarrow \|f\|_p$  ?

**Exercice 1.230.** Soit  $(n_k)_{k \geq 1}$  une suite d'entiers strictement croissante. On note  $E$  l'ensemble des  $x \in [0, 2\pi]$  tels que la suite  $(\sin(n_k x))_{k \geq 1}$  converge.

1. Montrer que, pour presque tout  $x \in E$ ,  $\sin(n_k x) \rightarrow \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$  (on utilisera le fait que  $2 \sin^2 u = 1 - \cos(2u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}$ ).
2. En déduire que  $\mathcal{L}^1(E) = 0$ .

**Exercice 1.231.** [Contre-exemples pour le théorème de Fubini]

1. Soit  $(\delta_n)_{n \geq 1} \in ]0, 1[$  une suite strictement croissante telle que  $\lim \delta_n = 1$ . Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $g_n$  une fonction continue sur  $[0, 1]$ , à support compact dans  $] \delta_n, \delta_{n+1}[$  et telle que  $\int_0^1 g_n(t) dt = 1$ . Pour tous  $x, y \in [0, 1]$ , on pose

$$f(x, y) := \sum_{n \geq 1} (g_n(x) - g_{n+1}(x)) g_n(y).$$

Vérifier que  $f$  est bien définie et que

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dx \right) dy.$$

Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Fubini dans ce cas ?

2. Pour tous  $x, y \in [0, 1]$ , on pose

$$f(x, y) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = y, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $\lambda$  la mesure de comptage sur  $[0, 1]$ . Vérifier que

$$\int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) dy \right) d\lambda(x) \neq \int_0^1 \left( \int_0^1 f(x, y) d\lambda(x) \right) dy.$$

Pourquoi ne peut-on pas appliquer le théorème de Fubini dans ce cas ?

**Exercice 1.232.** [Une version  $C^\infty$  du lemme d'Urysohn] Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $K \subset \Omega$  un compact. On veut montrer qu'il existe  $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$  telle que  $\varphi(x) = 1$  pour tout  $x \in K$ . Pour cela, on commence par fixer  $\varepsilon > 0$  tel que, pour tout  $x \in K$ ,  $d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > 2\varepsilon$  et on pose, pour tout  $\eta > 0$ ,  $K_\eta := \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, K) \leq \eta\}$ , de sorte que  $K_{2\varepsilon} \subset \Omega$ .

1. Vérifier qu'il existe  $\psi$  continue sur  $\mathbb{R}^n$ , à support inclus dans  $K_{2\varepsilon}$ , telle que  $\psi(x) = 1$  pour tout  $x \in K_\varepsilon$ .
2. Utiliser une convolution convenable de  $\psi$  pour conclure.

**Exercice 1.233.** Soit  $U \subset \mathbb{R}$  un ouvert.

1. Montrer que  $U$  est une réunion au plus dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.
2. En déduire que  $U$  est une réunion d'intervalles dont les bornes sont rationnelles ou valent  $+\infty$  ou  $-\infty$ .

**Exercice 1.234.** Soit  $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^n$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit  $\mathcal{D}_k$  comme la collection des cubes de Whitney de  $\mathbb{R}^n$  de côté  $2^{-k}$ . On définit aussi

$$\Omega_k := \left\{ x \in \Omega; 2\sqrt{n}2^{-k} < d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \leq 2\sqrt{n}2^{-k} \right\}.$$

Enfin, soit  $\mathcal{F}'$  la collection des cubes  $Q \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $Q \in \mathcal{D}_k$  pour un  $k \in \mathbb{Z}$  et  $Q \cap \Omega \neq \emptyset$ .

1. Vérifier que  $\Omega = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \Omega_k$ .
2. Montrer que, pour tout cube  $Q \in \mathcal{F}'$ , dont la longueur du côté est notée  $l(Q)$ ,  $\sqrt{n}l(Q) \leq d(Q, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \leq 4\sqrt{n}l(Q)$ .
3. Vérifier que  $\Omega = \bigcup_{Q \in \mathcal{F}'} Q$ .  
Pour tout cube  $Q \in \mathcal{F}'$ , soit  $Q^{\max}$  le cube maximal appartenant à  $\mathcal{F}'$  qui contient  $Q$ . On définit  $\mathcal{F}$  comme la collection de tous les cubes  $Q^{\max}$  ainsi obtenus.
4. Montrer que les cubes de la collection  $\mathcal{F}$  ont des intérieurs deux à deux disjoints et que leur réunion vaut  $\Omega$ .
5. Vérifier que, pour tous cubes  $Q_1$  et  $Q_2$  dans  $\mathcal{F}$  tels que  $\overline{Q_1} \cap \overline{Q_2} \neq \emptyset$ , alors  $\frac{1}{4} \leq \frac{l(Q_1)}{l(Q_2)} \leq 4$ .
6. Montrer enfin que, pour tout  $Q \in \mathcal{F}$ , il existe au plus  $12^n$  cubes de la collection  $\mathcal{F}$  dont l'adhérence rencontre celle de  $Q$ .

On trouvera une approche un peu différente de ce résultat au chapitre 2, théorème 2.59.

**Exercice 1.235.** Sur  $\mathbb{R}^2$ , on considère la mesure suivante :

$$\mu(A) := \mathcal{L}^1(\{x \in \mathbb{R}; (x, 0) \in A\})$$

pour tout  $A \subset \mathbb{R}^2$ .

1. Vérifier que  $\mu$  est une mesure de Radon.
2. Soit  $A := \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ . On considère les boules  $B_f((x, y), y) \subset \mathbb{R}^2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et tout  $y > 0$ .
  - (a) Vérifier que ces boules vérifient bien les hypothèses de la proposition 1.88.
  - (b) Montrer que, pour toute sous-famille dénombrable  $(B_i)_{i \geq 1}$  de la famille de boules considérée,

$$\mu \left( A \setminus \bigcup_{i \geq 1} B_i \right) = \mu(A).$$

- (c) En déduire que la conclusion de la proposition 1.88 n'est pas satisfaite.

Les exercices qui suivent concernent les espaces  $L^p$ .

**Exercice 1.236.** Vérifier que la fonction  $t \mapsto \frac{1}{t}$  appartient à  $L_w^1(]0, +\infty[)$  mais pas à  $L^1(]0, +\infty[)$ .

Le but des exercices suivants est de présenter une approche de la dualité entre espaces  $L^p$ , inspirée par [149, Sections 14 et 16].

**Exercice 1.237.** Soit  $X$  un espace de Banach. On dit que  $X$  est lisse si, et seulement si, pour tout  $u \neq 0$  et tout  $v \in X$ , la limite suivante existe :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|u + \varepsilon v\| - \|u\|}{\varepsilon}.$$

En d'autres termes, la fonction  $F(u) := \|u\|$  possède, en tout  $u \neq 0$ , une dérivée directionnelle selon tout vecteur. On note  $F'(u)(v)$  cette dérivée.

On dit que  $X$  est uniformément convexe si, et seulement si, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tous  $u, v \in X$  avec  $\|u\| = \|v\| = 1$  et  $\|u - v\| \geq 2\varepsilon$ ,

$$\left\| \frac{1}{2}(u + v) \right\| \leq 1 - \delta.$$

1. Soit  $X$  un espace lisse. Montrer que, pour tout  $u \neq 0$ ,  $v \mapsto F'(u)(v) \in X'$ .
2. Soit  $X$  un espace lisse. Montrer que, pour tout  $u \neq 0$ ,

$$F'(u)(u) = \|u\| = \max_{f \in X', \|f\|=1} f(u)$$

3. Soient  $X$  un espace lisse et  $f \in X'$  non nulle. Si  $u \in X$ ,  $\|u\| = 1$  et  $f(u) = \|f\|$ , montrer que  $f = \|f\| F'(u)$ .
4. Soit  $X$  un espace uniformément convexe. Montrer que, pour tout  $f \in X'$  non nulle, il existe un unique  $u \in X$  avec  $\|u\| = 1$  et  $f(u) = \|f\|$ .
5. On suppose  $X$  lisse et uniformément convexe. Montrer que, pour tout  $f \in X'$  non nulle, il existe un unique  $u \in X$  avec  $\|u\| = 1$ ,  $f(u) = \|f\|$  et  $f = \|f\| F'(u)$ .

**Exercice 1.238.** Soient  $(X, \mu)$  un espace mesuré et  $p \in ]1, +\infty[$ . Soient  $f, g \in L^p(X, \mu)$ .

1. On suppose  $1 < p \leq 2$ . Montrer que

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \geq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p - \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p.$$

On pourra considérer les fonctions

$$\alpha(r) = (1 + r)^{p-1} + (1 - r)^{p-1}$$

et

$$\beta(r) = \left( (1 + r)^{p-1} + (1 - r)^{p-1} \right) r^{1-p}$$

pour  $0 \leq r \leq 1$ .

2. On suppose  $p \geq 2$ . Montrer que

$$\|f + g\|_p^p + \|f - g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p)^p - \left| \|f\|_p - \|g\|_p \right|^p.$$

**Exercice 1.239.** Soient  $(X, \mu)$  un espace mesuré et  $p \in ]1, +\infty[$ .

1. Montrer que  $L^p(X, \mu)$  est lisse et que, pour tout  $u \neq 0$  et tout  $v$ ,

$$F'(u)(v) = \|u\|_p^{1-p} \int_X |u(x)|^{p-2} u(x)v(x) d\mu(x).$$

2. Montrer que  $L^p(X, \mu)$  est uniformément convexe.
3. En déduire que, pour toute  $L \in (L^p(X, \mu))'$ , il existe une unique  $g \in L^{p'}(X, \mu)$  telle que

$$L(h) = \int_X g(x)h(x) d\mu(x)$$

pour toute  $h \in L^p(X, \mu)$  et  $\|g\|_{L^{p'}(X, \mu)} = \|L\|$ . Ici,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

L'exercice suivant utilise la :

**Définition 1.240.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

1. Si  $l \in \mathbb{R}^m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , on dit que  $l$  est la limite approchée de  $f$  en  $x$  si, et seulement si,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{y \in B(x, r); |f(y) - l| \geq \varepsilon\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

On note  $\lim_{y \rightarrow x} \text{app } f(y) = l$ .

2. Si  $x \in \mathbb{R}^n$ , on dit que  $f$  est approximativement continue en  $x$  si, et seulement si,  $\lim_{y \rightarrow x} \text{app } f(y) = f(x)$ .

**Exercice 1.241.** On suppose que  $l_1, l_2 \in \mathbb{R}^m$  sont les limites approchées de  $f$  en  $x$ . Montrer que  $l_1 = l_2$ .

**Exercice 1.242.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que  $f$  est approximativement continue en presque tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ . On pourra utiliser le théorème de différentiation de Lebesgue.

**Exercice 1.243.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  mesurable. On veut montrer que  $f$  est approximativement continue en presque tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ .

1. Justifier que, pour tout  $i \geq 1$ , il existe un compact  $K_i \subset \mathbb{R}^n$  tel que :

(a)  $K_i \cap K_j = \emptyset$  pour tous  $i \neq j$ ,

(b)  $\mathcal{L}^n \left( \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i \geq 1} K_i \right) = 0$ ,

(c) pour tout  $i \geq 1$ ,  $f|_{K_i}$  est continue.

Indication : si  $K_1, \dots, K_i$  sont construits, il existe un compact  $K_{i+1} \subset B(0, i+1) \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq i} K_j$  tel

que  $\mathcal{L}^n \left( B(0, i+1) \setminus \bigcup_{1 \leq j \leq i+1} K_j \right) \leq \frac{1}{i+1}$  et  $f|_{K_{i+1}}$  est continue.

2. Vérifier que, pour tout  $i \geq 1$  et presque tout  $x \in K_i$ ,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus K_i)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0. \quad (1.244)$$

3. On pose  $A := \{x \in \mathbb{R}^n; \text{ il existe } i \geq 1 \text{ tel que } x \in K_i \text{ et (1.244) est vérifiée}\}$ . Montrer que  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$  et que, pour tout  $x \in A$ ,  $f$  est approximativement continue en  $x$ .

**Exercice 1.245.** Si  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un opérateur linéaire, on pose  $\Delta(L) := \mathcal{L}^n(L(Q_0))$  avec  $Q_0 := [0, 1]^n$ .

Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue et ouverte. Soit  $x \in \Omega$ . On suppose  $T$  différentiable en  $x$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On veut montrer qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout cube  $Q \subset \Omega$  contenant  $x$  avec  $l(Q) < \delta$  (où  $l(Q)$  est la longueur du côté de  $Q$ ),

$$\left| \frac{\mathcal{L}^n(T(Q))}{\mathcal{L}^n(Q)} - \Delta(DT(x)) \right| < \varepsilon. \quad (1.246)$$

1. Justifier qu'on peut supposer  $x = 0$  et  $T(x) = 0$ . Dans la suite, on pose  $L = DT(0)$ .
2. On suppose d'abord  $L$  inversible. Pour tout  $x \in \Omega$ , on pose  $S(x) := L^{-1}(T(x))$ . Soit  $\eta \in ]0, \frac{1}{4}[$  tel que

$$1 - \varepsilon < (1 - 2\eta)^n < (1 + 2\eta)^n < 1 + \varepsilon.$$

(a) Vérifier que  $S$  est continue sur  $\Omega$ , différentiable en 0 et que  $DS(0) = \text{Id}$ .

(b) En déduire qu'il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $|x| < \delta$ ,  $|S(x) - x| \leq \eta|x|$ .

(c) Soient  $\lambda \in ]0, \delta[$  et  $Q$  un cube contenant 0 avec  $l(Q) = \lambda$ . Soient  $Q_1$  (respectivement  $Q_2$ ) les cubes de même centre que  $Q$  tels que  $l(Q_1) = (1 - 2\eta)\lambda$  (respectivement  $l(Q_2) = (1 + 2\eta)\lambda$ ).

i. Vérifier que  $S(Q) \subset Q_2$ .

ii. On pose  $E_1 := Q_1 \cap S(Q)$  et  $E_2 := Q_1 \setminus S(Q)$ . Montrer que  $E_1$  et  $E_2$  sont ouverts et en déduire que  $Q_1 \subset S(Q)$ .

(d) Dédurre de ce qui précède que, pour tout cube  $Q$  contenant 0 avec  $l(Q) < \delta$ ,

$$\left| \frac{\mathcal{L}^n(S(Q))}{\mathcal{L}^n(Q)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

(e) Montrer que (1.246) est satisfaite.

3. On suppose maintenant  $L$  non inversible. Pour tout  $\eta > 0$ , on définit

$$E_\eta := \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, L(Q_0)) < \eta\}.$$

(a) Justifier qu'il existe  $\eta > 0$  tel que  $\mathcal{L}^n(E_\eta) < \varepsilon$ .

(b) Montrer l'existence de  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|x| < \delta$ ,  $|T(x) - L(x)| \leq \eta|x|$ .

(c) Montrer que (1.246) est encore satisfaite.

**Exercice 1.247.** Soient  $n \geq 1$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $T : \Omega \rightarrow T(\Omega)$  une application différentiable. On suppose  $T$  injectif et  $T^{-1}$  continu sur  $T(\Omega)$ .

1. Montrer que, pour tout borélien  $E \subset \Omega$ ,  $T(E)$  est borélien. Dans la suite, on pose  $m(E) := \mathcal{L}^n(T(E))$  pour tout borélien  $E \subset \Omega$ .
2. Vérifier que  $m$  est une mesure borélienne sur  $\Omega$ .
3. En utilisant la conclusion et les notations de l'exercice 1.245, montrer que, pour tout  $x \in \Omega$ ,  $D_{\mathcal{L}^n}m(x) = \Delta(DT(x))$ , la quantité  $D_{\mathcal{L}^n}m(x)$  étant calculée avec des cubes au lieu des boules euclidiennes.
4. Montrer que  $m \ll \mathcal{L}^n$  et que, pour tout ensemble borélien  $E \subset \Omega$ ,

$$\mathcal{L}^n(T(E)) = \int_E \Delta(DT(x)) dx. \quad (1.248)$$

5. Dédurre de ce qui précède que, pour tout ensemble mesurable  $E \subset \Omega$ ,  $T(E)$  est mesurable et que (1.248) est encore satisfaite.
6. Montrer que, pour toute fonction  $f$  mesurable positive ou intégrable sur  $T(\Omega)$ ,

$$\int_{T(\Omega)} f(y) dy = \int_{\Omega} (f \circ T)(x) \Delta(DT(x)) dx.$$

7. Montrer que  $\Delta(DT(x)) = |\det DT(x)|$  pour tout  $x \in \Omega$ .

**Exercice 1.249.** [53, Chapter 2, exercice 2.1.12] Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$M_d f(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q |f(y)| dy,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les cubes dyadiques contenant  $x$ .

1. On suppose  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que, pour tout  $\lambda > 0$ ,

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; |M_d f(x)| > \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| dy.$$

2. Soit  $p \in ]1, +\infty[$ . Montrer que

$$\|M_d f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**Exercice 1.250.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose qu'il existe  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $Mf(x) = 0$ . Montrer que  $f$  est nulle presque partout.

**Exercice 1.251.** Soit  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ . On suppose que  $f(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et que  $f$  n'est pas nulle presque partout.

1. Montrer qu'il existe  $c > 0$  telle que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  avec  $|x| \geq 1$ ,  $Mf(x) \geq \frac{c}{|x|^n}$ .
2. En déduire que  $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Exercice 1.252.** Pour tout  $x \in ]0, 1]$ , soit  $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$  et on pose  $f(0) = 0$ . Montrer que  $f$  est dérivable sur  $[0, 1]$  mais que  $f' \notin L^1([0, 1])$ .

**Exercice 1.253.** [Ensembles de Cantor] Soit  $(\alpha_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels strictement positifs tels que  $\sum_{n \geq 0} 2^n \alpha_n \leq 1$ . On pose  $A_0 = [0, 1]$ . Si on a construit  $A_n \subset [0, 1]$  pour un entier  $n \geq 0$ , comme une réunion de  $2^n$  segments deux à deux disjoints, on construit  $A_{n+1} \subset A_n$  comme l'ensemble obtenu à partir de  $A_n$  en retirant, de chaque segment composant  $A_n$ , un intervalle ouvert centré de longueur  $\alpha_n$ . On pose ensuite  $K = \bigcap_{n \geq 0} A_n$ .

1. Montrer que  $K$  est un compact d'intérieur vide.
2. Montrer que  $\mathcal{L}^1(K) = 1 - \sum_{n \geq 0} 2^n \alpha_n$ . En déduire que  $K$  peut être de mesure strictement positive.
3. Vérifier que  $K$  est en bijection avec  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 1.254.** On reprend la construction d'un ensemble de Cantor comme dans l'exercice 1.253. Soit  $K_0 = [0, 1]$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose qu'on a construit  $K_n \subset [0, 1]$  comme une réunion de  $2^n$  segments deux à deux disjoints, chacun de longueur  $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ , inclus dans  $[0, 1]$ . On retire alors de chacun de ces segments le tiers central et on note  $K_{n+1}$  la réunion des  $2^{n+1}$  segments deux à deux disjoints ainsi obtenus, chacun de longueur  $\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$ . Par exemple,  $K_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$ ,  $K_2 = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$ . On pose aussi  $K := \bigcap_{n \geq 0} K_n$ .

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$g_n := \left(\frac{3}{2}\right)^n \chi_{K_n}$$

et, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$f_n(x) := \int_0^x g_n(t) dt.$$

1. Montrer que  $\mathcal{L}^1(K) = 0$ .
2. Vérifier que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(0) = 0$ ,  $f_n(1) = 1$ ,  $f_n$  est continue et croissante sur  $[0, 1]$ , constante sur chaque intervalle contenu dans  $[0, 1] \setminus K_n$ .
3. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $I$  l'un des  $2^n$  segments dont la réunion constitue  $K_n$ . Montrer que

$$\int_I g_n(t) dt = \int_I g_{n+1}(t) dt = 2^{-n}.$$

4. En déduire que, pour tout  $x \in [0, 1] \setminus K_n$ ,  $f_{n+1}(x) = f_n(x)$ , et que, pour tout  $x \in K_n$ ,

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq 2^{-n+1}.$$

5. Montrer que la suite  $(f_n)_{n \geq 0}$  converge uniformément sur  $[0, 1]$  vers une fonction continue et croissante sur  $[0, 1]$ , vérifiant  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ , et que  $f'$  est dérivable de dérivée nulle en tout point de  $[0, 1] \setminus K$ . Comparer avec les théorèmes 1.184 et 1.187.

Remarque : prolongeons  $f$  en posant  $f(x) = 0$  pour  $x < 0$  et  $f(x) = 1$  pour  $x \geq 1$ . On note alors  $([a_k, b_k])_{k \geq 1}$  la suite des segments dyadiques  $[0, 1], [0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1], [0, \frac{1}{4}], [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \dots$ . On définit enfin

$$g(x) := \sum_{k \geq 1} \frac{1}{2^k} f\left(\frac{x - a_k}{b_k - a_k}\right).$$

On montre ([153]) que  $g$  est continue et *strictement* croissante sur  $[0, 1]$ , et que  $g$  est dérivable et de dérivée nulle presque partout.





## Chapitre 2

# Applications lipschitziennes et théorie géométrique de la mesure

### 1 Définition, exemples et propriétés élémentaires des applications lipschitziennes

Soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques et soit  $K \geq 0$  un réel.

**Définition 2.1.** On dit que l'application  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est  $K$ -lipschitzienne si pour tous  $x, y \in X$ , on a

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq K d_X(x, y). \quad (2.2)$$

Une application  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est lipschitzienne si elle est  $K$ -lipschitzienne pour un certain  $K \geq 0$ . Dans ce cas, on appelle constante de Lipschitz de  $f$ , et on note  $Lip(f)$ , la plus petite constante positive  $K$  pour laquelle on a (2.2). Ainsi,

$$Lip(f) = \sup_{x \neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x, y)}.$$

Si  $A \subset X$  est un sous-ensemble de  $X$ , l'application  $f$  est lipschitzienne sur  $A$  si l'estimation (2.2) est vérifiée pour tous les  $x, y$  de  $A$ . En d'autres termes,  $f : (A, d_A) \rightarrow (Y, d_Y)$  est lipschitzienne où  $d_A$  est la restriction de la distance  $d_X$  sur  $A$ . Enfin, l'application  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est localement lipschitzienne si pour tout  $x \in X$ , il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  dans  $X$  telle que  $f$  est lipschitzienne sur  $V_x$ .

**Remarque 2.3.** Dans le cas euclidien, une façon simple de démontrer qu'une fonction est lipschitzienne est d'utiliser (si possible) l'inégalité des accroissements finis. On peut ainsi voir que les fonctions sinus  $x \rightarrow \sin(x)$  et cosinus  $x \rightarrow \cos(x)$  sont 1-lipschitziennes. Voir l'exercice 2.186 dans lequel on se propose aussi de démontrer des propriétés élémentaires des fonctions lipschitziennes..

Un point important est qu'il existe toujours des applications lipschitziennes entre un espace métrique  $(X, d)$  (non vide) quelconque et  $\mathbb{R}$  muni de la distance euclidienne. En effet, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout  $x_0 \in X$ , l'application  $f_{x_0} : X \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f_{x_0}(x) = d(x, x_0)$  est lipschitzienne avec une constante de Lipschitz égale à 1. Dans le cadre des espaces métriques généraux, les applications lipschitziennes sont les plus régulières possibles et vont jouer le rôle des fonctions lisses (disons de classe  $C^\infty$ , notion qui n'a pas de sens a priori dans un espace métrique) de l'analyse euclidienne. En particulier, la densité des fonctions lipschitziennes dans bon nombre d'espaces fonctionnels (sous parfois certaines conditions sur l'espace métrique ambiant) sera très utile dans la suite. Voir l'exercice 2.187 à la fin du chapitre pour voir ce qui se passe dans le cadre des espaces  $L^p$ . Nous allons donner

une autre illustration de l'importance des fonctions lipschitziennes en présentant la notion de partition de l'unité. Elle sert parfois en analyse et en géométrie, dans la mesure où elle permet de construire de façon globale une fonction à partir de définitions seulement locales. Par exemple, la démonstration de théorèmes d'extension comme celui de Whitney (voir le théorème 2.61) repose sur une partition de l'unité adaptée comme nous le verrons plus tard. Nous allons présenter deux versions de la notion de partition de l'unité, l'une dans le cas euclidien avec des fonctions lisses, l'autre dans le cas métrique avec des fonctions lipschitziennes.

**Théorème 2.4.** Soit  $K$  un compact de  $\mathbb{R}^n$ . On suppose que  $K \subset \bigcup_{j=1}^N U_j$  où pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,  $U_j$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, il existe des fonctions  $\phi_0, \dots, \phi_N \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que

- (i) Pour tout  $j = 0, \dots, N$ ,  $0 \leq \phi_j \leq 1$  et  $\sum_{j=0}^N \phi_j = 1$ .
- (ii)  $\phi_0$  est à support dans  $\mathbb{R}^n \setminus K$  et pour  $j = 1, \dots, N$ ,  $\phi_j \in C_c^\infty(U_j)$ .

*Démonstration.* Cette démonstration est tirée de [149], elle utilise le lemme d'Urysohn que nous utiliserons sous la forme suivante (Voir le lemme 1.36 pour une version dans les espaces métriques).

**Lemme 2.5.** Soit  $U$  un voisinage ouvert d'un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, il existe une fonction  $\phi \in C_c^\infty(U)$  telle que  $0 \leq \phi \leq 1$  et sur  $K$ ,  $\phi = 1$ .

Comme  $K$  est compact, il existe un entier  $M \in \mathbb{N}$  et un recouvrement de  $K$  par des boules ouvertes  $B(x_k, r_k)$ ,  $k = 1, \dots, M$ , tels que pour tout  $k$ , il existe  $1 \leq j(k) \leq M$  avec  $B_f(x_k, 2r_k) \subset U_{j(k)}$ . Posons pour  $1 \leq j \leq N$ ,

$$K_j = \bigcup_{j(k)=j} B_f(x_k, 2r_k) \quad \widetilde{K} = \bigcup_{k=1}^M B_f(x_k, r_k) \quad U = \bigcup_{k=1}^M B(x_k, 2r_k).$$

Alors, le lemme précédent donne des fonctions  $\psi_j \in C_c^\infty(U_j)$ ,  $1 \leq j \leq N$ , avec  $0 \leq \psi_j \leq 1$  et  $\psi_j = 1$  sur  $K_j$ . De même, il existe  $\psi \in C_c^\infty(U)$  telle que  $0 \leq \psi \leq 1$  et  $\psi = 1$  sur  $\widetilde{K}$ . Pour conclure, il suffit de poser  $\psi_0 = 1 - \psi$  et pour  $0 \leq j \leq N$ ,  $\phi_j = \frac{\psi_j}{\sum_{k=0}^N \psi_k}$  en notant que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{k=0}^N \psi_k(x) \neq 0$  par construction. □

Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable muni d'une mesure doublante  $\mu$ . Nous allons considérer des discrétisations raisonnables de  $X$ , puis leur associer des partitions de l'unité en suivant une stratégie comparable à celle de l'espace euclidien. Cette construction est due à S. Semmes (Voir [132]). Dans divers problèmes d'analyse et de géométrie, il est pertinent de discrétiser l'espace ambiant (voir par exemple le chapitre 4 de [25]).

Fixons  $\varepsilon > 0$ . Par le théorème 1.84, il existe un recouvrement de  $X$  par des boules  $B(x_i, \varepsilon)$ ,  $i \in I$ , de sorte que les boules  $B(x_i, \varepsilon/5)$  sont deux à deux disjointes. Notons que pour tout  $k > 0$ , il existe une constante  $C(k)$  ne dépendant seulement que de  $k$  et de la constante de doublement de  $\mu$  (mais pas de  $\varepsilon$  ni du choix des  $x_i$ ) de sorte que tout point de  $X$  est contenu dans au plus  $C(k)$  boules de la forme  $B(x_i, k\varepsilon)$ . En effet, si on considère  $x \in X$  et  $I(x)$  l'ensemble des  $i$  tels que  $x \in B(x_i, k\varepsilon)$ , alors  $\{x_i, i \in I(x)\} \subset B(x, k\varepsilon)$  et si  $i \neq j$ ,  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon/5$ . Puisque  $\mu$  est doublante,  $B(x, k\varepsilon)$  peut être recouverte par au plus  $C(k)$  boules de rayon  $\varepsilon/5$  et ces boules contiennent au plus un  $x_i$ ,  $i \in I(x)$ . Donc, le cardinal de  $I(x)$  est majoré par  $C(k)$ . Cette propriété est typique de la courbure positive et peut être vue comme une conséquence du théorème de Bishop-Gromov (Voir [25], Lemme 4.6 par exemple). A noter que les théorèmes de type Bishop-Gromov seront largement discutés dans le cas des espaces métriques à courbure positive dans le chapitre 4. Nous allons maintenant associer à cette discrétisation une partition de l'unité.

**Théorème 2.6.** Avec les notations précédentes, il existe une collection de fonctions  $\phi_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i \in I$ , de sorte que

(i) Pour tout  $i \in I$ ,  $0 \leq \phi_i \leq 1$ .

(ii) Pour tout  $i \in I$ , la fonction  $\phi_i$  est  $C\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne où  $C \geq 0$  est une constante ne dépendant que de la constante de doublement de  $\mu$ .

(iii) Pour tout  $i \in I$ ,  $\phi_i(x) = 0$  dès que  $d(x, x_i) \geq 2\varepsilon$ .

(iv) Pour tout  $x \in X$ ,  $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$ .

*Démonstration.* Les idées de preuve sont les mêmes que pour le théorème 2.4. Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  définie par  $f(t) = 1$  si  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $f(t) = -\frac{1}{\varepsilon}t + 2$  si  $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$ , et  $f(t) = 0$  si  $t \geq 2\varepsilon$ . Alors,  $f$  est  $\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne. Posons maintenant  $\psi_i(x) = f(d(x, x_i))$  pour tout  $x \in X$  et tout  $i \in I$ . La fonction  $\psi_i$ ,  $i \in I$ , vérifie

-  $\psi_i$  is  $\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne. En effet, si  $x, y \in X$ , on a par l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |\psi_i(x) - \psi_i(y)| &= |f(d(x, x_i)) - f(d(y, x_i))| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} |d(x, x_i) - d(y, x_i)| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon} d(x, y). \end{aligned}$$

-  $0 \leq \psi_i \leq 1$  par définition de  $f$  et en particulier,  $\psi_i(x) = 0$  dès que  $d(x, x_i) \geq 2\varepsilon$  et  $\psi_i(x) = 1$  si  $d(x, x_i) \leq \varepsilon$ .

Cependant, la collection  $(\psi_i)$  ne vérifie pas les propriétés requises (par exemple (iv)). Il est alors naturel de considérer  $S(x) = \sum_{i \in I} \psi_i(x)$  puis  $\phi_i(x) = \psi_i(x)/S(x)$  pour tout  $x \in X$  et tout  $i \in I$ . Nous pouvons alors conclure. Notons dans un premier temps que l'on a

-  $S(x)$  est bien défini pour tout  $x \in X$ . En effet, nous avons déjà vu que le nombre d'indices  $i$  tels que  $x \in B(x_i, 2\varepsilon)$  est uniformément borné. Donc, la somme  $S(x)$  est finie et  $\|S\|_\infty < \infty$ . De plus, pour tout  $x \in X$ ,  $S(x) \geq 1$  car  $X = \cup_i B(x_i, \varepsilon)$ . Ainsi, si  $x \in X$ , il existe  $j \in I$  avec  $x \in B(x_j, \varepsilon)$  et  $S(x) \geq \psi_j(x) = 1$ . En particulier,  $S(x) \neq 0$  et pour  $i \in I$ ,  $\phi_i(x)$  est bien défini.

-  $S$  est  $C\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne. En effet, on a pour  $x, y \in X$ ,

$$|S(x) - S(y)| \leq \sum_{i \in I} |\psi_i(x) - \psi_i(y)| \leq C\varepsilon^{-1}d(x, y).$$

Ceci vient du fait que le nombre d'indices  $i$  tels que  $\psi_i(x) \neq 0$  ou  $\psi_i(y) \neq 0$  est uniformément borné.

Il est maintenant clair que  $\phi_i$  vérifie (i) et (iii) (puisque cette dernière propriété est satisfaite par  $\psi_i$ ) et (iv) (par définition). Enfin, nous devons vérifier que  $\phi_i$  est  $C\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne. Pour voir cela, fixons  $x, y \in X$ . Alors,

$$\begin{aligned} |\phi_i(x) - \phi_i(y)| &= \frac{1}{S(x)S(y)} |\psi_i(x)S(y) - \psi_i(y)S(x)| \\ &\leq |\psi_i(x)S(y) - \psi_i(y)S(x)| \text{ (car } S \geq 1) \\ &\leq |\psi_i(x)(S(y) - S(x))| + |(\psi_i(x) - \psi_i(y))S(x)| \\ &\leq |S(x) - S(y)| + \|S\|_\infty |\psi_i(x) - \psi_i(y)| \\ &\leq \frac{C + \|S\|_\infty}{\varepsilon} d(x, y). \end{aligned}$$

La dernière inégalité vient du fait que  $S$  et  $\psi_i$  sont respectivement  $C\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne et  $\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne. □

Nous renvoyons à [132], chapitre 2, pour des applications de ce type de partitions de l'unité dans les espaces métriques.

## 2 Mesures et dimension de Hausdorff

### 2.1 Construction de Carathéodory, mesures et dimension de Hausdorff

On rappelle que si  $A$  est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ , alors sa mesure de Lebesgue est donnée par

$$\mathcal{L}^1(A) = \inf \sum_i \text{diam}(I_i)$$

où le inf est pris sur tous les recouvrements de  $A$  par des intervalles (ouverts)  $I_i$ . On mesure donc la "taille" de l'ensemble  $A$  en ne considérant que des recouvrements par des éléments d'une certaine classe (ici, les intervalles de  $\mathbb{R}$ ) dont on mesure la taille par une jauge fixée (ici, la longueur d'un intervalle). Nous allons appliquer les mêmes idées dans un cadre plus général. Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable. La séparabilité permet d'exhiber des recouvrements dénombrables de  $X$ . On se donne une famille  $\mathcal{F}$  de sous-ensembles de  $X$  (les recouvrements admissibles) et une application (la jauge)  $\rho : \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui mesure la taille des éléments de  $\mathcal{F}$ . On suppose que

(i) Pour tout  $\delta > 0$ , il existe une famille  $(F_i)_{i \in I}$  de  $\mathcal{F}$  telle que pour tout  $i \in I$ ,  $\text{diam} F_i \leq \delta$  et  $X = \bigcup_{i \in I} F_i$ .

(ii) Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $F \in \mathcal{F}$  tel que  $\rho(F) \leq \delta$  et  $\text{diam}(F) \leq \delta$ .

La première condition permet d'avoir des recouvrements d'un sous-ensemble arbitraire de  $X$  par des éléments de  $\mathcal{F}$  de taille aussi petite que l'on veut. Ainsi, on peut poser pour  $0 < \delta \leq \infty$  et  $A \subset X$ ,

$$\Phi_\delta(A) = \inf \left\{ \sum_i \rho(E_i); A \subset \bigcup_i E_i, E_i \in \mathcal{F}, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\}$$

puis

$$\Phi(A) = \sup_{\delta > 0} \Phi_\delta(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Phi_\delta(A).$$

Notons que  $\delta = \infty$  est autorisé. Dans ce cas, on considère tous les recouvrements possibles de  $A$  (sans contrainte sur le diamètre).

**Théorème 2.7.** *Sous les conditions précédentes,  $\Phi$  est une mesure borélienne. Si de plus, les éléments de  $\mathcal{F}$  sont eux mêmes boréliens, la mesure  $\Phi$  est régulière.*

*Démonstration.* Le fait que  $\Phi_\delta(\emptyset) = 0$  est impliqué par la condition (ii) sur  $\rho$ . Il est facile de vérifier que  $\Phi_\delta$  est monotone et sous-additive. Donc,  $\phi_\delta$  est une mesure, ainsi que  $\Phi$ . Pour montrer que  $\Phi$  est une mesure de Borel, on va appliquer la critère de Carathéodory (Voir théorème 1.27). Soient  $A, B \subset X$  avec  $d(A, B) > 0$ . On va montrer que  $\Phi_\delta(A \cup B) = \Phi_\delta(A) + \Phi_\delta(B)$ . En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient alors la conclusion cherchée, à savoir  $\Phi(A \cup B) = \Phi(A) + \Phi(B)$ . Comme  $\Phi_\delta$  est une mesure, on a déjà l'inégalité  $\Phi_\delta(A \cup B) \leq \Phi_\delta(A) + \Phi_\delta(B)$ . Pour l'inégalité inverse, on commence par choisir  $\delta > 0$  tel que  $\delta < d(A, B)/2$  puis on applique la condition (i) pour obtenir un recouvrement de  $A \cup B$  par des  $(E_i)$  dans  $\mathcal{F}$  avec  $\text{diam}(E_i) \leq \delta$  pour tout  $i$ . Alors, un  $E_i$  ne peut intersecter à la fois  $A$  et  $B$ . On en déduit

$$\sum_i \rho(E_i) \geq \sum_{A \cap E_i \neq \emptyset} \rho(E_i) + \sum_{B \cap E_i \neq \emptyset} \rho(E_i) \geq \Phi_\delta(A) + \Phi_\delta(B).$$

En prenant l'infimum sur tous les recouvrements possibles, on obtient l'inégalité recherchée  $\Phi_\delta(A \cup B) \geq \Phi_\delta(A) + \Phi_\delta(B)$ . Pour montrer que  $\Phi$  est régulière, il faut exhiber pour un  $A \subset X$  un borélien  $B$  de  $X$  tel que  $A \subset B$  et  $\Phi(B) = \Phi(A)$ . Pour cela, pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , on considère un recouvrement  $(E_i^j)$  de  $A$  par des éléments de  $\mathcal{F}$  (donc des boréliens par hypothèse) tel que  $\text{diam}(E_i^j) \leq \frac{1}{j}$  et  $\sum_i \rho(E_i^j) \leq \Phi_{1/j}(A) + \frac{1}{j}$ . Alors,  $B = \bigcap_j \bigcup_i E_i^j$  convient.  $\square$

Si nous voulons considérer dans l'espace métrique séparable  $(X, d)$  une mesure  $s$ -dimensionnelle, il est naturel de considérer pour  $\mathcal{F}$  l'ensemble des parties de  $X$  et pour  $A \subset X$ ,  $\rho(A) = \text{diam}(A)^s$  (à une constante multiplicative près). On obtient alors la  $s$ -mesure de Hausdorff.

**Définition 2.8.** Soit  $A \subset X$  et soit  $s > 0$ . La  $s$ -mesure de Hausdorff de  $A$  est donnée par

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(A)$$

$$\text{où } \mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf \left\{ \sum_i \alpha(s) (\text{diam} E_i / 2)^s; A \subset \bigcup_i E_i, \text{diam}(E_i) \leq \delta \right\}.$$

Ici,  $\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(s/2 + 1)}$  où  $\Gamma$  est la fonction Gamma. Si  $s = n$ , on a  $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0, 1))$ . Nous verrons plus tard que cette normalisation de  $\mathcal{H}^s$  permet d'avoir l'égalité  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Rappelons que le cas  $\delta = \infty$  est autorisé et on a alors

$$\mathcal{H}_\infty^s(A) = \inf \left\{ \sum_i \alpha(s) (\text{diam} E_i / 2)^s; A \subset \bigcup_i E_i \right\}.$$

Si  $A \subset X$  et  $s \geq 0$ , on a les équivalences suivantes :

$$\mathcal{H}^s(A) = 0 \iff \mathcal{H}_\delta^s(A) = 0 \text{ (pour un certain } \delta > 0) \iff \mathcal{H}_\infty^s(A) = 0.$$

De plus, ces conditions sont équivalentes au fait que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement de  $A$  par des  $(A_i)$  avec  $\sum_i (\text{diam} A_i)^s \leq \varepsilon$  (voir exercice 2.188). Nous utiliserons ceci dans la suite.

Comme nous prenons pour la définition de  $\mathcal{H}^s$  tous les recouvrements possibles, nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème 2.7 pour montrer que  $\mathcal{H}^s$  est régulière. Cependant comme le montre l'exercice 2.189, on peut se restreindre dans la définition de  $\mathcal{H}^s$  à des recouvrements que par des ouverts ou que par des fermés. Ainsi,  $\mathcal{H}^s$  est une mesure de Borel régulière. Cependant, la mesure  $\mathcal{H}^s$  n'est pas en général une mesure de Radon (sauf si par exemple  $s = n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ), car elle n'est pas localement finie. D'autre part, si  $A$  est un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ , alors la restriction de  $\mathcal{H}^s$  à  $A$  est une mesure de Radon. Ceci découle de résultats généraux de théorie de la mesure (Voir proposition 1.20). Si  $s = 0$ ,  $\mathcal{H}^0$  est la mesure de comptage. Elle n'a donc un intérêt que sur les ensembles finis (voir dénombrable), c'est à dire les ensembles de dimension 0. Considérons maintenant le cas  $s = n$  et  $X = \mathbb{R}^n$ . On peut se convaincre que si  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $r > 0$ ,  $\mathcal{H}^n(B(x, r)) = \mathcal{L}^n(B(x, r))$ . Nous verrons plus tard que l'égalité  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$  est vraie en général et donc  $\mathcal{H}^n$  n'a d'intérêt que pour les ensembles de dimension  $n$ . La mesure  $\mathcal{H}^s$  est donc  $s$ -dimensionnelle au sens où elle n'est finie que sur les ensembles de dimension  $s$  (et encore pas tous). Comme  $s$  n'est pas toujours un entier, nous devons préciser ce que nous entendons par dimension et nous allons maintenant définir la dimension de Hausdorff.

**Proposition 2.9.** Pour  $0 \leq s < t < \infty$  et  $A \subset X$ , on a

- (i) Si  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ , alors  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ .
- (ii) Si  $\mathcal{H}^t(A) > 0$ , alors  $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ .

*Démonstration.* Il est clair que (i) implique (ii) mais nous avons préféré énoncer aussi (ii) dans la mesure où nous en aurons besoin pour l'équivalence des diverses définitions de la dimension de Hausdorff. Soit  $A \subset X$  avec  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Pour démontrer (i), on se donne un  $\delta > 0$  et on considère un recouvrement  $(E_i)$  de  $A$  avec  $\text{diam}(E_i) \leq \delta$  pour tout  $i$  et  $\sum_i \alpha(s)(\text{diam}(E_i)/2)^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(A) + 1$ . On a alors

$$H_\delta^t(A) \leq \sum_i \alpha(t)(\text{diam}(E_i)/2)^t \leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \delta^{t-s} \sum_i \alpha(s)(\text{diam}(E_i)/2)^s \leq \frac{\alpha(t)}{\alpha(s)} \delta^{t-s} (\mathcal{H}_\delta^s(A) + 1).$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient alors  $\mathcal{H}^t(A) = 0$ . □

**Définition 2.10.** Soit  $A \subset X$ . La dimension de Hausdorff de  $A \subset X$ , notée  $Hdim(A)$ , est définie par

$$\begin{aligned} Hdim(A) &= \sup\{t; \mathcal{H}^t(A) > 0\} \\ &= \sup\{s; \mathcal{H}^s(A) = \infty\} \\ &= \inf\{s; \mathcal{H}^s(A) < \infty\} \\ &= \inf\{t; \mathcal{H}^t(A) = 0\} \end{aligned}$$

(Voir la figure 2.1)

L'équivalence des définitions vient de la proposition 2.9. Si  $Hdim(A) = s$ , il y a trois cas pour  $\mathcal{H}^s(A)$  :

- (i)  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ . L'ensemble  $A$  est alors négligeable pour  $\mathcal{H}^s$ .
- (ii)  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Ce sont ces ensembles qui nous intéresseront dans la suite.
- (iii)  $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ . Ces ensembles ont une structure locale difficile à analyser et beaucoup de résultats pour  $\mathcal{H}^s$  (par exemple de densité) ne s'appliquent pas dans leur cas.

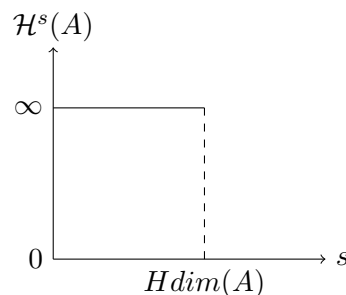


FIGURE 2.1 – Graphe de  $s \rightarrow \mathcal{H}^s(A)$ .

Notons enfin que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  (où  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne),  $0 \leq Hdim(A) \leq n$ . Ceci découle de  $Hdim(\mathbb{R}^n) = n$ . Pour ce dernier point, il n'est pas difficile de voir que  $\mathcal{H}^n(\mathbb{R}^n) = \infty$ , mais que  $\mathcal{H}^n$  est localement finie sur  $\mathbb{R}^n$ .

Il existe d'autres mesures que l'on peut construire suivant un procédé analogue à celui utilisé pour la mesure de Hausdorff, voir l'exercice 2.191 par exemple.

## 2.2 L'inégalité isodiamétrique dans $\mathbb{R}^n$ et l'égalité $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$

On se place dans cette section dans l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Par les propriétés d'invariance par les translations partagées par la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  et la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^n$ , il vient que les deux

mesures sont proportionnelles sur les boréliens d'après le corollaire 1.49, c'est à dire qu'il existe une constante  $C_n > 0$  telle que pour tout borélien  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^n(B) = C_n \mathcal{L}^n(B)$ . Le point est maintenant de déterminer  $C_n$ . En fait, la détermination de  $C_n$  découle de l'inégalité isodiamétrique (voir le théorème 1.68 dans le chapitre 1).

**Théorème 2.11.** *Sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ , c'est à dire pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(A)$ .*

Notons que cette dernière égalité est vraie pour tous les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  alors que l'égalité  $\mathcal{H}^n = C_n \mathcal{L}^n$  obtenue via le corollaire 1.49 n'était vraie que pour les boréliens de  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* On va diviser la preuve en deux parties qui donneront chacune une des inégalités.

1) Pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ . En effet, fixons  $\delta > 0$  et considérons un recouvrement  $(E_i)$  de  $A$  avec  $\text{diam } E_i \leq \delta$  pour tout  $i$ . Alors, par l'inégalité isodiamétrique, on a

$$\mathcal{L}^n(A) \leq \sum_i \mathcal{L}^n(E_i) \leq \sum_i \alpha(n) (\text{diam } E_i / 2)^n.$$

En prenant l'infimum sur tous les recouvrements, on obtient  $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}_\delta^n(A)$  puis en faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient  $\mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(A)$ .

2) Pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^n(A) \leq \mathcal{L}^n(A)$ . On rappelle que si  $\delta > 0$ ,

$$\mathcal{L}^n(A) = \inf \left\{ \sum_i \mathcal{L}^n(Q_i); Q_i \text{ cubes}, A \subset \cup_i Q_i, \text{diam } Q_i \leq \delta \right\}.$$

Cette définition est un peu différente de celle donnée dans la section 2 mais il n'est pas difficile de voir que les deux coïncident. On déduit alors facilement qu'il existe une constante  $C_n > 0$  telle que  $\mathcal{H}^n(A) \leq C_n \mathcal{L}^n(A)$  pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ . En particulier,  $\mathcal{L}^n(A) = 0$  implique que  $\mathcal{H}^n(A) = 0$ . Nous utiliserons ce résultat pour obtenir une conclusion plus forte. Soient  $\delta > 0$  et  $\varepsilon > 0$ . Alors, par la définition précédente de  $\mathcal{L}^n(A)$ , il existe un recouvrement de  $A$  par des cubes  $Q_i$  de diamètre  $< \delta$  tels que  $\sum_i \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$ . Par le théorème de recouvrement de Vitali (voir proposition 1.88), pour tout  $i$  il existe une collection de boules  $(B_k^i)$  contenues dans  $Q_i$  telles que  $\text{diam } B_k^i \leq \delta$  pour tout  $k$  et  $\mathcal{L}^n(Q_i \setminus \cup_k B_k^i) = 0 = \mathcal{H}^n(Q_i \setminus \cup_k B_k^i)$  (La dernière égalité venant de l'absolue continuité de  $\mathcal{H}^n$  par rapport à  $\mathcal{L}^n$ ). On a alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^n(A) &\leq \sum_i \mathcal{H}_\delta^n(Q_i) \leq \sum_i \sum_k \mathcal{H}_\delta^n(B_k^i) \\ &\leq \sum_i \sum_k \alpha(n) (\text{diam } B_k^i / 2)^n = \sum_i \sum_k \mathcal{L}^n(B_k^i) \\ &\leq \sum_i \mathcal{L}^n(Q_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon. \end{aligned}$$

On peut conclure en faisant tendre  $\delta$  et  $\varepsilon$  vers 0. □

## 2.3 Exemples de calculs de dimension de Hausdorff

### Courbes rectifiables

On commence par des généralités sur les courbes rectifiables dans un espace métrique  $(X, d)$ . Nous en aurons besoin dans les chapitres 3 et 4 pour parler de modules de familles de courbes et d'inégalités de Poincaré généralisées par exemple.



- Définition 2.12.** 1. Une courbe est soit une application continue  $\gamma : I \rightarrow X$  où  $I \subset \mathbb{R}$  est un intervalle, soit son image  $\Gamma = \gamma(I)$ . On ne fera pas toujours de différence entre les deux. Si  $\gamma$  est une application injective, on dit que  $\gamma$  (ou  $\Gamma$ ) est une courbe de Jordan. Si  $\gamma$  est lipschitzienne, on dit que  $\gamma$  (ou  $\Gamma$ ) est une courbe lipschitzienne.
2. Si  $I = [a, b]$ , la longueur de  $\gamma$  est définie par

$$l(\gamma) = \sup \sum_{i=0}^{n-1} d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) \in [0, +\infty],$$

où la borne supérieure est prise sur tous les entiers  $n \geq 1$  et tous les  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ .

3. On dit que  $\gamma$  est rectifiable si, et seulement si,  $l(\gamma) < +\infty$ . Si  $I$  n'est pas borné ou n'est pas fermé, on pose  $l(\gamma) = \sup l(\gamma|_J)$  où le supremum est pris sur tous les sous-intervalles fermés bornés  $J$  de  $I$ . Ici, et dans la suite du paragraphe,  $\gamma|_J$  est la restriction de  $\gamma$  au sous-intervalle  $J$  de  $I$ . On dit que  $\gamma : I \rightarrow X$  est localement rectifiable si sa restriction à tout sous-intervalle fermé  $J$  de  $I$  est rectifiable. On notera  $Rect(X)$  l'ensemble des courbes rectifiables de  $(X, d)$ .

Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe et  $f : [c, d] \rightarrow [a, b]$  continue, croissante et surjective. Si  $\tilde{\gamma} := \gamma \circ f$ , il est facile de vérifier (exercice !) que  $l(\gamma \circ f) = l(\gamma)$ .

**Remarque 2.13.** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une application *quelconque*, on peut définir la longueur de  $\gamma$  de la même façon que dans le cas continu. Si  $f$  est comme précédemment, l'égalité  $l(\gamma \circ f) = l(\gamma)$  reste valable.

Un point essentiel est qu'on peut paramétrer une courbe rectifiable par longueur d'arc. On remarque d'abord :

**Lemme 2.14.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable. Pour tout  $t \in [a, b]$ , on pose  $s_\gamma(t) := l(\gamma|_{[a,t]})$ . Alors la fonction  $s_\gamma$  est croissante et continue.

*Démonstration.* Il est immédiat que  $s_\gamma$  est croissante, ce qui implique que  $s_\gamma$  possède une limite à gauche et à droite en tout point de  $[a, b]$ .

Soit  $t_0 \in ]a, b[$  et supposons  $s_\gamma(t_0) - \lim_{t \rightarrow t_0, t < t_0} s_\gamma(t) > \alpha > 0$ . Soit  $t_1 \in ]a, t_0[$ . On observe que

$$l(\gamma|_{[t_1, t_0]}) = s_\gamma(t_0) - s_\gamma(t_1) = s_{\gamma|_{[t_1, t_0]}}(t_0) > \alpha > 0. \quad (2.15)$$

Supposons que, pour tout  $k \geq 1$  et toute suite  $t_1 = a_0 < \dots < a_k < t_0$ , on ait

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(a_{i+1}), \gamma(a_i)) \leq \alpha.$$

Alors, par continuité de  $\gamma$  en  $t_0$ , on obtient que, pour tout  $k \geq 1$  et toute suite  $t_1 = a_0 < \dots < a_k = t_0$ ,

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(a_{i+1}), \gamma(a_i)) \leq \alpha,$$

ce qui contredit (2.15). Il existe donc  $k \geq 1$  et  $t_1 = a_0 < \dots < a_k < t_0$  tels que

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(a_{i+1}), \gamma(a_i)) > \alpha.$$

On pose  $t_2 := a_k$ . Alors  $l(\gamma|_{[t_1, t_2]}) > \alpha$  et

$$l(\gamma|_{[t_2, t_0]}) = s_\gamma(t_0) - s_\gamma(t_2) > \alpha.$$

On construit ainsi par récurrence une suite  $(t_i)_{i \geq 1}$  strictement croissante avec  $a < t_i < t_0$  pour tout  $i \geq 1$  et  $l(\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} > \alpha$ . On a donc, pour tout  $i \geq 1$ ,

$$l(\gamma|_{[t_1, t_0]}) \geq l(\gamma|_{[t_1, t_i]}) > (i-1)\alpha,$$

ce qui contredit la rectifiabilité de  $\gamma$ . On raisonne de même avec les limites à droite pour conclure que  $s_\gamma$  est continue.  $\square$

**Théorème 2.16.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable. Alors il existe une unique courbe  $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  telle que  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s_\gamma$ . Pour tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ ,  $l(\tilde{\gamma}|_{[0, t]}) = t$ . La fonction  $\tilde{\gamma}$  est 1-lipschitzienne et s'appelle la paramétrisation de  $\gamma$  par longueur d'arc.

*Démonstration.* On peut supposer  $a = 0$ . Pour tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ , on pose  $h(t) := \inf s_\gamma^{-1}(\{t\})$ . Par continuité de  $s_\gamma$ ,  $s_\gamma(h(t)) = t$ . De plus, comme  $u \in s_\gamma^{-1}(\{s_\gamma(u)\})$  pour tout  $u \in [0, b]$ ,  $u \geq h(s_\gamma(u))$ . On suppose que  $\tilde{\gamma}$  a la propriété voulue. Alors, pour tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ ,  $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{\gamma}(s_\gamma(h(t))) = \gamma(h(t))$ , ce qui montre l'unicité de  $\tilde{\gamma}$ .

On définit maintenant  $\tilde{\gamma} : [0, l(\gamma)] \rightarrow X$  par  $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(h(t))$ . Soit  $t \in [0, l(\gamma)]$ . Alors

$$d(\gamma(t), \gamma(h(s_\gamma(t)))) \leq s_\gamma(t) - s_\gamma(h(s_\gamma(t))) = 0,$$

de sorte que  $\gamma(t) = \gamma(h(s_\gamma(t)))$ . Il en résulte que  $\tilde{\gamma}(s_\gamma(t)) = \gamma(h(s_\gamma(t))) = \gamma(t)$ . De plus, pour tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ ,

$$l(\tilde{\gamma}|_{[0, t]}) = l(\tilde{\gamma}|_{[0, s_\gamma(h(t))]} = l(\tilde{\gamma} \circ s_\gamma|_{[0, h(t)]}) = l(\gamma|_{[0, h(t)]}) = s_\gamma(h(t)) = t.$$

Notons qu'on ne sait pas, à ce stade, que  $\tilde{\gamma}$  est continue, mais que ce calcul est justifié par la remarque 2.13. Cela entraîne que, pour tous  $t_1 < t_2 \in [0, b]$ ,

$$d(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\gamma}(t_2)) \leq l(\tilde{\gamma}|_{[t_1, t_2]}) = t_2 - t_1,$$

ce qui signifie que  $\tilde{\gamma}$  est 1-lipschitzienne (et donc continue !).  $\square$

**Définition 2.17.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe. Si  $t \in ]a, b[$ , la vitesse (ou dérivée métrique) de  $\gamma$  au point  $t$  est définie par

$$|\dot{\gamma}|(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h}$$

si cette limite existe.

Pour des exemples de calculs de dérivées métriques, voir l'exercice 2.192. Si  $|\dot{\gamma}|(t)$  existe (presque partout) et est constante, on dit que  $\gamma$  est paramétrée à vitesse constante.

**Théorème 2.18.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe lipschitzienne. Alors la vitesse (dérivée métrique) de  $\gamma$  existe en presque tout point de  $]a, b[$  et

$$l(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}|(t) dt. \quad (2.19)$$

*Démonstration.* Soit  $(x_n)_{n \geq 1}$  un ensemble dénombrable et dense dans  $\gamma([a, b])$ . Pour tout  $t \in [a, b]$ , on pose  $\varphi_n(t) := d(\gamma(t), x_n)$ , qui est lipschitzienne donc dérivable presque partout sur  $[a, b]$ . On définit  $m(t) := \sup_{n \geq 1} |\varphi_n'(t)| \in [0, +\infty]$ . On va montrer que  $|\dot{\gamma}|(t) = m(t)$  pour presque tout  $t \in [a, b]$ .

Pour presque tout  $t \in [a, b]$ ,

$$|\varphi_n'(t)| = \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{\varphi_n(t+h) - \varphi_n(t)}{h} \right| \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|},$$

ce qui montre que

$$m(t) \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|}.$$

Cela montre en particulier que, pour presque tout  $t \in [a, b]$ ,  $m(t) \leq K$  (où  $K$  est une constante de lipschitz de  $\gamma$ ), et en particulier que  $m \in L^1([a, b])$ .

Pour tous  $a \leq s \leq t \leq b$ ,

$$d(\gamma(t), \gamma(s)) = \sup_{n \geq 1} |d(\gamma(t), x_n) - d(\gamma(s), x_n)| \leq \sup_{n \geq 1} \int_s^t |\varphi'_n(u)| du \leq \int_s^t m(u) du.$$

Si  $t \in [a, b]$  est un point de Lebesgue de  $m$ , on a donc

$$\overline{\lim}_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h} \leq \overline{\lim}_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} m(u) du = m(t).$$

On raisonne de même pour  $h < 0$ . On a bien obtenu que  $|\dot{\gamma}|(t) = m(t)$  pour presque tout  $t \in [a, b]$ .

Soient  $k \geq 1$  et  $a = t_0 < \dots < t_k = b$ . Alors

$$\sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_{i+1}), \gamma(t_i)) \leq \sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} m(u) du = \int_a^b |\dot{\gamma}|(u) du,$$

ce qui montre que  $l(\gamma) \leq \int_a^b |\dot{\gamma}|(u) du$ .

Pour montrer l'inégalité inverse, soient  $\varepsilon > 0$ ,  $k \geq 1$  tel que  $\frac{b-a}{k} < \varepsilon$  et  $t_i := a + \frac{b-a}{k}i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, k \rrbracket$ . Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_k} \int_a^{b-\varepsilon} d(\gamma(t+h_k), \gamma(t)) dt &\leq \frac{1}{h_k} \sum_{i=0}^{k-2} d(\gamma(t+t_{i+1}), \gamma(t+t_i)) dt \\ &\leq \frac{1}{h_k} \int_0^{h_k} l(\gamma) = l(\gamma). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  et en utilisant le lemme de Fatou, on obtient donc

$$\int_a^{b-\varepsilon} |\dot{\gamma}|(t) dt \leq l(\gamma),$$

et on conclut que  $\int_a^b |\dot{\gamma}|(t) dt \leq l(\gamma)$  en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. □

Un corollaire important est :

**Corollaire 2.20.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe lipschitzienne et  $\tilde{\gamma}$  sa paramétrisation par longueur d'arc. Alors  $|\dot{\tilde{\gamma}}|(t) = 1$  pour presque tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ .

*Démonstration.* Notons que  $\gamma$  est rectifiable. Comme  $\tilde{\gamma}$  est 1-lipschitzienne,  $|\dot{\tilde{\gamma}}|(t) \leq 1$  pour presque tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ . De plus,  $l(\gamma) = l(\tilde{\gamma}) = \int_0^{l(\gamma)} |\dot{\tilde{\gamma}}|(t) dt$ , ce qui permet de conclure. □

**Corollaire 2.21.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe lipschitzienne. Alors  $s_\gamma : [a, b] \rightarrow [0, l(\gamma)]$  est lipschitzienne et  $|s'_\gamma(t)| = |\dot{\gamma}|(t)$  pour presque tout  $t \in [a, b]$ .

*Démonstration.* Soient  $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ . Alors, si  $L$  est une constante de Lipschitz de  $\gamma$ ,

$$\begin{aligned} |s_\gamma(t_2) - s_\gamma(t_1)| &= l(\gamma|_{[t_1, t_2]}) \\ &= \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\gamma}(s)| ds \\ &\leq L |t_2 - t_1|, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $s_\gamma$  est lipschitzienne, donc dérivable presque partout.

Il est immédiat que  $|s'_\gamma(t)| \geq |\dot{\gamma}(t)|$  pour presque tout  $t$ . De plus,

$$\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt = l(\gamma) = s_\gamma(b) - s_\gamma(a) = \int_a^b s'_\gamma(t) dt,$$

ce qui termine la preuve. □

Voici une conséquence importante de ce qui précède, concernant l'existence de courbes minimisantes pour la longueur dans un espace métrique :

**Théorème 2.22.** *Soit  $X$  un espace métrique propre (ce qui signifie que toute partie fermée et bornée de  $X$  est compacte). On suppose que, pour tous  $x, y \in X$ , il existe une courbe rectifiable joignant  $x$  à  $y$ . Alors, pour tous  $x, y \in X$ , il existe une courbe de longueur minimale joignant  $x$  à  $y$ .*

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  et  $L$  la borne inférieure des longueurs des courbes rectifiables joignant  $x$  à  $y$ . Si  $L = 0$ , alors pour tout  $\varepsilon$ , il existe une courbe de longueur inférieure à  $\varepsilon$  joignant  $x$  et  $y$ . Par définition de la longueur d'une courbe,  $d(x, y) \leq \varepsilon$ , donc  $x = y$  et la conclusion est évidente. On supposera donc  $L > 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $\gamma_n : [a, b] \rightarrow X$  une courbe telle que  $L \leq l(\gamma_n) < L + \frac{1}{n}$  et  $\gamma_n(a) = x$ ,  $\gamma_n(b) = y$ . Pour tout  $n \geq 1$ , on note  $\tilde{\gamma}_n$  la paramétrisation de  $\gamma_n$  par longueur d'arc et  $\eta_n(t) := \tilde{\gamma}_n\left(\frac{tL}{L}\right)$  pour tout  $t \in [0, L]$ , où  $L_N := l(\gamma_n)$ . Pour tout  $n \geq 1$  et tous  $s, t \in [0, L]$ ,  $d(\eta_n(s), \eta_n(t)) \leq |t - s| \frac{L+1}{L}$ , ce qui montre que la famille  $(\eta_n)_{n \geq 1}$  est uniformément équicontinue sur  $[0, L]$ . De plus, les fonctions  $\eta_n$  sont uniformément bornées, car pour tout  $n \geq 1$  et tout  $t \in [0, L]$ ,

$$d(\eta_n(t), x) = d(\eta_n(t), \eta_n(0)) \leq \frac{L+1}{L}.$$

D'après le théorème d'Ascoli (pour des fonctions continues à valeurs dans un espace métrique propre, [115, Theorem 1.4.9]), il existe une fonction strictement croissante  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  et une fonction continue  $\eta : [0, L] \rightarrow X$  telles que  $\eta_{\varphi(n)} \rightarrow \eta$  uniformément sur  $[0, L]$ . La courbe  $\eta$  joint  $x$  à  $y$  et est de longueur  $L$ . En effet,  $\eta$  est  $\frac{L+1}{L}$ -lipschitzienne. Si  $t \in [0, L]$  et si  $\eta$  et toutes les  $\eta_n$  ont une vitesse en  $t$  (cette propriété est satisfaite pour presque tout  $t$ ),  $\dot{\eta}(t) = \lim \dot{\eta}_n(t)$ , donc

$$l(\eta) = \int_0^L \dot{\eta}(t) dt \leq \liminf \int_0^L \dot{\eta}_n(t) dt = L,$$

de sorte que  $l(\eta) = L$  par définition de  $L$ . □

**Remarque 2.23.** On notera que la conclusion du théorème 2.22 est fautive si  $X$  n'est pas supposé propre (considérer le cas de  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ). De plus, cette conclusion peut être satisfaite dans des situations où  $X$  n'est pas localement compact. Par exemple, il suffit de supposer qu'il existe une autre topologie localement compacte et métrisable sur  $X$  pour laquelle la distance  $d$  est semi-continue inférieurement, voir [40, Theorem 3.6], [6, Theorem 4.5.9]. Voir aussi la définition d'un espace géodésique et d'un espace de longueur donnée plus loin.

On définit maintenant l'intégrale d'une fonction borélienne le long d'une courbe rectifiable :

**Définition 2.24.** Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable et  $\rho$  une fonction borélienne de  $\gamma([a, b])$  dans  $[0, +\infty]$ . On définit alors

$$\int_{\gamma} \rho := \int_0^{l(\gamma)} \rho(\tilde{\gamma}(t)) dt,$$

où  $\tilde{\gamma}$  est la paramétrisation de  $\gamma$  par longueur d'arc.

**Théorème 2.25.** Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe lipschitzienne et  $\rho$  une fonction borélienne de  $\gamma([a, b])$  dans  $[0, +\infty]$ . Alors

$$\int_{\gamma} \rho = \int_a^b \rho(\gamma(t)) |\dot{\gamma}|(t) dt.$$

*Démonstration.* Comme  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s_{\gamma}$  et  $s_{\gamma}$  est lipschitzienne avec  $s'_{\gamma}(t) = |\dot{\gamma}|(t)$  pour presque tout  $t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho &= \int_0^{l(\gamma)} \rho(\tilde{\gamma}(t)) dt \\ &= \int_a^b \rho(\tilde{\gamma}(s_{\gamma}(u))) s'_{\gamma}(u) du \\ &= \int_a^b \rho(\gamma(u)) |\dot{\gamma}|(u) du, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Si la courbe  $\gamma$  est seulement localement rectifiable, on pose

$$\int_{\gamma} \rho = \sup_{\tilde{\gamma}} \int_{\tilde{\gamma}} \rho$$

où le supremum est pris sur toutes les sous-courbes rectifiables  $\tilde{\gamma}$  de  $\gamma$ .

Nous allons maintenant démontrer que sous certaines conditions, si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan associée à une paramétrisation  $\gamma$ , alors  $l(\gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma)$ . Voir l'exercice 2.193 pour une autre preuve dans le cas euclidien qui utilise les projections orthogonales. Ceci généralise en quelque sorte le fait que dans  $\mathbb{R}$ ,  $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}^1$ . Notre présentation suit celle de [6]. On commence par un lemme technique.

**Lemme 2.26.** Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une application continue (donc définit une courbe sur  $X$ ), alors

$$\mathcal{H}^1(\gamma([a, b])) \geq d(\gamma(a), \gamma(b)).$$

*Démonstration.* On pose  $f(x) = d(x, \gamma(a))$  pour tout  $x \in X$ . Par l'inégalité triangulaire,  $f$  est 1-lipschitzienne. On en déduit (exercice facile ou voir le paragraphe suivant) que  $\mathcal{H}^1(f(\gamma([a, b]))) \leq \mathcal{H}^1(\gamma([a, b]))$ . Comme  $\mathcal{H}^1$  coïncide avec la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et que  $(f \circ \gamma)[a, b]$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1(f(\gamma([a, b]))) &= \mathcal{L}^1(f(\gamma([a, b]))) \\ &= \sup_{t \in [a, b]} f(\gamma(t)) \\ &= \sup_{t \in [a, b]} d(\gamma(t), \gamma(a)) \\ &\geq d(\gamma(a), \gamma(b)). \end{aligned}$$

□

**Théorème 2.27.** Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable et soit  $\Gamma = \gamma([a, b])$ . Alors,  $\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq l(\gamma)$  et il y a égalité si et seulement si  $\Gamma$  est injective (c'est à dire  $\Gamma$  est une courbe de Jordan). En particulier, si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan rectifiable de  $X$ ,  $Hdim(\Gamma) = 1$ .

Notons qu'ici, nous avons fait la différence entre  $\gamma$  et son image  $\Gamma$ . En effet, la longueur est définie pour un paramétrage fixé alors que la 1-mesure de Hausdorff est définie pour la courbe en tant qu'ensemble. Cependant, le résultat précédent dit que si  $\Gamma$  est une courbe de Jordan rectifiable, sa longueur ne dépend pas de la paramétrisation de  $\Gamma$  choisie. Le théorème 2.27 se généralise à d'autres sous-variétés de  $\mathbb{R}^n$  par la formule de l'aire (voir l'exercice 2.221).

*Démonstration.* Par le théorème de reparamétrisation (voir théorème 2.16), on peut supposer que  $a = 0$ ,  $b = l(\gamma)$  et que la courbe est paramétrée à vitesse constante  $|\dot{\gamma}| = 1$  presque partout sur  $[0, l(\gamma)]$ . On se donne un  $\delta > 0$  et on choisit un  $n \in \mathbb{N}$  de sorte que  $h = \frac{l(\gamma)}{n} < \delta$ . On pose alors  $J_i = [ih, (i+1)h]$  pour  $i = 0, \dots, n-1$ . Comme  $\gamma$  est 1-lipschitzienne, on a (exercice facile ou voir paragraphe suivant) pour tout  $i$ ,

$$\text{diam}(\gamma(J_i)) \leq \text{diam}(J_i) < \delta.$$

Il s'en suit que par choix des  $J_i$ , on a

$$\mathcal{H}_\delta^1(\Gamma) \leq \sum_{i=0}^{n-1} \text{diam}(J_i) = l(\gamma).$$

D'où en faisant tendre  $\delta$  vers 0, il vient que  $\mathcal{H}^1(\Gamma) \leq l(\gamma)$ .

Supposons maintenant que  $\gamma$  est injective et soit  $a = t_0 < t_1 \dots < t_{n-1} < t_n = b$  une subdivision de  $[a, b]$ . Par le lemme précédent et par le fait que  $\gamma$  est injective, on a par additivité de  $\mathcal{H}^1$  que

$$\sum_{j=0}^{n-1} d(\gamma(t_{j+1}), \gamma(t_j)) \leq \sum_{j=0}^{n-1} \mathcal{H}^1(\gamma[t_j, t_{j+1}]) \leq \mathcal{H}^1(\gamma([a, b])).$$

Comme la partition est arbitraire, on a  $l(\gamma) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma)$  et on peut conclure. □

Des courbes particulières vont jouer un rôle important, en particulier dans le chapitre 4.

**Définition 2.28.** Une courbe  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est un segment géodésique (ou une géodésique) dans  $(X, d)$  si  $l(\gamma) = d(\gamma(a), \gamma(b))$ . On note  $Geo(X)$  l'ensembles des segments géodésiques de  $X$ .

Cette définition est purement métrique et est différente de celle d'une géodésique dans le cas riemannien (qui minimise seulement localement la longueur).

**Définition 2.29.** On dit que l'espace métrique  $(X, d)$  est géodésique si pour tous  $x, y \in X$ , il existe un segment géodésique reliant  $x$  à  $y$ . On dit que l'espace métrique  $(X, d)$  est un espace de longueur si pour tous  $x, y \in X$ ,  $d(x, y) = \inf l(\gamma)$  où l'infimum est pris sur toutes les courbes rectifiables dans  $X$  reliant  $x$  et  $y$ .

**Exemple 2.30.** Munis de la norme euclidienne,  $\mathbb{R}^n$  est un espace géodésique mais  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est seulement un espace de longueur. Le groupe d'Heisenberg  $\mathbb{H}^1$  est un espace géodésique mais il n'y a pas toujours unicité du segment géodésique reliant deux points.

## Ensembles autosimilaires

On rappelle (voir exemple 1.102) qu'une mesure  $\mu$  sur un espace métrique  $(X, d)$  est  $Q$ -Ahlfors-régulière s'il existe une constante  $C_{AR} > 0$  telle que pour tout  $x \in X$ , tout  $R \in ]0, \text{diam}X[$ ,  $C_{AR}^{-1}R^Q \leq \mu(B(x, R)) \leq C_{AR}R^Q$ . Il est clair qu'une mesure Ahlfors-régulière est doublante (sans réciproque). De façon analogue, un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est Ahlfors-régulier de dimension  $Q$  s'il existe une constante  $C_{AR} > 0$  telle que pour tout  $x \in E$ , tout  $R \in ]0, \text{diam}E[$ , on a

$$C_{AR}^{-1}R^Q \leq \mathcal{H}^Q(E \cap B(x, R)) \leq C_{AR}R^Q.$$

Attention, cette notion n'implique pas de régularité de l'ensemble concerné. Nous verrons en effet que cette propriété est vérifiée par une large classe d'ensembles auto-similaires qui ont une structure fractale.

**Remarque 2.31.** Si  $E \subset \mathbb{R}^n$ , alors  $E$  est Ahlfors-régulier de dimension  $Q$  si et seulement si  $E$  supporte une mesure  $\mu$  qui est  $Q$ -Ahlfors-régulière (voir l'exercice 2.196).

**Proposition 2.32.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble Ahlfors-régulier de dimension  $Q$ . Alors,  $Hdim(E) = Q$ .

*Démonstration.* Nous allons diviser la preuve en deux parties, chacune fournissant une borne différente sur la dimension de Hausdorff dans le cas d'un espace métrique. La proposition suivra des deux estimations et de la remarque précédente.

(1) Soit  $\mu$  une mesure borélienne (localement finie) sur un espace métrique  $(X, d)$ . On suppose qu'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $x \in X$ , tout  $R > 0$ ,  $\mu(B(x, R)) \geq C_0^{-1}R^Q$ . Alors  $Hdim(X, d) \leq Q$ . En effet, on peut sans perte de généralité supposer que  $X$  est borné (sinon considérer le cas de  $X \cap B$  pour toute boule  $B$  de  $X$ ). Soit  $\delta > 0$ . Par le lemme de recouvrement  $5r$  (voir la proposition 1.84), il existe des boules  $B_i$  de rayon  $R_i \leq \delta$  telles que  $X = \cup_i B_i$  et pour tout  $i \neq j$ ,  $\frac{1}{5}B_i \cap \frac{1}{5}B_j = \emptyset$ . On en déduit alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^Q(X) &\leq \sum_i \alpha(Q)(\text{diam}(B_i)/2)^Q \leq \sum_i \alpha(Q)(R_i)^Q \leq \alpha(Q)5^Q \sum_i (R_i/5)^Q \\ &\leq \alpha(Q)5^Q C_0 \sum_i \mu(1/5B_i) \leq \alpha(Q)5^Q C_0 \mu(X) < \infty. \end{aligned}$$

Ceci donne (en faisant tendre  $\delta$  vers 0) que  $\mathcal{H}^Q(X) < \infty$  et donc  $Hdim(X, d) \leq Q$ .

(2) Soit  $\mu$  une mesure borélienne (non triviale) sur un espace métrique  $(X, d)$ . On suppose qu'il existe une constante  $C_0 > 0$  telle que pour tout  $x \in X$ , tout  $R > 0$ ,  $\mu(B(x, R)) \leq C_0 R^Q$ . Alors  $\mathcal{H}^Q(X) > 0$  (par définition de  $\mathcal{H}^Q$ ) et  $Hdim(X, d) \geq Q$ .  $\square$

Nous allons maintenant exhiber une large classe d'ensembles Ahlfors-réguliers. L'idée est de généraliser la construction des fractales classiques comme l'ensemble triadique de Cantor, la courbe de Von Koch, le tamis et le tapis de Sierpinski, l'ensemble de Cantor 4-coins qui seront décrits plus loin.

**Proposition 2.33.** Soit  $S_1, \dots, S_N$  des similitudes sur  $\mathbb{R}^n$  respectivement de rapport  $\tau_1, \dots, \tau_N$ . Il existe un unique compact invariant  $K \subset \mathbb{R}^n$  pour le système  $(S_1, \dots, S_N)$ , c'est à dire  $K = \cup_{i=1}^N S_i(K)$ .

L'idée de la preuve est la suivante. Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$  que l'on munit de la distance de Hausdorff :

$$\delta(K_1, K_2) = \max\{d(x, K_1), d(y, K_2); x \in K_2, y \in K_1\}.$$

Ici,  $d$  est la distance euclidienne sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $\mathcal{F}$  est un espace complet. Comme l'application  $E \rightarrow \sum_{i=1}^N S_i(E)$  est une contraction dans  $(\mathcal{F}, \delta)$ , on peut conclure par un théorème du point fixe. Nous reviendrons dans le chapitre 4 sur la distance de Hausdorff.

Afin de pouvoir estimer la dimension de Hausdorff du compact invariant  $K$ , il faut s'assurer que les parties  $S_i(K)$  sont bien séparées. On dira que le système  $(S_1, \dots, S_N)$  vérifie l'open set condition s'il existe un ouvert non vide  $O$  dans  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\bigcup_{i=1}^N S_i(O) \subset O$  et  $S_i(O) \cap S_j(O) = \emptyset$  dès que  $i \neq j$ . Cette condition est vérifiée si les  $S_i(K)$  sont deux à deux disjoints (comme dans l'ensemble triadique de Cantor).

**Théorème 2.34.** Soit  $(S_1, \dots, S_N)$  un système de similitude de rapport respectif  $\tau_1, \dots, \tau_N$  et qui vérifie l'open set condition. On note  $K$  l'unique compact invariant de ce système. Alors, si  $Q$  est l'unique solution positive de l'équation  $\sum_{i=1}^N \tau_i^Q = 1$ ,  $0 < H^Q(K) \leq \infty$ . De plus,  $K$  est Ahlfors-régulier de dimension  $Q$ . En particulier, la dimension de Hausdorff de  $K$  est  $Q$ .

Voir [46] pour une démonstration. Nous décrivons maintenant certains ensembles auto-similaires du plan complexe. Ils sont tous munis de la distance euclidienne induite.

**Exemple 2.35** (L'ensemble triadique de Cantor (voir [46], pages 14-15)). Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on considère les sous-ensembles de  $\mathbb{R}$  suivants

$$I_j = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{3^j-1} \left[ \frac{k}{3^j}, \frac{k+1}{3^j} \right].$$

On pose  $E_1 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} I_j$  (Voir la figure 2.2). Alors,  $\text{Hdim}(E_1) = \frac{\log 2}{\log 3}$ . On peut se convaincre intuitivement de ce résultat. Ecrivons  $I_j = \bigcup_k I_j^k$  où les  $I_j^k$  sont les  $2^j$  intervalles de longueur  $3^{-j}$  qui ont été donnés ci-dessus. Si  $\delta > 0$ , pour estimer  $\mathcal{H}_\delta^s(E_1)$ , il est naturel de considérer le recouvrement de  $E_1$  par les  $I_j^k$  avec  $3^{-j} \leq \delta$ . On a alors  $\sum_k \alpha(s) (\text{diam} I_j^k / 2)^s = \alpha(s) 2^{-s} 2^j 3^{-js}$ . Pour que  $2^j 3^{-js}$  converge non trivialement, il faut que  $s = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Le problème est que nous n'avons considéré que des recouvrements particuliers. Le même argument heuristique peut aussi s'appliquer pour les autres exemples. Pour justifier cette dimension, il suffit d'appliquer le résultat précédent en notant que l'ensemble triadique de Cantor est point fixe du système de similitudes  $(S_1, S_2)$  où  $S_1(x) = \frac{1}{3}x$  et  $S_2(x) = \frac{1}{3}(x+2)$  pour  $x \in \mathbb{R}$ .

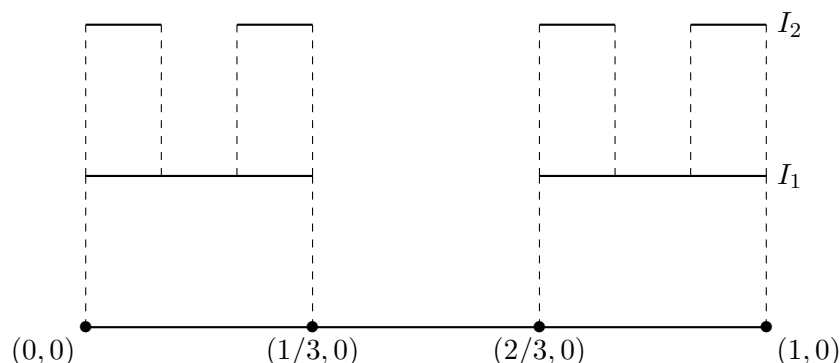


FIGURE 2.2 – Les trois premières étapes de la construction de l'ensemble triadique de Cantor



**Exemple 2.36** (L'ensemble de Cantor 4 coins ([111], pages 6-7)). Soit  $F_0 = [0, 1]^2$  le carré unité dans  $\mathbb{C}$ . Découpons  $F_0$  en 16 carrés égaux de longueur de côté  $\frac{1}{4}$ . L'ensemble  $F_1$  est l'union des 4 carrés situés dans les coins de  $F_0$ . Puis, on découpe chacun des 4 carrés en 16 carrés identiques et l'ensemble  $F_2$  est l'union des 16 carrés qui sont situés dans les coins des 4 carrés de  $F_1$ . En itérant cette construction, on construit une suite de sous-ensembles  $(F_j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}$ , chacun des  $F_j$  étant formé de  $4^j$  carrés de longueur de côté  $4^{-j}$  qui sont situés dans les coins des carrés de  $F_{j-1}$ . Soit  $E_2 = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} F_j$  (Voir la figure 2.3). Alors,  $\text{Hdim}(E_2) = 1$ .

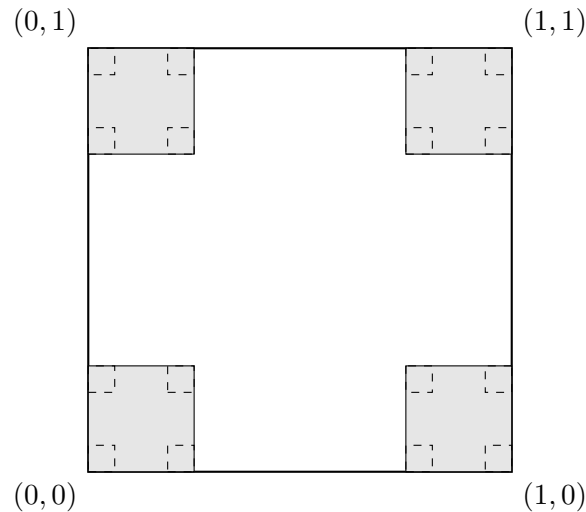


FIGURE 2.3 – Les trois premières étapes de la construction du Cantor 4-coins

**Exemple 2.37** (La courbe de Von Koch, ([98], pages 65-67)). Soit  $J_0 = [0, 1]$  l'intervalle unité situé sur la droite réelle de  $\mathbb{C}$ . On divise  $J_0$  en trois segments identiques et on substitue au segment du milieu deux segments formant avec lui un triangle équilatéral. On note  $J_1$  la ligne polygonale ainsi obtenue, puis on applique la même substitution à chaque segment de  $J_1$ . On obtient une nouvelle ligne polygonale  $J_2$  formé de  $4^2$  segments de longueur  $3^{-2}$ . En itérant, on obtient une suite de lignes polygonales  $(J_j)_{j \in \mathbb{N}}$  qui converge (en un sens approprié) vers une courbe de  $\mathbb{C}$  que l'on note  $E_3$ . Notons que la longueur de  $E_3$  est infinie. En fait,  $\text{Hdim}(E_3) = \frac{\log 4}{\log 3}$ .

**Exemple 2.38** (Le tamis et le tapis de Sierpinski). Comme pour l'ensemble de Cantor 4-coins, on commence par considérer le carré unité  $T_0 = [0, 1]^2$  de  $\mathbb{C}$ . On le subdivise ensuite en 9 carrés de longueur de côté  $1/3$  et on obtient  $T_1$  en enlevant le carré du milieu (voir la figure 2.4). Puis, on partage chacun des 8 carrés de  $T_1$  en 9 carrés de longueur de côté  $1/9$  et on enlève les 8 carrés du milieu pour obtenir  $T_2$ . En itérant cette construction, on obtient  $T_j$  qui est la réunion de  $8^j$  carrés de longueur de côté  $(1/3)^j$ . Le tapis de Sierpinski est alors défini par  $T = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} T_j$ . On a  $\text{Hdim}(T) = \frac{\log(8)}{\log(3)}$ . Le tamis de Sierpinski s'obtient de façon similaire en commençant par considérer un triangle équilatéral  $T_0$  de longueur de côté 1. On le subdivise en 4 triangles équilatéraux de longueur de côté  $1/2$  et on obtient  $T_1$  en enlevant le triangle du milieu. Le tamis de Sierpinski  $T$  est obtenu en itérant cette construction. On a  $\text{Hdim}(T) = \frac{\log(3)}{\log(2)}$ . Ces ensembles sont deux exemples d'espaces dans lesquels on peut faire de l'analyse. Cependant, ils sont de nature très différente. Par exemple, le tapis de Sierpinski n'a pas de point

de coupure locale alors que le tamis en a une infinité. Cela rend l'étude du tapis beaucoup plus difficile. Grosso modo, on peut travailler sur chaque composante du tamis de façon indépendante, ce que l'on ne peut pas faire pour le tapis. On rappelle que  $x_0$  est un point de coupure locale de l'espace métrique  $(X, d)$  si la boule  $B(x_0, r)$  est connexe pour un certain  $r > 0$  mais la boule époincée  $B(x_0, r) \setminus \{x_0\}$  ne l'est plus. Nous laissons le soin au lecteur de trouver les points de coupure locale du tamis de Sierpinski. Voir [75] pour plus de détails.

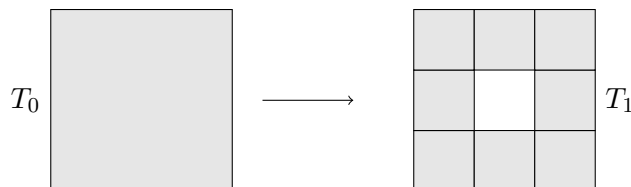


FIGURE 2.4 – Les deux premières étapes de la construction du tapis de Sierpinski

Le lecteur pourra appliquer le théorème précédent pour vérifier que la dimension de Hausdorff des exemples ci-dessus est bien celle donnée. La seule difficulté est d'exhiber les similitudes qui les engendrent.

## 2.4 Mesures de Hausdorff et applications lipschitziennes

Le but de cette section est de montrer que les mesures de Hausdorff se comportent bien sous l'action des applications (bi-)lipschitziennes.

**Proposition 2.39.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  une application  $K$ -lipschitzienne entre deux espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  et soit  $s \geq 0$ . Alors, pour tout  $A \subset X$ ,  $\mathcal{H}^s(f(A)) \leq K^s \mathcal{H}^s(A)$ . En particulier,  $Hdim(f(A)) \leq Hdim(A)$ .

*Démonstration.* Il suffit de noter que si  $(E_i)$  est un recouvrement de  $A$  avec  $\text{diam}(E_i) \leq \delta$  pour tout  $i$ , alors  $(f(E_i))$  est un recouvrement de  $f(A)$  avec  $\text{diam} f(E_i) \leq K\delta$  pour tout  $i$ . On en déduit que  $H_{K\delta}^s(f(A)) \leq K^s H_\delta^s(A)$  et on conclut en faisant tendre  $\delta$  vers 0.  $\square$

On en déduit

**Corollaire 2.40.** La dimension de Hausdorff est invariante par homéomorphisme bilipschitzien.

On rappelle qu'une application  $f : (X, d_X) \rightarrow (Y, d_Y)$  est bilipschitzienne s'il existe une constante  $K > 0$  de sorte que

$$K^{-1}d_X(x, y) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq Kd_X(x, y)$$

pour tous  $x, y \in X$ .

Terminons par un résultat de type Sard. Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est différentiable en  $x \in \mathbb{R}^n$ , on note  $Df(x)$  sa différentielle en  $x$ .

**Théorème 2.41.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne. Alors,

$$\mathcal{H}^n(\{f(x); Hdim(Df(x)(\mathbb{R}^n)) < n\}) = 0.$$

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application  $K$ -lipschitzienne et soit

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n; Hdim(Df(x)(\mathbb{R}^n)) < n\}.$$

Cette définition sous-entend que si  $a \in A$ ,  $Df(a)$  existe. D'après la proposition 2.39, seul le cas  $n \leq m$  est intéressant. Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A$  est borné (sinon démontrer le résultat pour  $A \cap B(x, R)$  pour tout  $R > 0$  et conclure). Pour  $a \in A$ , on considère le plan affine  $P_a = \{f(a) + Df(a)(y - a), y \in \mathbb{R}^n\}$ . L'idée de la preuve est la suivante. Le plan  $P_a$  approche  $f(\mathbb{R}^n)$  au voisinage de  $f(a) \in f(A)$  puisque  $f(x) = f(a) + Df(a)(x - a) + o(|x - a|)$  quand  $|x - a|$  tend vers 0 (en d'autres termes,  $P_a$  est le plan tangent en  $f(a)$  à la surface  $f(\mathbb{R}^n)$ ). Comme ce plan est de dimension  $< n$  (en tant qu'espace vectoriel),  $f(A)$  est localement de dimension  $< n$  au voisinage de  $f(a)$ . On conclut par un théorème de recouvrement. Donnons nous un  $\varepsilon > 0$ . Alors, pour tout  $a \in A$ , il existe  $R_a > 0$  telle que pour  $0 < r < R_a$ ,  $f(B(a, r)) \subset B(f(a), Kr) \cap \{y; d(y, P_a) \leq \varepsilon r\}$ . Le plan  $P_a$  étant de dimension  $< n$ , il existe une constante  $C = C(n, m)$  telle que  $\mathcal{H}_\infty^n(f(B(a, r))) \leq C\varepsilon r(Kr)^{n-1}$  pour tout  $a \in A$  et tout  $r < R_a$ . En appliquant le théorème de Vitali (voir la proposition 1.88), on peut donc trouver des boules  $B_i = B(a_i, r_i)$  telles que  $a_i \in A$ ,  $\mathcal{H}_\infty^n(f(B(a_i, r_i))) \leq C\varepsilon r_i(Kr_i)^{n-1}$  pour tout  $i$ ,  $\mathcal{L}^n(A \setminus \bigcup_i B_i) = 0$  et  $\sum_i \mathcal{L}^n(B_i) \leq \mathcal{L}^n(A) + \varepsilon$ . On a alors  $f(A) \subset (\bigcup_i f(B_i)) \cup f(A \setminus \bigcup_i B_i)$  et par la proposition 2.39,  $\mathcal{H}^n(f(A \setminus \bigcup_i B_i)) = 0$ . On en déduit alors

$$\mathcal{H}_\infty^n(f(A)) \leq \sum_i \mathcal{H}_\infty^n(f(B_i)) \leq CK^{n-1}\varepsilon \sum_i r_i^n \leq CK^{n-1}\alpha(n)^{-1}\varepsilon(\mathcal{L}^n(A) + \varepsilon).$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient que  $\mathcal{H}_\infty^n(f(A)) = 0$  et on peut conclure aisément (voir exercice 2.188).  $\square$

Cette démonstration est inspirée de [98].

## 2.5 Résultats de densité pour les mesures de Hausdorff

**Définition 2.42.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un sous-ensemble de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $0 \leq s \leq n$ , on définit les  $s$ -densités inférieures et supérieures de  $A$  en  $x$  par

$$\Theta_*^s(x, A) = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(x, r))}{\alpha(s)r^s}$$

$$\Theta^{*s}(x, A) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(x, r))}{\alpha(s)r^s}.$$

Si ces deux valeurs coïncident, on appelle  $s$ -densité de  $A$  en  $x$ , que l'on note  $\Theta^s(x, A)$ , la valeur commune, c'est à dire

$$\Theta^s(x, A) = \Theta_*^s(x, A) = \Theta^{*s}(x, A).$$

Dans le cas où  $s = n$ , nous avons vu alors que  $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ . Donc, d'après le théorème de différentiation de Lebesgue (voir théorème 1.166) appliqué à la fonction  $f = \chi_A$ , la  $n$ -densité de  $A$  existe en  $\mathcal{L}^n$ -presque tout  $a \in A$  et de plus,  $\Theta^n(a, A) = 1$  pour presque tout  $a \in A$ . Un tel résultat n'est pas en général vrai pour  $s \neq n$  et nous verrons que si cela est le cas, l'ensemble  $A$  a une géométrie particulière. Cependant, nous avons le

**Théorème 2.43.** Soit  $0 \leq s \leq n$  et soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ .

- (i)  $2^{-s} \leq \Theta^{*s}(a, A) \leq 1$  pour  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $a \in A$ ;
- (ii) Si  $A$  est  $\mathcal{H}^s$ -mesurable,  $\Theta^{*s}(x, A) = 0$  pour  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ .

**Remarque 2.44.** Si  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ , le théorème est vide. Cela sera souvent le cas dans la suite. D'autre part, l'hypothèse  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$  est cruciale.

*Démonstration.* Commençons par démontrer l'inégalité de gauche de (i). Pour cela, posons  $B = \{a \in A; \Theta^{*s}(a, A) < 2^{-s}\}$  et notons que  $B = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} B_k$  où

$$B_k = \left\{ a \in A; \mathcal{H}^s(A \cap B(a, r)) \leq \frac{k}{k+1} \alpha(s) 2^{-s} r^s, \forall 0 < r < 1/k \right\}.$$

Notre but étant de montrer que  $\mathcal{H}^s(B) = 0$ , il suffit de voir que  $\mathcal{H}^s(B_k) = 0$  pour tout  $k$ . Fixons  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . Par définition de  $\mathcal{H}^s$ , il existe un recouvrement  $(C_i)$  de  $B_k$  avec  $0 < \text{diam}(C_i) < 1/k$ ,  $C_i \cap B_k \neq \emptyset$  et  $\sum_i \alpha(s) (\text{diam}(C_i)/2)^s \leq \mathcal{H}^s(B_k) + \varepsilon$ . Afin d'utiliser la définition de  $B_k$ , on remplace les  $C_i$  par des boules en choisissant  $x_i \in C_i \cap B_k$  et en posant  $r_i = \text{diam} C_i$ . On a alors  $B_k \cap C_i \subset A \cap B(x_i, r_i)$  et donc par définition de  $B_k$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^s(B_k) &\leq \sum_i \mathcal{H}^s(B_k \cap C_i) \\ &\leq \sum_i \mathcal{H}^s(A \cap B(x_i, r_i)) \\ &\leq \frac{k}{k+1} 2^{-s} \sum_i \alpha(s) r_i^s \\ &\leq \frac{k}{k+1} \sum_i \alpha(s) (\text{diam}(C_i)/2)^s \\ &\leq \frac{k}{k+1} (\mathcal{H}^s(B_k) + \varepsilon). \end{aligned}$$

En faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient  $\mathcal{H}^s(B_k) \leq \frac{k}{k+1} \mathcal{H}^s(B_k) < \mathcal{H}^s(B_k)$ . Comme  $\mathcal{H}^s(B_k) < +\infty$ , il s'en suit que  $\mathcal{H}^s(B_k) = 0$ .

Passons à l'inégalité de droite de (i). Nous allons appliquer une stratégie similaire. Fixons  $t > 1$  et posons donc  $B = \{a \in A; \Theta^{*s}(a, A) > t\}$ . Notre but est de montrer que  $\mathcal{H}^s(B) = 0$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $A$  est borélien par régularité de  $\mathcal{H}^s$ . Fixons comme d'habitude  $\varepsilon > 0$  et  $\delta > 0$ . Comme  $\mathcal{H}^s$  est une mesure de Borel, il existe un ouvert  $U$  tel que  $B \subset U$  et  $\mathcal{H}^s(A \cap U) < \mathcal{H}^s(B) + \varepsilon$ . D'autre part, pour tout  $x \in B$ , il existe  $0 < r < \delta/2$  de sorte que  $B(x, r) \subset U$  et  $\mathcal{H}^s(A \cap B(x, r)) > t \alpha(s) r^s$  (par définition de  $B$ ). Comme la restriction de  $\mathcal{H}^s$  à  $U$  est une mesure de Radon (voir la proposition 1.20), on peut appliquer à cette famille de boules le théorème de recouvrement de Vitali pour les mesures de Radon (proposition 1.95). Il existe donc des boules disjointes  $(B_i)$  qui vérifient les propriétés précédentes telles que  $\mathcal{H}^s(B \setminus \bigcup_i B_i) = 0 = \mathcal{H}_\delta^s(B \setminus \bigcup_i B_i)$ . Ceci implique que  $\mathcal{H}_\delta^s(B) = \mathcal{H}_\delta^s(B \cap \bigcup_i B_i)$ . Il s'en suit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^s(B) &= \mathcal{H}_\delta^s \left( B \cap \bigcup_i B_i \right) \\ &\leq \sum_i \alpha(s) (\text{diam}(B_i)/2)^s \\ &< t^{-1} \sum_i \mathcal{H}^s(A \cap B_i) \\ &\leq t^{-1} \mathcal{H}^s(A \cap U) < t^{-1} (\mathcal{H}^s(B) + \varepsilon). \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\delta$  puis  $\varepsilon$  vers 0, on obtient  $\mathcal{H}^s(B) > t \mathcal{H}^s(B)$  avec  $t > 1$ . Donc,  $\mathcal{H}^s(B) = 0$ . Démontrons (ii) et pour cela, posons pour  $t > 0$ ,

$$A_t = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \setminus A; \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(A \cap B(x, r))}{\alpha(s) r^s} > t \right\}.$$

Le but est de montrer que  $\mathcal{H}^s(A_t) = 0$  pour tout  $t > 0$ . Comme  $A$  est mesurable avec  $\mathcal{H}^s(A) < +\infty$ , la restriction de  $\mathcal{H}^s$  à  $A$  est une mesure de Radon (voir la proposition 1.20) et donc pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un ouvert  $U_\varepsilon$  tel que  $A_t \subset U_\varepsilon$  et  $\mathcal{H}^s(A \cap U_\varepsilon) < \varepsilon$  (car  $A \cap A_t = \emptyset$ ). On fixe  $t > 0$ ,  $\delta > 0$  et on considère la famille suivante de boules recouvrant  $A_t$

$$\mathcal{F} = \left\{ B(x, r); B(x, r) \subset U_\varepsilon, 0 < r < \delta, \frac{\mathcal{H}^s(B(x, r) \cap A)}{\alpha(s)r^s} > t \right\}.$$

Par le théorème de recouvrement 5r (voir proposition 1.84), il existe une famille disjointe dénombrable de boules  $B_i = B(x_i, r_i)$  telles que  $A_t \subset \bigcup_i (5B_i)$ . Il s'en suit

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{10\delta}^s(A_t) &\leq \sum_i \alpha(s)(5r_i)^s \\ &\leq \frac{5^s}{t} \sum_i \mathcal{H}^s(A \cap B_i) \\ &\leq \frac{5^s}{t} \mathcal{H}^s(A \cap U_\varepsilon) \leq \frac{5^s}{t} \varepsilon \end{aligned}$$

D'où, en faisant  $\delta \rightarrow 0$ , on obtient  $\mathcal{H}^s(A_t) \leq 5^s t^{-1} \varepsilon$  pour tout  $\varepsilon > 0$  et donc  $\mathcal{H}^s(A_t) = 0$ .  $\square$

**Remarque 2.45.** Dans le cas  $s = n$ , (ii) est vrai pour la densité (et non seulement pour la densité supérieure) par le théorème de différentiation de Lebesgue (voir théorème 1.166) appliqué à la fonction  $f = \chi_A$ .

Il est impossible d'avoir un contrôle en général de la densité inférieure pour  $s \neq n$ . On peut ainsi construire des compacts  $A \subset \mathbb{R}^n$  avec  $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$  et  $\Theta_*^s(a, A) = 0$  en tout  $a \in A$  ! Voir l'exercice 2.198.

De façon plus générale, si  $s > 0$  et si  $\mu$  est une mesure sur  $\mathbb{R}^n$ , on définit les  $s$ -densités inférieures et supérieures de  $\mu$  en  $x$  par

$$\begin{aligned} \Theta_*^s(x, \mu) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\alpha(s)r^s} \\ \Theta^{*s}(x, \mu) &= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu(B(x, r))}{\alpha(s)r^s}. \end{aligned}$$

Si ces deux valeurs coïncident, on appelle  $s$ -densité de  $\mu$  en  $x$ , que l'on note  $\Theta^s(x, \mu)$  la valeur commune, c'est à dire

$$\Theta^s(x, \mu) = \Theta_*^s(x, \mu) = \Theta^{*s}(x, \mu).$$

Le cas précédent correspond à  $\mu = \mathcal{H}^s \llcorner A$ . L'existence de densité n'est possible que si  $s$  est entier !

**Théorème 2.46.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  telle que la densité  $\Theta^s(x, \mu)$  existe et vérifie  $0 < \Theta^s(x, \mu) < \infty$  sur un ensemble de  $\mu$ -mesure positive. Alors,  $s$  est un entier

Une preuve du théorème de Marstrand se trouve dans [98] (theorem 14.10). Voir l'exercice 2.199 pour une démonstration dans un cas particulier et la section 5.1 pour une idée de la démonstration dans le cas général.

## 2.6 Constructions de mesures via la convergence faible

**Définition 2.47.** Une suite de mesures de Radon  $(\mu_j)$  sur un espace métrique  $(X, d)$  converge faiblement vers la mesure  $\mu$  sur  $X$  si pour toute fonction  $\phi \in C_0(X)$ , on a

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_X \phi d\mu_j = \int_X \phi d\mu.$$

Cette notion est très utile en pratique pour construire des mesures à cause du résultat de compacité suivant.

**Théorème 2.48.** Soit  $(\mu_j)$  une suite de mesures de Radon sur l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  telle que pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\sup_j \mu_j(K) < +\infty$ . Alors, il existe une sous-suite de  $(\mu_j)$  qui converge faiblement.

Avant de démontrer ce résultat, nous énonçons le théorème de représentation de Riesz qui nous sera utile (voir [125] théorème 2.14 pour une démonstration).

**Théorème 2.49.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique localement compact et soit  $L : C_c(X) \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire positive (c'est à dire que  $L(f) \geq 0$  si  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in X$ ). Alors, il existe une unique mesure de Radon  $\mu$  sur  $X$  telle que pour tout  $f \in C_c(X)$ ,

$$L(f) = \int_X f d\mu.$$

*Démonstration.* On commence par noter que  $C_c(\mathbb{R}^n)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_\infty$  est séparable. On peut par exemple considérer les polynômes à coefficients rationnels et utiliser le théorème d'approximation de Weierstrass. Soit  $(\phi_i)_{i \in \mathbb{N}}$  un tel ensemble dénombrable et dense dans  $C_c(\mathbb{R}^n)$ . Alors, pour tout  $i$ , la suite  $\left( \int \phi_i d\mu_j \right)_j$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ , donc admet une sous-suite convergente. En appliquant le procédé

diagonal, on peut construire une sous-suite  $(\mu_{j_k})_k$  de  $(\mu_j)$  telle que pour tout  $i$ ,  $\left( \int \phi_i d\mu_{j_k} \right)_k$  converge.

Par densité des  $(\phi_i)$ , il vient ensuite que pour tout  $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ , la limite  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \phi d\mu_{j_k}$  existe et on la note  $L(\phi)$ . L'application  $\phi \rightarrow L(\phi)$  est une forme linéaire positive sur  $C_c(\mathbb{R}^n)$ . Donc, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $L(\phi) = \int \phi d\mu$ .

Donc, pour tout  $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int \phi d\mu_{j_k} = \int \phi d\mu$  et notre preuve est complète.  $\square$

En général, quand  $(\mu_j)$  converge faiblement vers  $\mu$ , il n'est pas facile de contrôler pour un ensemble  $A$  la mesure  $\mu(A)$  par les  $\mu_j(A)$ . Cependant, on a

**Proposition 2.50.** Soit  $(\mu_j)$  une suite de mesures de Radon sur un espace métrique localement compact  $X$  qui converge faiblement vers une mesure  $\mu$  sur  $X$ .

- (i) Si  $K$  est un compact de  $X$ ,  $\mu(K) \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} \mu_j(K)$ .
- (ii) Si  $O$  est un ouvert de  $X$ ,  $\mu(O) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \mu_j(O)$ .

*Démonstration.* On démontre seulement (i), la preuve de (ii) est similaire (approcher l'ouvert  $O$  par en dessous par des compacts). Soit  $\varepsilon > 0$ . Puisque  $\mu$  est une mesure de Radon, il existe un ouvert  $O \supset K$  telle que  $\mu(O) \leq \mu(K) + \varepsilon$  par le lemme 1.23. D'où, par le lemme 1.36, il existe  $\phi \in C_c(X)$  telle que  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi = 1$  sur  $K$ , et  $\phi$  est à support dans  $O$ . On en déduit

$$\mu(K) \geq \mu(O) - \varepsilon \geq \int \phi d\mu - \varepsilon = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int \phi d\mu_j - \varepsilon \geq \limsup_{j \rightarrow +\infty} \mu_j(K) - \varepsilon.$$

Comme  $\varepsilon$  est arbitraire, on obtient (i).  $\square$

Nous allons appliquer ce qui précède pour démontrer une version du lemme de Frostman qui est très utile. Voir par exemple les exercices 2.194 et 2.220.

**Théorème 2.51.** *Soit  $E$  un borélien dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors,  $\mathcal{H}^s(E) > 0$  si et seulement si il existe une mesure de Radon à support dans  $E$  (avec  $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$ ) telle que  $\mu(B(x, r)) \leq r^s$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout  $r > 0$ . En particulier, l'existence d'une telle mesure implique que  $Hdim(E) \geq s$ .*

*Démonstration.* On rappelle (voir définition 1.50) que  $\mathcal{Q}_m$  est l'ensemble des cubes dyadiques de  $\mathbb{R}^n$  de longueur de côté  $2^{-m}$ , c'est à dire des cubes  $Q$  de la forme  $Q = \prod_{j=1}^n [k_j 2^{-m}, (k_j + 1) 2^{-m}[$  où, pour tout  $j = 1, \dots, n$ ,  $k_j \in \mathbb{Z}$ . Par rapport à la définition 1.50, nous avons ouvert l'intervalle à droite de sorte que les  $Q \in \mathcal{Q}_j$  forment une partition de  $\mathbb{R}^n$ . Les cubes dyadiques sont ceux dans  $\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_j$ .

Nous avons déjà vu que l'existence d'une mesure  $\mu$  à support dans  $E$  et vérifiant  $\mu(B(x, r)) \leq r^s$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout  $r > 0$  implique  $\mathcal{H}^s(E) > 0$  et  $Hdim(E) \geq s$ . Réciproquement, considérons un borélien  $E \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\mathcal{H}^s(E) > 0$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $E$  est compact et contenu dans le cube unité  $Q_0 = [0, 1]^n$  de  $\mathbb{R}^n$  et que celui-ci est le plus petit cube dyadique contenant  $E$ . On note  $b = \mathcal{H}_\infty^s(E)$ . Alors,  $b > 0$  (par hypothèse) et pour tout recouvrement  $(A_i)$  de  $E$ ,  $\sum_i \text{diam}(A_i)^s \geq b > 0$  (par définition de  $\mathcal{H}_\infty^s$ ). L'idée de la preuve est de répartir la masse  $b$  sur les sous-cubes dyadiques de  $Q_0$  de longueur de côté  $2^{-m}$  et ainsi de construire une famille de mesures  $(\nu_m)$  qui convergera faiblement vers la mesure cherchée  $\mu$ . Nous utiliserons alors tous les résultats précédents sur la convergence faible de mesures.

Si  $m \geq 0$  et si  $Q \in \mathcal{Q}_m$ , on définit la mesure  $\mu_m^m$  à support dans  $E$  par

$$\mu_m^m \llcorner Q = 2^{-ms} \mathcal{L}^n(Q)^{-1} \mathcal{L}^n \llcorner Q \text{ si } Q \cap E \neq \emptyset$$

$$\mu_m^m \llcorner Q = 0 \text{ et } Q \cap E = \emptyset.$$

On modifie ensuite  $\mu_m^m$  de la façon suivante, l'idée étant de changer la mesure dans un cube de la génération précédente si sa mesure est trop grande. Pour tout  $Q \in \mathcal{Q}_{m-1}$ , on pose

$$\mu_{m-1}^m \llcorner Q = \mu_m^m \llcorner Q \text{ si } \mu_m^m(Q) \leq 2^{-(m-1)s}$$

$$\mu_{m-1}^m \llcorner Q = 2^{-(m-1)s} \mu_m^m(Q)^{-1} \mu_m^m \llcorner Q \text{ si } \mu_m^m(Q) > 2^{-(m-1)s}.$$

On construit ainsi par récurrence une suite (finie) de mesures via la relation

$$\mu_{m-k-1}^m \llcorner Q = r(Q) \mu_{m-k}^m \llcorner Q$$

où  $Q \in \mathcal{Q}_{m-k-1}$  et  $r(Q) = \min(1, 2^{-(m-k-1)s} \mu_{m-k}^m(Q)^{-1})$ . Il faut noter que les cubes dyadiques considérés sont de plus en plus gros. On stoppe cette procédure dès que nous avons atteint le cube maximal  $Q_0$  et on pose  $\mu_m = \mu_0^m$  puis  $\nu_m = \frac{1}{\mu_0^m(\mathbb{R}^n)} \mu_0^m = \frac{1}{\mu_m(\mathbb{R}^n)} \mu_m$ . Alors,  $\nu_m$  est une mesure de probabilité et donc  $(\nu_m)$  admet une sous-suite convergente faiblement vers une mesure  $\nu$  d'après le théorème 2.48.

Il nous reste à vérifier que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout  $R > 0$ ,  $\nu(B(x, R)) \leq 2^{n+2s} b^{-1} n^{s/2} R^s$ . Pour cela, notons que, comme au cours de la construction, la mesure d'un cube dyadique ne croit jamais, on a  $\mu_m(Q) \leq 2^{-(m-k)s}$  pour tout  $k = 0, \dots, m$  et tout  $Q \in \mathcal{Q}_{m-k}$ . De plus, par construction, pour tout  $x \in E$ , il existe  $k \in \{0, \dots, m\}$  et  $Q \in \mathcal{Q}_{m-k}$  tels que  $x \in Q$  et  $\mu_m(Q) = 2^{-(m-k)s} = n^{-s/2} (\text{diam} Q)^s$ . On peut donc considérer une partition  $(Q_i)$  de  $E$  par des cubes dyadiques disjoints avec  $\mu_m(Q_i) = n^{-s/2} (\text{diam} Q_i)^s$  et ainsi  $\mu_m(\mathbb{R}^n) = \sum_i \mu_m(Q_i) = n^{-s/2} \sum_i (\text{diam} Q_i)^s \geq n^{-s/2} b$ . On en déduit alors que pour tout  $Q \in \mathcal{Q}_{m-k}$ ,  $k = 0, \dots, m$ ,  $\nu_m(Q) = \frac{1}{\mu_m(\mathbb{R}^n)} \mu_m(Q) \leq b^{-1} n^{s/2} 2^{-(m-k)s}$ .

Fixons maintenant  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $R > 0$ . Alors,  $B(x, R)$  est contenu dans (l'intérieur de) l'union  $U = \bigcup_{i=1}^{2^n} Q_i$  où les cubes  $Q \in \mathcal{Q}_p$  sont assez petits, c'est à dire tels que par exemple  $\text{diam} Q = n^{1/2} 2^{-p} \leq$

$4n^{1/2}R$ . On a alors pour  $m \geq p$ ,  $\nu_m(U) \leq 2^n b^{-1} n^{s/2} 2^{-ps} \leq 2^{n+2s} b^{-1} n^{s/2} R^s$ . Donc, par la proposition 2.50,

$$\nu(B(x, R)) \leq \nu(U) \leq \liminf_{m \rightarrow +\infty} \nu_m(U) \leq 2^{n+2s} b^{-1} n^{s/2} R^s.$$

□

**Remarque 2.52.** Le lemme de Frostman peut se généraliser de la façon suivante. Soit  $(X, d)$  un espace métrique compact avec  $\mathcal{H}^s(X) > 0$  (où  $\mathcal{H}^s$  est la  $s$ -mesure de Hausdorff définie par rapport à  $d$ ). Alors, il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $X$  et  $\delta > 0$  tels que  $\mu(E) \leq \text{diam}(E)^s$  pour tout  $E \subset X$  avec  $\text{diam}E \leq \delta$  et  $\mu(X) > 0$ . Ceci se démontre via la notion de mesures de Hausdorff à poids. Si  $A \subset X$ , on pose

$$\Lambda_\delta^s(A) = \left\{ \sum_i c_i \alpha(s) (\text{diam}E_i/2)^s; \chi_A \leq \sum_i c_i \chi_{E_i}, c_i > 0, \text{diam}(E_i) < \delta \right\}$$

puis  $\Lambda^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \Lambda_\delta^s(A)$ . Le cas de la mesure de Hausdorff ‘classique’ correspond au choix  $c_i = 1$  pour tout  $i$ . Voir [98] pour plus de détails.

Une autre application des idées précédentes est la preuve du théorème 1.111.

### 3 Différentiabilité des applications lipschitziennes et approximation par des fonctions lisses

Le principal but de cette section est de démontrer des théorèmes de type Rademacher sur la différentiabilité presque partout des applications lipschitziennes. On commence par le cas classique, à savoir celui des espaces euclidiens. Des versions en seront ensuite données dans les groupes de Carnot, les espaces de Banach et les espaces métriques généraux. On va aussi définir plusieurs notions de normes du jacobien d’une application lipschitzienne, ce qui sera utile pour les formules de l’aire et de la co-aire données à la fin de ce chapitre. Dans le cas euclidien, on va établir un théorème de type Whitney sur l’approximation des applications lipschitziennes par des fonctions lisses.

#### 3.1 Théorèmes de différentiabilité de Rademacher et de Stepanov

Le but de ce paragraphe est de démontrer que dans le cas euclidien, une application lipschitzienne est ‘régulière’ en dehors d’un ensemble négligeable. Ceci peut paraître étonnant car si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est lipschitzienne (par rapport à la distance euclidienne), la condition d’être lipschitzienne implique qu’en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ , le taux de variation de  $f$  en  $x$  est borné uniformément. Le théorème de Rademacher dit qu’en fait, ce taux de variation a une limite, et donc  $f$  est différentiable. Le prix à payer est que cette différentiabilité a seulement lieu presque partout ! Nous verrons une autre approche via les espaces de Sobolev dans le chapitre 3.

Le résultat principal du paragraphe est le

**Théorème 2.53.** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application (localement) lipschitzienne. Alors,  $f$  est différentiable presque partout par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  (voir la définition 1.56).*

La notion de différentiabilité étant locale, on peut supposer que  $f$  est lipschitzienne sur tout  $\mathbb{R}^n$ . D’autre part, il suffit de traiter le cas  $m = 1$ . Le cas général s’en déduit en considérant les applications coordonnées. La démonstration du théorème de Rademacher se fera en deux étapes. Dans un premier



temps, on considère le cas des fonctions lipschitziennes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Nous avons vu au chapitre 1 (voir le corollaire 1.186) qu'une telle application  $f$  est presque partout dérivable. Nous en déduisons aisément que toute fonction lipschitzienne  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  admet des dérivées dans toutes les directions (en particulier des dérivées partielles) en presque tout point. Nous concluons par des arguments de densité. Voir les exercices 2.201 et 2.202 pour des applications.

*Démonstration.* Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une applications lipschitzienne. Nous allons montrer qu'alors  $f$  est différentiable presque partout sur  $\mathbb{R}^n$ , ce qui conclura la preuve du théorème de Rademacher (théorème 2.53) d'après les remarques initiales. Nous allons diviser cette démonstration en plusieurs étapes.

1) Pour tout  $u \in S^{n-1} = \{v \in \mathbb{R}^n; \|v\| = 1\}$ , on considère la dérivée de  $f$  en  $x$  suivant la direction  $u$  (si celle-ci existe) :

$$\partial_u f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}.$$

On note  $\mathcal{B}_u$  l'ensemble des  $x$  pour lesquels  $\partial_u f(x)$  n'existe pas. Alors, cette ensemble est mesurable et puisque  $f$  est lipschitzienne sur  $\{x + tu; t \in \mathbb{R}\}$  pour  $x$  fixé, il vient que  $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}_u \cap \{x + tu; t \in \mathbb{R}\}) = 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ceci vient de la remarque initiale sur la dérivabilité presque partout d'une fonction lipschitzienne sur  $\mathbb{R}$ . D'après le théorème de Fubini, il s'en suit que  $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}_u) = 0$  et donc que pour tout  $u \in S^{n-1}$ ,  $\partial_u f(x)$  existe pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Dans le cas où  $u = e_i$  ( $e_i$  est le  $i$ -ième vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ ) pour  $i = 1, \dots, n$ , on notera  $\partial_i f(x) = \partial_{e_i} f(x)$ .

2) Nous avons pour tout  $u \in S^{n-1}$ , pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\partial_u f(x) = \langle u, \nabla f(x) \rangle$  où  $\nabla f(x) = (\partial_1 f(x), \dots, \partial_n f(x))$  (notons que ceci est trivial si  $f$  est lisse, ce que nous utiliserons dans la suite). Ici,  $\langle u, \nabla f(x) \rangle$  est le produit scalaire de  $u$  par  $\nabla f(x)$ . En effet, si  $\phi$  est une fonction  $C^\infty$  à support compact dans  $\mathbb{R}^n$ , alors le changement de variable  $y = x + tu$  donne pour  $t \neq 0$ ,

$$\int \frac{f(x + tu) - f(x)}{t} \phi(x) dx = - \int \frac{\phi(x) - \phi(x - tu)}{t} f(x) dx.$$

D'où en faisant  $t \rightarrow 0$  et en appliquant le théorème de convergence dominée, on a alors

$$\int \partial_u f(x) \phi(x) dx = - \int f(x) \partial_u \phi(x) dx.$$

Puisque  $\partial_u \phi(x) = \langle u, \nabla \phi(x) \rangle = \sum_{j=1}^n \partial_j \phi(x) \langle u, e_j \rangle$ , il vient par intégration par parties

$$\begin{aligned} \int \partial_u f(x) \phi(x) dx &= - \int f(x) \partial_u \phi(x) dx \\ &= - \int f(x) \langle u, \nabla \phi(x) \rangle dx \\ &= - \sum_{j=1}^n \left( \int f(x) \partial_j \phi(x) \right) \langle u, e_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \int \phi(x) \partial_j f(x) dx \right) \langle u, e_j \rangle \\ &= \int \phi(x) \langle u, \nabla f(x) \rangle dx. \end{aligned}$$

Comme ceci est vrai pour toute fonction lisse  $\phi$ , nous pouvons conclure. Ce type d'argument est classique quand on travaille avec des dérivées faibles ou des distributions (voir le chapitre 3).

3) Soit  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une famille dense (dénombrable) dans  $S^{n-1}$ . Pour tout  $i \in \mathbb{N}$ , on note  $A_i$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^n$  pour lesquels  $\nabla f(x)$  et  $\partial_{u_i} f(x)$  existent et vérifient  $\partial_{u_i} f(x) = \langle u_i, \nabla f(x) \rangle$ . On pose  $A = \bigcap_i A_i$ . Alors, d'après ce qui précède,  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus A) = 0$ .

4) Nous allons montrer que  $f$  est différentiable en tout point de  $A$ , ce qui mettra fin à notre démonstration. Pour cela, on pose pour tout  $x \in A$ , tout  $u \in S^{n-1}$ , tout  $t > 0$ ,  $Q(x, u, t) = t^{-1}(f(x + tu) - f(x)) - \langle u, \nabla f(x) \rangle$ . Il nous suffit de voir que  $\lim_{t \rightarrow 0} Q(x, u, t) = 0$  uniformément en  $u$ . Or, si  $u, u' \in S^{n-1}$ , on a puisque  $f$  est lipschitzienne,

$$|Q(x, u, t) - Q(x, u', t)| \leq (n+1)Lip(f)\|u - u'\|.$$

Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $x \in A$ . Par compacité de la sphère  $S^{n-1}$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $u \in S^{n-1}$ , il existe  $i \in \{1, \dots, N\}$  avec  $\|u - u_i\| < \frac{\varepsilon}{(2(n+1)Lip(f))}$ . Par définition de  $A$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} Q(x, u_i, t) = 0$  pour tout  $i$ . On en déduit qu'il existe  $\delta > 0$  tel que  $|Q(x, u_i, t)| \leq \varepsilon/2$  dès que  $0 < t < \delta$  et  $i \in \{1, \dots, N\}$ . D'où, fixons maintenant  $u \in S^{n-1}$  et  $0 < t < \delta$ , et choisissons  $i \in \{1, \dots, N\}$  tel que  $\|u - u_i\| \leq \frac{\varepsilon}{(2(n+1)Lip(f))}$ . Alors, on a

$$\begin{aligned} |Q(x, u, t)| &\leq |Q(x, u, t) - Q(x, u_i, t)| + |Q(x, u_i, t)| \\ &\leq (n+1)Lip(f)\|u - u_i\| + \varepsilon/2 \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

La preuve du théorème de Rademacher est complète.  $\square$

Notons que nous pouvons reformuler le théorème de Rademacher de la façon suivante. Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction lipschitzienne nulle part différentiable sur  $A$ . Alors, la mesure de Lebesgue de  $A$  est nulle. Une question naturelle est de voir si cette forme du théorème de Rademacher a une réciproque, c'est à dire si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est de mesure de Lebesgue nulle, existe-t-il une application lipschitzienne  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui soit nulle part différentiable sur  $A$ . Tout d'abord, il existe  $E \subset \mathbb{R}^n$  avec  $n > 1$  telle que toute fonction lipschitzienne  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  admet un point de différentiabilité dans  $E$ . Donc, la réponse à la question précédente ne peut être positive que si  $m \geq n$ . D'un autre côté, si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est de mesure de Lebesgue nulle et si  $m \geq n$ , il existe une application lipschitzienne  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  qui est nulle part différentiable sur  $A$ . Ainsi, la réciproque du théorème est vraie si et seulement si  $m \geq n$ . Nous renvoyons à [119] pour plus de détails.

Nous allons maintenant déduire du théorème de Rademacher le théorème de Stepanov qui en est une version plus générale.

**Théorème 2.54.** *Toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est différentiable  $\mathcal{L}^n$ -presque partout sur l'ensemble*

$$Z(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty \right\}.$$

*Démonstration.* On présente une preuve due à Malý (voir [96]). Comme précédemment, on peut supposer que  $m = 1$ . Comme  $f$  est localement borné sur  $Z(f)$ , on peut écrire  $Z(f) \subset \cup_{i \in \mathbb{N}} U_i$  où  $(U_i)$  est la famille de toutes les boules ouvertes dans  $\mathbb{R}^n$  dont les centres et les rayons sont des rationnels et telles que la restriction de  $f$  à  $U_i$  (notée dans la suite  $f|_{U_i}$ ) soit bornée. Soient  $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\psi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}$  définies par

$$\begin{aligned} \phi_i(x) &= \sup\{v(x); v \text{ est } i\text{-lipschitzienne avec } v \leq f \text{ sur } U_i\}, \\ \psi_i(x) &= \inf\{u(x); u \text{ est } i\text{-lipschitzienne avec } u \geq f \text{ sur } U_i\}, \end{aligned}$$

Notons que ces définitions ont bien un sens car  $f|_{U_i}$  est bornée et les fonctions constantes sont  $K$ -lipschitziennes pour tout  $K \geq 0$ . Il est clair que  $\phi_i$  et  $\psi_i$  sont  $i$ -lipschitziennes en tant que supremum et infimum de fonctions lipschitziennes (voir l'exercice 2.186). De plus, sur  $U_i$ ,  $\phi_i \leq f|_{U_i} \leq \psi_i$ . Soit

$$A_i = \{x \in U_i; \phi_i \text{ et } \psi_i \text{ sont toutes les deux différentiables en } x\}.$$

Par le théorème de Rademacher (théorème 2.53), pour tout  $i$ , les  $\phi_i$  et  $\psi_i$  sont différentiables presque partout sur  $U_i$ . Donc, si on note  $C = \cup_{i \in \mathbb{N}} (U_i \setminus A_i)$ , on a  $\mathcal{L}^n(C) = 0$ . Pour conclure, nous allons voir que  $f$  est différentiable sur  $L(f) \setminus C$ . Pour cela, nous allons montrer que si  $x \in L(f) \setminus C$ , il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que  $x \in A_i$  et  $\phi_i(x) = \psi_i(x)$ . Alors,  $f$  est différentiable en  $x$  et  $Df(x) = D\phi_i(x) = D\psi_i(x)$ . Considérons  $x \in L(f) \setminus C$ . Alors, par définition de  $L(f)$ , il existe  $r > 0$  et  $\lambda \geq 0$  tels que  $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$  dès que  $y \in B(x, r)$ . On choisit maintenant un  $i$  de sorte que  $i \geq \lambda$  et  $x \in U_i \subset B(x, r)$ . Il est clair que  $x \in A_i$ . Posons pour  $y \in U_i$ ,  $\phi(y) = f(x) - \lambda|x - y|$  et  $\psi(y) = f(x) + \lambda|x - y|$ . Alors,  $\phi$  et  $\psi$  sont  $\lambda$ -lipschitziennes donc  $i$ -lipschitziennes. De plus, pour tout  $y \in U_i$ , puisque  $|f(x) - f(y)| \leq \lambda|x - y|$ , on a  $\phi(y) \leq f(y) \leq \psi(y)$ . Il s'en suit par définition de  $\phi_i$  et  $\psi_i$  que pour  $y \in U_i$ ,  $\phi(y) \leq \phi_i(y)$  et  $\psi_i(y) \leq \psi(y)$ . On en déduit que pour tout  $y \in U_i$ ,

$$f(x) - i|x - y| \leq f(x) - \lambda|x - y| \leq \phi_i(y) \leq \psi_i(y) \leq f(x) + \lambda|x - y| \leq f(x) + i|y - x|.$$

On a donc  $\phi_i(x) = \psi_i(x)$  en faisant  $y \rightarrow x$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

Le théorème s'applique aux applications quasiconformes que nous allons définir maintenant. Soit  $f : D \rightarrow \Omega$  un homéomorphisme (où  $D$  et  $\Omega$  sont des domaines de  $\mathbb{R}^n$ ). On pose pour  $a \in D$  et  $r > 0$ ,

$$L_f(a, r) = \sup\{|f(x) - f(a)|; |x - a| = r\},$$

$$l_f(a, r) = \inf\{|f(x) - f(a)|; |x - a| = r\},$$

$$H_f(a, r) = \frac{L_f(a, r)}{l_f(a, r)}.$$

**Définition 2.55.** L'homéomorphisme  $f : D \rightarrow \Omega$  est quasiconforme s'il existe  $H > 0$  tel que pour tout  $a \in D$ ,  $\limsup_{r \rightarrow 0} H_f(a, r) \leq H$ .

Il est clair qu'un homéomorphisme bilipschitzien est quasi-conforme. Géométriquement, un homéomorphisme quasiconforme envoie de façon infinitésimale une sphère sur un ellipsoïde d'excentricité uniformément contrôlée. Nous discuterons plus en détails de ces applications dans le chapitre 4.

**Théorème 2.56.** *Tout homéomorphisme quasiconforme  $f : D \rightarrow \Omega$  est différentiable presque partout.*

*Démonstration.* On note  $H = \sup_{a \in D} H(a, f) < \infty$ . Fixons  $a \in D$  et posons pour  $x \in D$ ,  $r(x) = |x - a|$ .

On a alors si  $r(x)$  est assez petit,

$$B(f(a), H^{-1}|f(x) - f(a)|) \subset B(f(a), H^{-1}L_f(a, r(x))) \subset B(f(a), l_f(a, r(x))) \subset f(B(a, r(x))).$$

On en déduit que  $\mathcal{L}^n(f(B(a, r(x)))) = \mathcal{L}^n(f(B(a, |a - x|))) \geq H^{-n}\alpha(n)|f(x) - f(a)|^n$ . On note (si elle existe)  $\mu_f(a)$  la dérivée de Radon-Nikodym par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  de la mesure image de  $\mathcal{L}^n$  par  $f$ . Cette dérivée est seulement définie presque partout (voir la section 7.2). Supposons que ce soit le cas en  $a \in D$ . On a alors

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(a) - f(x)|}{|a - x|} &\leq \limsup_{x \rightarrow a} \left( \alpha(n)^{-1/n} H \frac{\mathcal{L}^n(f(B(a, |a - x|)))^{1/n}}{|a - x|} \right) \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow a} \left( H \frac{\mathcal{L}^n(f(B(a, |a - x|)))^{1/n}}{\mathcal{L}^n(B(a, |a - x|))^{1/n}} \right) \\ &\leq H\mu_f(a)^{1/n}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour presque tout  $a \in D$ ,  $\limsup_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - f(a)|}{|x - a|} < +\infty$  et on peut alors conclure par le théorème de Stepanov.  $\square$

La plupart des preuves de ce paragraphe sont inspirées de [60].

**Remarque 2.57.** On donnera dans le chapitre 3 une autre démonstration du théorème de Rademacher. En effet, on verra dans le corollaire 3.30 que les fonctions localement lipschitziennes sont dans un espace de Sobolev  $W^{1,\infty}$  puis que les fonctions dans l'espace de Sobolev  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  pour  $p > n$  sont différentiables presque partout (voir la discussion après le théorème 3.88).

### 3.2 Théorème d'extension de Whitney et approximation $C^1$

Nous allons dans ce paragraphe établir un théorème d'approximation des fonctions lipschitziennes par des fonctions de classe  $C^1$  dans le cadre euclidien. Pour cela, nous aurons besoin du théorème d'extension de Whitney que nous énonçons.

**Théorème 2.58.** Soit  $F \subset \mathbb{R}^n$  un fermé et soit  $f : F \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction. On suppose qu'il existe une fonction continue  $v : F \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que pour tout  $a \in F$ , la limite de

$$\frac{f(y) - f(x) - \langle v(x), y - x \rangle}{|y - x|}$$

vaut 0 quand  $x \neq y$  (avec  $x, y \in F$ ) tendent vers  $a$ . Alors, il existe une fonction  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que sur  $F$ ,  $f = \tilde{f}$  et  $v = \nabla \tilde{f}$ .

Les cubes dyadiques ont été introduits dans la définition 1.50. Ainsi, pour tout  $j \in \mathbb{Z}$ , on note  $\mathcal{Q}_j$  l'ensemble des cubes dyadiques de longueur de côté  $2^{-j}$ , c'est à dire un cube  $Q$  de  $\mathcal{Q}_j$  est de la forme  $Q = \prod_{i=1}^n [k_i 2^{-j}, (k_i + 1) 2^{-j}]$  où les  $k_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) sont dans  $\mathbb{Z}$ . Un  $Q \in \mathcal{Q}_j$  contient exactement  $2^n$  cubes de  $\mathcal{Q}_{j+1}$  que l'on appellera les fils de  $Q$  (qui en est donc leur père). On dira que deux cubes sont frères s'ils ont le même père.

Nous allons commencer par construire une (presque) partition du complémentaire de  $F$  par des cubes dyadiques dont la taille de côté est comparable à la distance entre le cube et  $F$ . On obtient alors une décomposition de  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$  de type Whitney (comparer avec le lemme 1.51). On va ensuite étendre  $f$  sur chacun de ces cubes, puis on pourra conclure via une partition de l'unité adaptée (voir les discussions sur les théorèmes 2.4 et 2.6).

**Théorème 2.59.** Soit  $F$  un fermé non vide qui est strictement inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$  son complémentaire (qui est donc un ouvert non vide). Alors, il existe une famille (au plus dénombrable) de cubes dyadiques  $(Q_m)$  telle que

- (i)  $\Omega = \cup_m Q_m$ ;
- (ii)  $Q_m$  et  $Q_{m'}$  sont d'intérieur disjoint si  $m \neq m'$ ;
- (iii) Il existe des constantes  $C_1, C_2 > 0$  telles que pour tout  $m$ ,

$$C_2 \text{diam}(Q_m) \leq \text{dist}(F, Q_m) \leq C_1 \text{diam}(Q_m).$$

(en fait, on peut choisir  $C_1 > 1$  de façon arbitraire puis poser  $C_2 = (C_1 - 1)/2$ ).

Ici, et dans la suite du paragraphe, on note  $\text{dist}(\cdot, \cdot)$  la distance euclidienne entre deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 2.60.** Soit  $\varepsilon > 0$  tel que les cubes  $(1 + \varepsilon)Q_m$  ne rencontrent pas  $F$ . Alors, il existe  $N_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$  tel que tout  $x \in \Omega$  rencontre au plus  $N_\varepsilon$  cubes de la forme  $(1 + \varepsilon)Q_m$ . Nous utiliserons ce fait dans la suite.

*Démonstration.* Nous allons utiliser des arguments de temps d'arrêt qui sont des techniques de discrétisation souvent utilisées en analyse harmonique. Soit  $C_1 > 1$ .

*Etape 1.* Il existe une famille (dénombrable) de cubes dyadiques  $(K_m)$  tels que

- (i)  $\mathbb{R}^n = \cup_m K_m$  ;
- (ii)  $K_m$  et  $K_{m'}$  sont d'intérieur disjoint si  $m \neq m'$  ;
- (iii)  $\text{dist}(F, K_m) \leq C_1 \text{diam}(K_m)$  pour tout  $m$ .

On commence par construire par récurrence des familles de cubes  $\mathcal{F}_{-p}$  (le  $-p$  indique que l'on prend des cubes de plus en plus grand) de la façon suivante. On pose  $\mathcal{F}_0 = \mathcal{Q}_0$ . Soit  $Q_0$  un cube de  $\mathcal{F}_0$ . On note  $Q_1 \in \mathcal{Q}_{-1}$  son père. Alors,

- soit  $C_1 \text{diam}(Q_0) < \text{dist}(F, Q_0)$  ou il existe un frère  $\tilde{Q}_0$  de  $Q_0$  tel que  $C_1 \text{diam}(\tilde{Q}_0) < \text{dist}(F, \tilde{Q}_0)$ . Dans ce cas,  $Q_0$  et ses frères ne sont pas dans  $\mathcal{F}_{-1}$  qui contiendra leur père  $Q_1$  ;
- soit  $Q_0$  (et ses frères) vérifie  $\text{dist}(F, Q_0) \leq C_1 \text{diam}(Q_0)$ , c'est à dire qu'ils vérifient tous la propriété (iii) cherchée . Dans ce cas,  $Q_0$  et ses frères appartiennent à  $\mathcal{F}_{-1}$  et aussi à tous les  $\mathcal{F}_{-p}$  (en gros, on arrête la procédure).

En appliquant le même procédé à tous les  $Q \in \mathcal{Q}_0$ , on obtient  $\mathcal{F}_{-1}$ . Puis, on recommence avec les cubes de  $\mathcal{F}_{-1}$ . A chaque étape, un cube et ses frères subissent le même sort. On les garde s'ils ont la bonne propriété, à savoir  $\text{dist}(F, Q) \leq C_1 \text{diam}(Q)$ , sinon on les remplace par leur père. Le point est de voir que pour tout  $Q \in \mathcal{Q}_0$ , la procédure est finie. Or, à chaque étape de la construction, le diamètre des cubes est doublé alors que la distance à  $F$  diminue. Ainsi, pour tout  $Q$  de  $\mathcal{Q}_0$ , il existe  $p$  assez grand et  $Q' \in \mathcal{Q}_{-p}$  tels que  $Q \subset Q'$  et  $\text{dist}(F, Q') \leq (C_1 - 1) \text{diam} Q'$ . Alors, tous les frères de  $Q'$  sont à distance  $\leq C_1 \text{diam}(Q')$  de  $F$  par l'inégalité triangulaire. Donc, pour tout cube  $Q \in \mathcal{F}_0$ , il existe un indice minimal  $p_0$  et un  $Q' \in \mathcal{F}_{-p_0}$  avec  $Q \subset Q'$  et pour tout  $p > p_0$ ,  $Q' \in \mathcal{F}_{-p}$ . Les cubes  $K_m$  cherchés sont exactement ces  $Q'$ . On a choisi un indice minimal  $p_0$  pour s'assurer que les  $K_m$  soient d'intérieur disjoint.

*Etape 2.* On pose  $C_2 = (C_1 - 1)/2$ . On considère  $\mathcal{P}_0$  l'ensemble des cubes  $K_m$  de l'étape 1. Puis, on construit par récurrence une famille  $(\mathcal{P}_p)$  de la façon suivante (ici, la taille des cubes diminue). Soit  $Q \in \mathcal{P}_{p-1}$ .

- Si  $\text{dist}(F, Q) \geq C_2 \text{diam}(Q)$  alors  $Q \in \mathcal{P}_p$  ;
- Si  $\text{dist}(F, Q) < C_2 \text{diam}(Q)$  (par exemple, si  $Q \cap F \neq \emptyset$ ), alors les fils de  $Q$  sont dans  $\mathcal{P}_p$ . Notons que dans ce cas, si  $Q'$  est un fils de  $Q$ , on a

$$\text{dist}(F, Q') \leq \text{dist}(F, Q) + \text{diam}(Q') < C_2 \text{diam}(Q) + \text{diam}(Q') = C_1 \text{diam}(Q'). \quad (2.61)$$

Soit maintenant  $x \in \Omega$ . Alors, il existe  $p \geq 0$  et  $Q \in \mathcal{P}_p$  tel que  $x \in Q$  et  $Q \cap F = \emptyset$ . On en déduit qu'il existe un indice  $p(x) \geq 0$  minimal et un cube  $Q_x \in \mathcal{P}_{p(x)}$  tel que  $x \in Q_x$  et pour tout  $p \geq p(x)$ ,  $Q_x \in \mathcal{P}_p$  (et donc  $\text{dist}(F, Q_x) \geq C_2 \text{diam}(Q_x)$ ). Notons que comme  $Q_x \notin \mathcal{P}_{p(x)-1}$ , on a aussi d'après l'inégalité (2.61),  $\text{dist}(F, Q_x) \leq C_1 \text{diam}(Q_x)$ . Alors,  $(Q_x)_{x \in \Omega}$  est la famille cherchée de cubes dyadiques. □

On déduit de cette décomposition de type Whitney l'existence d'une "régularisée" de la fonction distance à  $F$ .

**Théorème 2.62.** Soit  $F$  un fermé non vide qui est strictement inclus dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$  son complémentaire (qui est un ouvert non vide). Alors, il existe une fonction  $\delta$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  et des constantes  $C_1 > 0$ ,  $C_2 > 0$  et pour chaque multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $C_\alpha > 0$  telles que pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$(i) \quad C_2 d(x, F) \leq \delta(x) \leq C_1 d(x, F);$$

$$(ii) \quad \text{Pour tout multi-indice } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), |D_\alpha \delta(x)| \leq C_\alpha (d(x, F))^{1-|\alpha|} \text{ où } |\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i.$$

*Démonstration.* On considère une décomposition de Whitney ( $Q_m$ ) de  $\Omega$  donnée par le théorème 2.59. Pour tout  $m$ , on note  $x_m$  et  $L_m$  respectivement le centre et la longueur de côté de  $Q_m$ . Soit  $\varepsilon > 0$  tels que les cubes  $(1 + \varepsilon)Q_m$  ne rencontrent pas  $F$  (voir la remarque 2.60). Soit  $Q_0 = [0, 1]^n$  le cube unité de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  une fonction de classe  $C^\infty$  qui vaut 1 sur  $Q_0$  et qui est nulle en dehors de  $(1 + \varepsilon)Q_0$  (Voir le lemme 1.36). On pose pour tout  $m$ ,  $\phi_m(x) = \phi\left(\frac{x - y_m}{L_m}\right)$  pour  $x \in \Omega$ . Alors,  $\delta(x) = \sum_m L_m \phi_m$  convient. En effet, si  $x \in (1 + \varepsilon)Q_m$ ,  $L_m$  et  $d(x, F)$  sont comparables par construction. On a donc comme  $x$  appartient à un nombre borné  $N_\varepsilon$  de  $(1 + \varepsilon)Q_m$ ,

$$\delta(x) \leq \sum_{(1+\varepsilon)Q_m \ni x} L_m \leq N_\varepsilon L_m \leq C_1 d(x, F)$$

puis pour un  $m_0$  tel que  $x \in Q_{m_0}$ ,

$$\delta(x) \geq L_{m_0} \geq C_2 d(x, F)$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes strictement positives. Enfin, si on pose  $K_\alpha = \sup |D^\alpha \phi|$ , on a pour  $x \in (1 + \varepsilon)Q_m$ ,  $|D^\alpha \phi_m(x)| \leq K_\alpha L_m^{-\alpha}$ . On peut facilement conclure en utilisant le fait que tout  $x \in \Omega$  ne rencontre qu'un nombre uniformément borné de cubes de la forme  $(1 + \varepsilon)Q_m$  (Voir la remarque 2.60).  $\square$

On peut alors donner une preuve du théorème 2.58. On considère une décomposition de type Whitney ( $Q_m$ ) de  $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$  comme dans le théorème 2.59. Nous allons utiliser une partition de l'unité adaptée. Soit  $(\phi_m)$  les fonctions construites dans la démonstration du théorème 2.62. Posons  $\psi = \sum_m \phi_m$  puis  $\psi_m = \phi_m / \psi$ . On a clairement  $\sum \psi_m = 1$  et on a d'après la démonstration du théorème 2.62 qu'il existe  $C_\alpha > 0$  de sorte que  $|D^\alpha \psi_m(x)| \leq C_\alpha (d(x, F))^{-\alpha}$  pour tout  $m$ , tout  $x \in \Omega$ . Pour tout  $m$ , il existe (au moins) un point  $p_m \in F$  tel que  $d(p_m, Q_m) = d(F, Q_m)$ . Alors, on peut vérifier que  $E(f)(x) = f(x)$  si  $x \in F$  et  $E(f)(x) = \sum_m f(p_m) \psi_m(x)$  si  $x \in \Omega$  donnent l'extension cherchée. En fait,  $E(f)$  est de classe  $C^1$  en dehors de  $F$ . Nous laissons les détails au lecteur qui pourra s'aider de la section 2 du chapitre VI de [136].

On déduit du théorème d'extension de Whitney le

**Théorème 2.63.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne. Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  telle que  $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; f(x) \neq \tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$  et  $\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n; Df(x) \neq D\tilde{f}(x)\}) < \varepsilon$ .

*Démonstration.* D'après le théorème de Rademacher (théorème 2.53),  $f$  est presque partout différentiable. De plus, si on pose  $g = \nabla f$  (presque partout),  $g$  est mesurable. Donc, d'après le théorème de Lusin (théorème 1.39), il existe un fermé  $F_1$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $g|_{F_1}$  (restriction de  $g$  à  $F_1$ ) est continue et  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus F_1) < \varepsilon/2$ . Nous allons conclure en appliquant le théorème d'extension de Whitney (théorème 2.58) au couple  $(f, g)$  et pour cela, posons maintenant pour  $x \in F_1$  et  $i \in \mathbb{N}$ ,

$$\tau_i(x) = \sup \frac{|f(y) - f(x) - \langle g(x), y - x \rangle|}{|y - x|}$$

où le supremum est pris sur tous les  $y \in F_1$  tels que  $|y - x| \leq 1/i$ . La suite de fonctions  $(\tau_i)$  converge simplement vers la fonction nulle sur  $F_1$ . D'après le théorème d'Egoroff (théorème 1.41), il existe un fermé  $F_2 \subset F_1$  tel que  $\mathcal{L}^n(F_1 \setminus F_2) < \varepsilon/2$  et la suite de fonctions  $(\tau_i)$  converge uniformément vers la fonction nulle sur tout compact de  $F_2$ . On peut alors conclure en appliquant le théorème 2.58 à  $(f, g)$  sur  $F_2$ .  $\square$

La preuve du théorème d'extension de Whitney est inspirée de [136] où des applications à l'analyse sont données. On pourra en trouver une preuve un peu différente dans [45] (section 6.5) ainsi qu'une preuve du théorème d'approximation précédent (section 6.6).

### 3.3 Norme du jacobien généralisé d'une application lipschitzienne

Le but de ce paragraphe est de définir une notion de norme de jacobien d'une applications lipschitzienne  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  quand  $n \neq m$ . La motivation est ensuite de donner des versions de la formule de changement de variables qui généralisent le théorème 1.57. Pour cela, on commence par quelques considérations d'algèbre linéaire.

On dit que

- l'application linéaire  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est orthogonale si pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle O(x), O(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ .

- l'application linéaire  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est symétrique si pour tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $\langle x, S(y) \rangle = \langle S(x), y \rangle$ .

Si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire, on note  $T^* : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  l'application linéaire (appelée adjoint de  $T$ ) qui vérifie  $\langle x, T^*(y) \rangle = \langle T(x), y \rangle$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout  $y \in \mathbb{R}^m$ . On a alors que  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est symétrique si et seulement si  $S = S^*$  et que  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est orthogonale si et seulement si  $O^* = O^{-1}$ . De façon plus générale, si  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est orthogonale, alors  $O^* \circ O = I_n$  sur  $\mathbb{R}^n$  où  $I_n$  est la matrice identité.

Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire avec  $n \leq m$ . On peut alors écrire  $T = O \circ S$  où  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est symétrique et  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est orthogonale (voir [45] section 3.2 pour une preuve). On définit alors la norme du jacobien de  $T$  par  $\|T\| = |\det S|$ . Ainsi, si  $n = m$ ,  $\|T\| = |\det S| = |\det T|$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $O$  ou  $S$  puisque  $\|T\|^2 = \det(T^* \circ T)$  où  $T^*$  est l'adjoint de  $T$ . Notons aussi que  $\|T\| = \|T^*\|$ . Cette définition est par exemple motivée par le résultat suivant qui sera utile plus tard (comparer avec la proposition 1.53)

**Lemme 2.64.** Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application linéaire avec  $n \leq m$ . Alors, pour tout sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,

$$\mathcal{H}^n(T(A)) = \|T\| \mathcal{L}^n(A).$$

**Remarque 2.65.** Dans l'égalité précédente, la mesure de Hausdorff à gauche ne peut être remplacée (sauf si  $n = m$ ) par la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  puisque  $T(A) \subset \mathbb{R}^m$  avec  $n \leq m$ . D'un autre côté, la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  à droite peut être remplacée par la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^n$  car  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* On utilise les mêmes notations qu'au dessus et on traite d'abord le cas  $\|T\| = 0$ . Alors,  $S$  n'est pas inversible et donc  $S(\mathbb{R}^n)$  (et a fortiori,  $T(\mathbb{R}^n)$ ) est de dimension  $\leq n - 1$ . Il s'en suit que  $\mathcal{H}^n(T(\mathbb{R}^n)) = 0$  et donc pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^n(T(A)) = 0$ . On suppose maintenant que  $\|T\| \neq 0$  et on pose  $\nu(A) = \mathcal{H}^n(T(A))$ . Alors,  $\nu$  est une mesure de Radon qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de dérivée  $\|T\|$ . En effet, en utilisant la décomposition  $T = O \circ S$ , on a par la

proposition 1.53

$$\begin{aligned}
\frac{\mathcal{H}^n(T(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} &= \frac{\mathcal{L}^n(O^* \circ T(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \\
&= \frac{\mathcal{L}^n(O^* \circ O \circ S(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \\
&= \frac{\mathcal{L}^n(S(B(x, r)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \\
&= |\det S| = \|T\|.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure par le théorème 1.171.  $\square$

De manière analogue, si  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire avec  $n \geq m$ , on peut alors écrire  $T = S \circ O^*$  où  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  est symétrique et  $O : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est orthogonale (voir [45] section 3.2 pour une preuve). On définit alors la norme du jacobien de  $T$  par  $\|T\| = |\det S|$ . Cette définition ne dépend pas du choix de  $O$  ou  $S$  puisque  $\|T\|^2 = \det(T \circ T^*)$ .

Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , est une application lipschitzienne, alors  $f$  est différentiable presque partout d'après le théorème de Rademacher (théorème 2.53). On définit alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$  la norme du jacobien généralisé de  $f$  en  $x$  par  $\mathcal{J}f(x) = \|Df(x)\|$  où  $Df(x)$  est la différentielle de  $f$  en  $x$  (voir la définition 1.56).

**Remarque 2.66.** Si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est différentiable en  $x \in \mathbb{R}^n$ , on appelle usuellement matrice jacobienne de  $f$  en  $x$ , et on note  $J_f(x)$ , la matrice des dérivées partielles de  $f$  en  $x$ , c'est à dire  $J_f(x) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) \right)_{1 \leq i, j \leq n}$  où  $f = (f_1, \dots, f_n)$ . Le jacobien de  $f$  en  $x$  est alors  $\det J_f(x)$ . La norme du jacobien généralisé correspond à  $\mathcal{J}f(x) = |\det J_f(x)|$ . Dans le cas où  $f$  est un  $C^1$ -difféomorphisme, la formule de changement de variables (1.58) s'écrit avec nos notations :

$$\int_{f(\Omega)} g(y) dy = \int_{\Omega} (g \circ f)(x) \mathcal{J}f(x) dx.$$

C'est ce type de formule que nous souhaitons étendre dans la suite.

La norme du jacobien généralisé a une interprétation géométrique. Supposons que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  soit différentiable en  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors, pour tout  $k \leq n$  entier non nul, on peut poser

$$\mathcal{J}_k f(x) = \sup \frac{\mathcal{H}^k(Df(x)(P))}{\mathcal{H}^k(P)} \quad (2.67)$$

où le supremum est pris sur tous les parallélépipèdes  $P$  de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire

$$P = \left\{ \sum_{i=1}^k \lambda_i v_i; 0 \leq \lambda_i \leq 1 \forall i = 1, \dots, k \right\}$$

où les  $v_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ , sont des vecteurs indépendants de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, le  $k$ -volume de  $P$  (c'est à dire  $\mathcal{H}^k(P)$ ) est donné par  $\sqrt{\det V^t V}$  où  $V$  est la matrice  $n \times k$  dont les colonnes sont les vecteurs  $v_i$ . Les cas qui nous intéressent sont  $k = n \leq m$  puis  $n \geq m = k$  et on peut alors retrouver les formules précédentes de norme du jacobien via cette formule donnant le volume, à savoir  $\mathcal{J}_n f(x) = \sqrt{(Df(x))^t (Df(x))} = \|Df(x)\|$  si  $n \leq m$  et  $\mathcal{J}_m f(x) = \sqrt{(Df(x))(Df(x))^t} = \|Df(x)\|$  si  $n \geq m$  (on a identifié  $Df(x)$  avec sa matrice jacobienne  $J_f(x)$  et on a noté  $A^t$  la transposée de la matrice  $A$ ). Par exemple, si  $k = n \leq m$ , l'image du cube unité  $Q = [0, 1]^n$  de  $\mathbb{R}^n$  par  $Df(x)$  est le parallélépipède engendré par les vecteurs  $v_i$  qui sont les colonnes de  $Df(x)$  et dont la  $n$ -mesure de Hausdorff est donc  $\sqrt{(Df(x))^t (Df(x))}$ . On peut alors facilement conclure dans ce cas. Notre présentation s'inspire de celle de [80].



### 3.4 Théorèmes de type Rademacher dans les espaces de Banach

Nous commençons par quelques notions de théorie de la mesure dans le cadre spécifique des espaces de Banach. En particulier, nous allons présenter l'intégrale de Bochner dont la construction est similaire à celle de l'intégrale de Lebesgue et qui nous servira dans le chapitre 4 pour définir des espaces de Sobolev à valeurs banachiques. Dans ce paragraphe, si  $E$  est un espace de Banach, on notera  $\|\cdot\|_E$  ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, tout simplement  $\|\cdot\|$  sa norme.

Soit  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable (par exemple un espace métrique  $(X, d)$  muni de sa tribu borélienne, voir les définitions 1.10 et 1.17) et soit  $E$  un espace de Banach. Une mesure (à valeurs dans l'espace de Banach  $E$ )  $\mu : X \rightarrow E$  est une application qui vérifie  $\mu(\emptyset) = 0$  et  $\mu(\cup_{i \in \mathbb{N}} B_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mu(B_i)$  pour toute famille dénombrable d'éléments disjoints  $B_i$  de  $\mathcal{B}$ . Dans ce cas, la variation  $|\mu|$  de  $\mu$  est la mesure au sens usuel sur  $(X, \mathcal{B})$  définie par

$$|\mu|(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^N \|\mu(A_i)\| \right\}$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions finies de  $A$  par des  $A_i \in \mathcal{B}$  ( $i = 1, \dots, N$ ). On dit que  $\mu$  est à variation bornée si  $|\mu|(X) < +\infty$ . Soit  $\mu : X \rightarrow E$  une mesure à variation bornée. Une fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est simple si elle s'écrit  $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$  où pour tout  $i = 1, \dots, N$ ,  $a_i \in \mathbb{R}$  et les  $A_i \in \mathcal{B}$  sont deux à deux disjoints. Si la fonction simple  $f = \sum_{i=1}^N a_i \chi_{A_i}$  est dans  $L^1(|\mu|)$ , alors on définit  $\int_X f d\mu = \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i)$  et si  $A \in \mathcal{B}$ , on pose  $\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu$ . On étend ensuite la définition de l'intégrale par continuité comme dans le cas classique. Voir [42] pour plus de détails. Nous utiliserons peu ces notions dans la suite.

Soient  $(X, \mathcal{B})$  un espace mesurable muni d'une mesure  $\mu$  et  $E$  un espace de Banach (séparable). Une fonction simple  $f : X \rightarrow E$  est de la forme  $f = \sum_{i=1}^N v_i \chi_{A_i}$  où  $N \in \mathbb{N}$ , les  $v_i$  sont dans  $E$  et les  $A_i$  sont des sous-ensembles mesurables deux à deux disjoints de  $X$ . On dit que  $f : X \rightarrow E$  est mesurable si  $f$  est la limite presque partout d'une suite de fonctions simples. Si  $f : X \rightarrow E$  est une fonction simple et si  $A \subset X$  est mesurable, alors on pose

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \sum_{i=1}^N \mu(A \cap A_i) v_i$$

où  $f = \sum_{i=1}^N v_i \chi_{A_i}$ . De plus, on note  $\|f\|_1 = \sum_{j=1}^N \mu(A_j) \|v_j\|$ . Une fonction mesurable  $f : X \rightarrow E$  est intégrable au sens de Bochner s'il existe une suite  $(f_j)$  de fonctions simples telle que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_X \|f(x) - f_j(x)\| d\mu(x) = 0$  et si  $A \subset X$  est mesurable, on pose alors

$$\int_A f(x) d\mu(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_A f_j(x) d\mu(x).$$

Cette dernière définition ne dépend pas de la suite de fonctions simples considérée. Nous allons maintenant définir quelques espaces fonctionnels dans ce cadre. On note  $L^1(X : E)$  l'ensemble des fonctions intégrables au sens précédent (c'est à dire au sens de Bochner) et on étend  $\|\cdot\|_1$  sur cet ensemble par continuité. Comme d'habitude, on identifie  $f, g \in L^1(X : E)$  si  $f = g$  presque partout. Notons qu'une fonction mesurable  $f : X \rightarrow E$  est intégrable au sens de Bochner si et seulement si la fonction

$x \rightarrow \|f(x)\|$  est dans  $L^1(X, \mu)$ . Donc, si  $E = \mathbb{R}$ , on retrouve la définition usuelle de l'intégrale de Lebesgue. De plus, d'après la même remarque, il est naturel de définir  $L^p(X : E)$  (pour un  $1 < p < \infty$ ) comme l'ensemble des fonctions mesurables  $f : X \rightarrow E$  telles que la fonction  $x \rightarrow \|f(x)\|$  est dans  $L^p(X, \mu)$  et on munit  $L^p(X : E)$  de la norme  $\|f\|_p = \left( \int_X \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{1/p}$ . L'espace  $L^\infty(X : E)$  est l'espace des fonctions  $f : X \rightarrow E$  telle qu'il existe  $M \geq 0$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ ,  $\|f(x)\| \leq M$ . Dans ce cas,  $\|f\|_\infty$  est le plus petit  $M$  pour lequel on a l'inégalité précédente.

Le théorème de Rademacher peut se généraliser de la façon suivante lorsque l'espace d'arrivée est un espace de Banach.

**Théorème 2.68.** *Toute application lipschitzienne  $f$  de  $\mathbb{R}^n$  dans un espace de Banach réflexif  $E$  est différentiable presque partout (par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ ).*

*Démonstration.* On suit la démonstration donnée dans [106] (théorème 17). Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow E$  une application  $K$ -lipschitzienne. Alors, puisque  $\mathbb{R}^n$  est séparable,  $f(\mathbb{R}^n)$  est contenu dans un sous-espace séparable et fermé  $F$  de  $E$ . Comme  $E$  est réflexif, il en est de même de  $F$  (voir [22] section III.5). On peut donc supposer que  $E$  est lui-même séparable. Dans ce cas, son dual  $E^*$  est aussi séparable et réflexif (voir [22], section III.6). Comme dans le cadre euclidien, on commence par le cas  $n = 1$  et le cas général suivra par compacité de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ .

Pour  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\psi \in E^*$ , et  $h > 0$ , on pose

$$T_h[\psi](\phi) = \int \psi \left( h^{-1}(\phi(x+h) - \phi(x)) \right) f(x) dx. \quad (2.69)$$

Par construction de l'intégrale de Bochner, les formes linéaires (c'est à dire les éléments du dual  $E^*$ ) commutent avec cette intégrale. On a donc

$$T_h[\psi](\phi) = \psi \left( \int \left( h^{-1}(\phi(x+h) - \phi(x)) \right) f(x) dx \right). \quad (2.70)$$

Notons que par changement de variables, on a

$$T_h[\psi](\phi) = \psi \left( \int \left( h^{-1}(f(x+h) - f(x)) \right) \phi(x) dx \right). \quad (2.71)$$

On fixe maintenant  $\psi \in E^*$  et on pose pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $L_\psi(\phi) = \psi \left( \int f(x) \phi'(x) dx \right)$ . Alors,  $L_\psi$  est une forme linéaire qui est continue sur  $L^1$ . En effet, en passant à la limite  $h \rightarrow 0$  dans (2.71), on obtient par le théorème de convergence dominée

$$|L_\psi(\phi)| \leq K \|\psi\| \|\phi\|_1.$$

Donc, par le théorème de représentation de Riesz (voir [89], chapitre 2), il existe un unique  $g_\psi \in L^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$L_\psi(\phi) = \psi \left( \int f(x) \phi'(x) dx \right) = \int g_\psi(x) \phi(x) dx.$$

Par unicité, il est clair que l'application  $\psi \rightarrow g_\psi$  est linéaire. Une approximation de l'identité est une suite  $(\phi_k)$  dans  $L^1$  de sorte que

- pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq \phi_k \leq 1$  et  $\int \phi_k(x) dx = 1 = \|\phi_k\|_1$  ;
- pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\{|x| > \varepsilon\}} \phi_k(x) dx = 0$ .

Pour en construire, on peut considérer  $j(x) = e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} \chi_{\{x \in ]-1,1[ \}}$  qui est une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ . On pose ensuite  $\phi_k(x) = k^n j(kx)$  (voir [65] chapitre 4 pour plus de détails ou la définition 3.10 et l'exemple 3.11). En appliquant ce qui précède à une approximation de l'identité ( $\phi_k$ ) et en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , il vient que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$|g_\psi(x)| \leq K \|\psi\|.$$

Comme  $E^*$  est séparable, on peut considérer une famille dense dénombrable  $(\psi_n)$  dans  $E^*$ . Posons maintenant  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R}; |g_{\psi_n}(x)| \leq K \|\psi_n\|\}$ . Alors,  $\mathcal{L}^1(A^c) = 0$ . Pour tout  $x \in A$ , on peut prolonger par densité des  $\psi_n$  l'application  $\psi \rightarrow g_\psi(x)$  sur  $E^*$  tout entier de sorte que  $|g_\psi(x)| \leq K \|\psi\|$  pour tout  $\psi \in E^*$ .

Pour tout  $x \in A$ , l'application  $\psi \rightarrow g_\psi(x)$  est un élément du bidual  $E^{**}$ . Comme  $E$  est réflexif, il existe  $h(x) \in E$  tel que  $g_\psi(x) = \psi(h(x))$  et  $\|h(x)\| \leq K$ . Ceci découle de [22] sections I.3 et I.4. Ainsi, on a pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$  (et en fait pour tout  $x \in A$ ),  $\|h(x)\| \leq K$  et donc  $h \in L^\infty(\mathbb{R}, E)$ . On a donc pour tout  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$L_\psi(\phi) = \psi \left( \int f(x) \phi'(x) dx \right) = \int \psi(h(x)) \phi(x) dx.$$

D'où, par intégration par parties et en utilisant le fait que l'intégrale de Bochner commute avec  $\psi$ , on a

$$\int \psi \left( f(x) + \int_0^x h(y) dy \right) \phi'(x) dx = 0.$$

On en déduit par une nouvelle intégration par parties que la fonction  $x \rightarrow \psi \left( f(x) + \int_0^x h(y) dy \right)$  est presque partout constante (on pourra utiliser le lemme 3.9) et donc pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\psi \left( f(x) + \int_0^x h(y) dy \right) = \psi(f(0)).$$

Comme cette égalité est vraie pour tout  $\psi \in E^*$ , on déduit du théorème d'Hahn-Banach (voir [22] section I.1) que pour presque tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) - f(0) = \int_0^x h(y) dy$$

On peut conclure que  $f$  est différentiable presque partout par une version du théorème de différentiation de Lebesgue dans ce cadre (voir [43] chapitre 3).

Considérons le cas  $n > 1$ . En prenant une famille dense de directions dans  $S^{n-1}$  et en appliquant le cas  $n = 1$ , il vient que si  $\phi \in E^*$ , on a pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\phi(f(x)) - \phi(f(y)) = \phi(\langle \nabla f(x), x - y \rangle) + o(\|x - y\|).$$

Comme  $E^*$  est séparable, on peut considérer une famille dense dénombrable dans  $E^*$ . En lui appliquant l'égalité précédente, on peut conclure en utilisant le théorème d'Hahn-Banach (voir [22] section I.1).  $\square$

On peut se demander ce qui se passe si l'application lipschitzienne est entre deux espaces de Banach de dimension infinie. La réponse est alors moins claire. En effet, les espaces de Banach de dimension infinie n'admettent pas de "bonnes" mesures, par exemple des mesures doublantes. Pour voir cela, il suffit de se souvenir qu'un espace métrique doublant et complet est propre (c'est à dire que ses boules fermées sont compactes), voir la proposition 1.106. Comme d'après le théorème de Riesz (voir [22],

chapitre VI), un espace de Banach est de dimension finie si et seulement si sa boule unité fermée est compacte, on peut conclure. La notion d'ensemble négligeable n'a donc pas trop de sens dans ce cadre. Nous allons donc définir diverses notions d'ensembles "petits" qui permettront de donner des versions du théorème de Rademacher (Toute fonction lipschitzienne sur un espace de Banach est différentiable en dehors d'un ensemble "petit").

Nous allons d'abord donner quelques notions classiques de théorie des probabilités dont nous aurons besoin dans la suite (voir par exemple [13], section III.5). Soit  $\mu$  une mesure de probabilité sur  $\mathbb{R}^n$ . Sa fonction caractéristique  $\phi_\mu$  est définie pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^n$  par

$$\phi_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \xi, x \rangle} d\mu(x). \quad (2.72)$$

Cette définition a bien un sens puisque  $\mu$  est une mesure de probabilité et que  $|e^{i\langle \xi, x \rangle}| = 1$ . On appelle parfois  $\phi_\mu$  la transformée de Fourier de  $\mu$ . La mesure gaussienne sur  $\mathbb{R}$  de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  est donnée par la densité de probabilité  $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$  où  $m$  est sa moyenne et  $\sigma$  est son écart-type (alors que  $\sigma^2$  est sa variance). Elle est caractérisée par sa fonction caractéristique

$$\phi(t) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}. \quad (2.73)$$

Si  $m = 0$ , on dit que la mesure gaussienne est centrée. Si  $\sigma = 1$ , on dit qu'elle est réduite. Le cas où  $\sigma = 0$  est dégénéré dans le sens où cela correspond à la mesure de Dirac en  $m$ . En effet, si  $\mu = \delta_a$  avec  $a \in \mathbb{R}$ , la fonction caractéristique est  $\phi_\mu(t) = e^{iat}$ .

Soit  $E$  un espace de Banach. Dans la suite,  $A$  est un borélien de  $E$ .

- Une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $E$  est une mesure gaussienne si pour tout  $x^* \in E^*$  (où  $E^*$  est le dual de  $E$ ), la mesure  $\mu_{x^*}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\mu_{x^*}(A) = \mu(\{y \in E, x^*(y) \in A\})$  est une mesure gaussienne sur  $\mathbb{R}$ , c'est à dire de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  comme défini au dessus. On dit de plus que  $\mu$  est non dégénérée si pour tout  $x^* \neq 0$ , la mesure gaussienne  $\mu_{x^*}$  est non dégénérée (au sens précédent). Dans le cas où  $E$  est un espace de Hilbert séparable, une mesure de probabilité  $\mu$  sur  $E$  est gaussienne s'il existe  $x_0 \in E$  et une application linéaire  $S : E \rightarrow E$  tels que pour tout  $x \in E$ ,

$$\int_E e^{i\langle x, y \rangle} d\mu(y) = e^{i\langle x, x_0 \rangle - \frac{1}{2}\langle Sx, x \rangle} \quad (2.74)$$

Dans ce cadre particulier, la mesure  $\mu$  est non dégénérée si et seulement si  $\ker(S) = \{0\}$ . La formule (2.74) est l'analogue en dimension infinie de (2.73).

Si  $A$  est un sous-ensemble de l'espace de Banach  $E$ , on dit que  $A$  est Gauss nul si  $\mu(A) = 0$  pour toute mesure gaussienne non dégénérée  $\mu$  sur  $E$ .

- Pour tout  $y \in E$ , on note  $\mathcal{A}(y)$  l'ensemble de tous les boréliens  $A$  de  $E$  qui intersectent toute droite parallèle à  $y$  en un ensemble de mesure (de Lebesgue) nulle. Si  $\{x_n\}$  est une famille finie ou infinie d'éléments non nuls de  $E$ , on note  $\mathcal{A}(\{x_n\})$  l'ensemble des boréliens  $A$  tels que  $A = \cup_n A_n$  où pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n \in \mathcal{A}(x_n)$ . On dit que le sous-ensemble  $A$  de l'espace de Banach  $E$  est Aronszajn nul s'il appartient à  $\cap \mathcal{A}(\{x_n\})$  où l'intersection est prise sur toutes les familles  $\{x_n\}$  telles que l'espace engendré par ces familles est dense dans  $E$ . En d'autres termes, un borélien  $A$  de  $E$  est Aronszajn nul si pour toute suite  $(x_n)$  dans  $E$  dont l'espace engendré est dense dans  $E$ , il existe une décomposition  $A = \cup_n A_n$  où pour tout  $n$ , tout  $y \in E$ ,

$$\mathcal{L}^1(A_n \cap (y + \text{vect}(x_n))) = \mathcal{H}^1(A_n \cap (y + \text{vect}(x_n))) = 0.$$

Les ensembles Aronszajn nuls sont Gauss nuls ([14] proposition 6.25). Notons aussi que d'après le théorème de Fubini, si  $E = \mathbb{R}^n$ , les ensembles de mesure de Lebesgue nulle sont Aronszajn nuls.

- Soit  $Q_\infty = [0, 1]^{\mathbb{N}}$  le cube d'Hilbert muni de sa mesure produit usuelle  $\tau$ . Un sous-ensemble  $Q$  de  $E$  est un cube s'il est l'image de  $Q_\infty$  par une application affine injective de la forme  $T(q) = x + \sum t_n x_n$  (si  $q = (t_1, t_2, \dots) \in Q_\infty$ ) où  $x \in E$ , les  $x_n$  sont des vecteurs indépendants dont l'espace engendré est dense dans  $E$ , et  $\sum_n \|x_n\| < +\infty$ . La mesure image de  $\tau$  par  $T$  notée  $\tau_T$  s'appelle une mesure cube. On dit que le borélien  $A$  de  $E$  est cube nul si  $\tau_T(A) = \tau(T^{-1}(A)) = 0$  pour toute mesure cube  $\tau_T$ . Tout ensemble Gauss nul est cube nul ([14] proposition 6.27) et les ensembles cube nuls sont Aronszajn nuls ([14] theorem 6.32).

Nos trois notions d'ensembles "petits" dans un espace de Banach sont équivalentes (pour les boréliens). Nous allons pouvoir alors donner une version du théorème de Rademacher en utilisant une de ces notions. Nous aurons besoin des résultats techniques suivants (voir [14] lemma 6.28 et proposition 6.29).

**Proposition 2.75.** Soit  $E'$  un sous-espace de dimension  $n$  d'un espace de Banach  $E$  que l'on munit d'une base  $(e_i)_{i=1, \dots, n}$ . On notera (par abus)  $\mathcal{L}^n$  la mesure de Lebesgue sur  $E'$ .

(i) Pour tout borélien  $B$  de  $E$ , l'application  $f_B(x) = \mathcal{L}^n(E' \cap (B + x))$  est une fonction borélienne.

(ii) Si  $B$  est un borélien de  $E$  tel que pour tout  $x \in E$ ,  $\mathcal{L}^n(E' \cap (B + x)) = 0$  alors  $B \in \mathcal{A}((e_k))$ .

Le point suivant est qu'il existe deux notions classiques de différentiabilité dans les espaces de Banach que nous allons maintenant décrire. Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et soit  $f : \Omega \rightarrow F$  une application définie sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$ . On dit que  $f$  est Gateaux-différentiable (ou  $G$ -différentiable) en  $x_0 \in \Omega$  s'il existe une application linéaire bornée  $T : E \rightarrow F$  telle que pour tout  $u \in E$ ,

$$T(u) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t}. \quad (2.76)$$

Alors,  $T = T_{x_0}$  est unique et s'appelle la différentielle de Gateaux de  $f$  en  $x_0$ . On la note  $T = df(x_0)$ . Si de plus la limite dans (2.76) est uniforme pour tout  $u$  dans la sphère unité de  $E$ , alors on dit que  $f$  est Fréchet-différentiable (ou  $F$ -différentiable) en  $x_0$  et  $df(x_0)$  est la différentielle de Fréchet de  $f$  en  $x_0$ . Notons que si  $f$  est Fréchet-différentiable en  $x_0$  alors

$$f(x_0 + u) = f(x_0) + df(x_0)(u) + o(\|u\|)$$

(où  $\|u\|$  est la norme de  $u$  dans  $E$ ) et donc  $f$  est différentiable au sens usuel (voir la définition 1.56). En particulier,  $f$  est continue en  $x_0$ . Attention, cela n'est pas le cas si  $f$  est Gateaux-différentiable, même en dimension finie ! Voir l'exercice 2.204. Quelques propriétés de la  $G$ -différentiabilité et de la  $F$ -différentiabilité sont étudiées dans l'exercice 2.205. Le résultat suivant est utile en pratique (voir [14] lemma 6.40).

**Lemme 2.77.** Soient  $E$  et  $F$  des espaces de Banach et soit  $f : U \subset E \rightarrow F$  une fonction lipschitzienne où  $U$  est un ouvert de  $E$ . Soit  $(G, +)$  un sous-groupe de  $E$ , dense dans  $E$ . On suppose qu'en  $x_0$ , pour tout  $u \in G$ , la dérivée de  $f$  en  $x_0$  dans la direction  $u$ , c'est à dire  $\lim_{t \rightarrow 0} (f(x_0 + tu) - f(x_0))/t$ , existe et est une fonction additive en  $u$ . Alors,  $f$  est Gateaux différentiable en  $x_0$ .

Nous avons besoin d'une dernière définition avant d'énoncer notre version du théorème de Rademacher dans les espaces de Banach (de dimension infinie). Nous allons motiver son nom en faisant un lien avec la théorie euclidienne. Puis, nous donnerons sans trop de détails la définition formelle. Nous énoncerons des caractérisations plus utiles en pratique dans le théorème 2.78. Commençons par rappeler une version du théorème classique de Radon-Nikodym. Si  $\nu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  qui est absolument continue par rapport à la mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$ , il existe une fonction mesurable  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$  telle que pour tout borélien  $A$  de  $X$ ,  $\nu(A) = \int_A f(x) d\mu(x)$  (voir le théorème 1.171). Un espace de Banach  $E$  vérifie la propriété de Radon-Nikodym si ce qui précède reste vrai dans

un certain sens. De façon plus précise, on dit que l'espace de Banach  $E$  (muni de la tribu borélienne) vérifie la propriété de Radon-Nikodym (en abrégé RNP à cause de la version anglaise : Radon-Nikodym Property !) si pour toute mesure de probabilité  $\mu$  (c'est à dire  $\mu(X) = 1$ ) sur un espace mesurable  $(X, \mathcal{B})$  et toute mesure  $\nu : X \rightarrow E$  qui (est de variation bornée et) est absolument continue par rapport à  $\mu$ , il existe une fonction  $\mu$ -intégrable  $f : X \rightarrow E$  telle que pour tout  $A \in \mathcal{B}$ , on a au sens de l'intégrale de Bochner,

$$\nu(A) = \int_A f(x) d\mu(x).$$

Ici,  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  si pour tout  $A \in \mathcal{B}$  avec  $\mu(A) \neq 0$ ,  $\frac{1}{\mu(A)}\nu(A)$  est dans la boule unité  $B(0, 1) = \{x \in E; \|x\| < 1\}$  de  $E$ .

Donnons des caractérisations des espaces qui vérifient la propriété RNP (voir [14] theorem 5.21 pour une preuve). Soit  $\varepsilon > 0$ . Nous dirons que  $f : [0, 1] \rightarrow E$  est  $\varepsilon$ -différentiable en  $t_0 \in [0, 1]$  s'il existe  $\delta > 0$  et  $x \in E$  de sorte que

$$\|f(t_0 + h) - f(t_0) - hx\| \leq \varepsilon|h| \text{ pour tout } h \in \mathbb{R} \text{ avec } |h| < \delta.$$

Il est clair que  $f$  est différentiable en  $t_0$  si et seulement si  $f$  est  $\varepsilon$ -différentiable en  $t_0$  pour tout  $\varepsilon$ . Soit maintenant une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow E$ . On définit sa variation par, si  $t \in [0, 1]$ ,  $V_f(t) = \sup \sum_{j=1}^N \|f(t_j) - f(t_{j-1})\|$  où le supremum est pris sur toutes les subdivisions  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = t$  de  $[0, t]$ . On dit que  $f : [0, 1] \rightarrow E$  est absolument continue si  $V_f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$  est absolument continue au sens usuel (voir la définition 1.137). Notons qu'alors il existe une mesure finie  $\mu$  sur  $[0, 1]$  qui est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  et telle que  $V_f(t) = \mu([0, t])$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

**Théorème 2.78.** *Soit  $E$  un espace de Banach. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $E$  vérifie la condition RNP.
- (ii) Toute fonction absolument continue  $f : [0, 1] \rightarrow E$  est différentiable (au sens usuel)  $\mathcal{L}^1$ -presque partout.
- (iii) Toute fonction lipschitzienne  $f : [0, 1] \rightarrow E$  a un point de  $\varepsilon$ -différentiabilité pour tout  $\varepsilon > 0$ .

**Exemple 2.79.** Concernant les espaces de suite,  $l_1$  (espace des suites dont la série converge absolument et que l'on munit de la norme  $\|(u_n)\|_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ ) a la propriété RNP,  $c_0$  (espace des suites qui tendent vers 0 en  $+\infty$  muni de  $\|(u_n)\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$ ) ne l'a pas. Concernant les espaces  $L^p(\Omega)$  où  $\Omega$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n$  muni de leurs normes de Lebesgue,  $L^p(\Omega)$  a la propriété RNP pour  $1 < p < +\infty$ , alors que  $L^1(\Omega)$  et  $L^\infty(\Omega)$  ne l'ont pas (pour  $L^1$ , voir l'exercice 2.206). Si  $K$  est un espace separable compact, l'espace  $C(K)$  des fonctions continues sur  $K$  muni de la norme de la convergence uniforme n'a pas la propriété RNP. De façon générale, le dual d'un espace de Banach séparable et les espaces reflexifs (comme les espaces de Hilbert) vérifient la propriété RNP. Pour tous ces exemples, voir [14], chapitre 5 et aussi [42].

Le résultat suivant étend le théorème 2.68 (voir [14] proposition 6.41).

**Proposition 2.80.** *Soit  $F$  un espace de Banach qui vérifie la propriété RNP. Alors, toute fonction lipschitzienne d'un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  dans  $F$  est  $\mathcal{L}^n$ -presque partout différentiable sur  $U$ .*

Nous donnons maintenant une version du théorème de Rademacher dans le cas des espaces de Banach (de dimension infinie).

**Théorème 2.81.** *Soit  $E$  un espace de Banach séparable et soit  $F$  un espace de Banach qui vérifie la condition RNP. Si  $f : E \rightarrow F$  est lipschitzienne alors  $f$  est différentiable en dehors d'un ensemble Aronszajn nul.*

Il est clair que l'on peut supposer que  $f$  est lipschitzienne seulement sur un ouvert  $U$  de  $E$ , et non sur  $E$  tout entier. Comme les espaces euclidiens ont la propriété RNP et que les ensembles de mesure de Lebesgue nulle sont Aronszajn nuls, cet énoncé généralise bien le théorème de Rademacher (théorème 2.53) et la proposition 2.80.

*Démonstration.* L'idée de la preuve est proche de celle dans le cas euclidien. Par la proposition 2.80, la restriction de  $f$  à des espaces vectoriels de dimension finie est différentiable. On pourra conclure par des arguments de densité et on verra qu'alors la définition d'un ensemble Aronszajn nul est bien adapté. Donnons une idée plus précise de la démonstration. Par des arguments standards et en utilisant le lemme 2.77, on peut voir que l'ensemble où la fonction  $f$  n'est pas Gateaux différentiable est un borélien. Comme  $E$  est séparable, on peut trouver une suite  $(e_n)$  de vecteurs linéairement indépendants qui engendrent un espace vectoriel dense dans  $E$ . On note  $V_n$  l'espace engendré par les  $e_k$ ,  $k \leq n$ , et  $D_n$  l'ensemble des  $x \in E$  tels que la dérivée de  $f$  en  $x$  existe pour toute direction  $u \in V_n$  et est linéaire en  $u \in V_n$ . Pour tout  $y \in E$ , l'ensemble  $((E \setminus D_n) + y) \cap V_n$  est l'ensemble sur lequel la restriction sur  $V_n$  de la fonction  $f_y(x) = f(x-y)$  n'est pas différentiable. Par la proposition 2.80, l'ensemble  $((E \setminus D_n) + y) \cap V_n$  est de mesure nulle. D'où, par la proposition 2.75,  $E \setminus D_n$  est dans  $\mathcal{A}(\{x_k, k \leq n\})$ . Il s'en suit que  $E \setminus (\bigcap_n D_n) \in \mathcal{A}(\{x_k\})$ . Or par le lemme 2.77, la fonction  $f$  est différentiable sur  $\bigcap_n D_n$ , ce qui permet de conclure. Cette preuve est tirée de [14], theorem 6.42.  $\square$

### 3.5 Cas du groupe d'Heisenberg : Théorème de Pansu et non-plongement bilipschitzien dans les espaces euclidiens

Nous discutons maintenant des théorèmes de type Rademacher dans le cas des groupes de Carnot. Soit  $\mathbb{H}$  le (premier) groupe d'Heisenberg muni de sa distance de Carnot-Carathéodory  $d_{CC}$  et de la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^3$  (qui est la mesure de Haar invariante à gauche du groupe). On notera  $(x, y, t)$  un élément de  $\mathbb{H}$  et  $X = \partial_x + 2y\partial_t$ ,  $Y = \partial_y - 2x\partial_t$ ,  $T = \partial_t$  des champs de vecteurs sur  $\mathbb{R}^3$ . Rappelons que  $\mathbb{H}$  est un groupe de Carnot dont l'algèbre de Lie est nilpotente d'ordre 2. Ici,  $V_1$  a pour base  $(X, Y)$  qui engendre donc l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  et  $T = [X, Y]$ . Voir la section 5 pour toutes ces notions. Dans [113], P. Pansu a donné un analogue du théorème de Rademacher pour des fonctions lipschitziennes  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^n$  ou  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  (et même entre groupes de Carnot généraux, voir plus loin). Commençons par considérer le cas des fonctions lipschitziennes  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  est différentiable (au sens de Pansu) en  $\xi = (x, y, t)$  s'il existe un homomorphisme homogène de groupe  $D_{\mathbb{H}}f(\xi) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  de sorte que

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{f(\eta) - f(\xi) - D_{\mathbb{H}}f(\xi)(\xi^{-1} \cdot \eta)}{d_{CC}(\xi, \eta)} = 0.$$

**Théorème 2.82.** *Toute fonction (localement) lipschitzienne  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable presque partout.*

Il est intéressant de noter que comme dans le cadre euclidien, la différentiabilité de  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est reliée à l'existence de "dérivées partielles". On rappelle que les dilatations de  $\mathbb{H}$  sont données par  $\delta_s(x, y, t) = (sx, sy, s^2t)$ . On notera  $(e_1, e_2, e_3)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ . On dit que  $f$  est dérivable en  $\xi$  dans la direction de  $X$  (respectivement dans la direction  $Y$ ) si l'application  $s \rightarrow f(\xi \cdot \delta_s(e_1))$  (respectivement  $s \rightarrow f(\xi \cdot \delta_s(e_2))$ ) est différentiable en  $s = 0$  et on note alors cette dérivée  $Xf(\xi)$  (respectivement  $Yf(\xi)$ ).

(respectivement  $Yf(\xi)$ ). Si  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}$  est différentiable en  $\xi$ , alors les dérivées de  $f$  en  $\xi$  suivant les directions  $X$  et  $Y$  existent et on a

$$D_{\mathbb{H}}f(\xi)(x', y', t') = x'Xf(\xi) + y'Yf(\xi).$$

Il est important de noter que si  $f$  est de classe  $C^1$  comme application de  $\mathbb{R}^3$  dans  $\mathbb{R}$ , alors  $Xf$  et  $Yf$  correspondent bien à l'action des champs de vecteurs  $X$  et  $Y$  sur  $f$ . Ceci explique la notation.

Passons au cas général.

**Définition 2.83.** Soit  $\mathbb{G}_1$  ou  $\mathbb{G}_2$  deux groupes de Carnot munis respectivement des normes homogènes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  et de leurs dilations anisotropiques  $\delta_\lambda^1$  et  $\delta_\lambda^2$ . On dit que  $L : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est  $H$ -linéaire si  $L$  est un homomorphisme de groupe tel que  $L(\delta_\lambda^1 g) = \delta_\lambda^2 L(g)$  pour tout  $g \in \mathbb{G}_1$  et tout  $\lambda > 0$ .

**Définition 2.84.** Soit  $\mathbb{G}_1$  ou  $\mathbb{G}_2$  deux groupes de Carnot munis respectivement des normes homogènes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  et de leurs dilations anisotropiques  $\delta_\lambda^1$  et  $\delta_\lambda^2$ . Si  $f : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est mesurable, on définit, si elle existe, la différentielle de Pansu de  $f$  en  $x$  comme l'application  $d_P f(x) : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  définie pour  $y \in \mathbb{G}_1$  par  $d_P f(x)(y) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \delta_{1/\lambda}^2 f(x)^{-1} f(x \delta_\lambda^1 y)$ . On dit alors que  $f$  est  $P$ -différentiable en  $x$ .

Par analogie avec le cas euclidien, il faut  $\delta_{1/\lambda}^2 f(x)^{-1} f(x \delta_\lambda^1 y)$  comme un taux de variation de  $f$  en  $x$ .

**Théorème 2.85.** Pour toute fonction (localement) lipschitzienne  $f : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$ , la différentielle de Pansu  $d_P f$  de  $f$  existe presque partout. De plus,  $d_P f : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est une application  $H$ -linéaire.

Il est parfois préférable de voir la différentielle comme un homomorphisme d'algèbre entre les algèbres de Lie des deux groupes. Ainsi, si  $f = (f_1, f_2, f_3) : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est lipschitzienne, alors en presque tout point, la différentielle est l'action sur l'algèbre de Lie donnée par

$$\begin{pmatrix} Xf_1 & Xf_2 & 0 \\ Yf_1 & Yf_2 & 0 \\ 0 & 0 & Xf_1 Yf_2 - Xf_2 Yf_1 \end{pmatrix}$$

Nous aurons besoin dans la suite (pour donner des versions de la formule de l'aire et de la coaire dans ce cadre sous-riemannien) d'une notion de norme de jacobien. On définit la norme horizontale du jacobien de l'application  $H$ -linéaire  $L : \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  par

$$\mathcal{J}_Q^H(L) = \frac{\mathcal{H}_2^Q(L(B_1))}{\mathcal{H}_1^Q(B_1)}$$

où  $Q$  est la dimension homogène de  $\mathbb{G}_1$ ,  $B_1$  est la boule unité de  $\mathbb{G}_1$ ,  $\mathcal{H}_1^Q$  et  $\mathcal{H}_2^Q$  sont les  $Q$ -mesures de Hausdorff respectivement par rapport à  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$ . Le choix de  $B_1$  peut paraître arbitraire. En fait en utilisant les invariances des normes homogènes et en utilisant des arguments de recouvrement, on peut voir que l'on peut remplacer  $B_1$  par n'importe lequel des sous-ensembles mesurables  $A$  de  $\mathbb{G}_1$ . On peut alors définir la norme horizontale du jacobien de  $f$  en un point de différentiabilité de Pansu  $x \in \mathbb{G}_1$  par  $\mathcal{J}_Q^H f(x) = \mathcal{J}_Q^H(d_P f(x))$ . Une autre définition de la norme d'un jacobien est la suivante. Soit  $A \subset \mathbb{G}_1$  un ensemble  $\mathcal{H}_1^Q$ -mesurable et soit  $f : A \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  une application lipschitzienne. On définit la norme métrique du jacobien de  $f$  en (relativement à  $A$ ) par  $\mathcal{J}_Q^m f(x) = \liminf_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{H}_2^Q(f(B_A(x, r)))}{\mathcal{H}_1^Q(B_A(x, r))}$  où  $B_A(x, r) = \{y \in A, \|x - y\|_1 < r\}$ . Comparer avec (2.67) et les autres notions de norme de jacobien dans le cas euclidien données dans cette section.



**Remarque 2.86.** On a pour la deuxième notion la formule d'intégration standard :

$$\int_A \mathcal{J}_Q^m f(x) d\mathcal{H}_1^Q(x) = \mathcal{H}_2^Q(f(A)).$$

Il en découle une version faible du théorème de Sard (que nous avons déjà rencontré dans le cas euclidien, voir théorème 2.41), à savoir que si  $\mathcal{J}_Q^m f = 0$  presque partout sur  $A$ ,  $\mathcal{H}_2^Q(f(A)) = 0$ .

Le lien entre les deux notions de jacobien est donné par le résultat suivant (avec les mêmes notations que ci-dessus).

**Proposition 2.87.** Soit  $f : A \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  une application lipschitzienne. Alors, en tout point  $x$  de différentiabilité de Pansu de  $f$ , on a  $\mathcal{J}_Q^m f(x) = \mathcal{J}_Q^H f(x)$ .

Les théorèmes de type Rademacher permettent de démontrer des résultats de non-plongement bilipschitzien. Ainsi, le groupe de Heisenberg (qui est doublant lorsqu'il est muni de sa distance de Carnot-Carathéodory et de la mesure de Lebesgue) montre que l'on ne peut pas en général prendre  $\varepsilon = 1$  dans le théorème d'Assouad (voir théorème 1.117). En effet, supposons qu'il existe un plongement bilipschitzien  $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{R}^N$  pour un certain  $N \in \mathbb{N}^*$ . Alors,  $f$  est différentiable presque partout. Comme l'algèbre de Lie de  $\mathbb{H}$  est non commutative alors que celle de  $\mathbb{R}^N$  l'est, le noyau de la différentielle de  $f$  est non trivial. Ce qui est impossible pour une application bilipschitzienne. Il semble que ce fait soit connu d'Assouad mais la première preuve est donnée dans [131]. Notons aussi que le groupe d'Heisenberg ne peut pas être plongé de façon bilipschitzienne dans un espace de Lebesgue  $L^p$  (Voir par exemple le survol [114]). Enfin, c'est un problème ouvert et difficile de caractériser les espaces métriques qui peuvent être plongés via une application bilipschitzienne dans un espace euclidien (Voir [60]). Une bonne référence pour toute cette section est [24].

Concluons par une discussion rapide sur les théorèmes d'extension du type Whitney dans ce cadre. Le théorème de Rademacher-Pansu entraîne une certaine rigidité qui fait qu'il ne peut pas y avoir par exemple de résultat de type Whitney dans le cas où  $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{H}^n$ . D'un autre côté, il en existe si  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$  où  $\mathbb{G}$  est un groupe de Carnot quelconque. Le cas difficile est donc quand la fonction  $f$  est définie sur un espace euclidien, à valeurs dans un groupe de Carnot. Voir [70] pour une réponse positive dans le cas où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{G}$  (avec  $\mathbb{G}$  vérifiant une condition de "pliabilité") et pour une discussion générale de ce problème.

### 3.6 Fonctions lipschitziennes et dérivée métrique

Le but de ce paragraphe est de donner une version du théorème de Rademacher pour les fonctions localement lipschitziennes  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  où  $X$  est un espace métrique muni d'une distance  $d$ . Nous avons déjà rencontré le cas des courbes, c'est à dire le cas  $n = 1$ . Ainsi, si  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  est une courbe lipschitzienne, alors pour presque tout  $t \in [a, b]$ , la dérivée métrique  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{|h|}$  existe et on la note  $|\dot{\gamma}|(t)$ . Nous souhaitons considérer le cas  $n > 1$ .

**Définition 2.88.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  une application. On suppose que  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne. On dit que  $f$  admet une dérivée métrique en  $t \in \mathbb{R}^n$  s'il existe une semi-norme  $\tau_t$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que

$$\lim_{|h|+|k| \rightarrow 0} \frac{d(f(t+h), f(t+k)) - \tau_t(h-k)}{|h| + |k|} = 0.$$

Dans ce cas,  $\tau_t$  est la dérivée métrique de  $f$  en  $t$ . Si  $n = 1$  et si  $f = \gamma$ ,  $\tau_t(h) = |\dot{\gamma}|(t)|h|$ .

On rappelle que  $\tau_t$  est une semi-norme si  $\tau_t$  vérifie les axiomes d'une vraie norme, excepté que  $\tau_t$  peut s'annuler en des vecteurs non nuls.

**Théorème 2.89.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  une application (localement) lipschitzienne. Alors,  $f$  admet une dérivée métrique en  $\mathcal{L}^n$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* Nous allons diviser la preuve en plusieurs étapes qui sont dans le même esprit que celles du cas euclidien. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  une application lipschitzienne. On note comme d'habitude  $Lip(f)$  sa constante de Lipschitz.

1) On considère d'abord les dérivées directionnelles. Pour cela, on pose  $\tau_t(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(f(t+hu), f(t))}{|h|}$  (où  $t \in \mathbb{R}^n$  et  $u \in S^{n-1}$ ) si cette limite existe. Pour  $u \in S^{n-1}$  fixé, on note  $\mathcal{B}_u$  l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}^n$  pour lesquels  $\tau_t(u)$  n'existe pas. Comme  $f$  est (localement) lipschitzienne sur  $\{t+hu, h \in \mathbb{R}\}$  pour  $t$  fixé, il s'en suit que  $\mathcal{H}^1(\{t+hu, h \in \mathbb{R}\} \cap \mathcal{B}_u) = 0$  pour tout  $t \in \mathbb{R}^n$  d'après le cas des courbes rectifiables (qui est rappelé au dessus). Donc d'après le théorème de Fubini,  $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}_u) = 0$ . Ainsi, pour tout  $u \in S^{n-1}$ ,  $\tau_t(u)$  existe pour presque tout  $t \in \mathbb{R}^n$ . Ceci implique l'existence aussi de  $\tau_t(su)$  pour tout  $u \in S^{n-1}$ , presque tout  $t \in \mathbb{R}^n$  et tout  $s \in \mathbb{R}$ . Il s'en déduit l'existence de  $\tau_t(u)$  pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$  et presque tout  $t \in \mathbb{R}^n$ , puis que  $\tau_t(su) = |s|\tau_t(u)$  pour tout  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Soit  $E$  l'ensemble des  $t \in \mathbb{R}^n$  tels que  $\tau_t(u)$  existe pour tout  $u \in \mathbb{R}^n$ . D'après ce qui précède,  $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$ . Si  $t \in E$  et  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , l'application  $u \rightarrow \frac{d(f(t+hu), f(t))}{|h|}$  est lipschitzienne (avec constante  $Lip(f)$ ). Il s'en déduit que la convergence de  $\tau_t(u)$  est uniforme pour  $u \in S^{n-1}$  et que l'application  $u \rightarrow \tau_t(u)$  est lipschitzienne (avec constante  $Lip(f)$ ).

2) Il existe une suite de compacts  $(K_j)$  contenus dans  $E$  telle que

(i)  $\mathcal{L}^n(E \setminus \cup_j K_j) = 0$ .

(ii) Pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que

$$|d(f(t+u), f(t+v)) - \tau_t(u-v)| \leq \varepsilon|u-v|$$

dès que  $t \in K_j$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n$  avec  $|u|, |v| \leq \delta$  et  $t+v \in K_j$ .

Pour cela, considérons l'application mesurable  $\tau : t \in E \rightarrow \tau_t$  à valeurs dans l'espace séparable des fonctions continues sur la sphère unité de  $S^{n-1}$ . D'après le théorème de Lusin (théorème 1.39), il existe des fermés  $(F_j)$  contenus dans  $E$  tels que  $\mathcal{L}^n(E \setminus \cup_j F_j) = 0$  et la restriction de  $\tau$  à tout  $F_j$  est continue. Pour tout  $t \in E$  et tout  $j \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\beta_i(t) = \sup_{0 \leq h \leq 1/i} \sup_{|u|=1} \left| \frac{d(f(t+hu), f(t))}{h} - \tau_t(u) \right|.$$

Nous avons vu à la première étape que pour tout  $t \in E$ ,  $\lim_{i \rightarrow +\infty} \beta_i(t) = 0$ . Le théorème d'Egoroff (théorème 1.41) donne alors des compacts  $(K_j)$  contenus dans  $E$  qui vérifient (i) et tels que tout  $K_j$  est contenu dans un  $F_k$  et la convergence des  $\beta_i$  est uniforme sur chaque  $K_j$ . Il nous reste à vérifier que la famille  $(K_j)$  vérifie (ii) et pour cela, fixons  $\varepsilon > 0$  et  $j \in \mathbb{N}$ . Comme la restriction de  $\tau$  à  $K_j$  est uniformément continue, il existe  $i$  de sorte que  $\sup_{|u|=1} |\tau_t(u) - \tau_{t'}(u)| \leq \varepsilon/2$  et  $\beta_i(t') \leq \varepsilon/2$  pour  $t, t' \in K_j$  avec  $|t-t'| \leq 1/(2i)$ . On pose  $\delta = 1/(2i)$ . Considérons maintenant  $t \in K_j$ ,  $u, v \in \mathbb{R}^n$  avec  $|u|, |v| \leq \delta$  et  $t+v \in K_j$ . On notera  $t' = t+v \in K_j$ ,  $\eta = |u-v|$  et  $w = \frac{1}{\eta}(u-v)$ . Alors,

$0 < \eta \leq |u| + |v| \leq 2\delta = 1/i$  et il s'en suit

$$\begin{aligned}
|d(f(t+u), f(t')) - \tau_t(u-v)| &\leq |d(f(t'+u-v), f(t')) - \tau_{t'}(u-v)| \\
&+ |\tau_t(u-v) - \tau_{t'}(u-v)| \\
&\leq \eta \left| \frac{d(f(t'+\eta w), f(t'))}{\eta} - \tau_{t'}(w) \right| + \eta |\tau_t(w) - \tau_{t'}(w)| \\
&\leq \varepsilon \eta
\end{aligned}$$

Ce qui est exactement (ii).

3) Nous pouvons maintenant conclure. Pour cela, d'après le théorème de différentiation de Lebesgue (voir l'inégalité (1.177)), il suffit de montrer l'existence de la dérivée métrique en tout  $t$  qui est point de densité d'un certain  $K_j$ . Fixons donc  $t \in K_j$  point de densité de  $K_j$  et  $\varepsilon > 0$ . Quitte à modifier le  $\delta$  donné par l'étape 2, on peut supposer que pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  avec  $|v| \leq \delta$ , il existe  $v' \in \mathbb{R}^n$  de sorte que  $t + v' \in K_j$ ,  $|v'| \leq |v|$  et  $|v - v'| \leq \varepsilon|v|$ . Alors, si on se donne  $u, v \in \mathbb{R}^n$  avec  $|u|, |v| \leq \delta$ , on a

$$\begin{aligned}
|d(f(t+u), f(t+v)) - \tau_t(u-v)| &\leq |d(f(t+u), f(t+v')) - \tau_t(u-v')| \\
&+ |d(f(t+v), f(t+v')) + |\tau_t(u-v) - \tau_t(u-v')|| \\
&\leq \varepsilon|u-v'| + 2Lip(f)|v-v'| \\
&\leq \varepsilon(|u| + |v|) + 2Lip(f)\varepsilon|v| \\
&\leq \varepsilon(1 + 2Lip(f))(|u| + |v|).
\end{aligned}$$

Ce qui montre bien l'existence de la dérivée métrique en  $t$ . Il nous reste à montrer que  $\tau_t$  est une semi-norme (quand  $\tau_t$  existe). Pour cela, le seul point à vérifier est l'inégalité triangulaire pour  $\tau_t$ . Or, on a puisque  $\tau_t(sv) = |s|\tau_t(v)$  (si  $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $v \in \mathbb{R}^n$ ) et par définition de  $\tau_t$ ,

$$\begin{aligned}
\tau_t(u+v) &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(f(x+tu), f(x-tv))}{t} \\
&\leq \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(f(x+tu), f(x))}{t} + \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(f(x), f(x-tv))}{t} \\
&= \tau_t(u) + \tau_t(-v) = \tau_t(u) + \tau_t(v).
\end{aligned}$$

dès que  $u, v \in \mathbb{R}^n$ . Notre preuve est donc complète. □

Nous nous sommes inspirés dans cette section de [83].

## 4 Théorèmes de prolongement des applications lipschitziennes

Le but de cette partie est de donner des versions non linéaires du théorème de Hahn-Banach (version analytique, voir [22]). De façon plus précise, soient  $(X, d_X)$ ,  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Les questions considérées dans ce paragraphe sont les suivantes :

*Est-il possible d'étendre toute fonction lipschitzienne  $f : A \rightarrow Y$  où  $A \subset X$  est un sous-ensemble de  $X$  en une fonction lipschitzienne  $g : X \rightarrow Y$  ? Et si c'est le cas, peut-on contrôler  $Lip(g)$  par  $Lip(f)$  ?*

Ici, et dans la suite, on dit que  $g$  est une extension de  $f$  si pour tout  $x \in A$ ,  $f(x) = g(x)$ . Comme d'habitude, nous allons commencer par décrire le cas euclidien. Celui des espaces de Hilbert de dimension infinie sera ensuite considéré. Nous devons alors faire appel à la topologie faible \*, en particulier au théorème de Banach-Alaoglu (compacité de la boule unité pour cette topologie). Enfin, nous donnerons un énoncé pour des espaces métriques assez généraux qui s'applique par exemple aux espaces métriques doublants.

## 4.1 Le cas euclidien

Démontrons un premier résultat élémentaire, souvent appelé théorème d'extension de McShane.

**Proposition 2.90.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique.

(i) Soit  $A \subset X$  et soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  une application lipschitzienne. Alors, il existe une extension lipschitzienne  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $Lip(g) = Lip(f)$ .

(ii) Soit  $A \subset X$  et soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne. Alors, il existe une extension lipschitzienne  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $Lip(g) \leq \sqrt{m}Lip(f)$ .

*Démonstration.* (i) On pose  $g(x) = \inf_{a \in A} (f(a) + Lip(f)d(x, a))$ . Alors, il est clair que si  $x \in A$ ,  $g(x) = f(x)$ . En effet, par définition,  $g(x) \leq f(x)$ . De plus, puisque  $f$  est lipschitzienne,  $f(a) + Lip(f)d(x, a) \geq f(x)$  pour tout  $a \in A$  et donc  $g(x) \geq f(x)$ , puis  $f(x) = g(x)$ . Si  $x, y \in X$ , on a d'après l'inégalité triangulaire

$$g(x) \leq \inf_{a \in A} (f(a) + Lip(f)(d(x, y) + d(y, a))) = g(y) + Lip(f)d(x, y).$$

De façon analogue, on a  $g(y) \leq g(x) + Lip(f)d(x, y)$ . Donc,  $g$  est lipschitzienne avec  $Lip(g) \leq Lip(f)$ . Comme  $g$  est une extension de  $f$ , on a aussi  $Lip(f) \leq Lip(g)$ , et donc  $Lip(f) = Lip(g)$ .

(ii) Si on pose  $f = (f_1, \dots, f_m)$ , on applique (i) à chaque  $f_j$  ( $j = 1, \dots, m$ ) pour obtenir une extension  $g = (g_1, \dots, g_m)$  de  $f$ . On peut alors conclure en notant que pour  $x, y \in X$ ,

$$|g(x) - g(y)|^2 = \sum_{j=1}^m |g_j(y) - g_j(x)|^2 \leq m(Lip(f))^2 d(x, y)^2.$$

□

Dans le cas  $X = \mathbb{R}^n$  (muni de la distance euclidienne), la partie (ii) du résultat précédent n'est pas optimal. Avant d'énoncer et surtout de démontrer une version pour laquelle on a conservation de la constante de Lipschitz, nous allons présenter quelques résultats intermédiaires.

**Lemme 2.91.** Soit  $K \subset S^{n-1}$  un sous-ensemble de la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $g : K \rightarrow S^{m-1}$  une application  $L$ -lipschitzienne avec  $L < 1$ . Alors,  $g(K)$  est contenu dans une demi-sphère ouverte

*Démonstration.* Soit  $C$  l'enveloppe convexe de  $g(K)$  dans  $\overline{B}(0, 1)$ . Pour conclure, il suffit de voir que  $0 \notin C$  et pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe des vecteurs  $v_1, \dots, v_k$  de  $K$  et des réels  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  dans  $[0, 1]$  avec  $\sum_{i=1}^k \lambda_i g(v_i) = 0$ . Comme  $g$  est  $L$ -lipschitzienne avec  $L < 1$ , on a pour tout  $i \neq j$ ,  $\langle g(v_i), g(v_j) \rangle > \langle v_i, v_j \rangle$ . D'où, en posant  $w_i = \lambda_i v_i$ , on a pour tout  $j$ ,  $\sum_{i=1}^k \langle w_i, w_j \rangle < 0$ . On obtient alors une contradiction puisque

$$|w_1 + \dots + w_k|^2 = \langle w_1 + \dots + w_k, w_1 + \dots + w_k \rangle = \sum_{i,j=1}^k \langle w_i, w_j \rangle < 0.$$

□

**Lemme 2.92.** Soient  $x_1, \dots, x_k$  une collection finie de points de  $\mathbb{R}^n$  et  $y_1, \dots, y_k$  une partie finie de points de  $\mathbb{R}^m$  telles que

$$|y_i - y_j| \leq |x_i - x_j| \text{ pour tout } i, j \in \{1, \dots, k\}.$$

Alors, si  $r_1, \dots, r_k$  sont des nombres positifs tels que  $\bigcap_{i=1}^k B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ , on a aussi  $\bigcap_{i=1}^k B(y_i, r_i) \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* On considère  $G : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $G(y) = \max_{i=1, \dots, k} \frac{|y - y_i|}{r_i}$ . Comme  $G$  est continue et vérifie  $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} |G(y)| = +\infty$ ,  $G$  atteint son minimum noté  $\tau$  en un point  $z$  de  $\mathbb{R}^m$ . Il nous suffit de voir que  $G(z) \leq 1$  et pour cela, raisonnons par l'absurde. On suppose donc que  $G(z) = \tau > 1$  et on note  $J$  l'ensemble des indices  $j \in \{1, \dots, k\}$  tels que  $|z - y_j| = \tau r_j$ . On choisit un point  $x \in \bigcap_{j \in J} B(x_j, r_j)$  et on considère les deux sous-ensembles :

$$D = \left\{ s_j = \frac{x_j - x}{|x_j - x|}; j \in J \right\} \subset S^{m-1}$$

$$D' = \left\{ t_j = \frac{y_j - z}{|y_j - z|}; j \in J \right\} \subset S^{m-1}.$$

On définit maintenant l'application  $\phi : D \rightarrow D'$  pour tout  $j \in J$  par  $\phi(s_j) = t_j$ . Si  $i, j \in J$ , on a

$$\left| \frac{x_i - x}{|x_i - x|} - \frac{x_j - x}{|x_j - x|} \right| > \left| \frac{y_i - z}{|y_i - z|} - \frac{y_j - z}{|y_j - z|} \right|.$$

Donc,  $\phi$  est  $L$ -lipschitzienne avec  $L < 1$  et d'après le lemme 2.91,  $D'$  est contenue dans une demi-sphère ouverte, par exemple  $D' \subset S^{m-1} \cap \{x_m > 0\}$ . Mais, alors en déplaçant légèrement  $z$  dans la  $m$ -ième-direction, la valeur de  $G$  décroît strictement, ce qui contredit le fait que  $G$  a son minimum en  $z$ .  $\square$

**Lemme 2.93.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble fini et soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application 1-lipschitzienne. Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , il existe une extension 1-lipschitzienne  $g : E \cup \{x\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  de  $f$  sur  $E \cup \{x\}$ .

*Démonstration.* On pose  $E = \{x_1, \dots, x_k\}$ . Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application 1-lipschitzienne et soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . On pose pour  $i = 1, \dots, k$ ,  $r_i = |x - x_i|$  et  $y_i = f(x_i)$ . On peut alors appliquer le lemme 2.92 pour obtenir un point  $y \in \mathbb{R}^m$  tel que pour tout  $i = 1, \dots, k$ , on ait  $|y - f(x_i)| \leq |x - x_i|$ . On obtient donc l'extension cherchée en posant  $f(x) = y$ .  $\square$

**Théorème 2.94.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne. Alors, il existe une extension lipschitzienne  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $Lip(g) = Lip(f)$ .

*Démonstration.* On peut sans perte de généralité supposer que  $f$  est 1-lipschitzienne. Il est clair au vu du lemme précédent que nous allons utiliser un procédé diagonal. Pour cela, on se donne des ensembles (au plus) dénombrables  $(a_i)$  et  $(b_i)$  qui sont respectivement denses dans  $A$  et  $\mathbb{R}^n \setminus A$ . Si  $\mathbb{R}^n \setminus A$  est fini, on peut facilement construire une extension en appliquant le lemme précédent. Si  $A$  est fini, il suffit de modifier légèrement la preuve qui suit. Supposons donc que  $A$  et  $\mathbb{R}^n \setminus A$  sont infinis. Pour tout  $k$ , le lemme précédent donne une application 1-lipschitzienne  $f_k : \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k\} \rightarrow \mathbb{R}^m$  avec  $f_k(a_i) = f(a_i)$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . La suite  $(f_k(b_1))$  étant bornée puisque par exemple  $|f_k(b_1)| \leq |f(a_1)| + |b_1 - a_1|$  pour tout  $k$ , elle admet une sous-suite  $(f_{k_j^1}(b_1))$  qui converge. De façon similaire, la suite  $(f_{k_j^1})$  admet une sous-suite  $(f_{k_j^2})$  telle que  $(f_{k_j^2}(b_2))$  converge. On construit ainsi des sous-suites  $(f_{k_j^l})$  de sorte que  $(f_{k_j^{l+1}})$  est une sous-suite de  $(f_{k_j^l})$  et  $(f_{k_j^l}(b_l))$  converge. On pose  $g_l = f_{k_j^l}$ . Notons  $D = \{a_i\} \cup \{b_i\}$ . Alors, par construction, pour  $d \in D$ ,  $(g_l(d))$  converge et on note  $g(d)$  sa limite. Alors, l'application  $g : D \rightarrow \mathbb{R}^m$  est 1-lipschitzienne et pour tout  $j$ ,  $g(a_j) = f(a_j)$ . Par densité de  $D$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut étendre  $g$  en une application 1-lipschitzienne de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^m$  qui coïncide avec  $f$  sur  $A$  (par densité de  $(a_j)$  dans  $A$ ). Voir l'exercice 2.208.  $\square$

Cette preuve est inspirée de [60].

## 4.2 Topologie faible \* et le cas hilbertien

En utilisant de la topologie faible \*, on peut étendre le théorème 2.94 en dimension infinie. Pour cela, on commence par quelques rappels.

### Topologie faible \*

Commençons par une construction générale. Soit un ensemble  $X$  et des espaces topologiques  $(Y_i)_{i \in I}$  (où l'ensemble des indices  $I$  n'est pas en général dénombrable). Pour tout  $i \in I$ , on se donne une application  $\phi_i : X \rightarrow Y_i$ . Si on munit  $X$  de la topologie discrète (celle pour laquelle tous les sous-ensembles de  $X$  sont des ouverts), toutes les applications  $\phi_i$  sont continues. Il existe donc des topologies sur  $X$  qui rendent continues toutes les applications  $\phi_i$ . De plus, il en existe une qui est la moins fine, c'est à dire contenant le minimum d'ouverts. Ceux-ci sont de la forme  $O = \cup_{quelconque} \cap_{finie} \phi_i^{-1}(V_i)$  où pour tout  $i$ ,  $V_i$  est un ouvert de  $Y_i$ . Si  $x \in X$ , une base de voisinage est alors de la forme  $\cap_{finie} \phi_i^{-1}(V_i)$  où  $V_i$  est un voisinage de  $\phi_i(x)$  dans  $Y_i$ . Il est alors facile de caractériser la convergence des suites :  $x_n \rightarrow x$  (pour cette topologie) si et seulement si  $\phi_i(x_n) \rightarrow \phi_i(x)$  pour tout  $i \in I$ . Nous allons maintenant appliquer cette construction pour obtenir la topologie faible puis la topologie faible \*. Soit  $(E, \|\cdot\|)$  un espace de Banach. On appelle topologie forte la topologie associée à la norme  $\|\cdot\|$  et on dit que la suite  $(x_n)$  tend fortement vers  $x$  (ce que l'on note  $x_n \rightarrow x$ ) si  $(x_n)$  tend vers  $x$  au sens de la topologie forte. On note  $E^*$  son dual que l'on munit de la norme usuelle  $\|\cdot\|$ .

#### Topologie faible $\sigma(E, E^*)$ .

On pose pour tout  $f \in E^*$  et tout  $x \in E$ ,  $\phi_f(x) = f(x)$ . En appliquant la construction précédente à  $X = E$ ,  $Y_i = \mathbb{R}$ , et  $I = E^*$ , on obtient la topologie faible  $\sigma(E, E^*)$  qui est donc la topologie la moins fine qui rend continues toutes les applications  $\phi_f$ . Une base de voisinage de  $x_0 \in E$  est donné par les ensembles de la forme  $V = \{x \in E; |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \forall i \in I\}$  où  $I$  est fini,  $f_i \in E^*$  et  $\varepsilon > 0$ . Si une suite  $(x_n)$  tend vers  $x$  pour la topologie  $\sigma(E, E^*)$ , on note  $x_n \rightharpoonup x$  et on dit que  $(x_n)$  tend vers  $x$  faiblement dans  $E$ . Il est clair d'après les définitions que si  $(x_n)$  converge fortement vers  $x$  dans  $E$ , alors  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  dans  $E$ . De plus  $(x_n)$  converge faiblement vers  $x$  dans  $E$  si et seulement si pour tout  $f \in E^*$ ,  $(f(x_n))$  converge vers  $f(x)$  dans  $\mathbb{R}$ . En dimension finie, la topologie faible et la topologie forte coïncident. En dimension infinie, la topologie faible est strictement moins fine que la topologie forte.

#### Topologie faible \* $\sigma(E^*, E)$

On note  $E^{**}$  le bidual de  $E$  (c'est à dire  $E^{**} = (E^*)^*$ ) que l'on munit de la norme usuelle. Pour chaque  $x \in E$ , on définit un élément de  $E^{**}$  en considérant  $\phi_x(f) = f(x)$  pour  $f \in E^*$ . En appliquant la construction initiale à  $X = E^*$ ,  $Y_i = \mathbb{R}$  et  $I = E$ , on construit la topologie faible \*, notée  $\sigma(E^*, E)$ , qui est la topologie la moins fine sur  $E^*$  qui rend continues toutes les applications  $\phi_x$ . Une base de voisinage de  $f_0 \in E^*$  est donnée par les ensembles de la forme  $V = \{f \in E^*; |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon, \forall i \in I\}$  où  $I$  est fini,  $x_i \in E$  et  $\varepsilon > 0$ . Si  $(f_n)$  est une suite dans  $E^*$  qui converge vers  $f$  pour  $\sigma(E^*, E)$ , on note  $f_n \xrightarrow{*} f$ . Alors,  $f_n \xrightarrow{*} f$  si et seulement si pour tout  $x \in E$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ . De plus, si  $(f_n)$  converge fortement vers  $f$  (c'est à dire au sens de la norme  $\|\cdot\|$ ), elle converge pour la topologie  $\sigma(E^*, E)$ . Il est bien connu que pour un espace vectoriel normé de dimension infinie, la boule unité fermée n'est jamais compacte. Un des intérêts de la topologie faible \* réside dans le résultat fondamental suivant (Théorème de Banach-Alaoglu).

**Théorème 2.95.** *L'ensemble  $\{f \in E^*; \|f\| \leq 1\}$  est compact pour la topologie  $\sigma(E^*, E)$ .*

Le cas qui va nous intéresser dans la suite est celui où  $E = H$  avec  $H$  un espace d'Hilbert. On notera  $\langle x, y \rangle$  le produit scalaire sur  $H$  et  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$  la norme associée. Nous énonçons maintenant

le théorème de représentation de Riesz-Fréchet qui va nous permettre d'identifier  $H$  et son dual  $H^*$ .

**Théorème 2.96.** *Soit  $H$  un espace de Hilbert. Etant donné  $\phi \in H^*$ , il existe un unique  $u_\phi \in H$  tel que pour tout  $x \in H$ ,  $\phi(x) = \langle u_\phi, x \rangle$ . De plus,  $\|u_\phi\| = \|\phi\|$ .*

Ainsi, l'application  $\phi \rightarrow u_\phi$  est un isomorphisme isométrique entre  $H$  et  $H^*$  qui permet donc d'identifier ces deux espaces de Banach. Le théorème de Banach-Alaoglu peut alors s'écrire dans ce cadre sous la forme suivante qui est celle que nous utiliserons dans la suite.

**Corollaire 2.97.** *Toute boule fermée (pour la topologie forte)  $B_f(a, r) = \{x \in H; \|x - a\| \leq r\}$  d'un espace de Hilbert  $H$  est compacte pour la topologie faible\*.*

Pour plus de détails sur cette partie, voir [22].

### Preuve du théorème de Kirszbraun dans les espaces de Hilbert

**Théorème 2.98.** *On considère  $H$  un espace de Hilbert. Soit  $A \subset H$  et soit  $f : A \rightarrow H$  une application lipschitzienne. Alors, il existe une extension lipschitzienne  $g : H \rightarrow H$  avec  $Lip(g) = Lip(f)$ .*

*Démonstration.* On peut toujours supposer que  $Lip(f) = 1$  et on note  $\|\cdot\|$  la norme sur  $H$ . Le début de la démonstration est identique à la précédente. Ainsi, on commence par noter (voir l'exercice 2.209) que si  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  sont des points de  $H$  qui vérifient pour tous  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\|y_i - y_j\| \leq \|x_i - x_j\|$ , alors pour tout  $x_0 \in H \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , il existe  $y_0 \in H$  tel que  $\|y_i - y_0\| \leq \|x_i - x_0\|$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Ceci est l'analogue du lemme 2.92. Considérons  $\{x_1, \dots, x_n\}$  une partie finie de  $A$  et posons  $y_i = f(x_i)$ . Alors,  $\|y_i - y_j\| \leq \|x_i - x_j\|$  (puisque  $f$  est 1-lipschitzienne). Donc, si  $x_0 \in H \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , il existe  $y_0 \in H$  tel que  $\|y_i - y_0\| \leq \|x_i - x_0\|$  pour tout  $i = 1, \dots, n$  et ainsi  $y_0 \in \bigcap_{i=1}^n B_f(f(x_i), \|x_i - x_0\|)$ .

On rappelle que si  $K$  est un compact, alors de la propriété de Borel-Lebesgue (de tout recouvrement de  $K$  par des ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini), il vient (par passage aux complémentaires) que si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de fermés de  $K$  telle que  $\bigcap_{i \in I} F_i = \emptyset$ , on peut extraire une famille finie  $(F_i)_{i \in J}$ , avec  $J \subset I$  fini, telle que  $\bigcap_{i \in J} F_i = \emptyset$  ou encore (par contraposition) que si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de fermés de  $K$  dont toute sous-famille finie a une intersection non vide, alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est non vide (propriété de l'intersection finie).

Fixons  $x_0 \notin A$  et  $a \in A$ . On peut appliquer ce qui précède à

-  $K = B_f(f(a), \|a - x_0\|)$  qui est compact pour la topologie  $\sigma(E^*, E)$  par le théorème de Banach-Alaoglu ;

- les  $F_x = B_f(f(x), \|x - x_0\|) \cap K$  ( $x \in A$ ) qui vérifie la propriété de l'intersection finie d'après ce qui précède (considérer une famille finie de points de  $A$  contenant  $a$ ). Donc, il existe  $y_0 \in \bigcap_{x \in A} F_x$  (qui est non vide !). Posons  $g(x_0) = y_0$  et  $g(x) = f(x)$  si  $x \in A$ . Alors,  $g$  est une extension 1-lipschitzienne de  $f$  sur  $A \cup \{x_0\}$ . On peut ensuite conclure en adaptant la fin de la preuve du cas euclidien, soit en utilisant la démonstration classique du théorème d'Hahn-Banach (via le lemme de Zorn, voir par exemple [22]).  $\square$

La preuve du théorème 2.98 est tiré de [120].

### 4.3 Extension des fonctions lipschitziennes dans les espaces de Banach et les groupes de Carnot

Dans ce paragraphe, nous souhaitons montrer que dans le cas des espaces de Banach ou des groupes de Carnot, la situation n'est pas claire pour l'extension des fonctions lipschitziennes. On commence par une définition générale.

**Définition 2.99.** On dit qu'un couple d'espaces métriques  $(X, Y)$  a la propriété d'extension lipschitzienne s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout sous-ensemble  $Z$  de  $X$  et toute application lipschitzienne  $f : Z \rightarrow Y$ , il existe une extension lipschitzienne  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  de  $f$  avec  $Lip(\tilde{f}) \leq CLip(f)$ . On note  $e(X, Y)$  la plus petite constante pour laquelle  $(X, Y)$  a la propriété d'extension. On pose  $e(X, Y) = \infty$  dans le cas où le couple n'a pas la propriété d'extension.

Contrairement au théorème de Kirszbraun, on ne demande pas l'égalité des constantes de Lipschitz (ceci serait trop contraignant). Notons que l'on a toujours  $Lip(f) \leq Lip(\tilde{f})$ . On a vu que les couples d'espaces euclidiens ou d'espaces hilbertiens ont la propriété d'extension lipschitzienne avec  $e(X, Y) = 1$ . Si  $X$  est un espace de Banach, il en est de même de  $(X, l^\infty)$  ou de  $(X, C(K))$  quand on munit  $l^\infty$  ou  $C(K)$  (espace des fonctions continues sur un espace compact) de la norme infinie (voir [14]). Le cas des espaces de Lebesgue est plus intrigant. Ainsi, on a les résultats suivants :

- Si  $1 < p < 2$ ,  $e(L^2, L^p) \leq \frac{6}{\sqrt{p-1}}$  (Ball).

- Si  $2 < p < \infty$ ,  $e(L^p, L^2) \leq C(p) < \infty$  (Tsar'kov).

- Si  $2 < p < \infty$ ,  $e(L^2, L^p) = \infty$  (Naor).

D'autre part, les cas  $(L^2, L^1)$  et  $(L^p, L^q)$  (avec  $2 < p < \infty$  et  $1 < q < 2$ ) ne sont pas bien compris. Donnons un résultat assez général pour les espaces de Banach établi dans [66].

**Théorème 2.100.** Si  $X$  est un espace de Banach de dimension  $n$  et si  $Y$  est un espace de Banach, alors le couple  $(X, Y)$  a la propriété d'extension lipschitzienne avec  $C \leq K.n$  (où  $K$  est une constante absolue)

Voir [14] et l'introduction de [86] pour une discussions plus détaillée du problème d'extension lipschitzienne pour les espaces de Banach.

Considérons maintenant la question de déterminer les couples de groupes de Carnot  $(\mathbb{G}_1, \mathbb{G}_2)$  qui ont la propriété d'extension lipschitzienne. Il est connu que la réponse est oui dans le cas où  $\mathbb{G}_1 = \mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{G}_2 = \mathbb{H}^m$  si et seulement si  $n \leq m$ . De plus, le fait que le couple  $(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^m)$  a la propriété d'extension lipschitzienne implique que  $n \leq m$  et si  $n \geq 2k + 1$  (c'est à dire  $n$  est impair), le couple  $(\mathbb{H}^n, \mathbb{H}^n)$  n'a pas la propriété d'extension. Voir [12] pour une démonstration de ce dernier résultat et pour un historique du problème. Même dans le cas où  $\mathbb{G}_1 = \mathbb{H}^1$ , la situation n'est pas bien comprise. Ainsi, le couple  $(\mathbb{H}^1, \mathbb{H}^3)$  a la propriété d'extension lipschitzienne alors que le couple  $(\mathbb{H}^1, \mathbb{H}^1)$  ne l'a pas. On ne sait pas pour  $(\mathbb{H}^1, \mathbb{H}^2)$ .

### 4.4 Dimension de Nagata et extension dans le cas métrique

Dans [84], Lang et Schlichenmaier ont donné une version du théorème de Kirszbraun dans le cadre métrique via une condition de finitude de la dimension de Nagata que nous définissons maintenant.

**Définition 2.101.** 1) Soit  $\mathcal{B} = (B_i)_{i \in I}$  une famille de sous ensembles d'un espace métrique  $(X, d)$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est  $D$ -bornée où  $D > 0$  est une constante si pour tout  $i \in I$ ,  $\text{diam} B_i \leq D$ . Pour tout  $s \geq 0$ , la  $s$ -multiplicité de  $\mathcal{B}$  est l'infimum des entiers  $N$  tels que tout sous-ensemble  $A \subset X$  de  $X$  avec  $\text{diam} A \leq s$  rencontre au plus  $N$  éléments de  $\mathcal{B}$ .

2) Si  $X$  est un espace métrique, sa dimension de Nagata, notée  $Ndim(X, d)$ , ou  $Ndim(X)$  s'il n'y a



pas d'ambiguïté sur la distance  $d$ , est l'infimum des entiers  $n$  pour lesquels il existe une constante  $C > 0$  telle que pour tout  $s \geq 0$ , il existe un recouvrement  $Cs$ -borné de  $X$  de  $s$ -multiplicité au plus  $n + 1$ .

Cette dimension a été introduite par Assouad pour obtenir des théorèmes de recouvrement de type Besicovitch et ainsi obtenir des théorèmes de dérivation de mesures dans des classes d'espaces métriques assez généraux. Les espaces (métriques) doublants sont de dimension de Nagata finie. Il en est de même des espaces métriques à courbure négative comme les variétés d'Hadamard homogènes (c'est à dire à courbure sectionnelle négative) ou les immeubles euclidiens.

**Définition 2.102.** On dit qu'un espace métrique  $Y$  est lipschitz  $m$ -connecté pour un entier  $m \geq 0$  s'il existe une constante  $C(m) > 0$  telle que toute application lipschitzienne  $f : S^m \rightarrow Y$  où  $S^m$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^m$  possède une extension lipschitzienne sur la boule unité  $\tilde{f} : B^m \rightarrow Y$  avec  $Lip(\tilde{f}) \leq C(m)Lip(f)$ .

Cette condition est vérifiée sous une condition faible de convexité de la distance sur  $Y$  (voir exercice 2.211). On peut enfin donner le résultat de Lang et Schlichenmaier.

**Théorème 2.103.** Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces métriques. On suppose que  $X$  est de dimension de Nagata  $n$  finie et que  $Y$  est lipschitz  $m$ -connecté pour tout  $m = 0, \dots, n - 1$ . Alors, le couple  $(X, Y)$  possède la propriété d'extension lipschitzienne (voir la définition 2.99).

Nous allons donner une idée de la preuve de ce théorème. Nous aurons besoin de quelques notions de topologie algébrique. Une cellule convexe polyédrale euclidienne  $C$  est un espace métrique compact isométrique à l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points d'un espace euclidien. La dimension de  $C$  est la dimension du plus petit  $m$ -plan le contenant où un  $m$ -plan est un espace isométrique à  $\mathbb{R}^m$ . Si  $C$  appartient à un demi-espace délimité par un hyperplan  $H$  et si  $H \cap C \neq \emptyset$ , on dit que  $F = H \cap C$  est une face de  $C$ . La dimension d'une face est la dimension du plus petit  $m$ -plan la contenant. Les 0-faces sont les sommets de  $C$ , les 1-faces sont ses arêtes. Une cellule polyédrale convexe euclidienne de dimension  $m$  avec exactement  $m + 1$  sommets est appelée un simplexe euclidien. On définit le  $n$ -squelette  $\Sigma^{(n)}$  d'un simplexe  $\Sigma$  comme la réunion des simplexes de dimension inférieure ou égale à  $n$ . Un complexe polyédral euclidien (par morceaux) est un espace métrique  $Z$  tel qu'il existe un recouvrement  $\mathcal{C}$  de  $Z$  tel que tout  $C \in \mathcal{C}$  est une cellule polyédrale euclidienne, chaque face de  $C$  est dans  $\mathcal{C}$  et deux éléments de  $\mathcal{C}$  s'intersectent en une face commune ou sont disjoints. Si chaque cellule est un simplexe euclidien,  $Z$  est appelé un complexe simplicial (euclidien). La dimension de  $Z$  est le supremum des dimensions de cellules le composant. On peut associer de façon naturelle un simplexe à un recouvrement par des boules  $\mathcal{B}$  d'un espace métrique  $(X, d)$ . Pour cela, on se donne un paramètre  $\varepsilon > 0$ . Les 0-faces sont les centres des boules de  $\mathcal{B}$ . Les 1-faces sont les couples  $(x, y)$  où les  $x$  et  $y$  sont des centres de boules de  $\mathcal{B}$  avec  $d(x, y) \leq \varepsilon$ . Puis, on construit les 2-faces en regroupant les 1-faces suivant un procédé analogue et ainsi de suite. On utilisera ce type de construction dans la démonstration du théorème 2.103.

Nous énonçons un résultat qui sera utile pour nous et qui a son propre intérêt.

**Proposition 2.104.** Les compacts convexes de  $\mathbb{R}^d$  d'intérieur non vide sont bilipschitz équivalents.

La conclusion dit que si  $C, \tilde{C}$  sont des compacts convexes de  $\mathbb{R}^n$  d'intérieur non vide, il existe des bijections lipschitziennes  $f : C \rightarrow \tilde{C}$  et  $g : \tilde{C} \rightarrow C$  avec  $g^{-1} = f$ . On rappelle aussi que  $C \subset \mathbb{R}^n$  est convexe si pour tous  $x, y \in C$  et tout  $t \in [0, 1]$ ,  $tx + (1 - t)y \in C$ .

*Démonstration.* Soit  $C$  un compact convexe de  $\mathbb{R}^n$  d'intérieur non vide. Nous allons montrer que  $C$  est bilipschitz équivalent à la boule unité fermée  $B_f(0, 1)$  de  $\mathbb{R}^n$ , ce qui permettra de conclure. Quitte

à translater  $C$ , on peut supposer que l'origine  $0$  est dans l'intérieur de  $C$ . Nous allons utiliser la jauge convexe  $j_C$  qui permet par exemple de démontrer des formes géométriques du théorème d'Hahn-Banach (voir [22]). Celle-ci est une application  $j_C : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par

$$j_C(x) = \inf\{\lambda > 0, x \in \lambda C\} = \inf\{\lambda > 0, \lambda^{-1}x \in C\}.$$

Notons que pour tout  $\alpha > 0$ , tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$j_C(\alpha x) = |\alpha|j_C(x). \quad (2.105)$$

D'autre part, on a l'égalité suivante

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n; j_C(x) \leq 1\}. \quad (2.106)$$

En effet, si  $x \in C$ , il est clair que  $j_C(x) \leq 1$  par définition. Réciproquement, supposons que  $j_C(x) \leq 1$ . Si  $j_C(x) = 1$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x_n = \frac{1}{1+1/n}x \in C$ . Comme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = x$  et que  $C$  est compact,  $x \in C$ . Si  $j_C(x) < 1$ , il existe  $1 > \lambda > 0$  tel que  $\lambda^{-1}x \in C$ . Alors, comme  $C$  est convexe et que  $0 \in C$ ,  $x = \lambda(\lambda^{-1}x) + (1-\lambda)0 \in C$ . On a donc (2.106). Puisque  $C$  est compact et que  $0$  est point intérieur de  $C$ , il existe  $0 < r < R$  tels que  $B_f(0, r) \subset C \subset B_f(0, R)$ . Il s'en suit que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\frac{\|x\|}{R} \leq j_C(x) \leq \frac{\|x\|}{r}. \quad (2.107)$$

Notons de plus que  $j_C$  est lipschitzienne de constante inférieure à  $1/r$ . En effet, considérons  $x, y$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $x \neq 0$  (et par exemple  $j_C(y) \geq j_C(x)$ ). D'après (2.105), on peut sans perte de généralité supposer que  $j_C(x) = 1$ . Notons que pour tout  $0 < t < 1$ , la boule (fermée) de centre  $tx$  et de rayon  $(1-t)r$  est contenue dans  $B_f(0, r)$ , donc dans  $C$ . Or, comme  $\|tx - ty\| = (1-t)r$  si  $t = \frac{r}{r + \|x - y\|}$ , il s'en suit que  $ty \in C$ . Donc,  $j_C(y) \leq \frac{1}{t} = 1 + \frac{\|x - y\|}{r}$ . On en déduit  $j_C(y) - j_C(x) \leq \frac{1}{r}\|x - y\|$ . Cette inégalité reste vraie si  $x = 0$  d'après (2.107). On peut conclure par symétrie en  $x$  et  $y$ .

Considérons maintenant les applications  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  définies par  $f(0) = g(0) = 0$  et pour tout  $x \neq 0$ ,  $f(x) = \frac{j_C(x)}{\|x\|}x$  et  $g(x) = \frac{\|x\|}{j_C}x$ . Alors,  $f$  et  $g$  sont des bijections réciproques l'une de l'autre et  $f(C) = B_f(0, 1)$  (ceci vient de (2.106)). Le dernier point à vérifier est que  $f$  et  $g$  sont lipschitziennes (avec des constantes respectives inférieures à  $2/r$  et  $r + R^2/r$ ). On commence par noter que si  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\left| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right|^2 = 2 - 2 \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x, y \rangle}{\|x\| \cdot \|y\|} = \frac{\|x - y\|^2}{\|x\| \cdot \|y\|}. \quad (2.108)$$

Si  $\|x\| \geq \|y\| > 0$ , on a, en utilisant le fait que  $j_C$  est lipschitzienne,

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \left| \frac{j_C(x)}{\|x\|}(x - y) \right| + \left| \left( \frac{j_C(x)}{\|x\|} - \frac{j_C(y)}{\|y\|} \right) y \right| \\ &= \frac{j_C(x)}{\|x\|} \|x - y\| + |j_C(x/\|x\|) - j_C(y/\|y\|)| \|y\| \text{ (d'après (2.105))} \\ &\leq \frac{1}{r} \|x - y\| + \frac{1}{r} \left| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right| \|y\| \\ &\leq \frac{1}{r} \|x - y\| + \frac{1}{r} \frac{\|x - y\|}{\sqrt{\|x\| \cdot \|y\|}} \|y\| \text{ (d'après (2.108))} \\ &\leq \frac{2}{r} \|x - y\|. \end{aligned}$$

La même inégalité reste vraie si  $y = 0$  d'après (2.107). On peut donc conclure que  $f$  est lipschitzienne. Par le même type d'arguments, on montre que si  $\|x\| \geq \|y\| > 0$ , on a

$$\begin{aligned}
|g(x) - g(y)| &\leq \frac{\|x\|}{j_C(x)} \|x - y\| + \left| \frac{\|x\|}{j_C(x)} - \frac{\|y\|}{j_C(y)} \right| \|y\| \\
&= \frac{\|x\|}{j_C(x)} \|x - y\| + \frac{\|x\| \cdot \|y\|}{j_C(x) j_C(y)} |j_C(x/\|x\|) - j_C(y/\|y\|)| \|y\| \\
&\leq R \|x - y\| + \frac{R^2}{r} \left| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right| \|y\| \\
&\leq R \|x - y\| + \frac{R^2}{r} \frac{\|x - y\|}{\sqrt{\|x\| \cdot \|y\|}} \|y\| \\
&\leq \left( r + \frac{R^2}{r} \right) \|x - y\|.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure comme pour  $f$  que  $g$  est lipschitzienne.  $\square$

Nous allons donner une idée de la preuve du théorème 2.103. Soit  $f : Z \subset X \rightarrow Y$  une application lipschitzienne où  $X$  et  $Y$  vérifient les hypothèses du théorème 2.103. En utilisant le fait que  $X$  est de dimension de Nagata finie  $n$ , on construit une famille  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_{i,k})_{(i,k) \in A}$  de sous-ensembles de  $X$  qui recouvre  $X \setminus Z$  et est de multiplicité inférieure à  $n + 1$ . Grâce aux conditions sur  $A$  (essentiellement sur la taille des  $B_{i,k}$ ), on peut construire une application lipschitzienne  $g : X \setminus Z \rightarrow l^2(A)$  qui vit dans le squelette  $\Sigma^{(n)}$  d'un simplexe  $S_n$  de  $l^2(A)$ . Pour conclure, il nous suffit de construire une application lipschitzienne  $h : \Sigma^{(n)} \rightarrow Y$ . En effet, l'extension de  $f$  sur  $X \setminus Z$  est alors donnée par  $h \circ g$ . La construction de  $h$  se fait par récurrence, en étendant successivement (pour  $m = 0, \dots, n - 1$ ) l'application lipschitzienne  $h_m : \Sigma^{(m)} \rightarrow Y$  en une application lipschitzienne  $h_{m+1} : \Sigma^{(m+1)} \rightarrow Y$  en utilisant le fait que  $Y$  est Lipschitz  $m$ -connecté. Ici,  $\Sigma^{(m)}$  est le squelette du sous-simplexe de dimension  $m$  de  $S_n$  et on identifie  $\Sigma^{(m)}$  et  $\Sigma^{(m+1)}$  avec respectivement la sphère unité et la boule unité de  $\mathbb{R}^m$  via la proposition 2.104.

Terminons par un des ingrédients de la démonstration complète qui a son propre intérêt.

**Définition 2.109.** On dit que  $Y$ , sous-ensemble de l'espace métrique  $X$ , est un rétracté lipschitzien de  $X$  s'il existe une application lipschitzienne  $r : X \rightarrow Y$  telle que la restriction de  $r$  à  $Y$  soit l'identité. Une telle application  $r$  est appelée une rétraction lipschitzienne de  $X$  dans  $Y$ . On dit que l'espace métrique  $Y$  est un rétracté lipschitzien absolu s'il est un rétracté lipschitzien de tout espace métrique  $X$  le contenant.

**Proposition 2.110.** Soit  $Y$  un espace métrique. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i)  $Y$  est un rétracté lipschitzien absolu ;
- (ii) Pour tout espace métrique  $X$  et tout sous-ensemble  $A$  de  $X$ , toute fonction lipschitzienne  $f : A \rightarrow Y$  peut être étendue en une fonction lipschitzienne  $g : X \rightarrow Y$ .

Attention, dans l'énoncé précédent, le couple  $(X, Y)$  n'a pas la propriété d'extension lipschitzienne car on ne contrôle par  $Lip(g)$  par  $Lip(f)$ .

*Démonstration.* On peut facilement démontrer l'implication (ii)  $\implies$  (i) en considérant  $A = Y$  et  $f$  l'application identité sur  $Y$ . Pour la réciproque, on commence par plonger isométriquement  $Y$  dans  $L^\infty(Y)$ , le plongement étant donné par  $\phi : x \rightarrow \phi_x$  où  $\phi_x(y) = d(x, y) - d(x_0, y)$  avec  $x_0$  un point fixé de  $Y$ . Alors, par hypothèse, il existe une rétraction lipschitzienne  $r : L^\infty(Y) \rightarrow Y$ . Si on voit  $f$  comme une application de  $A$  dans  $L^\infty(Y)$ , une variante de la proposition 2.90 permet de construire une extension lipschitzienne  $\tilde{f} : X \rightarrow L^\infty(Y)$  de  $f$ . Alors,  $g = r \circ \tilde{f}$  convient.  $\square$

## 5 Autour de la théorie de la rectifiabilité

Cette partie est plutôt descriptive, au sens où nous donnons beaucoup de définitions, d'exemples, de résultats mais peu de preuves qui sont souvent techniques et longues. Cependant, elle permet d'illustrer l'utilisation des applications lipschitziennes en géométrie non lisse (c'est à dire hors du cadre des variétés riemanniennes) en introduisant les ensembles rectifiables. Nous verrons aussi quelques applications de cette théorie, entre autres à des problèmes variationnels ou encore à l'analyse complexe/harmonique. Cette section doit être vue comme une invitation à la théorie géométrique de la mesure et au calcul des variations.

### 5.1 Ensembles rectifiables et purement non rectifiables

On donne dans cette section quelques définitions et des propriétés élémentaires des ensembles rectifiables/non rectifiables.

**Définition 2.111.** Soit  $s \in ]0, n]$  un entier. L'ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est  $s$ -rectifiable si et seulement s'il existe une famille dénombrable d'applications lipschitziennes  $f_j : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$  et un ensemble  $E_0 \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\mathcal{H}^s(E_0) = 0$  tels que  $E \subset (\bigcup_j f_j(\mathbb{R}^s)) \cup E_0$ .

Dans le cas particulier où  $s = 1$ , un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est donc 1-rectifiable si et seulement s'il existe des courbes (localement) rectifiables  $\Gamma_j$  et un ensemble  $E_0 \subset \mathbb{R}^n$  avec  $\mathcal{H}^1(E_0) = 0$  tels que  $E \subset (\bigcup_j \Gamma_j) \cup E_0$ .

Notons que d'après le théorème de Kirszbraun (voir théorème 2.94), on a le

**Lemme 2.112.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble. Alors,  $E$  est  $s$ -rectifiable si et seulement s'il existe une famille dénombrable de sous-ensembles  $A_j \subset \mathbb{R}^s$ , des applications lipschitziennes  $f_j : A_j \rightarrow \mathbb{R}^n$  et un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -négligeable  $E_0 \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $E = (\bigcup_j f_j(A_j)) \cup E_0$ .

On a aussi d'après le théorème d'approximation des fonctions lipschitziennes par des fonctions  $C^1$  (voir théorème 2.63) qu'un ensemble est  $s$ -rectifiable si et seulement s'il peut être recouvert par des sous-variétés  $s$ -dimensionnelles de classe  $C^1$  de  $\mathbb{R}^n$  à un ensemble de  $\mathcal{H}^s$ -mesure nulle près. Dans le cas  $s = 1$ , les sous-variétés en question sont des courbes de classe  $C^1$ . Pour d'autres propriétés des ensembles rectifiables, voir l'exercice 2.212.

**Définition 2.113.** Soit  $s \in ]0, n]$  un entier. L'ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est purement non  $s$ -rectifiable si et seulement si pour tout ensemble  $s$ -rectifiable  $F \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^s(E \cap F) = 0$ .

Ainsi, un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est purement non 1-rectifiable si et seulement si pour toute courbe rectifiable  $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap E) = 0$ . On peut décomposer tout ensemble (de  $s$ -mesure de Hausdorff finie) en une partie  $s$ -rectifiable et une partie purement non  $s$ -rectifiable.

**Proposition 2.114.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble vérifiant  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ . Alors, il existe un ensemble  $s$ -rectifiable  $E_{rect} \subset \mathbb{R}^n$  et un ensemble purement non  $s$ -rectifiable  $E_{nonrect} \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $E = E_{rect} \cup E_{nonrect}$ . De plus, à des ensembles de  $\mathcal{H}^s$ -mesure nulle, cette décomposition est unique.

*Démonstration.* Soit  $M = \sup \mathcal{H}^s(E \cap F)$  où le supremum est pris sur tous les ensembles  $s$ -rectifiables  $F$ . Notons que  $M$  est fini puisque  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ . Considérons pour tout  $j = 1, 2, \dots$ , un ensemble  $s$ -rectifiable  $F_j$  de sorte que  $\mathcal{H}^s(E \cap F_j) > M - 1/j$ . Alors,  $E_{rect} = \bigcup_{j \geq 1} F_j$  convient. Le reste de la démonstration est alors évident.  $\square$

Nous allons donner deux exemples fondamentaux. Il est important de garder ces exemples en tête pour la suite.

**Exemple 2.115.** [Graphes lipschitziens] Il est clair qu'un espace affine de dimension  $s$  de  $\mathbb{R}^n$  (que nous appelons dans la suite  $s$ -plan affine) est  $s$ -rectifiable. De façon plus générale, les  $s$ -graphes lipschitziens le sont aussi. Pour nous, un  $s$ -graphe lipschitzien  $\Gamma$  est, à translation et rotation près, un ensemble de la forme

$$\Gamma = \{(x, A(x)), x \in \mathbb{R}^s\}$$

où  $A : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^{n-s}$  est lipschitzienne. Ainsi,  $\Gamma = \{(x, A(x)), x \in P\}$  où  $P$  est un  $s$ -plan affine (dont l'orthogonal est noté  $P^\perp$ ) et  $A : P \rightarrow P^\perp$  est lipschitzienne. Le cas du plan affine correspond donc à  $A = 0$ . Il n'est pas difficile de voir que les graphes lipschitziens sont des courbes localement rectifiables. Ceci découle par exemple du théorème de Rademacher et de (2.19). Ces graphes jouent un rôle important en analyse harmonique, nous y reviendrons plus tard. Notons aussi que si  $\Gamma$  est un 1-graphe lipschitzien du plan complexe alors l'ensemble  $\Gamma \cup \mathbb{Q}^2$  est 1-rectifiable mais n'est pas une courbe (localement) rectifiable. Il faudra dans la suite bien faire la distinction entre ensembles rectifiables et courbes rectifiables.

**Exemple 2.116.** [Ensemble de Cantor 4-coins] L'exemple typique d'ensemble purement non 1-rectifiable est l'ensemble de Cantor 4-coins que nous avons déjà rencontré (voir l'exemple 2.36). Ceci n'est pas évident à première vue, mais essayons de construire une courbe rectifiable (donc de longueur finie) qui contienne le Cantor 4-coins noté  $E = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} E_j$  dans la suite. Il nous faut d'abord considérer 3 segments de longueur  $1/2$  pour joindre les 4 carrés de  $E_1$ . Puis,  $3^2$  segments de longueur  $1/2^2$  pour joindre les 4 carrés de  $E_2$  qui sont situés dans un carré de  $E_1$ . En itérant cette construction, on construit une courbe qui contient  $E$  mais dont la longueur est donnée par  $\sum_{j \in \mathbb{N}} (3/2)^j = +\infty$ . Ainsi, cette courbe n'est pas (localement) rectifiable. Cette construction est naïve mais par auto-similarité de  $E$ , elle donne une bonne idée de pourquoi l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non 1-rectifiable. On peut facilement modifier la construction du Cantor 4-coins pour obtenir des ensembles purement non  $s$ -rectifiables avec  $s > 1$ . Nous démontrerons plus tard que l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable en utilisant une caractérisation de ces ensembles par les projections.

En dimension  $s = 1$ , la connexité joue un rôle particulier comme le montre le résultat suivant qui n'a pas d'analogue pour les dimensions supérieures.

**Théorème 2.117.** *Il existe une constante  $C(n)$  telle que si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un continuum non trivial (c'est à dire un ensemble compact, connexe non réduit à un point) de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ , alors il existe une courbe rectifiable  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $E \subset \Gamma = \gamma(I)$  et  $\mathcal{H}^1(E) \leq l(\Gamma) \leq C(n)\mathcal{H}^1(E)$ . En particulier,  $E$  est 1-rectifiable.*

La preuve repose sur le résultat suivant de théorie des graphes qui se démontre facilement par récurrence sur le nombre d'arêtes.

**Lemme 2.118.** Soit  $G$  un graphe connexe avec un nombre fini d'arêtes. Alors, il existe un chemin qui passe deux fois exactement par toutes les arêtes de  $G$  (une fois dans chaque direction).

Cet énoncé mérite quelques éclaircissements. Un graphe  $G$  est la donnée d'une collection  $V$  de points et d'une collection  $E$  d'arêtes qui joignent certains sommets, c'est à dire une arête est de la forme  $(x, y)$  où  $x, y \in V$ . On dit que deux sommets  $x$  et  $y$  sont voisins si  $(x, y)$  est une arête. Un chemin dans  $G$  est une suite finie de sommets  $x_0, \dots, x_n$  telle que pour tout  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $x_i$  et  $x_{i+1}$  sont voisins. On dit que  $G$  est connexe si tout couple de sommets peut être joint par un chemin.

**Exemple 2.119.** Soit  $G$  le graphe dont les sommets sont les éléments de  $\mathbb{Z}^2$ . Pour construire les arêtes de  $G$ , on joint le sommet  $(i, j)$  à  $(i, j + 1)$ ,  $(i, j - 1)$ ,  $(i + 1, j)$  et  $(i - 1, j)$ . Le graphe obtenu est alors connexe.

*Démonstration.* On suit essentiellement la preuve du Théorème 1.8 de [35]. On peut sans perte de généralité supposer que  $\text{diam}E = 1$ . Pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ , on considère un ensemble  $A_\delta$  de points de  $E$  tel que

(P1) Pour tous les  $x, y \in A_\delta$  avec  $x \neq y$ ,  $|x - y| \geq 2\delta$ .

(P2) Pour tout  $x \in E$ , il existe  $y \in A_\delta$  tel que  $|x - y| < 2\delta$ .

Il est clair que  $A_\delta$  est fini pour tout  $\delta \in ]0, 1[$  (puisque  $E$  est compact). On associe maintenant à cet ensemble un graphe  $E_\delta$  de la façon suivante. Les sommets de  $E_\delta$  sont les points de  $A_\delta$  et deux sommets  $x$  et  $y$  sont reliés par une arête si  $|x - y| \leq 4\delta$ . Le graphe  $E_\delta$  peut être vu comme un sous-ensemble  $\Delta_\delta$  de  $\mathbb{R}^n$ . En effet, l'ensemble  $\Delta_\delta$  est obtenu en joignant, pour toute arête  $(x, y)$  de  $E_\delta$ , les sommets correspondants de  $A_\delta$  par le segment euclidien  $[x, y]$ . Le graphe  $E_\delta$  a évidemment un nombre fini d'arêtes. Afin d'appliquer le lemme 2.118, on doit vérifier que le graphe  $E_\delta$  est aussi connexe. Pour cela, on raisonne par l'absurde et on suppose que  $E_\delta = Y \cup Z$  où  $Y$  et  $Z$  sont disjoints, non vides et ainsi satisfont  $|y - z| > 4\delta$  pour tout  $y \in Y$  et tout  $z \in Z$  (on voit ici  $Y$  et  $Z$  comme des sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$ ). Posons  $A_1 = E \cap (\cup_{y \in Y} B_f(y, 2\delta))$  et  $A_2 = E \cap (\cup_{z \in Z} B_f(z, 2\delta))$ . Alors,  $A_1$  et  $A_2$  sont non vides, fermés et disjoints. De plus,  $E = A_1 \cup A_2$  par (P2). Ceci contredit le fait que  $E$  est connexe. D'où, pour tout  $\delta \in ]0, 1[$ ,  $E_\delta$  est connexe. De plus, nous avons que  $\mathcal{H}^1(\Delta_\delta) \leq C\mathcal{H}^1(E)$ . En effet, si on note  $N_\delta$  le nombre de points de  $A_\delta$ , on a

1) D'après (P1), le nombre de voisins dans  $E_\delta$  d'un point de  $A_\delta$  est borné uniformément en  $\delta$  (car l'espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est doublant). Donc,  $\mathcal{H}^1(\Delta_\delta) \leq C\delta N_\delta$  (où  $C > 0$  de dépend pas de  $\delta$ ).

2) Comme  $E$  est connexe,  $\mathcal{H}^1(E \cap B(x, \delta)) \geq \delta/2$  (au moins pour  $\delta$  assez petit). L'argument est similaire à celui utilisé dans la preuve du lemme 2.26. Pour cela, fixons  $x \in E$  et  $\delta < (\text{diam}E)/2$ . Soit  $\phi(y) = |x - y|$  pour  $y \in E$ . Il est clair que  $\phi$  est 1-lipschitzienne. Il s'en suit que

$$\mathcal{H}^1(\phi(E \cap B(x, \delta))) \leq \mathcal{H}^1(E \cap B(x, \delta)).$$

Puisque  $\phi(E \cap B(x, \delta))$  est un intervalle, on a aussi

$$\mathcal{H}^1(\phi(E \cap B(x, \delta))) = \sup_{y, z \in E \cap B(x, \delta)} ||x - y| - |x - z|| \geq \sup_{y \in E \cap B(x, \delta)} |x - y|.$$

Comme  $E$  est connexe, par continuité de la distance,  $\sup_{y \in E \cap B(x, \delta)} |x - y| \geq \delta/2$  puis

$$\mathcal{H}^1(E \cap B(x, \delta)) \geq \mathcal{H}^1(\phi(E \cap B(x, \delta))) \geq \delta/2.$$

De plus, les ensembles  $E \cap B(x, \delta)$ ,  $x \in A_\delta$ , sont disjoints. Donc,  $\mathcal{H}^1(E) \geq N_\delta \frac{\delta}{2}$ .

Il découle des points 1) et 2) que  $\mathcal{H}^1(\Delta_\delta) \leq C\mathcal{H}^1(E)$ , ce qui était l'inégalité cherchée.

On applique alors le lemme 2.118 à  $\Delta_\delta$  pour construire naturellement une application lipschitzienne (et donc une courbe lipschitzienne)  $\gamma_\delta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  de sorte que  $\gamma_\delta([0, 1]) = \Delta_\delta$  et  $\|\dot{\gamma}_\delta\|_\infty \leq C\mathcal{H}^1(E)$ . Rappelons que  $|\dot{\gamma}_\delta|$  est la dérivée métrique de  $\gamma_\delta$  avec laquelle on peut calculer la longueur de  $\gamma$  (voir le théorème 2.16). Or, par le théorème d'Arzelà-Ascoli, on peut trouver une suite  $\delta_j$  qui converge vers 0 et telle que  $(\gamma_{\delta_j})$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ . La fonction limite  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lipschitzienne de norme  $\leq C\mathcal{H}^1(E)$  et telle que  $\tilde{\gamma}([0, 1]) = E$ .  $\square$

On peut aussi parler de rectifiabilité pour les mesures de  $\mathbb{R}^n$ . On dit ainsi qu'une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  est  $s$ -rectifiable si  $\mu$  est absolument continue par rapport à  $\mathcal{H}^s$  et s'il existe un borélien  $s$ -rectifiable  $E \subset \mathbb{R}^n$  telle que  $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$ . Ainsi, un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est  $s$ -rectifiable si la restriction de la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  à  $E$  est une mesure  $s$ -rectifiable. Nous allons tout de suite donner une caractérisation des mesures rectifiables en termes de mesures tangentes et commençons par définir celles-ci. Pour cela, posons  $T_{x,r}(y) = (y - x)/r$ . Alors, la mesure image  $\mu_{x,r}$  d'une mesure  $\mu$  par  $T_{x,r}$  est tout simplement donnée par  $\mu_{x,r}(A) = \mu(rA + x)$  pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.120.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . Une mesure de Radon non nulle  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^n$  est une mesure tangente de la mesure  $\mu$  en un point  $x \in \mathbb{R}^n$  s'il existe des suites  $(r_i)$  et  $(c_i)$  de nombres positifs telles que la suite  $(r_i)$  tend vers 0 en décroissant et  $(c_i(\mu_{x,r_i}))$  tend vers  $\nu$  au sens de la convergence faible de mesure.

Rappelons que la conclusion veut dire que pour tout  $\phi \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\lim_{i \rightarrow +\infty} c_i \int \phi((y - x)/r_i) d\mu(y) = \int \phi(y) d\nu(y).$$

Il faut voir  $c_i$  comme une constante de normalisation qui vaut souvent  $1/\mu(B(x, r_i))$ . On notera  $\text{Tan}(\mu, x)$  l'ensemble des mesures tangentes de  $\mu$  en  $x$ . Un point essentiel est que les mesures tangentes d'une mesure tangente restent des mesures tangentes, ce qui se formalise par

**Théorème 2.121.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . Alors pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , si  $\nu \in \text{Tan}(\mu, x)$ ,  $\text{Tan}(\nu, y) \subset \text{Tan}(\mu, x)$  pour tout  $y \in \text{Supp}(\nu)$ .

On peut aussi considérer une sous-famille de mesures tangentes en fixant la normalisation. Soit  $s \geq 0$ . On note  $\text{Tan}_s(\mu, x)$  l'ensemble des mesures  $\nu$  pour lesquelles il existe une suite  $(r_i)$  qui tend vers 0 en décroissant et tel que  $\left(\frac{\mu_{x,r_i}}{r_i^s}\right)$  tend vers  $\nu$  au sens de la convergence faible de mesure. Il est suffisant pour certaines applications (comme la démonstration du théorème de Marstrand, voir plus loin) de considérer seulement ce sous-ensemble de  $\text{Tan}(\mu, x)$  qui est plus facile à comprendre. Pour voir ce dernier point, revenons à nos exemples préférés. Soit  $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application lipschitzienne et soit  $\Gamma = \{(x, A(x)); x \in \mathbb{R}\}$  son graphe. D'après le théorème de Rademacher (théorème 2.53),  $A$  est différentiable en presque tout  $x \in \mathbb{R}$ . Plaçons nous en un point  $z = (x, A(x)) \in \Gamma$  pour lequel il existe une tangente. On note  $L_z$  la droite passant par 0 et parallèle à cette tangente. Dans ce cas, on considère  $s = 1$  et on voit que  $r^{-1}(\mu_{z,r})$  est la restriction de  $\mathcal{H}^1$  à l'ensemble  $\{z' \in \mathbb{C}; rz' + z \in \Gamma\}$ . Donc, quand  $r$  tend vers 0, on obtient que la limite de  $r^{-1}(\mu_{z,r})$  est la restriction de  $\mathcal{H}^1$  à  $L_z$ . Ceci se généralise en dimensions supérieures (voir le chapitre 3 de [39]). Ainsi, appliquer  $T_{z,r}$  puis faire tendre  $r$  vers 0 revient à zoomer autour de  $z$ .

**Remarque 2.122.** On peut donner une version plus générale de ce type de résultats dans le cas des courbes rectifiables  $\Gamma$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ . En presque tout  $z \in \Gamma$ , il existe une tangente. Nous notons comme au dessus  $L_z$  une droite passant par 0 et parallèle à la tangente en  $z$  à  $\Gamma$ . Alors, si  $\mu$  est la restriction de  $\mathcal{H}^1$  à  $\mu$ ,  $\text{Tan}(\mu, z) = \{c\mathcal{H}^1 \llcorner L_z; c \in \mathbb{R}^+\}$  où  $z$  est un point en lequel  $\Gamma$  admet une tangente.

Supposons maintenant que  $\mu$  soit la restriction de la 1-mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^1$  à l'ensemble de Cantor 4-coins  $C$ . Si on zoome autour de  $z \in C$ , on voit toujours l'ensemble de Cantor 4 coins (ou une partie de celui-ci). Donc, il n'y a aucune chance que les mesures tangentes de  $\mu$  ressemblent à la restriction de la mesure de Hausdorff le long d'une droite comme dans le cas d'un graphe lipschitzien ou d'une courbe rectifiable. Cette intuition sera confirmée par les théorèmes 2.123 et 2.125. Avant de les énoncer, nous avons besoin de quelques rappels sur les variétés grassmanniennes de  $s$ -plans vectoriels

dans  $\mathbb{R}^n$  (qui nous seront aussi utiles dans le prochain paragraphe). Si  $n \in \mathbb{N}$  et  $0 < s < n$ , on note  $G(n, s)$  l'ensemble des espaces vectoriels de dimension  $s$  dans  $\mathbb{R}^n$ . On peut identifier tout élément  $P \in G(n, s)$  avec la projection orthogonale associée  $\Pi_P : \mathbb{R}^n \rightarrow P$  et donc munir  $G(n, s)$  de la distance  $d(P, Q) = \|\Pi_P - \Pi_Q\|$  où  $\|\cdot\|$  est juste la norme pour les applications linéaires entre espaces vectoriels. Cette distance est invariante par le groupe orthogonal  $O(n)$ . On peut munir  $G(n, s)$  d'une mesure de probabilité  $\gamma_{n,s}$  de façon naturelle, cette mesure étant elle aussi invariante sous l'action du groupe orthogonal  $O(n)$ . Dans le cas  $n = 2$  et  $s = 1$ , on peut identifier  $G(2, 1)$  avec  $[0, \pi]$  et  $\gamma_{2,1}$  est juste la normalisation de la mesure de Lebesgue sur  $[0, \pi]$ . De façon plus générale, la mesure  $\gamma_{n,n-1}$  est la mesure de surface normalisée de la sphère unité  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ . On peut justifier l'existence de la mesure  $\gamma_{n,s}$  par la théorie des mesures invariantes sur les groupes de Lie (voir le chapitre 1). On dit qu'une mesure  $\nu$  sur  $\mathbb{R}^n$  est  $s$ -plate s'il existe une constante  $c > 0$  et un  $s$ -plan  $P \in G(n, s)$  de  $\mathbb{R}^n$  telle que  $\mu = c\mathcal{H}^s \llcorner P$ . Enfin, on note  $\mathcal{G}(n, s)$  l'ensemble des mesures  $s$ -plates sur  $\mathbb{R}^n$  puis  $\mathcal{G}(n, s)(P) = \{\mu \in \mathcal{G}(n, s); \text{Supp}\mu = P\}$ .

**Théorème 2.123.** Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$0 < \Theta_*^s(\mu, x) \leq \Theta^{*s}(\mu, x) < \infty. \quad (2.124)$$

Alors, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) La mesure  $\mu$  est  $s$ -rectifiable.
- (ii) Pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Tan}(\mu, x) = \mathcal{G}_{n,s}(P)$  pour un plan  $P \in G(n, s)$ .
- (iii) Pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\text{Tan}(\mu, x) \subset \mathcal{G}_{n,s}$ .

Notons que par le théorème 6.9 de [98], la condition (2.124) implique que  $\mu$  et  $\mathcal{H}^s$  sont absolument continues sur l'ensemble sur lequel on a (2.124). On en déduit alors le

**Théorème 2.125.** Soit  $E$  un sous-ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable de  $\mathbb{R}^n$  telle que pour  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\Theta_*^s(E, x) > 0$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes

- (i) L'ensemble  $E$  est  $s$ -rectifiable.
- (ii) Pour  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\text{Tan}(\mathcal{H}^s \llcorner E, x) = \mathcal{G}_{n,s}(P)$  pour un plan  $P \in G(n, s)$ .
- (iii) Pour  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\text{Tan}(\mathcal{H}^s \llcorner E, x) \subset \mathcal{G}_{n,s}$ .

La notion de mesures tangentes a été introduite par David Preiss dans [118]. Voir aussi [39] ou [98] pour une introduction plus accessible et des démonstrations des théorèmes 2.123 et 2.125. Pour des exemples de mesures tangentes, voir l'exercice 2.213. On termine cette section en expliquant comment utiliser les mesures tangentes pour démontrer le théorème de Marstrand (théorème 2.46).

**Définition 2.126.** Soit  $s > 0$ . Une mesure  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  est  $s$ -uniforme si pour tout  $x$  dans le support de  $\mu$  et tout  $r > 0$ ,  $\mu(B(x, r)) = \alpha(s)r^s$ . On note  $\mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n)$  l'ensemble des mesures  $s$ -uniformes sur  $\mathbb{R}^n$ .

La normalisation fait que la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  est  $n$ -uniforme sur  $\mathbb{R}^n$ . De manière générale, si  $s \in \mathbb{N}$ , la restriction de  $\mathcal{H}^s$  à un plan affine de dimension  $s$  est  $s$ -uniforme. Il existe des exemples plus bizarres de mesures uniformes avec  $s \in \mathbb{N}^*$  (voir le chapitre 6 de [39]). Mais, existe-t-il des mesures  $s$ -uniformes avec  $s$  non entier ? La réponse est non comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 2.127.** Soit  $s$  tel que  $\mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$ . Alors,  $s$  est un entier naturel avec  $s \leq n$ .



Donnons une idée de la démonstration (voir [39] pour les détails). On commence par montrer par le théorème de différentiation de Lebesgue que si  $s > n$ ,  $\mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n) = \emptyset$ . L'étape délicate est de vérifier que si  $s < n$ ,  $\mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset \implies \mathcal{U}_s(\mathbb{R}^{n-1}) \neq \emptyset$ . On peut alors conclure par l'absurde. On peut déduire le théorème de Marstrand via le résultat suivant et la proposition précédente.

**Proposition 2.128.** Soit  $s > 0$  et soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$  telle que la densité  $\Theta^s(x, \mu)$  existe et vérifie  $0 < \Theta^s(x, \mu) < \infty$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors, pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\emptyset \neq \text{Tan}_s(x, \mu) = \{\Theta^s(\mu, x)\nu, \nu \in \mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Des éléments de preuve des deux propositions précédentes sont discutés dans l'exercice 2.214.

## 5.2 Diverses caractérisations classiques des ensembles rectifiables

Il est possible de caractériser la rectifiabilité par la taille des projections d'un ensemble. On commence par discuter du cas de nos deux exemples préférés. Soit  $\Gamma$  un graphe lipschitzien ou une courbe rectifiable dans  $\mathbb{C}$ . Si  $\theta \in [0, \pi]$ , on note  $P_\theta$  la projection orthogonale dans la direction  $\theta$  (dans  $\mathbb{C}$ ). Alors, sauf peut-être pour une direction (penser au cas où  $\Gamma$  est une droite),  $\mathcal{L}^1(P_\theta(\Gamma)) > 0$ . Au contraire, si  $C$  est le Cantor 4-coins,  $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) = 0$  pour presque tout  $\theta$ . Reformulons ces remarques en terme de longueur de Favard. Si  $E \subset \mathbb{C}$ , on définit la longueur de Favard de  $E$  par  $Fav(E) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |P_\theta(E)| d\theta$  où  $|P_\theta(E)| = \mathcal{L}^1(P_\theta(E))$  est la mesure de Lebesgue de  $P_\theta(E)$ . Alors, si  $E$  est une courbe rectifiable dans  $\mathbb{C}$ ,  $Fav(E) > 0$  et si  $E$  est l'ensemble de Cantor 4-coins,  $Fav(E) = 0$ . Nous allons maintenant démontrer ce dernier point.

**Théorème 2.129.** Pour presque tout  $\theta$ ,  $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) = 0$  (ou encore  $Fav(C) = 0$ ).

**Remarque 2.130.** Il est possible de démontrer qu'il existe un nombre dénombrable de directions  $\theta$  pour lesquelles  $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) > 0$ . En fait, l'ensemble des directions  $\theta$  telles que  $\mathcal{L}^1(P_\theta(C)) = 0$  est dénombrable (infini) et dense dans  $[0, \pi]$ . Voir [99].

*Démonstration.* Soit  $C$  l'ensemble de Cantor 4-coins. On a alors  $C = \bigcup_{j=1}^4 \left(\frac{1}{4}C + e_j\right)$  où  $e_1 = (0, 0)$ ,  $e_2 = (3/4, 0)$ ,  $e_3 = (0, 3/4)$ , et  $e_4 = (3/4, 3/4)$ . On peut aussi écrire  $C = \bigcup_{i=1}^4 C_i$  où pour tout  $i = 1, 2, 3, 4$ ,  $C_i = \frac{1}{4}C + e_i$ . On suit une preuve due à Peres-Solomyak (Voir [117]). On commence par noter que

$$P_\theta(C) = \cup_{i=1}^4 \left(\frac{1}{4}P_\theta(C) + P_\theta(e_i)\right) \subset \mathbb{R}.$$

On est donc amené à étudier des ensembles auto-similaires compacts  $K$  sur la droite réelle tels qu'il existe  $m \geq 2$  et des  $d_1, \dots, d_m$  (avec  $d_i \neq d_j$  si  $i \neq j$ ) de sorte que  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$  où pour tout  $i = 1, \dots, m$ ,  $K_i = \frac{1}{m}K + d_i$ . On utilise dans la suite ces notations.

**Lemme 2.131.** (i) Si  $i \neq j$ ,  $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$ .

(ii) Il existe  $i \neq j$  tels que  $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ .

*Démonstration.* L'idée intuitive pour démontrer (i) est la suivante. Les  $K_i$  sont obtenus par translation et dilatation de rapport  $1/m$  à partir de  $K$ . Donc,  $\mathcal{L}^1(K_i) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^1(K)$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ . Comme  $K = \bigcup_{i=1}^m K_i$ , il faut que si  $i \neq j$ ,  $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$ . Pour rendre la preuve plus rigoureuse, on note que si on fixe  $1 \leq i < j \leq m$ , on a

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1(K) &= \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^m K_k\right) \\ &\leq \mathcal{L}^1(K_i \cup K_j) + \sum_{k \neq i, j} \mathcal{L}^1(K_k) \\ &= \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^1(K_k) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j).\end{aligned}$$

Or, comme  $\mathcal{L}^1(K_i) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^1(K)$  pour tout  $i = 1, \dots, m$ , il vient  $\mathcal{L}^1(K) \leq \mathcal{L}^1(K) - \mathcal{L}^1(K_i \cap K_j)$ , ce qui n'est possible que si  $\mathcal{L}^1(K_i \cap K_j) = 0$ .

Pour (ii), on raisonne évidemment par l'absurde et on va utiliser la point (i). Supposons que pour tout  $i \neq j$ ,  $K_i \cap K_j = \emptyset$ . Comme les  $K_i$  sont compacts, il existe  $\varepsilon_0 > 0$  tel que pour tout  $i \neq j$ ,  $d(K_i, K_j) > \varepsilon_0$ . Si  $F \subset \mathbb{R}$  et si  $\varepsilon > 0$ , on définit le  $\varepsilon$ -voisinage  $V_\varepsilon(F)$  de  $F$  par

$$V_\varepsilon(F) = \{x \in \mathbb{R}; d(x, F) < \varepsilon\}.$$

Par choix de  $\varepsilon_0$ , on a que  $V_{\varepsilon_0}(K_i) \cap V_{\varepsilon_0}(K_j) = \emptyset$  si  $i \neq j$ . Il s'en suit que

$$\mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K)) = \mathcal{L}^1\left(\bigcup_{k=1}^m V_{\varepsilon_0}(K_k)\right) = \sum_{k=1}^m \mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K_k)).$$

Or, on a clairement que

$$\mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K_k)) = \mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(m^{-1}K)) = \frac{1}{m}\mathcal{L}^1(V_{m\varepsilon_0}(K)).$$

Les deux égalités précédentes donnent  $\mathcal{L}^1(V_{\varepsilon_0}(K)) = \mathcal{L}^1(V_{m\varepsilon_0}(K))$ . Ceci est impossible puisque  $V_{\varepsilon_0}(K)$  est un ouvert strictement inclus dans l'ouvert  $V_{m\varepsilon_0}(K)$ .  $\square$

Avant d'énoncer le prochain lemme, nous avons besoin de quelques définitions et notations. On pose  $I = \{1, \dots, m\}$  puis pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $I_k = \{p = (i_1, \dots, i_k); \forall j \in \{1, \dots, k\}, i_j \in I\}$ . On peut alors écrire pour des  $d_p \in \mathbb{R}$  bien choisis que pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $K = \bigcup_{p \in I_k} K_p$  où  $K_p = \frac{1}{m^k}K + d_p$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . On dit que  $K_p$  et  $K_q$  sont proches à  $\varepsilon$  près si

(i)  $p, q \in I_k$  pour un certain  $k$  et  $p \neq q$ .

(ii)  $K_q = K_p + x$  pour un  $x \in \mathbb{R}$  avec  $|x| \leq \varepsilon \text{diam}(K)$ .

Notons que si  $p, q \in I_k$ ,  $K_p$  peut toujours être obtenu à partir de  $K_q$  par translation. La dernière condition demande que cette translation soit petite. Notons aussi que, d'après le lemme 2.131, si  $p, q \in I_k$  avec  $p \neq q$ , on a  $\mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) = 0$ .

**Lemme 2.132.** Supposons que pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $k$  et  $p, q \in I_k$  avec  $p \neq q$  tels que  $K_p$  et  $K_q$  sont proches à  $\varepsilon$ , alors  $\mathcal{L}^1(K) = 0$ .

*Démonstration.* Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\mathcal{L}^1(K) > 0$ . Alors, d'après l'exercice 2.216, il existe un intervalle  $J \subset \mathbb{R}$  de sorte que (par exemple)  $\mathcal{L}^1(J \cap K) \geq 0,9\mathcal{L}^1(K)$ . On choisit  $\varepsilon = \frac{\mathcal{L}^1(J)}{2\text{diam}(K)}$ . Par hypothèse, il existe  $k \in \mathbb{N}$  et des  $p, q \in I_k$  (avec  $p \neq q$ ) tels que  $K_p$  et  $K_q$  sont proches à  $\varepsilon$  près. Si on pose  $J_p = d_p + \frac{1}{m^k}J$  et  $J_q = d_q + \frac{1}{m^k}J$ , alors  $J_p = J_q + (d_p - d_q)$  et  $|d_p - d_q| \leq \varepsilon m^{-k} \text{diam}(K) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^1(J_p)$ . On a de plus que par les propriétés de  $\mathcal{L}^1$   $\mathcal{L}^1(J_p \cap K_p) \geq 0,9\mathcal{L}^1(J_p)$  et  $\mathcal{L}^1(J_q \cap K_q) \geq 0,9\mathcal{L}^1(J_q)$ . Comme 90 pour 100 de  $J_q$  est dans  $K_q$  et que 50 pour cent de  $J_q$  est dans  $J_p$ , on a que au moins 40 pour cent de  $J_p$  est dans  $K_q$ . Mais, comme 90 pour 100 de  $J_p$  est dans  $K_p$  il y a au moins 30 pour 100 de  $J_p$  dans  $K_p \cap K_q$ . Or,  $\mathcal{L}^1(K_p \cap K_q) = 0$  et nous avons une contradiction.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème. On pose  $C^\theta = P_\theta(C) \subset \mathbb{R}$  et on utilise les notations  $C_i^\theta$  et  $C_p^\theta$  de la même façon que pour l'ensemble  $K$  des lemmes précédents. On fixe  $\varepsilon > 0$  et on pose

$$V_\varepsilon = \{\theta \in [0, \pi[; \exists k, p, q \text{ avec } p \neq q \in I_k, C_p^\theta \text{ et } C_q^\theta \text{ sont proches à } \varepsilon\text{-près}\}.$$

D'après le lemme 2.132, il suffit de montrer que pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\mathcal{L}^1[0, \pi[ \setminus V_\varepsilon] = 0$ . En effet, on a alors

$$\mathcal{L}^1([0, \pi[ \setminus \bigcap_{\varepsilon > 0} V_\varepsilon) = \mathcal{L}^1([0, \pi[ \setminus \bigcap_{j \in \mathbb{N}^*} V_{1/j}) = 0.$$

Pour démontrer que  $\mathcal{L}^1([0, \pi[ \setminus V_\varepsilon) = 0$ , l'idée est de démontrer que pour tout intervalle de  $[0, \pi[$ , il existe un pourcentage fixe de sa longueur (dépendant de  $\varepsilon$  mais pas de la longueur de l'intervalle) qui est contenu dans  $V_\varepsilon$ . On peut alors conclure d'après l'exercice 2.216.

Considérons  $\varepsilon > 0$  et  $\theta \in [0, \pi[$ . Par le lemme 2.131, il existe  $i \neq j$  tels que  $C_i^\theta \cap C_j^\theta \neq \emptyset$ , c'est à dire il existe  $x \in C_i$  et  $y \in C_j$  avec  $P_\theta(x) = P_\theta(y)$ . Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Alors, il existe  $p \in I_k$  et  $q \in I_k$  avec  $P_\theta(x) \in C_p^\theta$  et  $P_\theta(y) \in C_q^\theta$ . Considérons maintenant  $\theta_0 \in [0, \pi[$  proche de  $\theta$  tel que  $P_{\theta_0}(C_p) = P_{\theta_0}(C_q)$ . Un tel  $\theta_0$  existe toujours par des arguments classiques de géométrie du plan. Alors,  $C_p^{\theta_0} = C_q^{\theta_0}$ . De nouveau, par des arguments de géométrie élémentaire, il vient que si  $C > 0$  est une constante assez petite alors pour des angles  $\phi$  avec  $|\phi - \theta_0| \leq C\varepsilon 4^{-k}$ ,  $C_p^\phi$  et  $C_q^\phi$  sont  $\varepsilon$ -proches. D'où, il existe une constante  $C' > 0$  telle que  $[\theta - C'4^{-k}, \theta + C'4^{-k}] \cap V_\varepsilon$  contient un intervalle de longueur  $C\varepsilon 4^{-k}$ . Comme  $k$  est quelconque, on obtient que  $\mathcal{L}^1([0, \pi[ \cap V_\varepsilon) = 0$  d'après la remarque initiale et la preuve est complète.  $\square$

**Remarque 2.133.** Signalons un problème ouvert. Soit  $C_n$  la  $n$ -ième génération de l'ensemble de Cantor 4 coins, c'est à dire  $C_n$  est formé de  $4^n$  carrés de longueur de côté  $4^{-n}$  qui sont contenus dans les coins des  $4^{n-1}$  carrés de  $C_{n-1}$  et  $C_0 = [0, 1]^2$ . Comme  $C = \bigcap_n C_n$  et que  $Fav(C) = 0$ , on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} Fav(C_n) = 0$ . La question est

Existe-t-il des constantes  $c, C > 0$  telles que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $c/n \leq Fav(E_n) \leq C/n$ ?

Seule l'estimation de gauche est connue. L'autre estimation est largement ouverte. Voir [100] (chapitre 10) ou [99] pour une discussion plus détaillée de ce problème.

Revenons à la caractérisation de la rectifiabilité par la taille des projections. Le théorème suivant permet de conclure que l'ensemble de Cantor 4-coins est purement non rectifiable d'après le théorème 2.129.

**Théorème 2.134.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ .

- (i)  $E$  est  $s$ -rectifiable si et seulement si pour tout sous-ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable  $F$  de  $E$ ,  $\mathcal{H}^s(\Pi_P(F)) > 0$  pour  $\gamma(n, s)$ -presque tout plan  $P \in G(n, s)$ .
- (ii)  $E$  est purement non  $s$ -rectifiable si et seulement si  $\mathcal{H}^s(\Pi_P(E)) = 0$  pour  $\gamma(n, s)$ -presque tout plan  $P \in G(n, s)$ .

**Remarque 2.135.** Il est important dans (i) de ne pas remplacer la condition de droite par la condition (plus faible)  $\mathcal{H}^s(\Pi_P(E)) > 0$  pour  $\gamma(n, s)$ -presque tout plan  $P \in G(n, s)$ . En effet, considérons  $E = E_0 \cup E_1$  où  $E_0$  est un ensemble  $s$ -rectifiable avec  $\mathcal{H}^s(E_0) > 0$  et  $E_1$  est un ensemble purement non  $s$ -rectifiable avec  $\mathcal{H}^s(E_1) > 0$ . Alors,  $E$  n'est pas  $s$ -rectifiable et pourtant  $\mathcal{H}^s(\Pi_P(E)) \geq \mathcal{H}^s(\Pi_P(E_0)) > 0$  pour  $\gamma(n, s)$ -presque tout plan  $P \in G(n, s)$ .

**Remarque 2.136.** Si  $F$  est un borélien,  $\Pi_P(F)$  n'est pas en général un borélien mais un ensemble de Suslin (donc est  $\mathcal{H}^s$ -mesurable). En effet, si  $(X, d)$  est un espace métrique, un ensemble de Suslin  $Y$  de  $X$  est un ensemble de la forme

$$Y = \bigcup_{i_1, i_2, \dots} \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{i_1, \dots, i_k}$$

où les  $F_{i_1, \dots, i_k}$  sont des fermés de  $X$ . Un borélien est un ensemble de Suslin. Si de plus,  $(X, d)$  est complet, alors l'image continue d'un ensemble de Suslin est un ensemble de Suslin. Voir la section 1.1 de [46]. Dans de nombreux énoncés de théorie géométrique de la mesure, on peut remplacer l'hypothèse "borélien" par "ensemble de Suslin". Voir par exemple le chapitre 6 de [46].

D'après le théorème de Rademacher, un graphe lipschitzien admet un plan tangent en presque tout point (voir exercice 2.215). D'un autre côté, si on se place en un point  $z$  de l'ensemble de Cantor 4-coins, il n'est pas clair de voir, quand on zoome autour de  $z$ , si une direction privilégiée va apparaître. Il est possible de caractériser la rectifiabilité par l'existence de tangentes en un sens faible. Commençons par quelques définitions.

**Définition 2.137.** Si  $P \in G(n, s)$ , on note  $C(x, P, \delta)$  le cône  $C(x, P, \delta) = \{y \in \mathbb{R}^n, d(y - x, P) < \delta|y - x|\}$  pour  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\delta > 0$ . Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$ . On dit que  $P \in G(n, s)$  est un  $s$ -plan tangent approximatif à  $E$  en  $x \in \mathbb{R}^n$  si  $\Theta^{*s}(x, E) > 0$  et si pour tout  $0 < \delta < 1$ , on a  $\lim_{r \rightarrow 0} r^{-s} \mathcal{H}^s(E \cap B(x, r) \setminus C(x, P, \delta)) = 0$ .

**Remarque 2.138.** Si  $s = 1$ , le plan tangent approximatif, s'il existe, est toujours unique. Si  $s > 1$ , ce n'est plus le cas en général. Cependant, si  $E$  est  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ , on obtient l'unicité sous la condition d'existence. Voir le chapitre 15 de [98].

On a alors

**Théorème 2.139.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ .

- (i)  $E$  est  $s$ -rectifiable si et seulement si pour tout  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ , il existe un (et donc un seul)  $s$ -plan tangent approximatif en  $x$  à  $E$ .
- (ii)  $E$  est purement non  $s$ -rectifiable si et seulement si pour tout  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ , il n'existe pas de  $s$ -plan tangent approximatif en  $x$  à  $E$ .

Nous avons vu des résultats de densité pour la mesure de Hausdorff restreinte à un ensemble  $E$  qui ne donnent que des encadrements de la densité supérieure (voir le théorème 2.43). Cependant, dans le cas où l'ensemble est un  $s$ -plan  $P$ ,  $\Theta^1(x, P)$  existe et vaut 1 pour  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in P$ . Ceci découle de la remarque 1.177 appliquée à  $\mu = \mathcal{L}^s$  qui être identifiée à  $\mathcal{H}^s \llcorner P$ . Si un ensemble est rectifiable, il ressemble localement à un plan et on peut espérer obtenir des estimations de densité du même type. On a ainsi la

**Proposition 2.140.** Soit  $\Gamma$  une courbe rectifiable dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $x \in \Gamma$ , la densité  $\Theta^1(x, \Gamma)$  existe et vaut 1

*Démonstration.* Soit  $x$  un point de  $\Gamma$  qui n'est pas une extrémité de  $\Gamma$ . Alors,  $x$  divise  $\Gamma$  en deux courbes  $\Gamma_-$  et  $\Gamma_+$ . Si  $R > 0$  est assez petit, on a par connexité (voir la preuve du théorème 2.117) que  $\mathcal{H}^1(\Gamma_+ \cap B(x, R)) \geq R$  et  $\mathcal{H}^1(\Gamma_- \cap B(x, R)) \geq R$ . D'où,  $\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(x, R)) \geq 2R$ . Il s'en suit que  $\Theta_*^1(x, \Gamma) \geq 1$ . Or par le théorème 2.43 pour  $\mathcal{H}^1$ -presque  $x \in \Gamma$ ,  $\Theta^{*1}(x, \Gamma) \leq 1$ . On peut alors conclure.  $\square$

On peut en fait caractériser la rectifiabilité par la densité.

**Théorème 2.141.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ .

- (i)  $E$  est  $s$ -rectifiable si et seulement pour tout  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ , la densité  $\Theta^s(x, E)$  existe et vaut 1.
- (ii)  $E$  est purement non  $s$ -rectifiable si et seulement pour tout  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ ,  $\Theta_*^s(x, E) < 1$ .

**Remarque 2.142.** Un théorème plus fort de Preiss [118] affirme que seule l'existence de la densité presque partout est équivalente à la rectifiabilité. La preuve repose sur la notion de mesure tangente. Dans le cas du plan complexe, Besicovitch a démontré que la condition  $\Theta_*^1(x, E) \geq 3/4$  pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $x \in E$  implique la 1-rectifiabilité de  $E$ . Il conjecture que ceci reste vrai avec la condition  $\Theta_*^1(x, E) > 1/2$ . Cette condition serait optimale. En effet, Besicovitch a montré qu'il existe un ensemble purement non rectifiable  $E \subset \mathbb{C}$  avec  $\Theta_*^1(x, E) = 1/2$  pour  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $x \in E$ .

Pour une preuve des théorèmes de ce chapitre, nous renvoyons à [98]. La majeure partie du livre leur est consacrée.

### 5.3 Quelques applications de la théorie de la rectifiabilité

Cette partie se veut une initiation et une invitation à la théorie géométrique de la mesure et au calcul des variations.

#### Ensembles de périmètre fini (ou ensembles de Caccioppoli)

Supposons que l'on souhaite minimiser une fonctionnelle  $F$  de la forme  $F(\Omega) = A(\partial\Omega) + I(\Omega)$  parmi tous les domaines  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  où  $A(\partial\Omega)$  est l'aire du bord de  $\Omega$  (en un sens à préciser) et  $I(\Omega)$  est de la forme  $I(\Omega) = \int_{\Omega} f(x)dx$  ( $f$  est une fonction positive donnée). On pourrait aussi "normaliser" la fonctionnelle en fixant le volume des  $\Omega$  admissibles. La méthode directe en calcul des variations consiste à utiliser des arguments de compacité et de semi-continuité inférieure. Si on note  $m$  le minimum de  $F$ , l'idée est de considérer une suite de domaines  $\Omega_j$  tels que  $F(\Omega_j) \leq m + 1/j$ , puis par un argument de compacité de montrer que la suite  $(\Omega_j)$  converge vers un domaine  $\Omega$ . Enfin, pour obtenir que  $F(\Omega) = m$ , il nous faut la semi-continuité inférieure de notre notion d'aire, c'est à dire  $\liminf_{j \rightarrow +\infty} A(\Omega_j) \geq A(\Omega)$ . Un point crucial est que les mesures de Hausdorff ne sont pas semi-continues inférieurement (penser par exemple à des approximations discrètes d'un intervalle). Pour mettre en place la méthode directe, les points à régler sont les suivants.

- Déterminer une classe de sous-ensembles  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{R}^n$  que l'on puisse munir d'une topologie de sorte que l'on ait de bonnes propriétés de compacité et que les ensembles à bord lisse soient dans  $\mathcal{F}$  et denses dans  $\mathcal{F}$ .
- Définir une notion d'aire  $P(E)$  pour le bord  $\partial E$  de  $E \in \mathcal{F}$  (une notion de périmètre en d'autres termes) de sorte que

(i) L'application  $E \rightarrow P(E)$  soit semi-continue inférieurement sur  $\mathcal{F}$  ;

(ii) Si  $E \in \mathcal{F}$  est à bord lisse, alors  $P(E) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$  ;

(iii) Pour tout  $E \in \mathcal{F}$ , il existe une suite  $(E_j)$  dans  $\mathcal{F}$  à bord lisse de sorte que  $\lim_{j \rightarrow +\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\partial E_j) = P(E)$ .

Une solution classique consiste à considérer les ensembles de périmètre fini que nous allons maintenant décrire.

**Définition 2.143.** Un borélien  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\mathcal{H}^n(E) < \infty$  est un ensemble de périmètre fini si les dérivées partielles de sa fonction indicatrice  $\chi_E$  au sens des distributions sont des mesures, c'est à dire pour tout  $i = 1, \dots, n$ , il existe une mesure de Radon  $\mu_i$  de sorte que pour toute fonction  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_E \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \chi_E dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \phi d\mu_i. \quad (2.144)$$

Si on note  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ , alors  $\mu$  définit une fonctionnelle linéaire bornée sur  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  par  $T_\mu(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \psi_i d\mu_i$  où  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ . On dit que  $\mu$  est une mesure multi-valuée.

D'après le théorème de représentation de Riesz,  $\mu$  admet une décomposition polaire  $\mu = \eta|\mu|$  où  $\eta$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^n$  et  $|\mu|$  est une mesure de Radon (au sens usuel). On en déduit que (2.144) est équivalent à la condition suivante pour tout champs de vecteur  $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_n) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_E \operatorname{div} \psi dx = \int_{\mathbb{R}^n} \operatorname{div} \psi \chi_E dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n \psi_i d\mu_i = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \psi, \eta \rangle d|\mu|. \quad (2.145)$$

La mesure multi-valuée  $\mu$  se note  $D\chi_E$  et est la dérivée au sens des distributions de  $\chi_E$ . Si  $E$  est de périmètre fini, on définit son périmètre  $P(E)$  comme la variation totale de  $D\chi_E$ , c'est à dire  $P(E) = |\mu|(\mathbb{R}^n)$ . D'après (2.145), on a aussi que  $P(E) = \sup_{|\psi| \leq 1} \int_E \operatorname{div} \psi dx = \sup_{|\psi| \leq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \psi, \eta \rangle d|\mu|$  où les  $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

Supposons que  $E$  soit un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  à bord  $C^1$ . Alors, si on note  $\eta_E$  la normale unitaire intérieure de  $E$ , la formule de la divergence (Voir [93], theorem 9.3) donne que pour tout champs de vecteur  $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , on a

$$\int_E \operatorname{div} \psi dx = - \int_{\partial E} \langle \psi, \eta_E \rangle d\mathcal{H}^{n-1}.$$

On en déduit donc que  $D\chi_E = \eta_E \chi_{\partial E} \mathcal{H}^{n-1}$  et que  $|\mu| = \chi_{\partial E} \mathcal{H}^{n-1}$ . Il s'en suit que  $P(E) = |\mu|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$ , ce qui était souhaité dans ce cas.

On munit les ensembles de périmètre fini de la norme  $L^1$ , c'est à dire si  $E, E'$  sont des ensembles de périmètre fini,  $d(E, E') = \|\chi_E - \chi_{E'}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ . Notons que si on note  $E \Delta E' = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E)$  (différence symétrique de  $E$  et  $E'$ ), on a  $d(E, E') = \mathcal{L}^n(E \Delta E')$ . Le point-clé est qu'alors muni de cette topologie, les ensembles de périmètre finie vérifie les propriétés requises de compacité, semi-continuité et approximation. Les démonstrations (parfois basées sur des arguments d'analyse fonctionnelle dans les espaces BV) peuvent être trouvées dans [93].

Quel est le lien avec la rectifiabilité ? Avant d'énoncer un théorème de structure pour les ensembles de périmètre fini, commençons par un exemple instructif. Soit  $E$  l'ensemble  $E = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\} \cup \{(x, 0), -1 \leq x \leq 1\}$ . L'ensemble  $E$  est donc un carré avec un segment ajouté. On peut facilement voir que  $P(E) = 4$  mais que  $\mathcal{H}^1(\partial E) = 5$ . Ainsi, la frontière topologique n'est pas la bonne notion dans ce cadre. Le résultat suivant (non trivial) précise fortement cela.

**Théorème 2.146.** Soit  $E$  un ensemble de périmètre fini dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors, il existe un ensemble  $F$  et un champs de vecteurs unitaire  $\eta$  défini sur  $F$  de sorte que

(i)  $\mathcal{H}^{n-1}(F) < \infty$  et  $F$  est  $(n-1)$ -rectifiable ;

(ii) La densité  $\Theta^n(x, E)$  est soit 0 ou 1 pour  $x \notin F$  ;

(iii) La densité  $\Theta^n(x, E)$  vaut  $1/2$  en  $\mathcal{H}^{n-1}$ -presque tout  $x \in F$ .

(iv) Si on pose  $E_{x,r} = \left\{ \frac{1}{r}(y-x), y \in E \right\} = \frac{1}{r}(E-x)$ ,

alors pour  $\mathcal{H}^{n-1}$ -presque tout  $x \in F$ ,  $\chi_{E_{x,r}}$  converge vers  $\chi_{H_{\eta(x)}}$  en norme  $L^1$  où  $H_{\eta(x)} = \{y \in \mathbb{R}^n; \langle y, \eta(x) \rangle \geq 0\}$ .

(v)  $D\chi_E = \eta\chi_F\mathcal{H}^{n-1}$ .

Faisons quelques commentaires. La propriété (ii) dit que tout point en dehors de  $F$  est soit dans  $E$  ou hors de  $E$  au sens de la théorie de la mesure (penser au théorème de différentiation de Lebesgue). Ainsi,  $F$  s'appelle la frontière au sens de la théorie de la mesure ou la frontière essentielle. D'après (iii) et (iv), au voisinage de presque tout  $x$  de  $F$ ,  $E$  ressemble à un demi-plan donné par la direction  $\eta(x)$  qui est donc souvent appelée la normale approchée en  $x$  à  $E$ . Nous avons vu que si  $E$  était à bord  $C^1$ ,  $D\chi_E = \eta\chi_{\partial E}\mathcal{H}^{n-1}$ . La propriété (v) dit que ceci reste vrai pour un ensemble de périmètre fini à condition de remplacer  $\chi_{\partial E}$  par  $\chi_F$  où  $F$  est  $(n-1)$ -rectifiable.

### La fonctionnelle de Mumford-Shah

On s'intéresse à un problème de segmentation d'image où la notion de rectifiabilité joue un rôle. Considérons un rectangle  $\Omega$  dans  $\mathbb{C}$  (l'écran) et une fonction bornée  $g$  dans  $\Omega$  (l'image de départ). La fonction  $g$  représente le niveau de gris et on peut supposer que pour  $x \in \Omega$ ,  $0 \leq g(x) \leq 1$ . Ainsi, on peut imaginer que  $g(x)$  est le niveau de gris au pixel  $x$ ,  $g(x) = 0$  correspondant à un pixel blanc,  $g(x) = 1$  à un pixel noir. A priori,  $g$  est très irrégulière. Le but est de trouver les contours de l'image  $g$ , c'est à dire des objets qui sont représentés. L'idée est que l'ensemble des contours correspond aux points de plus forte discontinuité de  $g$ , c'est à dire où le contraste de l'image est le plus marqué. Nous recherchons donc un ensemble  $K$  (les contours apparaissant dans l'image) et une fonction  $u$  définie sur  $\Omega$  qui va être régulière en dehors de  $K$  (la version lissée de l'image de départ). Pour formaliser ce problème, D. Mumford et J. Shah ont introduit la fonctionnelle suivante

$$J(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} |u - g|^2 dx + \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Le premier terme force  $u$  à être proche de  $g$  en norme  $L^2$ . Les deux autres sont en concurrence. En effet, le second terme pénalise les oscillations de  $u$  et donc pousse  $K$  à recouvrir le plus possible les singularités de  $g$ . Cependant, le troisième terme force la longueur de  $K$  à être petite. Ainsi,  $K$  aura tendance à recouvrir seulement les irrégularités les plus franches de  $g$ , ce qui était le but souhaité. Le jeu consiste maintenant à essayer de minimiser  $J(u, K)$  quand  $K$  est fermé dans  $\Omega$  et  $u$  est dans  $C^1(\Omega \setminus K)$ . Nous dirons par la suite qu'un tel couple  $(u, K)$  est un compétiteur pour  $J$ . Des minimiseurs  $(u, K)$  existent. Ceci est un résultat non trivial utilisant la théorie fine des fonctions SBV (voir [38] et aussi l'introduction de [33]). Le principal problème subsistant est l'étude de la régularité de  $K$ . En fait, un minimiseur  $K$  est Ahlfors-régulier (de dimension 1). Montrons la partie facile (mais instructive), à savoir la régularité inférieure :

$$\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq 3\pi r$$

si  $x \in K$ ,  $r \in ]0, 1[$ . L'idée assez naturelle et qui sert souvent dans l'étude de ce type de fonctionnelle est de considérer un compétiteur adapté. Ici, choisissons  $\widetilde{K} = K \cup (\Omega \cap \partial B(x, r)) \setminus (K \cap B(x, r))$  et

$\tilde{u}$  définie par  $\tilde{u}(y) = 0$  si  $y \in B(x, r)$  et  $\tilde{u}(y) = u(y)$  pour  $y \in \Omega \setminus (K \cup \overline{B(x, r)})$ . Alors,  $(\tilde{u}, \tilde{K})$  est un compétiteur. De plus, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \setminus \tilde{K}} |\tilde{u} - g|^2 dx &\leq \int_{\Omega \setminus (K \cup B(x, r))} |u - g|^2 dx + \pi r^2 \\ \int_{\Omega \setminus \tilde{K}} |\nabla \tilde{u}|^2 dx &\leq \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx - \int_{B(x, r) \setminus K} |\nabla u|^2 dx \\ \mathcal{H}^1(\tilde{K}) &\leq \mathcal{H}^1(K) - \mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) + 2\pi r. \end{aligned}$$

D'où, le fait que  $J(u, K) \leq J(\tilde{u}, \tilde{K})$  implique  $\mathcal{H}^1(K \cap B(x, r)) \leq 2\pi r + \pi r^2 \leq 3\pi r$ . De plus,  $K$  est rectifiable et même uniformément rectifiable, c'est à dire  $K$  est contenu dans une unique courbe Ahlfors-régulière  $\Gamma$ . Ceci signifie qu'il existe  $\Gamma \subset \mathbb{C}$  et une constante  $C > 0$  telles que pour tout  $x \in \Gamma$ , tout  $r > 0$  (assez petit),  $\mathcal{H}^1(E \cap B(x, r)) \leq Cr$ . Comme nous l'avons déjà vu plusieurs fois (voir par exemple la preuve du théorème 2.117), l'estimation inverse  $\mathcal{H}^1(E \cap B(x, r)) \geq C^{-1}r$  s'obtient par connexité de  $\Gamma$  (sauf si  $x$  est une extrémité de  $\Gamma$ ). Cette condition est plus forte que la rectifiabilité puisque qu'une courbe Ahlfors-régulière est localement rectifiable. D. Mumford et J. Shah ont conjecturé que  $K$  est formé d'un nombre fini de courbes de classe  $C^1$ . Voir le livre [33].

### Rectifiabilité et intégrales singulières

Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{R}^n$ . On considère tout d'abord l'existence des transformées de Riesz de  $\mu$ . Pour cela, on pose pour tout  $s > 0$ ,  $K_s(x) = |x|^{-s-1}x$  pour  $x \neq 0$ . On définit (si la limite existe) la valeur principale

$$K_s \mu(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(x, \varepsilon)} K_s(y - x) d\mu(y).$$

La rectifiabilité joue un rôle important dans l'existence d'une telle valeur principale, comme le montre l'exemple de la transformée d'Hilbert. Ainsi, si  $s = 1$  et  $n = 2$ , le résultat de l'exercice 2.219 donne l'existence de la valeur principale pour la restriction de la 1-mesure de Hausdorff sur une droite. Dans le cas du Cantor 4-coins, la valeur principale précédente n'existe pas. On a en fait le

**Théorème 2.147.** *Soit  $s > 0$ . Supposons qu'il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < \Theta_*^s(x, \mu) \leq \Theta^{*s}(x, \mu) < \infty$  et  $K_s \mu(x)$  existe. Alors,  $s$  est un entier et  $\mu$  est  $s$ -rectifiable.*

Voir [98] pour une preuve utilisant la mesure tangente.

Un autre problème reliant rectifiabilité et intégrales singulières est celui de la continuité  $L^2$  de l'opérateur de Cauchy. On suppose maintenant que la mesure  $\mu$  est Ahlfors-régulière de dimension 1 sur  $\mathbb{C}$  et on note  $L^2(\mu)$  l'espace de Lebesgue  $L^2$  associée à  $\mu$  sur  $\mathbb{C}$ . On dira que l'opérateur  $T_\mu$  associé au noyau  $K(x, y) = \frac{1}{x - y}$  est continu sur  $L^2(\mu)$  s'il existe  $C > 0$  telle que pour tout  $\varepsilon > 0$ , toute fonction  $f \in L^2(\mu)$ ,

$$\int |T_\mu^\varepsilon(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq C \int |f(x)|^2 d\mu(x)$$

où

$$T_\mu^\varepsilon(f)(x) = \int_{|x-y|>\varepsilon} K(x, y) f(y) d\mu(y)$$

pour  $f \in L^1(\mu)$  et  $x \in \mathbb{C}$ . En d'autres termes, les opérateurs tronqués  $T_\mu^\varepsilon$  sont bornés sur  $L^2(\mu)$  indépendamment de  $\varepsilon$ . Si  $\mu$  est la mesure  $\mathcal{H}^1$  restreinte à  $\mathbb{R}$  (c'est à dire  $\mathcal{L}^1$ ), la continuité  $L^2$  s'obtient par la formule de Parseval pour la transformée de Fourier. Si  $\mu$  est la mesure  $\mathcal{H}^1$  restreinte à un graphe



lipschitzien, un théorème célèbre (et non trivial) de Coifman-Meyer-McIntosh dit que l'on a toujours la bornitude  $L^2$ . On a en fait le

**Théorème 2.148.** *Soit  $E \subset \mathbb{C}$  un ensemble Ahlfors-régulier de dimension 1.*

*Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i)  *$E$  est uniformément rectifiable.*

(ii) *l'opérateur de Cauchy  $T_\mu$  est borné sur  $L^2(\mu)$  où  $\mu = \mathcal{H}^1 \llcorner E$ .*

On rappelle que la condition (i) signifie que  $E$  est contenu dans une courbe Ahlfors-régulière et que cette condition est plus forte que la rectifiabilité au sens usuel. Voir [111] pour une discussion de ce problème.

### Effaçabilité pour les fonctions holomorphes bornées

On dit que  $E \subset \mathbb{C}$  est effaçable pour les fonctions holomorphes bornées (ou tout simplement effaçables) si pour tout ouvert  $U$  contenant  $E$ , toute fonction holomorphe bornée  $f : U \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  admet une extension holomorphe dans  $U$  tout entier. D'après un théorème de Riemann, tout singleton est effaçable. Le problème de Painlevé consiste à donner une caractérisation géométriques des ensembles effaçables. Une idée naturelle est que l'effaçabilité de l'ensemble est liée à sa taille. Ceci se formalise de la façon suivante.

**Proposition 2.149.** *Soit  $E \subset \mathbb{C}$ .*

(i) *Si  $\mathcal{H}^1(E) = 0$  alors  $E$  est effaçable.*

(ii) *Si  $Hdim(E) > 1$ , alors  $E$  n'est pas effaçable.*

Pour une démonstration, voir l'exercice 2.220. D'après la proposition précédente, le cas intéressant est quand  $Hdim(E) = 1$  avec  $\mathcal{H}^1(E) > 0$ . Une courbe rectifiable n'est pas effaçable d'après le théorème de représentation conforme. D'un autre côté, l'ensemble de Cantor 4-coins est effaçable. La rectifiabilité doit donc jouer un rôle dans ce problème, ce qui se confirme par le théorème suivant.

**Théorème 2.150.** *Soit  $E \subset \mathbb{C}$  avec  $0 < \mathcal{H}^1(E) < +\infty$ . Alors,  $E$  est effaçable si et seulement si  $E$  est purement non 1-rectifiable.*

La preuve de ce résultat est liée à la section précédente (plus précisément à la continuité  $L^2$  de l'opérateur de Cauchy sur les graphes lipschitziens). Nous renvoyons à [111] pour plus de détails. Un outil fondamental pour les résultats de ce paragraphe et du précédent est la courbure de Menger. Etant donné 3 points  $z_1, z_2, z_3$  distincts et non alignés du plan complexe  $\mathbb{C}$ , on définit leur courbure de Menger par

$$c(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{R(z_1, z_2, z_3)}$$

où  $R(z_1, z_2, z_3)$  est le rayon du cercle circonscrit aux trois points. Si ces points ne sont pas distincts ou sont alignés, on pose  $c(z_1, z_2, z_3) = 0$ . Si  $\mu$  est une mesure de Radon positive dans  $\mathbb{C}$ , on définit sa courbure de Menger par

$$c^2(\mu) = \int \int \int c(x, y, z)^2 d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z).$$

Si  $E \subset \mathbb{C}$  vérifie  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ , on pose  $c^2(E) = c^2(\mathcal{H}^1 \llcorner E)$ . La courbure de Menger mesure la platitude d'une mesure (ou d'un ensemble) et permet de donner une condition quantitative de rectifiabilité (voir [87]).

**Théorème 2.151.** *Soit  $E$  un sous-ensemble compact de  $\mathbb{C}$  tel que  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ . Si  $c^2(E) < +\infty$ , alors  $E$  est 1-rectifiable.*

On peut en fait caractériser les ensembles effaçables  $E$  (sans la condition  $\mathcal{H}^1(E) < \infty$ ) par la courbure de Menger. Voir [141] pour plus de détails.

## Problèmes de type Plateau (via les courants et varifolds rectifiables)

Une version classique du problème de Plateau est la suivante. On se donne une courbe fermée  $C$  dans  $\mathbb{R}^3$  (que l'on modélise par un fil de fer). On cherche une surface  $S$  (un film de savon) dont le bord  $\partial S$  coïncide avec  $C$  et qui soit d'aire minimale. De façon analogue au calcul des variations, la méthode directe pour résoudre le problème de Plateau repose sur les étapes suivantes.

- 1) Prendre une suite de surfaces dont l'aire tend vers le minimum (si celui-ci existe) ;
- 2) En extraire une sous-suite convergente via un théorème de compacité ;
- 3) Montrer que la surface limite est bien solution du problème (par des propriétés de semi-continuité de l'aire).

Nous allons illustrer ceci via la théorie des courants. On note  $\mathcal{D}^s$  l'ensemble des  $s$ -formes différentielles sur  $\mathbb{R}^n$  qui sont de classe  $C^\infty$  et à support compact. On le munit de la norme  $\|\omega\| = \sup\{|\omega(\xi)|; \|\xi\| = 1\}$ . L'espace dual de  $\mathcal{D}^s$  est l'espace des courants  $s$ -dimensionnels et se note  $\mathcal{D}_s$ . On le munit de la topologie faible  $*$  (voir la section 4.2). Ainsi,  $T_j \rightarrow T$  dans  $\mathcal{D}_s$  si et seulement  $T_j(\omega) \rightarrow T(\omega)$  pour toute forme différentielle  $\omega$  dans  $\mathcal{D}^s$ . Le support  $\text{supp}T$  d'un courant  $T$  est le plus petit fermé  $F$  tel que  $\text{supp}(\omega) \cap F = \emptyset \implies T(\omega) = 0$ . Si  $E$  est un ensemble  $s$ -rectifiable dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut le voir comme un courant. En effet, en  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in E$ , il existe un  $s$ -plan tangent approximatif  $P_x$  (voir théorème 2.139). Celui-ci étant une copie de  $\mathbb{R}^s$ , on peut le munir d'une base orthonormée  $(e_1^x, \dots, e_s^x)$  qui définit une orientation de  $P_x$ . Posons  $T_E(\omega) = \int_E \omega(e_1^x, \dots, e_s^x) d\mathcal{H}^s(x)$ . Alors,  $T \in \mathcal{D}_s$ .

Supposons que l'on se donne une "multiplicité"  $\rho(x) \in \mathbb{N}$  sur  $E$  telle que  $\int_E \rho(x) d\mathcal{H}^s(x) < \infty$ . On peut alors définir un courant associé à  $E$  et à cette multiplicité par  $T_E^\rho(\omega) = \int_E \omega(e_1^x, \dots, e_s^x) \rho(x) d\mathcal{H}^s(x)$ .

Nous demandons dans les deux cas que  $T_E$  et  $T_E^\rho$  soient à support compact. De tels courants sont dits  $s$ -rectifiables. Si  $T \in \mathcal{D}_s$ , on définit son bord  $\partial T \in \mathcal{D}_{s-1}$  par  $\partial T(\omega) = T(d\omega)$  pour toute forme  $\omega \in \mathcal{D}^{s-1}$ . Si  $S$  est une surface lisse dans  $\mathbb{R}^3$  dont le bord  $\partial S$  est une courbe lisse, la formule de Stokes donne pour toute forme  $\omega$

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

On retrouve donc la notion usuelle de bord. Comme  $d \circ d = 0$ , on a  $\partial \circ \partial = 0$ . On dit qu'un courant  $T$  est intégral si  $T$  est rectifiable et son bord  $\partial T$  l'est aussi (ce qui n'est pas automatique). On notera  $\mathcal{R}_s$  (respectivement  $\mathcal{I}_s$ ) l'espace des courants rectifiables de  $\mathcal{D}_s$  (respectivement des courants intégraux). On définit deux (semi)-normes sur l'espace des courants  $\mathcal{D}_s$  :

- 1) Masse d'un courant :  $M(T) = \sup\{T(\omega), \|\omega\| \leq 1\}$
- 2) Norme plate d'un courant :  $\mathcal{F}(T) = \inf\{M(A) + M(B); T = A + \partial B, A \in \mathcal{R}_m, B \in \mathcal{R}_{m+1}\}$ .

La masse d'un courant rectifiable associé à un ensemble  $s$ -rectifiable  $E$  est  $\mathcal{H}^s(E)$  (en comptant la multiplicité). Il existe pour les courants intégraux une inégalité isopérimétrique.

**Théorème 2.152.** Soit  $T \in \mathcal{I}_s$  avec  $\partial T = 0$ . Alors, il existe  $S \in \mathcal{I}_{s+1}$  tel que  $\partial S = T$  et

$$M(S)^{s/(s+1)} \leq 2n^{2s+2} M(T).$$

Comme nous l'avons dit plus haut, pour résoudre un problème de minimisation comme le problème de Plateau, la stratégie directe consiste à prendre une suite de minimiseurs puis essayer de passer à la limite via un résultat de compacité comme celui qui suit.

**Théorème 2.153.** *Si  $F$  est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et si  $C \geq 0$  est un réel, l'ensemble*

$$\{T \in \mathcal{I}_s; \text{Supp}T \subset F, M(T) \leq C, M(\partial T) \leq C\}$$

*est compact (pour  $\mathcal{F}$ ).*

On en déduit une possible solution au problème de Plateau (selon la formulation que l'on adopte).

**Théorème 2.154.** *Soit  $B \in \mathcal{R}_{s-1}$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\partial B = 0$ . Alors, il existe un courant rectifiable minimisant la masse  $S \in \mathcal{R}_s$  tel que  $\partial S = B$ , c'est à dire que pour tout  $T \in \mathcal{R}_s$  tel que  $\partial T = B$ ,  $M(S) \leq M(T)$ .*

La preuve utilise la continuité de  $\partial$  et la semi-continuité inférieure de la masse. Notons que la condition  $\partial B = 0$  est nécessaire car  $\partial \circ \partial = 0$ . Pour plus de détails et des idées des démonstrations, le lecteur peut consulter [105]. Notons que le problème de minimisation pour la norme plate est lui largement ouvert à l'heure actuelle (voir par exemple la discussion dans [51]).

Passons maintenant à la notion de varifold qui est une alternative aux courants pour traiter le problème de Plateau avec l'avantage de ne pas nécessiter d'orientation. Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . On note  $G_s(\Omega) = \Omega \times G_{n,s}$  où  $G(n,s)$  est la grassmannienne des  $s$ -plans de  $\mathbb{R}^n$ . Un  $s$ -varifold est alors une mesure de Radon  $V$  sur l'espace  $G_s(\Omega)$ . La masse (ou plutôt mesure masse) associée à  $V$  est la mesure  $\|V\|$  définie par  $\|V\|(B) = V(\Pi^{-1}(B))$  pour tout borélien  $B$  de  $\Omega$ . Ici,  $\Pi : G_s(\Omega) \rightarrow \Omega$  est la projection canonique, c'est à dire  $\Pi(x, P) = x$  pour  $x \in \Omega, P \in G_{n,s}$ . Si  $E$  est un ensemble  $s$ -rectifiable dans  $\mathbb{R}^n$ , on peut le voir comme un varifold  $V$  en posant

$$V(A) = \mathcal{H}^s(E \cap \{x; (x, P_x) \in A\}).$$

où  $P_x$  est le  $s$ -plan tangent approximatif en  $x$  à  $E$ . Notons que ce plan tangent existe seulement presque partout (voir théorème 2.139), mais  $V$  est quand même bien défini. On parle alors de varifold rectifiable. La notion de varifold rectifiable est en un sens plus faible que celle de courant rectifiable car elle ne nécessite pas d'orienter le plan tangent  $P_x$ . Notons aussi que dans ce cas,  $\|V\|$  est la restriction de la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  à  $E$ . La formulation du problème de Plateau dans ce cadre est différente de celle pour les courants (car il n'existe pas de notion claire de bord d'un varifold par exemple) mais est proche de celle des surfaces minimales (qui sont les surfaces de courbure moyenne nulle, voir [109] pour une jolie introduction au sujet). On commence par des définitions techniques. Soit  $P \in G(n,s)$  un  $s$ -plan, soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et soit un champs de vecteur  $X = (X_1, \dots, X_n) \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . On pose pour  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\text{div}_P X(x) = \sum_{j=1}^n \langle \Pi_P(\nabla X_j(x)), e_j \rangle.$$

Si  $V$  est un  $s$ -varifold défini sur l'ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , on définit sa variation première  $\delta V$  comme la forme linéaire continue  $\delta V : C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $\delta V(X) = \int_{\Omega \times G(n,s)} \text{div}_P X(x) dV(x, P)$  pour  $X \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$ . Ainsi,  $\delta V$  mesure la variation de la masse de  $V$  quand on perturbe  $V$  par un champs de vecteurs de classe  $C^1$ . On dit qu'un  $s$ -varifold  $V$  est stationnaire si  $\delta V = 0$ , c'est à dire que  $V$  est un point critique pour la masse en un certain sens. Il en résulte que les varifolds stationnaires englobent les courants rectifiables d'aire minimale par exemple. Résoudre le problème de Plateau dans ce cadre revient à étudier les varifolds stationnaires. Il existe ainsi des théorèmes de compacité et de régularité pour de tels varifolds.. Voir [105] pour une discussion un peu plus détaillée et surtout les références incluses.

Il existe d'autres formulations du problème de Plateau en termes de minimiseurs (d'Almgren, de Mumford-Shah, ...) et dans ces cas, beaucoup de problèmes sont ouverts pour le moment (voir par exemple [51] et [57]).

## Le problème de Kakeya

En 1917, Kakeya posait la question suivante.

*Quelle est l'aire minimale nécessaire pour retourner une aiguille de longueur 1 de  $180^\circ$  ?*

Ici, "retourner" signifie ramener l'aiguille à sa position initiale, mais avec le dessus en dessous. Par exemple, nous pouvons lui faire subir une rotation autour de son milieu, ceci nous coûtera  $\frac{\pi}{4}$ . Nous pouvons nous convaincre assez vite qu'il est possible de faire un peu mieux. La réponse donnée par Besicovitch en 1927 est étonnante. Nous pouvons le faire avec une aire arbitrairement petite ! Ce résultat provient de deux observations.

*Observation 1.* On peut translater l'aiguille n'importe où avec une aire arbitrairement petite (indication : utiliser de petites rotations).

*Observation 2.* Il existe des ensembles du plan d'aire nulle et qui contiennent un segment unité dans toutes les directions. Nous allons démontrer une version plus forte de ce résultat du à Besicovitch (en 1964) qui utilise la notion de rectifiabilité. Voir [112] pour la construction initiale de Besicovitch de 1917 et une solution au problème de Kakeya.

**Théorème 2.155.** *Il existe un ensemble du plan de mesure de Lebesgue nulle et qui contient une droite dans toutes les directions.*

*Démonstration.* La démonstration repose sur un principe de dualité du à Besicovitch. Nous en présentons une variante décrite dans [46]. On note  $P_\theta$  la projection orthogonale dans  $\mathbb{C}$  sur la droite passant par l'origine et qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe des abscisses. A tout couple  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , nous associons la droite  $L(a, b)$  d'équation  $y = a + bx$ . Si  $E \subset \mathbb{R}^2$ , nous notons  $L(E) = \cup_{(a,b) \in E} L(a, b)$ . Pour tout  $c \in \mathbb{R}$ ,  $L_c$  désigne la droite d'équation  $x = c$ . Alors,  $L(a, b) \cap L_c = (c, a + bc) = (c, \langle (a, b), (1, c) \rangle)$  où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^2$ . D'où, si  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $L(E) \cap L_c = \{(c, \langle (1, c), (a, b) \rangle); (a, b) \in E\}$  et donc  $L(E) \cap L_c$  est similaire à  $P_\theta(E)$  avec un rapport de  $(1 + c^2)^{\frac{1}{2}}$  où  $c = \tan \theta$ . Ceci implique que

$$\mathcal{L}^1(L(E) \cap L_c) = 0 \iff \mathcal{L}^1(P_\theta(E)) = 0. \quad (2.156)$$

De (2.156) et du théorème de Fubini, nous déduisons le

**Lemme 2.157.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  avec  $\mathcal{H}^1(E) < +\infty$ . Alors,  $L(E)$  est  $\mathcal{L}^2$ -mesurable. De plus, si  $Fav(E) = 0$ ,  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ .

Ainsi, si  $E$  est l'ensemble de Cantor 4-coins, le théorème 2.129 donne que  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$ . Notons aussi que si  $E \subset \mathbb{R}^2$  et si  $b \in P_{\pi/2}(E)$ , alors  $L(E)$  contient une droite de coefficient directeur  $b$ . Cette remarque élémentaire est très importante, car elle implique que si  $P_{\pi/2}(E) = \mathbb{R}$ , alors  $L(E)$  contient une droite dans toute direction. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 2.155. Soit  $E$  une copie de l'ensemble de Cantor 4-coins obtenue à partir de l'original en faisant une rotation et une translation de sorte que  $P_{\pi/2}(E)$  contient le segment  $[-1, 1]$ . D'après la remarque précédente, nous en déduisons que  $L(E)$  contient une droite dont le coefficient directeur est  $\lambda$ , pour tout  $\lambda \in [-1, 1]$ . De plus, d'après le lemme 2.157,  $\mathcal{L}^2(L(E)) = 0$  puisque  $Fav(E) = 0$ . En prenant l'union de  $L(E)$  et de son image par la rotation d'angle  $\pi/2$  (et de centre l'origine), nous obtenons ce que nous voulons. □

Voyons maintenant ce qui se passe dans  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 2.158.** Soit  $k$  un entier avec  $k < n$ . Un ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un  $(n, k)$ -ensemble de Kakeya s'il est de  $n$ -mesure de Lebesgue nulle, et s'il contient un translaté de tout sous-espace (vectoriel) de dimension  $k$  de  $\mathbb{R}^n$ .

D'après le théorème 2.155, il existe des  $(2, 1)$ -ensembles de Kakeya. En prenant le produit cartésien d'un tel ensemble et de  $\mathbb{R}^{n-2}$ , nous pouvons montrer qu'il existe des  $(n, 1)$ -ensembles de Kakeya. Nous ne pouvons pas espérer avoir des  $(n, k)$ -ensembles de Kakeya pour  $k$  trop grand. Par exemple, des résultats de Falconer et Marstrand (voir [46]) montrent que de tels ensembles n'existent pas pour  $k > n/2$ . Donc, les ensembles vraiment intéressants sont les  $(n, 1)$ -ensembles de Besicovitch (c'est à dire les sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  qui contiennent une droite dans chaque direction). Nous nous restreignons dans la suite à ces ensembles que l'on nommera comme précédemment ensembles de Besicovitch (ou de Kakeya s'ils sont de mesure nulle). Ce que l'on appelle maintenant le problème de Kakeya est de résoudre la conjecture suivante.

*Tout ensemble de Besicovitch dans  $\mathbb{R}^n$  est de dimension de Hausdorff égale à  $n$ .*

Evidemment, la conjecture n'a d'intérêt que pour les ensembles de Kakeya. Comme les autres sont de mesure de Lebesgue non nulle, ils sont de dimension  $n$ . Le but de ce qui suit est de discuter de cette conjecture qui n'est résolue qu'en dimension 2.

**Théorème 2.159.** *Si  $F$  est un ensemble du plan qui contient une droite dans chaque direction, alors sa dimension de Hausdorff est 2.*

*Démonstration.* Soit  $F \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble contenant une droite dans chaque direction. On utilise les mêmes notations que dans le paragraphe précédent sur le principe de dualité de Besicovitch. Posons  $E = \{(a, b); L(a, b) \subset F\}$  (et ainsi  $L(E) \subset F$ ). Puisque  $F$  contient une droite dans chaque direction,  $P_{\pi/2}(E)$  est l'axe des ordonnées tout entier. Donc,  $\mathcal{H}^1(E) = +\infty$ , puisque  $\mathcal{H}^1(P_{\pi/2}(E)) \leq \mathcal{H}^1(E)$  (d'après le lemme 2.39). Ainsi, la dimension de Hausdorff de  $E$  est au moins égal à 1. Par le théorème 6.8(a) de [46], il s'en suit que  $Hdim(P_\theta(E)) = 1$  pour presque tout  $\theta$ . D'où, par le principe de dualité décrit plus haut,  $Hdim(L(E) \cap L_c) = 1$  pour presque tout  $c \in \mathbb{R}$ . Ainsi, presque toutes les tranches horizontales de  $L(E)$  sont de dimension 1. Il en résulte (voir le théorème 5.8 de [46] qui est une version du théorème de Fubini) que  $Hdim(L(E)) = 2$  (penser à un produit cartésien). Comme  $L(E) \subset F$ , nous en déduisons  $Hdim(F) = 2$ . □

La conjecture est complètement ouverte pour  $n > 2$ . Le problème de Kakeya est intimement connecté avec des problèmes de combinatoire, d'analyse harmonique et d'équation aux dérivées partielles par exemple (voir le survol [140]). Il a connu quelques progrès depuis les travaux de Bourgain, Tao, Wolff, ... dans les années 1990, mais il reste largement ouvert. Voir [112] ou [150] pour plus de détails.

## 5.4 Vers une théorie de la rectifiabilité dans les groupes de Carnot ou les espaces métriques ?

On peut de façon tout à fait légitime définir les ensembles rectifiables dans le cadre des espaces métriques comme dans le cas euclidien. Ainsi pour  $s \in \mathbb{N}^*$ , on dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  ou un sous-ensemble  $X$  d'un espace métrique est  $s$ -rectifiable s'il existe des fonctions lipschitziennes  $f_j : \mathbb{R}^s \rightarrow X$  telles que  $\mathcal{H}^s(X \setminus \cup_j f_j(\mathbb{R}^s)) = 0$ . Voir [4] pour une présentation de cette théorie (en relation avec les courants dans les espaces métriques). Le cas  $s = 1$  n'est pas inintéressant. Ainsi,  $E \subset X$  est 1-rectifiable si on peut le recouvrir par des courbes (localement) rectifiables (à un ensemble de  $\mathcal{H}^1$ -mesure

nulles près). Cependant, cette notion n'a d'intérêt que si l'espace métrique possède des courbes rectifiables, ce qui n'est pas toujours le cas. Il existe dans le groupe d'Heisenberg beaucoup de courbes rectifiables et donc beaucoup d'ensembles 1-rectifiables. Cependant, si un sous-ensemble  $E$  du groupe d'Heisenberg est  $s$ -rectifiable avec  $s > 1$  (au sens précédent), alors  $\mathcal{H}^s(E) = 0$  ! Ceci découle du théorème de Pansu-Rademacher sur la différentiabilité des applications lipschitziennes (théorème 2.85) dans le groupe d'Heisenberg (voir [5]). Il faut donc trouver une définition plus adaptée de la  $s$ -rectifiabilité dans ce cadre. Il existe plusieurs approches de la rectifiabilité dans le groupe d'Heisenberg et plus généralement dans les groupes de Carnot. Donnons juste une piste possible. Tout d'abord, l'existence de translations et de dilations permet de définir la notion de mesures tangentes. Soit  $a \in \mathbb{H}^n$  et soit  $r > 0$ . On pose  $T_{a,r}(p) = \delta_{1/r}(a.p)$  où  $\delta_{1/r}$  est la dilatation anisotropique de rapport  $1/r$  et où le produit  $a.p$  est défini par rapport à la loi de groupe de  $\mathbb{H}^n$  (voir le chapitre 1). Soit  $\mu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . On note  $\mu_{a,r}$  la mesure image de  $\mu$  par  $T_{a,r}$ . On dit que  $\nu$  est une mesure tangente à  $\mu$  en  $a \in \mathbb{H}^n$  si  $\nu$  est une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$  avec  $\nu(\mathbb{H}^n) > 0$  et s'il existe des nombres positifs  $c_i$  et  $r_i$  avec  $\lim_{i \rightarrow +\infty} r_i = 0$  et la suite de mesures  $(c_i \mu_{a,r_i})_i$  converge faiblement vers  $\nu$  quand  $i \rightarrow +\infty$ . Comme dans le cas euclidien, on peut la plupart du temps choisir  $c_i = \mu(B(a, r_i))^{-1}$ . On note  $Tan(\mu, a)$  l'ensemble des mesures tangentes de  $\mu$  en  $a$ . On dit que  $\mu$  a une unique mesure tangente  $\nu$  en  $a$  si  $Tan(\mu, a) = \{c\nu, c \in \mathbb{R}\}$ . Il est possible de caractériser l'unicité de la mesure tangente.

**Théorème 2.160.** *Soit  $\mu$  une mesure de Radon sur  $\mathbb{H}^n$ . Alors, les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $\mu$  a une unique mesure tangente en  $\mu$ -presque tout  $a \in \mathbb{H}^n$  ;
- (ii) Pour  $\mu$ -presque tout  $a \in \mathbb{H}^n$ , il existe un sous-groupe homogène fermé  $G_a$  de  $\mathbb{H}^n$  tel que  $Tan(\mu, a) = \{c\lambda_a, c \in \mathbb{R}\}$  où  $\lambda_a$  est la mesure de Haar du groupe  $G_a$ .

On pourrait donc définir la notion d'ensembles rectifiables dans le groupe d'Heisenberg en utilisant les mesures tangentes (voir par exemple [101]). On pourra consulter [133] pour d'autres approches de la rectifiabilité dans ce cadre. Cependant, il n'existe pas pour le moment une théorie unifiée (comme dans le cas euclidien) de la théorie de la rectifiabilité dans les groupes de Heisenberg et de Carnot.

## 6 Formules de l'aire et de la coaire

Le but de cette partie est de présenter des versions généralisées du théorème de changement de variables (théorème 1.57) dans le cas euclidien, à savoir les formules d'aire et de coaire. Les grandes différences seront que les changements de variables considérés ne seront que lipschitziens et les espaces d'arrivée et de départ ne seront pas de la même dimension. Les preuves de ces formules suivront la même stratégie que celle du théorème classique, c'est à dire considérer d'abord le cas où  $f$  est linéaire puis démontrer le cas général en approchant localement  $f$  à l'aide de sa différentielle (qui est linéaire !). Nous donnerons ensuite une version générale de la formule d'aire/coaire qui nous permettra d'établir la formule de Crofton qui est très utile en géométrie intégrale (voir [128]). Comme d'habitude, nous présenterons à la fin de cette partie des versions des formules d'aire et de coaire dans le cas des groupes de Carnot et des espaces métriques.

### 6.1 Formule de l'aire dans les espaces euclidiens

On commence par rappeler que par le théorème de Rademacher (théorème 2.53), si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est lipschitzienne, sa différentielle  $Df(x)$  existe en presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Il en est donc de même de la norme du jacobien généralisé  $\mathcal{J}f(x) = \|Df(x)\|$  (voir la section 3.3 pour cette notion qui dépend de l'ordre entre  $n$  et  $m$ ). La formule de l'aire peut s'énoncer ainsi.

**Théorème 2.161.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne avec  $n \leq m$ . Alors pour tout ensemble mesurable (par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ )  $A \subset \mathbb{R}^n$ , on a

$$\int_A \mathcal{J}f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(\{A \cap f^{-1}(\{y\})\})d\mathcal{H}^n(y) = \int_{\mathbb{R}^m} \text{card}(\{A \cap f^{-1}(\{y\})\})d\mathcal{H}^n(y)$$

où  $\mathcal{J}f(x)$  est la norme du jacobien généralisé de  $f$  en  $x$ .

En notant que la formule précédente s'écrit aussi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x)\mathcal{J}f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} \chi_A(x) \right) d\mathcal{H}^n(y),$$

on démontre par la méthode classique (considérer le cas des fonctions simples, puis positives et enfin décomposer  $g = g^+ - g^-$ ) la formule de changement de variables suivante.

**Corollaire 2.162.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne avec  $n \leq m$ . Alors pour toute fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ )  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathcal{J}f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \sum_{x \in f^{-1}(\{y\})} g(x) \right) d\mathcal{H}^n(y).$$

Voir l'exercice 2.221 pour des applications. La preuve du théorème de l'aire suit la même stratégie que celle du théorème de changement de variables classique. On commence par traiter le cas des applications linéaires. On en déduit par approximation de distorsion une estimation de  $\mathcal{H}^n(f(A))$  pour  $A$  bien choisi, puis la formule de l'aire dans le cas  $C^1$ . Le cas des fonctions lipschitziennes suit par approximation par les fonctions  $C^1$  (théorème 2.63). On utilisera les propriétés classiques de la mesure de Hausdorff, à savoir que  $\mathcal{L}^n = \mathcal{H}^n$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{H}^n(\phi(A)) \leq (\text{Lip } \phi)^n \mathcal{H}^n(A)$  si  $\phi$  est lipschitzienne.

**Proposition 2.163.** Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (avec  $n \leq m$ ) une application linéaire surjective, soit  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$  et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application. Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble mesurable qui vérifie

- (i)  $Df(a)$  existe en tout  $a \in A$ ;
- (ii)  $\|Df(a) - T\| < \varepsilon$  pour tout  $a \in A$ ;
- (iii)  $\|f(y) - f(a) - Df(a)(y - a)\| < \varepsilon\|a - y\|$  pour tous  $y, a \in A$ ;

(iv) La restriction à  $f(A)$  de la projection orthogonale  $\Pi$  sur l'image de  $T$  est injective, on a alors

$$(1 - 3\varepsilon\lambda^{-1})^n \|T\| \mathcal{L}^n(A) \leq \mathcal{H}^n(f(A)) \leq (1 + 2\varepsilon\lambda^{-1})^n \|T\| \mathcal{L}^n(A) \quad (2.164)$$

où  $\lambda = \inf\{T(v), \|v\| = 1\}$  et  $\|T\|$  est la norme du jacobien de  $T$ .

*Démonstration.* Comme nous l'avons vu dans la section 3.3, on commence par décomposer  $T = U \circ S$  où  $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est symétrique et  $U : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est orthogonale (et injective). Alors, par définition,  $\|T\| = |\det(S)|$  et notons que  $\lambda^{-1} = \|S^{-1}\|$ . On fera attention à ne pas confondre  $\|T\|$  et  $\|T\|$  (norme classique d'une application linéaire). On notera dans la suite  $B = S(A)$  et  $g = f \circ S^{-1}$ . Alors, d'après le lemme 2.64,  $\mathcal{L}^n(B) = |\det(S)| \mathcal{L}^n(A) = \|T\| \mathcal{L}^n(A)$ . Pour obtenir la majoration, il suffit de voir que la restriction de  $g$  à  $B$  est  $(1 + 2\varepsilon\lambda^{-1})$ -lipschitzienne. En effet, il s'en suit

$$\mathcal{H}^n(f(A)) = \mathcal{H}^n(g(B)) \leq (1 + 2\varepsilon\lambda^{-1})^n \mathcal{L}^n(B) = (1 + 2\varepsilon\lambda^{-1})^n \|T\| \mathcal{L}^n(A).$$

Pour démontrer l'affirmation précédente, prenons  $z, b \in B$ . Si nous notons  $a = S^{-1}(b)$  et  $y = S^{-1}(z)$ , il vient  $\|y - a\| \leq \lambda^{-1}\|z - b\|$ . Nous en déduisons par (ii) et (iii)

$$\begin{aligned}
\|g(z) - g(b)\| &\leq \|g(z) - g(b) - Dg(b)(z - b)\| \\
&+ \|(Dg(b) - U)(z - b)\| + \|U(z - b)\| \\
&= \|f(y) - f(a) - Df(a)(y - a)\| \\
&+ \|(Df(a) - T) \circ S^{-1}(z - b)\| + \|z - b\| \\
&\leq \varepsilon\|y - a\| + \|Df(a) - T\| \cdot \|S^{-1}\| \cdot \|z - b\| + \|z - b\| \\
&\leq (1 + 2\varepsilon\lambda^{-1})\|z - b\|.
\end{aligned}$$

Notons que par des arguments similaires, on a aussi  $\|g(z) - g(b)\| \geq (1 - 2\varepsilon\lambda^{-1})\|z - b\|$ .

Le preuve de la minoration est du même style. Posons  $C = \Pi(f(A)) = \Pi(g(B))$  et  $h = (\Pi \circ g_B)^{-1}$  (où  $g_B$  désigne la restriction de  $g$  à  $B$ ). Il suffit de montrer que la restriction de  $h$  à  $C$  est  $(1 - 3\varepsilon\lambda^{-1})^{-1}$ -lipschitzienne. En effet, cela implique puisque  $B = h(C)$

$$\|T\|\mathcal{H}^n(A) = \mathcal{L}^n(B) \leq (1 - 3\varepsilon\lambda^{-1})^{-n}\mathcal{L}^n(C) \leq (1 - 3\varepsilon\lambda^{-1})^{-n}\mathcal{H}^n(f(A)).$$

La dernière inégalité vient du point (iv). Pour démontrer l'affirmation précédente, on commence par noter que si  $w, c \in C$ , il existe  $z, b \in B$  tels que  $w = \Pi \circ g(z)$  et  $c = \Pi \circ g(b)$ . Donc,  $\|w - c\| = \|\pi(g(z)) - \pi(g(b))\|$  et  $\|h(w) - h(c)\| = \|z - b\|$ . Or, on a

$$\begin{aligned}
\|\Pi^\perp(g(z) - g(b))\| &= \|\Pi^\perp(g(z) - g(b) - Dg(b)(z - b))\| \\
&\leq \|\Pi(g(z) - g(b) - Dg(b)(z - b))\| \\
&+ \|\Pi^\perp(g(z) - g(b) - Dg(b)(z - b))\| \\
&= \|g(z) - g(b) - Dg(b)(z - b)\| \\
&\leq \varepsilon\lambda^{-1}\|z - b\|.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure puisque

$$\begin{aligned}
\|\Pi(g(z)) - \Pi(g(b))\| &\geq \|g(z) - g(b)\| - \|\Pi^\perp(g(z) - g(b))\| \\
&\geq (1 - 2\varepsilon\lambda^{-1})\|z - b\| - \varepsilon\lambda^{-1}\|z - b\| \\
&= (1 - 3\varepsilon\lambda^{-1})\|z - b\|.
\end{aligned}$$

Donc,  $\|h(w) - h(c)\| \leq (1 - 3\varepsilon\lambda^{-1})^{-1}\|w - c\|$ .

□

On en déduit

**Théorème 2.165.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application de classe  $C^1$  avec  $n \leq m$ . Alors pour tout ensemble mesurable (par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ )  $A \subset \mathbb{R}^n$ , on a

$$\int_A \mathcal{J}f dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(\{A \cap f^{-1}(\{y\})\}) d\mathcal{H}^n(y).$$

*Démonstration.* On peut toujours se ramener au cas où  $A$  est borné (sinon écrire  $A = \cup A_i$  où les  $A_i$  sont bornés). Afin d'utiliser la proposition précédente, on commence par supposer que  $f$  est injective et vérifie  $\mathcal{J}f(a) > 0$  pour tout  $a \in A$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , tout sous-ensemble de  $A$  assez petit satisfait les assertions (i), (ii), (iii) de la proposition (en prenant  $T = Df(a_0)$  où  $a_0$  est fixé). Il nous reste à vérifier (iv) pour  $\varepsilon$  assez petit par rapport à  $\lambda$ . Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons



qu'il existe  $y \neq z$  dans un petit sous-ensemble de  $A$  tel que  $\Pi(f(y)) = \Pi(f(z))$ . On a alors si  $y, z$  et  $a_0$  sont assez proches

$$\begin{aligned}
\lambda \|y - z\| &\leq \|\Pi(T(y - z))\| \\
&\leq \|\Pi(T - Df(a_0))(y - z)\| + \|\Pi(Df(a_0) - Df(z))(y - z)\| \\
&\quad + \|\Pi(Df(z)(y - z))\| \\
&\leq \|T - Df(a_0)\| \|y - z\| + \|Df(a_0) - Df(z)\| \|y - z\| \\
&\quad + \|\Pi(f(y) - f(z) - Df(z)(y - z))\| \\
&\leq \|T - Df(a_0)\| \|y - z\| + \|Df(a_0) - Df(z)\| \|y - z\| \\
&\quad + \|f(y) - f(z) - Df(z)(y - z)\| \\
&\leq 3\varepsilon \|y - z\|.
\end{aligned}$$

D'où, on obtient une contradiction si  $\varepsilon < \lambda/3$ . Ensuite, on peut aisément conclure en décomposant  $A$  en sous-ensembles vérifiant (i), (ii), (iii) et (iv) pour un  $\varepsilon$  donné puis en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0.

Supposons maintenant que  $f$  n'est pas nécessairement injective mais vérifie  $\mathcal{J}f(a) > 0$  pour tout  $a \in A$ . Alors,  $f$  est localement injective et donc il existe  $\tau > 0$  de sorte que  $f$  soit injective sur toute boule de la forme  $B(a, \tau)$ ,  $a \in A$ . Ceci est possible car  $A$  est borné. Recouvrons  $A$  par des ensembles disjoints  $A_j$  qui sont  $\mathcal{H}^n$ -mesurables et de diamètre inférieur à  $\tau$ . Alors,

$$\begin{aligned}
\int_A \mathcal{J}f(x) d\mathcal{L}^n(x) &= \sum_j \int_{A_j} \mathcal{J}f(x) d\mathcal{L}^n(x) \\
&= \sum_j \mathcal{H}^n(f(A_j)) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_j \chi_{f(A_j)} d\mathcal{H}^n \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \text{card}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^n(y).
\end{aligned}$$

Enfin par le théorème de Sard (théorème 2.41), l'image d'un ensemble sur lequel  $\mathcal{J}f = 0$  est de mesure nulle. Donc, nous pouvons supposer  $\mathcal{J}f(a) > 0$  pour tout  $a \in A$ . □

Démontrons maintenant la formule de l'aire dans le cas où  $f$  est lipschitzienne. Soit  $\varepsilon > 0$  et soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble mesurable. Alors, il existe une application  $g_\varepsilon$  de classe  $C^1$  telle que si note  $A_\varepsilon = \{x \in A; f(x) = g_\varepsilon(x), Df(x) = Dg_\varepsilon(x)\}$ , on a  $\mathcal{L}^n(A \setminus A_\varepsilon) \leq \varepsilon$  (d'après le théorème 2.63). On a donc par la formule d'aire pour les fonctions de classe  $C^1$

$$\begin{aligned}
\int_{A_\varepsilon} \mathcal{J}f dx &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(\{A_\varepsilon \cap f^{-1}(\{y\})\}) d\mathcal{H}^n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(\{A \cap f^{-1}(\{y\})\}) d\mathcal{H}^n(y) - \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(\{A \setminus A_\varepsilon \cap f^{-1}(\{y\})\}) d\mathcal{H}^n(y).
\end{aligned}$$

Or, si on décompose  $A \setminus A_\varepsilon$  comme une union disjointe de  $A_i$  sur lesquels  $f$  est injective, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^0(\{A \setminus A_\varepsilon \cap f^{-1}(\{y\})\}) d\mathcal{H}^n(y) &\leq \sum_j \mathcal{H}^n(f(A_j)) \\
&\leq (\text{Lip}(f))^n \sum_j \mathcal{H}^n(A_j) \\
&\leq \varepsilon (\text{Lip}(f))^n.
\end{aligned}$$

On peut alors conclure en faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0. La démonstration de la formule de l'aire (et de celle de la coaire dans le paragraphe suivant) est inspirée de [80]. On peut en trouver des preuves différentes dans [45].

## 6.2 Formule de la coaire dans le cas euclidien

Le but de ce paragraphe est de démontrer la formule de la coaire suivante.

**Théorème 2.166.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne avec  $n \geq m$ . Alors pour tout ensemble mesurable (par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ )  $A \subset \mathbb{R}^n$ , on a

$$\int_A \mathcal{J}f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(\{A \cap f^{-1}(\{y\})\}) dy$$

où  $\mathcal{J}f(x)$  est la norme du jacobien généralisé de  $f$  en  $x$  (voir la section 3.3 pour la définition).

En notant que la formule précédente s'écrit aussi

$$\int_{\mathbb{R}^n} \chi_A(x) \mathcal{J}f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{f^{-1}(\{y\})} \chi_A(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) dy,$$

on démontre par la méthode classique (considérer le cas des fonctions simples, puis positives et enfin décomposer  $g = g^+ - g^-$ ) la formule de changement de variables suivante.

**Corollaire 2.167.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne avec  $n \geq m$ . Alors pour toute fonction intégrable (par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ )  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , on a que la restriction de  $g$  à  $f^{-1}(\{y\})$  est intégrable pour  $\mathcal{L}^m$ -presque tout  $y \in \mathbb{R}^m$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) \mathcal{J}f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{f^{-1}(\{y\})} g(x) d\mathcal{H}^{n-m}(x) \right) dy.$$

On laisse en exercice la vérification que le membre de droite de la formule de la coaire est mesurable (voir l'exercice 2.223). Il n'y a pas de problème avec le membre de gauche d'après le théorème de Rademacher (théorème 2.53). Pour des applications de la formule de la coaire, voir l'exercice 2.222. Nous commençons maintenant la démonstration en commençant par les lemmes techniques usuels (comme pour la formule de l'aire).

**Proposition 2.168.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , soit  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application orthogonale avec  $n > m$  et soit  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$ . Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble mesurable (pour la mesure de Lebesgue) tel que

(i)  $Df(a)$  existe en tout  $a \in A$ ;

(ii)  $\|Df(a) - U^t\| \leq \varepsilon$  pour tout  $a \in A$ ;

(iii)  $\|f(y) - f(a) - Df(a)(y - a)\| < \varepsilon\|a - y\|$  pour tous  $y, a \in A$ ,

alors

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon)^n \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(\{y\})) d\mathcal{L}^m(y) &\leq \int_A \mathcal{J}f(a) d\mathcal{L}^n(a) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(\{y\})) d\mathcal{L}^m(y). \end{aligned}$$

*Démonstration.* On commence par compléter la famille orthogonale formée des vecteurs colonnes de  $U$  pour obtenir une base orthogonale de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $V$  la matrice orthogonale dont les colonnes sont les  $n - m$  vecteurs ajoutés. On note qu'alors  $\text{Ker}(U^t)$  et  $\text{Ker}(V^t)$  sont des complémentaires orthogonaux.

On pose  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$  l'application définie par  $F(x) = (f(x), V^t(x))$  et on notera  $\Pi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^m$  la projection canonique. On a alors  $\mathcal{J}F = \mathcal{J}f$ . Supposons que  $F$  soit injective sur  $A$ . Alors, d'après la formule de l'aire, on a  $\mathcal{L}^n(F(A)) = \int_A \mathcal{J}F d\mathcal{L}^n = \int_A \mathcal{J}f d\mathcal{L}^n$ . D'où par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_A \mathcal{J}f d\mathcal{L}^n &= \mathcal{L}^n(F(A)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(F(A) \cap \Pi^{-1}(\{y\})) d\mathcal{L}^m(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(F(A \cap f^{-1}(\{y\}))) d\mathcal{L}^m(y). \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit que voir la restriction de  $F$  à  $A$  est injective (ce qui a été utilisé ci-dessus) et d'estimer les constantes de Lipschitz de  $F$  sur  $A \cap f^{-1}(z)$  et de  $F^{-1}$  sur  $F(A \cap f^{-1}(z))$ . Pour cela, considérons  $a, y \in A \cap f^{-1}(z)$ . On a alors  $\|F(a) - F(y)\| = \|V^t(a) - V^t(y)\|$ . Il s'en suit donc que  $\|F(a) - F(y)\| \leq \|a - y\|$ . De plus, par le théorème de Pythagore,  $\|y - a\|^2 = \|V^t(y) - V^t(a)\|^2 + \|U^t(y - a)\|^2$ . Or,

$$\begin{aligned} \|U^t(y - a)\| &\leq \|Df(a)(y - a)\| + \| \|Df(a) - U^t\| \|y - a\| \\ &= \|f(y) - f(a) - Df(a)(y - a)\| + \| \|Df(a) - U^t\| \|y - a\| \\ &\leq 2\varepsilon \|y - a\|. \end{aligned}$$

Il s'en suit  $\|F(y) - F(a)\|^2 \geq \|y - a\|^2(1 - 4\varepsilon^2)$  puis

$$(1 - 2\varepsilon) \|y - a\| < \sqrt{1 - 4\varepsilon^2} \|y - a\| \leq \|F(y) - F(a)\| \leq \|y - a\|.$$

Ceci permet de conclure. □

**Proposition 2.169.** Soit  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  (avec  $n > m$ ) une application linéaire bijective, soit  $\varepsilon \in ]0, 1/2[$  et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application. Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble mesurable qui vérifie

- (i)  $Df(a)$  existe en  $a \in A$ ;
- (ii)  $\| \|Df(a) - T\| \| \leq \varepsilon$  pour tout  $a \in A$ ;
- (iii)  $\|f(y) - f(a) - Df(a)(y - a)\| \leq \varepsilon \|y - a\|$  pour tous  $y, a \in A$ ;

Alors

$$\begin{aligned} (1 - 2\varepsilon)^n \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(\{y\})) d\mathcal{L}^m(y) &\leq \int_A \mathcal{J}f(a) d\mathcal{L}^n(a) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(\{y\})) d\mathcal{L}^m(y). \end{aligned}$$

*Démonstration.* Il existe une application symétrique  $S : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  et une application orthogonale  $U : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $T = S \circ U^t$  (voir section 3.3). On pose alors  $g = S^{-1} \circ f$  et on applique la proposition précédente à  $g$  et  $U$  pour obtenir :

$$(1 - 2\varepsilon)^n \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap g^{-1}(\{z\})) d\mathcal{L}^m(z) \leq \int_A \mathcal{J}f(a) d\mathcal{L}^n(a) \quad (2.170)$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap g^{-1}(\{z\})) d\mathcal{L}^m(z). \quad (2.171)$$

Pour conclure, il suffit de faire le changement de variable  $y = S(z)$ . En effet, puisque  $A \cap g^{-1}(\{z\}) = A \cap f^{-1}(\{y\})$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap g^{-1}(\{z\})) |det(S)| d\mathcal{L}^m(z) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(\{y\})) d\mathcal{L}^m(y). \quad (2.172)$$

Comme  $(\mathcal{J}S)(\mathcal{J}g) = |det(S)|\mathcal{J}g = \mathcal{J}f$ , notre preuve est complète. En effet, il suffit de multiplier (2.170) par  $|det(S)|$  et d'appliquer (2.172).  $\square$

Nous pouvons maintenant esquisser la démonstration de la formule de la coaire (les  $\varepsilon$  sont laissés au lecteur). Par le théorème de Rademacher (théorème 2.53),  $Df(a)$  existe pour presque tout  $a \in A$ . Supposons que  $Jf(a) > 0$  en tout  $a \in A$  (Voir [80] pour le cas général). Alors, par le théorème de Lusin (théorème 1.39), on peut supposer que  $Df(a)$  est la restriction d'une fonction continue sur  $A$ . De plus, par le théorème d'Egoroff (théorème 1.41), on peut supposer que  $\frac{|f(y) - f(a) - Df(a)(y - a)|}{|y - a|}$  converge uniformément vers 0 quand  $y \in A \rightarrow a \in A$ . On en déduit que si  $A$  est assez petit, les conditions (i), (ii) et (iii) de la proposition précédente sont satisfaites (pour  $T = Df(a_0)$  où  $a_0 \in A$  est fixé). On peut alors conclure aisément.

### 6.3 Mesure intégrale-géométrique et formule de Crofton

Nous allons donner dans cette section une version généralisée de la formule d'aire/coaire dont nous déduirons la formule de Crofton. Commençons par un problème classique qui motivera la suite.

*Problème de l'aiguille de Buffon (1777)*

*Supposons qu'on laisse tomber une petite aiguille de longueur  $l$  sur du papier réglé dont les droites sont régulièrement espacées d'une distance  $d \geq l$ . Quelle est la probabilité que l'aiguille tombe dans une position telle qu'elle coupe l'une des droites ?*

La réponse est  $\frac{2l}{\pi d}$  (formule due à Buffon lui-même). Esquisons maintenant une démonstration de ce résultat. Nous supposons que les droites sont horizontales. Fixons tout d'abord la pente  $\alpha$  que fait l'aiguille avec l'horizontale. Par symétrie, nous pouvons supposer que  $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Alors, la probabilité que l'aiguille tombe sur une droite est égale au rapport  $\frac{l \sin \alpha}{d}$ . D'où, la probabilité cherchée est la moyenne sur tous les angles possibles, c'est à dire

$$p = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l \sin \alpha}{d} d\alpha = \frac{2l}{\pi d} [-\cos \alpha]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Nous renvoyons à [2] pour plus de détails. La formule de Buffon implique que, si nous laissons tomber un polygône régulier de périmètre  $p$  et de diamètre inférieur à  $d$  sur notre papier réglé, le nombre de points d'intersection de ce polygône avec l'une des droites parallèles est en probabilité  $\frac{2p}{\pi d}$ . Ceci a été formalisé par Crofton (1868) qui a introduit la quantité suivante qui portera plus tard le nom de mesure intégrale-géométrique. L'idée est de compter, pour un ensemble donné  $F \subset \mathbb{R}^2$ , le nombre de points d'intersection avec une droite, puis d'intégrer le résultat sur l'espace des droites. Le nombre obtenu se note  $\mathcal{I}^1(F)$ . Donnons une définition "plus mathématique" de  $\mathcal{I}^1(F)$ . Pour cela, si  $\theta \in [0, 2\pi[$ , notons  $L_\theta$  la droite du plan qui passe par l'origine et qui fait un angle  $\theta$  avec l'axe des  $x$ , et  $\Pi_\theta$  la projection orthogonale sur  $L_\theta$ . Alors,

$$\mathcal{I}^1(F) = \int_0^\pi \int_{L_\theta} \text{card}(F \cap \Pi_\theta^{-1}(y)) dy d\theta.$$

Ici,  $dy$  est l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $L_\theta$ . Notons que si  $F \subset \mathbb{R}^2$ , alors  $\mathcal{I}^1(F) = 0$  si et seulement si  $\mathcal{L}^1(\Pi_\theta(F)) = 0$  pour presque tout  $\theta \in [0, \pi[$ . Les ensembles purement non 1-rectifiables vérifient  $\mathcal{I}^1(F) = 0$  d'après le théorème 2.134. L'exemple type d'un tel ensemble est l'ensemble de Cantor 4-coins que nous avons déjà rencontré (voir le théorème 2.129).

Nous allons passer aux dimensions supérieures et pour cela, rappelons (voir la section 5.1) que la variété grassmannienne des  $s$ -plans vectoriels  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  est notée  $G(n, s)$  et que l'on peut identifier cette variété avec l'ensemble des projections orthogonales  $\Pi_P \in O(n, s)$  sur les  $s$ -plans  $P$  de  $G(n, s)$ . Il existe une mesure (de probabilité) naturelle sur  $G(n, s)$  notée  $\gamma_{n,s}$ . Dans le cas où  $n = 2$  et  $s = 1$ , cette mesure est juste la mesure de Lebesgue normalisée sur  $[0, \pi[$ . Pour  $0 < s \leq n$  (avec  $s \in \mathbb{N}$ ), on définit la  $s$ -mesure intégrale-géométrique d'un borélien  $B \subset \mathbb{R}^n$  par

$$\mathcal{I}^s(B) = \frac{1}{\beta(n, s)} \int_{P \in G(n, s)} \int_{y \in \text{Im}(\Pi_P)} N(\Pi_P, B, y) d\mathcal{L}^s(y) d\gamma_{n,s}(P),$$

où  $\beta(n, s) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-s+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^{-1} \pi^{-1/2}$ ,  $N(\Pi_P, B, y) = \text{card}(B \cap \Pi_P^{-1}(y))$  est comme précédemment la multiplicité (qui est bien mesurable). On pose pour  $E \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{I}^s(E) = \inf\{\mathcal{I}^s(B); B \text{ borélien avec } E \subset B\}$ . Alors,  $\mathcal{I}^s$  est une mesure extérieure et la formule de Crofton dit qu'elle coïncide avec la  $s$ -mesure de Hausdorff sur les ensembles  $s$ -rectifiables (la normalisation un peu obscure de  $\mathcal{I}^s$  est faite pour avoir l'égalité exacte).

**Théorème 2.173.** *Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $s$ -rectifiable. Alors,  $\mathcal{H}^s(E) = \mathcal{I}^s(E)$ .*

Nous allons donner une idée de la preuve dans le cas simple  $n = 2$  et  $s = 1$  en suivant [105]. Pour cela, nous avons besoin d'une version générale de la formule de l'aire et de quelques définitions.

Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  et soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  une fonction. On dit que  $f$  a une limite approximative  $l$  en  $a \in A$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^n \setminus \{x \in A; \|f(x) - f(y)\| < \varepsilon\}$  est de  $n$ -densité nulle en  $a$ . On écrit alors  $l = \text{ap} \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . Notons que ceci nécessite que la densité de  $A$  en  $a$  est 1.

On dit que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  est approximativement continue en  $a \in A$  si  $\text{ap} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  et que  $f$  est approximativement différentiable en  $a \in A$  s'il existe une application linéaire  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  telle que

$$\text{ap} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - L(x - a)}{\|x - a\|} = 0.$$

On note alors  $L = \text{ap}D(f(a))$  puis  $\mathcal{J}^{\text{app}} f(a)$  la norme du jacobien généralisé de  $\text{ap}Df(a)$  (voir la section 3.3).

Nous donnons maintenant une forme générale de la formule d'aire/coaire.

**Théorème 2.174.** *Soit  $E$  un ensemble  $s$ -rectifiable dans  $\mathbb{R}^n$ , soit  $F$  un ensemble  $r$ -rectifiable dans  $\mathbb{R}^m$ , et soit  $f : E \rightarrow F$  une application lipschitzienne. On suppose  $s \geq r \geq 1$ . Alors,*

$$\int_E \mathcal{J}^{\text{app}} f(y) d\mathcal{H}^s(y) = \int_F \mathcal{H}^{s-r}(f^{-1}(\{z\})) d\mathcal{H}^r(z)$$

On en déduit classiquement que si  $g$  est  $\mathcal{H}^s$ -mesurable sur  $E$ , on a

$$\int_E g(y) \mathcal{J}^{\text{app}} f(y) d\mathcal{H}^s(y) = \int_F \int_{f^{-1}(\{z\})} g d\mathcal{H}^{s-r} d\mathcal{H}^r(z).$$

**Remarque 2.175.** L'ensemble  $E$  admet (au moins localement) une paramétrisation  $g : \mathbb{R}^s \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  (voir la section 5.1). Alors, par le théorème de Rademacher (théorème 2.53),  $f \circ g$  est lipschitzienne et est donc presque partout différentiable. Il s'en suit que  $f$  est approximativement différentiable presque partout et donc  $\mathcal{J}^{\text{app}} f$  est bien définie presque partout.

Nous pouvons maintenant esquisser une preuve de la formule de Crofton dans le cas  $n = 2$  et  $s = 1$  (on suit celle donnée dans [105]). Soit  $E \subset \mathbb{R}^2$  un ensemble 1-rectifiable. Alors, en  $\mathcal{H}^1$ -presque tout  $x \in E$ , il existe une tangente approximative (voir le théorème 2.139) dont on notera  $v_E(x)$  un vecteur directeur unitaire. On a alors par des calculs élémentaires et en utilisant le théorème de Fubini

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(E) &= \int_E \|v_E(x)\| d\mathcal{H}^1(x) \\ &= \int_E \frac{1}{\beta(2,1)} \left( \int_{P \in G(2,1)} \|\Pi_P(v_E(x))\| d\gamma_{2,1}(P) \right) d\mathcal{H}^1(x) \\ &= \frac{1}{\beta(2,1)} \int_{P \in G(2,1)} \left( \int_E \|\Pi_P(v_E(x))\| d\mathcal{H}^1(x) \right) d\gamma_{2,1}(P)\end{aligned}$$

Or, si  $L$  est une application linéaire,  $\mathcal{H}^1(L(A)) = \|L\| \mathcal{L}^1(A) = (\mathcal{J}L) \mathcal{L}^1(A)$  par le lemme 2.64. On en déduit, puisque  $v_E(x)$  est unitaire,

$$\mathcal{H}^1(E) = \frac{1}{\beta(2,1)} \int_{G(2,1)} \int_E \mathcal{J}\Pi_P(x) d\mathcal{H}^1(x) d\gamma_{2,1}(P).$$

On peut alors facilement conclure par le théorème 2.174 puisque  $E$  est rectifiable.

#### 6.4 Formules de l'aire et de la coaire dans les groupes de Carnot

Soient  $\mathbb{G}_1$  ou  $\mathbb{G}_2$  deux groupes de Carnot munis respectivement des normes homogènes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  et de leurs dilations anisotropiques  $\delta_\lambda^1$  et  $\delta_\lambda^2$ . On aurait pu aussi munir les groupes de leur distance de Carnot-Carathéodory respective. Nous noterons  $Q_1$  et  $Q_2$  les dimensions homogènes de  $\mathbb{G}_1$  et  $\mathbb{G}_2$ . On notera respectivement  $\mathcal{H}_1^s$  et  $\mathcal{H}_2^s$  leurs mesures de Hausdorff  $s$ -dimensionnelle. Nous avons vu que toute application lipschitzienne  $f : A \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  est différentiable presque partout au sens de Pansu (de différentielle notée  $d_P f$ ) et que les notions de jacobien métrique et horizontal coïncident en tout point de différentiabilité de Pansu de  $f$ . Voir les sections 5 et 3.5 pour ces résultats et les notations que nous utilisons dans cette partie.

**Théorème 2.176.** *Soit  $A \subset \mathbb{G}_1$  un ensemble  $\mathcal{H}_1^{Q_1}$ -mesurable et soit  $f : A \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  une fonction lipschitzienne. On suppose que  $Q_2 \geq Q_1$ . Alors,*

$$\int_A \mathcal{J}_{Q_1}^m f(x) d\mathcal{H}_1^{Q_1}(x) = \int_A \mathcal{J}_{Q_1}^H f(x) d\mathcal{H}_1^{Q_1}(x) = \int_{\mathbb{G}_2} N(f, A, y) d\mathcal{H}_2^{Q_1}(y)$$

où  $N(f, A, y)$  est le cardinal de  $A \cap f^{-1}(y)$ .

*Démonstration.* Nous ne donnerons que les principales étapes de la preuve (voir [24] pour plus de détails). Soit  $A_0$  l'ensemble des points  $a$  de densité de  $A$  pour lesquels  $\mathcal{J}_{Q_1}^m f(a) = 0$  ou  $d_P f(a)$  n'existe pas. Comme  $d_P f(a)$  existe presque partout (par rapport à  $\mathcal{H}_1^{Q_1}$ ) sur  $A_0$ , on a  $\mathcal{J}_{Q_1}^m f(a) = 0$  presque partout sur  $A_0$ . Nous avons déjà vu qu'alors  $\mathcal{H}_2^{Q_1}(f(A_0)) = 0$ . Il s'en suit que la contribution de  $A_0$  aux deux côtés de la formule de l'aire est nulle et donc il nous suffit de considérer  $A_1 = A \setminus A_0$ . Le résultat suivant dit que  $d_P f(x)$  est injective pour tout  $x \in A_1$ .

**Lemme 2.177.** *Soit  $f : A \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  une application lipschitzienne. On suppose que  $Q_2 \geq Q_1$ . Si  $d_P f(x)$  n'est pas injective pour un  $x \in A$ , alors  $\mathcal{J}_{Q_1}^m f(x) = 0$ .*

Par le lemme suivant, on peut trouver une partition borélienne  $(B_i)$  de  $A_1$  telle que la restriction  $f_i = f|_{B_i}$  de  $f$  à  $B_i$  est injective. Nous n'utiliserons dans la suite que cette propriété. Nous verrons une version de ce lemme dans les espaces métriques dans la section suivante.

**Lemme 2.178.** Soit  $f : A \subset \mathbb{G}_1 \rightarrow \mathbb{G}_2$  une application lipschitzienne et soit  $t > 1$ . On note  $B$  l'ensemble des points de densité  $a$  de  $A$  où  $d_P f(a)$  existe et est injective. Alors, il existe une partition par des boréliens  $(B_i)$  de  $B$  de sorte que pour tout  $i \in \mathbb{N}$

(i) La restriction  $f_{B_i}$  de  $f$  à  $B_i$  est injective ;

(ii) Il existe une application  $H$ -linéaire injective  $L_i$  telle que  $t^{-1} \|L_i(z)\|_2 \leq \|d_P f(x)(z)\|_2 \leq t \|L_i(z)\|_2$  où  $x \in B_i$  et  $z \in \mathbb{G}_1$  ;

(iii)  $\text{Lip}(f_{B_i} \circ (L_i^{-1})_{B_i}) \leq t$  et  $\text{Lip}((L_i)_{B_i} \circ f_{B_i}^{-1}) \leq t$ .

On commence par noter que comme les groupes de Carnot sont munis d'une mesure doublante, on a par le théorème de différentiation de Lebesgue dans les espaces de nature homogène (théorème 1.202)

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \cap B_i}(x, r))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_A(x, r))} = 1$$

pour tout  $i$  et tout point de densité  $x$  de  $B_i$ . Pour alléger les notations, on note  $B_C(x, r) = C \cap B(x, r)$ . L'étape cruciale consiste à montrer que  $\mathcal{J}_{Q_1}^m f(x) = \mathcal{J}_{Q_1}^m f_i(x)$  pour  $x$  point de densité de  $B_i$  et pour cela, nous allons montrer deux inégalités.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{Q_1}^m f_i(x) &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_2^{Q_1}(f_i(B_{A \cap B_i}(x, r)))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \cap B_i}(x, r))} \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_2^{Q_1}(f(B_A(x, r)))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \cap B_i}(x, r))} \\ &= \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}_2^{Q_1}(f(B_A(x, r)))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_A(x, r))} = \mathcal{J}_{Q_1}^m f(x) \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{Q_1}^m f(x) &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \left( \frac{\mathcal{H}_2^{Q_1}(f(B_{A \setminus B_i}(x, r)))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \setminus B_i}(x, r))} + \frac{\mathcal{H}_2^{Q_1}(f(B_{A \cap B_i}(x, r)))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \cap B_i}(x, r))} \right) \\ &\leq \liminf_{r \rightarrow 0} \left( (\text{Lip}(f))^{Q_1} \frac{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \setminus B_i}(x, r))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \cap B_i}(x, r))} + \frac{\mathcal{H}_2^{Q_1}(f(B_{A \cap B_i}(x, r)))}{\mathcal{H}_1^{Q_1}(B_{A \cap B_i}(x, r))} \right) \\ &\leq \mathcal{J}_{Q_1}^m f_i(x). \end{aligned}$$

On en déduit pour tout  $i$ , puisque  $f_i$  est injective

$$\int_{B_i} \mathcal{J}^m f(x) d\mathcal{H}_1^{Q_1}(x) = \int_{B_i} \mathcal{J}^m f_i(x) d\mathcal{H}_1^{Q_1}(x) = \mathcal{H}_2^{Q_1}(f(B_i)) = \int_{\mathbb{G}_2} \chi_{f(B_i)} d\mathcal{H}_2^{Q_1}.$$

On peut conclure facilement en sommant sur  $i$  les égalités précédentes :

$$\begin{aligned} \int_A \mathcal{J}^m f(x) d\mathcal{H}_1^{Q_1}(x) &= \int_{A \setminus A_0} \mathcal{J}^m f(x) d\mathcal{H}_1^{Q_1}(x) \\ &= \sum_i \int_{\mathbb{G}_2} \chi_{f(B_i)} d\mathcal{H}_2^{Q_1} \\ &= \int_{\mathbb{G}_2} N(f, A, y) d\mathcal{H}_2^{Q_1}. \end{aligned}$$

□

Donnons maintenant une version de la formule de la coaire. Soit  $\mathbb{G}$  un groupe de Carnot dont l'algèbre de Lie est engendrée par les champs de vecteurs  $X_1, \dots, X_m$ . On note  $Q$  la dimension homogène de  $\mathbb{G}$  (que l'on suppose muni de la distance de Carnot-Carathéodory). Si  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $C^1$ , on note  $\nabla_0 f$  le champs de vecteurs  $\nabla_0 f = \sum_{i=1}^m X_i f X_i$  et on dit que  $\nabla_0 f$  est le gradient horizontal de  $f$ . La terminologie s'explique par le fait que  $\nabla_0 f$  est dans la partie horizontale  $V_1$  de l'algèbre de Lie de  $\mathbb{G}$ .

**Théorème 2.179.** *Si  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$  est de classe  $C^1$  et si  $u : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}^+$  est mesurable positive, on a*

$$\int_{\mathbb{G}} u(x) \|\nabla_0 f(x)\| dx = \int_0^\infty \int_{\{f=t\}} u(y) d\mathcal{H}^{Q-1}(y) dt.$$

Le point-clé de la preuve est d'interpréter le terme  $\nabla_0 f(x)$  comme un jacobien. Ainsi, si  $S = \{f = t\}$  est une ligne de niveau d'une fonction  $f : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ , alors presque partout sur  $S$ ,  $d\mathcal{H}^{Q-1} = \frac{\|\nabla_0 f\|}{\|\nabla f\|} ds$  où  $ds$  est la mesure riemannienne sur  $S$  et  $\nabla f$  est le gradient standard de  $f$ . Une fois ceci noté, le théorème précédent découle du cas riemannien. Une application classique est l'inégalité isopérimétrique. Pour plus de détails, voir [58].

Une bonne référence pour toute cette partie est [94].

## 6.5 Formules de l'aire et de la coaire dans les espaces métriques

Nous commençons par donner une formule de l'aire qui ne nécessite aucun résultat de différentiabilité de type Rademacher ! Avant de l'énoncer et de donner des idées de preuve, nous avons besoin d'introduire quelques notions de théorie axiomatique de dérivation de mesure. Nous suivons la présentation de la section 2.8.16 de [47]. Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure  $\mu$ . Une relation de recouvrement  $C$  est un sous-ensemble de  $\{(x, S); x \in S \subset X\}$ . Un exemple simple est de considérer  $C = \{(x, B(x, R)), x \in X, R > 0\}$ . Si  $Z \subset X$ , on pose  $C(Z) = \{S; (x, S) \in C \text{ pour un certain } x \in Z\}$ . On dit que  $C$  est fine en  $x \in X$  si  $\inf\{\text{diam} S; (x, S) \in C\} = 0$ . Une relation de recouvrement  $V$  est une  $\mu$ -relation de Vitali si on a

(i) Les éléments de  $V$  sont des boréliens ;

(ii)  $V$  est fine en tout  $x \in X$

(iii) Si  $C \subset V$ ,  $Z \subset X$  de sorte que  $C$  est fine en tout point de  $Z$ , alors  $C(Z)$  a une sous-famille (dénombrable) disjointe qui recouvre  $Z$  à un ensemble de  $\mu$  mesure nulle.

Si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  est une fonction dont le domaine de définition est noté  $D_f$ , on pose

$$(V) - \limsup_{S \rightarrow x} f(S) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \{f(S); (x, S) \in V, \text{diam} S < \varepsilon, S \subset D_f\}.$$

**Exemple 2.180.** Si la mesure  $\mu$  est doublante (et donc  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène), le théorème de recouvrement de Vitali (proposition 1.112) dit que les boules (fermées) forment une  $\mu$ -relation de Vitali.

Considérons maintenant deux espaces métriques (séparables) mesurés  $(X, d_X, \mu)$  et  $(Y, d_Y, \nu)$ . On suppose que  $\mu$  est finie sur les ensembles bornés et qu'il existe une  $\mu$ -relation de Vitali  $V$  sur  $X$ . Soit  $A \subset X$  un sous-ensemble fermé et soit  $f : A \rightarrow Y$  une fonction continue (par exemple lipschitzienne). Pour tout  $E \subset A$  borélien, on définit la jauge  $\rho_A(E) = \nu(f(E))$ . La mesure image  $f^* \nu$  est alors la mesure donnée par la construction de Carathéodory (voir section 2.1) à partir de la jauge  $\rho_A$  et de



l'ensemble des boréliens de  $A$ . On étend de façon naturelle  $f^*\nu$  à tout  $X$  par restriction. Par construction,  $f^*\nu$  est une mesure de Borel sur  $X$ . Comme précédemment, on note  $N(f, A, y)$  la multiplicité de  $f$  en  $y$  relativement à  $A$ , c'est à dire  $N(f, A, y)$  est le cardinal de  $A \cap f^{-1}(y)$ . Un point-clé (qui explique les hypothèses de notre prochain théorème) est que si  $f^*\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  et est finie sur les ensembles bornés, alors pour tout ensemble  $\mu$ -mesurable  $E \subset A$ , on a  $f^*\nu(E) = \int_Y N(f, E, y) d\nu(y)$ . De façon analogue au cas sous-riemannien (voir section 3.5), on définit le jacobien métrique d'une application continue  $f : A \subset X \rightarrow Y$  en  $x$  par  $\mathcal{J}^m f(x) = (V) - \limsup_{S \rightarrow x} \frac{f^*\nu(S)}{\mu(S)}$ .

**Théorème 2.181.** *Soit  $A \subset X$  un ensemble  $\mu$ -mesurable et soit  $f : A \rightarrow Y$  une application continue. On suppose que  $f^*\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$  et est finie sur les ensembles bornés de  $X$ . Alors,  $\mathcal{J}^m f$  est fini  $\mu$ -presque partout et*

$$\int_A \mathcal{J}^m f(x) d\mu(x) = \int_Y N(f, A, y) d\nu(y).$$

*Démonstration.* La démonstration est juste un exercice de théorie (fine) de la mesure et découle de la définition de notre jacobien métrique. On définit la densité de  $f^*\nu$  en  $x$  par rapport à  $\mu$  et la relation de Vitali  $V$  par  $D(f^*\nu, \mu, V, x) = (V) - \lim_{S \rightarrow x} \frac{f^*\nu(S)}{\mu(S)}$ . Si  $A$  est  $\mu$ -mesurable, alors  $A$  est aussi  $f^*\nu$ -mesurable et on a

$$f^*\nu(A) = \int_A D(f^*\nu, \mu, V, x) d\mu(x).$$

Par définition du jacobien  $\mathcal{J}f(x)$ , on a  $\mathcal{J}f(x) = D(f^*\nu, \mu, V, x)$  et donc  $f^*\nu(A) = \int_E \mathcal{J}f(x) d\mu(x)$ .

Comme nous avons déjà noté que  $f^*\nu(A) = \int_Y N(f, A, y) d\nu(y)$ , nous pouvons conclure.  $\square$

Nous considérons maintenant le cas où  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  avec  $(X, d)$  un espace métrique. Nous rappelons que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  est lipschitzienne,  $f$  admet en  $\mathcal{L}^n$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$  une dérivée métrique qui est une semi-norme que nous noterons  $\tau_x$  (on suit ici les notations de la section 3.6). On définit la norme du jacobien d'une semi-norme  $\tau$  sur  $\mathbb{R}^n$  noté  $\mathcal{J}(\tau)$  comme le nombre vérifiant  $\mathcal{H}_\tau^n(A) = \mathcal{J}(\tau) \mathcal{L}^n(A)$  si  $\tau$  est une norme et  $\mathcal{J}(\tau) = 0$  sinon. Ici,  $\mathcal{H}_\tau^n$  est la mesure  $n$ -dimensionnelle relative à la norme  $\tau$ . Donc, si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  est (localement) lipschitzienne, on peut définir la norme de son jacobien  $\mathcal{J}f(x)$  en  $\mathcal{L}^n$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$  par  $\mathcal{J}f(x) = \mathcal{J}(\tau_x)$ . Il existe plusieurs preuves de la formule de l'aire dans le cas euclidien. La nôtre repose de façon cruciale sur le théorème d'approximation de Whitney. Celle donnée dans [45] est différente et commence par la démonstration du résultat suivant. Voir aussi le lemme 2.178 pour une version dans les groupes de Carnot.

**Lemme 2.182.** *Soient  $n, m$  des entiers avec  $n \leq m$  et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne. Alors, pour tout  $t > 1$ , si on note  $B = \{x \in \mathbb{R}^n; Df(x) \text{ existe, } \mathcal{J}f(x) > 0\}$ , il existe des boréliens  $B_k$  de  $\mathbb{R}^n$  tels que*

(i)  $B = \cup_{k \in \mathbb{N}} B_k$ ;

(ii) La restriction de  $f$  à  $B_k$  notée  $f_{B_k}$  est injective pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ;

(iii) Pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un automorphisme symétrique  $T_k : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tel que

$$Lip(f_{B_k} \circ T_k^{-1}) \leq t; \quad Lip(T_k \circ (f_{B_k})^{-1}) \leq t; \quad t^{-n} |\det T_k| \leq \mathcal{J}f|_{B_k} \leq t^n |\det T_k|.$$

Nous avons besoin dans le cas métrique d'un analogue de ce lemme.

**Lemme 2.183.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  une application lipschitzienne. On note  $B$  l'ensemble des  $x \in \mathbb{R}^n$  pour lesquels la dérivée métrique  $\tau_x$  existe et est une norme (c'est à dire  $\mathcal{J}f(x) > 0$ ). Alors, pour tout  $t > 1$ , il existe une partition de  $B$  par des boréliens  $B_k$  et une suite de normes  $\|\cdot\|_k$  sur  $\mathbb{R}^n$  telles que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $x \in B_k$ , tout  $x' \in B_k$ , tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,

$$(1) \quad t^{-1}\|x - x'\|_k \leq d(f(x), f(x')) \leq t\|x - x'\|_k ;$$

$$(2) \quad t^{-1}\|v\|_k \leq \tau_x(v) \leq t\|v\|_k.$$

*Démonstration.* On commence par choisir une suite de normes  $\|\cdot\|_k$  sur  $\mathbb{R}^n$  de sorte que pour toutes normes  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$  et tout  $C > 1$ , il existe un  $k \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ ,  $C^{-1}\|v\|_k \leq \|v\| \leq C\|v\|_k$ . Ceci est possible car toutes les normes sont équivalentes sur  $\mathbb{R}^n$ . Puis, on choisit  $\delta > 0$  de sorte que  $t^{-1} + \delta < 1 < t - \delta$ . Pour tous  $i, k \in \mathbb{N}$ , on définit  $B_{i,k}$  comme le borélien formé des  $x \in B$  tels que

$$(i) \quad (t^{-1} + \delta)\|v\|_i \leq \tau_x(v) \leq (t - \delta)\|v\|_i \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^n ;$$

$$(ii) \quad |d(f(x+v), f(x)) - \tau_x(v)| \leq \delta\|v\|_i \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}^n \text{ avec } |v| \leq 1/k.$$

Vérifions que les  $B_{i,k}$  recouvrent  $B$ . Pour cela, considérons  $x \in B$ . Par définition des  $\|\cdot\|_i$ , il existe  $i \in \mathbb{N}$  tel que l'on ait (i). Soit  $C_i > 0$  tel que  $\|v\| \leq C_i\|v\|_i$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  (par équivalence des normes). Prenons maintenant  $k \in \mathbb{N}$  de sorte que l'on ait (ii) avec  $\delta\|v\|_i$  remplacé par  $(\delta/C_i)\|v\|_i$ . Alors,  $x \in B_{i,k}$  par définition de la dérivée métrique. Maintenant, considérons  $A \subset B_{i,k}$  avec  $\text{diam}A \leq 1/k$ , on a pour  $x, x+v \in A$ .

$$d(f(x+v), f(x)) \leq \tau_f(x)(v) + \delta\|v\|_i \leq t\|v\|_i,$$

$$d(f(x+v), f(x)) \geq \tau_f(x)(v) - \delta\|v\|_i \geq t^{-1}\|v\|_i.$$

En divisant (pour avoir une partition) et en renommant les  $(B_{i,k})$ , on obtient la partition borélienne cherchée.  $\square$

**Théorème 2.184.** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow X$  une application lipschitzienne.

(i) Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est mesurable,

$$\int_A \mathcal{J}f(x)dx = \int_X N(f, A, y)d\mathcal{H}^{mn}(y)$$

$$\text{où } N(f, A, y) = \text{card}(A \cap f^{-1}(y)) = \mathcal{H}^0(A \cap f^{-1}(y)).$$

(ii) Si  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{L}^n$ -intégrable,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\mathcal{J}f(x)dx = \int_X \sum_{x \in f^{-1}(y)} g(x)d\mathcal{H}^n(y).$$

*Démonstration.* La preuve est dans le même esprit que celle esquissée dans les groupes de Carnot. On peut sans perte de généralité supposer  $\mathcal{L}^m(A) < \infty$  (sinon décomposer  $A$ ). Il suffit de démontrer (i), (ii) s'en déduit par approximation par des fonctions simples comme dans le cas euclidien. Ecrivons  $A = A_0 \cup A_1 \cup A_2$  où  $A_0$  est l'ensemble des  $x$  pour lesquels la dérivée métrique n'existe pas,  $A_1$  est l'ensemble des  $x$  pour lesquels la dérivée métrique  $\tau_x$  existe et est une norme (c'est à dire  $\mathcal{J}f(x) > 0$ ),  $A_2$  est l'ensemble des  $x$  pour lesquels la dérivée métrique  $\tau_x$  existe mais n'est pas une norme (c'est à dire  $\mathcal{J}f(x) = 0$ ). Par le théorème de Rademacher valable dans ce cas, on a  $\mathcal{H}^n(f(A_0)) \leq \text{Lip}(f)^n \mathcal{L}^n(A_0) = 0$ , donc nous n'avons pas à tenir compte de  $A_0$ . Il en est de même pour  $A_2$ . En effet, nous avons un théorème de type Sard dans la mesure où  $\mathcal{H}^n(f(A_2)) = 0$  (et donc  $A_2$  n'a aucune contribution dans les deux côtés de la formule de l'aire). Pour voir cela,

considérons  $X \times \mathbb{R}^n$  muni de la distance produit  $l^1 : d_1((x, t), (x', t')) = d(x, x') + |t - t'|$ . Pour  $\varepsilon > 0$ , on pose  $g_\varepsilon(x) = (f(x), \varepsilon x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Alors,  $g_\varepsilon$  est métriquement différentiable et sa dérivée métrique  $\tau_\varepsilon$  vérifie  $\tau_\varepsilon(x)(v) = \tau_x(v) + \varepsilon\|v\|$  pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$ . Le point important est qu'alors  $\tau_\varepsilon(x)$  est une norme pour tout  $x \in A_2$ . Fixons  $x \in A_2$  et soit  $\mathcal{B}_x$  la boule unité pour  $\tau_\varepsilon(x)$ . Alors,  $\mathcal{H}_{\tau_\varepsilon(x)}^n(\mathcal{B}_x) = \alpha_n$ . Comme  $\tau_x$  n'est pas une norme mais juste une semi-norme, il existe  $v_x \in \mathbb{R}^n$  de sorte que  $\tau_\varepsilon(v_x) = 1$  et  $\tau_x(v_x) = 0$ . Il s'en suit que  $\|v_x\| = 1/\varepsilon$ . De plus, pour tout  $v \in \mathbb{R}^n$  avec  $\tau_\varepsilon(x)(v) = 1$ , on a  $1 = \tau_x(v) + \varepsilon\|v\| \leq (\text{Lip}(f) + \varepsilon)\|v\|$  et donc  $\|v\| \geq 1/(\text{Lip}(f) + \varepsilon)$ . D'où, l'ensemble convexe  $\mathcal{B}_x$  contient  $v_x, -v_x$  et  $B(0, 1/(\text{Lip}(f) + \varepsilon))$ . Il en résulte que  $\mathcal{L}^n(\mathcal{B}_x) \geq \frac{c_n}{\varepsilon(\text{Lip}(f) + \varepsilon)^{n-1}}$  pour une constante  $c_n$  ne dépendant que de  $n$ . On a donc

$\mathcal{J}(g_\varepsilon)(x) = \mathcal{J}(\tau_\varepsilon(x)) = \frac{\mathcal{H}_{\tau_\varepsilon(x)}^n(B)}{\mathcal{L}^n(B)} \leq \frac{\alpha_n \varepsilon (\text{Lip}(f) + \varepsilon)^{n-1}}{c_n}$ . En appliquant le fait que la formule de l'aire est vérifiée pour le couple  $(g_\varepsilon, A_2)$  comme pour le couple  $(f, A_1)$  (voir ci-dessous), il vient

$$\mathcal{H}^n(g(A_2)) = \int_{A_2} \mathcal{J}(g_\varepsilon)(x) dx \leq \frac{\varepsilon \alpha_n (\text{Lip}(f) + \varepsilon)^{n-1}}{c_n} \mathcal{L}^n(A_2).$$

En faisant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on obtient  $\mathcal{H}^n(g(A_2)) = 0$ . Comme la projection canonique  $\Pi : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow X$  est 1-lipschitzienne et envoie  $g(A_2)$  sur  $f(A_2)$ , il vient  $\mathcal{H}^n(f(A_2)) = 0$ , ce qui est la conclusion souhaitée. Traitons le cas de  $A_1$ . Soit  $\lambda > 1$ . En appliquant le lemme précédent, il existe une partition borélienne  $(B_i)$  de  $A_1$  et une famille de normes  $\|\cdot\|_i$  sur  $\mathbb{R}^n$ , de sorte que  $f_{B_i}$  soit injective,  $\lambda^{-n} \mathcal{H}_{\|\cdot\|_i}^n(B_i) \leq \mathcal{H}^n(f(B_i)) \leq \lambda^n \mathcal{H}_{\|\cdot\|_i}^n(B_i)$  et  $\lambda^{-1} \|\cdot\|_i \leq \tau_x \leq \lambda \|\cdot\|_i$  pour tout  $x \in B_i$ . Il s'en suit que  $\lambda^{-n} \mathcal{J}(\|\cdot\|_i) \leq \mathcal{J}(f)(x) \leq \lambda^n \mathcal{J}(\|\cdot\|_i)$ . Comme  $(f_{B_i})$  est injective, l'application  $y \rightarrow \text{card}(B_i \cap f^{-1}(y))$  est juste la fonction caractéristique de  $f(B_i)$  qui est mesurable. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_X \text{card}(f^{-1}(y) \cap B_i) d\mathcal{H}^n y &= \mathcal{H}^n(f(B_i)) \\ &\leq \lambda^n \mathcal{H}_{\|\cdot\|_i}^n(B_i) \\ &= \lambda^n \mathcal{J}(\|\cdot\|_i) \mathcal{L}^n(B_i) \\ &\leq \lambda^{2n} \int_{B_i} \mathcal{J}f(x) dx. \end{aligned}$$

De façon similaire, on a

$$\int_X \text{card}(f^{-1}(y) \cap B_i) d\mathcal{H}^n y \geq \lambda^{-2n} \int_{B_i} \mathcal{J}f(x) dx.$$

Comme  $\lambda > 1$  est arbitraire, on a que la formule de l'aire est vraie pour les  $B_i$  et donc pour  $A_1$  (en passant à la limite  $\lambda \rightarrow 1$ ).  $\square$

En ce qui concerne la formule de la coaire, seule une inégalité n'est disponible en général.

**Théorème 2.185.** Soient  $X, Y$  deux espaces métriques et soit  $f : X \rightarrow Y$  une application lipschitzienne. On suppose que  $X$  est propre et que  $A$  est  $\mathcal{H}^{m+k}$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^{m+k}(A) < \infty$ . Alors, si  $A \subset X$  et si  $m, k \in \mathbb{N}$ , on a

$$\int_Y \mathcal{H}^k(f^{-1}(y) \cap A) d\mathcal{H}^m(y) \leq \frac{\alpha_k \alpha_m}{\alpha_{k+m}} \text{Lip}(f)^m \mathcal{H}^{k+m}(A).$$

*Démonstration.* On ne démontre le théorème que dans le cas où  $Y$  est un espace vectoriel normé de dimension  $m$ . Le fait que  $X$  est propre et que  $A$  est  $\mathcal{H}^{m+k}$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^{m+k}(A) < \infty$  implique que l'intégrale de gauche est bien définie. On commence par considérer pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$  un recouvrement

$(C_n^j)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  avec  $\text{diam} C_n^j \leq 1/j$  et  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha(k+m) \left( \frac{\text{diam} C_n^j}{2} \right)^{k+m} \leq \mathcal{H}_{1/j}^{k+m}(A) + 1/j$ .

On pose pour tous  $n, j$ ,  $g_n^j = \alpha(k) \left( \frac{\text{diam} C_n^j}{2} \right)^k \chi_{D_n^j}$  où  $D_n^j$  est l'adhérence de  $f(C_n^j)$ . Donc, pour tout  $y \in Y$  et tout  $i \leq j$ , on a  $\mathcal{H}_{1/i}^k(f^{-1}(y) \cap A) \leq \sum_n g_n^j(y)$ . Il s'en suit par l'inégalité isodiamétrique (théorème 1.69)

$$\begin{aligned} \int_X \mathcal{H}_{1/i}^k(f^{-1}(y) \cap A) d\mathcal{H}^m(y) &\leq \int_X \sum_n g_n^j(y) d\mathcal{H}^m(y) \\ &= \sum_n \int g_n^j(y) d\mathcal{H}^m(y) \\ &= \sum_n \alpha(k) \left( \frac{\text{diam} C_n^j}{2} \right)^k \mathcal{H}^m(D_n^j) \\ &\leq \sum_n \alpha(k) \left( \frac{\text{diam} C_n^j}{2} \right)^k \alpha(m) \left( \frac{\text{diam} D_n^j}{2} \right)^m \\ &\leq \sum_n \alpha(k) \alpha(m) \text{Lip}(f)^m \left( \frac{\text{diam} C_n^j}{2} \right)^{k+m} \\ &\leq \frac{\alpha(k) \alpha(m)}{\alpha(k+m)} \text{Lip}(f)^m \left( \mathcal{H}_{1/j}^{k+m}(A) + 1/j \right) \end{aligned}$$

On peut conclure facilement en faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$  puis  $i$  vers  $+\infty$ . □

## 7 Exercices

**Exercice 2.186.** On suppose que  $\mathbb{R}$  est muni de sa structure euclidienne.

1) Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soient  $f, g : (X, d) \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications lipschitziennes. Démontrer que les applications  $\alpha f + \beta g$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ),  $\inf(f, g)$  et  $\sup(f, g)$  sont lipschitziennes.

2) Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux applications lipschitziennes. Si on suppose de plus que  $f$  et  $g$  sont bornées, démontrer que  $f/g$  est lipschitzienne.

3) Donner des exemples de fonctions 3-lipschitziennes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Exercice 2.187.** Démontrer que les fonctions lipschitziennes bornées sont denses dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  (On se ramènera au cas où  $f = \chi_A$  avec  $A$  mesurable puis on pourra considérer des fonctions de la forme  $f_k(x) = \inf(k(d(x, O^c), 1)$  où  $O$  est un ouvert à choisir avec soin).

**Exercice 2.188.** ([98], Théorème 4.6)

Soient  $A \subset X$ ,  $s > 0$  et  $0 < \delta \leq \infty$ . Démontrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $\mathcal{H}^s(A) = 0$ ;
- (ii)  $\mathcal{H}_\delta^s(A) = 0$ ;
- (iii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un recouvrement  $(E_i)$  de  $A$  avec  $\sum_i \text{diam}(E_i)^s \leq \varepsilon$ .

**Exercice 2.189.** ([98], Théorème 4.4 et corollaire 4.5)

Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable. On pose pour  $s > 0$  et pour  $E \subset X$ ,  $\rho(E) = (\text{diam} E)^s$ .

1) Soit  $\mathcal{F}$  la famille des fermés de  $(X, d)$ . Montrer qu'alors la construction de Carathéodory donne la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ .

2) Même question en prenant pour  $\mathcal{F}$  la famille des ouverts de  $(X, d)$ .

3) Dédurre des questions précédentes que la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  est une mesure borélienne régulière, c'est à dire que  $\mathcal{H}^s$  est borélienne et que pour tout  $A \subset X$ , il existe un borélien  $B \subset X$  avec  $A \subset B$  et  $\mathcal{H}^s(A) = \mathcal{H}^s(B)$ .

4) On suppose ici que  $X = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne et que  $0 \leq s < n$ . Soit  $\mathcal{F}$  l'ensemble des convexes de  $\mathbb{R}^n$ . Montrer qu'alors la construction de Carathéodory donne la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ .

**Exercice 2.190.** ([59], Théorème 8.15)

On définit la dimension topologique d'un espace métrique séparable par récurrence. L'ensemble vide a pour dimension  $-1$ . La dimension d'un espace  $X$  est le plus petit entier  $n$  tel que tout point de  $X$  a un voisinage de diamètre arbitrairement petit et dont le bord est de dimension topologique  $\leq n - 1$ . La dimension topologique est donc un entier et le but est de démontrer qu'elle est plus petite que la dimension de Hausdorff (qui n'est en général pas entière).

1) Soit  $n \in \mathbb{N}$  un entier et soit  $X$  une espace métrique qui vérifie  $\mathcal{H}^{n+1}(X) = 0$ . Démontrer que pour tout  $x_0 \in X$ ,

$$\int_0^{+\infty} \mathcal{H}^n(\partial B(x_0, r)) dr = 0.$$

En déduire que la dimension topologique de  $X$  est inférieure (ou égale) à  $n$ .

2) Conclure.

**Exercice 2.191.** ([98], section 5.10)

On fixe  $0 \leq s < \infty$ . Pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$  et tout  $\delta > 0$ , on pose  $\beta_\delta^s(A) = \sup \sum_i \alpha(s) (\text{diam} B_i / 2)^s$  où le supremum est pris sur toutes les famille disjointes de boules fermées  $(B_i)$  telle que pour tout  $i$ ,  $\text{diam}(B_i) \leq \delta$  et la boule  $B_i$  est centrée sur  $A$ , puis on pose  $\beta^s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \beta_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \beta_\delta^s(A)$ . La

mesure de packing  $s$ -dimensionnelle de  $A$  est alors définie par  $P^s(A) = \inf \left\{ \sum_i \beta^s(A_i); A = \cup_i A_i \right\}$ .

1) En s'inspirant de ce que l'on a fait pour la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$ , montrer que  $P^s$  est une mesure de Borel régulière.

2) Démontrer que pour tout  $A \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{H}^s(A) \leq P^s(A)$ .

**Exercice 2.192.** (exemples 4.1.1, 4.1.2 et 4.1.3 de [6])

Soit  $\gamma : I \rightarrow (X, d)$  une courbe où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $(X, d)$  est un espace métrique. L'exercice propose des exemples de calculs de dérivées métriques  $|\dot{\gamma}|(t)$  pour  $t \in I$  (voir la définition 2.17).

1) Si  $X = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne, déterminer  $|\dot{\gamma}|(t)$  si  $\gamma$  est différentiable en  $t \in I$ .

2) Si  $X = \mathbb{R}^n$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  (et donc de la distance induite), déterminer  $|\dot{\gamma}|(t)$  si  $\gamma$  est différentiable en  $t \in I$ .

3) Soit  $X$  un espace vectoriel muni d'une norme  $\|\cdot\|$  (et donc de la distance induite) et soit  $v$  un vecteur non nul de  $X$ . Pour  $t \in [-1, 1]$ , on pose  $\gamma(t) = |t|v$ . Démontrer que la dérivée métrique  $|\dot{\gamma}|(t)$  existe en tout  $t \in [-1, 1]$  (la déterminer), mais que  $\gamma$  n'est pas différentiable en  $t = 0$ .

**Exercice 2.193.** (voir [46], lemma 3.2 Soit  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application continue et injective. On note  $\Gamma = \gamma([a, b])$  son image. Ainsi,  $\Gamma$  est une courbe de Jordan. Le but est de démontrer que  $l(\gamma) = \mathcal{H}^1(\Gamma)$  en utilisant les projections orthogonales. Voir le théorème 2.27 pour une démonstration dans le cas général des espaces métriques.

1) Soit  $D$  une droite dans  $\mathbb{R}^n$  et soit  $P_D$  la projection orthogonale sur  $D$ . Montrer que pour tout ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$ , on a

$$\mathcal{H}^1(P_D(E)) \leq \mathcal{H}^1(E).$$

2) En déduire que si  $C$  est une courbe de  $\mathbb{R}^n$  reliant  $x$  et  $y$ , alors  $\mathcal{H}^1(C) \geq |x - y|$ , puis que  $l(\Gamma) \leq \mathcal{H}^1(\Gamma)$ .

3) En utilisant la paramétrisation par longueur d'arc, conclure.

**Exercice 2.194.** (voir [98], chapitre 8)

Si  $\mu$  est une mesure de Borel (localement finie) sur  $\mathbb{R}^n$  et si  $s \geq 0$ , on définit sa  $s$ -énergie par

$$I_s(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu(x) d\mu(y).$$

1) Montrer que si  $f$  est une fonction positive mesurable (par rapport à  $\mu$ ), on a la formule de Cavalieri :

$$\int_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n, f(x) > t\}) dt.$$

En déduire que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$s \int_0^{+\infty} \frac{\mu(B(x, r))}{r^{s+1}} dr = \int_{\mathbb{R}^n} |x - y|^{-s} d\mu(y).$$

2) En utilisant le lemme de Frostman, déduire des questions précédentes que si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est un borélien, alors

$$Hdim(A) = \sup\{s; \text{Il existe } \mu \in \mathcal{M}(A) \text{ avec } I_s(\mu) < +\infty\}$$

où  $\mathcal{M}(A)$  est l'ensemble des mesures à support compact contenue dans  $A$  avec  $0 < \mu(A) < \infty$ .

3) Pour  $s \geq 0$ , on définit la  $s$ -capacité de Riesz d'un borélien  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  par

$$C_s(A) = \sup\{I_s(\mu)^{-1}; \mu \in \mathcal{M}_1(A)\}.$$

Ici,  $\mathcal{M}_1(A)$  est l'ensemble des mesures  $\mu \in \mathcal{M}(A)$  telles que  $\mu(A) = 1$  (c'est à dire les mesures de probabilité de  $\mathcal{M}(A)$ ).

Montrer que

$$Hdim(A) = \sup\{s \geq 0, C_s(A) > 0\}.$$

**Exercice 2.195.** [91] Soit  $(X, d)$  un espace métrique séparable. On appelle fonction de recouvrement de  $(X, d)$  une fonction  $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que

- Tout ensemble de diamètre  $\delta$  peut être recouvert par  $\phi(\varepsilon)$  ensembles de diamètre au plus  $\varepsilon\delta$ .
- Il existe  $C \geq 1$  et  $\beta > 0$  de sorte que  $\phi(\varepsilon) = C\varepsilon^\beta$ .

La dimension de Assouad de  $(X, d)$  est l'infimum des  $\beta$  pour lesquels il existe une telle fonction de recouvrement.

1) Montrer que la dimension d'Assouad de  $(X, d)$  est finie si et seulement si l'espace  $(X, d)$  est métriquement doublant.

2) Comparer la dimension d'Assouad et la dimension d'Hausdorff.

**Exercice 2.196.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$ . Montrer que  $E$  est Ahlfors-régulier de dimension  $Q$  si et seulement si  $E$  supporte une mesure  $\mu$  telle qu'il existe une constante  $C_\mu > 0$ ,  $C_\mu^{-1}R^Q \leq \mu(B(x, R)) \leq C_\mu R^Q$  pour tout  $x \in E$ , tout  $R \in ]0, \text{diam}E[$ .

**Exercice 2.197.** Soient  $B \subset A$  des ensembles  $\mathcal{H}^s$ -mesurables avec  $\mathcal{H}^s(A) < \infty$ . Comparer les densités inférieures (respectivement supérieures) de  $B$  et  $A$  en presque tout point  $b \in B$ .

**Exercice 2.198.** ([98], Chapitre 6). Construire un compact  $A \subset \mathbb{R}^2$  avec  $0 < \mathcal{H}^1(A) < \infty$  et  $\Theta_*^1(a, A) = 0$  en tout  $a \in A$  (indications : Partir du disque unité  $E_0$  de  $\mathbb{C}$  et construire par itération des ensembles  $E_k$  qui sont la réunion de disques de rayon  $r_k$  contenus dans les disques de  $E_{k-1}$ , chacun des disques de  $E_{k-1}$  contenant exactement  $m_k$  disques de  $E_k$ . En choisissant bien la répartition des disques et en supposant que les suites vérifient  $m_{k+1}r_{k+1}^s = r_k^s$ , conclure).

**Exercice 2.199.** Soit  $0 < s < 1$ . Dans tout ce problème,  $E \subset \mathbb{R}^n$  est un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$ . On se propose de démontrer dans les parties indépendantes 1, 2 et 3 des propriétés topologiques et géométriques de ce type d'ensemble. En particulier, la partie 2 propose une preuve du théorème de Marstrand dans ce cadre (voir [46], Théorème 4.2).

1) Démontrer que  $E$  est totalement disconnexe (c'est à dire les seules composantes connexes de  $E$  sont les singletons). Indications : Raisonner par l'absurde et considérer l'application  $f(y) = |x - y|$  où  $x$  est un point fixé d'une composante connexe de  $E$ .

2) On suppose que la densité  $\Theta^s(x, E)$  existe sur un sous-ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable de  $E$  de  $\mathcal{H}^s$ -mesure non nulle. Soit  $\rho > 0$  assez petit

2a) Démontrer qu'il existe un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable  $F \subset E$  avec  $\mathcal{H}^s(F) > 0$  tel que

(i)  $F$  est fermé ;

(ii) Pour tout  $x \in F$ ,  $\Theta^s(x, E)$  existe et  $\mathcal{H}^s(E \cap B(x, r)) > \frac{1}{2}\alpha(s)r^s$  pour tout  $0 < r < \rho$ .

Soit  $y$  un point d'accumulation de  $F$  et soit  $0 < \eta < 1$ .

2b) Démontrer que si on pose  $A_{r,\eta} = B(y, (1 + \eta)r) \setminus B(y, (1 - \eta)r)$ , alors

$$\lim_{r \rightarrow 0} \alpha(s)^{-1} r^{-s} \mathcal{H}^s(E \cap A_{r,\eta}) = \Theta^s(x, E)((1 + \eta)^s - (1 - \eta)^s).$$

2c) Démontrer qu'il existe une suite décroissante de réels  $(r_i)$  qui tend vers 0 et une suite  $(x_i)$  de points de  $F$  tels que

$$\mathcal{H}^s(E \cap A_{r_i,\eta}) \geq \mathcal{H}^s(E \cap B(x_i, \frac{\eta r_i}{2})) > \alpha(s) \frac{r_i^s \eta^s}{2}.$$

2d) Obtenir une contradiction de 2b et 2c, et conclure.

3) On dit qu'un ensemble  $F \subset \mathbb{R}^n$  est uniformément parfait s'il existe une constante  $C \geq 1$  telle que pour tout  $x \in F$  et tout  $r > 0$ ,  $F \cap (B(x, r) \setminus B(x, r/C)) \neq \emptyset$  dès que  $F \setminus B(x, r) \neq \emptyset$ .

1) Démontrer que l'ensemble triadique de Cantor  $\mathcal{C}$  est uniformément parfait. On rappelle que  $\mathcal{C} = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} I_j$

où pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$I_j = \bigcup_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{3^j-1} \left[ \frac{k}{3^j}, \frac{k+1}{3^j} \right].$$

2) Donner (sans preuve) un exemple d'ensemble du plan complexe qui soit Ahlfors-régulier de dimension  $d = 1/2$ .

3) Démontrer que tout ensemble Ahlfors-régulier  $E$  de dimension  $d$  avec  $0 < d < 1$  est uniformément parfait. Ce résultat est-il vrai si  $d \geq 1$  ?

**Exercice 2.200.** On note  $\delta_x$  la mesure de Dirac en  $x \in \mathbb{R}$ , c'est à dire  $\delta_x(A) = 1$  si  $x \in A$  et  $\delta_x(A) = 0$  sinon. On pose  $\mu_j = \frac{1}{j} \sum_{k=1}^j \delta_{k/j}$ . Montrer que la suite  $(\mu_j)$  converge faiblement vers la restriction de la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^1$  sur  $[0, 1]$ .

**Exercice 2.201.** ([45] Corollaire 1, page 84)

Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application (localement) lipschitzienne. On pose  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n; f(x) = 0\}$ . Démontrer qu'alors  $Df(x) = 0$  pour presque tout  $x \in Z$  (On pourra raisonner par l'absurde et supposer qu'il existe  $x \in Z$  qui est point de Lebesgue de  $Z$  et qui vérifie  $Df(x) \neq 0$ ).

**Exercice 2.202.** ([45] Corollaire 1, page 84)

Soient  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  deux applications (localement) lipschitziennes. On pose  $Z = \{x \in \mathbb{R}^n; g(f(x)) = x\}$ . Démontrer qu'alors  $Dg(f(x))Df(x) = I_d$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Ici,  $I_d$  est l'application identité sur  $\mathbb{R}^n$  (on pourra s'inspirer de la solution de l'exercice 2.201).

**Exercice 2.203.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\alpha > 0$ . On dit que  $E \subset X$  est  $\alpha$ -poreux si pour tout  $x \in E$ , il existe une suite  $(x_n)$  de  $X$  telle que  $E \cap B(x_n, \alpha d(x, x_n)) = \emptyset$ .

1) On se place dans le cadre  $X = \mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne. Démontrer que si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est  $\alpha$ -poreux (pour un certain  $\alpha > 0$ ), alors la fonction distance  $f(x) = d(x, E)$  est lipschitzienne et nulle part différentiable sur  $E$ .

2) On suppose que l'espace métrique  $(X, d)$  est muni d'une mesure doublante  $\mu$ . Soit  $E \subset X$  un ensemble  $\alpha$ -poreux (pour un certain  $\alpha > 0$ ). Montrer que  $\mu(E) = 0$ .

**Exercice 2.204.** Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $f(0) = 0$  et si  $(x, y) \neq (0, 0)$ ,  $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^6 + y^3}$ . Démontrer que  $f$  est  $G$ -différentiable en  $(0, 0)$  mais n'est pas continue en ce point.

**Exercice 2.205.** (Voir [14], chapitre 4)

1) Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et soit  $f : E \rightarrow F$  une application linéaire continue. Démontrer que  $f$  est  $F$ -différentiable et calculer sa  $F$ -différentielle.

2) Soient  $E, F$  deux espaces de Banach et soit  $f : E \rightarrow F$  une application.

2a) Démontrer si  $f$  est  $G$ -différentiable au voisinage de  $x_0$  et que  $df(x)$  est continue en  $x_0$ , c'est à dire  $\lim_{x \rightarrow x_0} \|df(x) - df(x_0)\| = 0$  (où  $\|\cdot\|$  est la norme usuelle sur l'ensemble des applications linéaires continues de  $E$  dans  $F$ ), alors  $f$  est  $F$ -différentiable en  $x_0$ . En déduire une définition raisonnable d'être une fonction  $f : E \rightarrow F$  de classe  $C^1$ .

2b) Démontrer si  $f$  est  $G$ -différentiable sur le segment  $I$  reliant  $x_0, y_0 \in I$  alors

$$\|f(y_0) - f(x_0)\|_F \leq \|y_0 - x_0\|_E \sup_{x \in I} \|df(x)\|.$$

3) Soient  $E, F$  et  $G$  trois espaces de Banach et soient  $f : E \rightarrow F, g : F \rightarrow G$  deux applications. On suppose que  $g \circ f$  est bien défini sur un ouvert  $\Omega$  de  $E$ , que  $f$  est  $F$ -différentiable en  $x_0 \in \Omega$  et que  $g$  est différentiable en  $f(x_0)$ . Démontrer que  $g \circ f$  est  $F$ -différentiable en  $x_0$  et déterminer sa  $F$ -différentielle en ce point.

4) Démontrer le même résultat que dans la question précédente en supposant seulement que  $f$  est  $G$ -différentiable en  $x_0$ .

**Exercice 2.206.** Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on pose  $\psi_t = \chi_{[0,t]}$  et on considère l'application  $\psi : [0, 1] \rightarrow L^1(\mathbb{R})$  définie par  $\psi(t) = \psi_t$  pour tout  $t \in [0, 1]$ .

1) Montrer que  $\psi$  est lipschitzienne.

2) Soit  $t \in ]0, 1[$ . On suppose que  $\psi$  est différentiable en  $t$ . Montrer qu'alors  $\frac{1}{h} \chi_{[t, t+h]}$  converge vers la mesure de Dirac  $\delta_t$  en un sens approprié (au sens des distributions par exemple) quand  $h \rightarrow 0^+$ .

3) En déduire que  $L^1(\mathbb{R})$  n'a pas la propriété de Radon-Nikodym.

**Exercice 2.207.** Soit  $\mathbb{H}$  le premier groupe d'Heisenberg. Démontrer que toute application  $\mathbb{H}$ -linéaire  $L : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$  est de la forme  $L(x) = Ax$  où  $A$  est une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & ad - bc \end{pmatrix}$$



avec  $a, b, c$  et  $d$  des réels.

**Exercice 2.208.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. On suppose que  $Y$  est complet. Démontrer que si  $A \subset X$  est dense et  $f : A \rightarrow Y$  est  $K$ -lipschitzienne, il existe une unique extension  $K$ -lipschitzienne  $\tilde{f} : X \rightarrow Y$  de  $f$ .

**Exercice 2.209.** ([120] Exercice 13)

Soit  $H$  un espace de Hilbert dont on note  $\|\cdot\|$  la norme. Le but est de montrer que si  $x_1, \dots, x_n$  et  $y_1, \dots, y_n$  sont des points de  $H$  qui vérifient pour tous  $i, j = 1, \dots, n$ ,  $\|y_i - y_j\| \leq \|x_i - x_j\| = r_i$ , alors pour tout  $x_0 \in H \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ , alors il existe  $y_0 \in H$  tel que  $\|y_i - y_0\| \leq \|x_i - x_0\|$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

1) On pose  $F(y) = \max_{1 \leq i \leq n} \|y_i - y\|/r_i$ . Montrer que  $F$  admet son maximum  $\lambda$  en un point  $y_0$  de l'enveloppe convexe  $C$  des  $y_1, \dots, y_n$ .

2) Montrer que pour tous  $z_0, \dots, z_m$ , et tous  $a_1, \dots, a_m$  dans  $\mathbb{R}$ , on a

$$\sum_{1 \leq i, j \leq m} a_i a_j \left( \|z_i - z_0\|^2 + \|z_j - z_0\|^2 - \|z_i - z_j\|^2 \right) = 2 \left\| \sum_{i=1}^m a_i (z_i - z_0) \right\|^2.$$

3) Quite à permuter les  $y_i$ , on peut supposer qu'il existe  $1 \leq m \leq n$  tel que  $\|y_j - y_0\| = \lambda \|x_j - x_0\|$  pour  $1 \leq j \leq m$  et  $\|y_j - y_0\| < \lambda \|x_j - x_0\|$  pour  $m+1 \leq j \leq n$ . Montrer que  $y_0$  est dans l'enveloppe convexe de  $y_1, \dots, y_m$ .

4) On a donc une relation convexe de la forme  $\sum_{i=1}^m \lambda_i (y_i - y_0) = 0$  avec  $\lambda_i \geq 0$  et  $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ . Montrer que  $\lambda^2 \leq 1$  puis conclure.

**Exercice 2.210.** Soit  $\mathbb{R}$  muni de la distance euclidienne. Démontrer que  $Ndim(\mathbb{R}) = 1$  où  $Ndim$  est la dimension de Nagata.

**Exercice 2.211.** Soit  $Y$  un espace métrique géodésique tel qu'il existe  $\delta > 0$  telle que la propriété de convexité suivante est vérifiée. Si  $x, y$  et  $z$  sont dans  $Y$  et si  $\gamma_{xy}$  et  $\gamma_{xz}$  sont des géodésiques dans  $Y$  reliant respectivement  $x$  à  $y$  et  $x$  à  $z$ , alors pour tout  $t$ ,  $d_Y(\gamma_{xy}(t), \gamma_{xz}(t)) \leq \delta d_Y(y, z)$ . Montrer que  $Y$  est  $m$ -connecté pour tout  $m \geq 0$ .

**Exercice 2.212.** [98] Démontrer les propriétés suivantes des ensembles  $s$ -rectifiables dans  $\mathbb{R}^n$ .

- La restriction de la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  à un ensemble  $s$ -rectifiable est  $\sigma$ -finie ;
- Tout sous-ensemble d'un ensemble  $s$ -rectifiable est  $s$ -rectifiable ;
- Toute réunion dénombrable d'ensembles  $s$ -rectifiables est  $s$ -rectifiable.

**Exercice 2.213.** [98] Déterminer les mesures tangentes de la mesure  $\mu$  dans les cas suivants :

- 1)  $\mu$  est la restriction de la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^s$  à un  $s$ -plan  $P$  de  $\mathbb{R}^n$  ;
- 2)  $\mu$  est la restriction de la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$  à une ensemble  $\mathcal{L}^n$ -mesurable  $A \subset \mathbb{R}^n$  (indication : appliquer le théorème de densité de Lebesgue).
- 3)  $\mu$  est la restriction de la 1-mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^1$  à une courbe rectifiable  $\Gamma$  de  $\mathbb{R}^n$  (indication : utiliser le théorème de Rademacher).

**Exercice 2.214.** [39]

1) Soient  $s \geq 0$ ,  $\mu \in \mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n)$  une mesure  $s$ -uniforme et  $x$  dans le support de  $\mu$ . Montrer qu'alors

$$\emptyset \neq \text{Tan}_s(\mu, x) \subset \mathcal{U}_s(\mathbb{R}^n).$$

2) Soient  $s \geq 0$ ,  $\mu$  une mesure sur  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f \in L^1(\mu)$  une fonction borélienne positive. Montrer que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\text{Tan}_s(f\mu, x) = f(x)\text{Tan}_s(\mu, x).$$

(indication : utiliser le théorème de différentiation de Lebesgue).

**Exercice 2.215.** 1) Soit  $C$  l'ensemble de Cantor 4-coins. Démontrer qu'en tout point de  $C$ , il n'existe pas de droite tangente approximative.

2) Soit  $\Gamma$  un graphe lipschitzien de dimension  $s$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Démontrer qu'en  $\mathcal{H}^s$ -presque tout  $x \in \Gamma$ , il existe un  $s$ -plan tangent approximatif à  $\Gamma$ .

3) Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble Ahlfors régulier de dimension  $s$ . Démontrer que si  $P \in G(n, s)$  est un plan tangent approximatif à  $E$  en  $x \in E$ , alors il existe  $\delta > 0$  tel que  $C(x, P, \delta) = \emptyset$  (on dit alors que  $E$  a un plan tangent en  $x$ ).

4) Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  un ensemble  $\mathcal{H}^s$ -mesurable avec  $\mathcal{H}^s(E) < \infty$ . Démontrer que si un  $s$ -plan tangent approximatif existe en  $x \in E$ , alors ce plan tangent est unique (on pourra utiliser le théorème de densité pour les mesures de Hausdorff).

**Exercice 2.216.** Soit  $F \subset \mathbb{R}$  un compact avec  $\mathcal{L}^1(F) > 0$ . Montrer que pour tout  $\delta > 0$ , il existe un intervalle  $J$  tel que  $\mathcal{L}^1(F \cap J) \geq (1 - \delta)\mathcal{L}^1(J)$  (attention, ce résultat est un cas particulier du théorème de différentiation de Lebesgue mais que l'on ne doit pas utiliser !).

**Exercice 2.217.** Soit  $E = [a, b]$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ . Montrer que  $E$  est de périmètre fini et déterminer  $P(E)$ . Comparer avec  $\mathcal{H}^0(\partial E)$ .

**Exercice 2.218.** Soient  $E$  et  $E'$  deux sous-ensembles de  $\mathbb{R}^n$  tels que  $\mathcal{L}^n(E \Delta E') = 0$  où  $E \Delta E'$  est la différence symétrique de  $E$  et  $E'$  (c'est à dire  $E \Delta E' = (E \setminus E') \cup (E' \setminus E)$ ). Montrer que  $P(E) = P(E')$ . En déduire que si  $\mathcal{L}^n(E) = 0$ , alors  $P(E) = 0$ .

**Exercice 2.219.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  à support compact. Montrer pour tout  $x \in \mathbb{R}$  l'existence de la valeur principale

$$Hf(x) = 1/\pi \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

(indication : Utiliser le fait que  $\int_{\varepsilon < |x-y| \leq r} \frac{1}{x-y} dy = 0$  pour  $0 < \varepsilon < r$ )

**Exercice 2.220.** [111] Le but de cet exercice est de démontrer la proposition 2.149. On définit la capacité analytique  $\gamma(E)$  d'un compact  $E$  de  $\mathbb{C}$  par

$$\gamma(E) = \sup\{|f'(\infty)| : f \text{ est analytique dans } \mathbb{C} \setminus E, f(\infty) = 0, \text{ et } \|f\|_\infty \leq 1\},$$

où  $\|f\|_\infty = \sup_{z \in \mathbb{C} \setminus E} |f(z)|$ ,  $f(\infty) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} f(z)$  et  $f'(\infty) = \lim_{|z| \rightarrow +\infty} z(f(z) - f(\infty))$ .

Considérons les propriétés suivantes :

(i)  $\gamma(E) = 0$  ;

(ii) Toute fonction analytique bornée  $f : \mathbb{C} \setminus E \rightarrow \mathbb{C}$  est constante ;

(iii)  $E$  est effaçable pour les fonctions holomorphes bornées.

Le but de ce qui suit est de démontrer que ces conditions sont équivalentes.

1) Démontrer que (ii)  $\Rightarrow$  (i). En raisonnant par contraposée, démontrer que la réciproque est aussi vraie.

2) Démontrer que (iii)  $\Rightarrow$  (ii).

3) On admettra que si le compact  $E \subset \mathbb{C}$  vérifie (ii), alors pour tout ouvert  $U$  de  $\mathbb{C}$  contenant  $E$ , pour tout  $z \in U \setminus E$ , nous avons la propriété (P) suivante :

Il existe des compacts  $K_1$  et  $K_2$  dans  $U$  de sorte que  $K_2 \subset K_1$ ,  $z \in \text{int}(K_1) \setminus K_2$  et  $E \subset K_2$ . De plus, les bords notés  $\Gamma_j$  des  $K_j$  ( $j = 1, 2$ ) sont des courbes simples fermées de classe  $C^1$  par morceaux.

Nous supposons dans la suite que  $E$  vérifie cette propriété (ii).

3a) Soit  $U \subset \mathbb{C}$  un ouvert contenant  $E$  et soit  $f$  est une fonction holomorphe bornée sur  $U \setminus E$ .

3b) Démontrer que si  $z \in \mathbb{C} \setminus E$

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi,$$

où les  $\Gamma_j$  sont les bords des compacts  $K_j$  de la propriété (P) en  $z$ .

3c) Posons, pour  $k = 1, 2$ ,  $f_k(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma_k} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ . Démontrer que les définitions de  $f_1(z)$  et  $f_2(z)$  ne dépendent pas du choix de  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  (tant que la propriété (P) reste vraie).

3d) Démontrer que les formules donnant  $f_1$  et  $f_2$  permettent de définir des fonctions respectivement holomorphe sur  $U$  et holomorphe bornée sur  $\mathbb{C} \setminus E$ .

3e) Conclure.

Nous allons maintenant démontrer (i).

4) Soit  $F \subset \mathbb{C}$ . Nous dirons que  $F$  est de longueur de Painlevé nulle si pour tout  $\varepsilon > 0$  (assez petit), il existe une famille finie disjointe de compacts  $K_1, \dots, K_{N(\varepsilon)}$  de sorte que les bords des  $K_j$ , notés  $\Gamma_j = \partial K_j$ , sont des courbes simples fermées de classe  $C^1$  par morceaux,  $E$  est contenu dans l'union des intérieurs des  $K_j$  et  $\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)} l(\Gamma_k) \leq \varepsilon$  (où  $l(\Gamma)$  est la longueur de la courbe  $\Gamma$ ).

4a) Démontrer que tout singleton de  $\mathbb{C}$  est de longueur nulle. Plus généralement, montrer que tout sous-ensemble  $F$  du plan complexe avec  $H^1(F) = 0$  est de longueur de Painlevé nulle.

Dans la suite,  $E$  est un compact de  $\mathbb{C}$  de longueur de Painlevé nulle. Nous noterons, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $K_j$  et  $\Gamma_j$ ,  $j = 1, \dots, N(\varepsilon)$ , les compacts et leurs bords donnés par la définition ci-dessus.

Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus E$  telle que  $\|f\|_\infty \leq 1$  et  $f(\infty) = 0$ . Fixons  $z \in \mathbb{C} \setminus E$  et soit  $0 < \varepsilon < d(z, E)/2$ .

4b) Démontrer que pour  $R > 0$  assez grand,

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,R)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2i\pi} \int_{\cup_{j=1}^{N(\varepsilon)} \Gamma_j} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

4c) En déduire que  $|f(z)| \leq \varepsilon/d(z, E)$ .

4d) Déduire que tout compact de longueur nulle est effaçable pour les fonctions holomorphes bornées.

Nous terminons par la démonstration de (ii).

5a) Soit  $E$  un compact du plan complexe de dimension  $Q > 1$ . Montrer qu'il existe une mesure positive  $\mu$  supportée sur  $E$  telle que  $\mu(E) = 1$  et telle qu'il existe des constantes  $C_0$  et  $Q' > 1$  de sorte que  $\mu(D(z, r)) \leq C_0 r^{Q'}$  pour tout  $z \in \mathbb{C}$  et tout  $r > 0$ .

5b) Soit  $E$  un compact de  $\mathbb{C}$  de dimension  $Q > 1$  et soit  $\mu$  une mesure associée. Posons pour  $z \notin E$

$$f(z) = \int_E \frac{d\mu(\xi)}{\xi - z}.$$

Démontrer que  $f$  est holomorphe sur  $\mathbb{C} \setminus E$ .

En notant que

$$|f(z)| \leq \int_{|\xi-z| \geq 1} d\mu(\xi) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{2^{-j} \geq |\xi-z| \geq 2^{-j-1}} |z - \xi|^{-1} d\mu(\xi),$$

démontrer que  $f$  est bornée sur  $\mathbb{C} \setminus E$ .

5c) Dédurre de 1) que tout compact de  $\mathbb{C}$  de dimension  $Q > 1$  n'est pas effaçable.

**Exercice 2.221.** ([45], section 3.3.4)

1) Démontrer que si  $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  est une application linéaire avec  $n \leq m$ , alors  $\|L\|^2$  (voir section 3.3 pour la définition) est la somme des carrés des déterminants de toutes les  $n \times n$  sous-matrices de la matrice de  $L$  dans les bases canoniques de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbb{R}^m$ .

2) Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^m$  une application lipschitzienne injective. Démontrer que, si  $C = f([a, b])$  est la courbe associée, sa longueur est donnée par  $\mathcal{H}^1(C) = \int_a^b |f'(t)| dt$ .

3) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application lipschitzienne et soit  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Démontrer que si  $G = \{(x, f(x)); x \in U\}$  est le graphe de  $f$  au dessus de  $U$ , sa mesure de surface est donnée par  $\mathcal{H}^n(G) = \int_U (1 + (Df)^2)^{1/2} dt$ .

**Exercice 2.222.** ([45], section 3.4.4)

1) Soit  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une application intégrable (par rapport à  $\mathcal{L}^n$ ). Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g dx = \int_0^{+\infty} \left( \int_{\partial B(0,r)} g d\mathcal{H}^{n-1} \right) dr$$

et donc qu'en particulier, pour  $\mathcal{L}^1$ -presque tout  $r > 0$ , on a

$$\frac{d}{dr} \left( \int_{B(0,r)} g dx \right) = \int_{\partial B(0,r)} g d\mathcal{H}^{n-1}.$$

2) Soit  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application lipschitzienne. Démontrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Df| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^{n-1}(\{f = t\}) dt.$$

**Exercice 2.223.** ([80], Section 5.2.1)

1) Démontrer qu'il existe une constante  $C > 0$  telle si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m < n$ ) est lipschitzienne et  $A \subset \mathbb{R}^n$  est mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y)) d\mathcal{H}^m(y) \leq C \text{Lip}(f)^m \mathcal{H}^n(A).$$

2) En déduire que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  ( $m < n$ ) est lipschitzienne et  $A \subset \mathbb{R}^n$  est mesurable, alors l'application  $y \rightarrow \mathcal{H}^{n-m}(A \cap f^{-1}(y))$  est  $\mathcal{H}^m$ -mesurable dans  $\mathbb{R}^m$ .

**Exercice 2.224.** ([105], section 2.6)

Démontrer que la fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  a une limite approximative  $l$  en  $a$  si et seulement si il existe un ensemble  $B \subset A$  tel que  $B^c$  soit de  $n$ -densité 0 en  $a$  et  $f_B$  a pour limite (au sens usuel)  $l$  en  $a$ .



# Chapitre 3

## Espaces de Sobolev

Ce chapitre est consacré aux espaces de Sobolev dans les espaces métriques. Nous commencerons par présenter les espaces de Sobolev  $W^{1,p}$  dans des ouverts de l'espace euclidien (section 1), avant de définir deux classes d'espaces de Sobolev sur un espace métrique, qui généralisent les espaces  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . L'une, due à Shanmugalingham, est définie à l'aide de gradients supérieurs (voir la section 2.3), dont l'introduction nécessite diverses considérations sur les courbes rectifiables dans un espace métrique (et en particulier la notion de module d'une famille de courbes), qui feront l'objet de la section 2.1. L'autre classe d'espaces de Sobolev, due à Hajlasz, est définie par une inégalité ponctuelle (section 2.5).

### 1 Espaces de Sobolev dans des ouverts de $\mathbb{R}^n$

On présente ici une partie de la théorie de base des espaces de Sobolev dans des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . De nombreux ouvrages sont consacrés à cette question, et cette section s'en inspire largement. On pourra consulter [1, 22, 44, 102, 154].

#### 1.1 Introduction

Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On cherche une fonction  $u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue, de classe  $C^2$  sur  $I := ]0, 1[$ , telle que

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{dans } I, \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Une telle fonction  $u$  s'appellera une solution classique de (3.1).

Soit  $u$  une solution classique de (3.1) et  $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ . En multipliant (3.1) par  $\varphi$  et en intégrant par parties, on obtient

$$\int_0^1 u'(x)\varphi'(x)dx + \int_0^1 u(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 f(x)\varphi(x)dx. \quad (3.2)$$

L'équation (3.2) a un sens dès que  $u$  est de classe  $C^1$ . Une fonction  $u$  de classe  $C^1$  vérifiant (3.2) pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$  s'appelle une solution faible de (3.1).

Pour résoudre le problème (3.1), on cherche d'abord une solution faible, en un sens encore plus général. Cette résolution fait intervenir les espaces de Sobolev sur  $]0, 1[$ . On montre que cette solution existe et est unique. Puis on montre que cette solution faible est en fait de classe  $C^2$  dans  $]0, 1[$ . Enfin, on en déduit que  $u$  est une solution classique de (3.1). En effet, pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(]0, 1[)$ , (3.2) montre que

$$\int_0^1 (-u''(x) + u(x) - f(x))\varphi(x)dx = 0,$$

ce qui entraîne que  $u$  est une solution classique de (3.1) par densité de  $C_c^\infty(]0, 1[)$  dans  $L^2(]0, 1[)$ . Cet exemple suggère qu'il est possible de donner un sens à la dérivée de fonctions qui ne sont pas dérivables au sens classique, en multipliant par une fonction très régulière et en intégrant ensuite par parties. Si  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, on va définir les espaces de Sobolev sur  $U$  en suivant cette idée, et donner leurs principales propriétés. Pour cela, on va d'abord considérer des espaces directement reliés, les espaces de Hölder sur  $U$ .

## 1.2 Espaces de Hölder

**Définition 3.3.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné et  $\gamma \in ]0, 1]$ .

1. Si  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, on dit que  $u$  est hölderienne d'exposant  $\gamma$  si, et seulement si, il existe  $C > 0$  tel que, pour tous  $x, y \in U$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^\gamma. \quad (3.4)$$

Une telle fonction se prolonge en une fonction continue sur  $\overline{U}$  et le prolongement vérifie encore (3.4).

2. L'espace  $C^{0,\gamma}(\overline{U})$  est l'espace des fonctions  $u$  sur  $U$  hölderiennes d'exposant  $\gamma$  sur  $U$ . On pose alors, pour toute  $u \in C^{0,\gamma}(\overline{U})$ ,

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{U})} := \sup_{x \in U} |u(x)| + \sup_{x,y \in U, x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma}.$$

Il est facile de vérifier :

**Théorème 3.5.** *L'espace  $C^{0,\gamma}(\overline{U})$  est un espace de Banach.*

On notera que, si  $0 < \alpha < \beta \leq 1$ , alors  $C^{0,\beta}(\overline{U}) \subset C^{0,\alpha}(\overline{U})$  et l'inclusion est stricte. Ainsi, si  $n = 1$  et  $I = ]0, 1[$ , la fonction  $x \mapsto x^\alpha$  appartient à  $C^{0,\alpha}(\overline{I})$  mais n'est dans aucun  $C^{0,\beta}(\overline{I})$  pour  $\beta > \alpha$ .

## 1.3 Dérivée faible

Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$ . Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  et tout  $1 \leq i \leq n$ , on a, en intégrant par parties,

$$\int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx.$$

Si la fonction  $u$  n'est pas de classe  $C^1$ , cette formule n'a pas de sens, mais on s'inspire de ce calcul pour définir une notion de dérivée faible :

**Définition 3.6.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $1 \leq i \leq n$ , et  $u, v \in L^1_{loc}(U)$ . On dira que  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = v$  si, et seulement si, pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ,

$$\int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U v(x) \varphi(x) dx.$$

Dans ce cas,  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est une (la) dérivée faible de  $u$  par rapport à la variable  $x_i$ .

**Remarque 3.7.** 1. En d'autres termes, cela signifie que, si on considère  $u$  comme une distribution sur  $U$ , alors  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  est en fait une fonction localement intégrable. Nous n'utiliserons pas le point de vue des distributions dans la suite de ce chapitre.

2. Si  $u$  est de classe  $C^1$  sur  $U$ , alors ses dérivées faibles dans  $U$  coïncident avec ses dérivées au sens classique.

Si elle existe, la dérivée faible de  $u$  par rapport à la variable  $x_i$  est unique :

**Lemme 3.8.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert,  $1 \leq i \leq n$ , et  $u \in L^1_{loc}(U)$ . Si  $v, w \in L^1_{loc}(U)$  sont des dérivées faibles de  $u$  par rapport à la variable  $x_i$ , alors  $v = w$  presque partout dans  $U$ .

La preuve utilise :

**Lemme 3.9.** Soit  $u \in L^1_{loc}(U)$ . On suppose que  $\int_U u(x)\varphi(x)dx = 0$  pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Alors  $u(x) = 0$  pour presque tout  $x \in U$ .

La preuve du lemme 3.9 utilise la notion d'approximation de l'identité, que l'on rappelle ici :

**Définition 3.10.** On appelle **approximation de l'identité** toute suite de fonctions  $(\rho_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que, pour tout  $k \geq 1$ ,

1.  $\text{supp } \rho_k \subset B\left(0, \frac{1}{k}\right)$ ,
2. pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\rho_k(x) \geq 0$ ,
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_k(x)dx = 1$ .

Voici un exemple :

**Exemple 3.11.** Soit  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  non identiquement nulle telle que  $\rho(x) \geq 0$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\text{supp } \rho \subset \overline{B}(0, 1)$ . Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose

$$\rho_k(x) := Ck^n \rho(kx)$$

avec  $C := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)dx}$ . Alors la suite  $(\rho_k)_{k \geq 1}$  est une approximation de l'identité.

*Preuve du lemme 3.9.* Soit  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction dont le support est un compact inclus dans  $U$ . On fixe une approximation de l'identité  $(\rho_k)_{k \geq 1}$ . Pour tout  $k \geq 1$ , soit  $g_k := \rho_k * g$ . Pour  $k$  assez grand,  $g_k \in C_c^\infty(U)$ , de sorte que

$$\int_U u(x)g_k(x)dx = 0.$$

Comme  $g_k \rightarrow g$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , quitte à extraire, on peut supposer que  $g_k(x) \rightarrow g(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . De plus,  $\|g_k\|_\infty \leq \|g\|_\infty$ . Par le théorème de convergence dominée, on a donc

$$\int_U u(x)g(x)dx = 0. \tag{3.12}$$

Soit maintenant  $K \subset U$  un compact. On définit, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$g(x) := \begin{cases} \frac{u(x)}{|u(x)|} & \text{si } x \in K \text{ et } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{si } u(x) = 0 \text{ ou } x \in \mathbb{R}^n \setminus K. \end{cases}$$

Alors, en appliquant (3.12) à  $g$ , on obtient que

$$\int_K |u(x)| dx = 0,$$

ce qui montre que  $u(x) = 0$  pour presque tout  $x \in K$ . Comme c'est vrai pour tout compact  $K \subset U$ , on obtient bien la conclusion voulue.  $\square$

*Preuve du lemme 3.8.* Comme  $\int_U (v - w)(x)\varphi(x)dx = 0$  pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , le lemme 3.9 assure que  $v = w$  presque partout dans  $U$ .  $\square$



**Exemple 3.13.** Pour  $n = 1$  et  $U = ]0, 2[$ , on pose

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Alors la dérivée faible de  $u$  est la fonction  $v$  donnée par

$$v(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

**Exemple 3.14.** Pour  $n = 1$  et  $U = ]0, 2[$ , on pose

$$u(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ 2 & \text{si } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$

Cette fonction  $u$  ne possède pas de dérivée faible. En effet, si  $v$  est cette dérivée, alors pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ,

$$\int_0^2 v(x)\varphi(x)dx = \int_0^1 \varphi(x)dx + \varphi(1).$$

Si  $(\varphi_n)_{n \geq 1}$  est une suite de fonctions dans  $C_c^\infty(U)$  telles que

$$0 \leq \varphi_n \leq 1, \varphi_n(x) \rightarrow 0 \text{ pour tout } x \neq 1 \text{ et } \varphi_n(1) = 1,$$

on obtient, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$\int_0^2 v(x)\varphi_n(x)dx = \int_0^1 \varphi_n(x)dx + \varphi_n(1),$$

d'où une contradiction en passant à la limite quand  $n \rightarrow +\infty$ .

#### 1.4 Définition des espaces de Sobolev $W^{1,p}$

**Définition 3.15.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $1 \leq p \leq +\infty$ . On appelle  $W^{1,p}(U)$  l'espace des fonctions  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la dérivée faible  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  existe et appartient à  $L^p(U)$ . Si  $u \in W^{1,p}(U)$ , on définit

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)} := \begin{cases} \left( \int_U |u(x)|^p dx + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_U \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \|u\|_{L^\infty(U)} + \sum_{1 \leq i \leq n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(U)} & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

On vérifie que  $\|\cdot\|_{W^{1,p}(U)}$  est une norme.

**Exemple 3.16.** Si  $U = B(0, 1)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $u(x) = |x|^{-\alpha}$  avec  $\alpha > 0$ , la fonction  $u \in W^{1,p}(U)$  si, et seulement si,  $\alpha < \frac{n-p}{p}$ . On a, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{-\alpha x_i}{|x|^{\alpha+2}}.$$

**Théorème 3.17.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ .

1. L'espace  $W^{1,p}(U)$  est un espace de Banach. Si  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $W^{1,p}(U)$  est réflexif. Si  $p \in [1, +\infty[$ ,  $W^{1,p}(U)$  est séparable.

2. L'espace  $W^{1,2}(U)$  est un espace de Hilbert, pour le produit scalaire

$$\langle u, v \rangle := \int_U u(x)v(x)dx + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx.$$

*Démonstration.* Pour 1., soit  $(u_j)_{j \geq 1}$  une suite de Cauchy dans  $W^{1,p}(U)$ . La suite  $(u_j)_{j \geq 1}$  est de Cauchy dans  $L^p(U)$  donc converge vers  $u \in L^p(U)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la suite  $\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{j \geq 1}$  est de Cauchy dans  $L^p(U)$  donc converge vers une fonction  $u^{(i)}$  dans  $L^p(U)$ . On vérifie alors que  $u \in W^{1,p}(U)$  et que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u^{(i)}$ . En effet, si  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ,

$$\int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_U u_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx = - \lim_{j \rightarrow +\infty} \int_U \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) \varphi(x)dx = - \int_U u^{(i)}(x) \varphi(x)dx. \blacksquare$$

Finalement,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$  converge bien vers  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  dans  $L^p(U)$ , ce qui montre bien que  $u_j \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(U)$ .

Soit  $1 < p < +\infty$ . Comme  $E = (L^p(U))^{n+1}$  est réflexif et que  $T : W^{1,p}(U) \rightarrow E$  défini par  $T(u) := \left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$  est une isométrie de  $W^{1,p}(U)$  dans  $E$ ,  $T(W^{1,p}(U))$  est un sous-espace fermé de  $E$ , donc est réflexif. On en déduit que  $W^{1,p}(U)$  est lui-même réflexif.

Si  $1 \leq p < +\infty$ , comme  $E$  est séparable,  $T(W^{1,p}(U))$  est aussi séparable, donc il en est de même pour  $W^{1,p}(U)$ .

Enfin, on vérifie immédiatement que l'expression donnée dans l'énoncé du théorème 2., est un produit scalaire, et comme  $W^{1,2}(U)$  est complet, c'est un espace de Hilbert.  $\square$

**Corollaire 3.18.** Soit  $(u_j)_{j \geq 1}$  une suite dans  $W^{1,p}(U)$  telle que  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^p(U)$ .

1. Si pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rightarrow u^{(i)}$  dans  $L^p(U)$ , alors  $u \in W^{1,p}(U)$  et  $u_j \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(U)$ .
2. Si  $1 < p \leq +\infty$  et si, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , la suite  $\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)_{j \geq 1}$  est bornée dans  $L^p(U)$ , alors  $u \in W^{1,p}(U)$ .

*Démonstration.* Pour 1., la suite  $(u_j)_{j \geq 1}$  est de Cauchy dans  $W^{1,p}(U)$  donc converge vers  $v \in W^{1,p}(U)$ , donc en particulier dans  $L^p(U)$ . On a donc  $u = v$ .

Pour 2., on peut extraire de  $(u_j)_{j \geq 1}$  une suite  $(u_{\varphi(j)})_{j \geq 1}$  telle que, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\frac{\partial u_{\varphi(j)}}{\partial x_i}$  converge vers  $u^{(i)}$  dans  $L^p(U)$  pour la topologie faible-\*. La fonction  $u$  appartient à  $L^p(U)$  et, en raisonnant comme dans la preuve du théorème 3.17, on montre que  $\frac{\partial u}{\partial x_i} = u^{(i)}$  pour tout  $1 \leq i \leq n$ . Comme  $u^{(i)} \in L^p(U)$ , cela termine la preuve.  $\square$

On a aussi les deux propriétés suivantes :

**Proposition 3.19.** Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $u \in W^{1,p}(U)$ . Alors :

1. Pour tout ouvert  $V \subset U$ ,  $u \in W^{1,p}(V)$ .
2. Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ,  $\varphi u \in W^{1,p}(U)$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\frac{\partial(\varphi u)}{\partial x_i} = \varphi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (3.20)$$

*Démonstration.* Pour 1., il suffit de remarquer que  $C_c^\infty(V) \subset C_c^\infty(U)$ . Pour le 2., pour toute  $\psi \in C_c^\infty(U)$  et tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \int_U \varphi(x)u(x) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x)dx &= \int_U u(x) \frac{\partial(\psi \varphi)}{\partial x_i}(x)dx - \int_U u(x)\psi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx \\ &= - \int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\psi(x)\varphi(x)dx - \int_U u(x)\psi(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)dx, \end{aligned}$$

ce qui donne bien (3.20), et donc  $\frac{\partial(\varphi u)}{\partial x_i} \in L^p(U)$ .  $\square$

## 1.5 Un premier résultat d'approximation : le théorème de Friedrichs

**Théorème 3.21.** [Théorème d'approximation de Friedrichs] Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $u \in W^{1,p}(U)$  avec  $p \in [1, +\infty[$ . Alors il existe une suite de fonctions  $(u_j)_{j \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que :

1.  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^p(U)$ ,
2. pour tout ouvert  $V \subset\subset U$  (ce qui signifie que  $\bar{V}$  est un compact inclus dans  $U$ ) et tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$  dans  $L^p(V)$ .

Si  $U = \mathbb{R}^n$  et  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , alors il existe une suite de fonctions  $(u_j)_{j \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que  $u_j \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

**Remarque 3.22.** On notera que, dans le théorème 3.21, on n'obtient pas la convergence de  $u_j$  vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$  en général, sauf dans le cas  $U = \mathbb{R}^n$ . En général,  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)|_U$  n'est pas dense dans  $W^{1,p}(U)$ , voir par exemple [102, Section 1.1.6].

Pour la preuve du théorème 3.21, on va utiliser :

**Lemme 3.23.** Soient  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors  $\rho * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\frac{\partial(\rho * v)}{\partial x_i} = \rho * \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right). \quad (3.24)$$

*Preuve du lemme 3.23 :* on suppose d'abord que  $\rho$  est à support compact. On sait déjà que  $\rho * v \in L^p(\mathbb{R}^n)$  par l'inégalité de Young. Soit maintenant  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$I := \int_{\mathbb{R}^n} (\rho * v)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y)v(y)dy \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx.$$

Or, par le théorème de Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)| |v(y)| dy \right) \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)| \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\rho(x-y)| \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) \right| dx \right) dy < +\infty,$$

car dans cette dernière intégrale, comme  $\rho$  et  $\varphi$  sont à support compact, on peut supposer que  $y$  varie dans un compact de  $\mathbb{R}^n$ , sur lequel  $v$  est intégrable. Le théorème de Fubini montre donc que

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \left( \check{\rho} * \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) (y) dy, \end{aligned}$$

où

$$\check{\rho}(z) := \rho(-z).$$

On a donc, en utilisant le théorème de Fubini à nouveau,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\mathbb{R}^n} v(y) \frac{\partial (\check{\rho} * \varphi)}{\partial x_i}(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) (\check{\rho} * \varphi)(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) \varphi(x) dx \right) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x-y) \frac{\partial v}{\partial x_i}(y) dy \right) dx, \end{aligned}$$

ce qui donne bien (3.24). Comme  $\rho * \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , on a bien la conclusion dans ce cas.

On passe maintenant au cas  $\rho \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Il existe une suite  $(\rho_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $\rho$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $k \geq 1$ ,  $\rho_k * v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\frac{\partial(\rho_k * v)}{\partial x_i} = \rho_k * \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right).$$

Or l'inégalité de Young assure que  $\rho_k * v \rightarrow \rho * v$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $\rho_k * \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right) \rightarrow \rho * \left( \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\rho * v)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (\rho_k * v)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\ &= - \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \rho_k * \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)(x) \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \left( \rho * \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

Pour toute fonction  $h$  sur  $U$ , on notera  $\tilde{h}$  le prolongement de  $h$  à  $\mathbb{R}^n$  obtenu en posant  $h(x) = 0$  pour tout  $x \notin U$ . On utilisera aussi l'observation suivante :

**Lemme 3.25.** Soient  $u \in W^{1,p}(U)$  et  $\psi \in C_c^\infty(U)$ . Alors  $\widetilde{\psi u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\frac{\partial(\widetilde{\psi u})}{\partial x_i} = u \frac{\partial \widetilde{\psi}}{\partial x_i} + \psi \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

*Preuve du lemme 3.25 :* soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Alors, pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{\psi u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_U \psi(x) u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx,$$

et, d'après (3.20), cette dernière intégrale est égale à

$$- \int_U \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) u(x) \varphi(x) dx - \int_U \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \psi(x) \varphi(x) dx,$$

ce qui permet de conclure. □

*Preuve du théorème 3.21 :* soient  $(\rho_j)_{j \geq 1}$  une approximation de l'identité et  $v_j = \rho_j * \tilde{u}$ , de sorte que  $v_j \rightarrow \tilde{u}$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Soit maintenant  $V \subset\subset U$ . On fixe  $V \subset\subset W \subset\subset U$  et une fonction  $\psi \in C_c^\infty(U)$  telle que  $\psi(x) = 1$  pour tout  $x \in W$ . On remarque qu'il existe  $k_0 \geq 1$  tel que, pour tout  $k \geq k_0$  et tout  $x \in V$ ,

$$\left( \rho_k * \widetilde{\psi u} \right)(x) = \left( \rho_k * \tilde{u} \right)(x). \quad (3.26)$$

En effet, on choisit  $k_0$  tel que  $\frac{1}{k_0} < d(V, \mathbb{R}^n \setminus W)$ . Soient alors  $k \geq k_0$  et  $x \in V$ . Si  $y \in \mathbb{R}^n$  et  $|x - y| \leq \frac{1}{k}$ , on a donc  $|x - y| < d(V, \mathbb{R}^n \setminus W)$  donc  $y \in W$ . Puisque  $\psi = 1$  sur  $W$  et  $\rho_k$  est à support dans  $B\left(0, \frac{1}{k}\right)$ , on en déduit que

$$\begin{aligned} \left( \rho_k * \widetilde{\psi u} \right)(x) &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \rho_k(x - y) \widetilde{\psi u}(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n, |x-y| \leq \frac{1}{k}} \rho_k(x - y) \widetilde{\psi u}(y) dy \\ &= \int_{y \in W} \rho_k(x - y) \widetilde{\psi u}(y) dy \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^n} \rho_k(x - y) \tilde{u}(y) dy \\ &= \rho_k * \tilde{u}(x). \end{aligned}$$

Comme, d'après les lemmes 3.23 et 3.25,

$$\frac{\partial (\rho_k * \widetilde{\psi}u)}{\partial x_i} = \rho_k * \frac{\partial \widetilde{\psi}u}{\partial x_i} = \rho_k * \left( \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right),$$

on a donc

$$\frac{\partial (\rho_k * \widetilde{\psi}u)}{\partial x_i} \rightarrow \psi \frac{\partial u}{\partial x_i} + u \frac{\partial \psi}{\partial x_i}$$

dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . En particulier,

$$\frac{\partial (\rho_k * \widetilde{\psi}u)}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

dans  $L^p(V)$ . L'identité (3.26) assure donc que

$$\frac{\partial (\rho_k * \widetilde{u})}{\partial x_i} \rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

dans  $L^p(V)$ .

On fixe alors une fonction  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  valant 1 sur  $\overline{B(0,1)}$  et à support dans  $\overline{B(0,2)}$  et on pose  $\zeta_j(x) = \zeta\left(\frac{x}{j}\right)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $j \geq 1$ . Si on pose  $u_j = \zeta_j v_j$ ,  $u_j$  a toutes les propriétés voulues. Quand  $U = \mathbb{R}^n$ , il suffit de poser  $u_k := \zeta_k (\rho_k * u)$  et cette suite converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Corollaire 3.27.** Si  $U$  est connexe et si  $u \in W^{1,p}(U)$  ( $1 \leq p \leq +\infty$ ) est telle que  $\nabla u = 0$  dans  $U$ , alors  $u$  est constante presque partout dans  $U$ .

*Démonstration.* Soient  $k \geq 1$  et  $U_k := \{x \in U; d(x, \mathbb{R}^n \setminus U) < 1/k\}$ . Pour tout  $x \in U_k$ , on pose  $u_k(x) := (\rho_k * u)(x)$ , où  $\rho_k = Ck^n \rho\left(\frac{\cdot}{k}\right)$  est une approximation de l'identité comme plus haut. Alors  $u_k$  est de classe  $C^\infty$  et  $\nabla u_k = \rho_k * \nabla u = 0$ . Ainsi,  $u_k$  est constante dans chaque composante connexe de  $U_k$ .

Soient  $x, y \in U$ . Il existe une courbe continue  $\gamma$  joignant  $x$  et  $y$ , et dont l'image est contenue dans  $U_k$  pour un certain  $k \geq 1$  (rappelons qu'un ouvert connexe de  $\mathbb{R}^n$  est connexe par arcs). Ainsi,  $x$  et  $y$  appartiennent à la même composante connexe de  $U_k$ , donc  $u_k(x) = u_k(y)$ .

Soit  $x \in U$  un point de Lebesgue de  $u$  (voir le théorème 1.166 du chapitre 1). Alors, pour tout  $k \geq 1$  assez grand,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_k(x)| &\leq \int_{B(x,1/k)} |u(x) - u(y)| \rho_k(x-y) dy \\ &\leq Ck^n \int_{B(x,1/k)} |u(x) - u(y)| dy, \end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend vers 0 quand  $k$  tend vers  $+\infty$ .

Soient enfin  $x$  et  $y$  deux points de Lebesgue de  $u$ . Alors

$$u(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(x) = \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k(y) = u(y),$$

ce qui termine la preuve, car presque tous les points de  $U$  sont des points de Lebesgue de  $u$ .  $\square$

## 1.6 Une caractérisation de $W^{1,p}(U)$ en termes de fonction tradéée

Si  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, si  $V \subset\subset U$  et si  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|h| < d(V, \mathbb{R}^n \setminus U)$ , on appelle  $\tau_h u$  la fonction définie par

$$\tau_h u(x) = u(x+h)$$

pour tout  $x \in V$ .

**Théorème 3.28.** Soient  $p \in ]1, +\infty]$ ,  $q$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  et  $u \in L^p(U)$ . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u \in W^{1,p}(U)$ ,
2. il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  et tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\left| \int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(U)},$$

3. il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $V \subset\subset U$  et tout  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|h| < d(V, \mathbb{R}^n \setminus U)$ ,

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(V)} \leq C |h|.$$

Si 1. a lieu, alors 2. et 3. sont vraies avec  $C = \|\nabla u\|_{L^p(V)}$ . On précise que  $\|\nabla u\|_{L^p(V)}$  désigne la norme, dans  $L^p(V)$ , de la fonction  $x \mapsto |\nabla v(x)|$ , où  $|\cdot|$  est la norme euclidienne dans  $\mathbb{R}^n$ .

*Démonstration.* Supposons 1. et  $p < +\infty$ , et prenons d'abord  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $h \in \mathbb{R}^n$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose

$$v(t) = u(x + th).$$

Alors

$$u(x + h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t) dt = \int_0^1 h \cdot \nabla u(x + th) dt.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_V |\tau_h u - u|(x)^p dx &\leq |h|^p \int_V dx \int_0^1 |\nabla u(x + th)|^p dt \\ &= |h|^p \int_0^1 dt \int_{V+th} |\nabla u(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Si  $|h| < d(V, \mathbb{R}^n \setminus U)$ , il existe un ouvert  $W \subset\subset U$  tel que  $V + th \subset W$  pour tout  $t \in [0, 1]$ , de sorte qu'on obtient 3. dans ce cas. Si maintenant  $u \in W^{1,p}(U)$ , on applique cette inégalité aux fonctions  $u_j$  données par le théorème 3.21. Enfin, si  $p = +\infty$ , on remarque que, pour tout ouvert  $V \subset\subset U$ ,  $u \in W^{1,r}(V)$  pour tout  $r < +\infty$ , on applique la conclusion pour chaque  $r < +\infty$  et on fait tendre  $r$  vers  $+\infty$ . On a donc bien 1.  $\Rightarrow$  3.

On suppose 3. Soit  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , de sorte que le support de  $\varphi$  est inclus dans un ouvert  $V \subset\subset U$ . Pour tout  $h \in \mathbb{R}^n$  tel que  $|h| < d(V, \mathbb{R}^n \setminus U)$ , on a, d'après l'hypothèse,

$$\begin{aligned} \left| \int_U u(y) \frac{\varphi(y-h) - \varphi(y)}{|h|} dy \right| &= \left| \int_U \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \varphi(x) dx \right| \\ &= \left| \int_V \frac{u(x+h) - u(x)}{|h|} \varphi(x) dx \right| \\ &\leq C \|\varphi\|_{L^q(U)}. \end{aligned}$$

On obtient 2. en choisissant  $h = te_i$  et en faisant tendre  $t$  vers 0.

On suppose maintenant 2. La forme linéaire  $\varphi \mapsto \int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx$ , définie pour  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , est continue pour la norme  $L^q(U)$ . On peut donc la prolonger par densité à  $L^q(U)$ . Comme  $1 \leq q < +\infty$  (c'est ici uniquement qu'on utilise le fait que  $p > 1$ ), il existe, pour tout  $1 \leq i \leq n$ , une fonction  $g_i \in L^p(U)$  telle que, pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ,

$$\int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_U g_i(x) \varphi(x) dx.$$

Cela signifie exactement que  $u \in W^{1,p}(U)$ . □

**Remarque 3.29.** Si  $p = 1$ , les implications 1.  $\Rightarrow$  2. et 2.  $\Leftrightarrow$  3. du théorème 3.28 restent vraies, mais on n'a plus 2.  $\Rightarrow$  1. Par exemple, si  $U = ]-1, 1[^2$ , la fonction

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

vérifie 2. avec  $p = 1$  mais n'appartient pas à  $W^{1,1}(U)$ . Les fonctions qui vérifient 2. (ou 3.) pour  $p = 1$  s'appellent les fonctions à variation bornée. L'espace des fonctions à variation bornée sur  $U$ , noté  $BV(U)$ , contient strictement  $W^{1,1}(U)$ . Nous y reviendrons en section 1.13.

Un cas particulier important du théorème 3.28 est :

**Corollaire 3.30.** Soit  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors  $f$  est localement lipschitzienne dans  $U$  si, et seulement si, pour tout ouvert  $V \subset\subset U$ ,  $f \in W^{1,\infty}(V)$ .

Une autre conséquence importante du théorème 3.28 est une règle de Leibniz pour le produit de deux fonctions bornées dans  $W^{1,p}$  :

**Proposition 3.31.** Soient  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $u, v \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$ . Alors  $uv \in W^{1,p}(U) \cap L^\infty(U)$  et  $\nabla(uv) = u\nabla v + v\nabla u$ .

*Démonstration.* On suppose d'abord  $p < +\infty$ . Il est clair que  $uv \in L^p(U) \cap L^\infty(U)$ . D'après le théorème 3.21, il existe des suites  $(u_j)_{j \geq 1}$  et  $(v_j)_{j \geq 1}$  de fonctions dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^p(U)$  et p.p. dans  $U$ ,  $v_j \rightarrow v$  dans  $L^p(U)$  et p.p. dans  $U$  et, pour tout  $V \subset\subset U$ ,  $\nabla u_j \rightarrow \nabla u$  dans  $L^p(V)$  et  $\nabla v_j \rightarrow \nabla v$  dans  $L^p(V)$ . De plus, la preuve du théorème 3.21 montre qu'on peut garantir que  $\|u_j\|_\infty \leq \|u\|_\infty$  et  $\|v_j\|_\infty \leq \|v\|_\infty$ .

Pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $j \geq 1$ , on obtient en intégrant par parties

$$\int_U u_j(x)v_j(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x)v_j(x) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(x)u_j(x) \right) \varphi(x) dx.$$

Faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$ , on conclut, par convergence dominée, que

$$\int_U u(x)v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x) + \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)u(x) \right) \varphi(x) dx. \quad (3.32)$$

Cela montre que  $\frac{\partial(uv)}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}v + \frac{\partial v}{\partial x_i}u \in L^p(U)$ .

Si maintenant  $p = +\infty$ , il est clair que  $uv \in L^\infty(U)$ . Soit maintenant  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Le support de  $\varphi$  est inclus dans un ouvert  $V \subset\subset U$ . Les restrictions de  $u$  et  $v$  à  $V$  appartiennent à  $W^{1,q}(V)$  pour tout  $q < +\infty$ , de sorte que (3.32) reste valable et on conclut de la même façon.  $\square$

Voici maintenant une conséquence du théorème 3.28 concernant une propriété de superposition pour les espaces de Sobolev :

**Proposition 3.33.** Soient  $1 \leq p \leq +\infty$  et  $u \in W^{1,p}(U)$ . Pour toute fonction  $G \in C^1(\mathbb{R})$  telle que  $G(0) = 0$  et  $G'$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , la fonction  $G \circ u \in W^{1,p}(U)$  et  $\nabla(G \circ u) = (G' \circ u)\nabla u$ .

*Démonstration.* Soit  $M = \|G'\|_\infty$ . Pour tout  $s \in \mathbb{R}$ ,  $|G(s)| \leq M|s|$ , de sorte que  $G \circ u \in L^p(U)$ .

On suppose d'abord  $p < +\infty$ . D'après le théorème 3.21, il existe une suite  $(u_j)_{j \geq 1}$  de fonctions dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^p(U)$  et p.p. dans  $U$  et, pour tout  $V \subset\subset U$ ,  $\nabla u_j \rightarrow \nabla u$  dans  $L^p(V)$ . Pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $j \geq 1$ , une intégration par parties montre que

$$\int_U (G \circ u_j)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U (G' \circ u_j)(x) \frac{\partial u_j}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx.$$

Comme  $G \circ u_j \rightarrow G \circ u$  dans  $L^p(U)$  et  $(G' \circ u_j) \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \rightarrow (G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i}$  dans  $L^p(V)$  (où  $V \subset\subset U$  contient le support de  $\varphi$ ), on obtient que

$$\int_U (G \circ u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_U (G' \circ u)(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx. \quad (3.34)$$

Comme  $(G' \circ u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(U)$ , cela termine la preuve dans le cas  $p < +\infty$ .

Si  $p = +\infty$ , et si  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ , le support de  $\varphi$  est inclus dans un ouvert  $V \subset\subset U$ . La restriction de  $u$  à  $V$  appartient à  $W^{1,q}(V)$  pour tout  $q < +\infty$ , de sorte que (3.34) reste vraie. On conclut de la même manière.  $\square$

**Remarque 3.35.** La proposition 3.33 peut être vue comme le point de départ de la théorie des opérateurs de superposition dans les espaces de Sobolev. Plus précisément, on peut poser la question suivante. Soit  $p \in [1, +\infty]$ . Quelles sont les fonctions  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant  $G(0) = 0$  telles que, pour toute fonction  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $G \circ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ? La réponse est connue : si  $p < n$  ou si  $p = n > 1$ , ce sont exactement les fonctions dérivables  $G$  telles que  $G' \in L^\infty(\mathbb{R})$  ([16, 97, 135]). Si  $p > n$  ou si  $p = n = 1$ , ce sont exactement les fonctions dérivables  $G$  telles que  $G' \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R})$  ([97]).

**Proposition 3.36.** Soient  $p \in [1, +\infty]$  et  $u \in W^{1,p}(U)$ . Alors  $u^+$ ,  $u^-$  et  $|u|$  sont dans  $W^{1,p}(U)$ , et

$$\begin{aligned} \nabla u^+(x) &= \begin{cases} \nabla u(x) & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) > 0, \\ 0 & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) \leq 0, \end{cases} \\ \nabla u^-(x) &= \begin{cases} \nabla u(x) & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) < 0, \\ 0 & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) \geq 0, \end{cases} \\ \nabla |u|(x) &= \begin{cases} \nabla u(x) & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) > 0, \\ 0 & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) = 0, \\ -\nabla u(x) & \text{pour presque tout } x \text{ tel que } u(x) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

De plus, en presque tout point de  $\{x \in U; u(x) = 0\}$ ,  $\nabla u(x) = 0$ .

*Démonstration.* Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $r \in \mathbb{R}$ , on pose

$$F_\varepsilon(r) := \begin{cases} (r^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \varepsilon & \text{si } r \geq 0, \\ 0 & \text{si } r < 0. \end{cases}$$

D'après la proposition 3.33, pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  et tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\int_U (F_\varepsilon \circ u)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_U (F'_\varepsilon \circ u)(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx.$$

En faisant tendre  $\varepsilon$  vers 0, on obtient

$$\int_U u^+(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = - \int_{U \cap \{u > 0\}} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx.$$

On a montré le résultat pour  $u^+$ . Comme  $u^- = (-u)^+$  et  $|u| = u^+ + u^-$ , on obtient le résultat pour  $u^-$  et  $|u|$ . La dernière assertion vient du fait que  $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$ .  $\square$

Pour la proposition suivante, relative au changement de variables, on rappelle (Théorème 2.53 du Chapitre 2) que, si  $T : U' \rightarrow U$  est bilipschitzienne (où  $U$  et  $U'$  sont des ouverts de  $\mathbb{R}^n$ ),  $T$  est différentiable presque partout dans  $U$  et, pour presque tout  $x \in U$ , la matrice jacobienne de  $T$  au point  $x \in U$  est la matrice de  $DT(x)$  dans la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .



**Proposition 3.37.** Soient  $1 \leq p \leq +\infty$ ,  $U$  et  $U'$  des ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $T : U' \rightarrow U$  une bijection bi-lipschitzienne. Alors, si  $u \in W^{1,p}(U)$ , la fonction  $u \circ T \in W^{1,p}(U')$  et

$$\nabla(u \circ T) = JT^t(\nabla u \circ T). \quad (3.38)$$

*Démonstration.* On suppose d'abord  $p < +\infty$ . Soit  $(u_j)_{j \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  donnée par le théorème de Friedrichs. Pour tout  $j \geq 1$ , on pose  $v_j := u_j \circ T$ . Si  $T$  est différentiable en  $x \in U'$ , comme  $u_j$  est différentiable en  $T(x)$ ,  $u_j \circ T$  est différentiable en  $x$  et on a

$$\nabla v_j(x) = JT^t(x)(\nabla u_j \circ T)(x).$$

Cela montre en particulier que, pour presque tout  $x \in U'$ ,

$$|\nabla v_j(x)| \leq C |(\nabla u_j \circ T)(x)|,$$

et comme  $T$  est bilipschitzienne, il existe  $c > 0$  tel que  $|\det JT(x)| \geq c$  pour presque tout  $x \in U'$ , si bien que

$$|\nabla v_j(x)|^p \leq C |(\nabla u_j \circ T)(x)|^p |\det JT(x)|,$$

donc, pour tout ouvert  $V \subset\subset U'$ ,

$$\int_V |\nabla v_j(x)|^p dx \leq C \int_V |(\nabla u_j \circ T)(x)|^p |\det JT(x)| dx = C \int_{T(V)} |\nabla u_j(x)|^p dx.$$

On montre de même que, pour tous  $j, k \geq 1$ ,

$$\int_V |\nabla(v_j - v_k)(x)|^p dx \leq C \int_{T(V)} |\nabla(u_j - u_k)(x)|^p dx.$$

De plus,

$$\int_V |(v_j - v_k)(x)|^p dx \leq C \int_{T(V)} |(u_j - u_k)(x)|^p dx.$$

Comme  $u_j \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(T(V))$ , la suite  $(v_j)_{j \geq 1}$  est donc de Cauchy dans  $W^{1,p}(V)$ . Elle converge donc vers une fonction  $v_V \in W^{1,p}(V)$  pour la norme de  $W^{1,p}(V)$  et on a donc

$$\|v_V\|_{W^{1,p}(V)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}.$$

On en déduit facilement (exercice !) qu'il existe une fonction  $v \in W^{1,p}(U')$  telle que  $v_V = v$  pour tout ouvert  $V \subset\subset U'$  et qu'on a  $v = u \circ T$ , avec la formule (3.38).

Enfin, si  $p = +\infty$ , la restriction de  $u$  à tout ouvert  $V \subset\subset U$  appartient à  $W^{1,q}(V)$  pour tout  $q < +\infty$ , de sorte qu'on obtient la formule (3.38) et que  $u \circ T \in W^{1,\infty}(U')$ .  $\square$

## 1.7 Résultat d'extension

On donne d'abord la définition suivante :

**Définition 3.39.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On dit que  $U$  est lipschitzien si, et seulement si, pour tout  $x_0 \in \partial U$ , à rotation près, il existe  $r > 0$  et une fonction  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne telle que

$$U \cap Q(x_0, r) = \{x \in Q(x_0, r); x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\},$$

où  $Q(x_0, r)$  est le cube de centre  $x_0$  et dont le côté est de longueur  $r$ .

Par exemple :

- une boule ouverte, un cube sont des ouverts lipschitziens,

- $\mathbb{R}_+^n := \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; x_n > 0\}$  est un ouvert lipschitzien,
- plus généralement, on appelle ouvert *spécial Lipschitz* tout épigraphe d'une fonction lipschitzienne. Plus précisément, si  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne, l'ouvert  $\{x \in \mathbb{R}^n; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$ , qui est l'épigraphe de  $\gamma$ , est un ouvert lipschitzien, appelé ouvert spécial Lipschitz,
- l'ouvert  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } |y| < x^2\}$  n'est pas lipschitzien.

**Remarque 3.40.** Si  $U$  est un ouvert lipschitzien, le théorème de Rademacher (Théorème 2.53 du Chapitre 2) montre que, pour  $\mathcal{H}^{n-1}$  presque tout  $x \in \partial U$ , le vecteur normal unitaire à  $\partial U$  en  $x$  sortant de  $U$  existe, et sera noté  $\nu(x)$ .

**Théorème 3.41.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné lipschitzien ou un ouvert spécial lipschitz et  $p \in [1, +\infty]$ . Alors il existe un opérateur de prolongement linéaire  $P : W^{1,p}(U) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  tel que, pour toute  $u \in W^{1,p}(U)$ ,

1.  $Pu|_U = u$ ,
2.  $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^p(U)}$ ,
3.  $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ .

On va commencer par traiter un cas particulier : celui où  $U = Q = \{(x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; |x'| < 1 \text{ et } |x_n| < 1\}$ . On pose  $Q_+ := Q \cap \mathbb{R}_+^n$ . Alors :

**Lemme 3.42.** Soit  $u \in W^{1,p}(Q_+)$ . On définit, pour tout  $(x', x_n) \in Q$ ,

$$u^*(x', x_n) := \begin{cases} u(x', x_n) & \text{si } x_n \geq 0, \\ u(x', -x_n) & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

Alors  $u^* \in W^{1,p}(Q)$ ,

$$\|u^*\|_{L^p(Q)} \leq 2 \|u\|_{L^p(Q_+)} \quad (3.43)$$

et

$$\|u^*\|_{W^{1,p}(Q)} \leq 2 \|u\|_{W^{1,p}(Q_+)} \quad (3.44)$$

*Preuve du lemme 3.42 :* l'inégalité (3.43) est immédiate. Pour le reste de la preuve, on fixe une fonction  $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\eta(t) = 0$  si  $t < \frac{1}{2}$  et  $\eta(t) = 1$  si  $t > 1$ . Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ , on pose  $\eta_k(t) := \eta(kt)$ .

Soit  $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,

$$\int_Q u^*(x', x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{Q_+} u(x', x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx$$

avec  $\psi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) + \varphi(x', -x_n)$ . On vérifie que  $(x', x_n) \mapsto \eta_k(x_n)\psi(x', x_n)$  appartient à  $C_c^\infty(Q_+)$ . On a donc

$$\int_{Q_+} u(x', x_n) \eta_k(x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n) \eta_k(x_n) \psi(x) dx,$$

et en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on obtient

$$\int_{Q_+} u(x', x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n) \psi(x) dx,$$

ce qui montre que

$$\begin{aligned} \int_Q u^*(x', x_n) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n) \psi(x) dx \\ &= - \int_Q v_i(x) \psi(x) dx \end{aligned}$$

où

$$v_i(x', x_n) := \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', x_n) & \text{si } x_n \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(x', -x_n) & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

Cela montre que  $\frac{\partial u^*}{\partial x_i} = v_i$ .

De plus,

$$\int_Q u^*(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx = \int_{Q_+} u(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_n} dx$$

avec  $\chi(x', x_n) = \varphi(x', x_n) - \varphi(x', -x_n)$ . Comme  $(x', x_n) \mapsto w(x', x_n) = \eta_k(x_n)\chi(x', x_n) \in C_c^\infty(Q_+)$ , on a

$$\int_{Q_+} u(x) \frac{\partial w}{\partial x_n}(x) dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \eta_k(x_n) \chi(x', x_n) dx. \quad (3.45)$$

Or

$$\frac{\partial w}{\partial x_n}(x) = \eta_k(x_n) \frac{\partial \chi}{\partial x_n}(x', x_n) + k\eta'(kx_n)\chi(x', x_n).$$

On vérifie que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} k \int_{Q_+} u(x) \eta'(kx_n) \chi(x', x_n) dx = 0.$$

En effet, comme  $|\chi(x', u)| \leq C|u|$  pour tout  $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$  et tout  $u \in \mathbb{R}$  (ce qui vient du fait que  $\chi(x', 0) = 0$  et  $\chi \in C_c^\infty(Q_+)$ ),

$$\begin{aligned} \left| k \int_{Q_+} u(x) \eta'(kx_n) \chi(x', x_n) dx \right| &\leq Ck \int_{0 < x_n < \frac{1}{k}} |u(x)| x_n dx \\ &\leq C \int_{0 < x_n < \frac{1}{k}} |u(x)| dx. \end{aligned}$$

Finalement, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$  dans (3.45), on obtient que

$$\int_{Q_+} u(x) \frac{\partial \chi}{\partial x_n}(x) dx = - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \chi(x', x_n) dx,$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \int_Q u^*(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= - \int_{Q_+} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \chi(x', x_n) dx \\ &= - \int_Q v_n(x) \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

avec

$$v_n(x', x_n) := \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) & \text{si } x_n \geq 0, \\ -\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) & \text{si } x_n < 0. \end{cases}$$

Ainsi,  $\frac{\partial u^*}{\partial x_n} = v_n$ , ce qui montre bien que  $u^* \in W^{1,p}(Q)$  et que l'inégalité (3.44) est vérifiée.  $\square$

*Preuve du théorème 3.41 :* on suppose d'abord que  $U = \mathbb{R}_+^n$ . La conclusion est obtenue exactement comme pour le lemme 3.42.

On suppose maintenant que  $U = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})\}$  où la fonction  $\gamma : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne. Pour tout  $x = (x', x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ , on pose  $T(x) := (x', \gamma(x') + x_n)$ . On vérifie immédiatement que  $T$  est une bijection bilipschitzienne de  $\mathbb{R}_+^n$  sur  $U$ . Il résulte de la proposition 3.37 que  $v := u \circ T \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$  avec  $\|v\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)} \leq C\|u\|_{L^p(U)}$  et  $\|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(U)}$ .

Le cas précédent permet de prolonger  $v$  en  $\tilde{v} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  avec  $\|\tilde{v}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|v\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}$  et  $\|\tilde{v}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}$ , et il suffit de poser  $\tilde{u} := \tilde{v} \circ T^{-1}$  pour conclure.

On passe maintenant au cas général :  $U$  est supposé borné et lipschitzien. Il existe des ouverts  $U_1, \dots, U_k \subset \mathbb{R}^n$  tels que  $\partial U \subset \bigcup_{1 \leq i \leq k} U_i$  et des bijections  $T_i : Q \rightarrow U_i$  bilipschitziennes telles que

$$T_i(Q_+) = U_i \cap \Omega \text{ et } T_i(Q_0) = U_i \cap \partial \Omega.$$

Ici,  $Q$  et  $Q_+$  sont comme dans le lemme 3.42 et  $Q_0 := \{(x', 0); |x'| < 1\}$ .

Il existe des fonctions  $\theta_0, \dots, \theta_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  avec les propriétés suivantes :

1.  $0 \leq \theta_i(x) \leq 1$  pour tout  $0 \leq i \leq k$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
2.  $\sum_{i=0}^k \theta_i(x) = 1$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
3. pour tout  $1 \leq i \leq k$ ,  $\text{supp } \theta_i \subset\subset U_i$ ,
4.  $\text{supp } \theta_0 \subset \mathbb{R}^n \setminus \partial U$ ,
5.  $\theta_0|_U \in C_c^\infty(U)$ .

On décompose  $u = \sum_{i=0}^k \theta_i u$  et on pose  $u_i := \theta_i u \in W^{1,p}(U)$ .

On étend  $u_0$  par 0 hors de  $U$  en une fonction  $\tilde{u}_0$ . Comme  $\theta_0$  et  $\nabla \theta_0$  sont bornées sur  $\mathbb{R}^n$ , on vérifie, en utilisant les propriétés de support de  $\theta_0$ , que  $\tilde{u}_0 \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  avec  $\|\tilde{u}_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ .

Pour  $1 \leq i \leq k$ , on se ramène à  $Q_+$  en utilisant les fonctions  $T_i$ , ce qui permet d'étendre  $u|_{U_i \cap U}$  en une fonction  $w_i \in W^{1,p}(U_i)$ . On étend alors la fonction  $\theta_i w_i$  par 0 hors de  $U_i$ , et la fonction ainsi obtenue,

notée  $\tilde{u}_i$ , vérifie  $\|\tilde{u}_i\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U \cap U_i)}$ . On pose finalement  $Pu = \sum_{i=0}^k \tilde{u}_i$ . Les détails sont

laissés en exercice. □

**Remarque 3.46.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On dit que  $U$  possède la propriété d'extension pour les espaces  $W^{1,p}$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$  si, et seulement si, il existe un opérateur linéaire  $P$ , continu de  $W^{1,p}(U)$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  pour tout  $p \in [1, +\infty]$ , tel que, pour toute fonction  $u \in W^{1,p}(U)$ ,  $Pu$  est un prolongement de  $u$  à  $\mathbb{R}^n$ . Le théorème 3.41 montre que tout ouvert borné lipschitzien ou spécial lipschitz a cette propriété. Caractériser les ouverts  $U \subset \mathbb{R}^n$  possédant la propriété d'extension pour les espaces  $W^{1,p}$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$  est un problème difficile, à propos duquel on pourra se reporter à [102, Section 1.5]. On signale ici ([67]) que, en dimension  $n = 2$ ,  $U$  possède cette propriété si, et seulement si,  $U$  est un quasi-disque, c'est-à-dire l'image d'un disque par un homéomorphisme quasi-conforme de  $\mathbb{R}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.8 Autres résultats d'approximation

Si  $U$  est borné, on peut donner un résultat d'approximation global :

**Théorème 3.47.** *On suppose que  $U \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert borné. Soit  $u \in W^{1,p}(U)$  avec  $p \in [1, +\infty[$ . Alors il existe une suite de fonctions  $(u_j)_{j \geq 1} \in C^\infty(U) \cap W^{1,p}(U)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$ .*

**Remarque 3.48.** Contrairement au théorème de Friedrichs, les fonctions  $u_j$  ne se prolongent pas en des fonctions  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Par contre, les dérivées des  $u_j$  convergent vers celles de  $u$  dans  $L^p(U)$  et pas seulement dans  $L^p(V)$  pour tout  $V \subset\subset U$ .

*Preuve du théorème 3.47 :* on définit  $U_j = \left\{ x \in U; d(x, \partial U) > \frac{1}{j} \right\}$  pour tout entier  $j \geq 1$  et  $V_j = U_{j+3} \setminus \overline{U_{j+1}}$ . On fixe aussi un ouvert  $V_0 \subset\subset U$  tel que

$$U = \bigcup_{j \geq 0} V_j.$$

Soit  $(\zeta_j)_{j \geq 0}$  une suite de fonctions telle que  $\zeta_j \in C_c^\infty(V_j)$  et  $\sum_{j \geq 0} \zeta_j = 1$  dans  $U$ . Pour chaque  $j$ ,  $\zeta_j u \in W^{1,p}(U)$  et le support de cette fonction est inclus dans  $V_j$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ . En utilisant une approximation de l'identité comme dans la preuve du théorème 3.21, on trouve, pour chaque  $j \geq 0$ , une fonction  $u_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à support dans  $W_j = U_{j+4} \setminus \bar{U}_j$  telle que

$$\|u_j - \zeta_j u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

On pose alors  $v = \sum_{j \geq 0} u_j$ . Cette fonction est de classe  $C^\infty$  dans  $U$  car, si  $m \geq 0$ , elle est  $C^\infty$  sur  $U_m$  (sa restriction à  $U_m$  s'exprime par une série qui ne comporte qu'un nombre fini de termes). De plus, pour tout  $V \subset\subset U$ ,

$$\|v - u\|_{W^{1,p}(V)} \leq \sum_{j=0}^{+\infty} \|u_j - \zeta_j u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \varepsilon,$$

ce qui termine la preuve. □

Dans le théorème 3.47, les fonctions  $u_j$  sont  $C^\infty$  dans  $U$  mais pas dans  $\bar{U}$  (voir la remarque 3.22 plus haut). Si on suppose  $U$  lipschitzien, on peut approcher les fonctions de  $W^{1,p}(U)$  par des fonctions  $C^\infty(\bar{U})$ . On peut énoncer le résultat d'approximation suivant :

**Théorème 3.49.** *On suppose  $U$  borné lipschitzien ou spécial lipschitz, et  $1 \leq p < +\infty$ . Soit  $u \in W^{1,p}(U)$ . Alors il existe une suite de fonctions  $(u_j)_{j \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que  $u_j|_U$  converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$ .*

*Démonstration.* Le théorème 3.41 permet d'étendre  $u$  en une fonction  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . On conclut alors comme dans la preuve du théorème de Friedrichs. □

## 1.9 Traces

Si  $u \in W^{1,p}(U)$ , on veut considérer la "valeur de  $u$ " sur  $\partial U$ . Cette restriction n'est pas clairement définie en général (car  $u$  peut être modifiée sur un ensemble de mesure nulle) mais elle l'est si  $u$  est continue sur  $\bar{U}$ . On va donner un sens à la valeur de  $u$  sur  $\partial U$  en utilisant la notion de trace.

**Théorème 3.50.** *Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert spécial Lipschitz ou un ouvert borné lipschitzien et  $p \in [1, +\infty[$ . Il existe un opérateur linéaire borné  $T : W^{1,p}(U) \rightarrow L^p(\partial U)$  tel que :*

$$Tu = u|_{\partial U} \text{ si } u \in W^{1,p}(U) \cap C(\bar{U}).$$

La fonction  $Tu$  s'appelle la trace de  $u$  sur  $\partial U$  et se note  $tr u$ .

*Démonstration.* On commence par le cas  $U = \mathbb{R}_+^n$ . D'après le théorème 3.49, il suffit de montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}^p.$$

On pose pour cela  $G(t) = |t|^{p-1} t$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} G(u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)) &= - \int_0^{+\infty} \frac{\partial(G \circ u)}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) dx_n \\ &= - \int_0^{+\infty} G'(u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)) \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) dx_n, \end{aligned}$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} |G(u(x_1, \dots, x_{n-1}, 0))| &\leq p \int_0^{+\infty} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^{p-1} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right| dx_n \\ &\leq C \left( \int_0^{+\infty} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_n + \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right|^p dx_n \right). \end{aligned}$$

On obtient la conclusion voulue en intégrant en  $x_1, \dots, x_{n-1}$ .

Pour le cas spécial lipschitz, on utilise un changement de variable bi-lipschitzien. Il suffit de remarquer que, si  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est bi-lipschitzienne, alors la formule de l'aire montre que  $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \|f \circ H\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . Pour le cas où  $U$  est borné, on utilise une partition de l'unité. Les détails sont laissés au lecteur.  $\square$

On va s'intéresser plus précisément aux fonctions de  $W^{1,p}(U)$  de trace nulle. Donnons d'abord une définition :

**Définition 3.51.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert quelconque et  $p \in [1, +\infty]$ . On désigne par  $W_0^{1,p}(U)$  l'adhérence de  $C_c^\infty(U)$  dans  $W^{1,p}(U)$ .

Il s'agit en gros de l'espace des fonctions de  $W^{1,p}(U)$  qui sont nulles sur  $\partial U$ . Plus précisément :

**Théorème 3.52.** On suppose  $U \subset \mathbb{R}^n$  ouvert spécial Lipschitz ou borné lipschitzien. Alors, pour tout  $1 \leq p < +\infty$  et pour toute  $u \in W^{1,p}(U)$ ,

$$u \in W_0^{1,p}(U) \Leftrightarrow \text{tr } u = 0 \text{ sur } \partial U.$$

*Démonstration.* On suppose d'abord que  $u \in W_0^{1,p}(U)$ . Par définition, il existe une suite  $(u_j)_{j \geq 1} \in C_c^\infty(U)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$ . Par continuité de la trace,  $\text{tr } u_j \rightarrow \text{tr } u$  dans  $L^p(\partial U)$ , et comme  $\text{tr } u_j = 0$  pour tout  $j$ , on obtient bien que  $\text{tr } u = 0$ .

Pour la réciproque, en utilisant un changement de variable et une partition de l'unité, on voit qu'il suffit de montrer que, si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$  est à support compact dans  $\mathbb{R}_+^n$  et est de trace nulle, alors  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Par le théorème 3.49, il existe une suite  $(u_j) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , et on a donc  $\text{tr } u_j \rightarrow \text{tr } u = 0$  dans  $L^p(\mathbb{R}^{n-1})$ .

Si  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  et  $x_n \geq 0$ , on a, pour tout  $j$ ,

$$|u_j(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)| \leq |u_j(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)| + \int_0^{x_n} \left| \frac{\partial u_j}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, t) \right| dt.$$

On en déduit que, pour tout  $x_n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_j(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u_j(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} \right. \\ &\quad \left. + x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u_j(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} dt \right). \end{aligned}$$

Faisant tendre  $j$  vers  $+\infty$ , on obtient donc, pour presque tout  $x_n > 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} \leq C x_n^{p-1} \int_0^{x_n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} dt. \quad (3.53)$$

On fixe maintenant une fonction  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $[0, 2]$ , valant 1 sur  $[0, 1]$  et compris entre 0 et 1. Pour tous  $j \geq 1$  et  $x \in \mathbb{R}_+^n$ , soit

$$\zeta_j(x) = \zeta(jx_n) \text{ et } w_j(x) = u(x)(1 - \zeta_j(x)).$$

On a donc

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_n}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x)(1 - \zeta_j(x)) - ju(x)\zeta'(jx_n)$$

et, pour tout  $1 \leq k \leq n-1$ ,

$$\frac{\partial w_j}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_k}(x)(1 - \zeta_j(x)).$$

Il vient que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} |\nabla w_j(x) - \nabla u(x)|^p dx &\leq C \int_{\mathbb{R}_+^n} |\zeta_j(x)|^p |\nabla u(x)|^p \\ &+ Cj^p \int_0^{\frac{2}{j}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)|^p dx_1 \dots dx_{n-1} dt \\ &= A_j + B_j. \end{aligned}$$

Il est clair que  $A_j \rightarrow 0$  en raison du support de  $\zeta_j$ . Quant à  $B_j$ , on écrit, en utilisant (3.53),

$$\begin{aligned} B_j &\leq Cj^p \int_0^{\frac{2}{j}} t^{p-1} \left( \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p dx \right) dt \\ &\leq Cj^p \int_0^{\frac{2}{j}} t^{p-1} dt \int_0^{\frac{2}{j}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p dx \\ &\leq C \int_0^{\frac{2}{j}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\nabla u|^p dx \rightarrow 0. \end{aligned}$$

On a donc prouvé que  $\nabla w_j \rightarrow \nabla u$  dans  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ . Comme on a aussi  $w_j \rightarrow u$  dans  $L^p(\mathbb{R}_+^n)$ , il vient que  $w_j \rightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . De plus,  $w_j(x_1, \dots, x_n)$  est nulle si  $0 < x_n < \frac{1}{j}$ , de sorte qu'on peut, en régularisant  $w_j$ , obtenir une suite de fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R}_+^n)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Ainsi,  $u \in W_0^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

Voici une autre caractérisation de  $W_0^{1,p}$  :

**Théorème 3.54.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert spécial Lipschitz ou borné lipschitzien et  $1 < p < +\infty$ . Si  $u \in L^p(U)$ , alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1.  $u \in W_0^{1,p}(U)$ ,
2. il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  et tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\left| \int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\varphi\|_{L^q(U)}$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

3. la fonction  $\tilde{u}$  (qui est le prolongement de  $u$  à  $\mathbb{R}^n$  valant 0 sur  $\mathbb{R}^n \setminus U$ ) appartient à  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* On suppose 1. Soit  $(u_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$ . Pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\left| \int_U u_k(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq \|\nabla u_k\|_{L^p(U)} \|\varphi\|_{L^q(U)},$$

et il suffit de faire tendre  $k$  vers  $+\infty$  pour conclure que 2 est vérifiée.

On suppose 2. Pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{u}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| = \left| \int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \|\nabla \varphi\|_{L^q(\mathbb{R}^n)},$$

et le théorème 3.28 montre que  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .

Enfin, on suppose 3. Par changement de variable et partition de l'unité, il suffit de prouver ceci : soient

$$Q := \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| < 1 \text{ pour tout } i\} \text{ et } Q_+ := \{x \in Q; x_n > 0\}.$$

Soit  $u \in L^p(Q_+)$  telle que  $\tilde{u} \in W^{1,p}(Q)$ . Alors, pour toute fonction  $\varphi \in C_c^\infty(Q)$ ,  $\varphi u \in W_0^{1,p}(Q_+)$ . Pour cela, on choisit une approximation de l'identité  $(\rho_k)_{k \geq 1}$  telle que

$$\text{supp } \rho_k \subset \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{2k} < x_n < \frac{1}{k} \right\}.$$

Alors  $\rho_k * \tilde{\varphi} u \rightarrow \tilde{\varphi} u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , et, pour tout  $k$  assez grand,

$$\text{supp } \rho_k * \tilde{\varphi} u \in C_c^\infty(Q_+),$$

ce qui montre bien que  $\varphi u \in W_0^{1,p}(Q_+)$ . □

**Remarque 3.55.** L'hypothèse de régularité lipschitz sur  $U$  n'est utilisée que pour montrer 3.  $\Rightarrow$  1.

### 1.10 Espaces de traces

On cherche à décrire plus précisément l'image exacte de  $W^{1,p}$  par l'opérateur trace. Dans tout ce paragraphe, on se donne un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $s \in ]0, 1[$  et  $1 \leq p < \infty$ .

Pour tout  $u \in L_{loc}^1(U)$ , on définit

$$[u]_{W^{s,p}(U)} := \left( \int_U \int_U \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p}.$$

On définit alors l'espace de Sobolev fractionnaire

$$W^{s,p}(U) := \{u \in L^p(U) : [u]_{W^{s,p}(U)} < \infty\}.$$

On le munit de la norme  $\|u\|_{W^{s,p}(U)} := \|u\|_{L^p(U)} + [u]_{W^{s,p}(U)}$ . Il est facile de vérifier :

- Proposition 3.56.**
1. L'application  $u \mapsto \|u\|_{W^{s,p}(U)}$  est une norme sur  $W^{s,p}(U)$ .
  2. Muni de cette norme, l'espace  $W^{s,p}(U)$  est un espace de Banach.
  3. Soit  $V$  un autre ouvert de  $\mathbb{R}^n$  tel qu'il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\Phi : U \rightarrow V$ . On suppose de plus que  $D\Phi$  et  $D\Phi^{-1}$  sont uniformément bornés. Si  $u \in W^{s,p}(V)$ , alors  $u \circ \Phi \in W^{s,p}(U)$ .

De plus :

**Théorème 3.57.** Les fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  sont denses dans  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* On se donne  $u \in W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$  un noyau de convolution :  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho = 1$  et  $\text{supp } \rho \subset B(0, 1)$  puis  $\rho_\varepsilon(\cdot) = \rho(\cdot/\varepsilon)/\varepsilon^n$ . On définit  $u_\varepsilon := \rho_\varepsilon * u$ . Comme  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , on sait que  $u * \rho_\varepsilon$  converge vers  $u$  dans  $L^p(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $g_\varepsilon := u - u_\varepsilon$ . On va montrer que  $[g_\varepsilon]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Comme  $[u_\varepsilon]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} \leq [g_\varepsilon]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)} + [u]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}$ , on en déduira que  $u_\varepsilon$  est dans  $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$  et converge dans cet espace vers  $u$ . On a

$$[g_\varepsilon]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u_\varepsilon(x) - u(y) + u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$

On découpe de la manière suivante :

$$[g_\varepsilon]_{W^{s,p}(\mathbb{R}^n)}^p \leq C \int \int_{|x-y| < \varepsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy + C \int \int_{|x-y| < \varepsilon} \frac{|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy$$



$$+C \int \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{|u(x) - u_\varepsilon(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy + C \int \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{|u(y) - u_\varepsilon(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy.$$

On note respectivement  $I_1, \dots, I_4$  les 4 termes du membre de droite. On a  $I_3 = I_4$ . De plus,

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (u(x-z) - u(y-z)) \rho_\varepsilon(z) dz \right|^p \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x-z) - u(y-z)|^p \rho_\varepsilon(z) dz \end{aligned}$$

par l'inégalité de Jensen. On en déduit par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \int \int_{|x-y| < \varepsilon} dx dy \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x-z) - u(y-z)|^p}{|x-y|^{n+sp}} \rho_\varepsilon(z) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) dz \int \int_{|x-y| < \varepsilon} \frac{|u(x-z) - u(y-z)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(z) dz \int \int_{|x-y| < \varepsilon} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy = I_1. \end{aligned}$$

Il reste donc à montrer que  $I_1$  et  $I_3$  tendent vers 0. Pour  $I_1$ , c'est une conséquence du théorème de convergence dominée (noter que la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ ). Pour  $I_3$ , on écrit

$$\begin{aligned} \int \int_{|x-y| \geq \varepsilon} \frac{|u(x) - u_\varepsilon(x)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dx dy &= \int_{\mathbb{R}^n} |u(x) - u_\varepsilon(x)|^p dx \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x) - u_\varepsilon(x)|^p}{\varepsilon^{sp}} dx. \end{aligned}$$

Pour ce dernier calcul, on a écrit :

$$\begin{aligned} \int_{|y-x| \geq \varepsilon} \frac{dy}{|x-y|^{n+sp}} &= \int_{|y| \geq \varepsilon} \frac{dy}{|y|^{n+sp}} \text{ (changement de variables : translation)} \\ &= |S^{n-1}| \int_{r=\varepsilon}^{\infty} \frac{r^{n-1} dr}{r^{n+sp}} = \frac{|S^{n-1}|}{1+sp} \frac{1}{\varepsilon^{sp}} \text{ (changement de variables : coordonnées sphériques)}. \end{aligned}$$

On en déduit donc

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{C}{\varepsilon^{sp}} \int |u(x) - u_\varepsilon(x)|^p dx = \frac{C}{\varepsilon^{sp}} \int \int |u(x) - u(x-z)|^p \rho_\varepsilon(z) dz dx \text{ (encore Jensen)} \\ &\leq C \int \int_{|z| \leq \varepsilon} \frac{|u(x) - u(x-z)|^p}{\varepsilon^{n+sp}} dx dz \text{ (car } \|\rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{C}{\varepsilon^n} \text{)} \\ &\leq C \int \int_{|z| \leq \varepsilon} \frac{|u(x) - u(x-z)|^p}{|z|^{n+sp}} dx dz = CI_1. \end{aligned}$$

Le théorème est démontré. □

On va maintenant montrer, dans le cas du demi-espace supérieur, que la trace des fonctions  $W^{1,p}$  appartient à  $W^{1-1/p,p}$  :

**Théorème 3.58.** Soient  $p \in ]1, +\infty[$  et  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$ . Alors la trace de  $u$  est dans  $W^{1,1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})$ . De plus, il existe  $C > 0$  (qui ne dépend que de  $n$ ) telle que

$$\|u\|_{W^{1,1-1/p}(\mathbb{R}^{n-1})} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)}.$$

*Démonstration.* Par densité-continuité, il suffit de le montrer pour  $u \in C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}_+^n})$ . On a pour tous  $x', y' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ,

$$\begin{aligned} |u(x', 0) - u(y', 0)| &\leq \left| u(x', 0) - u\left(\frac{x' + y'}{2}, \frac{|x' - y'|}{2}\right) \right| \\ &\quad + \left| u(y', 0) - u\left(\frac{x' + y'}{2}, \frac{|x' - y'|}{2}\right) \right| \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} |u(x', 0) - u(y', 0)|^p &\leq C \left( \left| u(x', 0) - u\left(\frac{x' + y'}{2}, \frac{|x' - y'|}{2}\right) \right|^p \right. \\ &\quad \left. + \left| u(y', 0) - u\left(\frac{x' + y'}{2}, \frac{|x' - y'|}{2}\right) \right|^p \right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} [u(\cdot, 0)]_{W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}^p &= \int \int \frac{|u(x', 0) - u(y', 0)|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} dx' dy' \\ &\leq C \int \int \frac{|u(x', 0) - u\left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{|x'-y'|}{2}\right)|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} dx' dy' \\ &\quad + C \int \int \frac{|u(y', 0) - u\left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{|x'-y'|}{2}\right)|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} dx' dy' \\ &= 2C \int \int \frac{|u(x', 0) - u\left(\frac{x'+y'}{2}, \frac{|x'-y'|}{2}\right)|^p}{|x' - y'|^{n+p-2}} dx' dy' \\ &\leq C \int \int \frac{|u(x', 0) - u(x' + h, |h|)|^p}{|h|^{n+p-2}} dx' dh \text{ (changement de variable } h = (y' - x')/2) \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{r=0}^{\infty} \frac{|u(x', 0) - u(x' + r\theta, r)|^p}{r^p} dr \text{ (changement} \\ &\quad \text{de variable : coordonnées sphériques).} \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'inégalité suivante due à Hardy (voir exercice 3.179) : pour tout  $f \in C_c^1([0, \infty))$ , on a

$$\int_0^\infty \frac{|f(r) - f(0)|^p}{r^p} dr \leq \int_0^\infty |f'(r)|^p dr. \quad (3.59)$$

On l'applique à  $f(r) = u(x' + r\theta, r)$ . On en déduit :

$$\int_{r=0}^{\infty} \frac{|u(x', 0) - u(x' + r\theta, r)|^p}{r^p} dr \leq C \int_{r=0}^{\infty} |Du(x' + r\theta, r)|^p dr.$$

Ainsi,

$$[u(\cdot, 0)]_{W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}^p \leq C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} dx' \int_{S^{n-2}} d\theta \int_{r=0}^{\infty} |Du(x' + r\theta, r)|^p dr.$$

Par le théorème de Fubini (on intègre d'abord en  $x'$  et on fait le changement de variable  $x'' = x' + r\theta$ ), il vient

$$[u(\cdot, 0)]_{W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}^p \leq C \int_{r=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |Du(x'', r)|^p dx'' dr = C \|Du\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}^p.$$

Le théorème est démontré. □

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$  et on note  $\Gamma := \partial\Omega$ . Alors on définit pour toute fonction mesurable  $u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$

$$[u]_{W^{s,p}(\Gamma)} := \left( \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n-1+sp}} d\sigma(x) d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{p}},$$

où  $d\sigma = d\mathcal{H}^{n-1}$ . On pose

$$W^{s,p}(\Gamma) := \{u \in L^p(\Gamma) : [u]_{W^{s,p}(\Gamma)} < \infty\}$$

qu'on munit de la norme  $\|u\|_{W^{s,p}(\Gamma)} := \|u\|_{L^p(\Gamma)} + [u]_{W^{s,p}(\Gamma)}$ . On a déjà vu que la trace était une application linéaire continue de  $W^{1,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\partial\Omega)$ . L'image de la trace est en fait contenue dans  $W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ . La preuve utilise l'analogie suivant de la proposition 3.56 :

**Proposition 3.60.** Soit  $u \in W^{s,p}(\Gamma)$ .

1. Soit  $\theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Il existe  $C > 0$  (indépendant de  $u$ ) telle que  $\|\theta u\|_{W^{s,p}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Gamma)}$ .
2. Soit  $\Phi : U \rightarrow V$  un  $C^1$  difféomorphisme entre deux ouverts  $U$  et  $V$  de  $\mathbb{R}^n$  tel que  $\Phi(\Gamma \cap U) = V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\})$ . On suppose de plus que  $D\Phi$  et  $D\Phi^{-1}$  sont uniformément bornés. Alors il existe  $C > 0$  (indépendant de  $u$ ) telle que  $\|u \circ \Phi^{-1}\|_{W^{s,p}(V \cap (\mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}))} \leq C\|u\|_{W^{s,p}(\Gamma \cap U)}$ .

De cet énoncé, on déduit :

**Proposition 3.61.** Soit  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . Alors pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $tr u \in W^{1-1/p,p}(\Gamma)$ .

*Démonstration.* Il suffit de recopier la preuve où on montrait l'estimation  $tr u \in L^p(\Gamma)$  en utilisant la proposition 3.60. □

On va maintenant identifier l'image exacte de  $W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$  par la trace. Le théorème suivant est attribué à Gagliardo. La preuve que l'on en présente est due à Mironescu ([103]).

**Théorème 3.62.** Soit  $1 < p < +\infty$ . Soit  $v \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Alors il existe  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)$  telle que  $tr u = v$ . De plus, il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $n$  telle que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C\|v\|_{W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

*Démonstration.* Par densité-continuité, il suffit de montrer le résultat pour  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}) \cap W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^{n-1})$ . Soit  $\theta \in C_c^\infty([0,1])$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$  et  $\theta = 1$  sur  $[0,1/2]$ . Soit  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $\rho \geq 0$ ,  $\int \rho = 1$ ,  $supp \rho \subset B(0,1)$  puis  $\rho_\varepsilon := \rho(\cdot/\varepsilon)/\varepsilon^{n-1}$ . On pose alors

$$u(x', t) = \theta(t)(v * \rho_t)(x').$$

On a

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}_+^n)}^p \leq \int_0^1 dt \|v * \rho_t\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p \leq \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p.$$

Par ailleurs,

$$u(x', t) = \theta(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y') \rho\left(\frac{x' - y'}{t}\right) \frac{dy'}{t^{n-1}}.$$

D'où

$$\nabla_{x'} u(x', t) = \theta(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y') \nabla \rho\left(\frac{x' - y'}{t}\right) \frac{dy'}{t^n}$$

$$\begin{aligned}
&= \theta(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(x' - ty') \nabla \rho(y') \frac{dy'}{t} \\
&= \theta(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (v(x' - ty') - v(x')) \nabla \rho(y') \frac{dy'}{t}.
\end{aligned}$$

Dans cette dernière égalité, on a utilisé le fait que  $\int \nabla \rho(y') dy' = 0$  (pour le voir, il suffit de dériver par rapport à  $x'$  :  $\int \rho(x' - y') dy' = 1$ ). On en déduit (par l'inégalité de Hölder et le fait que  $\rho$  est à support dans  $B(0, 1)$ )

$$|\nabla_{x'} u(x', t)|^p \leq C \theta(t)^p \frac{1}{t^p} \int_{|y'| < 1} |v(x' - ty') - v(x')|^p dy'.$$

On estime maintenant les dérivées par rapport à  $t$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t}(x', t) &= \theta'(t)(v * \rho_t)(x') \\
&+ \theta(t) \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y') \left( \langle \nabla \rho \left( \frac{x' - y'}{t} \right), -\frac{x' - y'}{t^2} \rangle \frac{1}{t^{n-1}} - (n-1) \rho \left( \frac{x' - y'}{t} \right) \frac{1}{t^n} \right) \\
&= \theta'(t)(v * \rho_t)(x') + \theta(t) \int_{|y'| < 1} (v(x' - ty') - v(x')) \left( -\langle \nabla \rho(y'), \frac{y'}{t} \rangle - (n-1) \rho(y') \frac{1}{t} \right) dy'.
\end{aligned}$$

On a utilisé ici que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} (\langle \nabla \rho(y'), y' \rangle + (n-1) \rho(y')) dy' = 0$$

(c'est la dérivée en  $t = 1$  de la fonction  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho_t(y') dy'$  qui vaut constamment 1). Concernant les dérivées en  $t$ , on a donc

$$\left| \frac{\partial u}{\partial t}(x', t) \right|^p \leq C |\theta'(t)|^p |v * \rho_t(x')|^p + C |\theta(t)|^p \frac{1}{t^p} \int_{|y'| < 1} (|v(x' - ty') - v(x')|^p) dy'.$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\|Du\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p &\leq C \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p \\
&+ C \int_0^1 \frac{dt}{t^p} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{|y'| < 1} |v(x') - v(x' - ty')|^p dy' \\
&\leq C \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p + C \int_0^1 \frac{dt}{t^{p+n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{|y'| < t} |v(x') - v(x' - y')|^p dy' \\
&\leq C \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p + C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |v(x') - v(x' - y')|^p dy' \int_{|y'|}^1 \frac{dt}{t^{n+p-1}} \\
&\leq C \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})}^p + C \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{|v(x') - v(x' - y')|^p}{|y'|^{n+p-2}} dy' \\
&= C \|v\|_{W^{1-1/p, p}(\mathbb{R}^{n-1})}^p,
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

**Remarque 3.63.** Dans le calcul précédent, pour obtenir l'estimation  $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|v\|_{W^{1-1/p, p}(\mathbb{R}^{n-1})}$ , on a seulement utilisé que  $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ , et que l'intégrale de la fonction  $\rho_t$  ne dépend pas de  $t$ . Le fait que  $\rho$  soit à valeurs positives et d'intégrale 1 est simplement utilisé pour obtenir que  $tr u = v$ .

On déduit du théorème 3.62 :

**Théorème 3.64.** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de classe  $C^1$  et  $v \in W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$ . Alors il existe  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  tel que

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq C \|v\|_{W^{1-1/p,p}(\Gamma)}$$

( $C$  constante indépendante de  $v$ ).

On considère enfin le cas  $p = 1$  :

**Théorème 3.65.** Soit  $v \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ . Alors il existe  $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$  telle que  $\text{tr } u = v$ . De plus, il existe  $C > 0$  ne dépendant que de  $n$  telle que

$$\|u\|_{W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)} \leq C \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}. \quad (3.66)$$

*Démonstration.* Cet argument est emprunté à [104]. On suppose d'abord  $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  et on pose

$$u(x', x_n) = v(x') \zeta\left(\frac{x_n}{\delta}\right),$$

où  $\zeta \in C_c^\infty([0, +\infty[)$  avec  $\zeta(0) = 1$  et  $\delta > 0$ . Il est facile de vérifier que, pour  $\delta > 0$  assez petit, on a bien  $\text{tr } u = v$  et (3.66).

Si  $v \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ , il existe une suite  $(v_j)_{j \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$  telle que  $v = \sum_j v_j$  et  $\sum_j \|v_j\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})} \leq 2 \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}$ . Il suffit d'appliquer le cas précédent à chaque  $v_j$  et de sommer sur  $j$  pour conclure.  $\square$

**Remarque 3.67.** Il n'existe pas d'application linéaire continue  $T : L^1(\mathbb{R}^{n-1}) \rightarrow W^{1,1}(\mathbb{R}_+^n)$  telle que, pour toute  $v \in L^1(\mathbb{R}^{n-1})$ ,  $\text{tr } Tv = v$ . On pourra se reporter à [116, Section 5].

## 1.11 Plongements de Sobolev

Les plongements de Sobolev affirment qu'une fonction de  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  possède un degré d'intégrabilité plus élevé que son appartenance à  $L^p$  ne l'indique. Ces plongements prennent une forme différente selon que  $p < n$ ,  $p = n$  ou  $p \geq n$ .

**Le cas  $1 \leq p < n$  :** on suppose que  $1 \leq p < n$  et qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour toute fonction  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.68)$$

Fixons alors une fonction  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  non nulle. Pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , définissons

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x).$$

Alors, pour tout  $\lambda > 0$ , (3.68) donne

$$\frac{1}{\lambda^{n/q}} \|u\|_q \leq C \frac{\lambda}{\lambda^p} \|\nabla u\|_p.$$

Cela n'est possible que si  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ . On va maintenant établir le théorème suivant :

**Théorème 3.69.** Soit  $1 \leq p < n$ . On définit  $p^*$  par

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

Alors il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

La preuve de ce théorème repose sur un lemme de calcul intégral :

**Lemme 3.70.** Soient  $f_1, \dots, f_n \in L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})$  ( $n \geq 2$ ). Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $1 \leq i \leq n$ , on définit

$$\tilde{x}_i := (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Alors, si, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$f(x) := f_1(\tilde{x}_1) \dots f_n(\tilde{x}_n),$$

on a

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

*Preuve du lemme 3.70 :* on raisonne par récurrence sur  $n$ . Pour  $n = 2$ ,  $f(x) = f_1(x_1)f_2(x_2)$  et il suffit d'appliquer Fubini. Prenons  $n = 3$ . Alors, pour tous  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2, x_3)| dx_3 &= |f_3(x_1, x_2)| \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)| |f_2(x_1, x_3)| dx_3 \\ &\leq |f_3(x_1, x_2)| \left( \int_{\mathbb{R}} |f_1(x_2, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f_2(x_1, x_3)|^2 dx_3 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

donc, en intégrant par rapport à  $x_1$  et  $x_2$  et appliquant à nouveau Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^3} |f(x)| dx \leq \|f_3\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_1\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|f_2\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

On suppose maintenant le résultat vrai pour un  $n$  et on le montre pour  $n + 1$ . On fixe  $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ . Par Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})| dx_1 \dots dx_n \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(\tilde{x}_1) \dots f_n(\tilde{x}_n)|^{n'} dx_1 \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n'}}$$

avec  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n'} = 1$ . L'hypothèse de récurrence appliquée à  $(x_1, \dots, x_n) \mapsto |f_1(\tilde{x}_1)|^{n'} \dots |f_n(\tilde{x}_n)|^{n'}$  donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f_1(\tilde{x}_1) \dots f_n(\tilde{x}_n)|^{n'} dx_1 \dots dx_n \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n'}(\mathbb{R}^{n-1})}^{n'},$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})| dx_1 \dots dx_n \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n'}(\mathbb{R}^{n-1})}.$$

On intègre maintenant en  $x_{n+1}$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_{n+1} \mapsto \|f_i\|_{L^{n'}(\mathbb{R}^{n-1})}$  appartient à  $L^n(\mathbb{R})$ , donc

$$\int_{x_{n+1} \in \mathbb{R}} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n'}(\mathbb{R}^{n-1})} dx_{n+1} \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^{n'}(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui donne bien le résultat pour  $n + 1$ . □

*Preuve du théorème 3.69 :* prenons d'abord  $p = 1$  et  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|u(x)| \leq \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right| dy_i := f_i(\tilde{x}_i).$$

Cela entraîne

$$|u(x)|^n \leq \prod_{i=1}^n f_i(\tilde{x}_i).$$

En appliquant le lemme 3.70, on obtient donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^n \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R}^{n-1})}^{\frac{1}{n-1}} = \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n-1}},$$

donc, en élevant à la puissance  $\frac{n-1}{n}$ ,

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}},$$

ce qui donne bien le résultat pour  $p = 1$ .

On suppose maintenant  $1 < p < n$ . Soit  $m \geq 1$ . Appliquant le cas  $p = 1$  à  $|u|^{m-1}u$ , on obtient

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^{\frac{mn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} &\leq m \prod_{i=1}^n \left\| |u|^{m-1} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}} \\ &\leq m \|u\|_{L^{p'(m-1)}(\mathbb{R}^n)}^{m-1} \prod_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{\frac{1}{n}}. \end{aligned} \quad (3.71)$$

Choisissant alors  $m$  tel que  $\frac{mn}{n-1} = p'(m-1)$  avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  (on vérifie que  $m \geq 1$ ), on obtient donc la conclusion voulue.

Enfin, si  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , il existe une suite de fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , et on conclut en passant à la limite.  $\square$

**Remarque 3.72.** On verra (Théorème 3.114) qu'on peut calculer la valeur de la meilleure constante de l'inégalité  $\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ .

**Corollaire 3.73.** Soit  $p \in [1, n[$ . Pour tout  $q \in [p, p^*]$ , il existe  $C_q > 0$  tel que, pour tout  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_q \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Démonstration.* Il suffit de remarquer qu'il existe  $\alpha \in [0, 1]$  tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{p^*},$$

ce qui entraîne par Hölder que, pour toute fonction  $u \in L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^\alpha \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}.$$

On applique alors le théorème 3.69.  $\square$

**Le cas  $p = n$  :** on a le plongement suivant :

**Théorème 3.74.** Pour tout  $q \in [n, +\infty[$ , il existe  $C_q > 0$  tel que, pour toute  $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_q \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.$$

*Démonstration.* On suppose d'abord que  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . On applique (3.71) avec  $p = n$ , ce qui donne

$$\|u\|_{L^{\frac{mn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^m \leq m \|u\|_{L^{\frac{(m-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)}^{m-1} \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout  $m \geq 1$ . Donc, en utilisant  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$  pour  $a, b \geq 0$  et  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,

$$\|u\|_{L^{\frac{mn}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \left( \|u\|_{L^{\frac{(m-1)n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \right). \quad (3.75)$$

En appliquant (3.75) avec  $m = n$ , on obtient

$$\|u\|_{L^{\frac{n^2}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.$$

donc, comme la même inégalité est vraie avec  $\|u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}$  dans le membre de gauche, on obtient

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout  $q \in \left[ n, \frac{n^2}{n-1} \right]$ . On obtient la conclusion en raisonnant de même avec  $m = n + 1$  puis  $m = n + 2$  et tous les  $m = n + k$  avec  $k \geq 1$  entier. On conclut en utilisant la densité de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  dans  $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

En combinant les plongements de Sobolev qu'on vient de prouver avec les propriétés d'extension pour les espaces  $W^{1,p}$ , on obtient immédiatement :

**Proposition 3.76.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert possédant la propriété d'extension pour les espaces  $W^{1,p}$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$  (voir la remarque 3.46).

1. Soit  $p \in [1, n[$ . Alors il existe  $C > 0$ , dépendant de  $U$  et de  $p$ , tel que, pour toute fonction  $u \in W^{1,p}(U)$ ,  $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ , où  $\frac{1}{p^*} := \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ .
2. De même, si  $p = n$ , il existe  $C > 0$ , dépendant de  $U$ , tel que, pour toute fonction  $u \in W^{1,n}(U)$  et tout  $q \in [n, +\infty[$ ,  $\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(U)}$ .

**Remarque 3.77.** On peut donner une version de la proposition 3.76 pour les espaces  $W_0^{1,p}(U)$ .

1. Soit  $p \in [1, n[$ . Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$  et toute fonction  $u \in W_0^{1,p}(U)$ ,  $\|u\|_{L^{p^*}(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ .
2. Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout ouvert  $U \subset \mathbb{R}^n$ , toute fonction  $u \in W_0^{1,n}(U)$  et tout  $q \in [n, +\infty[$ ,  $\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|u\|_{W^{1,n}(U)}$ .

En effet, par définition de  $W_0^{1,p}(U)$ , il suffit de montrer ces inégalités pour  $u \in C_c^\infty(U)$ , et dans ce cas, elles résultent des théorèmes 3.69 et 3.74. On notera qu'ici, contrairement à la proposition 3.76,  $C$  ne dépend pas de  $U$ .

On a en fait un meilleur plongement pour  $W^{1,n}$ , appelé *inégalité de Trudinger Moser* ([142, 152]) :

**Théorème 3.78.** Il existe  $C_n, c_n > 0$  tels que, pour tout ouvert borné  $U \subset \mathbb{R}^n$  et toute fonction  $f \in C_c^\infty(U)$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(U)} \int_U \exp \left( c_n \left( \frac{|f(x)|}{\|\nabla f\|_{L^n}} \right)^{\frac{n}{n-1}} \right) dx \leq C_n.$$

On se reportera à l'exercice 3.180 pour des éléments de preuve.

En complément, on cite un autre résultat, qui concerne l'absence d'injection de  $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Si  $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ , on ne peut pas espérer trouver, pour tout  $\varepsilon > 0$ , une fonction  $g_\varepsilon \in W^{1,n} \cap L^\infty$  telle que  $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq C \|f\|_{W^{1,n}}$  et  $\|f - g_\varepsilon\|_{W^{1,n}} \leq \varepsilon$ . Une telle approximation devient toutefois possible si, au lieu d'estimer le gradient de  $f - g$ , on ne cherche à estimer que toutes les dérivées partielles de  $f - g$  *sauf une* :



**Théorème 3.79.** *Pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $C_\delta > 0$  avec la propriété suivante : pour toute  $f \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ , il existe  $g \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que*

$$\|g\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)} + \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_\delta \|f\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}$$

et

$$\sum_{1 \leq j \leq n-1} \|\partial_j(f - g)\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq \delta \|f\|_{W^{1,n}(\mathbb{R}^n)}.$$

On pourra se reporter à [20, Theorem 11], ainsi qu'à [148] pour une extension au groupe de Heisenberg et à [21] pour le cas des espaces de Sobolev d'ordre plus grand que 1.

On examine maintenant le cas  $p > n$  :

**Théorème 3.80.** *[Injection de Morrey] Soient  $n < p \leq \infty$ . Alors il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  donc*

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.81)$$

De plus, pour presque tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq C |x - y|^{1 - \frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.82)$$

En conséquence, pour toute  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , il existe une fonction  $\tilde{u}$  hölderienne d'exposant  $1 - \frac{n}{p}$  sur  $\mathbb{R}^n$  telle que  $u(x) = \tilde{u}(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Remarque 3.83.** On notera que, dans le membre de droite de (3.81), on ne peut pas remplacer  $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}$  par  $\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ . En effet, supposons qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \quad (3.84)$$

Soit alors  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  une fonction non identiquement nulle. Pour tout  $\lambda > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on définit  $v(x) := u(\lambda x)$ . Comme  $\nabla v(x) = \lambda \nabla u(\lambda x)$ , (3.84) donne

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C \lambda^{1 - \frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

pour tout  $\lambda > 0$ , et on obtient une contradiction en faisant tendre  $\lambda$  vers 0.

*Preuve du théorème 3.80.* On suppose d'abord  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Soient  $Q$  un cube de  $\mathbb{R}^n$  contenant 0 et de côté  $r$  et  $x \in Q$ . On a

$$\begin{aligned} |u(x) - u(0)| &= \left| \int_0^1 \frac{d}{dt} u(tx) dt \right| \\ &\leq \int_0^1 \sum_{i=1}^n |x_i| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt \\ &\leq r \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt. \end{aligned} \quad (3.85)$$

On définit alors

$$u_Q := \frac{1}{|Q|} \int_Q u(y) dy.$$

En intégrant (3.85) sur  $Q$ , on obtient donc

$$\begin{aligned} |u_Q - u(0)| &\leq \frac{r}{|Q|} \int_Q \left( \sum_{i=1}^n \int_0^1 \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dt \right) dx \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 \left( \int_Q \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(tx) \right| dx \right) dt \\ &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \int_0^1 \left( \int_{tQ} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \right| dy \right) \frac{dt}{t^n}. \end{aligned}$$

Par Hölder, pour tout  $1 \leq i \leq n$  et tout  $t \in ]0, 1[$ ,

$$\int_{tQ} \left| \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \right| dy \leq \left( \int_Q \left| \frac{\partial u}{\partial y_i}(y) \right|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} (tr)^{\frac{n}{p}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} |u_Q - u(0)| &\leq \frac{1}{r^{n-1}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} r^{\frac{n}{p}} \int_0^1 \frac{t^{\frac{n}{p}}}{t^n} dt \\ &= \frac{r^{1-\frac{n}{p}}}{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}. \end{aligned}$$

En raisonnant par translation, on obtient que, pour tout cube  $Q$  et tout  $x \in Q$ ,

$$|u_Q - u(x)| \leq \frac{r^{1-\frac{n}{p}}}{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}. \quad (3.86)$$

Donc, pour tout cube  $Q$  et tous  $x, y \in Q$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq 2 \frac{r^{1-\frac{n}{p}}}{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)}.$$

Maintenant, si  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , il existe un cube  $Q$  contenant  $x$  et  $y$  et de côté  $r = 2|x - y|$ , ce qui donne (3.82). Pour le cas général où  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , il existe une suite  $(u_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et presque partout, ce qui permet de conclure.

On prouve maintenant (3.81) pour  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Soient  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $Q$  un cube de côté 1 contenant  $x$ . D'après (3.86),

$$|u(x)| \leq |u_Q| + \frac{1}{1-\frac{n}{p}} \|\nabla u\|_{L^p(Q)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(Q)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)}.$$

Cela donne bien (3.81) dans ce cas. Le cas général s'obtient par densité de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ .  $\square$

**Corollaire 3.87.** Soit  $p > n$ . Pour toute  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , il existe  $\tilde{u}$  continue sur  $\mathbb{R}^n$  avec  $\tilde{u}(x) = u(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \tilde{u}(x) = 0$ .

*Démonstration.* On sait déjà qu'il existe  $\tilde{u}$  continue sur  $\mathbb{R}^n$  avec  $\tilde{u}(x) = u(x)$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . Soit  $(u_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  qui converge vers  $\tilde{u}$  dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $k \geq 1$  tel que  $\|\tilde{u} - u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon$ . Soit  $A > 0$  tel que, pour tout  $|x| > A$ ,  $u_k(x) = 0$ . Alors, pour tout  $|x| > A$ ,

$$|\tilde{u}(x)| = |\tilde{u}(x) - u_k(x)| \leq \|\tilde{u} - u_k\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq \|\tilde{u} - u_k\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C\varepsilon.$$

$\square$

En utilisant l'opérateur de prolongement fourni par le théorème 3.41, on obtient ceci (voir aussi la proposition 3.76) :

**Théorème 3.88.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné lipschitzien et  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors :

1. si  $1 \leq p < n$ ,  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^{p^*}(U)$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ,
2. si  $p = n$ ,  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$  pour tout  $1 \leq q < +\infty$ ,
3. si  $p > n$ ,  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow C^{0,\gamma}(\overline{U})$  avec  $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$ .

La notation  $E \hookrightarrow F$  signifie que l'application linéaire  $f \mapsto f$ , appelé injection, est continue de  $E$  dans  $F$ .

*Démonstration.* Il suffit d'utiliser l'opérateur  $P$  fourni par le théorème 3.41 et d'appliquer les différents théorèmes d'injection vus auparavant.  $\square$

Nous allons maintenant donner une preuve du théorème de Rademacher (théorème 2.53, chapitre 2). Soit  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne. Par le théorème 3.28,  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ , et en particulier, pour toute boule  $B \subset \mathbb{R}^n$  et tout  $p > n$ ,  $u \in W^{1,p}(B)$ .

On cherche à montrer que  $u$  est presque partout différentiable (au sens usuel) sur  $B$ . Un candidat naturel pour la différentielle est le gradient faible  $\nabla u$  qui existe presque partout. On se place alors en un point de Lebesgue de  $\nabla u$ . Prenons donc  $x_0 \in B$  tel que  $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0,r)} |\nabla u(x) - \nabla u(x_0)|^p dx = 0$ . Si on pose  $v(x) = u(x) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), x - x_0 \rangle$  alors  $v \in W^{1,p}(B)$  et  $\nabla v(x) = \nabla u(x) - \nabla u(x_0)$ . Nous pouvons appliquer le théorème 3.80 à  $v$  pour obtenir, pour tout  $y \in B$ ,

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), y - x_0 \rangle| &= |v(y)| = |v(y) - v(x_0)| \leq Cr \left( \int_{B(x_0,r)} |\nabla v(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= Cr \left( \int_{B(x_0,r)} |\nabla(u(x) - u(x_0))|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

avec  $r := |y - x_0|$ . Comme  $x_0$  est un point de Lebesgue de  $\nabla u$ , il vient  $\lim_{y \rightarrow x_0} \frac{|u(y) - u(x_0) - \langle \nabla u(x_0), y - x_0 \rangle|}{|y - x_0|} = 0$  et nous pouvons conclure.  $\blacksquare$

Le théorème 3.88 affirme que certaines injections sont continues. On obtient une conclusion plus précise dans certains cas, en utilisant la notion d'opérateur compact, dont on rappelle la définition.

**Définition 3.89.** Soient  $E, F$  des espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire continue. On dit que  $T$  est compact si, et seulement si,  $\overline{T(B(0,1))}$  est une partie compacte de  $F$ . Cela revient à dire que, pour toute suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  bornée dans  $E$ , il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que la suite  $(T(x_{\varphi(k)}))_{k \geq 1}$  converge dans  $F$ .

On peut ajouter la propriété suivante (laissée en exercice) :

**Proposition 3.90.** Soient  $E, F$  des espaces de Banach et  $T : E \rightarrow F$  une application linéaire compacte. Alors, pour toute suite  $(x_k)_{k \geq 1}$  faiblement convergente dans  $E$ , la suite  $(Tx_k)_{k \geq 1}$  converge fortement dans  $F$ .

Voici dans quels cas les injections de Sobolev sont compactes :

**Théorème 3.91.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné lipschitzien et  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors :

1. si  $1 \leq p < n$ , pour tout  $q < p^*$ , l'injection  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$  est compacte,
2. si  $p = n$ , l'injection  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^q(U)$  est compacte pour tout  $1 \leq q < +\infty$ ,

3. si  $p > n$ , pour tout  $0 < \gamma' < 1 - \frac{n}{p}$ , l'injection  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow C^{0,\gamma'}(\overline{U})$  est compacte.  
En particulier, pour tout  $1 \leq p \leq +\infty$ , l'injection  $W^{1,p}(U) \hookrightarrow L^p(U)$  est compacte.

Par exemple, le point 1. signifie que, si  $(u_k)_{k \geq 1}$  est une suite bornée dans  $W^{1,p}(U)$ , et si  $1 \leq q < p^*$ , alors il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante et  $u \in L^q(U)$  telles que  $u_{\varphi(k)} \rightarrow u$  dans  $L^q(U)$ .  
La preuve du théorème 3.91 repose sur le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, que l'on rappelle ici ([22, Théorème IV.25]) :

**Théorème 3.92.** [Riesz-Fréchet-Kolmogorov] Soient  $1 \leq p < +\infty$  et  $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$  une partie bornée. On suppose que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour toute  $f \in \mathcal{F}$  et tout  $h \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|h| < \delta$ ,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  mesurable de mesure finie. Alors  $\overline{\mathcal{F}|_U}$  est une partie compacte de  $L^p(U)$ .

Il faut noter que la conclusion de ce théorème est fautive si  $U = \mathbb{R}^n$ , par exemple. Voici un substitut dans ce cas :

**Théorème 3.93.** Soient  $1 \leq p < +\infty$  et  $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^n)$  une partie bornée. On suppose que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour toute  $f \in \mathcal{F}$  et tout  $h \in \mathbb{R}^n$  vérifiant  $|h| < \delta$ ,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

On suppose de plus que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $U \subset \mathbb{R}^n$  mesurable et borné tel que, pour toute  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n \setminus U)} < \varepsilon.$$

Alors  $\overline{\mathcal{F}}$  est une partie compacte de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Preuve du théorème 3.91 : on commence par 1. Il s'agit de prouver que l'adhérence de

$$\mathcal{F} := \left\{ f \in W^{1,p}(U); \|f\|_{W^{1,p}(U)} < 1 \right\}$$

dans  $L^q(U)$  est compacte. On vérifie facilement qu'il suffit de le faire pour  $q \geq p$ . On note  $\mathcal{G} := P(\mathcal{F})$ , où  $P$  est donné par le théorème 3.41. Alors  $\mathcal{G}$  est une partie bornée de  $L^q(\mathbb{R}^n)$  (car bornée dans  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ). D'après le théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, il suffit de montrer que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $|h| < \delta$  et toute  $f \in \mathcal{G}$ ,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \varepsilon.$$

Or, si  $\alpha \in ]0, 1]$  est tel que

$$\frac{1}{q} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{p^*},$$

alors, pour toute  $f \in \mathcal{G}$ ,

$$\begin{aligned} \|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} &\leq \|\tau_h f - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\alpha \|\tau_h f - f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \\ &\leq |h|^\alpha \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \left( 2 \|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \right)^{1-\alpha} \\ &\leq C |h|^\alpha, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve dans ce cas.

Si maintenant  $p = n$ , une partie bornée de  $W^{1,n}(U)$  est aussi bornée dans  $W^{1,p}(U)$  pour tout  $p < n$ , et il suffit d'appliquer le cas 1. en choisissant  $p$  assez proche de  $n$  pour que  $p^*$  soit arbitrairement grand. Enfin, le cas  $p > n$  résulte du théorème d'Ascoli (preuve analogue, détails laissés au lecteur).  $\square$

**Remarque 3.94.** Les injections de Sobolev du théorème 3.91 ne sont plus compactes si  $\Omega$  est non borné, ou si  $q = p^*$  ou  $\gamma = 1 - \frac{n}{p}$  ([1, Exemples 6.11 and 6.12]).

Pour terminer cette section, on cite d'abord deux exemples d'inégalités "d'interpolation" de Gagliardo-Nirenberg :

**Théorème 3.95.** Soient  $1 \leq q \leq p < +\infty$ . Alors, il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}^\alpha$$

avec  $\alpha := 1 - \frac{q}{p}$ .

**Théorème 3.96.** Soient  $1 \leq q \leq p \leq +\infty$  et  $r > n$ . Alors, pour toute  $u \in W^{1,r}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha} \|\nabla u\|_{L^r(\mathbb{R}^n)}^\alpha$$

avec

$$\alpha = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{p}}{\frac{1}{q} + \frac{1}{n} - \frac{1}{r}}.$$

On pourra consulter [107, p. 125].

Une autre inégalité reliée aux plongements de Sobolev est l'inégalité de Nash suivante :

**Théorème 3.97.** Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $C_n > 0$  tel que, pour toute fonction  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|f\|_2^{2(1+\frac{2}{n})} \leq C_n^2 \|\nabla f\|_2^2 \|f\|_1^{\frac{4}{n}}.$$

*Démonstration.* Nous présentons ici la preuve de Nash, qui utilise la transformée de Fourier. On écrit que, pour tout  $R > 0$ ,

$$\begin{aligned} \|f\|_2^2 &= \|\widehat{f}\|_2^2 \\ &= \int_{|\xi| \leq R} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > R} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_n R^n \|\widehat{f}\|_\infty^2 + R^{-2} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C_n R^n \|f\|_1^2 + C R^{-2} \|\nabla f\|_2^2, \end{aligned}$$

et on conclut en optimisant sur  $R > 0$ . □

Pour  $n \geq 3$ , l'inégalité de Nash est une conséquence facile du plongement  $W^{1,2} \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}$  via l'inégalité de Hölder. Dans le contexte plus général des variétés riemanniennes, ces inégalités de Nash et de Sobolev, ainsi que la décroissance en  $t^{-n/2}$  du noyau de la chaleur associé à l'opérateur de Laplace Beltrami, sont équivalentes ([10] et les références contenues dans cet article).

## 1.12 Inégalités de Poincaré

**Théorème 3.98.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné et  $1 \leq p < +\infty$ .

1. Il existe  $C_p > 0$  (ne dépendant que de  $p$ ) tel que, pour toute  $u \in W_0^{1,p}(U)$ ,

$$\|u\|_{L^p(U)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(U)}.$$

2. On suppose de plus  $U$  connexe et lipschitzien. Alors il existe  $C_P > 0$  (dépendant de  $p$  et de  $U$ ) tel que, pour toute  $u \in W^{1,p}(U)$ ,

$$\|u - u_U\|_{L^p(U)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(U)},$$

avec

$$u_U := \frac{1}{\mathcal{L}^n(U)} \int_U u(x) dx.$$

*Démonstration.* Pour 1., soit  $(u_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(U)$  une suite qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$ . On note  $\widetilde{u}_k$  l'extension de  $u_k$  par 0 sur  $\mathbb{R}^n \setminus U$ . Si  $1 \leq p < n$ , on a, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} \|u_k\|_{L^p(U)} &= \|\widetilde{u}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|\widetilde{u}_k\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C \|\nabla u_k\|_{L^p(U)}, \end{aligned}$$

et il suffit de faire tendre  $k$  vers  $+\infty$  (on notera que  $C$  ne dépend pas de  $U$ ).

Si  $p = n$ , le théorème 3.74 montre que, pour tout  $k$ ,

$$\|u_k\|_{L^n(U)} = \|\widetilde{u}_k\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla \widetilde{u}_k\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} = C \|\nabla u_k\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}.$$

On fait à nouveau tendre  $k$  vers  $+\infty$  pour conclure. Enfin, si  $p > n$ , on fixe  $y \notin \overline{U}$ . Pour tout  $x \in U$ ,

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &= |\widetilde{u}_k(x) - \widetilde{u}_k(y)| \\ &\leq C |x - y|^{1 - \frac{n}{p}} \|\nabla \widetilde{u}_k\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C' \|\nabla u_k\|_{L^p(U)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $\|u_k\|_{L^p(U)} \leq C \|\nabla u_k\|_{L^p(U)}$ . On fait à nouveau tendre  $k$  vers  $+\infty$  pour conclure.

Pour 2., on raisonne par l'absurde. Si la conclusion est fautive, alors, pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $u_k \in W^{1,p}(U)$  telle que

$$\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)} > k \|\nabla (u_k - (u_k)_U)\|_{L^p(U)}.$$

On pose alors  $v_k := \frac{u_k - (u_k)_U}{\|u_k - (u_k)_U\|_{L^p(U)}}$ . Pour tout  $k \geq 1$ ,  $v_k \in W^{1,p}(U)$  et

$$\int_U v_k(x) dx = 0, \quad \|v_k\|_{L^p(U)} = 1, \quad \|\nabla v_k\|_{L^p(U)} < \frac{1}{k}.$$

La suite  $(v_k)_{k \geq 1}$  est bornée dans  $W^{1,p}(U)$ . D'après le théorème 3.91, il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante et  $v \in L^p(U)$  telles que  $v_{\varphi(k)} \rightarrow v$  dans  $L^p(U)$ . On a donc  $\int_U v(x) dx = 0$ . De plus,  $\nabla v_{\varphi(k)}$  converge vers 0 dans  $L^p(U)$ , ce qui entraîne que  $v$  est constante sur  $U$ . En effet, pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  et tout  $1 \leq i \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \left| \int_U v(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| &= \lim_k \left| \int_U v_{\varphi(k)}(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \\ &= \lim_k \left| \int_U \frac{\partial v_{\varphi(k)}}{\partial x_i}(x) \varphi(x) dx \right| \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi,  $\nabla v = 0$  dans  $U$ , donc  $v$  est constante d'après le corollaire 3.27, donc nulle presque partout sur  $U$ .

Or  $\|v_{\varphi(k)}\|_{L^p(U)} = 1$  pour tout  $k$ , donc  $\|v\|_{L^p(U)} = 1$  puisque  $v_{\varphi(k)} \rightarrow v$  dans  $L^p(U)$ . On obtient donc une contradiction.  $\square$

**Corollaire 3.99.** Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et tout  $r > 0$ , pour toute fonction  $f \in W^{1,p}(B(x, r))$ , on a

$$\int_{B(x,r)} |f(x) - f_{B(x,r)}|^p dx \leq Cr^p \int_{B(x,r)} |\nabla f(x)|^p dx. \quad (3.100)$$

*Démonstration.* Le théorème 3.98 fournit  $C > 0$  tel que, pour toute  $g \in W^{1,p}(B(0,1))$ ,

$$\int_{B(0,1)} |g(x) - g_{B(0,1)}|^p dx \leq C \int_{B(0,1)} |\nabla g(x)|^p dx. \quad (3.101)$$

Soient maintenant  $x, r$  et  $f$  comme dans l'énoncé du corollaire 3.99. Pour tout  $y \in B(0,1)$ , on pose  $g(y) := f(x + ry)$ . Alors

$$g_{B(0,1)} = \frac{1}{\alpha_n} \int_{B(0,1)} g(y) dy = \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \int_{B(x,r)} f(z) dz = f_{B(x,r)},$$

et (3.101) donne immédiatement (3.100) par changement de variable.  $\square$

### 1.13 Introduction aux fonctions à variation bornée

On rappelle que, si  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la divergence de  $\varphi$  au point  $x$  est définie par

$$\operatorname{div} \varphi(x) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi^i}{\partial x_i}(x).$$

On utilisera une légère variante du théorème de représentation de Riesz (voir aussi le théorème 2.49 du chapitre 2), qui concerne les formes linéaires continues sur l'espace des fonctions continues à support compact ([45, Section 1.8, Theorem1]) :

**Théorème 3.102.** [Théorème de représentation de Riesz] Soit  $L : C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue. Alors il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  et une fonction  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mesurable pour  $\mu$  telle que

1.  $|\sigma(x)| = 1$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,
2.  $L(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \sigma(x) \rangle d\mu(x)$  pour toute  $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ .

**Définition 3.103.** Soit  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . On dit que  $f$  est à variation bornée si, et seulement si,

$$\sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx; \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \text{ et } |\varphi(x)| \leq 1 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^n \right\} < +\infty.$$

Ici et dans la suite de ce paragraphe,  $|\varphi(x)|$  est la norme euclidienne de  $\varphi(x)$ . On note  $BV(\mathbb{R}^n)$  l'espace des fonctions à variation bornée.

Il est immédiat que  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n) \subset BV(\mathbb{R}^n)$ . Par contre,  $\chi_{[0,1]} \in BV(\mathbb{R}) \setminus W^{1,1}(\mathbb{R})$ .

On utilise l'espace  $BV$  pour définir les ensembles de périmètre fini (déjà rencontrés dans la définition 2.143 du Chapitre 2) :

**Définition 3.104.** Soit  $E \subset \mathbb{R}^n$  mesurable (pour  $\mathcal{L}^n$ ). On dit que  $E$  est à périmètre fini si, et seulement si,  $\chi_E \in BV(\mathbb{R}^n)$ .

**Théorème 3.105.** Soit  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ . Alors il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\mathbb{R}^n$  et une fonction  $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mesurable pour  $\mu$  telles que  $|\sigma(x)| = 1$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \sigma(x) \rangle d\mu(x).$$

On notera  $\mu = \|Df\|$  et  $\|f\|_{BV(\mathbb{R}^n)} := \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|Df\|(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* Pour toute  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , on pose

$$L\varphi := - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx.$$

Alors, pour toute  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , on a, par définition de  $BV(\mathbb{R}^n)$ ,

$$|L\varphi| \leq C \|\varphi\|_\infty,$$

où  $C > 0$  ne dépend que de  $f$ . Cela permet d'étendre  $L$  par densité en une forme linéaire continue  $\tilde{L}$  sur  $C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  et on conclut grâce au théorème de Riesz (théorème 3.102).  $\square$

Si  $f \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ , alors  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$  et

$$\|Df\|(E) = \int_E |\nabla f| d\mathcal{L}^n.$$

De plus, avec la représentation donnée par le théorème 3.105,

$$\sigma = \begin{cases} \frac{\nabla f}{|\nabla f|} & \text{si } \nabla f \neq 0, \\ 0 & \text{si } \nabla f = 0. \end{cases}$$

Si  $E$  est à périmètre fini, on notera  $D\chi_E = \|\partial E\|$  et  $\nu_E := -\sigma$ . On a donc, pour toute  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \nu_E(x) \rangle d\|\partial E\|(x).$$

Si  $E$  est un ouvert de classe  $C^1$  tel que  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \cap K) < +\infty$  pour tout compact  $K \subset \mathbb{R}^n$ , on a aussi, pour toute  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,

$$\int_E \operatorname{div} \varphi(x) dx = - \int_{\partial E} \langle \varphi(x), \nu(x) \rangle d\mathcal{H}^{n-1}(x),$$

ce qui montre que  $E$  est à périmètre fini,  $\|\partial E\|(\mathbb{R}^n) = \mathcal{H}^{n-1}(\partial E)$  et  $\nu_E = \nu \mathcal{H}^{n-1}$  presque partout sur  $\partial E$ .

**Remarque 3.106.** En réalité, tout ouvert  $E \subset \mathbb{R}^n$  vérifiant  $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E) < +\infty$  est à périmètre fini (voir [3, Proposition 3.62]).

Voici un résultat d'approximation, dans l'esprit du théorème de Friedrichs (théorème 3.21) pour les fonctions  $BV$  :

**Théorème 3.107.** Soit  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ . Il existe une suite de fonctions  $(f_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telles que :

1.  $f_k \rightarrow f$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ,
2.  $\|Df_k\|(\mathbb{R}^n) \rightarrow \|Df\|(\mathbb{R}^n)$ .

*Démonstration.* On fixe  $\varepsilon > 0$ . Soit  $m \geq 1$  tel que  $\|Df\|(\mathbb{R}^n \setminus B(0, m)) < \varepsilon$ . Pour tout  $k \geq 1$ , soient  $B_k := B(0, k+m)$  et  $V_k := B_{k+1} - \overline{B_{k-1}}$ . Soit  $(\zeta_k)_{k \geq 1}$  une partition de l'unité associée aux  $V_k$  : pour tout  $k \geq 1$ , le support de  $\zeta_k$  est un compact inclus dans  $V_k$ ,  $0 \leq \zeta_k \leq 1$  et

$$\sum_{k \geq 1} \zeta_k = 1.$$

Soit  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , à support dans  $\overline{B(0, 1)}$  et d'intégrale 1. Pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $\varepsilon_k > 0$  tel que

1.  $\operatorname{Supp}(\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k)) \subset V_k$ ,



2.  $\int_{\mathbb{R}^n} |\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k) - f\zeta_k| < \frac{\varepsilon}{2^k},$
3.  $\int_{\mathbb{R}^n} |\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k) - fD\zeta_k| < \frac{\varepsilon}{2^k}.$

On pose enfin

$$f_\varepsilon := \sum_{k \geq 1} \eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k).$$

La fonction  $f_\varepsilon$  est  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$  (considérer les supports des  $\eta_j$  et des  $\zeta_k$ ). On a aussi  $\|f - f_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon,$  de sorte que  $f_\varepsilon \rightarrow f$  dans  $L^1(\mathbb{R}^n).$

Soit maintenant  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  avec  $|\varphi| \leq 1.$  Alors, pour tout  $\varepsilon > 0,$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx &= \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} (\eta_{\varepsilon_k} * (f\zeta_k))(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \zeta_k(x) \operatorname{div} (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(x) dx \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} (\zeta_k(x) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi))(x) dx \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \langle D\zeta_k(x), (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)(x) \rangle dx \\ &= \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} (\zeta_k(x) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi))(x) dx \\ &\quad - \sum_{k \geq 1} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), (\eta_{\varepsilon_k} * (fD\zeta_k) - fD\zeta_k) \rangle dx \\ &= A_1 + A_2. \end{aligned}$$

La dernière ligne vient du fait que  $\sum_{k \geq 1} D\zeta_k = 0.$  D'une part, comme  $\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi) \in C_c^1(\mathbb{R}^n),$   $|\zeta_k(\eta_{\varepsilon_k} * \varphi)| \leq 1$  et comme tout point de  $\mathbb{R}^n$  appartient à  $V_k$  pour au plus trois indices  $k,$

$$\begin{aligned} |A_1| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} (\zeta_1(x) (\eta_{\varepsilon_1} * \varphi))(x) dx + \sum_{k \geq 2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} (\zeta_k(x) (\eta_{\varepsilon_k} * \varphi))(x) dx \right| \\ &\leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) + \sum_{k \geq 2} \|Df\|(V_k) \\ &\leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) + 3\|Df\|(\mathbb{R}^n \setminus B(0, m+1)) \\ \hat{E} &\leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

De plus,  $|A_2| < \varepsilon,$  si bien que

$$\left| \int f_\varepsilon \operatorname{div} \varphi \right| \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) + 4\varepsilon,$$

donc

$$\|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n) \leq \|Df\|(\mathbb{R}^n) + 4\varepsilon. \quad (3.108)$$

Par ailleurs,

$$\|Df\|(\mathbb{R}^n) \leq \underline{\lim} \|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n). \quad (3.109)$$

En effet, si  $\varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  avec  $|\varphi| \leq 1,$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \operatorname{div} \varphi(x) dx \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \langle \varphi(x), \sigma_\varepsilon(x) \rangle d\|Df_\varepsilon(x)\| dx \\ &\leq \underline{\lim} \|Df_\varepsilon\|(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Il est clair que (3.108) et (3.109) donnent la conclusion avec des fonctions  $C^\infty(\mathbb{R}^n),$  pas forcément à support compact. Enfin, on multiplie  $f_\varepsilon$  par une fonction  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  convenable pour conclure.  $\square$

**Remarque 3.110.** Il n'est pas possible d'obtenir  $\lim_k \|D(f - f_k)\| = 0$  dans la conclusion du théorème 3.107. En effet, dans ce cas, la suite  $(f_k)_{k \geq 1}$  serait de Cauchy dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ , et devrait donc converger dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ , de sorte que  $f$  devrait appartenir à  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ .

Voici une version d'un plongement de type Sobolev dans l'espace  $BV$  :

**Théorème 3.111.** Soit  $n \geq 2$ . Il existe  $C > 0$  tel que, pour toute  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|Df\|(\mathbb{R}^n).$$

*Démonstration.* Soit  $(f_k)_{k \geq 1}$  une suite donnée par le théorème 3.107, qui vérifie aussi  $f_k \rightarrow f$  presque partout dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|f_k\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq C \liminf_{k \rightarrow +\infty} \|Df_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = C \|Df\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

ce qui donne le résultat. □

**Remarque 3.112.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert. On peut définir  $BV(U)$  comme  $BV(\mathbb{R}^n)$  en ne considérant que les fonctions test  $\varphi \in C_c^1(U)$ . Alors, si  $U$  est borné et lipschitzien,  $BV(U) \hookrightarrow L^{\frac{n}{n-1}}(U)$ , et l'injection  $BV(U) \hookrightarrow L^p(U)$  est compacte pour tout  $p \in [1, \frac{n}{n-1}[$ . Ces propriétés d'injection s'étendent au cas où  $U$  a la propriété d'extension pour les fonctions  $BV$  ([3, Corollaire 3.49]).

Un cas particulier important du théorème 3.111 est une forme de l'inégalité isopérimétrique :

**Théorème 3.113.** Pour tout ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  de périmètre fini,

$$\mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \leq C \|\partial E\|(\mathbb{R}^n),$$

où  $C > 0$  est la constante intervenant dans le théorème 3.111.

*Démonstration.* Il suffit d'appliquer le théorème 3.111 avec  $f = \chi_E$ , qui est dans  $BV(\mathbb{R}^n)$  par hypothèse. □

## 1.14 Meilleure constante dans un plongement de Sobolev

On peut déterminer explicitement la meilleure constante du plongement de  $W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  dans  $L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)$  :

**Théorème 3.114.** Pour toute  $u \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq n^{-1} \alpha(n)^{-\frac{1}{n}} \|\nabla u\|_{L^1(\mathbb{R}^n)},$$

et la constante  $n^{-1} \alpha(n)^{-\frac{1}{n}}$  est la meilleure possible. On rappelle que  $\alpha(n) = \mathcal{L}^n(B(0, 1))$ .

La preuve présentée ici, souvent attribuée à Gromov (qui l'attribue lui-même à Knothe ([77])) utilise le lemme suivant :

**Lemme 3.115.** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert convexe borné et  $f \in C^1(\overline{\Omega})$  avec  $f(x) > 0$  pour tout  $x \in \overline{\Omega}$ . Alors il existe un  $C^1$ -difféomorphisme  $\Phi : \Omega \rightarrow B(0, \alpha(n)^{-\frac{1}{n}})$  tel que :

1.  $\Phi(x_1, \dots, x_n) = (\Phi_1(x_1), \Phi_2(x_1, x_2), \dots, \Phi_n(x_1, \dots, x_n))$ ,
2.  $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x) > 0$  pour tout  $x \in \Omega$  et, pour tout  $x \in \Omega$ ,

$$\det D\Phi(x) = \prod_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x) = \frac{f(x)}{\int_{\Omega} f(y) dy}.$$

*Preuve du lemme 3.115 :* on commence par construire un difféomorphisme  $\Psi$  de  $\Omega$  sur  $Q = ]0, 1[^n$  avec les mêmes propriétés. Il suffit de poser

$$\Psi_i(x_1, \dots, x_i) := \frac{\int_{A_i(x)} f(z) dz_i \dots dz_n}{\int_{B_i(x)} f(z) dz_i \dots dz_n},$$

avec

$$A_i(x) := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega; z_j = x_j \text{ pour tout } j < i \text{ et } z_i \leq x_i\}$$

et

$$B_i(x) := \{z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega; z_j = x_j \text{ pour tout } j < i\}.$$

On vérifie facilement que  $\Psi$  est  $C^1$  et que  $\Psi_i$  est strictement croissante par rapport à  $x_i$ , donc  $\Psi_i$  est injective et  $\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} > 0$  dans  $\Omega$ . On vérifie aussi que  $\Psi(\Omega) = Q$ . Enfin,  $\det D\Psi > 0$  dans  $\Omega$ , donc  $\Psi$  est un  $C^1$ -difféomorphisme de  $\Omega$  sur  $Q$ .

De plus,

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} = \frac{\int_{B_{i+1}} f}{\int_{B_i} f},$$

donc

$$\det D\Psi = \prod_{i=1}^n \frac{\partial \Psi_i}{\partial x_i} = \frac{\int_{B_{n+1}} f}{\int_{B_1} f} = \frac{f(x)}{\int_{\Omega} f},$$

ce qui termine la vérification pour  $\Psi$ .

Si on applique cette construction avec  $\tilde{\Omega} = B(0, \alpha(n)^{-\frac{1}{n}})$  et  $f(x) = 1$  pour tout  $x \in \Omega$ , on obtient un  $C^1$ -difféomorphisme  $\tilde{\Psi} : \tilde{\Omega} \rightarrow Q$  avec les propriétés requises, dont le jacobien vaut 1 partout. Finalement,  $\tilde{\Psi}^{-1} \circ \Psi$  a toutes les propriétés voulues.  $\square$

*Preuve du théorème 3.114 :* comme  $|\nabla u| = |\nabla |u||$  presque partout, on peut supposer que  $u \geq 0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Par convolution, on peut aussi supposer que  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , puis que le support de  $u$  est une boule  $\overline{B}$  et que  $u > 0$  dans  $B$  (convoluer  $u$  par  $\varphi_\varepsilon$  où  $\varphi$  est à support dans  $\overline{B(0, 1)}$  et strictement positive dans  $B(0, 1)$ ).

On pose  $f = u^{\frac{n}{n-1}}$ . Soit  $\Phi : B \rightarrow B(0, \alpha(n)^{-\frac{1}{n}})$  un  $C^1$ -difféomorphisme donné par le lemme 3.115, appliqué à  $f$ . Alors, pour tout  $x \in B$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{div} \Phi(x)}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x) \\ &\geq \left( \prod_{i=1}^n \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_i}(x) \right)^{\frac{1}{n}} \\ &= |u(x)|^{\frac{1}{n-1}} \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}^{-\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Comme  $u\Phi = 0$  sur  $\partial B$ , on a, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_B \operatorname{div} (u\Phi)(x) dx \\ &= \int_B u(x) \operatorname{div} \Phi(x) dx + \int_B \langle \Phi(x), \nabla u(x) \rangle dx, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} n \int_B |u| |u|^{\frac{1}{n-1}} \|u\|_{L^{\frac{n}{n-1}}}^{-\frac{1}{n-1}} &\leq \int_B |u| \operatorname{div} \Phi \\ &\leq \int_B |\nabla u| |\Phi| \\ &\leq \alpha(n)^{-\frac{1}{n}} \int_B |\nabla u|, \end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion.  $\square$

Comme corollaires, on obtient :

**Corollaire 3.116.** Pour toute  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|f\|_{L^{\frac{n}{n-1}}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{n} \alpha(n)^{-\frac{1}{n}} \|Df\|(\mathbb{R}^n).$$

**Corollaire 3.117.** Pour tout ensemble  $E \subset \mathbb{R}^n$  de périmètre fini,

$$\mathcal{L}^n(E)^{1-\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \alpha(n)^{-\frac{1}{n}} \|\partial E\|(\mathbb{R}^n).$$

On notera que la constante  $\frac{1}{n} \alpha(n)^{-\frac{1}{n}}$  est optimale (considérer le cas où  $E$  est une boule). Cela prouve aussi l'optimalité de cette constante dans le théorème 3.114.

On termine ce paragraphe par une caractérisation maximale des espaces de Sobolev  $W^{1,p}$  dans un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^n$ , dont la définition est inspirée par celle de  $BV$ .

Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert lipschitzien borné (ou  $U = \mathbb{R}^n$ ). Pour tout  $x \in U$ , soit  $F_x(U)$  l'espace des fonctions  $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_n) \in L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n)$ , dont la divergence (au sens des distributions) est une fonction bornée sur  $\mathbb{R}^n$ , à support dans un cube  $Q \subset \mathbb{R}^n$  centré dans  $U$  et contenant  $x$  et satisfaisant

$$\|\Phi\|_\infty + l(Q) \|\operatorname{div} \Phi\|_\infty \leq \frac{1}{|Q|}.$$

Pour tout  $x \in U$ , on pose

$$G_x(U) = \{\Phi \in F_x(U); \langle \Phi, \nu \rangle = 0 \text{ p.p. sur } \partial U\},$$

où  $\nu$  désigne le vecteur unité normal sortant. Comme  $\Phi$  et  $\operatorname{div} \Phi$  sont bornés,  $\langle \Phi, \nu \rangle$  est bien définie dans  $L^\infty(\partial U)$ .

Si  $f \in L^1_c(U)$ , on définit, pour tout  $x \in U$ ,

$$M^{(1)}f(x) = \sup_{\Phi \in F_x(U)} \left| \int_U f(y) \operatorname{div} \Phi(y) dy \right|,$$

$$N^{(1)}f(x) = \sup_{\Phi \in G_x(U)} \left| \int_U f(y) \operatorname{div} \Phi(y) dy \right|.$$

**Théorème 3.118.** [9, Theorem 36] Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^n$  (ou  $U = \mathbb{R}^n$ ) et  $f \in L^q(U)$ ,  $1 < q \leq +\infty$ .

1.  $f \in W^{1,q}(U) \Leftrightarrow N^{(1)}f \in L^q(U)$ , et  $\|\nabla f\|_q \sim \|N^{(1)}f\|_q$ .
2.  $f \in W_0^{1,q}(U) \Leftrightarrow M^{(1)}f \in L^q(U)$ , et  $\|\nabla f\|_q \sim \|M^{(1)}f\|_q$ .

On trouvera une preuve de ce résultat pour  $U = \mathbb{R}^n$  à l'exercice 3.181.

## 2 Espaces de Sobolev dans les espaces métriques

Il s'agit maintenant d'étendre la théorie précédente au cas des fonctions définies sur un espace métrique. On définira deux classes d'espaces de Sobolev, dont l'une fait intervenir la notion de gradient faible, elle-même définie par le biais de courbes rectifiables, que nous présentons maintenant. Il faut noter que cette extension aux espaces métriques permettra de montrer de nouvelles propriétés des espaces  $W^{1,p}(U)$  avec  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Cette section s'inspire partiellement de [55].

## 2.1 Module d'une famille de courbes

Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On définit maintenant l'intégrale d'une fonction borélienne le long d'une courbe rectifiable :

**Définition 3.119.** Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable et  $\rho$  une fonction borélienne de  $\gamma([a, b])$  dans  $[0, +\infty]$ . On définit alors

$$\int_{\gamma} \rho := \int_0^{l(\gamma)} \rho(\tilde{\gamma}(t)) dt,$$

où  $\tilde{\gamma}$  est la paramétrisation de  $\gamma$  par longueur d'arc.

**Théorème 3.120.** Soient  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe lipschitzienne et  $\rho$  une fonction borélienne de  $\gamma([a, b])$  dans  $[0, +\infty]$ . Alors

$$\int_{\gamma} \rho := \int_a^b \rho(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)| dt.$$

*Démonstration.* Comme  $\gamma = \tilde{\gamma} \circ s_{\gamma}$  et  $s_{\gamma}$  est lipschitzienne avec  $s'_{\gamma}(t) = |\dot{\gamma}(t)|$  pour presque tout  $t \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho &= \int_0^{l(\gamma)} \rho(\tilde{\gamma}(t)) dt \\ &= \int_a^b \rho(\tilde{\gamma}(s_{\gamma}(u))) s'_{\gamma}(u) du \\ &= \int_a^b \rho(\gamma(u)) |\dot{\gamma}(u)| du, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve. □

On utilisera aussi dans la suite la notion de module d'une famille de courbes. On suppose que  $\mu$  est une mesure borélienne sur  $X$ . Soit  $\mathcal{M}$  l'ensemble de toutes les courbes rectifiables non constantes sur  $X$ .

**Définition 3.121.** Soit  $\Gamma \subset \mathcal{M}$ .

1. On définit  $F(\Gamma)$  comme l'ensemble des fonctions boréliennes  $\rho : X \rightarrow [0, +\infty]$  telles que  $\int_{\gamma} \rho \geq 1$  pour toute  $\gamma \in \Gamma$ .
2. Soit  $p \in [1, +\infty[$ . On définit le  $p$ -module de  $\Gamma$  par

$$\text{Mod}_p(\Gamma) := \inf_{\rho \in F(\Gamma)} \int_X \rho^p(x) d\mu(x).$$

**Proposition 3.122.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Alors  $\text{Mod}_p(\Gamma)$  est une mesure sur  $\mathcal{M}$ .

*Démonstration.* La fonction nulle appartient clairement à  $F(\emptyset)$ , donc  $\text{Mod}_p(\emptyset) = 0$ . Soient maintenant  $(\Gamma_n)_{n \geq 1}$  une famille dans  $\mathcal{M}$  et  $\varepsilon > 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $\rho_n \in F(\Gamma_n)$  tel que  $\int_X \rho_n^p(x) d\mu(x) \leq$

$$\text{Mod}_p(\Gamma_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \text{ Si } \rho := \left( \sum_{n \geq 1} \rho_n^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ on a } \rho \geq 1 \text{ sur } \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n \text{ et } \int_X \rho^p(x) d\mu(x) \leq \sum_{n \geq 1} \text{Mod}_p(\Gamma_n) + \varepsilon.$$

Ainsi,  $\text{Mod}_p \left( \bigcup_{n \geq 1} \Gamma_n \right) \leq \sum_{n \geq 1} \text{Mod}_p(\Gamma_n) + \varepsilon$  et ce pour tout  $\varepsilon > 0$ . □

On dira qu'une propriété est satisfaite pour  $p$ -presque toute courbe de  $X$  si, et seulement si, elle est satisfaite pour toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M} \setminus \Gamma$ , où  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  vérifie  $\text{Mod}_p(\Gamma) = 0$ . Voici une interprétation géométrique de cette notion dans le cas euclidien :

**Proposition 3.123.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Soit  $E \subset Q^{n-1} = [0, 1]^{n-1}$  un ensemble borélien. On définit

$$\Gamma_E := \{\gamma_{x'} : [0, 1] \rightarrow Q^n = [0, 1]^n; \gamma_{x'}(t) := (x', t), x' \in E\}.$$

Autrement dit,  $\Gamma_E$  est l'ensemble des segments parallèles à  $\mathbb{R}e_n$ , contenus dans  $Q^n$  et passant par un point de  $E$ . Alors  $\text{Mod}_p(\Gamma_E) = 0$  si, et seulement si,  $\mathcal{L}^{n-1}(E) = 0$ .

*Démonstration.* On suppose que  $\text{Mod}_p(\Gamma_E) = 0$ . Soit  $\varepsilon > 0$ . Il existe  $\rho \in F(\Gamma_E)$  tel que  $\int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) < \varepsilon$ . Alors, par Fubini,

$$\varepsilon > \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) \geq \left( \int_E \int_0^1 \rho(x) d\mathcal{L}^n(x) \right)^p \geq \mathcal{L}^{n-1}(E)^p,$$

ce qui montre que  $\mathcal{L}^{n-1}(E) = 0$ . Réciproquement, supposons  $\mathcal{L}^{n-1}(E) = 0$ . Soit  $\rho := \chi_{E \times [0, 1]}$ . La fonction  $\rho$  appartient à  $F(\Gamma_E)$ , de sorte que  $\text{Mod}_p(\Gamma_E) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p(x) d\mathcal{L}^n(x) = 0$ , ce qui termine la preuve.  $\square$

On donne maintenant une description des familles de courbes de module 0 dans un contexte général :

**Théorème 3.124.** Soient  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  et  $p \in [1, +\infty[$ . Alors  $\text{Mod}_p(\Gamma) = 0$  si, et seulement si, il existe une fonction borélienne positive  $\rho \in L^p(X)$  telle que  $\int_\gamma \rho = +\infty$  pour toute courbe  $\gamma \in \Gamma$ . En conséquence, si  $g \in L^p(X)$  est borélienne positive, alors  $\int_\gamma g < +\infty$  pour  $p$ -presque toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$ .

*Démonstration.* On suppose que  $\text{Mod}_p(\Gamma) = 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , il existe  $\rho_n \in F(\Gamma)$  avec  $\int_X \rho_n^p(x) d\mu(x) < 2^{-np}$ . Soit  $\rho := \sum_{n \geq 1} \rho_n$ . Alors  $\rho \in L^p(X)$  est positive et  $\int_\gamma \rho = \sum_{n \geq 1} \int_\gamma \rho_n = +\infty$  pour tout  $\gamma \in \Gamma$ . Réciproquement, si  $\rho \in L^p(X)$  est une fonction positive telle que  $\int_\gamma \rho = +\infty$  pour toute courbe  $\gamma \in \Gamma$ , alors, pour tout  $n \geq 1$ ,  $\frac{\rho}{n} \in F(\Gamma)$  et  $\int_X \left(\frac{\rho(x)}{n}\right)^p d\mu(x) \rightarrow 0$ , donc  $\text{Mod}_p(\Gamma) = 0$ .  $\square$

On termine par une propriété reliant la convergence dans  $L^p(X)$  et celle de l'intégrale le long d'une courbe :

**Théorème 3.125.** Soient  $p \in [1, \infty[$  et  $(u_n)_{n \geq 1} : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$  une suite de fonctions boréliennes qui converge dans  $L^p(X)$  vers une fonction borélienne  $u$ . Il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\gamma |u_{\varphi(n)} - u| = 0$$

pour  $p$ -presque toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$ .

*Démonstration.* Il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que

$$\int_X |u_{\varphi(n)}(x) - u(x)|^p d\mu(x) < 2^{-pn-n}.$$

Soit  $\Gamma$  l'ensemble des courbes  $\gamma \in \Gamma$  telles que  $\int_\gamma |u_{\varphi(n)} - u|^p$  ne converge pas vers 0. On va montrer que  $\text{Mod}_p(\Gamma) = 0$ . Pour tout  $n \geq 1$ , soit  $\Gamma_n$  l'ensemble des courbes  $\gamma \in \Gamma$  telles que  $\int_\gamma |u_{\varphi(n)} - u| > 2^{-n}$ . Comme  $2^n |u_{\varphi(n)} - u| \in F(\Gamma_n)$ ,  $\text{Mod}_p(\Gamma_n) \leq \int_X 2^{np} |u_{\varphi(n)}(x) - u(x)|^p d\mu(x) < 2^{-n}$ . Comme  $\Gamma \subset \bigcup_{m > n} \Gamma_m$  pour tout  $n \geq 1$ , on obtient que  $\text{Mod}_p(\Gamma) \leq 2^{-n}$  pour tout  $n$ , d'où la conclusion.  $\square$

## 2.2 Gradients supérieurs

On désigne toujours par  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré.

**Définition 3.126.** Soient  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne et  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  une fonction borélienne.

1. On dit que  $g$  est un gradient supérieur de  $u$  si, et seulement si,

$$|u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \leq \int_{\gamma} g \quad (3.127)$$

pour toute courbe rectifiable  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ .

2. Soit  $p \in [1, +\infty[$ . On dit que  $g$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$  si, et seulement si, (3.127) est vérifiée pour  $p$ -presque toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$ .

On observe :

**Lemme 3.128.** Soient  $p \in [1, +\infty[$ ,  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne et  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ . Si  $\tilde{g} : X \rightarrow [0, +\infty]$  est une fonction borélienne telle que  $\tilde{g} = g$   $\mu$ -presque partout, alors  $\tilde{g}$  est aussi un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ .

On notera que cette conclusion est fautive pour les gradients supérieurs !

*Preuve du lemme 3.128 :* comme la suite constamment égale à  $\tilde{g} - g$  tend vers 0 dans  $L^p$ , le théorème 3.125 montre que, pour  $p$ -presque toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$ ,  $\int_{\gamma} |\tilde{g} - g| = 0$ , donc  $\int_{\gamma} g = \int_{\gamma} \tilde{g}$ .  $\square$

On peut approcher tout gradient supérieur faible par un gradient supérieur :

**Lemme 3.129.** Soient  $p \in [1, +\infty[$ ,  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne et  $g : X \rightarrow [0, +\infty]$  un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ . On suppose que  $g(x) < +\infty$  pour presque tout  $x \in X$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un gradient supérieur  $g_{\varepsilon}$  de  $u$  tel que

$$g_{\varepsilon}(x) \geq g(x) \text{ pour presque tout } x \in X$$

et

$$\|g_{\varepsilon} - g\|_{L^p(X)} \leq \varepsilon.$$

*Démonstration.* Soit  $\Gamma \subset \mathcal{M}$  la famille de toutes les courbes  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  rectifiables non constantes telles que l'inégalité

$$|u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \leq \int_{\gamma} g$$

n'est pas vérifiée. Alors  $\text{Mod}_p(\Gamma) = 0$ . Par le théorème 3.124, il existe une fonction borélienne positive  $\rho \in L^p(X)$  telle que  $\int_{\gamma} \rho = +\infty$  pour toute courbe  $\gamma \in \Gamma$ . On pose  $g_{\varepsilon} := g + \varepsilon \frac{\rho}{\|\rho\|_p}$  et on vérifie immédiatement que  $g_{\varepsilon}$  convient.  $\square$

Dans le cas euclidien, la notion de gradient supérieur généralise la norme euclidienne du gradient :

**Proposition 3.130.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $u \in C^{\infty}(U)$ . Alors :

1.  $|\nabla u|$  est un gradient supérieur de  $u$ ,
2. si  $g \in L^1_{loc}(U)$  est un gradient supérieur de  $u$ , alors  $g(x) \geq |\nabla u(x)|$  pour presque tout  $x \in U$ .

*Démonstration.* Soit  $\gamma : [0, l] \rightarrow U$  une courbe rectifiable paramétrée par longueur d'arc. On pose  $f(t) = u(\gamma(t))$  pour tout  $t \in [0, l]$ . Alors

$$\begin{aligned} |u(\gamma(l)) - u(\gamma(0))| &= |f(l) - f(0)| \\ &= \left| \int_0^l f'(t) dt \right| \\ &= \left| \int_0^l \langle \gamma'(t), \nabla u(\gamma(t)) \rangle dt \right| \\ &\leq \int_0^l |\nabla u(\gamma(t))| dt \\ &= \int_\gamma |\nabla u|, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve du point 1.

Pour 2, soit  $\nu \in \mathbb{R}^n$  avec  $|\nu| = 1$ . Soit  $\gamma : [0, l] \rightarrow U$  une courbe paramétrée par longueur d'arc et telle que  $\gamma'(t) = \nu$  pour presque tout  $t \in ]0, l[$ . Pour presque tout  $t \in ]0, l[$ , on a alors

$$\begin{aligned} g(\gamma(t)) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} \int_{t-h}^{t+h} g(\gamma(s)) ds \\ &\geq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{2h} (u(\gamma(t+h)) - u(\gamma(t-h))) \\ &= \langle \nabla u(\gamma(t)), \nu \rangle. \end{aligned}$$

On en déduit que, pour presque tout  $x \in U$ ,  $\langle \nabla u(x), \nu \rangle \leq g(x)$ . Comme c'est vrai pour tout  $\nu \in \mathbb{R}^n$  avec  $|\nu| = 1$ , on en déduit que  $|\nabla u(x)| \leq g(x)$  pour presque tout  $x \in U$ .  $\square$

**Remarque 3.131.** On notera que la conclusion de 2 dans la proposition 3.130 est fautive si on ne suppose pas  $g \in L^1_{loc}(U)$ . Par exemple, soient  $u(x) = x$  pour tout  $x \in [0, 1]$  et  $E \subset [0, 1]$  un ensemble de Cantor de mesure de Lebesgue strictement positive (voir l'exercice 1.253 du chapitre 1). On définit, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$g(x) := \begin{cases} +\infty & \text{si } x \notin E, \\ 0 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

On vérifie que  $g$  est un gradient supérieur de  $u$ , mais qu'on n'a pas  $|u'(x)| \leq g(x)$  pour presque tout  $x \in [0, 1]$ .

On décrit maintenant une construction générale d'un gradient supérieur pour une fonction définie sur un espace métrique. Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ , on pose

$$L(x, u, r) := \sup \{ |u(y) - u(x)| ; d(y, x) \leq r \},$$

puis, pour tout  $x \in X$ ,

$$\text{lip } u(x) := \underline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, u, r)}{r}$$

et

$$\text{Lip } u(x) := \overline{\lim}_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, u, r)}{r}.$$

On vérifie d'abord :

**Lemme 3.132.** Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne. Alors  $\text{lip } u$  et  $\text{Lip } u$  sont boréliennes.



*Démonstration.* On fait la preuve pour  $\text{Lip } u$ . Pour tout  $r > 0$ , on pose

$$\text{Lip}_r u(x) := \sup_{s < r} \frac{L(x, u, s)}{s}.$$

Comme  $\text{Lip } u(x) = \lim_{r \rightarrow 0} \text{Lip}_r u(x)$  pour tout  $x \in X$ , il suffit de vérifier que  $\text{Lip}_r u$  est borélienne pour tout  $r > 0$ .

On vérifie d'abord que, pour tout  $s > 0$ ,  $x \mapsto L(x, u, s)$  est borélienne, car  $\{x \in X; L(x, u, s) > \lambda\}$  est ouvert pour tout  $\lambda \in \mathbb{R}$ . On fixe alors une suite  $(s_n)_{n \geq 1}$  dense dans  $]0, +\infty[$ . Soit  $r > 0$ . Pour tout  $n \geq 1$  et tout  $x \in X$ , on pose  $v_n(x) := \frac{L(x, u, s_n)}{s_n}$ . Il suffit de montrer que, pour tout  $x \in X$ ,  $\text{Lip}_r u(x) = \sup_{n \geq 1; s_n < r} v_n(x)$ . C'est immédiat si  $\text{Lip}_r u(x) = 0$ . On supposera donc que  $\text{Lip}_r u(x) > 0$ . Il est clair que  $\text{Lip}_r u(x) \geq \sup_{n \geq 1} v_n(x)$ . De plus, si  $\varepsilon > 0$ , il existe  $s \in ]0, r[$  et  $x, y \in X$  avec  $d(x, y) \leq s$  tels que  $|u(y) - u(x)| > s(\text{Lip}_r u(x) - \varepsilon)$ . Soit alors  $n \geq 1$  tel que  $s < s_n < r$  et  $s > s_n(1 - \varepsilon)$ . On a  $d(x, y) \leq s_n$  et

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{s_n} = \frac{s}{s_n} \frac{|u(x) - u(y)|}{s} > (1 - \varepsilon)(\text{Lip}_r u(x) - \varepsilon),$$

ce qui montre que  $v_n(x) > (1 - \varepsilon)(\text{Lip}_r u(x) - \varepsilon)$ . On a donc  $\sup_{n \geq 1; s_n < r} v_n(x) > (1 - \varepsilon)(\text{Lip}_r u(x) - \varepsilon)$ , et comme c'est vrai pour tout  $\varepsilon > 0$ , on obtient la conclusion.  $\square$

**Proposition 3.133.** Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne. Alors  $\text{lip } u$  est un gradient supérieur de  $u$ .

*Démonstration.* Soient  $x, y \in X$  et  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  une courbe rectifiable paramétrée par longueur d'arc telle que  $\gamma(a) = x$  et  $\gamma(b) = y$ . La fonction  $u \circ \gamma$  est lipschitzienne, donc dérivable presque partout sur  $[a, b]$ . De plus, si  $t \in [a, b]$  et  $u \circ \gamma$  est dérivable en  $t$ , alors  $|(u \circ \gamma)'(t)| \leq \text{lip } u(\gamma(t))$ . En effet, soit  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Il existe  $\eta > 0$  tel que, pour tout  $r \in ]0, \eta[$  et tous  $x, y \in X$  tels que  $d(x, y) \leq r$ ,  $|u(y) - u(x)| \leq r(\text{lip } u(\gamma(t)) + \varepsilon)$ . En particulier, si  $d(x, y) < \eta$ ,  $|u(y) - u(x)| \leq d(x, y)(\text{lip } u(\gamma(t)) + \varepsilon)$ . Soit alors  $\alpha > 0$  tel que, pour tout  $|h| < \alpha$ ,  $\left| \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h} \right| \leq 1 + \varepsilon$ . Alors, si  $|h| < \inf(\alpha, \frac{\eta}{2})$ ,  $d(\gamma(t+h), \gamma(t)) < \eta$ , donc

$$\begin{aligned} \left| \frac{u(\gamma(t+h)) - u(\gamma(t))}{h} \right| &= \left| \frac{u(\gamma(t+h)) - u(\gamma(t))}{d(\gamma(t+h), \gamma(t))} \right| \left| \frac{d(\gamma(t+h), \gamma(t))}{h} \right| \\ &\leq (\text{lip } u(\gamma(t)) + \varepsilon)(1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

de sorte que  $|(u \circ \gamma)'(t)| \leq (\text{lip } u(\gamma(t)) + \varepsilon)(1 + \varepsilon)$ , et il suffit de faire tendre  $\varepsilon$  vers 0 pour conclure. On a donc

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &= |u(\gamma(a)) - u(\gamma(b))| \\ &= \left| \int_a^b (u \circ \gamma)'(t) dt \right| \\ &\leq \int_a^b \text{lip } u(\gamma(t)) dt \\ &= \int_\gamma \text{lip } u, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

On notera que la conclusion de la proposition 3.133 est fautive si  $u$  est seulement continue. En effet, si  $u : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  est croissante et dérivable en tout  $x \in [0, 1] \setminus E$ , où  $E$  est l'ensemble triadique de Cantor, et vérifie  $u'(x) = 0$  pour tout  $x \in [0, 1] \setminus E$ ,  $u(0) = 0$  et  $u(1) = 1$  (voir l'exercice 1.254 du chapitre 1), alors  $\text{lip } u = 0$  donc  $\text{lip } u$  n'est pas un gradient supérieur de  $u$ .

### 2.3 Espaces de Sobolev $N^{1,p}$

Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure borélienne  $\mu$ . Pour tout  $p \in [1, +\infty[$ , suivant [134], on définit  $\tilde{N}^{1,p}(X)$  comme l'espace des fonctions boréliennes  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $L^p(X, \mu)$ , pour lesquelles il existe un  $p$ -gradient supérieur faible appartenant à  $L^p(X)$ . Si  $u \in \tilde{N}^{1,p}(X)$ , on définit

$$\|u\|_{\tilde{N}^{1,p}(X)} := \|u\|_{L^p(X)} + \inf \|g\|_{L^p(X)},$$

où la borne supérieure est prise sur tous les  $p$ -gradients supérieurs faibles  $g$  de  $u$  appartenant à  $L^p(X)$ . On peut aussi dire que  $u \in \tilde{N}^{1,p}(X)$  si, et seulement si,  $u \in L^p(X)$  et il existe un  $p$ -gradient supérieur appartenant à  $L^p(X)$ . En effet, si  $u \in L^p(X)$  et  $g \in L^p(X)$  est un  $p$ -gradient supérieur faible, alors  $g(x) < +\infty$  pour presque tout  $x \in X$  et il existe un  $p$ -gradient supérieur  $h \in L^p(X)$  tel que  $h \geq g$  partout (Lemme 3.129).

Pour toutes  $u, v \in \tilde{N}^{1,p}(X)$ , on définit la relation  $u \sim v$  si, et seulement si,  $\|u - v\|_{\tilde{N}^{1,p}(X)} = 0$ . C'est une relation d'équivalence sur  $\tilde{N}^{1,p}(X)$  (exercice). Pour tout  $u \in \tilde{N}^{1,p}(X)$ , on note provisoirement  $\bar{u}$  la classe de  $u$  pour  $\sim$ .

**Définition 3.134.** On définit  $N^{1,p}(X) := \tilde{N}^{1,p}(X) / \sim$ , où  $\sim$  est la relation d'équivalence précédente. Pour tout  $\bar{u} \in N^{1,p}(X)$ , on définit sa norme dans  $N^{1,p}(X)$  par

$$\|\bar{u}\|_{N^{1,p}(X)} := \inf \left\{ \|v\|_{\tilde{N}^{1,p}(X)} ; v \in \bar{u} \right\}.$$

Par abus de langage, on confondra  $u \in \tilde{N}^{1,p}(X)$  avec sa classe dans  $N^{1,p}(X)$ .

**Remarque 3.135.** Si  $u \in \tilde{N}^{1,p}(X)$  et  $v = u$  presque partout, il peut arriver que  $v$  n'appartienne pas à  $\tilde{N}^{1,p}(X)$ . On verra par contre (Corollaire 3.139) que, si  $u, v \in \tilde{N}^{1,p}(X)$  et si  $u = v$  presque partout, alors  $u \sim v$ .

Les fonctions des espaces  $N^{1,p}$  ont des propriétés d'absolue continuité, que nous décrivons maintenant.

**Définition 3.136.** Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ .

1. Si  $\gamma$  est une courbe rectifiable, on dit que  $u$  est absolument continue le long de  $\gamma$  si, et seulement si,  $u \circ \tilde{\gamma}$  est absolument continue sur  $[0, l(\gamma)]$  (voir la définition 1.137 du chapitre 1),
2. on dit que  $u$  est absolument continue long de  $p$ -presque toute courbe (ou que  $u$  a la propriété  $ACC_p$ ) si, et seulement si, pour  $p$ -presque toute  $\gamma \in \mathcal{M}$ ,  $u$  est absolument continue le long de  $\gamma$ .

On observe :

**Lemme 3.137.** Si  $u$  est absolument continue le long de  $\gamma$ , alors  $u \circ \gamma$  est continue. En conséquence, si  $u$  a la propriété  $ACC_p$ , alors  $u \circ \gamma$  est continue pour  $p$ -presque toute  $\gamma \in \mathcal{M}$ .

*Démonstration.* Il suffit d'écrire que  $u \circ \gamma = u \circ \tilde{\gamma} \circ s_\gamma$ , et de constater que  $u \circ \tilde{\gamma}$  et  $s_\gamma$  sont continues.  $\square$

**Proposition 3.138.** Si  $u \in \tilde{N}^{1,p}$ , alors  $u$  a la propriété  $ACC_p$ .

*Démonstration.* Soit  $g \in L^p$  avec  $g \geq 0$  un gradient supérieur de  $u$ . Alors, pour toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$  telle que  $\int_\gamma g < +\infty$  et tous  $\alpha < \beta \in [0, l(\gamma)]$ ,

$$|u(\tilde{\gamma}(\beta)) - u(\tilde{\gamma}(\alpha))| \leq \int_\alpha^\beta g(\tilde{\gamma}(s)) ds \leq \int_0^{l(\gamma)} g(\tilde{\gamma}(s)) ds < +\infty,$$

ce qui entraîne l'absolue continuité de  $u \circ \tilde{\gamma}$ . On conclut en remarquant que  $\int_\gamma g < +\infty$  pour  $p$ -presque toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$ .  $\square$

**Corollaire 3.139.** Soient  $u_1, u_2 \in \tilde{N}^{1,p}(X)$  telles que  $u_1 = u_2$  presque partout sur  $X$ . Alors  $u_1 \sim u_2$ .

*Démonstration.* Il suffit de montrer que, si  $u \in \tilde{N}^{1,p}(X)$  et  $u = 0$  presque partout, alors  $\|u\|_{\tilde{N}^{1,p}} = 0$ . Pour cela, il suffit de voir que  $u \circ \gamma = 0$  pour  $p$ -presque toute  $\gamma \in \mathcal{M}$  (en effet, cela montrera que 0 est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ ).

Soit  $E := \{x \in X; u(x) \neq 0\}$ . On définit

$$g(x) := \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

La fonction  $g$  appartient à  $L^p(X)$ . Pour  $p$ -presque toute courbe  $\gamma \in \mathcal{M}$ ,  $\int_\gamma g < +\infty$  (Théorème 3.124) et  $u \circ \tilde{\gamma}$  est absolument continue. Si  $\gamma$  est une courbe telle que ces deux propriétés soient satisfaites, alors  $\mathcal{L}^1(\tilde{\gamma}^{-1}(E)) = 0$  (en effet,  $g \circ \tilde{\gamma} = +\infty$  sur cet ensemble et  $g \circ \tilde{\gamma}$  est intégrable). On a donc  $u \circ \tilde{\gamma} = 0$  presque partout. Comme  $u \circ \tilde{\gamma}$  est continue, on a  $u \circ \tilde{\gamma} = 0$ , donc aussi  $u \circ \gamma = 0$ .  $\square$

On va montrer que  $N^{1,p}$  est un espace de Banach. La preuve s'appuiera sur le résultat suivant :

**Proposition 3.140.** Soient  $(u_j)_{j \geq 1}$  et  $(g_j)_{j \geq 1}$  des suites de fonctions dans  $L^p(X)$  ( $1 \leq p < +\infty$ ). On suppose que  $u_j \rightarrow u$  faiblement dans  $L^p(X)$  et que  $g_j \rightarrow g$  faiblement dans  $L^p(X)$ . On suppose que, pour tout  $j \geq 1$ ,  $g_j$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u_j$ . Alors il existe une fonction  $v$  égale à  $u$  presque partout telle que  $g$  soit un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ .

Pour montrer ce résultat, on utilisera :

**Lemme 3.141.** Soient  $E$  un espace de Banach et  $(x_k)_{k \geq 1}$  une suite de  $E$  qui converge faiblement vers  $x$  dans  $E$ . Alors, pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $N_k \geq k$  et des réels positifs  $(\alpha_{j,k})_{k \leq j \leq N_k}$  de somme 1 tels

que, si  $\tilde{x}_k := \sum_{j=k}^{N_k} \alpha_{j,k} x_j$ , alors  $\tilde{x}_k \rightarrow x$  en norme.

*Preuve du lemme 3.141 :* pour tout  $k \geq 1$ , soit  $C_k$  l'enveloppe convexe des  $(x_j)_{j \geq k}$ . Alors  $x$  appartient à l'adhérence faible de  $C_1$ , qui est aussi son adhérence forte. Il existe donc  $\tilde{x}_1 \in C_1$  tel que  $\|x - \tilde{x}_1\| < 1$ . On suppose construits  $\tilde{x}_1 \in C_1, \dots, \tilde{x}_k \in C_k$  tels que  $\|x - \tilde{x}_j\| < 2^{-j}$  pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ . Alors  $x$  appartient à l'adhérence faible de  $C_{k+1}$ , qui est aussi son adhérence forte. Il existe donc  $\tilde{x}_{k+1} \in C_{k+1}$  tel que  $\|x - \tilde{x}_{k+1}\| < 2^{-(k+1)}$ .  $\square$

*Preuve de la proposition 3.140 :* d'après le lemme 3.129 (appliqué avec  $\varepsilon = 2^{-j}$ ), on peut supposer que  $g_j$  est un gradient supérieur de  $u_j$  pour tout  $j$ .

On suppose d'abord que  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^p$  en norme et  $g_j \rightarrow g$  dans  $L^p$  en norme. Il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que  $u_{\varphi(j)}(x) \rightarrow u(x)$  pour presque tout  $x \in X$  et  $\int_\gamma \hat{E} |g_{\varphi(j)} - g| \rightarrow 0$  pour toute  $\gamma \in \mathcal{M} \setminus \Gamma_1$  avec  $\text{Mod}_p(\Gamma_1) = 0$  (théorème 3.125).

Soit  $\Gamma_2$  l'ensemble des courbes  $\gamma \in \mathcal{M}$  telles que  $\int_\gamma g = +\infty$  ou il existe  $j \geq 1$  tel que  $\int_\gamma g_j = +\infty$ . On a  $\text{Mod}_p(\Gamma_2) = 0$  (théorème 3.124).

Soit  $E := \left\{ x \in X; \text{on n'a pas } \lim_{j \rightarrow +\infty} u_{\varphi(j)}(x) = u(x) \right\}$ . Alors  $\mu(E) = 0$ , donc, si  $\Gamma_3 := \{\gamma \in \mathcal{M}; \mathcal{L}^1(\tilde{\gamma}^{-1}(E)) > 0\}$ , on a  $\text{Mod}_p(\Gamma_3) = 0$ . En effet, si

$$h(x) := \begin{cases} +\infty & \text{si } x \in E, \\ 0 & \text{si } x \notin E, \end{cases}$$

alors  $h \in F(\Gamma_3)$ , et  $\int_X h^p(x) d\mu(x) = 0$ .

Soit maintenant  $\gamma \in \Gamma \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3)$ . On a donc

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \int_0^{l(\gamma)} |g_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma}(s) - g \circ \tilde{\gamma}(s)| ds = 0.$$

Comme  $\gamma \notin \Gamma_3$ ,  $\tilde{\gamma}(s) \notin E$  pour presque tout  $s \in [0, l(\gamma)]$ . Donc, pour presque tout  $s \in [0, l(\gamma)]$ ,  
 $\lim_{j \rightarrow +\infty} u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma}(s) = u \circ \tilde{\gamma}(s)$ .

On va maintenant prouver que la famille  $(u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})_{j \geq 1}$  est équicontinue et uniformément bornée sur  $[0, l(\gamma)]$ . Pour tous  $0 < s < t < l(\gamma)$ , on a

$$\left| (u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})(t) - (u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})(s) \right| \leq \int_s^t g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) du. \quad (3.142)$$

On fixe  $s_0 \in [0, l(\gamma)]$  tel que  $\left( (u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})(s_0) \right)_{j \geq 1}$  converge. On a donc, pour tout  $t \in [0, l(\gamma)]$ ,

$$\left| (u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})(t) \right| \leq \left| (u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})(s_0) \right| + \int_0^{l(\gamma)} g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) du,$$

et les suites  $\left( (u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})(s_0) \right)_{j \geq 1}$  et  $\left( \int_0^{l(\gamma)} g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) du \right)_{j \geq 1}$  sont bornées car elles convergent.

Reste à voir l'équicontinuité. Pour cela, compte tenu de (3.142), il suffit de voir que, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $A \subset [0, l(\gamma)]$  vérifiant  $\mathcal{L}^1(A) < \delta$  et tout  $j \geq 1$ ,

$$\int_A g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) du < \varepsilon.$$

Or il existe  $j_0 \geq 1$  tel que, pour tout  $j \geq j_0$ ,

$$\int_0^{l(\gamma)} \left| g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) - g(\tilde{\gamma}(u)) \right| du < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme

$$\int_A g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) du \leq \int_A g(\tilde{\gamma}(u)) du + \int_0^{l(\gamma)} \left| g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) - g(\tilde{\gamma}(u)) \right| du,$$

il suffit de trouver  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $A \subset [0, l(\gamma)]$  avec  $\mathcal{L}^1(A) < \delta$ ,

$$\int_A g(\tilde{\gamma}(u)) du < \frac{\varepsilon}{2}$$

et

$$\int_A g_{\varphi(j)}(\tilde{\gamma}(u)) du < \varepsilon$$

pour tout  $j \in \llbracket 1, j_0 - 1 \rrbracket$ . C'est possible parce que, comme  $\gamma \notin \Gamma_2$ ,  $g \circ \tilde{\gamma}$  et  $g_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma}$  sont intégrables pour  $j \in \llbracket 1, j_0 - 1 \rrbracket$ .

Comme la famille  $(u_{\varphi(j)} \circ \tilde{\gamma})_{j \geq 1}$  est équicontinue et bornée sur  $[0, l(\gamma)]$  et converge presque partout, elle converge donc uniformément sur  $[0, l(\gamma)]$ .

On définit maintenant

$$v(x) := \begin{cases} \lim_{j \rightarrow +\infty} u_{\varphi(j)}(x) & \text{si cette limite existe,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note que  $u = v$  presque partout sur  $X$ . La suite  $(u_{\varphi(j)})_{j \geq 1}$  converge uniformément vers  $v$  sur l'image de toute courbe  $\gamma \notin \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ . On a donc

$$\left| v(\tilde{\gamma}(l(\gamma))) - v(\tilde{\gamma}(0)) \right| \leq \int_0^{l(\gamma)} g(\tilde{\gamma}(s)) ds,$$

ce qui montre que  $g$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $v$ .

Il reste à traiter le cas général des convergences faibles. D'après le lemme 3.141, il existe une suite  $(\widetilde{u}_k)_{k \geq 1}$  qui converge vers  $u$  en norme  $L^p$  et telle que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $\widetilde{u}_k = \sum_{k \leq j \leq N_k} \alpha_{j,k} u_j$ , où les

$\alpha_{j,k}$  sont positifs de somme 1. Alors  $\widetilde{g}_k := \sum_{k \leq j \leq N_k} \alpha_{j,k} g_j$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $\widetilde{u}_k$ . On

vérifie que  $\widetilde{g}_k \rightarrow g$  faiblement dans  $L^p$ . En appliquant encore le lemme 3.141, on obtient une suite  $\widetilde{h}_k \rightarrow g$  en norme  $L^p$  telle que  $\widetilde{h}_k = \sum_{k \leq j \leq N_k} \beta_{j,k} g_j$ , où les  $\beta_{j,k}$  sont positifs de somme 1. Alors, si

$v_k := \sum_{k \leq j \leq N_k} \beta_{j,k} u_j$ ,  $v_k \rightarrow u$  en norme  $L^p$  et  $\widetilde{h}_k$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $v_k$ . On applique

le cas précédent pour conclure.  $\square$

**Corollaire 3.143.** On suppose  $1 < p < +\infty$ . Soit  $(u_j)_{j \geq 1} \in N^{1,p}(X)$  une suite bornée qui converge faiblement vers  $u$  dans  $L^p$ . Alors il existe  $v \in N^{1,p}(X)$  tel que  $v = u$  presque partout et

$$\|v\|_{N^{1,p}(X)} \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} \|u_j\|_{N^{1,p}}.$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que  $\|u_{\varphi(j)}\|_{N^{1,p}} \rightarrow \liminf \|u_j\|_{N^{1,p}}$ . Pour tout  $j \geq 1$ , soit  $g_j \in L^p$  un  $p$ -gradient faible supérieur de  $u_{\varphi(j)}$  tel que

$$\|u_{\varphi(j)}\|_{N^{1,p}} \leq \|u_{\varphi(j)}\|_{L^p} + \|g_j\|_{L^p} \leq \|u_{\varphi(j)}\|_{N^{1,p}} + \frac{1}{j}.$$

Comme  $1 < p < +\infty$ , il existe  $\psi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que  $g_{\psi(j)} \rightarrow g$  faiblement dans  $L^p$ . La proposition 3.140 montre qu'il existe  $v \in L^p(X)$  tel que  $v = u$  presque partout et  $g$  soit un  $p$ -gradient supérieur faible de  $v$ . Ainsi,  $v \in N^{1,p}(X)$ . De plus,

$$\begin{aligned} \|v\|_{N^{1,p}} &\leq \|v\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} \\ &\leq \liminf \|u_{\varphi \circ \psi(j)}\|_{L^p} + \liminf \|g_{\psi(j)}\|_{L^p} \\ &\leq \liminf \left( \|u_{\varphi \circ \psi(j)}\|_{L^p} + \|g_{\psi(j)}\|_{L^p} \right) \\ &\leq \liminf \left( \|u_{\varphi \circ \psi(j)}\|_{N^{1,p}} + \frac{1}{\psi(j)} \right) \\ &= \liminf \|u_j\|_{N^{1,p}}, \end{aligned}$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

**Théorème 3.144.** Pour tout  $1 \leq p < +\infty$ ,  $N^{1,p}(X)$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit  $(u_j)_{j \geq 1}$  une suite de Cauchy dans  $N^{1,p}(X)$ . Il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que  $\|u_{\varphi(j+1)} - u_{\varphi(j)}\|_{N^{1,p}} < 2^{-j}$  pour tout  $j \geq 1$ . En particulier,  $\|u_{\varphi(j+1)} - u_{\varphi(j)}\|_{L^p} < 2^{-j}$  pour tout  $j \geq 1$ . On peut donc définir

$$u(x) = \lim_{j \rightarrow +\infty} u_{\varphi(j)}(x)$$

pour presque tout  $x \in X$  et  $u \in L^p$  avec  $u_{\varphi(j)} \rightarrow u$  dans  $L^p$ .

Soit  $\widetilde{g}_j \in L^p$  un gradient supérieur de  $u_{\varphi(j+1)} - u_{\varphi(j)}$  tel que  $\|\widetilde{g}_j\|_{L^p} < 2^{-j}$ . Alors  $\sum_{j \geq 1} \widetilde{g}_j \in L^p$  et cette

fonction est un gradient supérieur de  $u - u_{\varphi(1)}$ . Ainsi,  $u \in N^{1,p}$ .

Si  $g_j := \sum_{k \geq j} \widetilde{g}_k$ ,  $g_j \in L^p$  et est un gradient supérieur de  $u_{\varphi(j)} - u_{\varphi(j+l)}$  pour tout  $l \geq 1$ . De plus,  $\|g_j\|_{L^p} \rightarrow 0$ . Comme  $u_{\varphi(j)} - u_{\varphi(j+l)} \rightarrow u_{\varphi(j)} - u$  quand  $l \rightarrow +\infty$ , la proposition 3.140 montre qu'il

existe  $v_{\varphi(j)}$  égal à  $u_{\varphi(j)} - u$  presque partout et tel que  $g_j$  soit un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u_{\varphi(j)} - u$ . Cela montre que  $v_{\varphi(j)} \in N^{1,p}$ . De plus,

$$\|v_{\varphi(j)}\|_{N^{1,p}} \leq \|v_{\varphi(j)}\|_{L^p} + \|g_j\|_{L^p} \rightarrow 0.$$

Comme  $u_{\varphi(j)} - u \in N^{1,p}$  et est égale à  $v_{\varphi(j)}$  presque partout, on a donc  $\|u_{\varphi(j)} - u\|_{N^{1,p}} = \|v_{\varphi(j)}\|_{N^{1,p}} \rightarrow 0$ . La suite  $(u_j)_{j \geq 1}$  est de Cauchy et possède une sous-suite convergente dans  $N^{1,p}$ , donc converge dans  $N^{1,p}$ .  $\square$

On va maintenant considérer le cas euclidien pour les espaces  $N^{1,p}$ . Pour cela, on revient à la propriété d'absolue continuité.

**Définition 3.145.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert et  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $u$  est absolument continue le long des lignes (ou que  $u \in ACL(U)$ ) si, et seulement si  $u$  est borélienne et, pour presque toute droite  $D$  parallèle aux axes de coordonnées, la restriction de  $u$  à  $D \cap U$  est absolument continue sur tout segment inclus dans  $D \cap U$ .

Comme les fonctions absolument continues sont presque partout dérivables, toute fonction de  $ACL(U)$  possède un gradient en presque tout point de  $U$ .

**Définition 3.146.** Soit  $1 \leq p < +\infty$ . On appelle  $ACL^p(U)$  l'espace des fonctions  $u \in L^p(U) \cap ACL(U)$  telles que  $|\nabla u| \in L^p(U)$ . On pose  $\|u\|_{ACL^p(U)} := \|u\|_{L^p(U)} + \|\nabla u\|_{L^p(U)}$ , où  $|\nabla u(x)|$  désigne la norme euclidienne de  $\nabla u(x)$ .

On va montrer :

**Théorème 3.147.** Soit  $1 \leq p < +\infty$ . Alors  $N^{1,p}(U, |\cdot|, \mathcal{L}^n) = ACL^p(U) = W^{1,p}(U)$  avec des normes égales.

L'inclusion  $W^{1,p}(U) \subset N^{1,p}(U)$  signifie que toute fonction  $u$  de  $W^{1,p}(U)$  est presque partout égale à une fonction de  $N^{1,p}(U)$ , dont la norme  $N^{1,p}$  est égale à celle de  $u$ .

La preuve du théorème 3.147 utilisera le fait que les fonctions absolument continues sur un segment de  $\mathbb{R}$  admettent une formule d'intégration par parties :

**Lemme 3.148.** Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dont la restriction à tout segment est absolument continue. On suppose que  $g'$ , qui existe presque partout, appartient à  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Alors, pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi'(x)dx = - \int_{\mathbb{R}} g'(x)\varphi(x)dx.$$

*Démonstration.* Soient  $a < b$  tels que le support de  $\varphi$  soit inclus dans  $[a, b]$ . Par le théorème 1.184,  $g(x) = g(a) + \int_a^x g'(t)dt$  pour tout  $x \in [a, b]$ , de sorte que, par le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi'(x)dx &= \int_a^b \varphi'(x) \left( g(a) + \int_a^x g'(t)dt \right) dx \\ &= \int_a^b g'(t) \left( \int_t^b \varphi'(x)dx \right) dt \\ &= - \int_a^b g'(t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

$\square$

*Preuve du théorème 3.147 :* soient  $u \in ACL^p(U)$  et  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ . Par le lemme 3.148 et le théorème de Fubini, en notant  $x = (x', x_n)$ ,

$$\begin{aligned} \int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) dx &= \int_{U'} \left( \int_{I_{x'}} u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) dx_n \right) dx' \\ &= - \int_{U'} \left( \int_{I_{x'}} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \varphi(x) dx_n \right) dx' \\ &= - \int_U \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \varphi(x) dx_1 \dots dx_n, \end{aligned}$$

où  $U' \subset \mathbb{R}^{n-1}$  est relativement compact et, pour tout  $x' \in U'$ ,  $I_{x'}$  est un segment tels que le support de  $\varphi$  soit inclus dans  $(x', x_n) \in U' \times I_{x'}$ . Ce raisonnement peut être fait pour toutes les dérivées partielles, ce qui montre que les dérivées partielles de  $u$ , qui existent presque partout, sont aussi les dérivées faibles de  $u$  au sens des espaces de Sobolev, donc que  $u \in W^{1,p}(U)$  et  $\|u\|_{ACL^p(U)} = \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ .

Soit  $u \in N^{1,p}(U)$ . D'après la proposition 3.138 et la proposition 3.123,  $u \in ACL(U)$ . En raisonnant comme pour la proposition 3.130, on montre que, si  $g \in L^p(U)$  est un gradient supérieur de  $u$ , alors, pour tout vecteur  $\nu$  de norme 1, si  $D_\nu u(x)$  désigne la dérivée de  $u$  en  $x$  dans la direction  $\nu$ , on a  $|D_\nu u(x)| \leq g(x)$  pour presque tout  $x \in U$ . En particulier,  $\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \right| \leq g(x)$ , ce qui montre que  $u \in ACL^p(U)$  et  $\|u\|_{ACL^p(U)} \leq C \|u\|_{N^{1,p}(U)}$ .

Comme  $u \in ACL^p(U)$ , on a donc  $u \in W^{1,p}(U)$ . On en déduit que, pour tout vecteur  $\nu$  de norme 1,  $D_\nu u(x) = \langle \nabla u(x), \nu \rangle$  pour presque tout  $x \in U$ . En effet, c'est vrai si  $u \in C^\infty(U)$  et le cas général provient du théorème de Friedrichs. On obtient alors, comme dans la preuve de la proposition 3.130, que  $|\nabla u(x)| \leq g(x)$  pour tout gradient supérieur  $g$  de  $u$ . Cela montre que, pour toute  $u \in N^{1,p}(U)$ ,  $\|u\|_{ACL^p(U)} = \|u\|_{W^{1,p}(U)} \leq \|u\|_{N^{1,p}(U)}$ .

Soit enfin  $u \in W^{1,p}(U)$ . Par le théorème 3.47, il existe une suite de fonctions  $(u_j)_{j \geq 1} \in C^\infty(U)$  qui converge vers  $u$  dans  $W^{1,p}(U)$ . Pour tout  $j \geq 1$ ,  $|\nabla u_j|$  est un gradient supérieur de  $u_j$ ,  $u_j \rightarrow u$  dans  $L^p(U)$  et  $|\nabla u_j| \rightarrow |\nabla u|$  dans  $L^p(U)$ . Par la proposition 3.140, il existe  $v : U \rightarrow \mathbb{R}$  égale à  $u$  presque partout telle que  $|\nabla u|$  soit un  $p$ -gradient supérieur faible de  $v$ . Cela montre que  $v \in N^{1,p}(U)$  et  $\|v\|_{N^{1,p}(U)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ .  $\square$

On a en particulier montré la généralisation suivante de la proposition 3.130 :

**Corollaire 3.149.** Soit  $u \in W^{1,p}(U)$ . Alors il existe  $v$  égale à  $u$  presque partout telle que  $|\nabla u|$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ . De plus, si  $g \in L^1_{loc}(U)$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ , alors  $|\nabla u| \leq g$  presque partout.

De façon générale, une fonction de  $N^{1,p}$  possède toujours un plus petit gradient supérieur :

**Théorème 3.150.** Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $u \in N^{1,p}(X)$ . Alors  $u$  possède un plus petit  $p$ -gradient supérieur faible  $g_u$ . Cela signifie que :

1.  $g_u$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$  et  $g_u \in L^p$ ,
2. si  $g \in L^p$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ , alors  $g(x) \geq g_u(x)$  pour presque tout  $x \in X$ .

La preuve utilise :

**Lemme 3.151.** Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $u \in N^{1,p}(X)$ . Soient  $g, h \in L^p$  des  $p$ -gradients supérieurs faibles de  $u$ . Si  $E \subset X$  est un fermé, alors

$$\rho := g\chi_E + h\chi_{X \setminus E}$$

est encore un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$  dans  $L^p$ .

*Preuve du lemme 3.151 :* soit  $\Gamma_1$  l'ensemble des courbes  $\gamma \in \mathcal{M}$  telles que  $\int_\gamma (g+h) = +\infty$  ou  $u \circ \gamma$  n'est pas continue. Alors  $\text{Mod}_p(\Gamma_1) = 0$ .

Soit  $\Gamma'_2$  l'ensemble des courbes  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  telles que l'inégalité

$$|u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \leq \min \left( \int_\gamma g, \int_\gamma h \right)$$

ne soit pas satisfaite. Soit  $\Gamma_2$  l'ensemble des courbes  $\gamma \in \mathcal{M}$  qui contiennent une sous-courbe appartenant à  $\Gamma'_2$ . Comme  $\text{Mod}_p(\Gamma'_2) = 0$ , on vérifie facilement que  $\text{Mod}_p(\Gamma_2) = 0$ . On va prouver que, pour toute  $\gamma \in \mathcal{M} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ ,

$$|u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \leq \int_\gamma \rho. \quad (3.152)$$

Soit donc  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$  telle que  $\gamma \in \mathcal{M} \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$ . L'inégalité (3.152) est immédiate si  $\gamma([a, b]) \subset E$  ou  $\gamma([a, b]) \subset X \setminus E$ .

On suppose maintenant que  $\gamma([a, b]) \cap E \neq \emptyset$  et  $\gamma([a, b]) \cap (X \setminus E) \neq \emptyset$ . Comme  $\gamma^{-1}(X \setminus E)$  est un ouvert de  $[a, b]$ , c'est une union dénombrable d'intervalles deux à deux disjoints, notés  $]t_i, s_i[$  (avec un léger abus de notation si l'une des extrémités vaut  $a$  ou  $b$ ). Soit  $\gamma_i := \gamma|_{]t_i, s_i[}$ . Alors

$$\begin{aligned} |u(\gamma(a)) - u(\gamma(b))| &\leq |u(\gamma(a)) - u(\gamma(t_1))| + |u(\gamma(t_1)) - u(\gamma(s_1))| \\ &\quad + |u(\gamma(s_1)) - u(\gamma(b))| \\ &\leq \int_{\gamma \setminus \gamma_1} g + \int_{\gamma_1} h, \end{aligned}$$

où  $\gamma \setminus \gamma_1$  est la courbe obtenue à partir de  $\gamma$  en enlevant les portions  $\gamma|_{]a, t_1]}$  et  $\gamma|_{]s_1, b]}$ . On obtient de même, pour tout  $n \geq 1$ ,

$$|u(\gamma(a)) - u(\gamma(b))| \leq \int_{\gamma \setminus \bigcup_{1 \leq i \leq n} \gamma_i} g + \int_{\bigcup_{i=1}^n \gamma_i} h,$$

et on obtient la conclusion en faisant tendre  $n$  vers  $+\infty$ .  $\square$

*Preuve du théorème 3.150 :* soient  $u \in N^{1,p}$  et  $m = \inf \{\|g\|_{L^p}\}$ , où la borne inférieure est prise sur tous les  $p$ -gradients supérieurs faibles  $g \in L^p$  de  $u$ . Il suffit de montrer qu'il existe un  $p$ -gradient supérieur faible  $g_u \in L^p$  de  $u$  tel que  $\|g_u\|_{L^p} = m$ . En effet, si  $g \in L^p$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$  et si  $\mu(\{x \in X; g(x) < g_u(x)\}) > 0$ , alors par régularité de  $\mu$ , il existe un fermé  $E \subset \{x \in X; g(x) < g_u(x)\}$  tel que  $\mu(E) > 0$ . Si  $\rho := g\chi_E + g_u\chi_{X \setminus E}$ , alors, par le lemme 3.151,  $\rho$  est encore un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$  dans  $L^p$  et  $\|\rho\|_{L^p} < m$ , ce qui est impossible.

On montre donc l'existence de  $g_u$ . Soit  $(g_n)_{n \geq 1}$  une suite de  $p$ -gradients supérieurs faibles de  $u$  dans  $L^p$  tels que  $m \leq \|g_n\|_{L^p} < m + 2^{-n}$ . On pose  $\rho_1 := g_1$ . On suppose qu'on a construit des  $p$ -gradients supérieurs faibles de  $u$ ,  $\rho_1, \dots, \rho_n$  tels que, pour presque tout  $x \in X$ ,  $\rho_1(x) \geq \rho_2(x) \geq \dots \geq \rho_n(x)$  et  $\|\rho_i\|_{L^p} < m + 2^{1-i}$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . La mesure  $\nu$  définie par  $\nu(A) := \int_A \rho_n^p d\mu$  est finie, donc il existe un fermé  $E \subset \{x \in X; g_{n+1}(x) < \rho_n(x)\}$  tel que  $\nu(\{x \in X; g_{n+1}(x) < \rho_n(x)\} \setminus E) < 2^{-p(n+1)}$ . On pose alors  $\rho_{n+1} := g_{n+1}\chi_E + \rho_n\chi_{X \setminus E}$ . Alors  $\rho_{n+1}(x) \leq \rho_n(x)$  pour presque tout  $x \in X$ . De plus, toujours par le lemme 3.151,  $\rho_{n+1}$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$ . Enfin,

$$\begin{aligned} \int_X \rho_{n+1}^p d\mu(x) &= \int_E g_{n+1}^p d\mu(x) + \int_{\{g_{n+1} < \rho_n\} \setminus E} \rho_n^p d\mu(x) + \int_{\{g_{n+1} \geq \rho_n\} \setminus E} \rho_n^p d\mu(x) \\ &\leq \int_E g_{n+1}^p d\mu(x) + \int_{\{g_{n+1} \geq \rho_n\}} \rho_n^p d\mu(x) + 2^{-(n+1)p} \\ &\leq (m + 2^{-(n+1)})^p + 2^{-(n+1)p}. \end{aligned}$$



On a donc construit une suite des  $p$ -gradients supérieurs faibles de  $u$ ,  $(\rho_n)_{n \geq 1}$ , tels que, pour presque tout  $x \in X$  et tout  $n \geq 1$ ,  $\rho_n(x) \geq \rho_{n+1}(x)$  et  $\|\rho_n\|_{L^p} < m + 2^{-n+1}$  pour tout  $n \geq 1$ . On peut donc poser  $\rho(x) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n(x)$  pour presque tout  $x \in X$ . On a aussi  $\rho_n \rightarrow \rho$  dans  $L^p$ ,  $\|\rho\|_{L^p} = m$  et  $\rho$  est un  $p$ -gradient supérieur faible de  $u$  par la proposition 3.140.  $\square$

## 2.4 Espaces de Sobolev à valeurs dans un espace de Banach

On peut définir des espaces de Sobolev sur  $X$  à valeurs dans un espace de Banach  $E$ . Plus précisément, nous allons définir l'espace de Sobolev  $N^{1,p}(X : E)$  pour  $1 \leq p < \infty$  en utilisant la notion de gradient supérieur.

**Définition 3.153.** On dit qu'une fonction mesurable  $f$  est dans  $N^{1,p}(X : E)$  si  $f \in L^p(X : E)$  et s'il existe une fonction mesurable  $\rho : X \rightarrow [0, +\infty]$  tel que  $\rho \in L^p(X)$  et pour  $p$ -presque toute courbe rectifiable  $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ , on a

$$\|f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\| \leq \int_{\gamma} \rho ds.$$

On rappelle que l'intégrale de Bochner et les espaces  $L^p(X : E)$  sont définis dans la section 3.4 du chapitre 2.

## 2.5 Espaces de Sobolev $M^{1,p}$

Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. Les espaces  $N^{1,p}(X)$  sont égaux à  $L^p(X)$  si  $X$  ne possède pas de courbe rectifiable non constante (ce qui est le cas, par exemple, avec la courbe de von Koch). On d'écrit ici un autre type d'espace de Sobolev, non trivial même dans cette situation. L'introduction de cet espace, due à Hajlasz, remonte à [54].

**Définition 3.154.** Soit  $p \in ]0, +\infty[$ . On appelle  $M^{1,p}(X)$  l'espace des fonctions  $u \in L^p(X)$  pour lesquelles il existe  $g \in L^p(X)$  avec  $g(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in X$  telle que

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)) \quad (3.155)$$

pour presque tous  $x, y \in X$  (ce qui signifie qu'il existe  $N \subset X$  de mesure nulle tel que (3.155) soit satisfaite pour tous  $x, y \in X \setminus N$ ). On définit

$$\|u\|_{M^{1,p}(X)} := \|u\|_{L^p(X)} + \inf \|g\|_{L^p(X)},$$

la borne inférieure étant prise sur toutes les  $g \in L^p(X)$  positives telles que (3.155) soit satisfaite. L'application  $u \mapsto \|u\|_{M^{1,p}(X)}$  est une norme sur  $M^{1,p}(X)$  si  $p \geq 1$ .

Dans le cas euclidien, la situation est la suivante :

**Théorème 3.156.** Soient  $p \in ]1, +\infty[$  et  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert qui possède la propriété d'extension pour les espaces  $W^{1,p}$  pour  $1 \leq p \leq +\infty$  (voir la remarque 3.46). Alors  $M^{1,p}(U) = W^{1,p}(U)$  avec équivalence des normes. Ici,  $U$  est un espace métrique muni de la distance euclidienne et la mesure est  $\mathcal{L}^n$ .

La preuve utilise :

**Lemme 3.157.** Soit  $B \subset \mathbb{R}^n$  une boule. Pour toute fonction  $g \in L^1(B)$  avec  $g \geq 0$  et tout  $x \in B$ , on définit le potentiel de Riesz de  $g$  au point  $x$  par

$$I_1(x) := \int_B \frac{g(z)}{|z - x|^{n-1}} dz.$$

Alors  $\|I_1\|_{L^1(B)} \leq C |B|^{\frac{1}{n}} \|g\|_{L^1(B)}$ .

*Preuve du lemme 3.157 :* il suffit d'écrire que, si  $B$  est de rayon  $r$ ,

$$\int_{x \in B} \int_{z \in B} \frac{g(z)}{|z-x|^{n-1}} dz dx = \int_B g(z) \left( \int_{x \in B} |z-x|^{1-n} dx \right) dz = Cr \|g\|_{L^1(B)}.$$

□

**Lemme 3.158.** Il existe  $C > 0$  tel que, pour toute boule  $B \subset \mathbb{R}^n$  et toute  $u \in W^{1,1}(B)$ ,

$$|u(x) - u_B| \leq C \int_B \frac{|\nabla u(y)|}{|x-y|^{n-1}} dy$$

pour presque tout  $x \in B$ .

*Preuve du lemme 3.158 :* on commence par le faire pour  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Pour tous  $x, y \in B$ , on note  $y = x + t_0 z$  avec  $|z| = 1$  et  $t_0 \geq 0$ , et on pose  $\delta(z) := \sup \{t > 0; x + tz \in B\}$ . Alors,

$$\begin{aligned} |u(y) - u(x)| &= \left| \int_0^1 \langle y-x, \nabla u(x + t(y-x)) \rangle dt \right| \\ &= \int_0^{|y-x|} \left\langle \frac{y-x}{|y-x|}, \nabla u \left( x + s \frac{y-x}{|y-x|} \right) \right\rangle ds \\ &\leq \int_0^{|y-x|} \left| \nabla u \left( x + s \frac{y-x}{|y-x|} \right) \right| ds \\ &= \int_0^{\delta(z)} |\nabla u(x + sz)| ds. \end{aligned}$$

En conséquence, si  $S^{n-1}$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$  et  $r$  le rayon de  $B$ ,

$$\begin{aligned} |u(x) - u_B| &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \left| \int_B (u(x) - u(y)) dy \right| \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\delta(z)} |u(x) - u(x + tz)| t^{n-1} dt d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\delta(z)} t^{n-1} \left( \int_0^{\delta(z)} |\nabla u(x + sz)| ds \right) dt d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{2r} t^{n-1} \left( \int_0^{\delta(z)} |\nabla u(x + sz)| ds \right) dt d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &= \int_{S^{n-1}} \int_0^{\delta(z)} \frac{|\nabla u(x + sz)|}{s^{n-1}} s^{n-1} ds d\mathcal{H}^{n-1}(z) \\ &= \int_B \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz. \end{aligned}$$

Dans le cas général, il existe une suite de fonctions  $(u_k)_{k \geq 1} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $u_k \rightarrow u$  dans  $W^{1,1}(B)$ . Pour tout  $k \geq 1$  et tout  $x \in B$ , on a  $|u_k(x) - (u_k)_B| \leq I_1(|u_k|)(x)$ , et le lemme 3.157 montre que  $I_1(|\nabla u_k|) \rightarrow I_1(|\nabla u|)$  dans  $L^1(B)$ , donc aussi presque partout (quitte à extraire une sous-suite), ce qui permet de conclure. □

*Preuve du théorème 3.156 :* comme  $U$  possède la propriété d'extension, on prolonge  $u$  en une fonction de  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  (théorème 3.41), toujours notée  $u$  et telle que  $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|u\|_{W^{1,p}(U)}$ . Soient  $x, y \in$

$\mathbb{R}^n$ ,  $R := |x - y|$  et  $B = B(x, 2R)$ . Le lemme 3.158 montre que

$$\begin{aligned}
|u(x) - u_B| &\leq C \int_{|z-x| \leq 2R} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \\
&= C \sum_{k \geq 0} \int_{2^{-k}R < |z-x| \leq 2^{1-k}R} \frac{|\nabla u(z)|}{|z-x|^{n-1}} dz \\
&\leq C \sum_{k \geq 0} (2^{-k}R)^{1-n} \int_{2^{-k}R < |z-x| \leq 2^{1-k}R} |\nabla u(z)| dz \\
&\leq C \sum_{k \geq 0} (2^{-k}R)(2^{-k}R)^{-n} \int_{|z-x| \leq 2^{1-k}R} |\nabla u(z)| dz \\
&\leq C'RM (|\nabla u|)(x),
\end{aligned}$$

où  $M$  désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood (Chapitre 1, section 6). On en déduit que

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_B| + |u(y) - u_B| \leq C'R(M(|\nabla u|)(x) + M(|\nabla u|)(y)).$$

Si  $g(z) := M(|\nabla u|)(z)$ , comme  $|\nabla u| \in L^p$  et  $p > 1$ ,  $g \in L^p$  avec  $\|g\|_{L^p} \leq C \|\nabla u\|_{L^p}$  (Chapitre 1, section 6, théorème 1.158). Comme  $R = |x - y|$ , on a bien montré que, pour presque tous  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(g(x) + g(y))$$

et donc  $\|u\|_{M^{1,p}} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}$ .

On suppose maintenant que  $u \in M^{1,p}(U)$ . Soit  $g \in L^p(U)$  telle que  $|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|(g(x) + g(y))$  pour tous  $x, y \in U \setminus N$  où  $N$  est de mesure nulle. Soient  $x \in U \setminus N$  et  $B = B(x, \varepsilon) \subset U$ . En intégrant sur  $B$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\int_B |u(y) - u_B| dy &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B \int_B |u(y) - u(z)| dy dz \\
&\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(B)} \int_B \int_B d(y, z)(g(y) + g(z)) dy dz \\
&\leq 4\varepsilon \int_B g(z) dz.
\end{aligned}$$

Soient  $\varphi \in C_c^\infty(U)$  et  $\psi \in C_c^\infty(B(0, 1))$  avec  $\int \psi = 1$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  et tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose  $\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ . On a alors, pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned}
\int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U (u * \psi_\varepsilon)(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \\
&= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_U \varphi(x) \left( \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} * u \right)(x) dx.
\end{aligned}$$

Or, pour tout  $x \in U$  appartenant au support de  $\varphi$ , comme  $\int \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i}(z) dz = 0$ ,

$$\left( \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} * u \right)(x) = \left( \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} * (u - u_{B(x, \varepsilon)}) \right)(x).$$

Il s'ensuit que, si  $\tilde{g}$  est la fonction valant  $g$  sur  $U$  et 0 sur  $\mathbb{R}^n \setminus U$ ,

$$\left| \left( \frac{\partial \psi_\varepsilon}{\partial x_i} * u \right)(x) \right| \leq C\varepsilon^{-n-1} \int_{B(x, \varepsilon)} |u(y) - u_{B(x, \varepsilon)}| dy \leq C\varepsilon^{-n} \int_{B(x, \varepsilon)} g(y) dy \leq CM\tilde{g}(x).$$

Ainsi, pour toute  $\varphi \in C_c^\infty(U)$ ,

$$\left| \int_U u(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) dx \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| M\tilde{g}(x) dx \leq C \|M\tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^q(U)} \leq C' \|g\|_{L^p(U)} \|\varphi\|_{L^q(U)}$$

avec  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . La dernière égalité est due au fait que  $q > 1$ . Comme  $p > 1$ , cela montre (théorème 3.28) que  $u \in W^{1,p}(U)$  avec  $\|u\|_{W^{1,p}(U)} \leq C \|u\|_{M^{1,p}(U)}$ .  $\square$

**Remarque 3.159.** La conclusion du théorème 3.156 est fausse pour  $p = 1$  (exercice 3.195).

**Théorème 3.160.** Pour tout  $p \in [1, +\infty[$ ,  $M^{1,p}(X)$  est un espace de Banach.

*Démonstration.* Soit  $(u_j)_{n \geq 1}$  une suite de Cauchy dans  $M^{1,p}(X)$ . Il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante telle que  $\|u_{\varphi(j+1)} - u_{\varphi(j)}\|_{M^{1,p}} < 2^{-j}$  pour tout  $j \geq 1$ . Comme dans la preuve du théorème 3.144,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} u_{\varphi(j)}(x) = u(x)$  pour presque tout  $x \in X$  et la convergence a aussi lieu dans  $L^p$ .

Pour tout  $j \geq 1$ , soit  $g_j \in L^p$  avec  $\|g_j\|_{L^p} \leq 2^{1-j}$  et

$$\left| \left( u_{\varphi(j+1)}(y) - u_{\varphi(j)}(y) \right) - \left( u_{\varphi(j+1)}(x) - u_{\varphi(j)}(x) \right) \right| \leq d(x, y) (g_j(x) + g_j(y))$$

pour presque tous  $x, y \in X$ . Si  $h := \sum_{j \geq 1} g_j$ , alors  $\|h\|_{L^p} \leq 2$  et, pour tous  $k > j$ ,

$$\left| \left( u_{\varphi(k)}(y) - u_{\varphi(j)}(y) \right) - \left( u_{\varphi(k)}(x) - u_{\varphi(j)}(x) \right) \right| \leq d(x, y) \sum_{l \geq j} (g_l(x) + g_l(y)),$$

d'où, en faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ ,

$$\left| \left( u(y) - u_{\varphi(j)}(y) \right) - \left( u(x) - u_{\varphi(j)}(x) \right) \right| \leq d(x, y) \sum_{l \geq j} (g_l(x) + g_l(y)).$$

Cela montre que  $u - u_{\varphi(j)} \in M^{1,p}(X)$  avec  $\|u - u_{\varphi(j)}\|_{M^{1,p}(X)} \leq \sum_{l \geq j} \|g_l\|_{L^p}$ . Ainsi  $u \in M^{1,p}(X)$  et  $u_{\varphi(j)} \rightarrow u$  dans  $M^{1,p}(X)$ .  $\square$

On obtient aussi un résultat d'approximation des fonctions de  $M^{1,p}(X)$  par des fonctions lipschitziennes :

**Théorème 3.161.** Soient  $p \in ]0, +\infty[$  et  $u \in M^{1,p}(X)$ . Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe une fonction  $v$  lipschitzienne sur  $X$  telle que :

1.  $\mu(\{x \in X; u(x) \neq v(x)\}) < \varepsilon$ ,
2.  $\|u - v\|_{M^{1,p}} < \varepsilon$ .

*Preuve du théorème 3.161 :* soit  $g \in L^p$  telle que  $\|g\|_{L^p} \leq C \|u\|_{M^{1,p}}$  et  $|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y))$  pour presque tous  $x, y \in X$ . Pour tout  $\lambda \geq 0$ , soit  $E_\lambda := \{x \in X; |u(x)| \leq \lambda \text{ et } g(x) \leq \lambda\}$ . Comme  $u$  et  $g$  sont dans  $L^p$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^p \mu(X \setminus E_\lambda) = 0.$$

De plus,  $u|_{E_\lambda}$  est  $2\lambda$ -lipschitzienne. Par la proposition 2.90 du chapitre 2, on prolonge  $u|_{E_\lambda}$  en une fonction  $2\lambda$ -lipschitzienne sur  $X$ , notée  $\bar{u}$ . Enfin, on pose, pour tout  $x \in X$ ,

$$v_\lambda(x) := (\text{sgn} \bar{u}(x)) \min(|\bar{u}(x)|, \lambda).$$

On vérifie que  $v_\lambda$  est  $2\lambda$ -lipschitzienne, que  $v_\lambda = u$  sur  $E_\lambda$  et  $|v_\lambda(x)| \leq \lambda$  pour tout  $x \in X$ . De plus,

$$\mu(\{x \in X; u(x) \neq v_\lambda(x)\}) \leq \mu(X \setminus E_\lambda) \rightarrow 0$$

quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

On va montrer que  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|u - v_\lambda\|_{M^{1,p}} = 0$ . Pour la "norme"  $L^p$ ,

$$\|u - v_\lambda\|_{L^p}^p = \int_{X \setminus E_\lambda} |u(x) - v_\lambda(x)|^p d\mu(x) \leq 2^{p-1} \left( \int_{X \setminus E_\lambda} |u(x)|^p d\mu(x) + \lambda^p \mu(X \setminus E_\lambda) \right) \rightarrow 0$$

quand  $\lambda \rightarrow +\infty$ .

Si on pose, pour tout  $x \in X$ ,

$$g_\lambda(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \in E_\lambda, \\ g(x) + 3\lambda & \text{si } x \notin E_\lambda, \end{cases}$$

alors  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|g_\lambda\|_{L^p} = 0$  et, pour presque tous  $x, y \in X$ ,

$$|(u - v_\lambda)(y) - (u - v_\lambda)(x)| \leq d(x, y)(g_\lambda(x) + g_\lambda(y)),$$

ce qui montre donc que  $\|u - v_\lambda\|_{M^{1,p}} \rightarrow 0$ . □

**Remarque 3.162.** Cette preuve montre que, pour toute  $u \in M^{1,p}$ , il existe une suite fonctions lipschitziennes  $(u_k)_{k \geq 1}$  qui converge vers  $u$  dans  $M^{1,p}$  avec les propriétés suivantes :

1. pour tout  $k \geq 1$ , il existe  $g_k \in L^p$  telle que  $|u_k(y) - u_k(x)| \leq d(x, y)(g_k(x) + g_k(y))$  pour presque tous  $x, y$ ,
2. il existe  $g \in L^p$  telle que  $|u(y) - u(x)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y))$  pour presque tous  $x, y$ ,
3.  $g_k \rightarrow g$  dans  $L^p$ .

On va montrer que les espaces  $M^{1,p}$  sont des sous-espaces de  $N^{1,p}$ , au sens suivant :

**Théorème 3.163.** Soit  $p \in [1, +\infty[$ . Pour toute  $u \in M^{1,p}(X)$ , il existe  $v \in N^{1,p}(X)$  égale à  $u$  presque partout et telle que  $\|v\|_{N^{1,p}(X)} \leq 2 \|u\|_{M^{1,p}(X)}$ .

La preuve utilise :

**Lemme 3.164.** Soient  $a < b$  et  $f \in L^1([a, b])$ . Alors il existe une suite  $(h_n)_{n \geq 1}$  tendant vers 0 telle que, pour presque tout  $x \in [a, b]$ ,  $\lim f(x + h_n) = f(x)$ .

*Preuve du lemme 3.164 :* comme  $f \in L^1$ ,  $\tau_h f \rightarrow f$  dans  $L^1$  quand  $h \rightarrow 0$  (où  $\tau_h f$  désigne la translation de  $f$  de vecteur  $h$ , voir le théorème 3.28). Il existe donc  $h_n \rightarrow 0$  telle que  $\tau_{h_n} f(x) \rightarrow f(x)$  pour presque tout  $x \in [a, b]$ . □

*Preuve du théorème 3.163 :* soit  $u \in M^{1,p}(X)$ . Par le théorème 3.161, il existe une suite de fonctions lipschitziennes  $(u_k)_{k \geq 1}$  qui converge vers  $u$  dans  $M^{1,p}$  et des fonctions  $g_k$  et  $g$  associées avec les propriétés de la remarque 3.161. Quitte à modifier  $g_k$  sur un ensemble de mesure nulle, on peut supposer que  $|u_k(y) - u_k(x)| \leq d(x, y)(g_k(x) + g_k(y))$  pour tous  $x, y \in X$ . On va montrer que, pour tout  $k \geq 1$ ,  $2g_k$  est un gradient supérieur de  $u_k$ .

Soit  $\gamma : [0, L] \rightarrow X$  une courbe rectifiable paramétrée par longueur d'arc. Si  $\int_\gamma g_k = +\infty$ , il n'y a rien à prouver. On suppose donc que  $\int_\gamma g_k < +\infty$ . Comme  $g_k \circ \gamma \in L^1([0, L])$ , par le lemme 3.164, il existe une suite  $h_n \rightarrow 0$  telle que  $g_k(\gamma(t + h_n)) \rightarrow g_k(\gamma(t))$  pour presque tout  $t \in [0, L]$ . La fonction  $u_k \circ \gamma$  est lipschitzienne donc dérivable presque partout et, pour presque tout  $t_0 \in [a, b]$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} (u_k \circ \gamma)(t) \right| &= \lim \left| \frac{u_k(\gamma(t_0 + h_n)) - u_k(\gamma(t_0))}{h_n} \right| \\ &\leq \overline{\lim} \frac{d(\gamma(t_0 + h_n), \gamma(t_0))}{|h_n|} (g_k(\gamma(t_0 + h_n)) + g_k(\gamma(t_0))) \\ &\leq 2g_k(\gamma(t_0)). \end{aligned}$$

Cela implique

$$\begin{aligned} |u_k(\gamma(L)) - u_k(\gamma(0))| &= \left| \int_0^L \frac{d}{dt} (u_k \circ \gamma)(t) dt \right| \\ &\leq 2 \int_0^L g_k(\gamma(t)) dt, \end{aligned}$$

ce qui montre que  $g_k$  est un gradient supérieur faible de  $u_k$ . Comme  $u_k \rightarrow u$  dans  $L^p$  et  $g_k \rightarrow g$  dans  $L^p$ , la proposition 3.140 permet de conclure la preuve. □

On va maintenant montrer des théorèmes de plongements pour les espaces  $M^{1,p}$ , en faisant une hypothèse sur la mesure  $\mu$ .

**Définition 3.165.** Soient  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré et  $s > 0$ . On dit que  $(X, d, \mu)$  est  $s$ -régulier si, et seulement si,  $\mu(X) < +\infty$ ,  $X$  est borné et il existe  $c, s > 0$  tel que, pour tout  $x \in X$  et tout  $r \leq \text{diam}(X)$ ,

$$\mu(B(x, r)) \geq cr^s.$$

Sous l'hypothèse que  $(X, d, \mu)$  est  $s$ -régulier, on a un théorème de plongement des espaces de Sobolev  $M^{1,p}(X)$  qui s'énonce ainsi :

**Théorème 3.166.** Soient  $s > 0$  et  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré  $s$ -régulier. Soient  $p \in [1, +\infty[$  et  $f \in M^{1,p}(X)$ . Alors :

1. Si  $p < s$ , et si  $p^*$  est défini par  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$ , alors  $f \in L^{p^*}(X)$  et

$$\|f\|_{p^*} \leq C \left( (\text{diam } X)^{-1} \|f\|_p + \|f\|_{M^{1,p}} \right),$$

2. si  $p = s$ , alors

$$\frac{1}{\mu(X)} \int_X \exp \left( C_1 \frac{\mu(X)^{\frac{1}{s}}}{\text{diam}(X)} \frac{|f(x) - f_X|}{\|f\|_{M^{1,p}}} \right) d\mu(x) \leq C_2,$$

3. si  $p > s$ , alors, pour presque tous  $x, y \in X$ ,

$$|f(x) - f(y)| \leq C \mu(X)^{\frac{1}{s} - \frac{1}{p}} \|f\|_{M^{1,p}}.$$

On pourra se reporter à [54, Theorem 6]. On va prouver dans la suite une version légèrement plus générale de ces injections de Sobolev.

**Définition 3.167.** Soient  $B_0 \subset X$  une boule,  $s, b > 0$  et  $\sigma \geq 1$ . On dit que  $\mu$  satisfait la condition  $V(\sigma B_0, s, b)$  si, et seulement si, pour toute boule  $B(x, r) \subset \sigma B_0$ ,

$$\mu(B(x, r)) \geq br^s.$$

On a alors le théorème de plongement suivant :

**Théorème 3.168.** Soient  $B_0 \subset X$  une boule de rayon  $r_0 > 0$ ,  $s, b > 0$  et  $\sigma > 1$ . On suppose que  $\mu$  satisfait la condition  $V(\sigma B_0, s, b)$ . On suppose que  $u \in M^{1,p}(\sigma B_0, d, \mu)$  et que  $|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y))$  pour presque tous  $x, y \in \sigma B_0$  et  $g \in L^p(\sigma B_0)$ . Alors il existe  $C, C_1, C_2 > 0$  ne dépendant que de  $s, p$  et  $\sigma$  avec les propriétés suivantes :

1. si  $0 < p < s$ , alors  $u \in L^{p^*}(B_0)$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$  et

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} \hat{\mathbb{E}} |u(x) - c|^{p^*} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq C \left( \frac{\mu(\sigma B_0)}{br_0^s} \right)^{\frac{1}{p}} r_0 \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

2. si  $p = s$ , alors

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} \exp \left( C_1 b^{\frac{1}{s}} \frac{|u(x) - u_{B_0}|}{\|g\|_{L^s(\sigma B_0)}} \right) d\mu(x) \leq C_2,$$

3. si  $p > s$ , alors

$$\|u - u_{B_0}\|_{L^\infty(B_0)} \leq C \left( \frac{\mu(\sigma B_0)}{br_0^s} \right)^{\frac{1}{p}} r_0 \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

De plus, il existe  $v$  égale à  $u$  presque partout sur  $\sigma B_0$  telle que, pour tous  $x, y \in \sigma B_0$ ,

$$|v(x) - v(y)| \leq C b^{-\frac{1}{p}} d(x, y)^{1 - \frac{s}{p}} \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.169)$$

**Remarque 3.170.** Dans le point 1 du théorème 3.168, si  $p^* \geq 1$ , on peut remplacer le membre de gauche par  $\|u - u_{B_0}\|_{L^{p^*}(B_0)}$ . Cela résulte de l'inégalité de Hölder.

*Preuve du théorème 3.168 :* la conclusion est immédiate si  $\int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x) = +\infty$ . Si  $g = 0$ , alors  $u$  est constante presque partout, et la conclusion est également immédiate. On supposera donc  $0 < \int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x) < +\infty$ . On pourra aussi supposer qu'il existe  $E \subset \sigma B_0$  avec  $\mu(E) > 0$  et  $\inf_{\text{ess}_E} |u| = 0$ . En effet, on peut se ramener à cette situation en retranchant une constante à  $u$ , ce qui ne change pas le résultat. Un tel ensemble  $E$  sera choisi dans la suite de la preuve. On peut également supposer que, pour tout  $x \in \sigma B_0$ ,

$$g(x) \geq 2^{-(1+\frac{1}{p})} \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (3.171)$$

quitte à remplacer  $g$  par  $\tilde{g} := g + \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}$ . Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , soit

$$E_k := \left\{ x \in \sigma B_0; g(x) \leq 2^k \right\},$$

de sorte que  $E_k \subset E_{k+1}$  pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ . On a

$$c \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \leq \int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x) \leq C \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \mu(E_k \setminus E_{k-1}),$$

où  $c, C > 0$  ne dépendent que de  $p$ . Soit  $a_k := \sup_{B_0 \cap E_k} |u|$ , de sorte que  $a_k \leq a_{k+1}$ .

On suppose d'abord que  $0 < p < s$ . Alors

$$\int_{B_0} |u(x)|^{p^*} d\mu(x) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{p^*} \mu(B_0 \cap (E_k \setminus E_{k-1})).$$

On observe que

$$\mu(\sigma B_0 \setminus E_k) = \mu\left(\left\{x \in \sigma B_0; g(x) > 2^k\right\}\right) \leq 2^{-kp} \int_{\sigma B_0} g(x)^p d\mu(x).$$

Pour presque tous  $x, y \in E_k$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y) 2^{k+1}.$$

Pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ , on définit

$$r_k = 2b^{-\frac{1}{s}} \mu(\sigma B_0 \setminus E_{k-1})^{\frac{1}{s}}.$$

Soient  $k \in \mathbb{Z}$  et  $x_k \in E_k$  tels que

$$\mu(\sigma B_0 \setminus E_{k-1}) > 0 \text{ et } B(x_k, r_k) \subset \sigma B_0.$$

Alors

$$\mu(B(x_k, r_k)) \geq br_k^s > \mu(\sigma B_0 \setminus E_{k-1}), \quad (3.172)$$

si bien que  $B(x_k, r_k) \cap E_{k-1} \neq \emptyset$  (sinon,  $B(x_k, r_k) \subset \sigma B_0 \setminus E_{k-1}$ , ce qui est impossible compte tenu de (3.172)). Il existe donc  $x_{k-1} \in E_{k-1}$  tel que

$$d(x_{k-1}, x_k) < r_k \leq 2b^{-\frac{1}{s}} 2^{-\frac{(k-1)p}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $B(x_{k-1}, r_{k-1}) \subset \sigma B_0$ , comme  $\sigma B_0 \setminus E_{k-2} \supset \sigma B_0 \setminus E_{k-1}$ , on a aussi  $\mu(\sigma B_0 \setminus E_{k-2}) > 0$ , on peut, de même, trouver  $x_{k-2} \in E_{k-2}$  tel que

$$d(x_{k-1}, x_k) < r_{k-1} \leq 2b^{-\frac{1}{s}} 2^{-\frac{(k-2)p}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On construit ainsi  $x_k \in E_k, \dots, x_{k_0} \in E_{k_0}$  tels que

$$d(x_{k-i}, x_{k-i+1}) < r_{k-i} \leq 2b^{-\frac{1}{s}} 2^{-\frac{(k-(i+1))p}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} d(x_k, x_{k_0}) &< r_k + r_{k-1} + \dots + r_{k_0+1} \\ &\leq 2b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \sum_{j=k_0}^{k-1} 2^{-j\frac{p}{s}} \\ &< 2^{-k_0\frac{p}{s}} \frac{2b^{-\frac{1}{s}}}{1 - 2^{-\frac{p}{s}}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Cette construction est possible dès lors que  $B(x_{k-i}, r_{k-i}) \subset \sigma B_0$  pour  $i \in \llbracket 0, k - k_0 - 1 \rrbracket$  (en effet, on aura aussi  $\sigma B_0 \setminus E_{k-i} \supset \sigma B_0 \setminus E_k$  donc  $\mu(\sigma B_0 \setminus E_{k-i}) > 0$ ). Cela est garanti si on choisit  $x_k \in B_0$ ,  $k > k_0$  et  $k_0$  tel que

$$2^{-k_0\frac{p}{s}} \frac{2b^{-\frac{1}{s}}}{1 - 2^{-\frac{p}{s}}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq (\sigma - 1)r_0.$$

Cette condition se réécrit

$$2^{k_0} \geq \left( \frac{2}{(1 - 2^{-\frac{p}{s}})(\sigma - 1)} \right)^{\frac{s}{p}} (br_0^s)^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.173)$$

La borne inférieure (3.171) montre qu'il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $E_k = \emptyset$ . De plus,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mu(E_k) = \mu(\sigma B_0)$ .

Il existe donc  $\tilde{k}_0 \in \mathbb{Z}$  tel que

$$\mu(E_{\tilde{k}_0-1}) < \frac{\mu(\sigma B_0)}{2} \leq \mu(E_{\tilde{k}_0}).$$

En particulier,  $E_{\tilde{k}_0} \neq \emptyset$ , donc, pour tout  $x \in E_{\tilde{k}_0}$ ,

$$2^{-(1+\frac{1}{p})} \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq g(x) \leq 2^{\tilde{k}_0}.$$

On a aussi

$$\frac{\mu(\sigma B_0)}{2} < \mu(\sigma B_0 \setminus E_{\tilde{k}_0-1}) \leq 2^{-(\tilde{k}_0-1)p} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y).$$

Ainsi,

$$2^{-(1+\frac{1}{p})} \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\tilde{k}_0} \leq 2^{(1+\frac{1}{p})} \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Soit  $l \in \mathbb{Z}$  le plus petit entier tel que

$$2^l > \max \left( 2^{1+\frac{1}{p}} \left( \frac{2}{(1 - 2^{-\frac{p}{s}})(\sigma - 1)} \right)^{\frac{s}{p}}, 1 \right) \left( \frac{\mu(\sigma B_0)}{br_0^s} \right)^{\frac{1}{p}},$$



et on pose  $k_0 := \widetilde{k}_0 + l$ . La condition  $V(\sigma B_0, s, b)$  montre que  $l > 0$ . On a donc  $\mu(E_{k_0}) \geq \mu(E_{\widetilde{k}_0}) > 0$ . La condition (3.173) est bien satisfaite. On vérifie que

$$c2^{k_0} \leq (br_0^s)^{-\frac{1}{p}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}} \leq C2^{k_0}.$$

Pour  $k > k_0$  et  $x_k \in E_k \cap B_0$ , on construit  $x_{k-1}, \dots, x_{k_0}$  comme plus haut. Alors

$$\begin{aligned} |u(x_k)| &\leq \sum_{i=0}^{k-k_0-1} \left| u(x_{k-i}) - u(x_{k-(i+1)}) \right| + |u(x_{k_0})| \\ &\leq \sum_{i=0}^{k-k_0-1} 2^{k-i+1} d(x_{k-i}, x_{k-(i+1)}) + |u(x_{k_0})|. \end{aligned}$$

En prenant la borne supérieure sur  $E_k \cap B_0$ , on obtient que

$$a_k \leq 8b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{j=k_0}^{k-1} 2^{j(1-\frac{p}{s})} + \sup_{E_{k_0} \cap \sigma B_0} |u|.$$

On cherche à estimer  $\sup_{E_{k_0} \cap \sigma B_0} |u|$ . On peut pour cela supposer que  $\inf_{E_{k_0}} |u|$  (en effet,  $\mu(E_{k_0}) > 0$ , voir la remarque en début de preuve). Il existe donc une suite  $(y_i)_{i \geq 1} \in E_{k_0}$  telle que  $u(y_i) \rightarrow 0$ . On a donc, pour tout  $x \in E_{k_0} \cap \sigma B_0$ ,

$$|u(x)| = \lim_{i \rightarrow +\infty} |u(x) - u(y_i)| \leq 4\sigma r_0 2^{k_0}.$$

On a finalement obtenu, pour  $k > k_0$  :

$$a_k \leq 8b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{j=k_0}^{k-1} 2^{j(1-\frac{p}{s})} + 4\sigma r_0 2^{k_0}. \quad (3.174)$$

Pour  $k \leq k_0$ , on a

$$a_k \leq a_{k_0} \leq 4\sigma r_0 2^{k_0}. \quad (3.175)$$

**On suppose d'abord que  $0 < p < s$  :** pour tout  $k \in \mathbb{Z}$ ,

$$\begin{aligned} a_k &\leq 8b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{j=-\infty}^k 2^{j(1-\frac{p}{s})} + 4\sigma r_0 2^{k_0} \\ &= C2^{k(1-\frac{p}{s})} b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} + 4\sigma r_0 2^{k_0}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \int_{B_0} |u(x)|^{p^*} d\mu(x) &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k^{p^*} \mu(B_0 \cap (E_k \setminus E_{k-1})) \\ &\leq C \left( b^{-\frac{p^*}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{p^*}{s}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{kp} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) + r_0^{p^*} 2^{k_0 p^*} \mu(B_0) \right) \\ &\leq C \left( 1 + \frac{\mu(B_0)}{br_0^s} \right) b^{-\frac{p^*}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{p^*}{p}}. \end{aligned}$$

Or, par l'hypothèse  $V(\sigma B_0, s, b)$ ,  $1 + \frac{\mu(B_0)}{br_0^s} \leq \frac{2\mu(B_0)}{br_0^s}$ , ce qui donne la conclusion dans ce cas.

**On suppose maintenant que  $p = s$  :** par l'inégalité de Jensen,

$$\left( \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} \exp \left( C_1 b^{\frac{1}{s}} \frac{|u(x) - u_{B_0}|}{\|g\|_{L^s(\sigma B_0)}} \right) d\mu(x) \right)^{1/2} \leq \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0} \exp \left( C_1 b^{\frac{1}{s}} \frac{|u(x)|}{\|g\|_{L^s(\sigma B_0)}} \right) d\mu(x), \quad (3.176)$$

et il suffit donc de majorer l'intégrale de droite de (3.176). On a

$$a_{k_0} \leq 4\sigma r_0 2^{k_0} \leq C b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^s d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}}.$$

En appliquant (3.174), on obtient

$$a_k \leq C b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^s d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} (k - k_0)$$

pour tout  $k > k_0$ .

On décompose l'intégrale du membre de droite de (3.176) en la somme de l'intégrale sur  $B_0 \cap E_{k_0}$  et de l'intégrale sur  $B_0 \setminus E_{k_0}$ . Pour l'intégrale sur  $B_0 \cap E_{k_0}$ ,

$$\frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0 \cap E_{k_0}} \dots \leq \frac{1}{\mu(B_0)} \mu(B_0 \cap E_{k_0}) \exp \left( C_1 b^{\frac{1}{s}} \frac{a_{k_0}}{\|g\|_{L^s(\sigma B_0)}} \right) \leq \exp(C_1 C).$$

Pour l'intégrale sur  $B_0 \setminus E_{k_0}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu(B_0)} \int_{B_0 \setminus E_{k_0}} \dots &\leq \frac{1}{\mu(B_0)} \sum_{k \geq k_0+1} \exp \left( C_1 b^{\frac{1}{s}} \frac{a_{k_0}}{\|g\|_{L^s(\sigma B_0)}} \right) \mu(B_0 \cap (E_k \setminus E_{k-1})) \\ &\leq \frac{1}{\mu(B_0)} \sum_{k \geq k_0+1} \exp(C_1 \tilde{C} (k - k_0)) \mu(E_k \setminus E_{k-1}) := A. \end{aligned}$$

On choisit alors  $C_1$  tel que  $\exp(C_1 \tilde{C}) = 2^s$ . Alors

$$A \leq \frac{1}{\mu(B_0)} 2^{-sk_0} \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^{ks} \mu(E_k \setminus E_{k-1}) \leq C,$$

ce qui termine la preuve.

**On suppose enfin que  $p > s$  :** alors, pour tout  $k > k_0$ ,

$$\begin{aligned} a_k &\leq 8b^{-\frac{1}{s}} \left( \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{s}} \sum_{j=k_0}^{+\infty} 2^{j(1-\frac{p}{s})} + 4\sigma r_0 2^{k_0} \\ &\leq C \left( \frac{\mu(\sigma B_0)}{br_0^s} \right)^{\frac{1}{p}} r_0 \left( \frac{1}{\mu(\sigma B_0)} \int_{\sigma B_0} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Cela montre que  $u$  est égale presque partout à une fonction bornée. On a ensuite  $\|u - u_{B_0}\|_{L^\infty(B_0)} \leq 2 \|u\|_{L^\infty(B_0)}$ .

Il reste à prouver l'estimation (3.169). Soient  $x, y \in B_0$ . Si  $d(x, y) \leq (\sigma - 1) \frac{r_0}{2\sigma}$ , et si  $B_1 := B(x, 2d(x, y))$ , alors  $\sigma B_1 \subset \sigma B_0$ , de sorte que

$$|u(x) - u(y)| \leq 2 \|u - u_{B_1}\|_{L^\infty(B_1)} \leq C b^{-\frac{1}{p}} d(x, y)^{1-\frac{s}{p}} \left( \int_{\sigma_1 B} g(y)^p d\mu(y) \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si  $d(x, y) > (\sigma - 1) \frac{r_0}{2\sigma}$ , alors (3.169) résulte de la borne sur  $\|u - u_{B_0}\|_{L^\infty(B_0)}$ .  $\square$

Le théorème 3.168 implique le résultat de plongement suivant, dans le cas où  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène :

**Corollaire 3.177.** On suppose que  $(X, d, \mu)$  est un espace de nature homogène. Soit  $s > 0$  tel que  $\mu(B(x, \lambda r)) \leq C \lambda^s \mu(B(x, r))$  pour tous  $x \in X$  et tout  $r > 0$ . Soient  $B$  une boule de rayon  $r$  et  $\sigma > 1$ . Soient  $p \in ]0, +\infty[$ ,  $u \in M^{1,p}(\sigma B, d, \mu)$  et  $g \in L^p(\sigma B)$  telle que  $|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y))$  pour presque tous  $x, y \in \sigma B$ . Alors il existe  $C, C_1, C_2 > 0$  ne dépendant que des constantes de doublement,  $p$  et  $\sigma$ , telles que :

1. si  $0 < p < s$ , alors  $u \in L^{p^*}(B)$  avec  $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{s}$  et

$$\inf_{c \in \mathbb{R}} \left( \frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - c|^{p^*} d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p^*}} \leq Cr \left( \frac{1}{\mu(\sigma B)} \int_{\sigma B} g(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}},$$

2. si  $p = s$ , alors

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B \exp \left( C_1 \frac{\mu(\sigma B)^{\frac{1}{s}} |u(x) - u_B|}{r \|g\|_{L^s(\sigma B)}} \right) d\mu(x) \leq C_2,$$

3. si  $p > s$ , alors il existe  $v$  égale à  $u$  presque partout sur  $\sigma B$  telle que, pour tous  $x, y \in \sigma B$ ,

$$|v(x) - v(y)| \leq Cr^{\frac{s}{p}} d(x, y)^{1 - \frac{s}{p}} \left( \frac{1}{\mu(\sigma B)} \int_{\sigma B} g(x)^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.178)$$

### 3 Exercices

**Exercice 3.179.** Soit  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^+)$ . On cherche à montrer (3.59).

- 1) Montrer qu'on peut supposer  $f(0) = 0$  et  $f' \geq 0$  (Indication : considérer  $\tilde{f}(r) := \int_0^r |f'(t)| dt$ ).
- 2) A l'aide d'une intégration par parties puis de l'inégalité de Hölder, montrer (3.59).

**Exercice 3.180.** Soient  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné et  $f \in C_c^\infty(U)$ .

1. Soient  $q > n$ ,  $\delta := \frac{1}{n} - \frac{1}{q}$  et  $r$  défini par  $\frac{1}{r} = 1 - \delta$ . Vérifier que, pour tout  $x \in U$ ,

$$|f(x)| \leq C \int_U \frac{|\nabla f(y)|^{n/q}}{|x - y|^{r(n-1)/q}} |\nabla f(y)|^{n\delta} \frac{1}{|x - y|^{r(n-1)(1 - \frac{1}{n})}} dy.$$

En déduire que

$$|f(x)| \leq C \left( \int_U \frac{|\nabla f(y)|^n}{|x - y|^{r(n-1)}} dy \right)^{\frac{1}{q}} \left( \int_U |\nabla f(y)|^n dy \right)^\delta \left( \int_{\text{supp } f} \frac{1}{|x - y|^{r(n-1)}} dy \right)^{1 - \frac{1}{n}}.$$

2. Déduire de ce qui précède qu'il existe  $C_1, C_2 > 0$  tel que, pour tout  $q > n$ ,

$$\|f\|_{L^q(U)}^q \leq C_1 q^{1+q \frac{n-1}{n}} C_2^{-\frac{q}{n}} \|\nabla f\|_{L^n(U)}^q.$$

3. Montrer que, pour tout  $k \geq n$ ,

$$\int_U \left( \frac{|f(x)|}{\|\nabla f\|_{L^n(U)}} \right)^{\frac{kn}{n-1}} dx \leq C_1 \left( \frac{kn}{n-1} \right)^{1+k} C_2^{-\frac{k}{n-1}}.$$

4. En déduire que la conclusion du théorème 3.78 est satisfaite.

**Exercice 3.181.** [Une caractérisation maximale de  $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ] On reprend les notations du théorème 3.118. Soient  $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$  et  $1 < q \leq +\infty$ .

1. Montrer qu'il existe  $C > 0$  indépendant de  $f$  tel que, pour tout  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \operatorname{div} u(x) dx \right| \leq C \int_{\mathbb{R}^n} N^{(1)} f(x) |u(x)| dx.$$

On convolera  $u$  avec une approximation de l'identité.

2. On suppose que  $f \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ . Vérifier que

$$N^{(1)} f \leq CM (|\nabla f|),$$

où  $M$  désigne la fonction maximale de Hardy-Littlewood. En déduire que

$$\|N^{(1)} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

3. On suppose maintenant  $N^{(1)} f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ . Montrer que  $\nabla f \in L^q(\mathbb{R}^n)$  et que

$$\|\nabla f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C \|N^{(1)} f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}.$$

On utilisera la première question.

**Exercice 3.182.** Soient  $n \geq 1$  et  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné. On considère l'opérateur  $L$  donné par

$$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u) + \langle \mathbf{b}, \nabla u \rangle + du,$$

où

1.  $x \mapsto A(x)$  est une fonction mesurable bornée de  $U$  dans  $M_n(\mathbb{R})$ ,  $A(x)$  est une matrice symétrique pour tout  $x \in U$ , et il existe  $\delta > 0$  tel que

$$\langle A(x)\xi, \xi \rangle \geq \delta |\xi|^2,$$

où  $\langle u, v \rangle$  est le produit scalaire usuel dans  $\mathbb{R}^n$ ,

2.  $x \mapsto \mathbf{b}(x)$  est une fonction mesurable bornée de  $U$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,
3. la fonction  $d$  est mesurable et bornée de  $U$  dans  $\mathbb{R}$  et  $d(x) \geq 0$  pour presque tout  $x \in U$ .

Si  $u \in W^{1,2}(U)$ , on dit que  $Lu \leq 0$  dans  $U$  si, et seulement si, pour toute fonction  $v \in W_0^{1,2}(U)$  vérifiant  $v \geq 0$  dans  $U$ ,

$$\int_U (\langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x) \rangle - \langle \mathbf{b}(x), \nabla u(x) \rangle v(x) + d(x)u(x)v(x)) dx \leq 0.$$

Pour toute fonction  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit  $u^+ := \max(u, 0)$ . Si  $u \in W^{1,2}(U)$ , on dit que  $u \leq 0$  sur  $\partial U$  si, et seulement si,  $u^+ \in W_0^{1,2}(U)$ . Enfin, si  $u \in W^{1,2}(U)$  et si  $\{k \in \mathbb{R}; u \leq k \text{ sur } \partial U\}$  n'est pas vide, on définit

$$\sup_{\partial U} u = \inf \{k \in \mathbb{R}; u \leq k \text{ sur } \partial U\},$$

et on pose  $\sup_{\partial U} u = +\infty$  si  $\{k \in \mathbb{R}; u \leq k \text{ sur } \partial U\}$  est vide. Le but de cet exercice est de montrer que, si  $u \in W^{1,2}(U)$  vérifie  $Lu \leq 0$  dans  $U$ , alors

$$\sup_U u \leq \sup_{\partial U} u^+.$$

Soit donc  $u \in W^{1,2}(U)$  tel que  $Lu \leq 0$  dans  $U$ .

1. Justifier qu'il existe  $C > 0$  et  $q \in ]2, +\infty[$  tels que, pour toute fonction  $u \in W_0^{1,2}(U)$ ,  $u \in L^q(U)$  et

$$\|u\|_{L^q(U)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(U)}.$$

2. Montrer que, pour toute fonction  $v \in W_0^{1,2}(U)$  telle que  $v \geq 0$  dans  $U$  et  $uv \geq 0$  dans  $U$ ,

$$\int_U \langle A(x)\nabla u(x), \nabla v(x) \rangle dx \leq \|\mathbf{b}\|_\infty \int_U v(x) |\nabla u(x)| dx.$$

3. Dans cette question, on suppose que  $\sup_{\partial U} u^+ < \sup_U u$ . Soit  $k \in \mathbb{R}$  avec  $\sup_{\partial U} u^+ \leq k < \sup_U u$  et  $v_k = (u - k)^+$ .

(a) Vérifier que  $v_k \in W_0^{1,2}(U)$  et calculer  $\nabla v_k$ .

(b) Montrer que

$$\|\nabla v_k\|_{L^2(U)} \leq \frac{\|\mathbf{b}\|_\infty}{\delta} \|v_k\|_{L^2(E_k)},$$

où  $E_k := \{x \in U; u(x) > k\}$ .

(c) Vérifier que  $\lim_{k \rightarrow \sup_U u} \mathcal{L}^n(E_k) = 0$ .

(d) Dédire de la question (b) qu'il existe  $q \in ]2, +\infty[$  et  $C' > 0$  indépendants de  $k$  tels que

$$\|v_k\|_{L^q(U)} \leq C \|v_k\|_{L^2(E_k)},$$

puis qu'il existe  $c > 0$  indépendant de  $k$  tel que  $\mathcal{L}^n(E_k) \geq c$ .

(e) Obtenir une contradiction, et conclure.

4. Dédire de ce qui précède que, si  $u \in W_0^{1,2}(U)$  et  $Lu = 0$  dans  $U$ , alors  $u = 0$  dans  $U$ .

**Exercice 3.183.** On reprend les notations et hypothèses de l'exercice 3.182, avec en plus  $\mathbf{b} = 0$  et  $d = 0$ . L'opérateur  $L$  s'écrit donc

$$Lu = -\operatorname{div}(A\nabla u).$$

### Partie I

Soit  $u \in W^{1,2}(U)$  vérifiant  $Lu = 0$  dans  $U$ . On fixe  $x_0 \in U$  et  $R > 0$  tel que  $R < \frac{1}{2}d(x_0, \partial U)$ .

- Justifier qu'il existe une fonction  $\eta \in C_c^\infty(B(x_0, 2R))$  vérifiant  $\eta = 1$  dans  $B(x_0, R)$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$  dans  $\mathbb{R}^n$  et  $\|\nabla \eta\|_\infty \leq \frac{C}{R}$  où  $C > 0$  ne dépend pas de  $U, x_0, R$ .
- Vérifier que  $\eta^2 u \in W_0^{1,2}(U)$ .
- En déduire que

$$\int_U \eta^2(x) \langle A(x)\nabla u(x), \nabla u(x) \rangle dx = -2 \int_U \eta(x) u(x) \langle A(x)\nabla u(x), \nabla \eta(x) \rangle dx.$$

4. Montrer qu'il existe  $C' > 0$  indépendant de  $u, U, x_0$  et  $R$  tel que

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{C'}{R^2} \int_{B(x_0, 2R)} |u(x)|^2 dx. \quad (3.184)$$

5. Montrer que, pour tout réel  $m$ ,

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla u(x)|^2 dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B(x_0, 2R)} |u(x) - m|^2 dx. \quad (3.185)$$

## Partie II

Dans cette partie, si  $E \subset \mathbb{R}^n$  est mesurable de mesure de Lebesgue finie et  $f \in L^1(E)$ , on note  $f_E = \frac{1}{\mathcal{L}^n(E)} \int_E f(x) dx$ .

1. On note  $B$  la boule ouverte euclidienne de centre 0 et de rayon 1 et  $s \in \left] \frac{2n}{n+2}, +\infty \right[$ . Montrer qu'il existe  $C > 0$  tel que, pour toute fonction  $f \in W^{1,s}(B)$ ,

$$\|f - f_B\|_{L^2(B)} \leq C \|\nabla f\|_{L^s(B)}. \quad (3.186)$$

On pourra raisonner par l'absurde.

2. En déduire que, pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , tout  $R > 0$  et toute fonction  $f \in W^{1,s}(B(x_0, R))$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_0, 2R))^{1/2}} \|f - f_{B(x_0, 2R)}\|_{L^2(B(x_0, 2R))} \leq 2CR \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_0, 2R))^{1/s}} \|\nabla f\|_{L^s(B(x_0, 2R))}. \quad (3.187)$$

## Partie III

On suppose à nouveau que  $u \in W^{1,2}(U)$  vérifie  $Lu = 0$  dans  $U$ , et on fixe  $x_0 \in U$  et  $R > 0$  tel que  $R < \frac{1}{2}d(x_0, \partial U)$ . On pose encore  $s \in \left] \frac{2n}{n+2}, +\infty \right[$ .

1. Montrer, en utilisant (3.185) et (3.187) que, pour un  $C > 0$  indépendant de  $u, x_0$  et  $R$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_0, R))^{1/2}} \|\nabla u\|_{L^2(B(x_0, R))} \leq \frac{C}{\mathcal{L}^n(B(x_0, 2R))^{1/s}} \|\nabla u\|_{L^s(B(x_0, 2R))}. \quad (3.188)$$

2. Pourquoi l'inégalité (3.188) peut-elle être appelée inégalité de Hölder inverse ?
3. On **admettra** qu'on peut déduire de (3.188) qu'il existe  $C, \varepsilon > 0$  tel que, pour toute solution  $u \in W^{1,2}(U)$  de  $Lu = 0$ , tout  $x_0 \in U$  et tout  $R > 0$  tel que  $R < \frac{1}{2}d(x_0, \partial U)$ ,

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x_0, R))^{1/2+\varepsilon}} \|\nabla u\|_{L^{2+\varepsilon}(B(x_0, R))} \leq \frac{C}{\mathcal{L}^n(B(x_0, 2R))^{1/s}} \|\nabla u\|_{L^s(B(x_0, R))}.$$

Montrer alors qu'il existe  $c \in ]0, 1[$  indépendant de  $u, x_0$  et  $R$  tel que

$$\int_{B(x_0, R)} |\nabla u(x)|^2 dx \leq c \int_{B(x_0, 2R)} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

**Exercice 3.189.** Soient  $n \geq 1$  et  $B$  la boule ouverte euclidienne de centre 0 et de rayon 1 dans  $\mathbb{R}^n$ . On fixe  $\alpha > 0$ . On cherche à montrer qu'il existe  $C > 0$  (dépendant de  $\alpha$ ) tel que, pour toute fonction  $u \in W^{1,2}(B)$ , si  $m(\{x \in B; u(x) = 0\}) \geq \alpha$ , alors

$$\int_B u^2(x) dx \leq C \int_B |\nabla u(x)|^2 dx. \quad (3.190)$$

On raisonne par l'absurde en supposant cette conclusion fautive.

1. Montrer qu'il existe une suite de fonctions  $(u_k)_{k \geq 1} \in W^{1,2}(B)$  telles que, pour tout  $k \geq 1$ ,

$$\int_B u_k^2(x) dx = 1, \quad \mathcal{L}^n(\{x \in B; u_k(x) = 0\}) \geq \alpha$$

et

$$\int_B |\nabla u_k(x)|^2 dx < \frac{1}{k}.$$

2. Montrer qu'il existe  $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  strictement croissante et  $u \in W^{1,2}(B)$  telles que  $u_{\varphi(k)} \rightarrow u$  dans  $L^2(B)$  et  $u_{\varphi(k)}(x) \rightarrow u(x)$  pour presque tout  $x \in B$ . On définit

$$A = \left\{ x \in B; u_{\varphi(k)}(x) \rightarrow u(x) \right\}.$$

3. Vérifier que

$$\bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{j \geq k} \left\{ x \in A; u_{\varphi(j)}(x) = 0 \right\} \subset \left\{ x \in B; u(x) = 0 \right\}.$$

En déduire que

$$\mathcal{L}^n(\{x \in B; u(x) = 0\}) \geq \alpha.$$

4. Montrer que  $u$  est constante sur  $B$  (on calculera  $\nabla u$ ) et obtenir une contradiction. Conclure.

**Exercice 3.191.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné de classe  $C^1$ . On rappelle que l'opérateur trace, noté  $\text{tr}$  dans la suite, est continu de  $W^{1,2}(U)$  dans  $L^2(\partial U)$ . On appellera  $H$  l'image de  $W^{1,2}(U)$  par cet opérateur. Pour toute  $\varphi \in H$ , on définit

$$\|\varphi\|_H := \inf \left\{ \|u\|_{W^{1,2}(U)}; \text{tr } u = \varphi \right\}.$$

1. Vérifier que  $\varphi \mapsto \|\varphi\|_H$  est une norme sur  $H$ .

Soit  $\sigma \in L^\infty(U)$  une fonction. On suppose, dans toute la suite de cet exercice, qu'il existe  $c > 0$  tel que, pour presque tout  $x \in U$ ,  $\sigma(x) \geq c$ .

Soit  $\varphi \in H$  et  $u \in W^{1,2}(U)$ . On dira que  $u$  est solution du problème

$$\begin{cases} \text{div}(\sigma \nabla u) = 0 & \text{dans } U, \\ u = \varphi & \text{sur } \partial U, \end{cases} \quad (3.192)$$

si, et seulement si,  $u - v \in W_0^{1,2}(U)$  où  $v$  est une fonction de  $W^{1,2}(U)$  telle que  $\text{tr } v = \varphi$  et

$$\int_U \sigma(x) \langle \nabla u(x), \nabla w(x) \rangle = 0 \text{ pour toute } w \in W_0^{1,2}(U). \quad (3.193)$$

2. (a) Soit  $u \in W_0^{1,2}(U)$  vérifiant la condition (3.193). Montrer que  $u = 0$ .  
 (b) En déduire que la définition d'une solution  $u$  de (3.192) est bien indépendante du choix de la fonction  $v$ .
3. Soit  $\varphi \in H$  et  $u \in W^{1,2}(U)$  une solution de (3.192). Montrer que  $\text{tr } u = \varphi$ .
4. Montrer que, pour toute  $\varphi \in H$ , il existe une unique solution  $u \in W^{1,2}(U)$  du problème (3.192).  
 Indication : si  $v \in W^{1,2}(U)$  est telle que  $\text{tr } v = \varphi$ , on vérifiera d'abord que  $u \in W^{1,2}(U)$  est solution de (3.192) si, et seulement si, pour toute fonction  $w \in W^{1,2}(U)$ ,

$$\int_U \sigma(x) \langle \nabla(u - v)(x), \nabla w(x) \rangle dx = - \int_U \sigma(x) \langle \nabla v(x), \nabla w(x) \rangle dx. \quad (3.194)$$

On appliquera alors le théorème de Lax-Milgram pour résoudre (3.194).

5. (a) Vérifier que l'application  $H \ni \varphi \mapsto u$ , où  $u \in W^{1,2}(U)$  est la solution de (3.192), est linéaire  
 (b) Montrer que l'application considérée à la question (a) est continue de  $H$  dans  $W^{1,2}(U)$ .

**Exercice 3.195.** Soient  $I := ]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$  et  $u(x) := -\frac{x}{|x| \ln|x|}$ .

1. Montrer que  $u$  appartient à  $W^{1,1}(I)$ .

2. Montrer que  $u \notin M^{1,1}(I)$ .

**Exercice 3.196.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré de nature homogène. Pour toute fonction  $v \in L^1_{loc}(X, \mu)$ , tout  $R > 0$  et tout  $x \in X$ , on pose

$$M_R v(x) := \sup_{r \in ]0, R[} \frac{1}{\mu(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |v(y)| d\mu(y).$$

Soit  $p \in ]1, +\infty[$ . On cherche à montrer que, si  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, alors  $u \in M^{1,p}(X)$  si, et seulement si,  $u \in L^p(X)$  et il existe  $C > 0$ ,  $\sigma \geq 1$ , une fonction  $g \in L^p(X)$  avec  $g \geq 0$  et  $q \in ]0, p[$  tels que, pour toute boule  $B$  de rayon  $r$ ,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - u_B| d\mu(x) \leq Cr \left( \frac{1}{\mu(\sigma B)} \int_{\sigma B} g(x)^q d\mu(x) \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3.197)$$

1. On suppose d'abord  $u \in M^{1,p}(X)$ .

(a) Montrer qu'il existe  $g \in L^p(X)$ ,  $g \geq 0$ , tel que, pour toute boule  $B$  de rayon  $r$ ,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - u_B| d\mu(x) \leq Cr \frac{1}{\mu(B)} \int_B g(x) d\mu(x).$$

(b) Conclure.

On suppose maintenant que  $u \in L^p(X)$  et qu'il existe  $C > 0$ ,  $\sigma \geq 1$ , une fonction  $g \in L^p(X)$  avec  $g \geq 0$  et  $q \in ]0, p[$  tels que, pour toute boule  $B$  de rayon  $r$ , (3.197) soit satisfaite.

2. On va d'abord montrer que, pour presque tous  $x, y \in X$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd(x, y) \left( \left( M_{2\sigma d(x, y)} g^q(x) \right)^{1/q} + \left( M_{2\sigma d(x, y)} g^q(y) \right)^{1/q} \right). \quad (3.198)$$

Soient  $x, y \in X$  avec  $x \neq y$ . Pour tout  $i \geq 0$ , on pose  $r_i := 2^{-i}d(x, y)$  et on définit  $B_i(x) := B(x, r_i)$  et  $B_i(y) := B(y, r_i)$ .

(a) On suppose que  $u(x) = \lim_{i \rightarrow +\infty} u_{B_i(x)}$ . Montrer que

$$|u(x) - u_{B_0(x)}| \leq Cd(x, y) \left( M_{\sigma d(x, y)} g^q(x) \right)^{1/q}.$$

(b) Montrer que

$$|u_{B_0(x)} - u_{B_0(y)}| \leq Cd(x, y) \left( M_{2\sigma d(x, y)} g^q(x) \right)^{1/q}.$$

(c) En déduire que (3.198) est vérifiée pour presque tous  $x, y \in X$ .

3. Déduire de (3.198) que  $u \in M^{1,p}(X)$ .

Soit  $u \in L^1_{loc}(X)$ . On suppose qu'il existe  $g \in L^p_{loc}(X)$ ,  $g \geq 0$  et  $\sigma \geq 1$  tels que, pour presque tous  $x, y \in X$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd(x, y) \left( \left( M_{\sigma d(x, y)} g^p(x) \right)^{1/p} + \left( M_{\sigma d(x, y)} g^p(y) \right)^{1/p} \right).$$

4. Soit  $B$  une boule de rayon  $r$ . Vérifier que, pour presque tous  $x, y \in B$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd(x, y) \left( \left( M(g^p \chi_{3\sigma B})(x) \right)^{1/p} + \left( M(g^p \chi_{3\sigma B})(y) \right)^{1/p} \right).$$



5. En déduire que

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - u_B| d\mu(x) \leq \frac{Cr}{\mu(B)} \int_0^{+\infty} \mu(\{x \in B; M(g^p \chi_{3\sigma B})(x) > t^p\}) dt.$$

6. Montrer enfin que,

$$\frac{1}{\mu(B)} \int_B |u(x) - u_B| d\mu(x) \leq Cr \left( \frac{1}{\mu(3\sigma B)} \int_{3\sigma B} g(y)^p d\mu(y) \right)^{1/p},$$

pour une constante  $C > 0$  ne dépendant pas de la boule  $B$ .

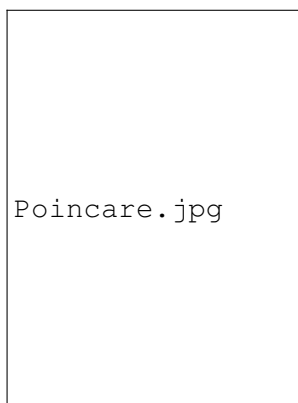
## Chapitre 4

# Inégalités de Poincaré, espaces de Loewner et applications

*A la mémoire de Juha Heinonen (1960-2007)*<sup>1</sup>

## 1 Le cas euclidien

### 1.1 Et tout commença avec Poincaré !



Henri Poincaré (1854-1912)

L'histoire de l'inégalité de Poincaré commence avec Henri Poincaré lui-même. En 1886, il est élu Professeur à la faculté des sciences de l'Université de Paris sur la "Chaire de physique mathématique et calcul des probabilités". Ce poste est l'un des plus prestigieux à l'époque. Il a été avant Maître de Conférences à l'Université de Caen puis à celle de Paris. Cette nomination est à première vue assez étrange. En effet, en 1886, Poincaré est connu pour ses travaux en théorie des nombres, analyse complexe ou encore géométrie mais ses contributions en physique mathématique sont des plus modestes. De plus, il a parmi ses concurrents par exemple Joseph Boussinesq (alors professeur à Lille et qui succèdera d'ailleurs à Poincaré sur cette chaire en 1896) qui est l'auteur d'une centaine d'articles en mécanique des fluides. Deux autres postes (la "Chaire de calcul différentiel et intégral" et la "Chaire de mécanique physique et expérimental") étaient aussi mises au concours la même année et semblaient plus proches des travaux récents de Poincaré. Cependant, avec l'aide de son mentor Charles Hermite qui était un personnage très influent du monde mathématique parisien de cette période, il réussit à obtenir ce poste en physique mathématique qu'il convoitait tant. Cette décision ne doit pas être vue comme un "caprice de star" mais

---

1. Le premier auteur souhaitait dédier ce chapitre à Juha car il a appris beaucoup de choses sur les inégalités de Poincaré lors de longues conversations avec lui au cours de ses séjours à Ann Arbor.

était motivée par l'intérêt que portait Poincaré aux théories naissantes de la physique, comme la théorie de Maxwell sur laquelle portera un de ses premiers cours à la suite de sa nomination à la Sorbonne. Entre 1890 et 1896, Poincaré écrira 3 longs articles (ainsi que quelques Comptes-Rendus à l'Académie des Sciences de Paris) sur les équations aux dérivées partielles provenant de la physique mathématique comme l'équation de la chaleur. Dans sa première publication dans ce domaine, il démontre la première version de ce qui s'appellera l'inégalité de Poincaré. Soit  $D$  un sous-ensemble ouvert, convexe et borné de  $\mathbb{R}^3$  et soit  $f$  une fonction régulière sur  $D$  telle que  $\int_D f = 0$ . Alors,

$$\int_D \int_D |f(x) - f(x')|^2 dx dx' \leq C(\text{diam}(D))^5 \int_D |\nabla f|^2 dx.$$

Nous renvoyons à [95] pour plus de détails.

## 1.2 Le théorème fondamental de l'analyse

Nous avons déjà rencontré des versions de ce théorème pour les fonctions absolument continues dans la section 7.3 du chapitre 1. Toutefois, nous le présentons ici dans un cadre plus élémentaire, pour arriver ensuite à une approche géométrique des inégalités de Poincaré.

On commence par quelques rappels de calcul différentiel élémentaire. Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ . Alors, pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $I$  avec  $x < y$ ,

$$f(y) - f(x) = \int_x^y f'(t) dt = \int_{[x,y]} f'(t) dt.$$

Il s'en suit  $|f(y) - f(x)| \leq \int_x^y |f'(t)| dt = \int_{[x,y]} |f'(t)| dt$ . Ici, il faut voir  $[x, y]$  comme le segment géodésique allant de  $x$  à  $y$ . On peut étendre cette formule pour une fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  qui est de classe  $C^1$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soient  $x, y$  dans  $\Omega$  tels que  $[x, y] \subset \Omega$ . En appliquant le résultat précédent à  $g(t) = f((1-t)x + ty)$ , on obtient  $|f(y) - f(x)| \leq \int_{[x,y]} \|\nabla f(\xi)\| d\xi$ . Si  $\gamma$  est une courbe rectifiable dans  $\Omega$  reliant  $x$  à  $y$ , il vient par approximation de  $\gamma$  par des segments que

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\gamma} \|\nabla f(\xi)\| d\xi.$$

C'est sous cette forme que nous utiliserons le théorème fondamental de l'analyse. On rappelle que

$\int_{\gamma} \|\nabla f(\xi)\| d\xi = \int_a^b \|\nabla f(\gamma(t))\| \cdot \|\gamma'(t)\| dt$  si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est lisse (par exemple, lipschitzienne de sorte que  $\gamma'(t)$  existe presque partout sur  $[a, b]$  par le théorème 2.53).

## 1.3 Une preuve dans le cas euclidien via les potentiels de Riesz

La philosophie des inégalités de type Poincaré est toujours la même. L'idée est de contrôler les oscillations d'une fonction dans une boule par son gradient. Le point de départ pour obtenir une telle estimation est souvent le théorème fondamental de l'analyse. Pour illustrer ceci, considérons le cas de la droite réelle. Soit  $f$  une fonction de classe  $C^1$  dans  $\mathbb{R}$  (à support compact) et soit  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle.

Rappelons que le théorème fondamental de l'analyse dit que si  $y \leq x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x) - f(y) = \int_y^x f'(t) dt$

et donc  $|f(x) - f(y)| \leq \int_y^x |f'(t)| dt$  ou encore  $|f(x) - f(y)| \leq \int_{[x,y]} |f'(t)| dt$  où  $[x, y]$  est le segment

euclidien (c'est à dire l'unique segment géodésique) joignant  $x$  et  $y$ . Nous obtenons alors, en notant  $|I| = \mathcal{L}^1(I)$  la longueur de  $I$ ,

$$\begin{aligned} \int_I |f - f_I| dx &\leq \frac{1}{|I|} \int_I \int_I |f(x) - f(y)| dx dy \\ &\leq \frac{1}{|I|} \int_I \int_I \left( \int_x^y |f'(t)| dt \right) dx dy \\ &\leq \frac{1}{|I|} \int_I \int_I \left( \int_I |f'(t)| dt \right) dx dy \\ &\leq |I| \int_I |f'(t)| dt. \end{aligned}$$

Que se passe-t-il en dimensions supérieures, par exemple dans le plan complexe ?

Si  $x$  et  $y$  sont des points dans  $\mathbb{C}$ , alors il existe un unique segment géodésique (euclidien) qui les joint. Cependant, l'argument précédent utilisé dans le cas de la droite réelle ne marche plus. Il faut alors noter qu'il existe beaucoup de courbes rectifiables joignant  $x$  à  $y$  dont la longueur est comparable à  $\|x - y\|$ . Ceci nous amènera à la notion de pinceau de courbes. Avant cela, nous allons donner une preuve classique de l'inégalité de Poincaré. Comme elle utilise de façon cruciale les coordonnées polaires, elle sera difficilement utilisable dans d'autres cadres, par exemple dans le cas riemannien.

Soit  $n \geq 2$  un entier. Si  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  est un ouvert, on rappelle que  $C_c^\infty(\Omega)$  est l'espace des fonctions  $C^\infty$  à support compact dans  $\Omega$ . Pour alléger les notations, la mesure de Lebesgue de  $A \subset \mathbb{R}^n$  sera notée  $|A|$ . La mesure de Lebesgue de la sphère unité  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  est  $w_{n-1}$ . Nous allons montrer l'inégalité de Poincaré sur les boules, déjà obtenue au corollaire 3.99 (section 1.12 du chapitre 3). Ici, toutefois, la valeur de la constante sera précisée :

**Théorème 4.1.** *Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , tout  $r > 0$ , toute  $f \in C_c^\infty(B)$  où  $B = B(x, r)$  et  $1 \leq p < \infty$ , on a*

$$\left( \int_B |f|^p dx \right)^{1/p} \leq r \left( \int_B \|\nabla f\|^p dx \right)^{1/p} \quad (4.2)$$

$$\left( \int_B |f - f_B|^p dx \right)^{1/p} \leq 2^n r \left( \int_B \|\nabla f\|^p dx \right)^{1/p}. \quad (4.3)$$

où on note  $f_B = \frac{1}{|B|} \int_B f dx = \int_B f dx$  la moyenne de  $f$  sur la boule euclidienne  $B$ .

Notons que la dernière inégalité (4.3) peut aussi s'écrire

$$\left( \int_B |f - f_B|^p dx \right)^{1/p} \leq 2^n r \left( \int_B \|\nabla f\|^p dx \right)^{1/p}.$$

Or, par l'inégalité de Hölder ou l'inégalité de Jensen, on a

$$\int_B |f - f_B| dx \leq 2^n r \left( \int_B \|\nabla f\|^p dx \right)^{1/p}.$$

Cela sera sous cette forme que nous utiliserons les inégalités de Poincaré dans la suite.

*Démonstration.* Soit  $B = B(x, R)$  une boule de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f \in C_c^\infty(B)$ . Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que  $B = B(0, 1)$  est la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ . Pour voir cela, il suffit d'utiliser  $g(y) = (1/R^n) f((y - x)/R)$ . Tout d'abord, notons que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{w_{n-1}} \int \frac{\|\nabla f(y)\|}{\|y - x\|^{n-1}} dy. \quad (4.4)$$

En effet en utilisant les coordonnées polaires  $(r, \theta)$  où  $r > 0$  et  $\theta \in S^{n-1}$ , on a par le théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} f(x + r\theta) dr.$$

D'où en intégrant sur la sphère unité  $S^{n-1}$ , on obtient

$$f(x) = - \frac{1}{w_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial r} f(x + r\theta) dr d\theta.$$

Nous utilisons maintenant le changement de variables  $y = x + r\theta$ . Alors,  $r = \|x - y\|$ ,  $dy = r^{n-1} dr d\theta$ ,  $\frac{\partial}{\partial r} f(x + r\theta) = \|y - x\|^{-1} \sum_{i=1}^n (y_i - x_i) \frac{\partial}{\partial x_i} f(y)$ . Ceci nous donne

$$\begin{aligned} f(x) &= - \frac{1}{w_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\partial}{\partial r} f(x + r\theta)}{r^{n-1}} r^{n-1} dr d\theta \\ &= \frac{1}{w_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle x - y, \nabla f(y) \rangle}{\|y - x\|^n} dy \end{aligned}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien de  $\mathbb{R}^n$ . De cela, on peut alors conclure aisément en utilisant  $|\langle x - y, \nabla f(y) \rangle| \leq \|x - y\| \cdot \|\nabla f(y)\|$ ,

$$|f(x)| \leq \frac{1}{w_{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\nabla f(y)\|}{\|x - y\|^{n-1}} dy. \quad (4.5)$$

**Remarque 4.6.** Pour  $0 < \alpha < n$ , on définit le potentiel de Riesz d'ordre  $\alpha$  de  $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  par

$$I_\alpha u(x) = \frac{1}{C_\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u(y)}{\|y - x\|^{n-\alpha}} dy$$

où  $C_\alpha = \pi^{n/2} 2^\alpha \frac{\Gamma(\alpha/2)}{\Gamma((n-\alpha)/2)}$ . Dans le cas  $\alpha = n$ ,  $C_n = w_{n-1}$ . L'intérêt de ces potentiels est en partie du à l'estimation suivante qui peut être obtenue via la transformée de Fourier :

$$I_\alpha u = \Delta^{-\alpha/2} u$$

où  $\Delta u = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$  est le laplacien et  $\widehat{\Delta^{\alpha/2} f} = (2\pi\|x\|)^\alpha \widehat{f}$  avec la transformée de Fourier est donnée par  $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2i\pi\langle x, \xi \rangle} f(x) dx$ . Le point est de démontrer l'égalité suivante pour tout  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ ,

$$C_\alpha^{-1} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^{-n+\alpha} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (2\pi\|\xi\|)^{-\alpha} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

La condition  $0 < \alpha < n$  assure l'existence des deux intégrales ci-dessus. Soient  $0 < \alpha < n$ ,  $1 < p < n/\alpha$  et  $q = (np)/(n - \alpha p)$ , il existe une constante  $C = C(\alpha, n, p) \geq 0$  de sorte que pour tout  $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\|I_\alpha f\|_q \leq C \|f\|_p.$$

Voir la section 1.2 de [127] pour plus de détails et le théorème 4.8 pour un résultat similaire dans le cas des espaces métriques mesurés. L'inégalité (4.4) peut alors être réécrite sous la forme

$$|f(x)| \leq I_1(\|\nabla f(x)\|).$$

Nous démontrons maintenant (4.2) dans le cas  $p = 1$ . De (4.5), on obtient (puisque  $f$  est à support compact dans  $B$ ) par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_B |f(x)| dx \leq \frac{1}{w_{n-1}} \int_B \|\nabla f(y)\| \left( \int_B \frac{dx}{\|x-y\|^{n-1}} \right) dy.$$

Notons que  $\int_B \frac{dx}{\|x-y\|^{n-1}} \leq \int_B \frac{dx}{\|x\|^{n-1}} = w_{n-1}$ . Ceci donne  $\int_B |f(x)| dx \leq \int_B \|\nabla f(x)\| dx$  qui correspond à (4.2) pour  $p = 1$ . Pour  $p > 1$ , nous pouvons par exemple appliquer l'inégalité de Jensen. Posons  $C(x) = \int_B \frac{1}{\|x-y\|^{n-1}} dy$ . Comme observé précédemment,  $C(x) \leq w_{n-1}$ . Soit  $d\mu(y) = C(x)^{-1} \|x-y\|^{-n+1} \chi_B(y) dy$  où  $x \in B = B(0, 1)$  est fixé. En appliquant l'inégalité de Jensen à la mesure de probabilité  $\mu$ , on obtient

$$\begin{aligned} |f(x)|^p &\leq \frac{1}{w_{n-1}^p} \left( \int_B \frac{\|\nabla f(y)\|}{\|y-x\|^{n-1}} dy \right)^p \\ &= \frac{C(x)^p}{w_{n-1}^p} \left( \int_B \|\nabla f(y)\| d\mu(y) \right)^p \\ &\leq \frac{C(x)^p}{w_{n-1}^p} \int_B \|\nabla f(y)\|^p d\mu(y) \\ &= \frac{C(x)^{p-1}}{w_{n-1}^p} \int_B \frac{\|\nabla f(y)\|^p}{\|y-x\|^{n-1}} dy \\ &\leq \frac{1}{w_{n-1}} \int_B \frac{\|\nabla f(y)\|^p}{\|y-x\|^{n-1}} dy. \end{aligned}$$

Par le théorème de Fubini, on peut alors conclure en intégrant sur tous les  $x \in B$  et en utilisant encore  $C(x) \leq w_{n-1}$ . Pour démontrer (4.3), la stratégie est essentiellement la même. Cependant, à la place de (4.5), nous utilisons

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{2^n}{w_{n-1}} \int_B \frac{\|\nabla f(y)\|}{\|x-y\|^{n-1}} dy. \quad (4.7)$$

Pour démontrer (4.7), on note tout d'abord que pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $B$ , on a par le théorème fondamental de l'analyse

$$f(x) - f(y) = - \int_0^{|x-y|} \frac{\partial}{\partial r} f \left( x + r \frac{y-x}{\|y-x\|} \right) dr.$$

D'où, si nous posons  $F(x) = \|\nabla f(x)\| \chi_B(x)$ , on a

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_0^\infty F \left( x + r \frac{y-x}{\|y-x\|} \right) dr.$$

De ceci, on déduit facilement

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_B| &\leq \frac{1}{|B|} \int_B |f(x) - f(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{|B|} \int_B \left( \int_0^\infty F \left( x + r \frac{y-x}{\|y-x\|} \right) dr \right) dy \\
&\leq \frac{1}{|B|} \int_{B(x,2)} \left( \int_0^{+\infty} \left( F \left( x + r \frac{y-x}{\|y-x\|} \right) \right) dr \right) dy \\
&= \frac{1}{|B|} \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} \int_0^2 F(x+r\theta) s^{n-1} ds d\theta dr \\
&= \frac{2^n}{|B|} \int_0^{+\infty} \int_{S^{n-1}} F(x+r\theta) d\theta dr \\
&= \frac{2^n}{w_{n-1}} \int_B \frac{\|\nabla f(y)\|}{\|y-x\|^{n-1}} dy.
\end{aligned}$$

En intégrant par rapport à  $x$  comme précédemment, on peut conclure pour avoir (4.7). Pour obtenir (4.3), nous devons adapter la preuve de (4.2) en utilisant (4.7). Nous laissons les détails au lecteur comme un exercice facile. Ces preuves sont inspirées de [127].  $\square$

Il est possible de considérer les potentiels de Riesz dans le cadre plus général des espaces métriques mesurés. Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure doublante  $\mu$ . Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ , on pose

$$I_1(f)(x) = \int_X \frac{f(y)d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(y).$$

Notons que si  $\mu$  est Ahlfors-régulière de dimension  $Q$ , alors  $d(x,y)/\mu(B(x,d(x,y)))$  est comparable à  $1/d(x,y)^{Q-1}$ . En particulier, dans le cas euclidien, on retrouve l'expression précédente. Cependant, sans hypothèse géométrique sur  $X$ , on ne peut pas démontrer l'existence d'inégalités de Poincaré à partir des potentiels de Riesz dans le cadre général. On a quand même des estimations de continuité des potentiels de Riesz dans les espaces Ahlfors-réguliers.

**Théorème 4.8.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure Ahlfors-régulière de dimension  $Q$ . Alors, il existe des constantes  $C_1 = C(Q, p, \mu) > 0$  et  $C_2 = C(Q, \mu) > 0$  telles que*

$$\|I_1(f)\|_{pQ/(Q-p)} \leq C_1 \|f\|_p \text{ si } 1 < p < Q \text{ et } f \in L^p(\mu),$$

$$\mu(\{I_1(f) > t\}) \leq C_2 (t^{-1} \|f\|_1)^{Q/(Q-1)} \text{ si } f \in L^1(\mu).$$

On adapte une preuve tirée de [59] dans le cas euclidien.

*Démonstration.* On se donne  $\delta > 0$  que l'on choisira plus tard de façon optimale plus tard et on décompose  $I(f)$  en une bonne et mauvaise partie :

$$\begin{aligned}
If(x)(x) &= b_\delta(x) + m_\delta(x) \text{ où} \\
b_\delta(x) &= \int_{X \setminus B(x,\delta)} \frac{f(y)d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(y), \\
m_\delta(x) &= \int_{B(x,\delta)} \frac{f(y)d(x,y)}{\mu(B(x,d(x,y)))} d\mu(y).
\end{aligned}$$

Pour contrôler  $b_\delta$ , on applique l'inégalité de Hölder. Ainsi, si  $1/p + 1/q = 1$ ,

$$b_\delta(x) \leq \|f\|_p \left( \int_{X \setminus B(x, \delta)} \frac{d(x, y)^q}{\mu(B(x, d(x, y)))^q} d\mu(y) \right)^{1/q}$$

Comme  $\mu(B(x, d(x, y))) \geq C^{-1}d(x, y)^Q$ , il vient

$$b_\delta(x) \leq C\|f\|_p \left( \int_{X \setminus B(x, \delta)} d(x, y)^{q(1-Q)} d\mu(y) \right)^{1/q}.$$

Or, on a par Ahlfors-régularité de  $\mu$

$$\begin{aligned} \int_{X \setminus B(x, \delta)} d(x, y)^{q(1-Q)} d\mu(y) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{B(x, 2^{j+1}\delta) \setminus B(x, 2^j\delta)} d(x, y)^{q(1-Q)} d\mu(y) \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} (2^j\delta)^{q(1-Q)} \mu(B(x, 2^{j+1}\delta)) \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} (2^j\delta)^{q(1-Q)} (2^{j+1}\delta)^Q \\ &\leq C\delta^{q(1-Q)+Q} \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{j\left(\frac{p-Q}{p-1}\right)} \\ &\leq C(p, Q)\delta^{q(1-Q)+Q}. \end{aligned}$$

On en déduit

$$b_\delta(x) \leq C\|f\|_p \delta^{1-Q/p}.$$

Nous passons à la "mauvaise" partie  $m_\delta(x)$ . Pour cela, on note  $A_j$  l'anneau  $A_j = B(x, 2^{-j}\delta) \setminus B(x, 2^{-j-1}\delta)$  pour  $j \in \mathbb{N}$  et nous allons utiliser la fonction maximale  $M(f)$  de  $f$ . Comme précédemment, on a "par discrétisation" et par Ahlfors-régularité de  $\mu$  :

$$\begin{aligned} m_\delta(x) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{A_j} \frac{f(y)d(x, y)}{\mu(B(x, d(x, y)))} d\mu(y) \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} \int_{A_j} \frac{f(y)}{d(x, y)^{Q-1}} d\mu(y) \\ &\leq C \sum_{j \in \mathbb{N}} (2^{-j-1}\delta)^{1-Q} \int_{B(x, 2^{-j}\delta)} f(y) d\mu(y) \\ &\leq C\delta \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{-j} \int_{B(x, 2^{-j}\delta)} f(y) d\mu(y) \\ &\leq C\delta Mf(x). \end{aligned}$$

Nous avons donc pour tout  $x \in X$

$$I_1(f)(x) \leq C \left( \delta Mf(x) + \delta^{1-Q/p} \|f\|_p^p \right).$$

Or, par une étude élémentaire de la fonction de la variable réelle,  $\phi(t) = tMf(x) + t^{1-Q/p} \|f\|_p^p$ , il vient que  $\phi$  (et donc le membre de droite) atteint son minimum pour  $t = \left(\frac{Q-p}{p}\right)^{p/Q} \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{p/Q}$ .

En choisissant ainsi  $\delta = \left(\frac{\|f\|_p}{Mf(x)}\right)^{p/Q}$ , il vient

$$I_1(f)(x) \leq C\|f\|_p^{p/Q} Mf(x)^{1-p/Q}.$$



Donc par la continuité  $L^p$  de la fonction maximale (voir théorème 1.165), il s'en suit

$$\int_X |I_1(f)(x)|^{\frac{pQ}{Q-p}} d\mu(x) \leq C \|f\|^{\frac{p^2}{Q-p}} \int_X |Mf(x)|^p d\mu(x) \leq C \|f\|_p^{\frac{pQ}{Q-p}}.$$

La preuve dans le cas  $p = 1$  est similaire en utilisant la continuité faible dans  $L^1$  de la fonction maximale (théorème 1.165).  $\square$

#### 1.4 De Sobolev à Poincaré

Le but de ce paragraphe est de voir comment on peut dériver des inégalités de type Sobolev des inégalités de Poincaré qu'il faut voir comme des versions locales de celles de Sobolev. Rappelons (théorème 3.69, chapitre 3) que si  $1 \leq p < n$ , il existe une constante  $C = C(p, n) > 0$  telle que

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|^p dx \right)^{1/p}$$

pour toute fonction  $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  et où  $p^* = \frac{np}{n-p}$  est l'exposant conjugué de Sobolev de  $p$ .

On en déduit une inégalité de Poincaré dans le cadre des espaces de Sobolev.

**Théorème 4.9.** *Pour tout  $1 \leq p < n$ , il existe une constante  $C = C(p, n) > 0$  telle que*

$$\left( \int_B |f - f_B|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \leq C \text{diam} B \left( \int_B \|\nabla f\|^p dx \right)^{1/p}$$

pour toute boule  $B \subset \mathbb{R}^n$  et toute fonction  $f \in W^{1,p}(B)$ .

On rappelle que  $f_B$  est la moyenne de  $f$  sur  $B$ .

*Démonstration.* Soit  $g \in W^{1,p}(B)$  où  $B = B(0, 1)$ . Comme précédemment (voir la preuve du théorème 4.1), il suffit de considérer ce cas-là. Soit  $\tilde{g} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  une extension de  $g$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec  $\|\tilde{g}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|g\|_{W^{1,p}(B(0,1))}$  où  $C$  est une constante absolue (voir par exemple le théorème 3.41). Alors, l'inégalité de Sobolev donne

$$\begin{aligned} \left( \int_B |g|^{p^*} dy \right)^{1/p^*} &\leq \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{g}|^{p^*} dy \right)^{1/p^*} \\ &\leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \tilde{g}\|^p dy \right)^{1/p} \\ &\leq C \left( \int_B (\|\nabla g\|^p + |g|^p) dy \right)^{1/p} \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure en appliquant ce qui précède à  $g = f - f_B$  et obtenir

$$\left( \int_B |f - f_B|^{p^*} dy \right)^{1/p^*} \leq C \left( \int_B (\|\nabla f\|^p + |f - f_B|^p) dy \right)^{1/p}.$$

Comme par densité des fonctions lisses dans les espaces de Sobolev, il suffit de considérer le cas des fonctions  $f \in C^1(B)$ , on peut conclure en appliquant l'inégalité de Poincaré précédente (Théorème 4.1).  $\square$

Par l'inégalité de Hölder, on retrouve l'inégalité de Poincaré sur les boules vue au-dessus pour les fonctions lisses, mais ici dans le cas des espaces de Sobolev. Si  $f \in W^{1,p}(B)$ ,

$$\left( \int_B |f - f_B|^p dy \right)^{1/p} \leq C \left( \int_B |\nabla f|^p dy \right)^{1/p}.$$

En utilisant l'approximation des fonctions BV par les fonctions lisses, on en déduit une version de l'inégalité de Poincaré dans le cadre des fonctions BV.

**Théorème 4.10.** *Il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$\left( \int_B |f|^{n/(n-1)} \right)^{(n-1)/n} \leq C \|\nabla f\|_B$$

pour toute boule  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ , toute fonction  $f \in BV(\mathbb{R}^n)$  (ou au moins localement dans  $BV(\mathbb{R}^n)$ ) et où  $\|\nabla f\|$  est la variation totale de  $\nabla f$  dans  $B$  (voir chapitre 3).

Donnons une situation où il est important d'avoir des versions locales des inégalités de Sobolev, et donc des inégalités de Poincaré. Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  dont le bord est lisse. On considère classiquement des problèmes de type  $\Delta u = \lambda u$  avec les conditions du type suivant.

- Condition de type Neumann :  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

- Condition de type Dirichlet :  $u = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Les inconnues sont des paires  $(u, \lambda)$  où  $u$  est une fonction régulière et  $\lambda$  est un réel. Alors,  $\lambda$  est une valeur propre associée au vecteur propre  $u$ . En intégrant par parties et en normalisant  $\int_{\Omega} u^2 dx = 1$  (pour éviter les solutions triviales  $u = 0$ ), il vient (quelle que soit la condition au bord choisie) :

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda \int_{\Omega} u^2 dx \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial n} u \right) d\mathcal{H}^{n-1}(x) \\ &= \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx \geq 0 \end{aligned}$$

Il est alors naturel de poser

$$\lambda^N(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}; u \neq 0, \int_{\Omega} u dx = 0, u \in C^{\infty}(\Omega) \right\}$$

$$\lambda^D(\Omega) = \inf \left\{ \frac{\int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}; u \neq 0, u \in C_c^{\infty}(\Omega) \right\}.$$

Alors,  $\lambda^N(\Omega)$  (respectivement  $\lambda^D(\Omega)$ ) est le plus petit réel  $\lambda$  tel que le problème de Neumann (respectivement de Dirichlet) a une solution. Notons que  $\lambda^N(\Omega) \geq C$  (respectivement  $\lambda^D(\Omega) \geq C$ ) est équivalente à l'inégalité de type Poincaré

$$\int_{\Omega} |u|^2 dx \leq \frac{1}{C} \int_{\Omega} \|\nabla u\|^2 dx$$

pour toute fonction  $u \in C^{\infty}(\Omega)$  (respectivement toute fonction  $f \in C_c^{\infty}(\Omega)$ ), de sorte que  $1/\lambda$  (dans les deux cas) soit la meilleure constante dans l'inégalité de Poincaré associée.

Pour plus de détails pour toute cette partie, voir [127].

## 2 Inégalités de Poincaré dans les espaces métriques

### 2.1 Gradients supérieurs et inégalités de Poincaré

Pour la notion de gradient supérieur, on renvoie à la section 2.2 du chapitre 3.

**Définition 4.11.** Soit  $p \geq 1$ . Si  $B$  est une boule dans l'espace métrique  $(X, d)$  muni d'une mesure  $\mu$ , on note  $g_B = \int_B g d\mu = \frac{1}{\mu(B)} \int_B g d\mu$  la moyenne de  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  sur  $B$ . On dit que l'espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  supporte une inégalité de Poincaré faible de type  $(1, p)$  s'il existe des constantes  $C \geq 0$  et  $\tau \geq 1$  telles que

$$(P_p) \int_B |u - u_B| d\mu \leq C \text{diam} B \left( \int_{\tau B} \rho^p d\mu \right)^{1/p}$$

pour toute boule  $B$  dans  $X$ , toute fonction continue  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  et TOUT gradient supérieur  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  de  $u$  dans  $B$ . Ici,  $\tau B$  est la boule de même centre que  $B$  mais dont la rayon est  $\tau$  fois le rayon de  $B$ . Si  $(P_p)$  est vérifiée pour  $\tau = 1$ , on dit que  $(X, d, \mu)$  vérifie une inégalité de Poincaré (forte) de type  $(1, p)$ .

**Remarque 4.12.** 1) Par les inégalités de Hölder, si  $(X, d, \mu)$  supporte une inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$ -Poincaré, alors  $(X, d, \mu)$  supporte une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$  pour tout  $p > 1$ . Ainsi, l'inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$  est la meilleure possible au sens où elle implique les autres.

2) Dans les espaces métriques qui vérifient une condition de chaînes (par exemple, les espaces géodésiques), une inégalité de Poincaré faible de type  $(1, p)$  implique une inégalité de Poincaré forte de type  $(1, p)$ . Voir [59] ou [56]. Des idées de preuve sont proposées dans l'exercice 4.156. On oubliera souvent dans la suite le mot "faible".

3) Si  $X$  est un espace métrique propre et quasiconvexe (la définition est donnée plus loin) qui est muni d'une mesure doublante  $\mu$ , alors  $X$  admet une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$  si et seulement si  $X$  admet une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$  seulement pour les fonctions lipschitziennes bornées (voir par exemple [63]).

4) L'existence d'inégalités de Poincaré est une condition ouverte, au sens où si  $X$  est un espace métrique complet muni d'une mesure doublante  $\mu$  qui admet une inégalité de Poincaré  $(1, p)$  pour un  $p > 1$ , alors il existe  $\varepsilon > 0$  tel que pour tout  $p' > p - \varepsilon$ ,  $X$  admet une inégalité de Poincaré  $(1, p')$ . Voir [74].

5) On aurait pu considérer plus généralement des inégalités de Poincaré  $(q, p)$ , c'est à dire de la forme

$$\left( \int_B |u - u_B|^q d\mu \right)^{1/q} \leq C \text{diam} B \left( \int_{\tau B} \rho^p d\mu \right)^{1/p}$$

Ainsi, dans les espaces euclidiens, nous avons rencontré des inégalités de type  $(p, p)$  pour les fonctions lisses et des inégalités de type  $(p^*, p)$  (où  $p^*$  est le conjugué de  $p$ ) pour les fonctions de Sobolev. Mais, ce sont les inégalités de type  $(1, p)$  qui nous seront utiles dans la suite.

6) Si la mesure  $\mu$  est doublante,  $\mu(B)$  et  $\mu(\tau B)$  sont comparables et  $(P_1)$  est équivalente à

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq C_\tau \text{diam} B \int_{\tau B} \rho d\mu$$

où  $C_\tau$  est une constante qui dépend de la constante de  $(P_1)$ , de  $\tau$  et de la constante de doublement du volume. Cette observation sera utile quand nous considérerons le cas des espaces à courbure positive pour lesquels nous vérifierons que  $(P_1)$  est satisfaite.

7) Pour tout  $Q > 1$ , il existe des espaces  $Q$ -Ahlfors réguliers qui vérifient des inégalités de Poincaré  $(1, 1)$ . Les premiers exemples sont des bords à l'infini d'immeubles 2-dimensionnels qui sont hyperboliques au sens de Gromov (voir [18]). L'ensemble des dimensions ainsi obtenues est dense dans  $]1, +\infty[$ . Dans [82] sont construits des exemples pour tout  $Q > 1$ , ils sont obtenus comme quotients d'ensembles de Cantor. Ainsi, un espace qui vérifie des inégalités de Poincaré peut avoir une "structure fractale".

## 2.2 Une caractérisation par la fonction maximale

Pour la fonction maximale de Hardy-Littlewood, nous renvoyons à la section 6 du chapitre 1. Voici le résultat principal de cette section.

**Théorème 4.13.** *Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré doublant et localement compact. Soit  $p \geq 1$ . Alors,  $X$  admet une inégalité de Poincaré faible de type  $(1, p)$  si et seulement si il existe une constante  $C_0 \geq 1$  de sorte que pour presque tous  $x, y$  dans  $C_0^{-1}B$ ,*

$$|u(x) - u(y)| \leq C_0 d(x, y) (M_R \rho^p(x) + M_R \rho^p(y))^{1/p} \quad (4.14)$$

dès que  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue sur la boule  $B$  de rayon  $R > 0$  et  $\rho : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  est un gradient supérieur de  $u$  dans  $B$ .

Le “pour presque tous  $x, y$  dans  $C_0^{-1}B$ ” signifie qu’il existe  $E$  avec  $\mu(E) = 0$  tel que la propriété est vraie pour tous  $x, y \in (C_0^{-1}B) \setminus E$ . Ce critère est par exemple utilisé dans [18].

*Démonstration.* Supposons tout d’abord que  $X$  admet une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$ . Pour simplifier, on supposera que cette inégalité est forte (c’est à dire  $\tau = 1$ ). Le cas général s’en déduit facilement. Soit  $u$  une fonction continue dans la boule  $B$  de rayon  $R$  dans  $X$  et soit  $\rho$  un gradient supérieur de  $u$  dans  $B$ . Choisissons  $x \in \frac{1}{10}B$  (c’est à dire la boule de même centre que  $B$  mais de rayon  $\frac{R}{10}$ ) et posons  $B_j = B\left(x, \frac{1}{10}2^{-j}R\right)$ . Alors, si  $x$  est un point de Lebesgue de  $u$  (ce qui explique le presque partout dans l’énoncé d’après le théorème de différentiation de Lebesgue)

$$\begin{aligned} |u(x) - u_{B_0}| &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} |u_{B_j} - u_{B_{j+1}}| \\ &\leq \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_{j+1}} |u - u_{B_j}| d\mu \\ &\leq C \sum_{j=0}^{+\infty} \int_{B_j} |u - u_{B_j}| d\mu \text{ (par doublement)} \\ &\leq C \text{diam} B \sum_{j=0}^{+\infty} 2^{-j} \left( \int_{B_j} \rho^p d\mu \right)^{1/p} \text{ (par l'inégalité de Poincaré)} \\ &\leq C \text{diam} B (M_R \rho^p(x))^{1/p}. \end{aligned}$$

En suivant les mêmes idées, il vient que si  $y \in \frac{1}{10}B$  est un point de Lebesgue de  $u$  et  $\tilde{B} = B(y, R/2)$ , on a d’après l’inégalité de Poincaré

$$|u(y) - u_{\tilde{B}}| \leq C \text{diam} B (M_R \rho^p(y))^{1/p}.$$

Notons que  $B_0 \subset \tilde{B}$  et que par la propriété de doublement de  $\mu$ ,  $\mu(\tilde{B}) \leq C\mu(B_0)$ . On en déduit comme précédemment que  $|u_{B_0} - u_{\tilde{B}}| \leq \int_{\tilde{B}} |u - u_{\tilde{B}}| d\mu \leq C \text{diam} B (M_R \rho^p(y))^{1/p}$ . De cela, il découle facilement que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - u_{B_0}| + |u_{B_0} - u_{\tilde{B}}| + |u_{\tilde{B}} - u(y)| \\ &\leq C \text{diam} B (M_R \rho^p(x) + M_R \rho^p(y))^{1/p}. \end{aligned}$$

Démontrons maintenant la réciproque. Pour cela, fixons une boule  $B$  dans  $X$  de rayon  $R$ . Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et soit  $\rho : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  un gradient supérieur de  $u$  dans  $B$ . Pour presque tout  $x$  et presque tout  $y$  dans  $B$ , on a par hypothèse

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd(x, y) \left( M(\rho^p \chi_{C_0 B})^{1/p}(x) + M(\rho^p \chi_{C_0 B})^{1/p}(y) \right)^p.$$

En prenant la moyenne sur  $x$  puis sur  $y$ , il vient par la continuité faible de la fonction maximale (utilisée dans la quatrième ligne)

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| &\leq \frac{1}{\mu(B)^2} \int_B \int_B |u(x) - u(y)| dx dy \\ &\leq C \text{diam} B \int_B (M(\rho^p \chi_{C_0 B})^{1/p} d\mu) \text{ (par hypothèse)} \\ &\leq \frac{C \text{diam} B}{\mu(B)} \int_0^\infty \mu(\{x \in B; M(\rho^p \chi_{C_0 B}) > t^p\}) dt \text{ (par le principe de Cavalieri)} \\ &\leq \frac{C \text{diam} B}{\mu(B)} \left( \int_0^{t_0} \mu(B) dt + \int_{t_0}^\infty \frac{C}{t^p} \left( \int_{C_0 B} \rho^p d\mu \right) dt \right) \text{ (où } t_0 \text{ sera choisi plus tard)} \\ &= \frac{C \text{diam} B}{\mu(B)} \left( t_0 \mu(B) + C t_0^{1-p} \int_{C_0 B} \rho^p d\mu \right). \end{aligned}$$

Nous pouvons conclure en prenant  $t_0 = \left( \mu(B)^{-1} \int_{C_0 B} \rho^p d\mu \right)^{1/p}$ . □

Nous allons maintenant faire le lien entre les inégalités de Poincaré et les espaces de Sobolev  $M^{1,p}$  sur un espace métrique mesuré (rappelons que ces espaces  $M^{1,p}$  ont été définis en section 2.5 du chapitre 3).

**Théorème 4.15.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure doublante  $\mu$  et soit  $p \geq 1$ . Il y a équivalence des assertions suivantes.*

- (i)  $u \in M^{1,p}(X, d, \mu)$ .
- (ii)  $u \in L^p(X, \mu)$  et il existe des constantes  $C > 0$ ,  $\tau \geq 1$ , une fonction positive  $\rho \in L^p(X, d, \mu)$  et un exposant  $q$  avec  $0 < q < p$  tels que l'on a l'inégalité de Poincaré suivante :

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq CR \left( \int_{\tau B} \rho^q d\mu \right)^{1/q}$$

pour toute boule  $B$  de  $X$  de rayon  $R > 0$ .

*Démonstration.* On commence par l'implication (i)  $\implies$  (ii). Il existe une fonction  $g : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  et un ensemble  $E \subset X$  avec  $\mu(E) = 0$  tels que, pour tous  $x, y \in X \setminus E$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq d(x, y)(g(x) + g(y)). \tag{4.16}$$

En intégrant (4.16), on obtient facilement

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| d\mu &\leq 1/\mu(B)^2 \int_B \int_B |u(x) - u(y)| d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq 1/\mu(B)^2 \int_B \int_B (d(x, y)(g(x) + g(y))) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq 2R \int_B g d\mu \end{aligned}$$

On obtient ainsi une inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$  qui implique les autres par l'inégalité de Hölder. Passons à l'implication  $(ii) \implies (i)$ . Supposons que  $u$  et  $\rho$  vérifie une inégalité de Poincaré de type  $(1, q)$  pour un  $q < p$ . Alors, par la caractérisation de l'inégalité de Poincaré par la fonction maximale (voir théorème 4.14), il existe des constantes  $C > 0$ ,  $\tau \geq 1$  et un ensemble  $E \subset X$  avec  $\mu(E) = 0$  tels que pour tous  $x, y \in X \setminus E$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd(x, y) \left( M_{\tau d(x, y)} \rho^q(x) + M_{\tau d(x, y)} \rho^q(y) \right)^{1/q}.$$

On en déduit

$$|u(x) - u(y)| \leq Cd(x, y) (M\rho^q(x) + M\rho^q(y))^{1/q}.$$

Pour conclure, il suffit de voir que  $g(x) = (M\rho^q(x))^{1/q}$  est dans  $L^p(X, \mu)$ . Or,  $\rho^q \in L^{p/q}(X, \mu)$  (avec  $p/q > 1$ ) et donc par le théorème maximal,  $M\rho^q \in L^{p/q}(X, \mu)$ . Notre preuve est complète.  $\square$

### 2.3 Une caractérisation par la capacité ou le module de familles de courbes

Nous avons rencontré le module d'une famille de courbes au chapitre précédent (dans la section 2.1). Dans cette section, nous allons insister sur

- les propriétés d'invariance conforme du module. Ceci motivera une caractérisation des applications quasi-conformes dans les espaces métriques qui vérifient des inégalités de Poincaré.
- les estimations du module d'anneaux dans la cas euclidien/riemannien et dans le cadre des espaces métriques Ahlfors-réguliers. Ceci nous amènera à l'introduction des espaces de Loewner qui seront caractérisés en termes d'inégalités de Poincaré.

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne de dimension  $n$ . On note  $vol_g$  son volume riemannien. Le lecteur peu familier avec les variétés peut se restreindre au cas de  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne et de la mesure de Lebesgue. Si  $\Gamma$  est une famille de courbes dans  $M$ , le module conforme de  $\Gamma$  est défini par

$$\text{Mod}(\Gamma) = \inf \int_M \rho^n dvol_g$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions  $\rho : M \rightarrow [0, +\infty]$  telles que  $\int_{\gamma} \rho(s) ds \geq 1$  pour toute courbe localement rectifiable  $\gamma \in \Gamma$ . Une telle fonction  $\rho$  est dite admissible pour la famille de courbes  $\Gamma$ . Un point-clé est que le module conforme est un invariant conforme.

**Théorème 4.17.** *Soient  $M, N$  deux variétés riemanniennes de dimension  $n$ . Si  $f : M \rightarrow N$  est (un homéomorphisme) conforme, alors  $\text{Mod}(f(\Gamma)) = \text{Mod}(\Gamma)$  pour toute famille de courbes  $\Gamma$  dans  $M$ , où  $f(\Gamma) = \{f(\gamma), \gamma \in \Gamma\}$ .*

*Démonstration.* Soit  $\psi$  admissible pour  $f(\Gamma)$ , et posons

$$\rho = (\psi \circ f) \cdot \|Df\|.$$

Soit  $\gamma \in \Gamma$ . Par changement de variables, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \rho ds &= \int_{\gamma} (\psi \circ f) \cdot \|Df\| ds \\ &= \int_{f(\gamma)} \psi ds \end{aligned}$$

et  $\rho$  est donc admissible pour  $\Gamma$ .

Comme  $f$  est conforme, par définition,  $\|Df\|^n = |J_f|$  en tout point. Donc, par la formule de changement de variables 1.58 qui reste vraie dans ce cadre, on a

$$\begin{aligned}\int_M \rho^n d\text{vol}_g &= \int_M (\psi \circ f)^n \|Df\|^n d\text{vol}_g \\ &= \int_M (\psi \circ f)^n |J_f| d\text{vol}_g \\ &= \int_N \psi d\text{vol}_g.\end{aligned}$$

Il s'en suit

$$\text{Mod}(\Gamma) \leq \int_M \rho^n d\text{vol}_g = \int_N \psi^n d\text{vol}_g$$

et donc  $\text{Mod}(\Gamma) \leq \text{Mod}f(\Gamma)$ . L'inégalité inverse s'obtient par symétrie.  $\square$

**Exemple 4.18.** (Module conforme d'un anneau euclidien) Soit  $\Gamma$  la famille de courbes dans  $\mathbb{R}^n$  reliant les bords des composantes de l'anneau  $B(x_0, R) \setminus \overline{B(x_0, r)} = \{x; r < |x - x_0| < R\}$  (où  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $0 < r < R$ ). Alors, si on note  $\omega_{n-1}$  la mesure de Lebesgue de la sphère unité  $S^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,

$$\text{Mod}(\Gamma) = \omega_{n-1} \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{1-n}.$$

*Démonstration.* Par invariance conforme, on peut supposer que  $x_0 = 0$ . Montrons que la fonction définie par  $\rho(x) = (\log(R/r))^{-1} |x|^{-1}$  si  $r < |x| < R$  et  $\rho(x) = 0$  sinon est admissible pour  $\Gamma$ . Pour cela, considérons  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  une courbe rectifiable de  $\Gamma$  et notons  $[\gamma(a), \gamma(b)]$  le segment euclidien reliant  $\gamma(a)$  et  $\gamma(b)$ . Comme la fonction  $\rho$  est radiale, on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma \rho(s) ds &\geq \int_{[\gamma(a), \gamma(b)]} \rho(s) ds \\ &= \int_r^R \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{-1} \frac{dt}{t} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ce qui implique par un changement en coordonnées polaires que

$$\begin{aligned}\text{Mod}(\Gamma) &\leq \int_{B(0, R) \setminus B(0, r)} \rho(x)^n dx \\ &= \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{-n} \int_{S^{n-1}} \left( \int_r^R \frac{dt}{t} \right) d\theta \\ &= \omega_{n-1} \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{1-n}.\end{aligned}$$

Pour démontrer l'inégalité inverse, on considère une fonction admissible  $\rho$  pour la famille  $\Gamma$ . Sans perte de généralité, on peut supposer que  $\rho(x) = 0$  si  $|x| \geq R$  ou si  $|x| \leq r$ . Pour tout  $\theta \in S^{n-1}$ , on a par l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned}1 &\leq \int_r^R \rho(t\theta) dt \text{ (puisque } \rho \text{ est admissible)} \\ &= \int_r^R \rho(t\theta) t^{\frac{n-1}{n}} t^{\frac{1-n}{n}} dt \\ &\leq \left( \int_r^R \rho(t\theta)^n t^{n-1} dt \right)^{1/n} \left( \int_r^R t^{-1} dt \right)^{\frac{n-1}{n}} \\ &\leq \left( \int_r^R \rho(t\theta)^n t^{n-1} dt \right)^{1/n} \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{\frac{n-1}{n}}.\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_r^R \rho(t\theta)^n t^{n-1} dt \geq \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{1-n}.$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R) \setminus B(0,r)} \rho^n(x) dx &= \int_{S^{n-1}} \left( \int_r^R \rho(t\theta)^n t^{n-1} dt \right) d\theta \\ &\geq \omega_{n-1} \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{1-n}. \end{aligned}$$

D'où,  $\text{Mod}(\Gamma) \geq \omega_{n-1} (\log(R/r))^{1-n}$  et nous avons fini notre preuve. Notons que nous avons utilisé les coordonnées polaires, ce qui ne permet pas d'envisager d'avoir l'égalité dans des cadres non euclidiens. Nous avons déjà rencontré ce même genre de problème avec la preuve euclidienne de l'inégalité de Poincaré donnée au début de ce chapitre.  $\square$

Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. On renvoie à la section 2.1 du chapitre 3 pour la définition et les propriétés du module d'une famille de courbes de  $X$ . Rappelons que nous avons alors défini une famille de modules  $\text{Mod}_p$  (et non pas un module privilégié comme le module conforme qui correspond à  $p = n$  dans  $\mathbb{R}^n$ ) et que ces modules définissent des mesures extérieures sur les familles de courbes de  $X$ . Nous utiliserons surtout dans ce paragraphe que le module ne "voit" pas les courbes non rectifiables et donc que si le  $p$ -module d'une famille de courbes est non nulle, cette famille contient des courbes rectifiables.

**Exemple 4.19.** (Module d'un anneau, cas général)

Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. On suppose qu'il existe une constante  $C_0 \geq 0$  et un exposant  $Q > 1$  tel que  $\mu(B(x, R)) \leq C_0 R^Q$  dès que  $x \in X, R > 0$ . En particulier, cette hypothèse est satisfaite si  $\mu$  est Ahlfors-régulière de dimension  $Q$ .

**Lemme 4.20.** Soit  $(X, d, \mu)$  comme ci-dessus. Soit  $\Gamma$  la famille des courbes joignant  $\overline{B(x_0, r)}$  à  $X \setminus B(x_0/R)$  (où  $x_0 \in X, 0 < r < 2R$ ). Alors, il existe une constante  $C \geq 0$  (ne dépendant que de  $C_0$  et de  $Q$ ) telle que

$$\text{Mod}_Q(\Gamma) \leq C \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{1-Q}.$$

Dans un espace métrique quelconque, on ne peut pas s'attendre à une borne inférieure comme dans le cas euclidien (voir la discussion à la fin de l'exemple du module d'un anneau euclidien). Un espace qui vérifiera ce genre de contrôle par en dessous du module sera bientôt défini et appelé espace de Loewner. Notons aussi que cette estimée donne que le  $Q$ -module d'une famille de courbes passant par un même point est zéro. Pour le voir, faire tendre  $r$  vers 0.

*Démonstration.* Comme précédemment, notons  $\rho(x) = (\log(R/r))^{-1} d(x_0, x)^{-1}$  pour  $r < d(x_0, x) < R$  et  $\rho(x) = 0$  sinon. Alors,  $\rho$  est admissible pour  $\Gamma$  et si on note  $N$  le plus petit entier tel que  $2^{N+1}r \geq$



$R$ , on a

$$\begin{aligned}
\text{Mod}_Q(\Gamma) &= \int_X \rho^Q d\mu \\
&\leq \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{-Q} \sum_{j=0}^N \int_{\{2^j r \leq d(x_0, x) \leq 2^{j+1} r\}} d(x_0, x)^{-Q} d\mu \\
&\leq \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{-Q} \sum_{j=0}^N (2^j r)^{-Q} \mu(B(x_0, 2^{j+1} r)) \\
&\leq \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{-Q} \sum_{j=0}^N (2^j r)^{-Q} (C_0 (2^{j+1} r)^Q) \\
&\leq 2^Q C_0 (N+1) \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{-Q} \\
&\leq 10 \cdot 2^Q C_0 \left( \log \left( \frac{R}{r} \right) \right)^{1-Q} \quad (\text{puisque } 2^N r < R).
\end{aligned}$$

□

Il existe une version “analytique” du module, appelé  $p$ -capacité.

**Définition 4.21.** Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles (disjoints) dans  $X$ , on définit la  $p$ -capacité du condensateur  $(E, F)$  par  $\text{Cap}_p(E, F) = \inf \int_X \rho^p d\mu$  où l’infimum est pris sur tous les gradients supérieurs  $\rho$  de toutes les fonctions  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifient  $u \leq 0$  sur  $E$  et  $u \geq 1$  sur  $F$ .

**Proposition 4.22.** Avec les notations précédentes,  $\text{Mod}_p(E, F) = \text{Cap}_p(E, F)$ .

*Démonstration.* Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction qui vérifie  $u \leq 0$  sur  $E$  et  $u \geq 1$  sur  $F$ . Alors, si  $\rho$  est un gradient supérieur de  $u$ ,  $\rho$  est admissible pour la famille de courbe joignant  $E$  et  $F$ , puisque pour une courbe  $\gamma$  joignant  $x \in E$  à  $y \in F$ , on a  $\int_\gamma \rho ds \geq |u(x) - u(y)| \geq 1$ . On a donc par définition  $\text{Mod}_p(E, F) \leq \text{Cap}_p(E, F)$ . D’un autre côté, si  $\rho$  est admissible pour la famille de courbe joignant  $E$  et  $F$ , on pose  $u(x) = \int_{\gamma_x} \rho ds$  où l’infimum est pris sur toutes les courbes  $\gamma_x$  reliant le point  $x \in X$  à  $E$ . Alors,  $u = 0$  sur  $E$ , et  $u \geq 1$  sur  $F$  (par choix de  $\rho$ ). De plus,  $\rho$  est un gradient supérieur de  $u$ . On obtient donc  $\text{Mod}_p(E, F) \geq \text{Cap}_p(E, F)$ . □

On suppose maintenant que pour tout  $x$  et tout  $y \in X$ , il existe une courbe rectifiable (c’est à dire de longueur finie mais arbitraire) entre  $x$  et  $y$ . Nous allons aussi supposer pour éviter les problèmes techniques que  $X$  est non borné. Soient  $E$  et  $F$  deux continua non dégénérés de  $X$  (c’est à dire  $E$  et  $F$  sont des compacts connexes non réduits à un point). On note  $\Gamma(E, F)$  la famille des courbes reliant  $E$  et  $F$  dans  $X$ . On pose  $\text{Mod}_p(E, F) = \text{Mod}_p(\Gamma(E, F))$ . Enfin, on note  $\Delta(E, F)$  la distance relative entre  $E$  et  $F$ , c’est à dire

$$\Delta(E, F) = \frac{d(E, F)}{\min(\text{diam} E, \text{diam} F)}.$$

**Définition 4.23.** Soit  $p > 1$ . On dit que  $X$  (ou  $(X, d, \mu)$ ) vérifie la  $p$ -propriété de Loewner s’il existe une fonction  $\phi : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que

$$\text{Mod}_p(E, F) \geq \phi(\Delta(E, F))$$

pour tous continua disjoints et non-dégénérés  $E$  et  $F$  dans  $X$ .

La définition de la  $p$ -propriété de Loewner implique directement l'estimation de mesure suivante.

**Lemme 4.24.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré qui vérifie la  $p$ -propriété de Loewner pour un  $p > 1$ . Alors, il existe une constante  $C \geq 1$  telle que  $\mu(B(x, R)) \geq C^{-1}R^p$  pour tout  $x \in X$ , tout  $R > 0$ .

*Démonstration.* Fixons  $x \in X$  et  $R > 0$ . Comme  $X$  n'est pas borné, il existe  $y \in X$  avec  $d(x, y) \geq 10R$ . Par hypothèse sur  $X$ , il existe une courbe rectifiable  $\gamma$  reliant  $x$  à  $y$ . On peut donc trouver deux continua  $E$  et  $F$  (en fait, des sous-courbes de  $\gamma$ ) tels que  $\text{diam}E = \text{diam}F = R/10$ ,  $E \subset B(x, R/2)$ ,  $F \subset X \setminus \overline{B(x, R)}$  et  $E, F \subset B(x, 2R)$ . La propriété de Loewner implique que  $\text{Mod}_p(E, F) \geq \phi(20) > 0$ . Soit la fonction  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie par  $\rho(y) = 2/R$  si  $y \in B(x, R) \setminus B(x, R/2)$  et  $\rho(y) = 0$  sinon. Alors,  $\rho$  est admissible pour  $\Gamma(E, F)$ . On a donc

$$0 < \phi(20) \leq \int_X \rho^p(y) d\mu(y) \leq \left(\frac{2}{R}\right)^p \mu(B(x, R)).$$

D'où,  $\mu(B(x, R)) \geq \frac{\phi(20)}{2^p} R^p$ . □

Nous avons vu au chapitre 2 qu'une telle estimation (comme dans le lemme) de la mesure d'une boule donne une borne sur la dimension de Hausdorff. Il est donc naturel dans un espace de dimension  $Q > 1$  de considérer  $p = Q$  comme un indice privilégié pour le module. D'autre part, si  $X$  de dimension de Hausdorff  $Q$  vérifie la  $Q$ -propriété de Loewner, il n'y a aucune raison que  $\mu$  soit Ahlfors-régulière. Cela nous amène à la définition suivante.

**Définition 4.25.** Soit  $Q > 1$ . On dit que  $(X, d, \mu)$  est un  $Q$ -espace de Loewner (ou un espace de Loewner de dimension  $Q$ ) si

- (i) La mesure  $\mu$  est Ahlfors-régulière de dimension  $Q$  (et donc  $(X, d)$  est de dimension de Hausdorff  $Q$ );
- (ii) L'espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  vérifie la  $Q$ -propriété de Loewner.

En fait, si  $\mu$  est  $Q$ -régulière, on peut choisir la fonction  $\phi$  dans la définition de la  $Q$ -propriété de Loewner (voir [62] dans lequel la notion d'espace de Loewner est introduite en relation avec la théorie quasi-conforme) de sorte que

$$\begin{aligned} \phi(t) &\sim \log(1/t) \text{ si } t \rightarrow 0, \\ \phi(t) &\sim (\log t)^{1-Q} \text{ si } t \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Puisque  $Q > 1$ ,  $\text{mod}_Q(E, F)$  est grand si  $\Delta(E, F)$  est petit, c'est à dire si  $E$  et  $F$  sont proches, ou si  $E$  et  $F$  ont un grand diamètre. Ainsi, dans un espace de Loewner, il y a d'autant plus de courbes rectifiables de courbes joignant  $E$  à  $F$  que  $E$  et  $F$  sont proches ou de grande taille. L'espace euclidien  $\mathbb{R}$  n'est pas un espace de Loewner. De façon générale, la condition de Loewner impliquant l'existence de beaucoup de courbes rectifiables n'a aucun intérêt dans les espaces de dimension  $Q \leq 1$ .

Les espaces de Loewner ont des propriétés géométriques intéressantes.

**Théorème 4.26.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré qui est  $Q$ -Loewner (avec  $Q > 1$ ). Alors,

- (1)  $X$  est linéairement localement connexe (LLC). Ceci signifie qu'il existe une constante  $C > 0$  de sorte que pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$ ,
  - (1a) Tout couple de points dans  $B(x, r)$  peut être joint par un continuum dans  $B(x, Cr)$ ;
  - (1b) Tout couple de points dans  $X \setminus B(x, r)$  peut être joint par un continuum dans  $X \setminus B(x, r/C)$ ;

(2)  $X$  est quasiconvexe, c'est à dire il existe une constante  $C \geq 0$  telle que tout couple de points  $(x, y) \in X \times X$  peut être joint par une courbe  $\gamma$  de  $X$  de longueur bornée par  $Cd(x, y)$ .

*Démonstration.* Nous aurons besoin du lemme suivant. On note  $\text{Mod}_Q(E, F; B(x, CR) \setminus B(x, R/C))$  le  $Q$ -module de la famille de courbes joignant  $E$  et  $F$  en restant dans  $B(x, CR) \setminus B(x, R/C)$ .

**Lemme 4.27.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré qui est  $Q$ -Loewner (avec  $Q > 1$ ). Il existe des constantes positives  $C \geq 2$  et  $\delta > 0$  telles que si  $x \in X$  et  $R > 0$ ,  $\text{Mod}_Q(E, F; B(x, CR) \setminus B(x, R/C)) \geq \delta$  dès que  $E$  et  $F$  sont des continua disjoints dans  $B(x, R) \setminus B(x, R/2)$  qui vérifient  $\text{diam}E, \text{diam}F \geq R/8$ . Ainsi, Il existe une courbe rectifiable dans  $B(x, Cr) \setminus B(x, r/C)$  joignant  $E$  à  $F$  qui peut de plus être choisie de longueur inférieure à  $CR$ .

*Démonstration.* On fixe  $x \in X$  et  $R > 0$ . Soient  $E$  et  $F$  deux continua disjoints dans  $B(x, R) \setminus B(x, R/2)$  qui vérifient les hypothèses du lemme. Posons  $\Gamma_1 = \Gamma(E \cup F, \overline{B}(x, R/C))$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma(E \cup F, X \setminus B(x, R/C))$ , et  $\Gamma_3 = \Gamma(E, F; B(x, CR) \setminus B(x, R/C))$  (famille des courbes joignant  $E$  à  $F$  en restant dans  $B(x, CR) \setminus B(x, R/C)$ ). On a alors  $\text{Mod}_Q(E, F) \leq \sum_{i=1}^3 \text{Mod}_Q(\Gamma_i)$ . Or par la propriété de Loewner, on a  $\text{Mod}_Q(E, F) \geq \phi(16) > 0$ . Posons  $\delta = \phi(16)/2$ . Mais, par l'estimation du module d'un anneau, on a pour  $C$  assez grand que  $\text{Mod}_Q(\Gamma_1) + \text{Mod}_Q(\Gamma_2) \leq \delta$ . Ce qui nous permet de conclure que  $\text{Mod}_Q(E, F; B(x, CR) \setminus B(x, R/C)) = \text{Mod}_Q(\Gamma_3) \geq \delta$ . Ceci implique qu'il existe beaucoup de courbes rectifiables reliant  $E$  à  $F$  dans  $B(x, CR) \setminus B(x, R/C)$ . Il nous faut voir qu'il en existe une de longueur contrôlée par  $R$ . Pour cela, on a besoin du résultat suivant qui donne un contrôle du module de familles de "longues" courbes.

**Lemme 4.28.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré qui est Ahlfors-régulier de dimension  $Q > 1$  et soit  $L > 0$ . Soit  $\Gamma$  une famille de courbes  $\gamma$  contenues dans une boule  $B(x, R)$  de  $X$  telle que pour toute courbe  $\gamma \in \Gamma$ ,  $l(\gamma) \geq L$ . Alors,  $\text{Mod}_Q(\Gamma) \leq L^{-Q} \mu(B(x, R)) \leq C_{AR} R^Q L^{-Q}$  (où  $C_{AR}$  est la constante d'Ahlfors-régularité de  $\mu$ ).

Notons que ce résultat n'utilise pas la condition de Loewner et que la première partie de l'inégalité ne nécessite même pas l'Ahlfors-régularité. Pour démontrer le lemme, on pose  $\rho(y) = 1/L$  si  $y \in B(x, R)$  et  $\rho(y) = 0$  sinon. Alors,  $\rho$  est admissible pour  $\Gamma$  et on peut facilement conclure.

Terminons la preuve du lemme 4.27. Soit  $\Gamma_+$  (respectivement  $\Gamma_-$ ) l'ensemble des courbes reliant  $E$  à  $F$  et contenues dans  $B(x, CR) \setminus B(x, R/C)$  de longueur supérieure (respectivement inférieure) à  $\left(\frac{2C_{AR}}{\delta}\right)^{1/Q} R$ . Alors,  $\text{Mod}_Q(\Gamma_+) + \text{Mod}_Q(\Gamma_-) \geq \delta$  par la première partie de la démonstration, mais par le lemme précédent,  $\text{Mod}_Q(\Gamma_+) \leq \delta/2$ . Donc,  $\text{Mod}_Q(\Gamma_-) \geq \delta/2 > 0$  et la preuve est complète.  $\square$

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème 4.26. On note d'abord que la première partie (i) de (1) est impliquée par la quasiconvexité. On démontre maintenant la seconde. Soient  $x_1, x_2$  deux points dans  $X \setminus \overline{B}(x, r)$  et soit  $\gamma$  une courbe rectifiable joignant  $x_1$  à  $x_2$ . Si  $\gamma$  est contenu dans  $X \setminus B(x, r/C)$  où  $C$  est la constante du lemme 4.27, nous pouvons conclure. Sinon,  $\gamma$  rencontre  $B(x, r/C)$  (où  $C \geq 2$ ). Alors, on peut trouver deux continua disjoints  $E$  et  $F$  dans  $\gamma$  et dans  $B(x, r) \setminus B(x, r/2)$  tels que  $\text{diam}E, \text{diam}F \geq r/8$ . Par le lemme 4.27,  $\text{Mod}_Q(E, F; B(x, Cr) \setminus B(x, r/C)) > 0$ . En particulier, il existe un continuum (et même une courbe rectifiable) joignant  $x_1$  à  $x_2$  dans  $B(x, r/C)$ .

Démontrons maintenant la quasiconvexité. Pour cela, considérons deux points distincts  $x$  et  $y$  dans  $X$ . On pose  $r = d(x, y)$ . La construction de la courbe  $\gamma$  reliant  $x$  et  $y$ , de longueur inférieure à  $Cr$  se fait par récurrence. Nous détaillons les premières étapes et laissons le soin au lecteur de compléter la construction.

Etape 0 : Soit  $E$  un continuum joignant  $x$  à  $X \setminus B(x, r/4)$ , contenu dans  $B(x, r/4)$ . De façon symétrique, on choisit un continuum  $F$  joignant  $y$  à  $X \setminus B(y, r/4)$ , contenu dans  $B(y, r/4)$ . L'existence de tels continua est assurée par le fait que toute paire de points peut être reliée par une courbe rectifiable. Par le lemme 4.27, il existe une courbe  $\gamma$  de longueur  $\leq Cr$  qui joint  $E$  à  $F$ .

Etape 1 : On pose  $x_1^1 = x$  et on choisit un point  $x_1^2 \in E \cap \gamma$ . On pose  $r_1 = d(x_1^1, x_1^2)$ . Soit  $E_1^1$  un continuum joignant  $x_1^1$  à  $X \setminus B(x_1^1, r_1/4)$ , contenu dans  $B(x_1^1, r_1/4)$  et soit  $E_1^2$  un continuum joignant  $x_1^2$  à  $X \setminus B(x_1^2, r_1/4)$ , contenu dans  $B(x_1^2, r_1/4)$ . Alors, par le lemme 4.27, il existe une courbe  $\gamma_1$  reliant  $E_1^1$  et  $E_1^2$  avec  $l(\gamma_1) \leq Cr_1 \leq \frac{Cr}{4}$ . De façon symétrique, on pose  $y_1^1 = y$  et on choisit un point  $y_1^2 \in F \cap \gamma$ . On applique alors l'étape 0 de la même façon que précédemment à  $y_1^1, y_1^2$  et  $s_1 = d(y_1^1, y_1^2)$  pour obtenir une courbe  $\beta_1$  avec  $l(\beta_1) \leq Cs_1 \leq \frac{Cr}{4}$ . On a donc construit deux courbes dont la longueur totale est inférieure à  $\frac{Cr}{2}$ .

Etape 2 : On applique la construction de l'étape 0 au "voisinage" de  $x_1^1, x_1^2, y_1^1$  et  $y_1^2$  pour obtenir 4 courbes dont la somme totale des longueurs est bornée par  $\frac{Cr}{4}$ .

De façon générale, à l'étape  $k$ , on construit  $2^k$  courbes de longueur totale inférieure à  $\frac{Cr}{2^k}$ . La courbe  $\gamma$  cherchée est obtenue en concaténant de façon naturelle toutes les courbes obtenues lors des diverses étapes de la construction et on a  $l(\gamma) \leq 2Cr$ . □

Nous admettrons le résultat fondamental suivant qui donne une caractérisation des espaces de Loewner en termes d'inégalités de Poincaré. Nous utiliserons ce critère dans la suite pour donner des exemples d'espaces de Loewner. Pour une démonstration, voir [62] (Section 5).

**Théorème 4.29.** *Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique  $Q$ -régulier et propre. Alors,  $X$  est un  $Q$ -espace de Loewner si et seulement si  $X$  admet une inégalité de Poincaré de type  $(1, Q)$ .*

Ce résultat permettra d'obtenir la quasiconvexité des espaces de Loewner à partir des inégalités de Poincaré (voir théorème 4.46).

Nous allons maintenant introduire des versions discrètes du module et de la propriété de Loewner. Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré et soit  $p \geq 1$ . On considère des continua non dégénérés  $E$  et  $F$  de  $X$ . On se donne une famille  $\mathcal{B}$  de boules (ouvertes) dans  $X \setminus (E \cup F)$  et  $\rho$  un "poids" sur  $\mathcal{B}$ , c'est à dire  $\rho$  est une application positive définie sur  $\mathcal{B}$ . On attribue ainsi à toutes boules  $B$  de  $\mathcal{B}$  son poids  $\rho(B)$ . On dit que le couple  $(\rho, \mathcal{B})$  est admissible pour la paire de continua non dégénérés  $(E, F)$  de  $X$  si

- (a)  $X \setminus (E \cup F) = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ , c'est à dire  $\mathcal{B}$  donne un recouvrement du complémentaire de  $E \cup F$  ;
- (b) Si  $B, B' \in \mathcal{B}$  avec  $B \neq B' = \emptyset$ ,  $\frac{1}{5}B \cap \frac{1}{5}B' = \emptyset$  ;
- (c)  $\sum_{B \in \mathcal{C}} \rho(B) \geq 1$  pour toute chaîne  $\mathcal{C}$ , c'est à dire toute famille  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{B}$  telle que  $\overline{\bigcup_{B \in \mathcal{C}} B}$  contient un connexe qui rencontre à la fois  $E$  et  $F$

**Remarque 4.30.** La condition (b) est très utile en pratique. On peut construire des familles de boules vérifiant (b) à l'aide du théorème de recouvrement  $5r$  vu au chapitre 1 à partir d'une famille vérifiant (a) et (c). Notre définition est tirée de [61] dans lequel la définition du module discret est donnée avec plusieurs familles de boules  $\mathcal{B}_i$ . Dans les cas qui nous intéressent (en particulier  $\mathbb{R}^n$ ), il nous suffit de considérer qu'une seule famille comme précédemment. Nous reviendrons plus tard sur ce point.

On fixe  $E$  et  $F$  deux continua non dégénérés dans  $X$ . Si  $\delta > 0$ , on définit le module discret de  $(E, F)$  par

$$\text{d-Mod}_p^\delta(E, F) = \inf \sum_{B \in \mathcal{B}} \rho(B)^p$$

où l'infimum est pris sur toutes les paires admissibles  $(\rho, \mathcal{B})$  telles que pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,  $\text{diam} B < \delta$  puis  $\text{d-Mod}_p(E, F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \text{d-Mod}_p^\delta(E, F)$ .

Le lien entre le module et le module discret est donné par le résultat suivant (voir la proposition 2.9 de [61]).

**Lemme 4.31.** Il existe une constante  $C \geq 1$  telle que pour tout couple de continua non dégénérés  $E$  et  $F$  de  $X$ ,

$$\text{Mod}_p(E, F) \leq C \text{d-Mod}_p(E, F).$$

Il existe une autre version du module discret qui amène à une version combinatoire de la propriété de Loewner. Le point est que cette version discrète ne nécessite pas d'avoir une mesure privilégiée. Soit  $(X, d)$  un espace métrique que l'on suppose compact. On se donne  $k \in \mathbb{N}$  et  $\tau \geq 1$ . Considérons un recouvrement  $\mathcal{R}$  de  $X$  tel que

- pour tout  $A \in \mathcal{R}$ , il existe  $z_A \in X$  tel que  $B(z_A, \tau^{-1}2^{-k}) \subset A \subset B(z_A, \tau 2^{-k})$  (c'est à dire  $A$  ressemble à une boule de rayon de l'ordre de  $2^{-k}$ ),
- si  $A, B \in \mathcal{R}$  avec  $A \neq B$ , alors  $B(z_A, \tau^{-1}2^{-k}) \cap B(z_B, \tau^{-1}2^{-k}) = \emptyset$ .

On associe à  $\mathcal{R}$  un graphe  $\mathcal{G} = (V, E)$  où l'ensemble des sommets  $V$  est formé des éléments de  $\mathcal{R}$  et deux sommets  $A, B$  de  $\mathcal{G}$  (c'est à dire deux éléments de  $\mathcal{R}$ ) sont reliés par une arête de  $E$  si  $A \cap B \neq \emptyset$ . La notion de graphe a été introduite dans la démonstration du théorème 2.117. Un tel graphe  $\mathcal{G}$  est appelé une  $\tau$ -approximation de  $X$  à l'échelle  $k$ . Une famille de graphes  $(\mathcal{G}_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une  $\tau$ -approximation de  $X$  si pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{G}_k$  est une  $\tau$ -approximation de  $X$  à l'échelle  $k$ .

Considérons maintenant une courbe  $\gamma$  de  $X$ . Si  $\rho : \mathcal{G}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$ , est une fonction définie sur le graphe  $\mathcal{G}_k$ , on définit pour  $p \geq 1$

- $L_\rho(\gamma) = \sum_A \rho(A)$  où la somme est prise sur tous  $A \in \mathcal{G}_k$  tels que  $A \cap \gamma \neq \emptyset$ . La quantité  $L_\rho(\gamma)$  s'appelle la  $\rho$ -longueur de  $\gamma$ .
- $M_p(\rho) = \sum_{A \in \mathcal{G}_k} \rho(A)^p$ . La quantité  $M_p(\rho)$  s'appelle la  $p$ -masse de  $\rho$ .

Soit  $\mathcal{F}$  une famille de courbes dans  $X$ . On définit le  $p$ -module combinatoire de  $\mathcal{F}$  par rapport à  $\mathcal{G}_k$  par

$$\text{Mod}_p(\mathcal{F}, \mathcal{G}_k) = \inf_\rho M_p(\rho)$$

où l'infimum est pris sur toutes les fonctions admissibles  $\rho : \mathcal{G}_k \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que pour toute courbe  $\gamma \in \mathcal{F}$ ,  $L_\gamma(\rho) \geq 1$ . Notons que dans cette définition, le fait que la courbe soit ou non rectifiable n'intervient pas. Nous laissons au lecteur de vérifier que  $\text{Mod}_p(\cdot, \mathcal{G}_k)$  a les mêmes propriétés que le module continu (voir [17]). De plus, si  $X$  est un espace doublant (au sens métrique), et si  $\mathcal{G}_k, \mathcal{G}'_k$  sont respectivement des  $\tau$ -approximation et  $\tau'$ -approximation de  $X$  à l'échelle  $k$  (pour des  $\tau$  et des  $\tau'$  différents), alors  $\text{Mod}_p(\cdot, \mathcal{G}_k)$  et  $\text{Mod}_p(\cdot, \mathcal{G}'_k)$  sont comparables, c'est à dire qu'il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$C^{-1} \text{Mod}_p(\cdot, \mathcal{G}_k) \leq \text{Mod}_p(\cdot, \mathcal{G}'_k) \leq C \text{Mod}_p(\cdot, \mathcal{G}_k).$$

La condition de Loewner combinatoire s'énonce de la même façon que précédemment. Soit  $(\mathcal{G}_k)$  une  $\tau$ -approximation de  $X$  et soit  $p \geq 1$ . On dit que  $X$  vérifie la propriété de Loewner combinatoire de dimension  $p$  s'il existe des fonctions positives, croissantes  $\phi, \psi : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que

$\lim_{t \rightarrow 0} \psi(t) = 0$  et pour tous les continua non dégénérés, disjoints  $E, F$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}$  avec  $2^{-k} \leq \min(\text{diam}(E), \text{diam}(F))$ ,

$$\phi(\Delta(E, F)) \leq \text{Mod}_p(E, F, \mathcal{G}_k) \leq \psi(\Delta(E, F)^{-1}).$$

Ici, comme dans le cas continu,  $\Delta(E, F)$  est la distance relative entre  $E$  et  $F$ ,  $\text{Mod}_p(E, F, \mathcal{G}_k) = \text{Mod}_p(\mathcal{F}(E, F), \mathcal{G}_k)$  où  $\mathcal{F}(E, F)$  est l'ensemble des courbes reliant  $E$  à  $F$ . Dans le cas où  $X$  est doublant, cette définition ne dépend pas de l'approximation  $(\mathcal{G}_k)$ . Les espaces métriques qui vérifient la propriété de Loewner combinatoire (pour un  $p > 1$ ) vérifient des propriétés géométriques comme la propriété LLC. Voir l'exercice 4.159.

Un espace de Loewner de dimension  $Q$  vérifie la propriété de Loewner combinatoire de dimension  $Q$ . La réciproque est fautive (pour le voir, considérer le tapis de Sierpinski). Nous renvoyons pour plus de détails à [17] dans lequel on trouvera des applications à la théorie géométrique des groupes.

## 2.4 Persistance des inégalités de Poincaré sous la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée

Soit  $\{(X_i, d_i, \mu_i)\}$  une suite d'espaces métriques mesurés qui vérifient des inégalités de Poincaré. Le but de ce paragraphe est de montrer que si cette suite converge en un sens approprié vers un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$ , alors (modulo des hypothèses sur les espaces),  $(X, d, \mu)$  vérifie des inégalités de Poincaré. Nous expliquerons des motivations venant de la géométrie pour ce type de résultat à la fin de la section. Nous commençons par des rappels sur la convergence des espaces métriques (pointés, mesurés). Cette partie est inspirée de [64] dans lequel le lecteur trouvera (beaucoup) plus de détails.

**Définition 4.32.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. Si  $\varepsilon > 0$  et  $A \subset X$ , on définit le  $\varepsilon$ -voisinage de  $A$  dans  $X$  par

$$A_\varepsilon = \{x \in X; d(x, A) < \varepsilon\} = \bigcup_{a \in A} B(a, \varepsilon).$$

Si  $A$  et  $B$  sont deux sous-ensembles, on définit leur distance de Hausdorff dans  $X$  par

$$d_H(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0; A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$

Ceci définit une distance sur l'ensemble des compacts de  $X$ . Nous voulons maintenant mesurer la distance entre deux espaces métriques qui ne sont pas contenus a priori dans un même espace métrique. Nous allons proposer plusieurs définitions d'une telle convergence. Le lecteur doit se convaincre que (modulo des hypothèses techniques que nous ne précisons pas) ces définitions sont équivalentes. L'idée fondamentale est de plonger tous les espaces concernés dans un même "gros" espace.

Une première idée est d'utiliser le théorème de plongement élémentaire suivant. Tout espace métrique séparable  $(X, d)$  se plonge isométriquement dans  $l^\infty(\mathbb{N})$ . Pour voir cela, prendre une famille dense dénombrable  $(x_i)$  de  $X$  et considérer l'application  $F$  de  $X$  dans  $l^\infty(\mathbb{N})$  donnée par  $F(x) = (u_n(x))$  où  $u_n(x) = d(x, x_n) - d(x_n, x_0)$ . On notera  $d_H^\infty$  la distance de Hausdorff dans  $l^\infty(\mathbb{N})$ . On supposera dans la suite que tous les espaces sont séparables.

**Définition 4.33.** Si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces métriques (séparables), on pose

$$d_{GH}(X, Y) = \inf d_H^\infty(I(X), J(Y))$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques  $I : X \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$  et  $J : Y \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$ .

Notons que de tels plongements existent toujours d'après ce qui précède. On dira que la suite d'espaces métriques  $\{(X_j, d_j)\}$  converge au sens de Gromov-Hausdorff vers l'espace métrique  $(X, d)$ , et on note  $(X_j, d_j) \xrightarrow{GH} (X, d)$ , si  $\lim_{j \rightarrow +\infty} d_{GH}(X_j, X) = 0$ . On peut vérifier que  $d_{GH}$  satisfait l'inégalité triangulaire mais le problème est que  $d_{GH}$  ne définit pas une distance sur l'ensemble des espaces métriques séparables puisqu'il peut arriver que  $d_{GH}(X, Y) = \infty$ . De plus, la condition  $d_{GH}(X, Y) = 0$  implique que  $X$  et  $Y$  sont en général isométriques mais non égaux. Ceci motive les définitions suivantes. On dit que deux espaces métriques compacts  $(K_1, d_1)$  et  $(K_2, d_2)$  sont équivalents s'il existe une isométrie  $I : K_1 \rightarrow K_2$ . On définit ainsi une relation d'équivalence sur les espaces métriques compacts. On note  $\mathcal{C}$  l'ensemble des classes d'équivalence pour cette relation. On a alors le résultat fondamental suivant (que nous n'utiliserons pas).

**Théorème 4.34.** 1) La distance de Gromov-Hausdorff  $d_{GH}$  définit une distance sur  $\mathcal{C}$ . De plus, l'espace métrique  $(\mathcal{C}, d_{GH})$  est complet et séparable.

2) Toute famille  $\mathcal{F}$  uniformément compacte d'espaces métriques est précompacte pour la distance de Gromov-Hausdorff, c'est à dire toute suite de  $\mathcal{F}$  admet une sous-suite convergente (théorème de pré-compactité de Gromov).

On rappelle qu'une famille  $\mathcal{F}$  d'espaces métriques compacts est uniformément compacte s'il existe une constante  $C > 0$  et une fonction  $N : ]0, +\infty[ \rightarrow ]0, +\infty[$  telle que pour tout espace  $X$  de la famille  $\mathcal{F}$ , on a

- (i)  $\text{diam} X \leq C$ ;
- (ii) Pour tout  $\varepsilon > 0$ , on peut recouvrir  $X$  par au plus  $N(\varepsilon)$  boules de rayon  $\varepsilon$ .

Ainsi, la distance de Gromov-Hausdorff est bien adaptée pour l'ensemble des espaces compacts. Pour considérer des familles plus générales d'espaces, nous devons introduire la notion d'espace pointé.

**Définition 4.35.** Un espace métrique pointé  $(X, d, p)$  est la donnée d'un espace métrique  $(X, d)$  et d'un point-base  $p \in X$  (une origine).

Avant de donner une notion de convergence d'espaces métriques dans un cadre général, nous allons la motiver par la caractérisation suivante de la convergence au sens de Gromov-Hausdorff. Avant cela, donnons une définition. Soit  $\varepsilon > 0$ . On dit que  $A \subset X$  est un  $\varepsilon$ -réseau de  $X$  ou est  $\varepsilon$ -dense dans  $X$  si  $\cup_{x \in A} B(x, \varepsilon) = X$  (ou de façon équivalente, le  $\varepsilon$ -voisinage  $A_\varepsilon$  de  $A$  est  $X$ ).

**Proposition 4.36.** Soient  $X, X_1, X_2, \dots$  des espaces métriques compacts. La suite  $\{(X_i, d_i)\}$  converge vers  $(X, d)$  au sens de Gromov-Hausdorff si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe des  $\varepsilon$ -réseaux finis  $A_i \subset X_i$  et  $A \subset X$  tels que la suite  $\{(A_i, d_i)\}$  converge vers  $(A, d)$  au sens de Gromov-Hausdorff.

La preuve du résultat précédent est laissée en exercice. Cela nous amène à la définition suivante.

**Définition 4.37.** Une suite  $\{(X_j, d_j, p_j)\}$  d'espaces métriques pointés converge vers un espace métrique pointé  $(X, d, p)$  si pour tout  $R > 0$  et tout  $0 < \varepsilon < R$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$ , un sous-ensemble  $M$  de  $X$ , des sous-ensembles  $M_j$  de  $X_j$  et des bijections  $f_j : M_j \rightarrow M$  telles que pour tout  $j \geq N$ , nous avons

- (i)  $p \in M, p_j \in M_j$  et  $f_j(p_j) = p$ .
- (ii) L'ensemble  $M$  est  $\varepsilon$ -dense dans la boule  $B(p, R)$  de  $X$  et les ensembles  $M_j$  sont  $\varepsilon$ -denses dans les boules  $B(p_j, R)$  de  $X_j$ .
- (iii)  $|d_j(x, y) - d(f_j(x), f_j(y))| < \varepsilon$  pour tout  $x, y$  dans  $M_j$ .

Comme nous considérons des discrétisations à l'échelle  $\varepsilon$ , il nous suffit d'utiliser des isométries  $f_j$  à  $\varepsilon$  près au lieu de vraie isométrie. Le fait de prendre des espaces métriques pointés permet de travailler sur les boules centrées (pour tous les rayons) sur le point-base, et donc de (presque) se ramener au cas compact.

On peut donner une autre définition du même type sans parler de  $\varepsilon$ -réseau.

**Définition 4.38.** Une suite  $\{(X_j, d_j, p_j)\}$  d'espaces métriques pointés converge vers un espace métrique pointé  $(X, d, p)$  si pour tout  $R > 0$  et tout  $0 < \varepsilon < R$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$ , tel que pour tout  $j \geq N$ , il existe des applications  $f_j : B(p_j, R) \rightarrow X$  avec

- (i)  $f_j(p_j) = p$ .
- (ii) Pour tout  $x, y \in B(p_j, R)$ ,  $|d(f_j(x), f_j(y)) - d_j(x, y)| < \varepsilon$ .
- (iii)  $B(p, R - \varepsilon)$  est contenu dans l' $\varepsilon$ -voisinage de  $f_j(B(p_j, R))$ .

Nous allons utiliser un autre théorème de plongement pour définir une notion équivalente de convergence d'espaces métriques pointés. Rappelons que, si  $(X, d)$  est un espace métrique doublant, le théorème de plongement d'Assouad nous dit que, pour tout  $\alpha \in ]0, 1[$ , l'espace métrique  $(X, d^\alpha)$  admet un plongement bilipschitzien dans un espace euclidien (voir théorème 1.117). Cette définition (moins classique que les précédentes) est tirée de [36].

**Définition 4.39.** Nous dirons que les espaces métriques pointés  $(X_j, d_j, p_j)$  (que l'on suppose doublants et complets) convergent vers l'espace métrique pointé  $(X, d, p)$  s'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $K > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  tels que

- (i) Il existe des plongements bilipschitziens (de constante  $K$ )  $f_j : (X_j, d_j^\alpha) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}})$  et  $f : (X, d^\alpha) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}})$  avec  $f_j(p_j) = f(p) = 0$ .
- (ii) Les ensembles  $f_j(X_j)$  convergent vers  $f(X)$  au sens où

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{x \in f_j(X_j) \cap B(0, R)} d_{\text{eucl}}(x, f(X)) = 0,$$

et

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{x \in f(X) \cap B(0, R)} d_{\text{eucl}}(x, f_j(X_j)) = 0,$$

pour tout  $R > 0$ .

- (iii) La fonction  $d_j(f_j^{-1}(x), f_j^{-1}(y))$  de  $f_j(X_j) \times f_j(X_j)$  dans  $\mathbb{R}$  converge vers  $d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$  sur  $f(X) \times f(X)$  au sens où, pour tout choix de  $x$  et  $y$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} d_j(f_j^{-1}(x), f_j^{-1}(y)) = d(f^{-1}(x), f^{-1}(y))$ .

Il est intéressant de noter que si les  $(X_j, d_j, p_j)$  sont des espaces métriques pointés (complets et doublants, avec des constantes de doublement uniformément bornées), et si nous fixons  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $K > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ainsi qu'une famille de plongement  $K$ -bilipschitziens  $f_j : (X_j, d_j^\alpha) \rightarrow (\mathbb{R}^n, d_{\text{eucl}})$  avec  $f_j(p_j) = 0$ , alors il existe une sous-suite de  $(X_j, d_j, p_j)$  qui converge au sens précédent vers un espace métrique pointé  $(X, d, p)$ . Voir [36] pour une discussion détaillée.

On veut maintenant donner une notion de convergence pour les espaces métriques mesurés.

**Définition 4.40.** On dit que la suite d'espaces métriques mesurés compacts  $\{(K_j, d_j, \mu_j)\}$  converge vers l'espace métrique mesuré compact  $(K, d, \mu)$  s'il existe des plongements isométriques  $I_j : X_j \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$  et  $I : X \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$  tels que  $d_H^\infty(I_j(X_j), I(X)) \rightarrow 0$  et  $\{(I_j)_\# \mu_j\}$  converge faiblement vers  $I_\# \mu$  dans l'espace des mesures sur  $X$ .

Ici,  $I_\# \mu$  est la mesure image de  $\mu$  par  $I$ , c'est à dire pour tout  $A \subset l^\infty(\mathbb{N})$ ,  $I_\# \mu(A) = \mu(I^{-1}(A))$ . Revenons au cas général des espaces métriques séparables.

**Définition 4.41.** On dit que la suite d'espaces de longueur mesurés propres  $\{(X_j, d_j, \mu_j, p_j)\}$  converge au sens de Hausdorff-Gromov mesuré vers l'espace métrique mesuré propre  $(X, d, \mu, p)$  si



$\{(X_j, d_j, p_j)\}$  converge vers  $(X, d, p)$  au sens de la définition 4.37 et si la suite d'espaces mesurés compacts  $\{(B_f(p_j, r), d_j, \mu_j)\}$  converge vers l'espace mesuré compact  $\{(B_f(p, r), d, \mu)\}$  au sens de la définition précédente (dans  $l^\infty(\mathbb{N})$ ) pour tout  $r > 0$ .

Ici, on suppose que les espaces sont propres de sorte que les boules fermées soient compactes. La condition d'être un espace de longueur permet de rendre rigoureuse la notion précédente de convergence. D'autre part,  $X$  est aussi un espace de longueur comme limite d'espaces de longueur (voir la discussion après la définition 10.4.5 dans [64]). On rappelle que l'espace métrique  $(X, d)$  est un espace de longueur si pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $X$ ,  $d(x, y) = \inf l(\gamma)$  où l'infimum est pris sur toutes les courbes rectifiables  $\gamma$  de  $X$  reliant  $x$  et  $y$ . Un espace géodésique est de longueur, sans réciproque (considérer  $\mathbb{R}^2$  privé de l'origine et muni de la distance euclidienne induite).

Nous aurons besoin du résultat technique suivant (mais qui est crucial).

**Lemme 4.42.** Soit  $(X, d)$  un espace de longueur qui est contenu dans un espace géodésique  $Z$ . Soient  $u$  et  $\rho$  des fonctions lipschitziennes bornées sur  $X$  telles que  $\inf_X \rho > 0$  et  $\rho$  est un gradient supérieur de  $u$ . Alors, pour tout  $\delta \in ]0, 1]$ , il existe des fonctions lipschitziennes  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\rho}$  sur  $Z$  qui sont des extensions sur  $Z$  de  $u$  et  $\rho$  respectivement telles que  $\tilde{\rho}$  est bornée et  $(1 + \delta)\tilde{\rho}$  est un gradient supérieur de  $\tilde{u}$  dans  $Z$ .

*Démonstration.* Nous allons diviser la preuve en 3 étapes.

1) On commence par étendre  $\rho$  en une fonction lipschitzienne bornée  $\rho_1 : Z \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $|u(x) - u(y)| \leq (1 + \delta) \int_\gamma \rho_1 ds$  dès que  $x, y \in X$ , pour toute courbe rectifiable  $\gamma \subset X_\varepsilon \subset Z$  joignant  $x$  à  $y$ . Ici,  $\varepsilon > 0$  est une constante assez petite à choisir et  $X_\varepsilon$  est le  $\varepsilon$ -voisinage de  $X$  dans  $Z$ . Pour cela, on note  $K$  la constante de Lipschitz de  $\rho$  et on pose pour  $z \in Z$ ,  $\tilde{\rho}_1(z) = \inf_{x \in X} (\rho(x) + Kd(x, z))$ . On obtient ainsi (voir la démonstration du théorème 2.90) une extension lipschitzienne de  $\rho$  sur  $Z$ . L'idée pour la rendre bornée est de la tronquer et pour cela, on pose  $\rho_1(z) = \max(\inf_X \rho, \min(\tilde{\rho}_1(z), \sup_X \rho))$ . Ainsi, pour tout  $z \in Z$ ,  $\inf_X \rho \leq \rho_1(z) \leq \sup_X \rho$  et pour tout  $x \in X$ ,  $\rho_1(x) = \rho(x)$ . La fonction  $\rho_1$  est lipschitzienne. Notons que si  $z_0 \in Z$  et si  $r > 0$ , on a pour tous  $z, z' \in Z \cap B(z_0, r)$ ,  $|\rho_1(z) - \rho_1(z')| \leq 2Kr$  car  $\rho_1$  est  $K$ -lipschitzienne. On en déduit puisque  $\rho_1$  est positive que

$$\sup_{z \in B(z_0, r)} \rho_1(z) - \inf_{z \in B(z_0, r)} \rho_1(z) \leq 2Kr$$

et donc pour tout  $z_0 \in Z$  et tout  $r > 0$ ,

$$\frac{\sup_{B(z_0, r)} \rho_1}{\inf_{B(z_0, r)} \rho_1} \leq 1 + \frac{2K}{\inf_X \rho} r. \quad (4.43)$$

Nous utilisons ici que par hypothèse  $\inf_X \rho \neq 0$ . Soit  $\eta$  assez petit par rapport à  $\delta$  (le choix sera précisé au cours de la démonstration) et posons  $\varepsilon = 1/2\eta^2$ . Prenons maintenant  $x, y \in X$  et  $\gamma \subset X_\varepsilon$  une courbe rectifiable joignant  $x$  à  $y$  dans  $Z$ .

*Cas 1.* La longueur de  $\gamma$  est  $< \eta$ . Comme  $X$  est un espace de longueur, il existe une courbe  $\beta$  dans  $X$  joignant  $x$  à  $y$  de longueur  $< (1 + \delta/3)d(x, y) \leq (1 + \delta/3)l(\gamma) < 2\eta$ . On a alors puisque  $\rho$  est un

gradient supérieur de  $u$  sur  $X$  que  $|u(x) - u(y)| \leq \int_{\beta} \rho ds$ . Or, comme  $\beta \subset B(x, 2\eta)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_{\beta} \rho ds &= \int_{\beta} \rho_1 ds \\ &\leq \left( \sup_{B(x, 2\eta)} \rho_1 \right) l(\beta) \\ &\leq \left( \sup_{B(x, 2\eta)} \rho_1 \right) (1 + \delta/3) d(x, y) \\ &\leq \left( \sup_{B(x, 2\eta)} \rho_1 \right) (1 + \delta/3) l(\gamma). \end{aligned}$$

De plus,  $\gamma \subset B(x, \eta)$  et donc  $\int_{\gamma} \rho_1 ds \geq \left( \inf_{B(x, \eta)} \rho_1 \right) l(\gamma)$ . D'après (4.43), il s'en suit que

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq \int_{\beta} \rho ds \leq \left( \sup_{B(x, 2\eta)} \rho_1 \right) (1 + \delta/3) l(\gamma) \\ &\leq \left( 1 + \frac{4K\eta}{\inf_X \rho} \right) \left( \inf_{B(x, 2\eta)} \rho_1 \right) (1 + \delta/3) l(\gamma) \\ &\leq \left( 1 + \frac{4K\eta}{\inf_X \rho} \right) (1 + \delta/3) \int_{\gamma} \rho_1 ds \\ &\leq (1 + \delta) \int_{\gamma} \rho_1 ds \text{ (si } \eta \text{ est choisi assez petit par rapport à } \delta). \end{aligned}$$

*Cas 2.* La longueur de  $\gamma$  vérifie  $l(\gamma) \geq \eta$ . L'idée naturelle est de se ramener au cas précédent en décomposant  $\gamma$  en "petits morceaux". Pour cela, on écrit  $\gamma = \cup_{i=1}^N \gamma_i$  où les  $\gamma_i$  sont des courbes disjointes (sauf en leurs extrémités) telles que  $\eta/2 \leq l(\gamma_i) < \eta$  pour tout  $i = 1, \dots, N$ . De plus, pour  $i = 1, \dots, N$ , on peut noter  $z_i^1$  et  $z_i^2$  les extrémités de  $\gamma_i$  de sorte que  $z_i^2 = z_{i+1}^1$  (pour  $i = 1, \dots, N-1$ ). Comme  $\gamma \subset X_\varepsilon$ , on peut trouver des points  $x_i^1, x_i^2 \in X$  tels que  $x = x_1^1, y = x_N^2, x_i^2 = x_{i+1}^1$  et  $d(x_i^1, z_i^1) < \varepsilon$ . Comme au-dessus, on prend des courbes  $\beta_i$  dans  $X$  qui joignent  $x_i^1$  à  $x_i^2$  avec  $l(\beta_i) \leq (1 + \delta/3) d(x_i^1, x_i^2)$  pour tout  $i$ . On pose  $\beta = \cup_i \beta_i$ . On a alors  $|u(x) - u(y)| \leq \int_{\beta} \rho ds$ . Pour conclure, il suffit de voir que  $\int_{\beta} \rho ds \leq (1 + \delta) \int_{\gamma} \rho_1 ds$  ou encore pour tout  $i$ ,  $\int_{\beta_i} \rho ds \leq (1 + \delta) \int_{\gamma_i} \rho_1 ds$ . Pour cela, on raisonne comme avant. Notons que pour tout  $i$ ,

$$\begin{aligned} d(x_i^1, x_i^2) &\leq d(z_i^1, z_i^2) + 2\varepsilon \text{ (par choix des } z_i^1, z_i^2) \\ &\leq l(\gamma_i) + \eta^2 \text{ (par choix de } \varepsilon) \\ &\leq (1 + 2\eta) l(\gamma_i) \text{ (par choix de } \gamma_i) \\ &\leq (1 + 2\eta) \eta \text{ (par choix de } \gamma_i). \end{aligned}$$

On a donc  $\beta_i \subset B(x_i^1, (1 + \delta/3) d(x_i^1, x_i^2)) \subset B(x_i^1, 2\eta)$  si  $\eta \leq \delta/6$ . On a alors comme précédemment pour tout  $i$

$$\int_{\beta_i} \rho ds \leq \left( \sup_{B(x_i^1, 2\eta)} \rho_1 \right) (1 + \delta/3) (1 + 2\eta) l(\gamma_i)$$

puis comme  $\gamma_i \subset B(z_i^1, \eta) \subset B(x_i^1, 2\eta)$ , on a

$$\int_{\gamma_i} \rho_1 ds \geq \left( \inf_{B(x_i^1, 2\eta)} \rho_1 \right) l(\gamma_i).$$

On en déduit si  $\eta$  est choisi assez petit par rapport à  $\delta$  que

$$\int_{\beta_i} \rho ds \leq \left(1 + \frac{4K\eta}{\inf_X \rho}\right) (1 + \delta/3)(1 + 2\eta) \int_{\gamma_i} \rho_1 ds \leq (1 + \delta) \int_{\gamma_i} \rho ds.$$

2) On étend  $\rho_1$  en une fonction lipschitzienne  $\tilde{\rho}$  sur  $Z$  telle que pour tout  $x, y \in X$ , toute courbe rectifiable joignant  $x$  à  $y$  dans  $Z$ ,

$$|u(x) - u(y)| \leq (1 + \delta) \int_{\gamma} \tilde{\rho} ds.$$

Pour cela, on pose  $osc_X u = \sup\{|u(x) - u(y)|, x, y \in X\}$ . Comme  $u$  est bornée,  $osc_X$  est fini. Soit  $h(z) = \frac{2osc_X u}{\varepsilon} \min\left(1, \frac{d(z, X_{\varepsilon/4})}{d(Z \setminus X_{\varepsilon/2}, X_{\varepsilon/4})}\right)$ . Alors,  $h$  est positive, lipschitzienne, nulle sur  $X_{\varepsilon/4}$  et vaut  $2\frac{osc_X u}{\varepsilon}$  sur  $Z \setminus X_{\varepsilon/2}$ . Alors,  $\tilde{\rho} = \rho_1 + h$  convient. En effet, soit  $\gamma$  une courbe rectifiable joignant  $x, y \in X$  dans  $Z$ . Si  $\gamma \subset X_{\varepsilon}$ , alors on peut conclure en utilisant l'étape 1. Si on suppose que  $\gamma$  rencontre  $Z \setminus X_{\varepsilon}$ , alors on a

$$\int_{\gamma} \tilde{\rho} ds \geq \frac{2osc_X u}{\varepsilon} l(\gamma \cap (X_{\varepsilon} \setminus X_{\varepsilon/2})) \geq osc_X u \geq |u(x) - u(y)|.$$

3) Il reste à étendre  $u$  en une fonction lipschitzienne  $\tilde{u}$  sur  $Z$  telle que  $|\tilde{u}(z) - \tilde{u}(z')| \leq \int_{\gamma} \tilde{\rho} ds$  pour toute courbe rectifiable  $\gamma$  joignant  $z$  à  $z'$  dans  $Z$ . Pour cela, on pose  $\tilde{u}(z) = \inf\left((1 + \delta) \int_{\gamma} \tilde{\rho} ds + u(x)\right)$  où l'infimum est pris sur tous les  $x \in X$  et toutes les courbes  $\gamma$  joignant  $x$  à  $z$  dans  $Z$ . Notons que l'on peut toujours joindre  $x$  à  $z$  par un segment géodésique de  $Z$ . Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que  $\tilde{u}$  convient.  $\square$

Le résultat principal du paragraphe est le suivant :

**Théorème 4.44.** *Soit  $\{(X_j, d_j, a_j, \mu_j)\}$  une suite d'espaces de longueur mesurés complets qui converge au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée vers un espace mesuré complet  $(X, d, a, \mu)$  et soit  $1 \leq p < \infty$ . Supposons que toutes les mesures  $\mu_j$  sont doublantes de constante  $C_D$  et que tous les espaces  $(X_j, d_j, \mu_j)$  vérifient une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$  avec des constantes  $C_{IP}$  et  $\tau \geq 1$ . Alors,  $(X, d, \mu)$  vérifie une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$ .*

*Démonstration.* Il existe des plongements isométriques  $I_j : X_j \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$  et  $I : X \rightarrow l^\infty(\mathbb{N})$  telles que pour tout  $R > 0$ ,  $\lim_{j \rightarrow +\infty} d_H^\infty(I_j(B_f(p_i, R)), I(B_f(p, R))) = 0$  et la suite de mesures  $(I_j)_\# \mu$  converge faiblement vers  $I_\# \mu$  dans  $l^\infty(\mathbb{N})$ . Considérons une boule  $B = B(x, R)$  dans  $X$ . Pour démontrer l'inégalité de Poincaré  $(1, p)$  dans  $X$ , il suffit de considérer le cas d'une fonction  $u$  lipschitzienne et bornée avec un gradient supérieur  $\rho$  lui-même lipschitzien et borné (voir la remarque 4.12, point 3). Via les plongements isométriques  $I$  et  $I_j$ , on peut voir les fonctions  $u$  et  $\rho$  comme des fonctions sur  $l^\infty(\mathbb{N})$ . Pour ne pas alourdir les notations, nous les appellerons aussi  $u$  et  $\rho$ . On se donne un  $0 < \delta < 1$ . On peut alors appliquer le lemme précédent à  $u$  et  $\rho + \delta/2$ . Nous obtenons alors des extensions  $\tilde{u}$  et  $\tilde{\rho}$  de ces fonctions dans  $l^\infty$  telles que  $(1 + \delta)\tilde{\rho}$  est un gradient supérieur de  $\tilde{u}$ . Considérons maintenant une suite de points  $x_j \in X_j$  telle que  $I_j(x_j)$  converge vers  $I(x)$  dans  $l^\infty(\mathbb{N})$ . On notera  $B^\infty = B(I(x), R)$  et  $B_j^\infty(I_j(x_j), R)$  les boules dans  $l^\infty(\mathbb{N})$  de centres respectifs  $I(x)$  et  $I_j(x_j)$ , de rayon  $R$ . Notons qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que si  $j \geq N$ , on a  $2B^\infty \subset 4B_j^\infty \subset 6B^\infty$  et  $2\tau B^\infty \subset 4\tau B_j^\infty \subset 6\tau B^\infty$ . Nous

pouvons maintenant appliquer l'inégalité de Poincaré dans  $X_j$  pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_{2B^\infty} |\tilde{u} - \tilde{u}_{4B_j^\infty}| d((I_j)_\# \mu_j) &\leq C_{DV} \int_{4B_j^\infty} |\tilde{u} - \tilde{u}_{4B_j^\infty}| d((I_j)_\# \mu_j) \\
&\leq C_{IP} C_{DV} \text{diam} B \left( \int_{4\tau B_j^\infty} (1 + \delta)^p \tilde{\rho}^p d((I_j)_\# \mu_j) \right)^{1/p} \\
&\leq C_{IP} C_{DV}^2 \text{diam} B \left( \int_{6\tau B^\infty} (1 + \delta)^p \tilde{\rho}^p d((I_j)_\# \mu_j) \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Or, quitte à passer à une sous-suite, la suite  $(\tilde{u}_{4B_j^\infty})$  converge vers un  $\alpha \in \mathbb{R}$ , puisque  $\tilde{u}$  est continue et  $X_j$  est propre pour tout  $i$ . Il vient alors en utilisant la convergence faible (voir remarque ci-dessous) et le fait que  $\mu$  est doublante,

$$\begin{aligned}
\int_{B^\infty} |\tilde{u} - \alpha| d((I)_\# \mu) &\leq \frac{1}{(I)_\# \mu(B^\infty)} \int_{2B_j^\infty} |\tilde{u} - \alpha| d((I)_\# \mu) \\
&\leq C \liminf_j \int_{2B_j^\infty} |\tilde{u} - \tilde{u}_{4B_j^\infty}| d((I_j)_\# \mu) \\
&\leq C \text{diam} B \left( \limsup_j \left( \int_{6\tau B^\infty} (1 + \delta)^p \tilde{\rho}^p d((I_j)_\# \mu) \right)^{1/p} \right) \\
&\leq C \text{diam} B \left( \int_{7\tau B^\infty} (1 + \delta)^p \tilde{\rho}^p d((I)_\# \mu) \right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient alors

$$\int_{B^\infty} |\tilde{u} - \alpha| d((I)_\# \mu) \leq C \text{diam} B \left( \int_{7\tau B^\infty} \tilde{\rho}^p d((I)_\# \mu) \right)^{1/p}.$$

Or, par inégalité triangulaire, on a  $\int_B |u - u_B| d\mu \leq 2 \int_B |u - \alpha| d\mu$ . Donc, par changement de variable, on obtient

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq C \text{diam} B \left( \int_{7\tau B^\infty} \rho^p d\mu \right)^{1/p}.$$

□

**Remarque 4.45.** On a utilisé le fait que si la suite de mesure  $(\mu_i)$  converge faiblement vers la mesure  $\mu$  sur un espace métrique  $X$ , alors pour toute fonction continue positive  $u$ , on a  $\int_K u d\mu \leq \liminf_i \int_W u d\mu_i$  où  $K$  est compact inclus dans un ensemble borné  $W$  avec  $d(K, X \setminus W) > 0$ . Ceci est une conséquence de la proposition 2.50.

Terminons par une motivation venant de la géométrie. Soit  $(M_j, g_j)$  une suite de variétés riemanniennes complètes de dimension  $n$ . On munit chaque  $M_j$  de sa distance  $d_{g_j}$  et de son volume  $\text{vol}_{g_j}$  riemanniens. Supposons que cette suite converge au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff mesurée. L'espace limite  $X$  est un espace de longueur mais n'est pas en général une variété riemannienne. Supposons de plus que toutes les variétés  $M_j$  soient de courbure de Ricci positives. Alors, les espaces mesurés  $(M_j, d_{g_j}, \text{vol}_{g_j})$  sont doublants et vérifient des inégalités de Poincaré avec des constantes indépendantes de  $j$  (nous reviendrons plus tard là-dessus). Il en résulte que l'espace limite  $X$  admet des inégalités de Poincaré et donc que l'on peut faire de l'analyse dessus (voir le théorème 4.109 par exemple). Nous renvoyons à [27] pour plus de détails.

## 2.5 Inégalité de Poincaré et quasiconvexité

Le but principal du paragraphe est de démontrer le résultat suivant.

**Théorème 4.46.** *Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. Supposons que  $(X, d)$  est complet, que la mesure  $\mu$  est doublante et que  $(X, d, \mu)$  supporte une inégalité de Poincaré de type  $(1, p)$  pour un  $p \geq 1$ . On suppose en outre que tout couple de points de  $X$  peut être joint par une courbe rectifiable dans  $X$ . Alors, l'espace métrique  $(X, d)$  est quasiconvexe.*

Rappelons qu'un espace métrique  $(X, d)$  est quasiconvexe s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que toute paire de points  $(x, y) \in X \times X$  peut être reliée par une courbe  $\gamma$  de  $X$  dont la longueur est inférieure à  $Cd(x, y)$ . Nous avons déjà démontré qu'un espace de Loewner est quasiconvexe en utilisant le contrôle des modules de familles de courbes. Le résultat précédent montre que l'on aurait pu aussi utiliser la caractérisation des espaces de Loewner par les inégalités de Poincaré. Notons que les arguments utilisés pour démontrer ces deux théorèmes sont très différents.

*Démonstration.* Notons que  $X$  est propre puisque  $X$  est doublant et complet (voir la proposition 1.106). La preuve est divisée en 4 étapes.

*Etape 1.* On commence par montrer que  $X$  est  $\varepsilon$ -connecté pour tout  $\varepsilon > 0$ , c'est à dire pour toute paire de points  $(x, y)$  de  $X$ , il existe une collection finie de points  $x = x_0, x_1, \dots, x_N = y$  telle que  $d(x_j, x_{j+1}) \leq \varepsilon, \forall j = 0, \dots, N - 1$ . La famille  $x_0, \dots, x_N$  est appelée une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $x$  à  $y$ . Pour démontrer cela, on définit la relation  $x \sim y$  si et seulement si il existe une  $\varepsilon$ -chaîne de  $x$  vers  $y$ . Il est clair que cette relation est une relation d'équivalence. Notre but est donc de démontrer qu'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence. Pour cela, raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe  $x, y$  dans  $X$  qui sont dans deux classes d'équivalence distinctes. Posons  $\phi_\varepsilon(z) = 1$  s'il existe une  $\varepsilon$ -chaîne joignant  $x$  à  $z$  et  $\phi_\varepsilon(z) = 0$  sinon (en d'autres termes  $\phi_\varepsilon$  est la fonction caractéristique de la classe d'équivalence de  $x$ ). Alors,  $\phi_\varepsilon(z) = 1, \forall z \in B(x, \varepsilon)$  et  $\phi_\varepsilon(z) = 0, \forall z \in B(y, \varepsilon)$ . Pour voir cela, noter que si  $z \in B(w, \varepsilon)$ , alors  $z \sim w$ . Voyons maintenant que  $\rho = 0$  est un gradient supérieur de  $\phi_\varepsilon$ . En effet, considérons une courbe rectifiable  $\gamma$  joignant  $z$  et  $z'$  dans  $X$ . Alors, il existe une  $\varepsilon$ -chaîne (contenue dans  $\gamma$ ) entre  $z$  et  $z'$ . D'où,  $\phi_\varepsilon(z) = \phi_\varepsilon(z')$  et

$$|\phi_\varepsilon(z) - \phi_\varepsilon(z')| = 0 = \int_\gamma 0 ds.$$

En appliquant l'inégalité de Poincaré à  $\phi_\varepsilon$  sur  $B(x, R)$  où  $R = d(x, y) + \varepsilon$ , on obtient

$$\int_{B(x, R)} \left| \phi_\varepsilon - \int_{B(x, R)} \phi_\varepsilon d\mu \right| d\mu = 0.$$

Cependant,  $\phi_\varepsilon = 1$  sur  $B(x, \varepsilon)$  et  $\int_{B(x, R)} \phi_\varepsilon < 1$  puisque  $\phi_\varepsilon = 0$  sur  $B(y, \varepsilon)$ . Ceci implique que

$$\int_{B(x, R)} \left| \phi_\varepsilon - \int_{B(x, R)} \phi_\varepsilon d\mu \right| d\mu > 0.$$

Nous obtenons donc une contradiction et la première étape est finie.

*Etape 2.* Pour tout  $\varepsilon > 0$ , posons pour  $x, y \in X, d_\varepsilon(x, y) = \inf \sum_{j=0}^{N-1} d(z_j, z_{j+1})$  où l'infimum est pris sur toutes les  $\varepsilon$ -chaines  $z_0, \dots, z_N$  reliant  $x$  à  $y$ . Cette définition a bien un sens d'après la première étape. Considérons alors  $d_0(x, y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon(x, y) = \sup_{\varepsilon \rightarrow 0} d_\varepsilon(x, y)$ . Il est naturel de penser que  $d_0$  est une distance sur  $X$ . Le problème est qu'il n'est pas clair que  $d_0(x, y) < \infty$ . Dans cette étape, nous allons supposer que c'est le cas. Alors, il existe une courbe rectifiable  $\gamma$  joignant  $x$  à  $y$  dans  $X$  de sorte que

$l(\gamma) = d_0(x, y)$  (où la longueur  $l$  est par rapport à la distance  $d$ ). Pour voir cela, posons  $L = d_0(x, y)$  (qui est fini par hypothèse) et pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , choisissons une  $1/n$ -chaîne  $(z_i^n)_{0 \leq i \leq k_n}$  joignant  $x$  à  $y$  telle que

$$D(z_0^n, \dots, z_{k_n}^n) =: \sum_{i=0}^{k_n-1} d(z_i^n, z_{i+1}^n) \in ]L - 1/n, L + 1/n[.$$

Définissons maintenant  $\gamma_n : [0, L] \rightarrow X$  par  $\gamma_n(t) = z_i^n$  où  $i = \sup\{j, D(z_0^n, \dots, z_j^n) \leq t\}$ . Nous affirmons qu'alors

$$d(\gamma_n(t), \gamma_n(t')) \leq |t - t'| + 1/n. \quad (4.47)$$

En effet, supposons sans perte de généralité que  $t < t'$ . Alors,

$$\begin{aligned} d(\gamma_n(t), \gamma_n(t')) &\leq D(\gamma_n(t), \dots, \gamma_n(t')) \\ &\leq |t - t'| + 1/n \end{aligned}$$

puisque par définition de  $\gamma_n$ ,  $D(z_0, \dots, \gamma_n(t)) + 1/n > t$  et donc  $t - 1/n < D(z_0, \dots, \gamma_n(t)) \leq t$ . En utilisant le procédé diagonal de Cantor, on peut voir que  $(\gamma_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$  converge (à une sous-suite près) dès que  $t \in \mathbb{Q} \cap [0, L]$ . Considérons maintenant  $t' \in [0, L]$  et  $\varepsilon > 0$ . Choisissons  $t \in \mathbb{Q} \cap [0, L]$  de sorte que  $|t - t'| \leq \varepsilon/5$  et puis  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $d(\gamma_n(t), \gamma_m(t)) \leq \varepsilon/5$  si  $n, m \geq N$  et  $N > 5/\varepsilon$ . Alors, d'après (4.47), on a pour  $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} d(\gamma_n(t'), \gamma_m(t')) &\leq d(\gamma_n(t'), \gamma_n(t)) + d(\gamma_n(t), \gamma_m(t)) + d(\gamma_m(t), \gamma_m(t')) \\ &\leq 1/n + |t - t'| + \varepsilon/5 + 1/m + |t - t'| \\ &\leq 2/N + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 + \varepsilon/5 \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi,  $(\gamma_n(t'))$  est une suite de Cauchy, qui converge donc vers un  $\gamma(t')$ . La fonction  $\gamma$  est maintenant bien définie sur  $[0, L]$ . Il nous reste à vérifier que  $l(\gamma) = L$ . Encore une fois par (4.47), on a pour  $t, t' \in [0, L]$

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) = \lim_{n \rightarrow +\infty} d(\gamma_n(t), \gamma_n(t')) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (|t - t'| + 1/n) = |t - t'|.$$

Ceci implique que  $\gamma$  est 1-lipschitzienne. En particulier,  $\gamma$  est une courbe rectifiable et  $l(\gamma) \leq L$ . Puisque toute courbe rectifiable contient une  $\varepsilon$ -chaîne pour tout  $\varepsilon > 0$ , on a aussi  $L = d_0(x, y) \leq l(\gamma)$ . Donc,  $L = l(\gamma)$ . Finalement, nous démontrons que  $\gamma(L) = y$ . Pour cela, étendons  $\gamma_n$  sur  $[0, L + 1]$  et notons  $\widetilde{\gamma}_n$  cette extension. Alors, par (4.47),

$$d(\widetilde{\gamma}_n(L), \widetilde{\gamma}_n(D(z_0, \dots, y))) \leq 1/n + 1/n.$$

Ceci implique que  $d(\gamma_n(L), y) \leq 2/n$  et donc  $\gamma(L) = y$ .

*Etape 3.* Nous voulons contrôler  $d_0$  et pour cela, nous allons utiliser l'inégalité de Poincaré. Tout d'abord, fixons  $x \in X$  et posons (pour tout  $\varepsilon > 0$ )  $u^\varepsilon(\cdot) = d_\varepsilon(x, \cdot)$ . Par l'inégalité triangulaire,  $u^\varepsilon$  est 1-lipschitzienne et donc  $\rho = 1$  est un gradient supérieur de  $u^\varepsilon$ . D'où, pour tout  $r > 0$  et tout  $\varepsilon > 0$ , on a par le doublement du volume puis par l'inégalité de Poincaré

$$\begin{aligned} \left| \int_{B(x, r/2)} u^\varepsilon d\mu - \int_{B(x, r)} u^\varepsilon d\mu \right| &\leq \int_{B(x, r/2)} \left| u^\varepsilon - \int_{B(x, r)} u^\varepsilon d\mu \right| d\mu \\ &\leq C \int_{B(x, r)} \left| u^\varepsilon - \int_{B(x, r)} u^\varepsilon d\mu \right| d\mu \\ &\leq Cr. \end{aligned}$$

En itérant, on obtient pour tout  $j \in \mathbb{N}^*$

$$\left| \int_{B(x,r/2^j)} u^\varepsilon d\mu - \int_{B(x,r)} u^\varepsilon d\mu \right| \leq Cr.$$

Puisque  $u^\varepsilon$  est continue, positive, et nulle en  $x$  (où  $x$  est un point de densité de  $u^\varepsilon$ ), il vient

$$\int_{B(x,r)} u^\varepsilon d\mu \leq Cr\mu(B(x,r)). \quad (4.48)$$

D'où, en prenant  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on a

$$\int_{B(x,r)} u^0 d\mu \leq Cr\mu(B(x,r)). \quad (4.49)$$

Ceci implique que  $u^0$  (et donc  $d_0$ ) est finie presque partout (prendre les points de densité de tous les  $u^{1/n}$ ). On peut alors montrer simplement qu'en fait  $u^0$  est fini partout.

*Etape 4.* Fixons  $x$  et  $y$  dans  $X$ . Nous souhaitons construire un chemin de  $x$  à  $y$  dont on contrôle la longueur par rapport à  $d(x,y)$ . Tout d'abord, il existe  $z \in X$  tel que  $d(z,y) < \frac{d(x,y)}{4} =: R/4$ . Puis, d'après (4.49), si on note  $u^0(\cdot) = d_0(x, \cdot)$ ,

$$\int_{B(z,R/4)} u^0 d\mu \leq CR\mu(B(z,R/4)).$$

Donc, il existe  $z_1 \in B(z, R/4)$  tel que  $u^0(z_1) = d_0(x, z_1) \leq CR$ . Posons  $z_0 = x$ . Par l'étape 2, il existe une courbe rectifiable  $\gamma_0$  reliant  $z_0 = x$  à  $z_1$  de longueur au plus  $CR$ . En itérant, on construit une courbe rectifiable  $\gamma_j$  de longueur  $\leq CR/2^j$  de  $z_j$  vers  $z_{j+1}$  où  $d(y, z_j) \leq R/2^j$ . La courbe  $\gamma$  est obtenue en concaténant les courbes  $\gamma_j$ . On obtient que  $l(\gamma) \leq 2CR$  (par somme géométrique). Ce qui finit notre preuve.  $\square$

Cette preuve est inspirée de celle esquissée dans l'appendice de [26] dans lequel les arguments de la construction sont attribués à G. David et S. Semmes.

### 3 Exemples d'espaces de Loewner

#### 3.1 Pinceaux de courbes et la géométrie des poids $A_\infty$ -forts

Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. Nous supposons que  $\mu$  est Ahlfors-régulière de dimension  $Q$ . Soient  $x, y \in X$  et considérons une famille de courbes  $\Gamma$  telles que toute courbe  $\gamma \in \Gamma$  relie  $x$  à  $y$ .

**Définition 4.50.** Nous dirons que cette famille  $\Gamma$  est un pinceau de courbes joignant  $x$  à  $y$  s'il existe une constante  $C \geq 0$  et une mesure de probabilité  $d\gamma$  sur  $\Gamma$  telle que :

- (i)  $\Gamma \subset B(x, Cd(x,y))$  ;
- (ii) Pour tout borélien  $A \subset X$ ,

$$\int_{\Gamma} \int_{A \cap \gamma} ds d\gamma \leq C \left( \int_A \frac{d\mu(z)}{d(x,z)^{Q-1}} + \int_A \frac{d\mu(z)}{d(y,z)^{Q-1}} \right). \quad (4.51)$$

Ici,  $ds$  est la longueur d'arc sur  $\gamma$ . Notons que cette condition est reliée aux potentiels de Riesz (voir la section 1).

**Exemple 4.52.** Donnons un exemple de pinceau de familles de courbes dans le plan. Soit  $x = (-1, 0)$  et  $y = (1, 0)$ . Pour tout  $t \in [-1, 1]$ , on considère  $\Gamma_t = [x, (0, t)] \cup [(0, t), y]$  (c'est à dire l'union de deux segments qui relient  $x$  à  $y$ ). La mesure sur  $(\Gamma_t)$  est juste la mesure de Lebesgue normalisée sur  $[-1, 1]$ . On peut généraliser cette construction à tous les couples de points dans  $\mathbb{R}^2$ .

Nous donnons maintenant un critère très utile en pratique pour démontrer des inégalités de Poincaré.

**Théorème 4.53.** *Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique Ahlfors-régulier de dimension  $Q$ . Supposons que pour tous  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe un pinceau de courbes de  $X$  reliant  $x$  à  $y$  avec une constante  $C$  dans (i) et (ii) uniforme en  $x$  et  $y$ . Alors,  $X$  supporte une inégalité de Poncaré faible de type  $(1, 1)$ .*

*Démonstration.* Soient deux fonctions mesurables  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  telles que  $\rho$  est un gradient supérieur de  $f$ . Alors, d'après (4.51), on a pour toute paire de points  $x$  et  $y$  dans  $X$  (et par la suite dans une boule  $B$  de  $X$ ) par définition du gradient supérieur et puisque  $d\gamma$  est une mesure de probabilité,

$$|f(x) - f(y)| \leq \int_{\Gamma} \left( \int_{\gamma} \rho ds \right) d\gamma \quad (4.54)$$

$$\leq C \left( \int_{B(x, Cd(x,y))} \rho(z) \frac{d\mu(z)}{d(x,z)^{Q-1}} + \int_{B(x, Cd(x,y))} \rho(z) \frac{d\mu(z)}{d(y,z)^{Q-1}} \right). \quad (4.55)$$

On en déduit pour toute boule  $B$  de  $X$

$$\begin{aligned} \int_B |f - f_B| d\mu &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \int_B |f(x) - f(y)| d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq \frac{C}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_{B(x, Cd(x,y))} \rho(z) (d(x,z)^{1-Q} + d(y,z)^{1-Q}) d\mu(z) \right) d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq \frac{C}{\mu(B)} \int_B \int_B \int_{10CB} \rho(z) (d(x,z)^{1-Q} + d(y,z)^{1-Q}) d\mu(x) d\mu(y) d\mu(z). \end{aligned}$$

Pour conclure, nous devons vérifier que si  $z \in 10CB$ ,

$$\int_B \int_B d(x,z)^{1-Q} d\mu(x) d\mu(y) \leq C\mu(B)\text{diam}B.$$

Pour cela, posons

$$C_j(z) = \{x \in X; 2^{-j}(10C\text{diam}B) < d(x,z) \leq 2^{-j+1}(10C\text{diam}B)\}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_B \int_B d(z,x)^{1-Q} d\mu(x) d\mu(y) &= \mu(B) \int_B d(z,x)^{1-Q} d\mu(x) \\ &\leq \mu(B) \sum_{j=0}^{\infty} \int_{C_j} d(x,z)^{1-Q} d\mu(x) \\ &\leq C\mu(B)C_{AR} \sum_{j=0}^{\infty} (2^{-j}\text{diam}B)^{1-Q} (2^{-j+1}\text{diam}B)^Q \\ &\leq C\mu(B)\text{diam}B. \end{aligned}$$

Ce qui finit notre démonstration. □

Ce critère est par exemple utilisé dans [82]. Il est inspiré des travaux de David-Semmes (voir [34]) sur la géométrie des poids  $A_{\infty}$ -forts que nous allons maintenant décrire. Une fonction  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  localement intégrable est un poids  $A_{\infty}$  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  telle que si  $Q \subset \mathbb{R}^n$  est un cube et si  $E \subset Q$  vérifie  $\mathcal{L}^n(E) \leq \delta\mathcal{L}^n(Q)$ , alors  $w(E) \leq \varepsilon w(Q)$  où  $w(A) = \int_A w(x)dx$  pour



$A \subset \mathbb{R}^n$ . Ceci est une condition forte d'absolue continuité qui est motivée par des questions d'analyse harmonique (voir par exemple [68]). On va maintenant associer à  $w$  une distance et une mesure, et pour cela on commence par poser  $\delta(x, y) = \left( \int_{B_{xy}} w(u) du \right)^{1/n}$  où  $B_{xy}$  est la boule euclidienne fermée de diamètre  $\|x - y\|$  qui contient  $x$  et  $y$ . Si  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une courbe, on définit sa  $w$ -longueur par

$$w\text{-longueur}(\gamma) = \limsup \left\{ \sum_{i=1}^N \delta(\gamma(t_{i-1}), \gamma(t_i)) \right\}$$

où la  $\limsup$  est prise sur toutes les subdivisions  $0 = t_0 < \dots < t_i < \dots < t_N = 1$  de  $[0, 1]$ . On peut alors définir la distance géodésique associée à cette "longueur", c'est à dire si  $x, y$  sont dans  $\mathbb{R}^n$ , on pose  $d_w(x, y) = \inf_{\gamma} (w\text{-longueur}(\gamma))$  où l'infimum est pris sur toutes les courbes  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .

**Définition 4.56.** On dit qu'un poids  $w$  est un poids  $A_\infty$ -fort si  $w$  est un poids  $A_\infty$  et s'il existe une constante  $C > 0$  telle que pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , on a

$$C^{-1}\delta(x, y) \leq d_w(x, y) \leq C\delta(x, y).$$

**Remarque 4.57.** L'inégalité de droite est toujours vraie car un poids  $A_\infty$  vérifie une inégalité de Hölder inverse. D'un autre côté, l'inégalité de gauche est équivalente à  $w(B)^{1/n} \leq C(w\text{-longueur}(\gamma))$  pour toute courbe  $\gamma$  contenue dans une boule  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  avec  $\text{diam}(\gamma) = \text{diam}(B)$ .

**Exemple 4.58.** 1) Si  $w = 1$ , alors  $\delta(x, y) = d_w(x, y) = \|x - y\|$ . Dans le cas où  $w$  est un poids non constant, il faut voir  $d_w$  comme une déformation "conforme" de la distance euclidienne.

2) Le jacobien d'une application quasi-conforme  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un poids  $A_\infty$ -fort. L'argument heuristique est le suivant. Par distorsion des applications quasi-conformes, on a  $w(B_{xy})$  est comparable à  $|f(x) - f(y)|^n$ . Or, si  $\gamma$  est une courbe joignant  $x$  à  $y$ , sa  $w$ -longueur est comparable à  $|f(x) - f(y)|$  puisque  $w^{1/n}$  est comparable à  $|\nabla f|$ . On peut alors conclure d'après la remarque précédente.

**Proposition 4.59.** Soit  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  un poids  $A_\infty$ -fort. Alors, la mesure  $\mu_w$  définie par  $\mu_w(A) = \int_A w(x) dx$  (où  $dx$  est l'intégration par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ ) est Ahlfors-régulière de dimension  $n$  et tout couple de points de  $\mathbb{R}^n$  peut être joint par une courbe rectifiable pour  $d_w$ .

En utilisant le théorème d'Assouad, on peut voir tous les espaces métriques doublants comme des sous-espaces des espaces donnés par les poids  $A_\infty$ -forts.

**Théorème 4.60.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique doublant. Alors, il existe  $n \in \mathbb{N}^*$  et un poids  $A_\infty$ -fort tels que  $(X, d)$  admet un plongement bilipschitzien dans  $(\mathbb{R}^n, d_w)$ .

D'après l'exemple du groupe d'Heisenberg, il existe des espaces métriques doublants qui n'admettent pas de plongement bilipschitzien dans un espace euclidien. En fait, Stephen Semmes a donné des exemples de poids  $A_\infty$ -forts  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tels que  $(\mathbb{R}^n, d_w)$  n'admet pas de plongement bilipschitzien dans un espace euclidien. La géométrie des poids  $A_\infty$ -forts peut donc être très différente de la géométrie euclidienne. D'un autre côté, l'application identité de  $(\mathbb{R}^n, d_w)$  dans le  $\mathbb{R}^n$  euclidien est toujours quasisymétrique. En appliquant le théorème précédent, on retrouve alors le fait que tout espace métrique doublant admet un plongement quasisymétrique dans un espace euclidien. De plus, comme la propriété de doublement métrique est stable par quasisymétrie, cela les caractérise (voir [59], chapitre 12). Nous renvoyons à [129] pour plus de détails sur la géométrie des poids  $A_\infty$ -forts, et en particulier

pour les preuves des résultats précédents. Les applications quasiconformes ont été définies dans la section 3 du chapitre 2. La théorie des applications quasiconformes et quasisymétriques sera discutée plus longuement à la fin de ce chapitre.

Le résultat suivant donne une version de l'inégalité de Poincaré dans ce cadre.

**Théorème 4.61.** *Soit  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  un poids  $A_\infty$ -fort. Alors, il existe une constante  $C > 0$  telle que*

$$w(B)^{-\frac{n+1}{n}} \int_B \int_B |f(x) - f(y)| w(x) w(y) dx dy \leq C \int_{2B} w(x)^{-1/n} |\nabla f(x)| w(x) dx \quad (4.62)$$

pour toute boule  $B$  de  $\mathbb{R}^n$  et toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  à support compact.

**Remarque 4.63.** 1) L'inégalité (4.62) est vraie si  $w$  est le jacobien d'une application quasi-conforme par changement de variables.

2) On a aussi une inégalité de type Sobolev, à savoir si  $1 \leq p < n$  et  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ ,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q w(x) dx \right)^{1/q} \leq C \left( \int_{\mathbb{R}^n} w(x)^{-1/n} |\nabla f(x)|^p w(x) dx \right)^{1/p} \quad (4.64)$$

pour toute fonction  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  à support compact

*Démonstration.* Nous donnons juste quelques idées de preuve en suivant la présentation de [34] dans lequel le lecteur trouvera une démonstration complète. Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  à support compact et soit  $w$  un poids  $A_\infty$ -fort. L'inégalité (4.62) (et aussi l'inégalité (4.64)) découle de l'estimation suivante pour  $x, y \in \mathbb{R}^n$  :

$$|f(x) - f(y)| \leq C \int_{B_{xy}} \left( w(B_{xu})^{-(n-1)/n} + w(B_{yu})^{-(n-1)/n} \right) |\nabla f(u)| w(u)^{(n-1)/n} du. \quad (4.65)$$

En effet, en intégrant (4.65), on obtient

$$\begin{aligned} & \int_B \int_B |f(x) - f(y)| w(x) w(y) dx dy \\ & \leq C \int_{x \in B} \int_{y \in B} \int_{u \in B_{xy}} \left( w(B_{xu})^{-(n-1)/n} + w(B_{yu})^{-(n-1)/n} \right) |\nabla f(u)| w(u)^{(n-1)/n} w(x) w(y) du dx dy \\ & \leq 2C \int_{2B} \left( \int_B \int_B w(B_{xu})^{-(n-1)/n} w(x) w(y) dx dy \right) |\nabla f(u)| w(u)^{(n-1)/n} du \\ & = 2C w(B) \int_{2B} \left( \int_B w(B_{xu})^{-(n-1)/n} w(x) dx \right) |\nabla f(u)| w(u)^{-(n-1)/n} du. \end{aligned}$$

Or pour  $u \in 2B$ , on a en posant  $A_k = \{x \in B; 2^{-k-1}w(B) < w(B_{xu}) \leq 2^{-k}w(B)\}$ ,

$$\begin{aligned} \int_B w(B_{xu})^{-(n-1)/n} w(x) dx & \leq \sum_{k \geq 0} \int_{A_k} w(B_{xu})^{-(n-1)/n} w(x) dx \\ & \leq C w(B)^{-(n-1)/n} \sum_{k \geq 0} 2^{(k(n-1))/n} 2^{-k} w(B) \\ & = C w(B)^{1/n}. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure. Il nous reste à voir comment obtenir (4.65) et pour cela, nous allons voir apparaître la notion de pinceau de courbes. L'idée est en effet d'intégrer  $|\nabla f|$  sur une bonne famille de courbes. Pour simplifier, on suppose que  $n = 2$  et on considère le cas où  $x = (-1, 0)$  et  $y = (1, 0)$ . Soit

$\mathcal{C}$  le carré de sommets  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 0)$  et  $(0, -1)$ . Le but est de construire une famille de courbes  $\gamma_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , incluse dans  $\mathcal{C}$ , joignant  $x$  et  $y$  telle que si on note  $ds_t$  la mesure de longueur sur  $\gamma_t$ , on ait au sens des mesures pour une constante  $C \geq 0$  :

$$\int_0^1 \int_{\gamma_t} ds_t dt \leq \left( w(B_{xu})^{-1/2} + w(B_{yu})^{-1/2} \right) w(u)^{1/2} du.$$

On peut alors conclure puisqu'on a par le théorème fondamental de l'analyse

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \int_0^1 \int_{\gamma_t} |\nabla f| ds_t dt \\ &\leq C \int_{B_{xy}} \left( w(B_{xu})^{-1/2} + w(B_{yu})^{-1/2} \right) |\nabla f(u)| w(u)^{1/2} du. \end{aligned}$$

Pour construire les  $\gamma_t$ , l'idée est de construire une fonction  $\phi$  dont les lignes de niveau sont les  $\gamma_t$ . Pour voir cela, supposons que les  $\gamma_t$  sont connues et sont des courbes simples. Si  $\Omega_t$  est le domaine (dans  $\mathcal{C}$ ) sous  $\gamma_t$ , on pose  $\phi(x) = \int_0^1 \chi_{\Omega_t} dt$ . Soient  $L^+ = [(-1, 0), (0, 1)] \cup [(0, 1), (1, 0)]$  et  $L^- = [(-1, 0), (0, -1)] \cup [(0, -1), (1, 0)]$ . Alors,  $\phi = 0$  sur  $L^+$ ,  $\phi = 1$  sur  $L^-$  et  $|\nabla \phi|$  est une mesure qui vérifie

$$|\nabla \phi| \leq \int_0^1 |\nabla \chi_{\Omega_t}| dt = \int_0^1 \int_{\gamma_t} ds_t dt \leq C \left( w(B_{xu})^{-1/2} + w(B_{yu})^{-1/2} \right) w(u) du.$$

D'un autre côté, partons d'une fonction  $\phi$  définie sur  $\mathcal{C}$  avec  $0 \leq \phi \leq 1$ ,  $\phi = 0$  sur  $L^+$ ,  $\phi = 1$  sur  $L^-$  et  $|\nabla \phi| \leq C \left( w(B_{xu})^{-1/2} + w(B_{yu})^{-1/2} \right) w(u)^{1/2} du$ . Posons  $\Omega_t = \{z \in \mathcal{C} \setminus \{x, y\}, \phi(z) > t\}$ .

Alors, une version de la formule de la co-aire donne (en tant qu'égalité de mesure)  $|\nabla \phi| = \int_0^1 |\nabla \chi_{\Omega_t}| dt$  et donc  $\partial \Omega_t$  est rectifiable. De plus, comme  $\phi$  est continue (sauf en  $x$  et  $y$ ),  $\partial \Omega_t$  connecte  $x$  et  $y$ . Il suffit donc de choisir  $\gamma_t$  dans  $\partial \Omega_t$ . Malheureusement, cette esquisse de preuve ne peut pas être rendue rigoureuse. Voir [34].

□

**Définition 4.66.** On dit qu'un espace métrique  $(X, d)$  vérifie la condition de contractabilité linéaire locale s'il existe une constante  $C \geq 1$  telle que pour tout  $x \in X$  et tout  $0 < R < C^{-1} \text{diam} X$ , la boule  $B(x, R)$  peut être contractée en un point dans  $B(x, CR)$ .

Cette dernière condition signifie qu'il existe une famille à un paramètre d'applications continues  $\phi_t$  ( $t \in [0, 1]$ ) de  $B(x, R)$  dans  $B(x, CR)$  qui commence par l'identité ( $\phi_0 = Id$ ) et qui finit par une application constante ( $\phi_1 = x_0$  où  $x_0 \in B(x, CR)$ ). En appliquant des idées proches de celles décrites au dessus, Stephen Semmes [130] a démontré le résultat suivant qui donne une vaste classe d'espaces métriques qui admettent des inégalités de Poincaré.

**Théorème 4.67.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique connexe et complet muni d'une mesure  $\mu$  qui est  $Q$ -Ahlfors-régulière avec  $Q \in \mathbb{N}$ ,  $Q \geq 2$ . On suppose que  $X$  vérifie la propriété de contractabilité linéaire locale et que  $X$  a une structure de variété topologique orientable de dimension  $Q$ . Alors,  $(X, d, \mu)$  vérifie une inégalité de Poincaré  $(1, 1)$ . En particulier,  $X$  est un espace de Loewner de dimension  $Q$ .

On déduit de ce qui précède le résultat suivant sur les poids forts  $A_\infty$ .

**Théorème 4.68.** Soit  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$  un poids  $A_\infty$ -fort. Alors,  $(\mathbb{R}^n, d_w, \mu_w)$  est un espace de Loewner de dimension  $n$ .

La propriété de contractabilité locale apparait implicitement dans l'esquisse de preuve précédente. En fait, les lignes de niveau de la fonction  $\phi$  donne une famille de déformations à un paramètre qui permet de passer continument de  $L^+$  à  $L^-$ .

### 3.2 Groupes de Heisenberg

Les groupes de Heisenberg et de Carnot ont été décrits au chapitre 1. Nous allons voir que ce sont des exemples d'espaces de Loewner.

**Théorème 4.69.** *Les groupes de Heisenberg  $\mathbb{H}^n$  (avec leur mesure de Haar invariante à gauche et leur distance de Carnot-Carathéodory  $d_{CC}$ ) admettent des inégalités de Poincaré faible  $(1, 1)$ .*

*Démonstration.* Pour tout  $z \in \mathbb{H}^n$ , nous posons  $|z| = d_{CC}(0, z)$  et nous choisissons une géodésique  $\gamma_z : [0, |z|] \rightarrow \mathbb{H}^n$  allant de 0 à  $z$ . Notons que  $s \rightarrow x.\gamma_z(s)$  est le plus court chemin qui va de  $x$  à  $x.z$  (si  $x \neq 0$ ). D'où, par définition du gradient supérieur, on a

$$|u(x) - u(x.z)| \leq \int_0^{|z|} \rho(x.\gamma_z(s)) ds.$$

Pour simplifier les notations,  $dx$  est l'intégration par rapport à la mesure de Haar et  $|A|$  est la mesure de Haar de  $A \subset \mathbb{H}^n$ . Soit  $B$  une boule dans  $\mathbb{H}^n$ . A cause des propriétés d'invariance de la mesure de Haar, on peut supposer que  $B$  a pour centre l'origine 0 et en posant  $y = x.z$ , on a (par invariance à gauche)

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u_B| dx &\leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_B |u(x) - u(y)| dx dy \\ &= \frac{1}{|B|} \int_{\mathbb{H}^n} \int_{\mathbb{H}^n} \chi_B(x) \chi_B(x.z) |u(x) - u(x.z)| dx dz \\ &\leq \frac{1}{|B|} \int_{\mathbb{H}^n} \int_{\mathbb{H}^n} \int_0^{|z|} \chi_B(x) \chi_B(x.z) \rho(x.\gamma_z(s)) ds dx dz. \end{aligned}$$

où  $\chi_A$  est la fonction caractéristique de  $A$ . Par invariance à droite de la mesure de Haar, nous avons (avec  $\xi = x.\gamma_z(s)$ )

$$\int_{\mathbb{H}^n} \chi_B(x) \chi_B(x.z) \rho(x.\gamma_z(s)) dx = \int_{\mathbb{H}^n} \chi_{B.\gamma_z(s)}(\xi) \chi_{B.z^{-1}.\gamma_z(s)}(\xi) \rho(\xi) d\xi.$$

Supposons que  $\chi_{B.\gamma_z(s)}(\xi) \chi_{B.z^{-1}.\gamma_z(s)}(\xi) \neq 0$ . Alors, il existe  $x$  et  $y$  dans  $B$  tels que  $\xi = x.\gamma_z(s) = y.z^{-1}.\gamma_z(s)$ . Notons que  $z = x^{-1}.y$  est dans  $2B$  puisque  $d_{CC}(0, z) = d_{CC}(0, x^{-1}.y) = d_{CC}(x, y) \leq 2r$  où  $r$  est le rayon de  $B$ . De plus,  $\xi = x.\gamma_z(s)$  est une géodésique de  $x$  vers  $y$  et donc  $d_{CC}(x, \xi) + d_{CC}(y, \xi) = d_{CC}(x, y) \leq 2r$ . Ceci implique que soit  $d_{CC}(x, \xi) \leq r$ , soit  $d_{CC}(y, \xi) \leq r$ . On en déduit par l'inégalité triangulaire que  $\xi \in 2B$ . Il s'en suit que

$$\int_{\mathbb{H}^n} \chi_{B.\gamma_z(s)}(\xi) \chi_{B.z^{-1}.\gamma_z(s)}(\xi) \rho(\xi) d\xi \leq \chi_{2B}(z) \int_{2B} \rho(\xi) d\xi,$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_B |u(x) - u_B| dx &\leq \frac{1}{|B|} \int_{\mathbb{H}^n} \int_0^{|z|} \chi_{2B}(z) \int_{2B} \rho(\xi) d\xi ds dz \\ &\leq \frac{1}{|B|} \int_{2B} \int_{2B} |z| \rho(\xi) d\xi dz \\ &\leq Cr \int_{2B} \rho(z) dz. \end{aligned}$$

Cette preuve peut évidemment s'appliquer de façon générale dans le cadre des groupes de Carnot car elle repose juste sur les propriétés d'invariance de la mesure de Haar et de la distance de Carnot-Carathéodory. Elle adapte aussi aux groupes unimodulaires. Cette démonstration est tirée de [56] dans lequel elle est attribuée à Nicholas Varopoulos.  $\square$

Comme les groupes de Heisenberg sont Ahlfors-réguliers (voir la proposition 1.152), on a donc

**Corollaire 4.70.** Les groupes de Heisenberg (avec leur mesure de Haar invariante à gauche et leur distance de Carnot-Carathéodory) sont des espaces de Loewner de dimension  $Q$  où  $Q$  est la dimension homogène du groupe (c'est à dire  $2n + 2$  dans le cas de  $\mathbb{H}^n$ ).

Pour les mêmes raisons, les groupes de Carnot sont des espaces de Loewner.

### 3.3 Espaces à courbure de Ricci positive

Le but de cette partie est de montrer que l'existence d'inégalités de Poincaré sur un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  est reliée à la "courbure" de  $X$ . La courbure est un outil classique de géométrie riemannienne, c'est à dire quand l'espace  $X$  est une variété. Mais, il existe plusieurs courbures (de Gauss, sectionnelle, de Ricci, ...). Nous allons décrire plusieurs façons de définir des "espaces métriques à courbure de Ricci positive", ces définitions seront équivalentes à la définition usuelle dans le cas des variétés. Pour le lecteur qui n'est pas familier avec la géométrie riemannienne, nous avons essayé de rendre la présentation lisible en insistant sur les "aspects métriques". Pour ceux qui sont plus à l'aise avec la géométrie, nous avons inclus des références précises qui permettent d'aller plus loin.

#### Variétés riemanniennes à courbure de Ricci positive

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète (voir la remarque ci-dessous pour la définition) de dimension  $n$ . On supposera toujours dans la suite que les variétés considérées sont connexes. On note  $d_g$  la distance riemannienne et  $vol_g$  le volume riemannien de  $M$ . Dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$ ,  $d_g$  est la distance euclidienne et  $vol_g$  est la mesure de Lebesgue. Pour tout couple de points  $(x, y)$  dans  $M \times M$ , on choisit un segment géodésique  $\gamma_{xy} : [0, d(x, y)] \rightarrow M$  joignant  $x$  et  $y$  que nous paramétrons par longueur d'arc. Notons que, à un ensemble de mesure nulle près (qui correspond au cut locus de  $M$ , voir ci-dessous), ce segment géodésique est unique et donc pour tout  $t \in [0, d(x, y)]$ ,  $\gamma_{yx}(t) = \gamma_{xy}(d(x, y) - t)$ . Dans le cas euclidien, il est toujours unique et correspond au segment  $[x, y]$ . Posons

$$\phi_{x,t}(y) = \gamma_{x,y}(t) \tag{4.71}$$

pour  $x, y \in M, t \geq 0$  et notons  $J_{x,t}(y)$  le jacobien de cette application (c'est à dire la valeur absolue du déterminant de la matrice jacobienne de  $\phi_{x,t}$ ).

**Définition 4.72.** On dit que  $M$  vérifie la propriété de courbure positive s'il existe une constante  $C_{CP} > 0$  telle que

$$J_{x,t}(y) \geq 1/C_{CP}$$

dès que  $x, y \in M, t \in [d(x, y)/2, d(x, y)]$ .

Nous verrons que ceci est vrai pour une variété riemannienne avec  $\text{Ric}M \geq 0$ . On a alors  $C_{CP} = 2^{n-1}$  qui est la constante (avec égalité) que l'on obtient dans le cas où  $M$  est tout simplement un espace euclidien. Nous reviendrons sur ce point après le théorème 4.76 pour donner une interprétation géométrique de cette définition.

**Théorème 4.73.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$ . Si  $M$  satisfait la condition de courbure positive, alors il existe une constante  $C \geq 0$  (dependant seulement de la constante  $C_{CP}$  dans la condition de courbure positive) telle que

$$\int_B |u - u_B| dvol_g \leq C \text{diam} B \int_{2B} \rho dvol_g$$

pour toute boule  $B$  de  $M$ , toute fonction continue  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  et tout gradient supérieur  $\rho : M \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  de  $u$ .

**Remarque 4.74.** 1) Il n'y pas la moyenne sur les boules dans l'inégalité précédente. Si le volume riemannien est doublant sur  $M$ , on retrouve l'inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$ . Cela sera le cas lorsque la variété est à courbure de Ricci positive (voir les théorèmes 4.75 et 4.76).

2) Une variété riemannienne  $(M, g)$  est complète si toute géodésique (au sens de la géométrie riemannienne, c'est à dire toute courbe localement minimisante pour la longueur) de  $M$  peut être définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier. D'après le théorème de Hopf-Rinow, cette condition est équivalente au fait que l'espace métrique  $(M, d_g)$  est complet. De plus, dans ce cas, tout couple de points  $x, y$  de  $M$  peut être joint par un segment géodésique. Voir le paragraphe 1.7 de [25] par exemple.

3) Le cut locus de  $M$  en un point  $p \in M$  est l'ensemble des points  $q \in M$  tels que le segment géodésique de  $p$  à  $q$  ne peut être prolongé en un segment géodésique au delà de  $q$ . Le rayon d'injectivité de  $M$  en  $p$  est alors la distance de  $p$  à son cut locus. En dehors du cut locus de  $p$ , la fonction distance à  $p$ , c'est à dire  $q \in M \rightarrow d_g(p, q)$ , est lisse et on peut donc calculer son laplacien par exemple pour obtenir des théorèmes de comparaison de type Bishop-Gromov (voir la preuve du théorème 4.75). En fait, le cut locus de  $p$  est l'ensemble des points  $q \in M$  tels que soit il existe plusieurs géodésiques reliant  $p$  et  $q$ , soit  $p$  et  $q$  sont conjugués le long d'un segment géodésique qui les joint. Nous omettons la définition de points conjugués qui ne nous sera pas utile dans la suite. Pour plus de détails, on pourra consulter le paragraphe 3.2 de [25] par exemple. Nous donnerons une définition du cut locus dans le cas des espaces métriques dans la section suivante.

*Démonstration.* Signalons que notre preuve va seulement reposer sur des outils classiques de théorie de la mesure (plus les remarques préliminaires du début du paragraphe) et qu'elle permet de démontrer simplement l'existence d'inégalités de Poincaré de façon géométrique dans le cas euclidien. Pour alléger les notations, on pose  $\mu = \text{vol}_g$ . Fixons une boule  $B$  dans  $M$ . Considérons  $u$  et  $\rho$  comme dans la définition de l'inégalité de Poincaré. Si  $x$  et  $y$  sont dans  $B$ , alors par définition du gradient supérieur, comme  $\gamma_{x,y}$  est paramétrée par longueur d'arc, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma_{x,y}} \rho(s) ds = \int_0^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| d\mu &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \int_B |u(x) - u(y)| d\mu(x) d\mu(y) \\ &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_0^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt \right) d\mu(x) d\mu(y). \end{aligned}$$

En utilisant les définitions de  $\gamma_{x,y}$  et  $\gamma_{y,x}$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt &= \int_0^{d(x,y)/2} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt + \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt \\ &= \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\gamma_{y,x}(t)) dt + \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt. \end{aligned}$$

Donc, par symétrie en  $x$  et  $y$ , on a

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq \frac{2}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt \right) d\mu(x) d\mu(y).$$

Or, on a par le théorème de Fubini et le changement de variables  $z = \phi_{x,t}(y)$  donné en (4.71),

$$\begin{aligned}
\int_B \int_B \left( \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\gamma_{x,y}(t)) dt \right) d\mu(x) d\mu(y) &= \int_B \int_B \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\phi_{x,t}(y)) dt d\mu(x) d\mu(y) \\
&\leq C_{CP} \int_B \int_B \int_{d(x,y)/2}^{d(x,y)} \rho(\phi_{x,t}(y)) J_{x,t}(y) dt d\mu(x) d\mu(y) \\
&\leq C_{CP} \int_B \int_B \int_0^{\text{diam} B} \rho(\phi_{x,t}(y)) J_{x,t}(y) dt d\mu(x) d\mu(y) \\
&\leq C_{CP} \int_0^{\text{diam} B} \int_B \left( \int_B \rho(\phi_{x,t}(y)) J_{x,t}(y) d\mu(y) \right) d\mu(x) dt \\
&\leq C_{CP} \int_0^{\text{diam} B} \int_B \left( \int_{\phi_{x,t}(B)} \rho(z) d\mu(z) \right) d\mu(x) dt \\
&\leq C_{CP} \int_0^{\text{diam} B} \int_B \left( \int_{2B} \rho(z) d\mu(z) \right) d\mu(x) dt \\
&\leq C_{CP} (\text{diam} B) \mu(B) \int_{2B} \rho(z) d\mu(z).
\end{aligned}$$

On en déduit

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq 2C_{CP} (\text{diam} B) \int_{2B} \rho(z) d\mu(z).$$

□

Nous allons voir que les variétés à courbure de Ricci positive vérifie la propriété de courbure positive. Avant cela, nous allons rappeler le théorème de comparaison des volumes de Bishop-Gromov qui va jouer un rôle dans ce résultat et dont on donnera des versions dans des cadres non riemanniens.

**Théorème 4.75.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$  et de courbure de Ricci positive. On note  $V(r)$  la mesure de Lebesgue d'une boule euclidienne de rayon  $r$  dans  $\mathbb{R}^n$ . Alors, on a*

(i) *Pour tout  $x \in M$ , tout  $r > 0$ ,  $\text{vol}_g(B(x, r)) \leq V(r)$ , et donc  $\text{vol}_g(B(x, r)) \leq \alpha_n r^n$  où  $\alpha_n > 0$  est la mesure de Lebesgue de la boule unité de  $\mathbb{R}^n$ .*

(ii) *Pour tout  $x \in M$ , la fonction  $r \rightarrow \frac{\text{vol}_g(B(x, r))}{V(r)}$  est décroissante en  $r$ .*

Nous n'allons pas démontrer ce résultat (voir [25] théorèmes 3.9 et 3.10 ou [52] partie IV-13). Une preuve consiste à estimer le laplacien de la fonction distance. Notons que (ii) implique que pour tout  $x \in M$ , tout  $r > 0$  on a  $\frac{\text{vol}_g(B(x, 2r))}{V(2r)} \leq \frac{\text{vol}_g(B(x, r))}{V(r)}$  et donc  $\text{vol}_g(B(x, 2r)) \leq 2^n \text{vol}_g(B(x, r))$ . Ainsi,  $\text{vol}_g$  est une mesure doublante.

**Théorème 4.76.** *Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$  à courbure de Ricci positive. Alors,  $M$  vérifie la condition de courbure positive. En particulier,  $M$  supporte une inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$ .*

*Démonstration.* Fixons  $x \in M$ . Alors, l'application  $t \rightarrow \exp_x(t\xi)$  permet de décrire toutes les géodésiques partant de  $x$  quand  $\xi$  décrit l'ensemble des vecteurs tangents unitaires partant de  $x$ , que l'on peut identifier à la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Ici,  $\exp_x$  est la fonction exponentielle en  $x$ . Dans le cas de  $\mathbb{R}^n$ , nous sommes en train de considérer toutes les demi-droites de vecteur directeur  $\xi$  avec  $\|\xi\| = 1$  et elles représentent bien toutes les géodésiques qui permettent de relier  $x$  à un autre point de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $I(x, t, \xi)$  le jacobien de l'application  $(t, \xi) \rightarrow \exp_x(t\xi)$ . Alors,  $\text{vol}_g = I(x, t, \xi) dt d\xi$  où  $d\xi$  est la mesure de

probabilité sur la sphère unité de  $\mathbb{R}^n$ . Or, si on note  $I_0(t)$  l'analogue euclidien de  $I$  (mais dans le cas euclidien, cela ne dépend plus de  $x$  et  $\xi$  et en fait  $I_0(t) = t^{n-1}$ ), par un argument analogue à celui de la preuve du théorème de Bishop-Gromov, on a  $t \rightarrow \frac{I(x, t, \xi)}{I_0(t)}$  est décroissant en  $t$ . Il s'en suit que pour  $t \in [0, d_g(x, y)]$ ,

$$J_{x,t}(y) = \frac{I(x, t, \xi)}{I(x, d_g(x, y), \xi)} \geq \frac{I_0(t)}{I_0(d_g(x, y))} \geq \left( \frac{t}{d_g(x, y)} \right)^{n-1}.$$

Ainsi, si  $t \in [d_g(x, y)/2, d_g(x, y)]$ , on a  $J_{x,t}(y) \geq 1/2^{n-1}$ . Donc, dans ce cadre, on a via la preuve du théorème 4.73,

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq 2^n \text{diam} B \int_{2B} \rho d\mu.$$

Comme nous avons vu que le volume riemannien  $\text{vol}_g$  est doublant sous la condition de courbure de Ricci positive, nous pouvons obtenir la forme usuelle de l'inégalité de Poincaré (avec des moyennes).  $\square$

On en déduit alors le

**Corollaire 4.77.** Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne complète (non compacte) de dimension  $n \geq 2$  à courbure de Ricci positive. Alors,  $M$  est un espace de Loewner (pour sa structure riemannienne) si et seulement si  $M$  est  $n$ -Ahlfors régulière (pour le volume riemannien  $\text{vol}_g$ ).

Notons que par le théorème de comparaison des volumes de Bishop-Gromov, il existe une constante  $C_n > 0$  telle que  $\text{vol}_g(B(x, r)) \leq C_n r^n$  pour tout  $r > 0$ , tout  $x \in M$ . Donc, le fait que  $M$  soit  $n$ -Ahlfors régulière est équivalent à l'existence d'une constante  $C_{AR} > 0$  telle que  $\text{vol}_g(B(x, r)) \geq C_{AR}^{-1} r^n$  pour tout  $r > 0$ , tout  $x \in M$ .

### Propriété de contraction de la mesure et espaces d'Alexandrov

Nous allons commencer par donner une version métrique de la propriété de courbure positive. Nous utiliserons la notion de mesure image, vue au chapitre 1. Considérons un espace métrique géodésique  $(X, d)$  (voir la section 2.3 pour la définition) que l'on suppose aussi séparable et muni d'une mesure de Radon  $\mu$ . On dit que  $X$  est non branchant si deux segments géodésiques distincts n'ont aucune sous-courbe commune non triviale (c'est à dire non réduite à un point). On suppose que tous les segments géodésiques sont paramétrés à vitesse constante sur  $[0, 1]$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on considère  $e_t : \text{Geo}(X) \rightarrow X$  l'application définie par  $e_t(\gamma) = \gamma(t)$  pour tout segment géodésique  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  de  $X$ . On a noté  $\text{Geo}(X)$  l'ensemble des segments géodésiques de  $X$ . Si  $x \in X$ , on note par analogie avec le cas riemannien  $C(x)$  le cut locus de  $x$ , c'est à dire l'ensemble des points  $y \in X$  tels que tout segment géodésique de la forme  $[x, z]$  de  $X$  ne contient pas  $y$  en son intérieur. En d'autres termes,  $C(x)$  est l'ensemble des points  $y \in X$  tels que tout segment géodésique  $[x, y]$  ne peut être prolongé au-delà de  $y$  de façon géodésique. Si  $x, y \in X$ , on note  $\Gamma(x, y)$  l'ensemble des géodésiques de  $X$  reliant  $x$  à  $y$ . Dans la mesure où nous ne supposons pas l'unicité d'une géodésique reliant deux points, il est naturel d'introduire pour  $x \in X$  le cut locus géodésique en  $x$  défini par  $C_{\text{geod}}(x) = \{y \in X; \text{card}(\Gamma(x, y)) \geq 2\}$ . Nous noterons aussi  $\Gamma(x, A)$  l'ensemble des segments géodésiques reliant  $x$  à un point  $a \in A$  où  $A$  est un sous-ensemble de  $X$ .

**Définition 4.78.** Nous dirons que l'espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  vérifie la propriété de contraction de la mesure  $MCP(0, N)$  pour un  $N > 1$  (le cas  $N = 1$  est un peu spécial et sera omis) si pour tout  $x \in X$ , tout sous-ensemble  $A \subset X$  de  $X$  avec  $\mu(A) > 0$ , il existe une mesure de probabilité  $\Pi$  sur l'ensemble des géodésiques  $\Gamma(x, A)$  reliant  $x$  à  $A$  telle que



- (i)  $(e_0)_\# \Pi = \frac{1}{\mu(A)} \mu \llcorner A = \mu_A$  (où  $\mu \llcorner A$  est la restriction de  $\mu$  sur  $A$  et  $\mu_A$  est donc la restriction normalisée de  $\mu$  sur  $A$ ) et  $(e_1)_\# \Pi = \delta_x$  (mesure de Dirac en  $x$ ).
- (ii) Pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $d\mu \geq (1-t)^N \mu(A) (e_t)_\# (\Pi(d\gamma))$ , c'est à dire pour tout ensemble (borélien)  $C$  de  $X$ , on a  $\mu(C) \geq (1-t)^N \mu(A) \Pi(\{\gamma \in \Gamma(x, A); \gamma(t) \in C\})$ .

Nous laissons le soin au lecteur de vérifier que  $\mathbb{R}^n$  (muni de sa distance euclidienne et de sa mesure de Lebesgue) vérifie  $MCP(0, n)$  et que  $N = n$  est optimal. De façon générale, si  $(M, g)$  est une variété riemannienne complète (sans bord) de dimension  $n$ , alors l'espace métrique mesuré  $(M, d_g, vol_g)$  vérifie  $MCP(0, n)$  si et seulement si  $M$  est à courbure de Ricci positive (voir [108]). Nous pourrions définir une notion d'espaces qui vérifient  $MCP(K, N)$  en comparant avec l'espace modèle de courbure  $K$  pour tout  $K \in \mathbb{R}$  mais cela ne sera pas utile pour nous (voir [108] pour la définition générale). Notons que si  $X$  vérifie  $MCP(0, N)$ , alors  $X$  vérifie  $MCP(0, N')$  pour tout  $N' \geq N$ . Nous verrons plus tard que si  $X$  vérifie  $MCP(0, N)$ ,  $N$  donne une borne supérieure sur la dimension de Hausdorff. Mais, le  $N$  optimal peut parfois être différent de la dimension de Hausdorff de l'espace ambiant. Par exemple, le (premier) groupe de Heisenberg (muni de sa distance de Carnot-Carathéodory et de sa mesure de Haar) est de dimension topologique 3, de dimension de Hausdorff 4 mais vérifie  $MCP(0, N)$  si et seulement si  $N \geq 5$  (voir [69]). Il existe une théorie développée par Barilari et Rizzi pour donner une explication géométrique à cet exposant  $N = 5$ . Soit  $(X, d)$  un espace géodésique muni d'une mesure de Borel  $\mu$ . On suppose que pour tout  $x \in X$ ,  $\mu(C_{geod}(x)) = 0$ . Donc, pour tout  $x \in X$ , tout  $t \in [0, 1]$ , il existe une application mesurable  $\phi_{x,t} : X \setminus C_{geod}(x) \rightarrow X$  telle que  $t \in [0, 1] \rightarrow \phi_{x,t}(y)$  est l'unique géodésique reliant  $x$  à  $y \notin C_{geod}(x)$ . Ceci est l'analogue métrique de (4.71). Pour tout  $x \in X$  et tout  $t \in [0, 1]$ , on définit l'homothétique géodésique de  $\Omega \subset X$  de centre  $x$  et de rapport  $t$  par

$$\Omega_{x,t} = \{\phi_{x,t}(y); y \in \Omega \setminus C_{Geod}(x)\}.$$

On pose ensuite pour  $x \in X$  et  $s > 0$

$$\mathcal{C}_s(x) = \sup \left\{ \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{\mu(\Omega_t)}{t^s \mu(\Omega)}; \Omega \subset X \text{ mesurable et borné avec } 0 < \mu(\Omega) < +\infty \right\}.$$

La dimension géométrique  $\mathcal{N}(x)$  de  $(X, d, \mu)$  en  $x \in X$  est alors

$$\mathcal{N}(x) = \inf\{s > 0; \mathcal{C}_s(x) = +\infty\} = \sup\{s > 0; \mathcal{C}_s(x) = 0\}.$$

Comme pour la mesure de Hausdorff, les deux définitions sont équivalentes. On peut démontrer que si  $A \subset X$  est un borélien,  $\sup\{\mathcal{N}(x); x \in A\} \geq Hdim(A)$ . On définit la dimension géométrique  $\mathcal{N}(X)$  de  $(X, d, \mu)$  comme  $\mathcal{N}(X) = \sup\{\mathcal{N}(x); x \in A\}$  et donc  $\mathcal{N}(X) \geq Hdim(X)$ . Revenons à la propriété MCP. Si  $(X, d, \mu)$  vérifie  $MCP(0, N)$ , on définit son exposant de courbure par  $N_c(X) = \inf\{N > 1; MCP(0, N) \text{ est vérifiée}\}$ . D'un autre côté, si  $(X, d, \mu)$  ne vérifie pas  $MCP(0, N)$  pour tous les  $N > 1$ , on pose  $N_c(X) = +\infty$ . Juillet a montré que les groupes d'Heisenberg avaient un exposant de courbure fini. Rifford a montré qu'il en est de même pour certains groupes de Carnot. On a toujours pour un espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$ ,  $N_c(X) \geq \mathcal{N}(X)$ . L'inégalité peut être stricte. Dans le cas du groupe d'Heisenberg, on a  $N_c(\mathbb{H}^1) = 5$ , ce qui donne une explication géométrique à cet exposant optimal  $N_c(\mathbb{H}) = 5$  dans MCP. Il est conjecturé que l'égalité  $\mathcal{N}(\mathbb{G}) = N_c(\mathbb{G})$  doit être vraie pour une large classe de groupes de Carnot  $\mathbb{G}$  (ceux pour lesquels le cut locus géométrique est partout de mesure nulle). Voir [124] pour une discussions plus détaillée.

Nous allons réécrire la condition (ii) en utilisant le théorème de désintégration de mesure que nous énonçons maintenant. Si  $Y$  est un espace métrique, on note  $\mathcal{P}(Y)$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $Y$ . Voir [41] pour plus de détails.

**Théorème 4.79.** Soient  $Y$  et  $Z$  deux espaces métriques séparables. Soient  $\mu \in \mathcal{P}(Y)$  une mesure de Radon et  $\pi : Y \rightarrow Z$  une application mesurable. On note  $\nu \in \mathcal{P}(Z)$  la mesure définie par  $\nu = \pi_{\#}\mu = \mu \circ \pi^{-1}$ . Alors, pour  $\nu$ -presque tout  $z \in Z$ , il existe une unique mesure de probabilité  $\mu_z \in \mathcal{P}(Y)$  sur  $Y$  telle que :

- Pour tout borélien  $B$  de  $Y$ , l'application  $z \rightarrow \mu_z(B)$  est mesurable ;
- Pour  $\nu$ -presque tout  $z \in Z$ ,  $\mu_z(Y \setminus \pi^{-1}(z)) = 0$ . En particulier si  $B \subset Y$  est borélien,  $\mu_z(B) = \mu_z(B \cap \pi^{-1}(z))$  ;
- Pour toute fonction mesurable  $f : Y \rightarrow [0, +\infty]$ , on a

$$\int_Y f(y) d\mu(y) = \int_Z \int_{\pi^{-1}(z)} f(y) d\mu_z(y) d\nu(z).$$

Donc, si  $B \subset Y$  est borélien, en appliquant l'égalité précédente à  $f = \chi_B$  (fonction caractéristique de  $B$ ), on a

$$\mu(B) = \int_Z \mu_z(B) d\nu(z).$$

En désintégrant  $\Pi$  par rapport à l'application  $e_0$ , il vient qu'il existe des mesures de probabilité  $\lambda_{y,x}$  sur  $\Gamma(y, x)$  de sorte que  $d\Pi(\gamma) = d\lambda_{y,x} d\mu_A(y)$ . On utilise ici que  $(e_0)_{\#}\Pi = \mu_A$ . Il s'en suit que la condition (ii) ci-dessus est équivalente à la condition pour tout  $t \in [0, 1]$ , pour tout borélien  $C$  de  $X$ ,

$$\mu(C \cap e_t(\Gamma(A, x))) \geq (1-t)^N \int_A \int_{\Gamma(y,x)} \chi_C(\gamma(t)) d\lambda_{y,x}(\gamma) d\mu(y).$$

L'inégalité précédente pouvant s'écrire

$$\int_{\{y; \exists \gamma \in \Gamma(x,A), \gamma(t)=y\}} \chi_C(y) d\mu(y) \geq (1-t)^N \int_A \int_{\Gamma(y,x)} \chi_C(\gamma(t)) d\lambda_{y,x}(\gamma) d\mu(y),$$

il vient par la méthode usuelle que pour une fonction continue  $\phi : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\int_{\{y; \exists \gamma \in \Gamma(x,A), \gamma(t)=y\}} \phi(y) d\mu(y) \geq (1-t)^N \int_A \int_{\Gamma(y,x)} \phi(\gamma(t)) d\lambda_{y,x}(\gamma) d\mu(y).$$

On a donc (et c'est cette inégalité qui nous sera utile dans la suite) que

$$\int_{2B} \phi(y) d\mu(y) \geq (1-t)^N \int_B \int_{\Gamma(y,x)} \phi(\gamma(t)) d\lambda_{y,x}(\gamma) d\mu(y). \quad (4.80)$$

si  $B$  est une boule de  $X$  et  $x \in B$ . On a utilisé le fait que si  $x \in B$  et  $y$  est un point sur une géodésique reliant  $x$  à un point de  $B$ ,  $y \in 2B$ .

Supposons que pour tout  $x \in X$ , le cut locus géodésique  $C_{geod}(x)$  est vide. Alors, pour tout  $y \in X$ ,  $\lambda_{xy}$  n'est rien d'autre que la mesure de Dirac sur l'unique géodésique reliant  $x$  à  $y$ . On en déduit que  $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ . Pour un espace non branchant  $X$  qui vérifie  $MCP(0, N)$ , on a que pour  $\mu \times \mu$  presque tout couple  $(x, y)$  de  $X$ ,  $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ . Ceci découle du fait (que nous démontrerons dans le cas des espaces d'Alexandrov) que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ ,  $\mu(C(x)) = 0$ . Cette propriété de symétrie va nous permettre, comme dans le cas des variétés à courbure positive, de démontrer l'inégalité de Poincaré pour les espaces non branchant vérifiant  $MCP(0, N)$ . Avant cela, énonçons une version du théorème de comparaison de Bishop-Gromov dans ce cadre.

**Théorème 4.81.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré qui vérifie  $MCP(0, N)$  pour un  $N > 1$ . Alors, pour tout  $x \in X$  et pour  $0 < r \leq R$ , on a

$$\frac{\mu(B(x, R))}{\mu(B(x, r))} \leq \frac{R^N}{r^N}.$$

En particulier,  $\mu$  est doublante de constante  $2^N$  et la dimension de Hausdorff de  $(X, d)$  est inférieure ou égale à  $N$

*Démonstration.* L'estimation découle de  $MCP(0, N)$  appliqué à  $x$ ,  $A = B(x, R)$  et  $t = r/R$ . Le fait que  $\mu$  est doublante s'en déduit facilement. La borne sur la dimension découle de notre discussion sur la dimension de Hausdorff dans le chapitre 2.  $\square$

Nous en venons aux inégalités de Poincaré. Notons à ce sujet que la condition  $MCP$  est comme l'inégalité de Poincaré stable par convergence de Hausdorff-Gromov mesuré (Voir par exemple [108] pour une preuve).

**Théorème 4.82.** Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré non branchant qui vérifie  $MCP(0, N)$ . Alors,  $X$  supporte une inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$ .

*Démonstration.* Soit  $B$  une boule de  $X$  et soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dont  $\rho : X \rightarrow \mathbb{R}^+$  est un gradient supérieur. Alors, pour tout  $x \in B$ , tout  $y \in B$  et toute géodésique  $\gamma \in \Gamma(x, y)$ , on a par le fait que  $\gamma$  est paramétrée sur  $[0, 1]$  que

$$|u(x) - u(y)| \leq l(\gamma) \int_0^1 \rho(\gamma(s)) ds$$

et donc, on a

$$|u(x) - u(y)| \leq \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} l(\gamma) \left( \int_0^1 \rho(\gamma(s)) ds \right) d\lambda_{xy}(\gamma).$$

On en déduit comme d'habitude (en notant pour simplifier  $dx$  l'intégration par rapport à  $\mu$ )

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| dx &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \int_B |u(x) - u(y)| dx dy \\ &\leq \frac{1}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} l(\gamma) \left( \int_0^1 \rho(\gamma(s)) ds \right) d\lambda_{xy}(\gamma) \right) dx dy \\ &\leq \frac{\text{diam}(B)}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \left( \int_0^1 \rho(\gamma(s)) ds \right) d\lambda_{xy}(\gamma) \right) dx dy. \end{aligned}$$

Nous allons appliquer la même astuce que dans la preuve dans le cas des variétés à courbure positive en utilisant ici la symétrie  $\lambda_{xy} = \lambda_{yx}$ . Ainsi, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \int_0^1 \rho(\gamma(s)) ds d\lambda_{xy}(\gamma) &= \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \int_0^{1/2} \rho(\gamma(s)) ds d\lambda_{xy}(\gamma) \\ &\quad + \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \int_{1/2}^1 \rho(\gamma(s)) ds d\lambda_{xy}(\gamma) \\ &= \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \int_0^{1/2} \rho(\gamma(s)) ds d\lambda_{xy}(\gamma) \\ &\quad + \int_{\gamma \in \Gamma(y, x)} \int_0^{1/2} \rho(\gamma(s)) ds d\lambda_{yx}(\gamma) \\ &= 2 \int_{\gamma \in \Gamma(x, y)} \int_0^{1/2} \rho(\gamma(s)) ds d\lambda_{xy}(\gamma). \end{aligned}$$

On en déduit en utilisant la condition  $MCP(0, N)$  ou plutôt sa conséquence (4.80)

$$\begin{aligned}
\int_B |u - u_B| dx &\leq \frac{2 \text{diam} B}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_{\gamma \in \Gamma(x,y)} \left( \int_0^{1/2} \rho(\gamma(s)) ds \right) d\lambda_{xy}(\gamma) \right) dx dy \\
&\leq \frac{2 \text{diam} B}{\mu(B)} \int_B \int_B \left( \int_{\gamma \in \Gamma(x,y)} \left( \int_0^{1/2} 2^N (1-s)^N \rho(\gamma(s)) ds \right) d\lambda_{xy}(\gamma) \right) dx dy \\
&\leq \frac{2^{N+1} \text{diam} B}{\mu(B)} \int_{x \in B} \int_0^{1/2} \int_{2B} \rho(y) d\mu(y) \\
&\leq 2^N \text{diam} B \int_{2B} \rho(z) dz.
\end{aligned}$$

Nous retrouvons le même résultat que pour les variétés à courbure de Ricci positive ! Comme la mesure  $\mu$  est doublante par le théorème 4.81, on peut conclure.  $\square$

Passons aux “espaces métriques à courbure sectionnelle positive” (appelés espaces d’Alexandrov). Soit  $(X, d)$  un espace métrique que l’on suppose géodésique. Un triangle géodésique dans  $X$  est la donnée de trois points (les sommets)  $x, y, z$  et de segments géodésiques notés  $[x, y]$ ,  $[y, z]$  et  $[z, x]$  qui relient les sommets. Evidemment, un triangle géodésique n’est pas donné que par ces sommets car nous ne supposons pas qu’il y a unicité d’un segment géodésique joignant deux points (penser au cas du groupe d’Heisenberg). L’espace euclidien (par exemple  $\mathbb{R}^2$ ) est plat donc de courbure nulle. L’idée de base est de dire qu’un espace  $X$  est à courbure positive si ses triangles (géodésiques) sont plus “ventrus” que ceux du plan euclidien. Cela se formalise de la façon suivante. Soit  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  un triangle géodésique de  $X$ . Un triangle de comparaison est juste un triangle de  $\mathbb{R}^2$  (ou de  $\mathbb{R}^n$ ) de sommets  $x', y'$  et  $z'$  de sorte que  $d(x, y) = \|x - y\|$ ,  $d(y, z) = \|y' - z'\|$  et  $d(z, x) = \|z' - x'\|$ .

**Définition 4.83.** On dit que  $X$  est de courbure positive au sens d’Alexandrov (ou est un espace d’Alexandrov) si pour tout triangle géodésique  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  de  $X$ , et tout triangle de comparaison de sommets  $x', y', z'$  de  $\mathbb{R}^2$  (ou d’un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ ), on a  $d(p, q) \geq \|p' - q'\|$  dès que  $p \in [x, y]$ ,  $q \in [x, z]$ ,  $p' \in [x', y']$  avec  $d(x, p) = \|x' - p'\|$  et  $q' \in [x', z']$  avec  $d(x, q) = \|x' - q'\|$ .

Il est clair que d’après cette définition, les espaces d’Alexandrov sont non branchants. On notera dans la suite  $xyz$  un triangle géodésique de  $X$  et  $x'y'z'$  un triangle de comparaison correspondant (dans un espace euclidien). Par définition, l’espace euclidien  $\mathbb{R}^n$  est un espace d’Alexandrov. De façon générale, une variété riemannienne complète à courbure sectionnelle positive est un espace d’Alexandrov. On peut définir aussi des espaces à courbure “sectionnelle”  $\geq -1$  ou  $\geq +1$  en faisant la comparaison de triangles géodésiques de  $X$  avec ceux du disque de Poincaré (qui est à courbure  $-1$ ) ou de la sphère unité  $S^2$  de  $\mathbb{R}^3$  (qui est à courbure  $+1$ ) ou alors avec les espaces modèles de courbure  $K$  pour tout  $K \in \mathbb{R}$  (Il suffit de modifier la métrique d’un facteur multiplicatif dans le cas du disque de Poincaré ou de la sphère). Notons que contrairement à la condition  $MCP$  (ou les autres condition de type courbure/dimension que nous allons rencontrer dans la suite) la définition de “courbure” au sens d’Alexandrov ne nécessite pas une mesure mais est purement métrique. Comme nous allons avoir besoin d’une mesure, nous allons supposer que l’espace d’Alexandrov  $(X, d)$  est de dimension de Hausdorff finie  $Q$  et on munit  $(X, d)$  de la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^Q$  de dimension  $Q$ . Il se trouve qu’alors  $Q$  est un entier (voir le chapitre 10 de [23] qui donne une bonne introduction à la géométrie de ces espaces ou [110] pour une description de comment les notions classiques de géométrie riemannienne peuvent s’adapter dans ces espaces).

Il existe dans le cadre des espaces d’Alexandrov des inégalités de type Poincaré qui utilisent la notion de forme de Dirichlet (Voir par exemple [81]). Mais, on peut aussi démontrer des inégalités de Poincaré avec les gradients supérieurs. Avant cela, nous aurons besoin du résultat suivant.

**Proposition 4.84.** Soit  $(X, d)$  un espace d’Alexandrov de dimension de Hausdorff finie  $Q$ . Alors, pour tout  $x \in X$ ,  $\mathcal{H}^Q(C_{\text{geod}}(x)) = 0$ .

*Démonstration.* Soit  $x \in X$ . On commence par considérer le cut locus  $C(x)$  de  $x$ . On pose  $W(x) = X \setminus C(x)$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{H}^Q(C(x)) = 0$ . Cela nous permettra de conclure. En effet, si  $y \in C_{geod}(x)$ , alors  $y \in C(x)$  et donc  $C_{geod}(x) \subset C(x)$ . Le dernier point vient du fait que si  $y \in C_{geod}(x)$  mais  $y \notin C(x)$ , alors  $y$  est un point de branchement de  $X$ . Ce qui est impossible puisqu'un espace d'Alexandrov est non branchant. Pour estimer la mesure de  $C(x)$ , on note que  $W(x) = \cup_{\delta > 0} W_\delta(x)$  où, pour tout  $\delta > 0$ ,  $W_\delta(x)$  est l'ensemble des  $y \in X$  tel qu'il existe un segment géodésique  $[x, x']$  contenant  $y$  avec  $d(x, y) \leq (1 - \delta)d(x, x')$ . Alors,  $W_\delta(x)$  est mesurable comme réunion des fermés  $W_\delta(x)$ . Le fait que  $W_\delta$  est fermé vient du fait que la limite de segments géodésiques pour la convergence uniforme reste un segment géodésique. On fixe  $\delta > 0$  et  $r > 0$ . On construit une application  $f_{r,\delta} : W_\delta(x) \cap B(x, (1 - \delta)r) \rightarrow B(x, r)$  de la façon suivante. Si  $y \in W_\delta(x) \cap B(x, (1 - \delta)r)$ , on choisit un segment géodésique  $[x, x']$  avec  $x' \in B(x, r)$  contenant  $y$  tel que  $d(x, y) = (1 - \delta)d(x, x')$ , et on pose  $x' = f_{r,\delta}(y)$ . Alors,  $f_{r,\delta}$  est surjective car  $X$  est géodésique. Soient maintenant  $y_1, y_2 \in W_\delta(x) \cap B(x, (1 - \delta)r)$ . Notons pour  $i = 1, 2$ ,  $x_i = f_{r,\delta}(y_i)$ . On considère un triangle de comparaison de  $xx_1x_2$  de sommets notés  $\tilde{x}, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2$  puis pour  $i = 1, 2$ , un point  $\tilde{y}_i \in [\tilde{x}, \tilde{x}_i]$  tel que  $|\tilde{x} - \tilde{y}_i| = (1 - \delta)|\tilde{x} - \tilde{x}_i|$ . Alors, par définition des espaces d'Alexandrov et par le théorème de Thalès, on a

$$d(f_{r,\delta}(y_1), f_{r,\delta}(y_2)) = |\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2| \leq (1 - \delta)^{-1}|\tilde{y}_1 - \tilde{y}_2| = (1 - \delta)^{-1}d(y_1, y_2).$$

Donc,  $f_{r,\delta}$  est  $(1 - \delta)^{-1}$ -contractante. Il s'en suit que

$$(1 - \delta)^{-Q} \mathcal{H}^Q(W_\delta(x) \cap B(x, (1 - \delta)r)) \geq \mathcal{H}^Q(B(x, r)).$$

En faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient  $\mathcal{H}^Q(W(x) \cap B(x, r)) = \mathcal{H}^Q(B(x, r))$  et donc  $\mathcal{H}^Q(C(x) \cap B(x, r)) = 0$  pour tout  $r > 0$ . D'où  $\mathcal{H}^Q(C(x)) = 0$ .  $\square$

Nous pouvons maintenant conclure sur l'existence d'inégalités de Poincaré. Rappelons que les espaces d'Alexandrov sont non branchants.

**Théorème 4.85.** *Soit  $(X, d)$  un espace d'Alexandrov de dimension de Hausdorff finie  $Q$  que l'on munit de sa mesure de Hausdorff naturelle notée  $\mu = \mathcal{H}^Q$ . Alors,  $(X, d, \mu)$  vérifie MCP(0,  $Q$ ) et donc supporte une inégalité de Poincaré de type (1, 1).*

*Démonstration.* Soient un point  $x \in X$  et un ensemble mesurable  $A \subset X$  avec  $\mu(A) > 0$ . On considère une application  $\phi_A : A \rightarrow Geo(X)$  telle que  $\phi_A(y) = \gamma$  où  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  est un segment géodésique (choisi de façon arbitraire) reliant  $y \in A$  à  $x$ , c'est à dire  $\gamma(0) = y$  et  $\gamma(1) = x$ . Alors,  $\phi_A$  est mesurable. En effet, pour voir cela, considérons pour tout  $\delta > 0$ , l'ensemble noté  $A_\delta$  des points  $y$  de  $A$  pour lesquels il existe deux segments géodésiques  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  reliant  $y$  à  $x$  telles que pour un  $t \in [0, 1]$ ,  $d(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \geq \delta$ . Comme une limite (pour la topologie de la convergence uniforme) d'une suite de segments géodésiques reste un segment géodésique,  $A_\delta$  est fermé pour tout  $\delta > 0$ . Soit  $V = X \setminus C_{geod}(x)$  où  $C_{geod}(x)$  est le cut locus géodésique en  $x$ . Alors, puisque  $V = X \setminus (\cup_{\delta > 0} A_\delta)$ ,  $V$  est mesurable. Comme  $\phi_A$  est continue sur  $V$  (car  $V$  est l'ensemble des points  $y \in A$  pour lesquels il existe un unique segment géodésique reliant  $y$  à  $x$ ) et que le cut locus géométrique  $C_{geod}(x)$  de  $x$  est de mesure nulle (voir la proposition précédente),  $\phi_A$  est mesurable.

Posons  $\mu_A = \frac{1}{\mu(A)}\mu$  la mesure normalisée de  $\mu$  sur  $A$  puis  $\Pi = (\phi_A)_\# \mu_A$ . Alors,  $\Pi$  convient pour avoir MCP(0,  $Q$ ). En effet, il est tout d'abord facile de vérifier que  $(e_0)_\# \Pi = \mu_A$  et  $(e_1)_\# \Pi = \delta_x$ . De plus, fixons  $t \in [0, 1]$ . Pour  $y \in A$ , on pose  $z_A(y) = e_t(\phi_A(y))$ . Nous voulons maintenant utiliser la condition de courbure et pour cela, il est naturel de comparer avec ce qui se passe dans  $\mathbb{R}^Q$ . Rappelons que  $Q \in \mathbb{N}$  par la théorie des espaces d'Alexandrov. Choisissons donc un  $x' \in \mathbb{R}^Q$  et considérons l'application associée  $\phi'$  définie comme précédemment (c'est à dire  $\phi'(y')$  est l'unique segment euclidien de  $\mathbb{R}^Q$  reliant  $y' \in \mathbb{R}^Q$  à  $x'$ ). On note aussi  $f_t(y') = e_t(\phi'(y'))$  pour tout  $y' \in \mathbb{R}^Q$ . Si  $y_1$  et  $y_2$  sont des points de  $X$  et si  $x'y_1y_2$  est un triangle de comparaison dans  $\mathbb{R}^Q$  du triangle  $xy_1y_2$ , alors on a  $d(z_A(y_1), z_A(y_2)) \geq$

$|f_t(y'_1) - f_t(y'_2)|$ . On en déduit que  $d\mathcal{H}^Q(z_A)(y) \geq |\det f_t(y')|d\mathcal{H}^Q(y)$  où  $y'$  est un point de  $\mathbb{R}^Q$  qui vérifie  $d(x, y) = \|x' - y'\|$ . Comme  $|\det(f_t)(y')| = t^Q$ , on peut conclure facilement.  $\square$

Nous avons donc le

**Corollaire 4.86.** Soit  $(X, d)$  un espace d'Alexandrov de dimension de Hausdorff finie  $Q$  que l'on munit de sa mesure de Hausdorff naturelle notée  $\mu = \mathcal{H}^Q$ . Alors,  $(X, d, \mu)$  est un espace de Loewner de dimension  $Q$  si et seulement si  $\mu$  est Ahlfors-régulière de dimension  $Q$ .

### Espaces à courbure de Ricci positive au sens du transport optimal

La théorie du transport optimal (voir [146] pour une introduction au sujet) commence avec Gaspard Monge et le problème des déblais et remblais à la fin du XVIIIème siècle. La question peut être formulée de la façon suivante. On a un trou de  $1m^3$  et un tas de sable de  $1m^3$ . Quelle est la façon la plus économique de transporter le tas de sable pour boucher le trou ? Nous allons maintenant donner une formulation mathématique à ce problème. Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On choisit une fonction coût  $c : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$  qui mesure le coût de transport pour aller de  $x$  à  $y$ . On peut imaginer que ce coût dépend de la distance entre  $x$  et  $y$ . Ainsi, les fonctions les plus utilisées sont  $c(x, y) = d(x, y)$  ou  $c(x, y) = d(x, y)^2$ . On se donne deux mesures de probabilité  $\mu$  (le tas de sable) et  $\nu$  (le trou) sur  $X$ . La formulation moderne (que nous appellerons formulation de Monge) est de déterminer

$$\inf_T \int_X c(x, T(x))d\mu(x) \quad (4.87)$$

où l'inf est pris sur toutes les applications  $T : X \rightarrow X$  telles que la mesure image de  $\mu$  par  $T$  soit  $\nu$  (ainsi  $T$  transporte  $\mu$  vers  $\nu$ ), c'est à dire  $T_\# \mu = \nu$ . Plaçons nous un moment dans  $\mathbb{R}^n$  muni de sa structure euclidienne et de la mesure de Lebesgue. Supposons de plus que  $\mu$  et  $\nu$  sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue, avec des densités respectives  $f$  et  $g$ . Si on pense à  $T$  comme un changement de variable, on voit que  $T$  doit vérifier l'équation (hautement non linéaire)

$$f(x) = g(T(x)) \frac{|\det(T(x))|}{m_T(x)}$$

où  $m_T(x)$  est la multiplicité de  $T$  en  $x$ . L'existence d'un transport optimal, c'est à dire d'une application  $T$  vérifiant (4.87), n'est donc pas un problème simple. Avant de donner un résultat dans ce sens dans  $\mathbb{R}^n$ , donnons une autre formulation due à Kantorovich qui a une solution dans le cadre général des espaces polonais (c'est à dire les espaces métriques qui sont complets et séparables). Le problème est maintenant de déterminer

$$\inf_\beta \int_{X \times X} c(x, y)\beta(dx, dy)$$

où l'infimum est pris sur toutes les mesures de probabilité  $\beta$  (appelées plan de transport de  $\mu$  sur  $\nu$ ) sur  $X \times X$  telles que les marginales (c'est à dire les mesures images par les projections sur les axes) soient  $\mu$  et  $\nu$ . On peut voir  $\beta(dx, dy)$  comme la masse transportée de la partie infinitésimale  $dx$  du support de  $\mu$  vers la partie infinitésimale  $dy$  du support de  $\nu$ . Il existe toujours des plans de transport. En effet, on peut par exemple prendre la mesure produit  $\mu \times \nu$  mais elle est rarement optimale ! Il n'est pas très difficile de voir que si  $T$  est une solution du problème de Monge,  $\beta(dx, dy) = d\mu(x)\delta_{y=T(x)}$  est solution du problème de Kantorovich. Terminons cette revue du transport optimal par un théorème d'existence non trivial. Pour cela, nous considérons le coût quadratique sur  $\mathbb{R}^n$ , c'est à dire  $c(x, y) = |x - y|^2$ .

**Théorème 4.88.** Soient  $\mu = f(x)dx$  et  $\nu = g(x)dx$  deux mesures de probabilité absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue de  $\mathbb{R}^n$ . Alors, il existe une unique solution  $T$  au problème (4.87). De plus, le minimiseur  $T$  vérifie les deux propriétés suivantes :

(i)  $T$  est de la forme  $T = \nabla\phi$  où  $\phi$  est une fonction convexe.

(ii)  $T$  est (presque partout) solution de l'équation de Monge-Ampère

$$\det(\nabla^2\phi(x)) = \frac{f(x)}{g(\nabla\phi(x))}.$$

Soit  $(X, d)$  un espace métrique (séparable) muni d'une mesure de référence  $m$ . On note  $Rect(X)$  l'espace des courbes rectifiables de  $X$ . On suppose que toutes ces courbes sont paramétrées (à vitesse constante) par le même intervalle  $[0, 1]$ . Avec cette convention, une fonction mesurable  $\rho : X \rightarrow [0, \infty]$  est un gradient supérieur de la fonction continue  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  si pour toute courbe rectifiable  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , on a

$$|u(\gamma(0)) - u(\gamma(1))| \leq l(\gamma) \int_0^1 \rho(\gamma(t)) dt,$$

où  $l(\gamma)$  est la longueur de  $\gamma$ . Comme précédemment, on définit l'application  $e_t : Rect(X) \rightarrow X$  ( $t \in [0, 1]$ ) par  $e_t(\gamma) = \gamma(t)$  pour tout  $\gamma \in Rect(X)$ . Cette définition étend celle du paragraphe précédent donnée pour les segments géodésiques. Enfin, si  $Y$  est un ensemble, on notera  $\mathcal{P}(Y)$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $Y$ .

Nous supposerons dans la suite que  $(X, d)$  est un espace géodésique et que toutes les segments géodésiques sont paramétrés sur  $[0, 1]$ . Notons aussi qu'il existe une application mesurable  $GeoSel : X^2 \rightarrow Geo(X)$  telle que pour tout  $(x, y) \in X^2$ ,  $GeoSel(x, y)$  est une géodésique  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  avec  $\gamma(0) = x$  et  $\gamma(1) = y$ .

**Définition 4.89.** On dit que l'espace métrique mesuré  $(X, d, m)$  vérifie la condition de Rajala si pour tout couple de mesures de probabilité  $\mu, \nu$  absolument continues par rapport à  $m$  et de densités (notées respectivement  $\rho_0$  et  $\rho_1$ ) par rapport à  $m$  bornées, il existe une mesure de probabilité  $\Pi \in \mathcal{P}(Geo(X))$  sur  $Geo(X)$  telle que, si on pose  $\mu_t = (e_t)_\# \Pi$ , on a

$$(R1) \quad \mu_0 = \mu \text{ et } \mu_1 = \nu.$$

(R2) Pour tout  $t \in ]0, 1[$ ,  $\mu_t$  est absolument continue par rapport à  $m$  et sa densité  $\rho_t$  vérifie

$$\|\rho_t\|_\infty \leq \max(\|\rho_0\|_\infty, \|\rho_1\|_\infty).$$

**Remarque 4.90.** Dans la suite, un seul cas sera utile. Si  $A$  est un borélien de  $X$  avec  $m(A) > 0$ , on note  $m_A$  la mesure de probabilité  $m_A = \frac{1}{m(A)} m \llcorner A$  où  $m \llcorner A$  est la restriction de  $m$  sur  $A$ . Le cas intéressant dans la condition de Rajala est quand  $\mu = m_A$  et  $\nu = m_B$  où  $A$  et  $B$  sont des boréliens disjoints de  $X$  avec  $m(A), m(B) > 0$ .

Nous allons munir  $\mathcal{P}(X)$  (l'espace des mesures de probabilités sur  $X$ ) d'une "distance". Pour cela, posons pour  $\mu, \nu$  dans  $\mathcal{P}(X)$

$$W_2(\mu, \nu) = \inf_{\beta} \left( \int_{X \times X} d(x, y)^2 d\beta(x, y) \right)^{1/2}$$

où l'infimum est pris sur tous les  $\beta \in \mathcal{P}(X \times X)$  telle que  $\mu(A) = \beta(A \times X)$  et  $\nu(A) = \beta(X \times A)$  pour tout borélien  $A \subset X$ . En d'autres termes,  $\mu$  et  $\nu$  sont les marginales de  $\beta$ . On retrouve la formulation de Kantorovich du problème du transport optimal (pour le coût quadratique). Si  $\mu$  et  $\nu$  sont dans  $\mathcal{P}(X)$ , on note  $Opt(\mu, \nu)$  l'ensemble des mesures de probabilité  $\beta \in \mathcal{P}(X \times X)$  telles que

$$W_2(\mu, \nu)^2 = \int_{X \times X} d(x, y)^2 d\beta(x, y).$$

On appelle  $W_2$  la distance de Wasserstein  $L^2$  mais il faut voir que si la distance  $d$  n'est pas bornée sur  $X$ ,  $W_2(\mu, \nu)$  peut être infinie. Ainsi,  $W_2$  n'est pas une vraie distance mais le devient si on se restreint aux mesures de probabilité  $\mu$  ayant un deuxième moment fini, c'est à dire que pour un certain  $x_0 \in X$  (et donc pour tous les  $x_0$  de  $X$ )  $\int_X d(x_0, x)^2 d\mu(x) < +\infty$  (voir [147]). Cela sera toujours le cas pour nous dans la suite.

**Théorème 4.91.** *Soit  $(X, d)$  un espace géodésique complet. Supposons que  $\mu_0$  et  $\mu_1$  sont des mesures de  $\mathcal{P}(X)$  avec  $W_2(\mu_0, \mu_1) < \infty$ . Si  $\mu_t : t \in [0, 1] \rightarrow \mu_t \in \mathcal{P}(X)$  est une courbe géodésique pour  $W_2$  (paramétrisée comme d'habitude à vitesse constante) reliant  $\mu_0$  à  $\mu_1$ , alors il existe une mesure de probabilité  $\Pi \in \mathcal{P}(\text{Geo}(X))$  sur  $\text{Geo}(X)$  telle que  $(e_0, e_1)_\# \Pi \in \text{Opt}(\mu_0, \mu_1)$  et pour tout  $t \in [0, 1]$ ,  $\mu_t = (e_t)_\# \Pi$ .*

L'ensemble de ces mesures de probabilité  $\Pi$  sera notée  $\text{GeoOpt}(\mu_0, \mu_1)$ . L'idée qui suit l'intuition est que le transport optimal se fait le long des géodésiques de l'espace  $X$ .

Fixons  $N \in [1, \infty[$ . On note  $\mathcal{DC}_N$  l'ensemble des fonctions convexes  $F : [0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $F(0) = 0$  et  $r \rightarrow r^N F(r^{-N})$  est convexe sur  $\mathbb{R}$ . A toute fonction  $F \in \mathcal{DC}_N$ , on associe une fonctionnelle  $\mathcal{F} : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\mathcal{F}(\mu) = \int_X F(\rho) dm + F'(\infty) \mu^{\text{orth}}(X)$$

où  $\mu = \rho m + \mu^{\text{sing}}$  (c'est à dire  $\rho m$  et  $\mu^{\text{sing}}$  sont respectivement les mesures absolument continues et singulières dans la décomposition de Lebesgue de  $\mu$  par rapport à  $m$ ). Ici,  $F'(\infty) = \lim_{r \rightarrow +\infty} F(r)/r$ .

Un exemple typique de fonction  $F$  de  $\mathcal{DC}_N$  est  $F_N(r) = -r^{1-1/N}$ . Dans ce cas,  $F'_N(\infty) = 0$  et la fonctionnelle associée s'appelle l'entropie de Rényi :

$$\mathcal{E}_N(\mu) = - \int_X \rho^{1-1/N} dm$$

où  $\mu = \rho m + \mu^{\text{sing}}$ . Un autre exemple est la fonction  $r \rightarrow r^p$  (avec  $p > 1$ ) qui est dans tous les  $\mathcal{DC}_N$ .

**Définition 4.92.** On dit que l'espace géodésique mesuré  $(X, d, m)$  vérifie la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$  si pour tout couple de mesures  $(\mu_0, \mu_1)$  dans  $\mathcal{P}(X)$  qui sont absolument continues par rapport à  $m$  (de densité respective  $\rho_0$  et  $\rho_1$ ) avec  $W_2(\mu_0, \mu_1) < \infty$ , il existe  $\Pi \in \text{GeoOpt}(\mu_0, \mu_1)$  de sorte que le long de la géodésique  $\mu_t = (e_t)_\# \Pi$ , pour tout  $F \in \mathcal{DC}_N$ , tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\mathcal{F}(\mu_t) \leq (1-t) \int \int_{X \times X} \frac{1}{\rho_0(x_0)} F(\rho_0(x_0)) d\sigma(x_0, x_1) + t \int \int_{X \times X} \frac{1}{\rho_1(x_1)} F(\rho_1(x_1)) d\sigma(x_0, x_1)$$

dès que  $\mu_0 = \rho_0 m$ ,  $\mu_1 = \rho_1 m$  et où  $\sigma = (e_0, e_1)_\# \Pi$ .

Cette définition est due sous cette forme à Lott et Villani [90]. Une définition qui ne prend en considération que l'entropie de Rényi a été proposée indépendamment par Sturm (voir [138] et [139]). Il n'est pas connu si ces deux définitions sont équivalentes. Evidemment, les espaces à courbure positive au sens de Lott-Villani sont à courbure positive au sens de Sturm. Un point important est qu'une variété riemannienne de dimension  $n$  à courbure de Ricci positive vérifie  $CD(0, n)$  et qu'en fait cette condition les caractérise. De plus, la condition  $CD(0, N)$  est stable pour la convergence de Gromov-Hausdorff mesuré. Pour tout cela, voir [147].



**Définition 4.93.** On dit que l'espace géodésique mesuré  $(X, d, m)$  vérifie l'inégalité de Brunn-Minkowski  $BM(0, N)$  si pour tous ensembles mesurables  $A_0, A_1$  de  $X$  avec  $m(A_0), m(A_1) > 0$ , et tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$m(A_t)^{1/N} \geq (1-t)m(A_0)^{1/N} + tm(A_1)^{1/N},$$

où  $A_t$  est l'ensemble  $t$ -intermédiaire entre  $A_0$  et  $A_1$ , c'est à dire  $A_t$  est l'ensemble des  $x \in X$  pour lesquels il existe  $x_0 \in A_0$  et  $x_1 \in A_1$  tels que  $d(x, x_0) = td(x_0, x_1)$  et  $d(x, x_1) = (1-t)d(x_0, x_1)$ .

**Théorème 4.94.** Soit  $(X, d, m)$  un espace métrique mesuré qui vérifie la condition  $CD(0, N)$ . Alors  $X$  admet une inégalité de Brunn-Minkowski  $BM(0, N)$ .

*Démonstration.* On ne considère que le cas  $m(A_0), m(A_1) < +\infty$ . Le cas général s'en déduit par approximation. On pose  $\mu_0 = \frac{1}{m(A_0)}m \llcorner A_0$  et  $\mu_1 = \frac{1}{m(A_1)}m \llcorner A_1$ . Donc, les densités de  $\mu_0$  et  $\mu_1$  par rapport à  $m$  sont respectivement  $\rho_0 = \frac{1}{m(A_0)}\chi_{A_0}$  et  $\rho_1 = \frac{1}{m(A_1)}\chi_{A_1}$ . Soit  $(\mu_t)_{t \in [0,1]}$  une géodésique pour  $W_2$  reliant  $\mu_0$  et  $\mu_1$ . On applique  $CD(0, N)$  avec l'entropie de Renyi  $\mathcal{E}_N$  pour obtenir pour  $t \in [0, 1]$

$$(1-t)m(A_0)^{1/N} + tm(A_1)^{1/N} \leq \int_{A_t} \rho_t^{1-1/N} d\mu$$

où  $\rho_t$  est la densité de  $\mu_t$  par rapport à  $\mu$ . On peut conclure en appliquant l'inégalité de Jensen au membre de droite.  $\square$

On en déduit alors une version du théorème de Bishop-Gromov (comme dans le cadre des espaces vérifiant  $MCP(0, N)$ ).

**Corollaire 4.95.** Soit  $(X, d, m)$  un espace métrique mesuré qui vérifie la condition  $CD(0, N)$ . Alors, pour tout  $x \in X$  dans le support de  $m$ , tous les  $0 < r \leq R$ ,  $\frac{m(B(x, R))}{m(B(x, r))} \leq \left(\frac{R}{r}\right)^N$ . En particulier,  $m$  est doublante et  $(X, d)$  est de dimension de Hausdorff inférieure à  $N$ .

Pour une preuve, voir [139]. L'idée est d'appliquer l'inégalité  $BM(0, N)$  à  $A_0 = B(x, \varepsilon)$ ,  $A_1 = B_f(x, R + \delta R) \setminus B(x, R)$  et  $t = r/R$  pour  $\varepsilon, \delta > 0$  assez petits. La difficulté technique consiste à passer à la limite quand  $\varepsilon, \delta \rightarrow 0$ .

**Théorème 4.96.** Soit  $(X, d, m)$  un espace géodésique mesuré. Supposons que  $(X, d, m)$  satisfait la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$  pour un certain  $N \geq 1$ . Si  $\mu, \nu$  sont des mesures de probabilité de  $\mathcal{P}(X)$  absolument continues par rapport à la mesure de référence  $m$  (avec  $W_2(\mu, \nu) < \infty$ ) et dont les densités (par rapport à  $m$ ) sont bornées par une même constante  $C$ , alors il existe  $\Pi \in Opt(\mu, \nu)$  de sorte que  $\rho_t(x) \leq C$  pour  $m$ -presque tout  $x \in X$ . Ici,  $\rho_t$  est la densité de  $(e_t)_\# \Pi$  par rapport à  $m$ .

*Démonstration.* Soit  $\Pi \in Opt(\mu, \nu)$  donnée par la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$  et soit  $\sigma = (e_0, e_1)_\# \Pi$ . Considérons  $p \geq 1$  et posons  $F(r) = r^p$ . Alors,  $F \in \mathcal{DC}_N$  et on a

$$\begin{aligned} \|\rho_t\|_p^p = \mathcal{F}(\rho_t m) &\leq (1-t) \int \int_{X \times X} (\rho_0(x_0))^{p-1} d\sigma(x_0, x_1) \\ &+ t \int \int_{X \times X} (\rho_1(x_1))^{p-1} d\sigma(x_0, x_1) \\ &\leq (1-t)C^{p-1} + tC^{p-1} = C^{p-1}. \end{aligned}$$

D'où,  $\|\rho_t\|_\infty \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} \|\rho_t\|_p \leq \lim_{p \rightarrow +\infty} C^{\frac{p-1}{p}} = C$ .  $\square$

On en déduit tout de suite le résultat suivant.

**Corollaire 4.97.** Soit  $(X, d, m)$  un espace géodésique mesuré qui vérifie la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$  pour un  $N \geq 1$ . Alors,  $X$  vérifie la condition de Rajala.

Notons que la preuve précédente ne s'adapte pas à la condition de courbure positive au sens de Sturm (car elle n'englobe pas les fonctions de type  $F(r) = r^p$ ). Nous y reviendrons plus tard. Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

**Théorème 4.98.** Soit  $(X, d, m)$  un espace géodésique mesuré qui vérifie la condition de Rajala. Alors,  $X$  admet une inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$  de la forme

$$\int_B |u - u_B| dm \leq C(\text{diam}B) \int_{2B} g(y) dm(y)$$

où  $B$  est une boule de  $X$ ,  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue dont  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  est un gradient supérieur.

Dans le cas d'un espace vérifiant la condition de Rajala, la mesure n'est pas doublante et donc on obtient une inégalité de Poincaré sans moyenne. Si l'espace géodésique mesuré  $(X, d, m)$  satisfait la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$ , alors  $m$  est doublante et vérifie la condition de Rajala. D'où,  $X$  supporte une "vraie" inégalité de Poincaré de type  $(1, 1)$ . Nous avons ainsi une version métrique du théorème sur les variétés à courbure de Ricci positive. On a donc le

**Corollaire 4.99.** Soit  $(X, d, m)$  un espace géodésique mesuré qui vérifie la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$  pour un  $N \geq 1$ . Alors,  $(X, d, m)$  est un espace de Loewner si et seulement si  $m$  est Ahlfors-régulière.

*Démonstration.* Fixons une boule  $B = B(x, r)$  de  $X$  et soit  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  un gradient supérieur de  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  dans  $B$ . La démonstration est simple mais astucieuse. Considérons la médiane de  $f : M = \inf\{a \in \mathbb{R}; m(\{f > a\}) \leq m(B)/2\}$ . Alors, nous pouvons écrire  $B = B^+ \cup B^-$  où  $B^+ \cap B^- = \emptyset$ ,  $m(B^+) = m(B^-) = m(B)/2$  et  $f(x) \leq M \leq f(y)$  dès que  $x \in B^-$ ,  $y \in B^+$ . Soient  $\mu = \frac{1}{m(B^+)} m \llcorner B^+ = \frac{2}{m(B)} m \llcorner B^+$  et  $\nu = \frac{1}{m(B^-)} m \llcorner B^- = \frac{2}{m(B)} m \llcorner B^-$ . Nous appliquons la condition de Rajala à  $\mu$  et à  $\nu$  pour trouver un "bon"  $\Pi \in \mathcal{P}(\text{Geo}(X))$ . En particulier,  $\|\rho_t\|_\infty \leq 2/m(B)$  où  $\rho_t$  est la densité de  $(e_t)_\# \Pi$  par rapport à  $m$ . Maintenant, par définition de  $M$ , pour  $\Pi$ -presque tout  $\gamma \in \text{Geo}(X)$ ,  $\gamma(0) \in B^+$  et  $\gamma(1) \in B^-$ , et donc on a

$$\begin{aligned} |u(\gamma(0)) - u(\gamma(1))| &= u(\gamma(0)) - u(\gamma(1)) \\ &= u(\gamma(0)) - M + M - u(\gamma(1)) \\ &= |u(\gamma(0)) - M| + |M - u(\gamma(1))|. \end{aligned}$$

Il s'en suit alors

$$\begin{aligned} \int_{\text{Geo}(X)} |u(\gamma(0)) - u(\gamma(1))| d\Pi(\gamma) &= \int_{\text{Geo}(X)} |u(\gamma(0)) - M| d\Pi(\gamma) \\ &\quad + \int_{\text{Geo}(X)} |M - u(\gamma(1))| d\Pi(\gamma) \\ &= \frac{2}{m(B)} \int_{B^+} |u(x) - M| dm(x) \\ &\quad + \frac{2}{m(B)} \int_{B^-} |u(x) - M| dm(x) \\ &= \frac{2}{m(B)} \int_B |u(x) - M| dm(x) \end{aligned}$$

Nous pouvons en déduire l'inégalité de Poincaré.

$$\begin{aligned}
\int_B |u - u_B| dm &\leq \frac{1}{m(B)} \int_B \int_B |u(y) - u(z)| dm(y) dm(z) \\
&\leq \frac{1}{m(B)} \int_B \int_B (|u(y) - M| + |M - u(z)|) dm(y) dm(z) \\
&= 2 \int_B |u(y) - M| dm(y) \\
&= m(B) \int_{Geo(X)} |u(\gamma(0)) - u(\gamma(1))| d\Pi(\gamma) \\
&\leq m(B) \int_{Geo(X)} l(\gamma) \int_0^1 g(\gamma(t)) dt d\Pi(\gamma) \\
&\leq m(B) (\text{diam} B) \int_{Geo(X)} \int_0^1 g(\gamma(t)) dt d\Pi(\gamma) \\
&\leq m(B) (\text{diam} B) \int_0^1 \int_{B(x, 2r)} g(y) \rho_t(y) dm(y) dt \\
&\leq 2(\text{diam} B) \int_0^1 \int_{B(x, 2r)} g(y) dm(y) dt = 2(\text{diam} B) \int_{B(x, 2r)} g(y) dm(y).
\end{aligned}$$

On a utilisé le fait que pour  $\Pi$ -presque tout  $\gamma \in Geo(X)$ ,  $l(\gamma) \leq \text{diam} B$  et  $\gamma \subset B(x, 2r)$ .  $\square$

Cette démonstration dans le cas des espaces à courbure positive au sens de Lott-Villani est inspirée de [122]. Il est possible de l'adapter dans le cas des espaces à courbure positive au sens de Sturm mais c'est beaucoup plus technique (voir [121]). En particulier, la difficulté est de démontrer l'analogie du corollaire 4.97 dans ce cadre.

**Remarque 4.100.** Comme signalé précédemment, nous n'avons utilisé la condition de Rajala que dans le cas où les mesures sont de la forme  $\mu = m_A = \frac{1}{m(A)} m \llcorner A$  et  $\nu = \frac{1}{m(B)} m \llcorner B$  où  $A$  et  $B$  sont des boréliens de  $X$  avec  $m(A), m(B) > 0$ .

On conclut ce paragraphe avec une autre notion d'espace à courbure positive en relation avec le transport optimal. On dit que l'espace géodésique mesuré  $(X, d, m)$  vérifie la condition démocratique s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour toute boule  $B \subset X$ , il existe une mesure de probabilité  $\Pi \in \mathcal{P}(Geo(x))$  sur l'ensemble des segments géodésiques (paramétrés sur  $[0, 1]$ ) telle que

$$(CD1) \quad (e_0, e_1)_{\#} \Pi = m_B \otimes m_B,$$

$$(CD2) \quad \int_0^1 (e_t)_{\#} \Pi dt \leq C m_B$$

où comme précédemment  $e_t(\gamma) = \gamma(t)$  et  $m_B$  est la restriction normalisée de  $m$  sur la boule  $B$ . Cette condition est impliquée par la condition de courbure positive au sens du transport optimal si l'espace géodésique est non branchant (Voir [147], chapitre 19). Cette condition signifie que l'on peut transporter des mesures sans trop passer par les mêmes points de l'espace.

**Théorème 4.101.** Soit  $(X, d, m)$  un espace géodésique mesuré. Supposons que  $(X, d, m)$  satisfait la condition démocratique. Alors,  $X$  supporte une inégalité de Poincaré  $(1, 1)$  de la forme

$$\int_B |u - u_B| dm \leq C(\text{diam} B) \int_{2B} g(y) dm(y)$$

où  $B$  est une boule de  $X$ ,  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction continue dont  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  est un gradient supérieur.

*Démonstration.* Soit  $B = B(x, R)$  une boule dans  $X$  et soit  $g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  un gradient supérieur pour une fonction donnée  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Par (CD1), on a facilement

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| dm &\leq \frac{1}{m(B)} \int_B \int_B |u(y) - u(z)| dm(y) dm(z) \\ &\leq m(B) \int_{Geo(X)} |u(\gamma(0)) - u(\gamma(1))| d\Pi(\gamma). \end{aligned}$$

Puis, en utilisant que  $g$  est un gradient supérieur et (CD2), on a

$$\begin{aligned} \int_B |u - u_B| dm &\leq m(B) \int_{Geo(X)} l(\gamma) \int_0^1 g(\gamma(t)) dt d\Pi(\gamma) \\ &\leq (\text{diam} B) m(B) \int_{Geo(X)} \int_0^1 g(\gamma(t)) dt d\Pi(\gamma) \\ &\leq C(\text{diam} B) \int_{B(x, 2r)} g(y) dm(y) \end{aligned}$$

On a utilisé le fait que  $\Pi$ -presque toute courbe  $\gamma \in Geo(X)$  est de longueur au plus  $\text{diam}(B)$  et est donc contenu dans  $B(x, 2r)$ .  $\square$

### La condition de Bakry-Emery

Nous allons maintenant décrire une autre notion de courbure-dimension qui est liée à un opérateur de diffusion  $L$  comme par exemple le laplacien  $\Delta$ . La motivation initiale est l'étude géométrique de semi-groupes liés à des équations de diffusion comme l'équation de la chaleur et aux processus markoviens associés comme le mouvement brownien. Cette approche permet de démontrer certaines inégalités fonctionnelles comme les inégalité de Sobolev logarithmiques. Le but de ce paragraphe est de voir que les espaces métriques associés à ces géométries vérifient des inégalités de type Poincaré. Cette partie est fortement inspirée de [7] et de [85]. Les liens avec la transport optimal sont discutés dans [147] (chapitre 25 par exemple)

Commençons par quelques définitions un peu formelles. Soit  $L$  un opérateur (c'est à dire une forme linéaire sur  $\mathbb{R}$ ) défini sur une algèbre de fonctions notée  $\mathcal{A}$ . L'espace ambiant sera pour nous  $\mathbb{R}^n$  ou une variété riemannienne  $M$  de dimension  $n$ . Dans ces deux situations, l'exemple-type sera le cas du laplacien  $L = \Delta$  (voir plus bas). On définit alors l'opérateur "carré du champs" pour  $u, v \in \mathcal{A}$  par

$$\Gamma(u, v) = 1/2 (L(uv) - uLv - vLu).$$

Ainsi,  $\Gamma(u, v)$  mesure en quelque sorte l'écart avec le fait d'avoir une règle de dérivation en chaîne, de type Leibniz. Puis, on pose

$$\Gamma_2(u, v) = 1/2 (L\Gamma(u, v) - \Gamma(Lu, v) - \Gamma(u, Lv)).$$

Il faut bien voir que l'on passe de  $\Gamma$  à  $\Gamma_2$  par un procédé simple d'itération. Ainsi, on pourrait définir par récurrence pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,

$$\Gamma_{j+1}(u, v) = 1/2 (L\Gamma_j(u, v) - \Gamma_j(Lu, v) - \Gamma_j(u, Lv)),$$

pour toutes les fonctions  $u, v \in \mathcal{A}$  (si c'est possible) et avec  $\Gamma_0 = \Gamma$ . On pose  $\Gamma(u) = \Gamma(u, u)$ . Prenons le cas simple du laplacien  $Lu(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x)$  si  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . Alors, par des calculs élémentaires, on a pour  $u, v \in C^2(\mathbb{R}^n)$ ,

$$\Gamma(u, v) = \langle \nabla u, \nabla v \rangle,$$

$$L(\Gamma(u)) = 2 \left( \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x_i \partial x_j} \right) \right),$$

$$\Gamma(u, Lu) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial^3 u}{\partial^2 x_i \partial x_j} \right),$$

$$\Gamma_2(u) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right)^2.$$

Par définition du hessien de  $u$ , on a donc

$$\Gamma_2(u) = \|Hess(u)\|_2^2.$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, il vient

$$|\Delta u| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Il s'en suit que  $\Gamma_2(u) \geq \frac{1}{n} |\Delta u|^2$  et c'est cette inégalité que nous voulons généraliser. Le lecteur attentif aura noté que la dimension  $n$  apparait mais pas la courbure de  $\mathbb{R}^n$ . Ce qui est normal puisque celle-ci est nulle !

Soit maintenant une variété riemannienne complète  $(M, g)$  de dimension  $n$ . On considère sur  $M$  l'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta$  (c'est à dire l'analogue du laplacien quand  $M = \mathbb{R}^n$ ). On commence par rappeler que la métrique  $g$  donne en tout point  $x$  de  $M$  un produit scalaire  $g(x)$  sur l'espace tangent de  $M$  en  $x$ . On notera par la suite  $g = (g_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$  la matrice associée. Dans le cas euclidien, l'espace tangent en  $x \in \mathbb{R}^n$  peut être identifié à  $\mathbb{R}^n$  et en tout point  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $g(x)$  est tout simplement le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$ . Si  $u$  est de classe  $C^2$  sur  $M$ , son gradient est le champs de vecteurs donné en coordonnées locales par

$$\nabla u = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n g^{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}$$

où  $(g^{ij})$  est l'inverse de la matrice  $g$ . L'opérateur de Laplace-Beltrami est alors défini par

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Par un calcul analogue au précédent, on a  $\Gamma(u, v) = g^{-1}(\nabla u, \nabla v)$ . Ainsi, si nous supposons que la courbure de Ricci  $Ric$  est bornée par  $K$ , nous avons  $Ric(\nabla u, \nabla u) \geq K\Gamma(u)$ . Or, la formule de Böchner donne

$$\Gamma_2(u) = Ric(\nabla u, \nabla u) + \|Hess u\|_2^2.$$

Il s'en suit comme dans le cas euclidien par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que pour une fonction  $u \in C^\infty(M)$

$$\Gamma_2(u) \geq K\Gamma(u) + 1/n(\Delta u)^2.$$

On reconnaît une estimation comme dans le cas euclidien modulo le terme faisant intervenir la courbure. Passons maintenant au cas général.

Soit  $M$  une variété lisse de dimension  $n$  et soit  $L$  un opérateur elliptique du second ordre sur  $M$  (sans terme de degré 0). En coordonnées locales,  $L$  peut s'écrire sous la forme

$$Lu(x) = \sum_{i,j} g^{i,j}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i b^i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

où  $g^{i,j}$  et  $b^i$  sont des fonctions lisses. L'hypothèse d'ellipticité sur  $L$  implique que la matrice  $(g^{i,j}(x))$  est symétrique définie positive en tout  $x$  de  $M$ . D'où, nous pouvons introduire la métrique riemannienne  $g = (g_{i,j}(x))$  qui est l'inverse de la matrice  $(g^{i,j}(x))$ . Nous supposons maintenant que  $M$  est muni de la distance riemannienne  $d$  et de la mesure riemannienne  $m$  associé à  $g$ . Pour simplifier, on suppose que  $M$  est complète pour  $g$  (c'est à dire toute géodésique est prolongeable à l'infini) comme au dessus. Nous allons associer à une fonction régulière  $u$  sur  $M$  un gradient supérieur naturel relativement à  $L$ . Pour cela, on pose comme précédemment

$$\Gamma(u) = 1/2 (L(uv) - uLu - vLu).$$

On a alors que  $\Gamma(u, v) = \nabla u \cdot \nabla v$  (où  $\nabla$  est le gradient standard par rapport à  $g$ ) et donc  $\rho = |\Gamma(u, u)|^{1/2}$  est un gradient supérieur de  $u$  dans  $(M, d)$ . Par itération de l'opérateur  $\Gamma$ , on peut définir

$$\Gamma_2(u, u) = 1/2 (L\Gamma(u, v) - \Gamma(Lu, v) - \Gamma(u, Lv)).$$

**Définition 4.102.** Nous dirons que l'opérateur elliptique  $L$  vérifie la condition de courbure-dimension  $CD(K, N)$  de Bakry-Emery pour un  $N \geq n$  et une fonction  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  si, pour toute fonction régulière  $u$  sur  $M$  (par exemple  $u \in C^2(M)$ ) et pour tout  $x \in M$ , on a

$$\Gamma_2(u, u)(x) \geq \frac{1}{N} (Lu)(x)^2 + K(x)\Gamma(u, u)(x).$$

Notons que si  $N' \geq N$  et si  $L$  vérifie  $CD(K, N)$ , alors  $L$  satisfait  $CD(K, N')$ . D'où,  $CD(K, n)$  (où  $n$  est la dimension de la variété  $M$ ) est la condition la plus forte possible. Comme nous l'avons vu au dessus, si  $M$  est à courbure de Ricci minorée par  $K$  et si  $L = \Delta$ , alors  $L$  vérifie la condition de courbure-dimension  $CD(K, n)$  qui est optimal. Une remarque importante est que le laplacien est le seul opérateur raisonnable (pour être plus précis, le seul opérateur de diffusion) pour lequel on a une condition du type  $CD(K, N)$  avec  $N = n$ . Ainsi, il faut voir, comme dans le cas du transport optimal,  $N$  non pas comme une vraie "dimension" mais plutôt comme un paramètre. Nous pouvons maintenant donner le résultat principal du paragraphe. Rappelons que la variété  $M$  est muni de la distance  $d$  et du volume riemannien  $m$  de la métrique  $g$  associée à l'opérateur  $L$ .

**Théorème 4.103.** *Supposons que l'opérateur elliptique  $L$  vérifie la condition de courbure-dimension  $CD(0, N)$  pour un exposant  $N \geq n$  (où  $n$  est la dimension de  $M$ ). Alors, il existe une constante  $C \geq 0$  telle que pour toute fonction lisse  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ , on a l'inégalité de Poincaré suivante :*

$$\int_B |u - u_B| dm \leq C \text{diam} B \int_B \rho dm$$

où  $\rho = |\Gamma(u, u)|^{1/2}$  et  $B$  une boule dans  $M$  (par rapport à  $d$ ).

La démonstration (non publiée) est essentiellement la même que dans le cas riemannien classique (c'est à dire pour les variétés qui vérifient la condition de courbure positive). Le point-clé est une version du théorème de comparaison de Bishop-Gromov due à Bakry-Qian [11].

### Une digression : le cas des graphes discrets

Nous discutons rapidement le cas des espaces métriques discrets. Soit  $X$  un graphe (dénombrable), c'est à dire  $X$  est la donnée d'un ensemble  $S$  dénombrable de points appelés sommets et d'un ensemble  $A$  d'arêtes reliant certains sommets. Ainsi,  $A$  est juste un sous-ensemble de  $S^2$  avec la propriété que si  $(x, y) \in A$  alors  $(y, x) \in A$ . Nous avons déjà rencontré la notion de graphe discret dans le chapitre 2 (voir la preuve du théorème 2.117). On dit que les sommets  $x$  et  $y$  sont voisins, et on note  $x \sim y$ , si  $(x, y) \in A$ . On ne fait pas de différence entre  $X$  et  $S$ . Un chemin reliant deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  est une suite finie  $x = x_0, \dots, x_n = y$  de points dans  $X$  avec  $x_j \sim x_{j+1}$  pour tout  $j = 0, \dots, n-1$ . Nous supposons que le graphe  $X$  est connexe, c'est à dire que pour tout couple de points  $x$  et  $y$  de  $X$ , il existe toujours un chemin les reliant. On peut alors définir la distance géodésique  $d$  de la façon suivante. Si  $x$  et  $y$  sont dans  $X$ ,  $d(x, y)$  est l'infimum des  $n \in \mathbb{N}$  tels qu'il existe un chemin  $x = x_0, \dots, x_n = y$  reliant  $x$  à  $y$ . En d'autres termes,  $n$  est le nombre minimal d'arêtes de  $A$  pour relier  $x$  et  $y$ . Notons que  $d(x, y) = 1$  si et seulement si  $x \sim y$ . On munit  $X$  de la mesure de comptage  $m$ , c'est à dire si  $\Omega \subset X$ ,  $m(\Omega)$  est le cardinal de  $\Omega$ . En particulier, si  $x \in X$  et  $r > 0$ , on notera  $V(x, r) = m(B(x, r))$ .

**Exemple 4.104.** Soit  $(G, \cdot)$  un groupe finiment engendré (on note la loi de façon multiplicative). Ainsi, il existe un ensemble fini  $\mathcal{S} = \{s_1, \dots, s_n\}$  de générateurs que l'on suppose symétrique, c'est à dire si  $s \in \mathcal{S}$ , alors  $s^{-1}$  (l'inverse de  $s$  dans le groupe  $G$ ) est aussi dans  $\mathcal{S}$ . Donc, pour tout  $g \in G$ , il existe  $s_{i_1}, \dots, s_{i_k}$  dans  $\mathcal{S}$  tels que  $g = s_{i_1} \dots s_{i_k}$ . Nous allons associer au couple  $(G, \mathcal{S})$  un graphe  $X(G, \mathcal{S})$  appelé graphe de Cayley de  $(G, \mathcal{S})$  de la façon suivante. Les sommets sont les éléments du groupe  $G$ . Deux sommets, c'est à dire deux éléments  $g$  et  $g'$  du groupe, sont reliés par une arête s'il existe un générateur  $s \in \mathcal{S}$  tel que  $g = g's$  (ou de façon équivalente  $g' = gs'$  avec  $s' = s^{-1} \in \mathcal{S}$ ). On dit que  $G$  est à croissance polynomiale s'il existe  $C > 0$  et  $Q \in \mathbb{N}$  tels que  $V(x, r) \leq Cr^Q$  pour tout  $x \in X$  et tout  $r > 0$ . En fait, cette définition ne dépend pas du système de générateurs  $\mathcal{S}$  et donc du graphe de Cayley associé au groupe  $G$ .

Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction, on pose  $f_n(x) = \frac{1}{V(x, n)} \sum_{y \in B(x, n)} f(y)$  et  $|\nabla f(x)| = \sum_{y \in X, x \sim y} |f(x) - f(y)|$  (pour tout  $x \in X$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ).

**Définition 4.105.** On dit que  $X$  supporte une inégalité de Poincaré s'il existe une constante  $C \geq 0$  telle que, pour toute fonction  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  à support fini, on a

$$(P) \quad \sum_{y \in B(x, r)} |f(y) - f_n(x)| \leq Cr \sum_{y \in B(x, 2r)} |\nabla f(y)|,$$

dès que  $x \in X$ ,  $r \in \mathbb{N}^*$ .

Nous allons maintenant définir la notion de graphes à courbure positive au sens de Coulhon/Saloff-Coste. Pour cela, on fixe  $x \in X$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour tout couple de points  $(y, z) \in B(x, n)^2$ , on choisit un chemin géodésique (c'est à dire réalisant la distance  $d$ )  $\gamma_{yz}$  reliant  $y$  et  $z$ . Soit  $\Gamma_{x, n} = \{\gamma_{yz}; y, z \in B(x, n)\}$  et soit  $K(x, n) = \frac{1}{V(x, n)} \max_{\{e \in B(x, 2n), e \in A\}} \text{card}\{\gamma \in \Gamma_{x, n}, e \in \gamma\}$ .

**Définition 4.106.** On dit que  $X$  est un graphe à courbure positive s'il existe une bonne sélection des chemins  $\gamma_{yz}$ , une constante  $C \geq 0$  telles que  $K(x, n) \leq C$  pour tout  $x \in X$  et tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Cette définition est tirée de [32]. On peut voir cette notion comme une version discrète de la condition démocratique vue au dessus.

**Exemple 4.107.** Le graphe de Cayley d'un groupe finiment engendré à croissance polynomiale est à courbure positive.

**Théorème 4.108.** *Tout graphe à courbure positive admet une inégalité de Poincaré (P).*

*Démonstration.* Si  $e$  est une arête orientée de  $X$ , on note  $e_+$  et  $e_-$  ses extrémités (c'est à dire on définit un sens de parcours). Alors pour tous  $y, z \in B(x, n)$ , par l'inégalité triangulaire, on a

$$|f(y) - f(z)| \leq \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)|.$$

D'où,

$$\sum_{y,z \in B(x,n)} |f(y) - f(z)| \leq \sum_{y,z \in B(x,n)} \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)|.$$

De plus,

$$\begin{aligned} V(x, n) \sum_{y \in B(x,n)} |f(y) - f_n(x)| &= V(x, n) \sum_{y \in B(x,n)} \left| f(y) - \frac{1}{V(x, n)} \sum_{z \in B(x,n)} f(z) \right| \\ &= V(x, n) \sum_{y \in B(x,n)} \left| \frac{1}{V(x, n)} \sum_{z \in B(x,n)} (f(y) - f(z)) \right| \\ &\leq \sum_{y,z \in B(x,n)} |f(y) - f(z)|. \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \sum_{y,z \in B(x,n)} \sum_{e \in \gamma_{y,z}} |f(e_+) - f(e_-)| &\leq \sum_{e \in B(x,2n)} \text{card}\{\gamma \in \Gamma_{x,n}; e \in \gamma\} |f(e_+) - f(e_-)| \\ &\leq K(x, n) \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)| \\ &\leq Cn \sum_{y \in B(x,2n)} |\nabla f(y)|. \end{aligned}$$

Ce qui termine notre preuve. □

Il est possible d'étendre bon nombre de notions et résultats vus dans ce chapitre au cas des graphes discrets, voir [31].

## 4 Applications

### 4.1 Différentiabilité des applications lipschitziennes dans les espaces de Loewner

Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure  $\mu$ . Une structure différentielle mesurable sur  $X$  est une famille dénombrable de coordonnées  $(U_\alpha, x_\alpha)$  sur  $X$  qui vérifient les propriétés suivantes.

- (i) Tout  $U_\alpha$  est un sous ensemble mesurable de  $X$  avec  $\mu(U_\alpha) > 0$  et  $\mu(X \setminus \cup_\alpha U_\alpha) = 0$ .
- (ii) Tout  $x_\alpha$  est un  $N(\alpha)$ -uplet de fonctions lipschitziennes où  $N(\alpha)$  est majorée uniformément en  $\alpha$  : Il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que  $N(\alpha) \leq N$  pour tout  $\alpha$ . Le plus petit de tels  $N$  est la dimension de la structure différentielle.



(iii) Pour tout  $\alpha$ ,  $x_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{N(\alpha)})$  engendre l'espace des différentielles presque partout sur  $U_\alpha$ , c'est à dire pour toute fonction lipschitzienne  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , il existe une fonction mesurable  $d_\alpha f : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^{N(\alpha)}$  telle que pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ ,

$$\limsup_{y \rightarrow x} \frac{|f(y) - f(x) - \langle d_\alpha f(x), x_\alpha(y) - x_\alpha(x) \rangle|}{d(x, y)} = 0$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est le produit scalaire euclidien sur  $\mathbb{R}^{N(\alpha)}$ . De plus,  $d_\alpha f$  est unique à un ensemble nul près.

Par analogie avec les variétés, on dira que  $U_\alpha$  est une carte (locale) et que  $(U_\alpha, x_\alpha)$  est un atlas (différentiable).

**Théorème 4.109.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure doublante  $\mu$ . On suppose que  $X$  admet une inégalité de Poincaré  $(1, p)$  pour un  $p \geq 1$ . Alors,  $X$  a une structure différentielle mesurable de dimension  $N$  où  $N$  ne dépend que des constantes dans l'inégalité de Poincaré et de la constante de doublement.

**Exemple 4.110.** Nous allons reformuler dans le langage du théorème précédent les théorèmes de différentiabilité des fonctions lipschitziennes vus au chapitre 2 (théorèmes 2.53 et 2.82).

1) Espaces euclidiens. D'après le théorème classique de Rademacher,  $\mathbb{R}^n$  (avec sa structure euclidienne et sa mesure de Lebesgue) admet une structure différentielle donnée seulement par  $(X, x)$  où  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est le système de coordonnées canoniques sur  $\mathbb{R}^n$ .

2) Groupe de Heisenberg. Soit  $\mathbb{H}^1$  le premier groupe d'Heisenberg (que l'on voit en tant qu'ensemble comme  $\mathbb{R}^3$ ) muni de la distance de Carnot-Carathéodory et de la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^3$ . Alors, par le théorème de Rademacher-Pansu,  $\mathbb{H}^1$  a une structure différentielle  $(\mathbb{H}^1, x)$  où  $x = (x_1, x_2)$  ne prend en compte que les deux premières coordonnées de  $\mathbb{R}^3$ .

Le théorème précédent est du à J. Cheeger [26]. Une preuve plus simple a été proposée par S. Keith dans [72]. Nous donnons maintenant une idée de preuve en suivant [76].

*Etape 1.* Un  $N$ -uplet de fonctions lipschitziennes  $(f_1, \dots, f_N)$  où pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ , est lié au premier ordre en  $x \in X$  s'il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N$  tel que  $\sum_{i=1}^N \lambda_i (f_i(y) - f_i(x)) = o(d(x, y))$  quand  $y$  tend vers  $x$  dans  $X$ . On dit que les différentielles dans  $(X, d, \mu)$  sont de dimension finie s'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que tout  $(N + 1)$ -uplet de fonctions lipschitziennes est lié (au premier ordre) presque partout. En utilisant des arguments généraux (comme pour montrer qu'une famille génératrice d'un espace vectoriel de dimension finie contient une base), on a

**Proposition 4.111.** Si les différentielles de  $(X, d, \mu)$  sont de dimension finie plus petite que  $N$ , alors  $X$  admet une structure différentielle mesurable de dimension au plus  $N$

Dans ce résultat, il n'y a aucune hypothèse sur  $X$ . On est donc ramené à démontrer que dans un espace qui supporte une mesure doublante et des inégalités de Poincaré, les différentielles sont de dimension finie.

*Etape 2.* L'idée de Keith pour conclure, c'est à dire pour montrer que des familles de fonctions lipschitziennes sont liées au premier ordre, en un  $x$  de  $X$  est d'utiliser des techniques de blow-up. Comme dans [76], nous allons illustrer ces techniques en se restreignant au cas d'une seule fonction lipschitzienne  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ . Comme d'habitude, on note  $Lip(f)$  la constante de Lipschitz de  $f$ . Fixons  $x \in X$ . On se donne une suite  $(r_k)$  de réels non nuls qui tend vers 0. Pour tout  $k$ , on définit une nouvelle distance  $d_k$

en posant pour tous  $x, y$  de  $X$ ,  $d_k(x, y) = \frac{1}{r_k}d(x, y)$ . Si on pose pour tout  $k$ ,  $X_k = X$  et  $x_k = x$ , on obtient une famille d'espaces métriques pointés  $(X_k, d_k, r_k)$ . Supposons que (quitte à prendre une sous-suite), la suite  $(X_k, d_k, x_k)$  converge vers un espace limite  $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$  au sens de la convergence de Gromov-Hausdorff (pour les espaces métriques pointés, voir la section 2.4 pour les définitions). Il faut considérer  $(X_\infty, d_\infty, x_\infty)$  comme un espace tangent de  $(X, d)$  en  $x$ . Posons pour tout  $k$ ,  $f_k = \frac{1}{r_k}f$ . Alors,  $f_k : X_k \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne (pour la distance  $d_k$ ) de même constante que  $f$ . Nous voulons étudier le comportement de  $f$  sur  $B(x, r_k)$  quand  $r_k \rightarrow 0$ , et cela revient à étudier le comportement de  $f_k$  sur la boule unité de  $(X_k, d_k)$ . Or, quand  $k \rightarrow +\infty$ , la suite de fonctions  $(f_k)$  converge vers une fonction  $f_\infty$  qui est lipschitzienne sur  $(X_\infty, d_\infty)$  de même constante de Lipschitz que  $f$ .

*Etape 3.* Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est lipschitzienne et si  $x \in X$ , on définit les constantes de Lipschitz locales inférieure et supérieure de  $f$  en  $x$  par

$$lip_x(f) = \liminf_{r \rightarrow 0} \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{r}; y \in B(x, r) \right\},$$

$$Lip_x(f) = \limsup_{r \rightarrow 0} \sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{r}; y \in B(x, r) \right\}.$$

Nous avons déjà vu que ces quantités comme  $Lip(f)$  sont des gradients supérieurs de  $f$ . Il est clair que  $lip_x(f) \leq Lip_x(f)$  et en général, on ne peut pas espérer obtenir une comparaison dans l'autre sens. Pourtant, si  $X = \mathbb{R}^n$  et si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est lisse, on a  $lip_x(f) = Lip_x(f) = |\nabla f(x)|$ . Ceci motive la définition suivante due à Keith. On dit que l'espace métrique mesuré  $(X, d, \mu)$  est un espace lip-Lip s'il existe une constante  $K \geq 1$  telle que pour toute fonction lipschitzienne  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ , on a  $Lip_x(f) \leq K lip_x(f)$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ . Or, par construction, on a pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$ ,

$$lip_x(f) \leq \sup \left\{ \frac{|f_\infty(y) - f_\infty(x_\infty)|}{r}; y \in B_\infty(x_\infty, r) \right\} \leq Lip_x(f) \quad (4.112)$$

où  $B_\infty(x_\infty, r)$  est la boule de centre  $x_\infty$  et de centre  $r > 0$  dans  $(X_\infty, d_\infty)$ . L'inégalité précédente illustre le fait que  $f_\infty$  comme les constantes lipschitziennes locales de  $f$  capture le comportement asymptotique de  $f$  en  $x$ . En fait, en utilisant le fait que  $\mu$  est doublante, on peut montrer que pour tout  $x \in X$ , on a

$$lip_x(f) \leq \sup \left\{ \frac{|f_\infty(y) - f_\infty(x^*)|}{r}; y \in B_\infty(x^*, r) \right\} \leq Lip_x(f) \quad (4.113)$$

pour tout  $x^* \in X_\infty$  et tout  $r > 0$ . La seconde inégalité dans (4.113) est équivalente à  $Lip(f_\infty) \leq Lip_x(f)$ . Le point important où apparaît les inégalités de Poincaré est le suivant.

**Théorème 4.114.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure doublante  $\mu$ . On suppose que  $(X, d, \mu)$  supporte une inégalité de Poincaré  $(1, p)$  pour un  $p \geq 1$ . Alors,  $(X, d, \mu)$  est un espace lip-Lip.*

*Etape 4.* Soit  $K > 0$ . Une fonction lipschitzienne  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $K$ -quasilineaire si pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$ ,

$$\sup \left\{ \frac{|f(y) - f(x)|}{r}; y \in B(x, r) \right\} \geq \frac{1}{K} Lip(f).$$

**Lemme 4.115.** *Soit  $(X, d)$  un espace métrique doublant et soit  $K > 0$ . L'espace des fonctions  $K$ -quasi-linéaires sur  $X$  est de dimension finie  $N$  où  $N$  dépend de  $K$  et de la constante de doublement de  $(X, d)$ .*

Soit  $X$  un espace lip-Lip (de constante  $K$ ) et soit  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction lipschitzienne. Alors d'après (4.112) et (4.113), on a pour tout  $x^* \in X_\infty$  et tout  $r > 0$ ,

$$\text{lip}_x(f) \leq \sup \left\{ \frac{|f_\infty(y) - f_\infty(x^*)|}{r}; y \in B_\infty(x^*, r) \right\} \leq \text{Lip}(f_\infty) \leq \text{Lip}_x(f) \leq K \text{lip}_x(f).$$

Ceci implique que  $f_\infty$  est  $K$ -quasilinéaire pour presque tout  $x \in X$ .

*Conclusion.* Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure doublante  $\mu$  et qui vérifie une inégalité de Poincaré  $(1, p)$  pour un  $p \geq 1$ . Alors,  $X$  est un espace lip-Lip. Donc, si  $f_1, \dots, f_N : X \rightarrow \mathbb{R}$  sont lipschitziennes, leurs applications tangentes  $f_1^\infty, \dots, f_N^\infty$  engendrent un espace vectoriel de fonctions  $K$ -quasilinéaires en  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ . Donc, si  $N$  est assez grand, il existe  $(\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N \setminus (0, \dots, 0)$  tel que  $\sum_{i=1}^N \lambda_i f_i^\infty = 0$ . Ceci implique que  $f_1, \dots, f_N$  sont liés au premier ordre en  $\mu$ -presque tout  $x \in X$ . Donc, les différentielles de  $(X, d, \mu)$  sont de dimension finie et  $(X, d, \mu)$  a une structure différentielle mesurable.

## 4.2 Théorie quasi-conforme et rigidité des espaces hyperboliques

Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. Si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme, on définit pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$ ,

$$L_f(x, r) = \sup\{d_Y(f(x), f(y)); d_X(x, y) \leq r\},$$

$$l_f(x, r) = \inf\{d_Y(f(x), f(y)); d_X(x, y) \geq r\}$$

et  $H_f(x, r) = L_f(x, r)/l_f(x, r)$ . Comme  $f$  est un homéomorphisme, on aurait pu prendre  $d_X(x, y) = r$  dans les définitions de  $L_f(x, r)$  et  $l_f(x, r)$ . Nous avons déjà rencontré les applications quasi-conformes dans le cas euclidien au chapitre 2 où nous avons montré qu'elles sont presque partout différentiables. Un homéomorphisme est quasi-conforme si on peut contrôler de façon infinitésimale la forme de l'image d'une boule alors qu'il est quasi-symétrique si on peut contrôler la forme de l'image de toute boule (qui doit être un ellipsoïde pour lequel le rapport (grand axe)/(petit axe) est borné). Dans le cas des espaces métriques, cela se formalise de la façon suivante.

**Définition 4.116.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme. On dit que

-  $f$  est quasi-conforme (QC) s'il existe une constante  $H \geq 1$  telle que pour tout  $x \in X$ ,  $\limsup_{r \rightarrow 0} H_f(x, r) \leq H$ .

-  $f$  est faiblement quasi-symétrique (FQS) s'il existe une constante  $H \geq 1$  telle que pour tout  $x \in X$ , tout  $r > 0$ ,  $H_f(x, r) \leq H$ . Une formulation équivalente est de demander qu'il existe une constante  $H \geq 0$  telle que pour tous  $x_1, x_2$  et  $x_3$  dans  $X$ ,

$$d_X(x_1, x_2) \leq d_X(x_1, x_3) \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq H d_Y(f(x_1), f(x_3)).$$

-  $f$  est quasi-symétrique (QS) s'il existe un homéomorphisme croissant  $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  tel que pour tous  $x_1, x_2$  et  $x_3$  dans  $X$ , et tout  $t > 0$ ,

$$d_X(x_1, x_2) \leq t d_X(x_1, x_3) \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq \eta(t) d_Y(f(x_1), f(x_3)).$$

On notera qu'un homéomorphisme bilipschitzien  $f : X \rightarrow Y$  est quasi-symétrique. De plus, l'inverse d'un homéomorphisme quasi-symétrique est quasi-symétrique (voir l'exercice 4.155). Ceci n'est pas vrai en général pour un homéomorphisme quasi-conforme. Il est clair que l'on a

$$f \text{ est QS} \Rightarrow f \text{ est FQS} \Rightarrow f \text{ est QC}.$$

Si  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques doublants (connexes par arcs), alors on a aussi l'implication  $f \text{ est FQS} \Rightarrow f \text{ est QS}$ .

**Théorème 4.117.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces métriques doublants. On suppose de plus que  $X$  est connexe par arcs. Alors, tout homéomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  faiblement quasi-symétrique est quasi-symétrique.

*Démonstration.* Ce résultat est dû à J. Väisälä [144] et nous suivons sa preuve. Attention, il n'utilise pas la notion d'espaces doublants mais celles d'espaces  $k$ -HTB (voir la définition avant le théorème 2.9 qui est l'analogie dans ce cadre de notre théorème). Soient  $X, Y$  et  $f : X \rightarrow Y$  comme ci-dessus. En particulier,  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques doublants et donc on peut leur associer des fonctions de recouvrement que l'on note respectivement  $k_X$  et  $k_Y$ . Expliquons cette terminologie. On dit que la fonction  $k_X : ]0, 1/2] \rightarrow \mathbb{N}$  est une fonction de recouvrement de  $X$  si toute boule  $B$  de  $X$  de rayon  $R$  peut être recouverte par au plus  $k_X(\varepsilon)$  boules de rayon  $\varepsilon R$ . Dans le cas où  $X$  est un espace métrique doublant, une telle fonction  $k_X$  existe toujours (voir l'exercice 2.195). On suppose de plus qu'il existe  $H \geq 0$  de sorte que pour  $x, a$  et  $b$  dans  $X$ ,

$$d_X(a, x) \leq d_X(b, x) \implies d_Y(f(a), f(x)) \leq H d_Y(f(b), f(x)). \quad (4.118)$$

Considérons maintenant  $x, a, b$  dans  $X$  tels que  $d_X(a, x) = t d_X(b, x)$ . On cherche  $\eta(t)$  tel que  $d_Y(f(a), f(x)) \leq \eta(t) d_Y(f(b), f(x))$  où  $t \rightarrow \eta(t)$  soit un homéomorphisme (croissant) de  $\mathbb{R}^+$  sur  $\mathbb{R}^+$ . D'après (4.118),  $\eta(1) = H$  convient. On découpe la preuve en deux cas, suivant la position de  $t$  par rapport à 1.

*Cas 1 :  $t > 1$  (c'est à dire  $d_X(a, x) > d_X(b, x)$ ).*

Pour simplifier les notations, on pose  $R = d_X(x, b)$ . Comme  $X$  est connexe par arcs, il existe un chemin  $\gamma$  reliant  $x$  à  $a$  dans  $X$ . L'idée est maintenant de faire des sauts de taille  $R$  le long de  $\gamma$  et d'appliquer (4.118). De façon plus précise, on construit par récurrence une suite finie de points  $a_0, \dots, a_N$  sur  $\gamma$  de la façon suivante :

- (i)  $a_0 = x$ ;
- (ii)  $a_{j+1}$  est le dernier point (au sens de la paramétrisation de  $\gamma$ ) de  $\gamma$  dans  $B_f(a_j, R)$ ;
- (iii)  $a_N$  est le premier point  $a_j$  qui est en dehors de  $B(x, d_X(a, x))$ . Rappelons que nous sommes dans le cas où  $d_X(a, x) > R$ .

Le fait que la suite soit finie vient de la propriété de doublement de  $X$ . En effet par construction, pour tout  $0 \leq i, j \leq N$  avec  $i \neq j$ , on a  $d_X(a_i, a_j) \geq R$  et les  $a_1, \dots, a_{N-1}$  ont dans  $B(x, d_X(a, x))$ . Donc, par définition de la fonction de recouvrement  $k_X$  de  $X$ , on a  $N \leq k_X\left(\frac{d_X(a, x)}{R}\right) = k_X(t)$ . De plus, puisque  $f$  est faiblement QS, on a d'après (4.118),

$$d_X(x, a) \leq d_X(x, a_N) \implies d_Y(f(x), f(a)) \leq H d_Y(f(x), f(a_N)) \text{ (par choix de } N)$$

et pour tout  $j = 0, \dots, N - 1$ ,

$$d_X(a_{j+1}, a_j) \leq d_X(a_j, a_{j-1}) \implies d_Y(f(a_{j+1}), f(a_j)) \leq H d_Y(f(a_j), f(a_{j-1}))$$

et donc par récurrence, on  $d_Y(f(a_{j+1}), f(a_j)) \leq H^{j+1} d_Y(f(b), f(x))$ . Il vient donc par l'inégalité triangulaire

$$d_Y(f(x), f(a)) \leq H d_Y(f(a_0), f(a_N)) \leq H(H + \dots + H^N) d_Y(f(b), f(x)) \leq N H^{N+1} d_Y(f(b), f(x)).$$

Ainsi, si on pose  $\eta(t) = k_X(t) H^{k_X(t)+1}$ , on a bien que  $d_Y(f(a), f(x)) \leq \eta(t) d_Y(f(b), f(x))$ .

*Cas 2 :  $t < 1$  (c'est à dire  $d_X(a, x) < d_X(b, x)$ ).*

On pose comme précédemment  $R = d_X(x, b)$ . On considère une suite finie  $b_0, \dots, b_N$  dans  $X$  telle que

- (i)  $b_0 = b$  ;
- (ii) Pour tout  $j \geq 0$ ,  $d_X(x, b_j) = 3^{-j}R$ . Par connexité par arc de  $X$ , un tel point existe car il suffit de choisir  $b_j$  sur un chemin  $\gamma$  reliant  $x$  à  $b$ .
- iii) On stoppe pour le plus petit (noté  $N$ ) des indices  $j$  tels que  $3^{-j}R \leq d_X(a, x)$ . Alors, 
$$N \geq \frac{\ln(1/t)}{\ln(3)}.$$

On affirme que si  $0 \leq i < j \leq N - 1$ , on a

$$d_X(a, b_j) \leq d_X(b_i, b_j) \quad (4.119)$$

et donc

$$d_Y(f(a), f(b_j)) \leq Hd_Y(f(b_i), f(b_j)) \quad (4.120)$$

Pour vérifier que (4.120) est satisfaite, il suffit de noter que si  $i < j$ ,  $d_X(b_i, b_j) \geq (3^{-i} - 3^{-j})R \geq 3^{-j}(2R)$  ou encore  $2d_X(x, b_j) \leq d_X(b_i, b_j)$ . Or par définition de  $N$ , on a

$$d_X(a, b_j) \leq d_X(a, x) + d_X(x, b_j) \leq 2d_X(x, b_j) \leq d_X(b_i, b_j)$$

puisque si  $j \leq N - 1$ ,  $d_X(x, b_j) = 3^{-j}R \geq d_X(a, x)$ .

On a de plus que  $d_X(x, b_j) = 3^{-j}R \leq d_X(b_i, b_j)$  et donc

$$d_Y(f(x), f(b_j)) \leq Hd_Y(f(b_i), f(b_j)). \quad (4.121)$$

Les estimations (4.120) et (4.121) donnent

$$d_Y(fa), f(x)) \leq 2Hd_Y(f(b_i), f(b_j)) \quad (4.122)$$

D'un autre côté, on a par construction de la suite  $(b_j)$  que pour tout  $j = 1, \dots, N$ ,  $d_X(x, b_j) \leq d_X(x, b)$  et donc  $d_Y(f(x), f(b_j)) \leq Hd_Y(f(x), f(b))$ . En d'autres termes, les  $f(b_j)$ ,  $j = 0, \dots, N - 1$ , sont dans la boule fermée  $B_f(f(x), Hd_Y(f(x), f(b)))$ . On en déduit que d'après (4.122), on a par propriété de doublement de  $Y$  que  $N \leq k_Y \left( 2H^2 \frac{d_Y(f(b), f(x))}{d_Y(f(a), f(x))} \right)$ . Comme  $N \geq \frac{\ln(1/t)}{\ln(3)}$ , on peut facilement conclure dans le cas 2. □

Dans le cadre euclidien (dans un premier temps dans le plan par des méthodes d'analyse complexe), un grand challenge de la théorie a été de démontrer que  $f$  est QC  $\Rightarrow f$  est QS (voir [143]). Ce résultat a été étendu aux groupes de Carnot par Heinonen et Koskela dans [61]. Leur démonstration permet dans le cas euclidien de remplacer la lim sup par une lim inf dans la définition de la quasi-conformité. Un autre problème de longue haleine dans le cas euclidien fût de démontrer l'équivalence des définitions métriques précédentes avec des définitions analytiques ou géométriques (voir encore [143]). Suite à l'article [62], on s'est rendu compte qu'une partie de la théorie quasi-conforme euclidienne pouvait s'étendre dans le cadre des espaces de Loewner. Nous donnons maintenant un résultat dans ce sens.

**Théorème 4.123.** *Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Loewner de dimension  $Q > 1$  et soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i)  $f$  est (localement) quasi-symétrique ;
- (ii)  $f$  est quasi-conforme ;
- (iii)  $f \in N_{loc}^{1,Q}(X : Y)$  et il existe  $K \geq 0$  telle que  $Lip f(x)^Q \leq K \mathcal{J}_{vol} f(x)$  pour presque tout  $x \in X$ .

(iv) Il existe  $L \geq 1$  tel que  $L^{-1}Mod_Q(\Gamma) \leq Mod_Q(f(\Gamma)) \leq LMod_Q(\Gamma)$  pour toute famille de courbes  $\Gamma$  de  $X$ .

De plus, si  $f$  vérifie une des conditions précédentes, alors  $f$  est absolument continue en mesure et absolument continue le long de  $Q$ -presque toute courbe de  $X$ , et  $f^{-1}$  est aussi quasi-symétrique.

On dit que  $f$  est absolument continue le long de  $Q$ -presque toute courbe si l'ensemble des courbes  $\gamma$  telle que  $f \circ \gamma$  n'est pas absolument continue est de  $Q$ -module nul. Cette propriété peut être vue comme un analogue métrique de la propriété ACL (Absolument Continues sur les Lignes, vue au chapitre 3) et est classique pour les applications quasi-conformes euclidiennes (voir [143]). La propriété (iv) n'est pas étonnante puisque nous avons vu que, dans le cas riemannien, les applications conformes préservent le module conforme. Notons que dans le cadre des espaces métriques, il n'existe pas de définition canonique des applications conformes. Les espaces de Sobolev  $N_{loc}^{1,Q}(X : Y)$  ont été définis dans la section

2.4. Ici,  $\mathcal{J}_{vol}f(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_Y(f(B(x, r)))}{\mu_X(B(x, r))}$  est la norme du jacobien volumique de  $f$ . Dans le cas eu-

clidien, la condition (iii) est équivalente à demander que  $f \in W_{loc}^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  et qu'il existe une constante  $K \geq 0$  telle que  $\|Df(x)\|^n \leq K|J_f(x)|$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ . La preuve du théorème 4.123 s'est faite en plusieurs étapes (voir par exemple [62], [64] et les références dedans). Nous allons maintenant donner une preuve (seulement complète dans le cas euclidien) de l'équivalence (i)  $\iff$  (ii). Elle est tirée de [62] Theorem 4.7.

**Théorème 4.124.** Soient  $X$  et  $Y$  des espaces de Loewner de dimension  $Q$  avec  $Q > 1$ . Si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme quasi-conforme alors pour tout  $x \in X$ , il existe  $R > 0$  tel que  $f$  est quasi-symétrique (pour un homéomorphisme  $\eta : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ) dans  $B(x, R)$ , l'homéomorphisme  $\eta$  ne dépendant que des données de  $f$ ,  $X$  et  $Y$ .

**Remarque 4.125.** ;

1) On peut se contenter de supposer que  $Y$  est linéairement localement connexe (LLC). Rappelons que tout espace de Loewner est LLC. Voir le théorème 4.26.

2) On peut prendre  $R > 0$  de sorte que  $Y \setminus B_f(f(x), L_f(x, 2R)) \neq \emptyset$ .

3) On peut déduire du théorème précédent que si  $X$  et  $Y$  sont deux espaces de Loewner non bornés de dimension  $Q > 1$  et si  $f : X \rightarrow Y$  est un homéomorphisme quasi-conforme, alors  $f$  est quasi-symétrique. Le cas borné se traite un peu différemment (voir le théorème 4.9 de [62]).

*Démonstration.* Le point-clé de la démonstration est le lemme suivant.

**Lemme 4.126.** Soient  $X, Y$  des espaces Ahlfors-réguliers de dimension  $Q > 1$  et  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme quasi-conforme. Si  $E$  et  $F$  sont des continua (non dégénérés) de  $X$  tels que

-  $y \in f(E) \subset B(y, r)$  ;

-  $f(F) \subset Y \setminus B_f(y, R)$

pour un  $y \in Y$  et  $r, R > 0$  avec  $R > \epsilon r$ . Alors,  $Mod_Q(E, F) \leq C(\log(R/r))^{1-Q}$

**Remarque 4.127.** Cette estimation ressemble à l'estimation du module d'un anneau dans un espace Ahlfors-régulier (voir le lemme 4.20). Cependant, elle est beaucoup plus difficile à démontrer. Notons aussi que nous n'avons pas à supposer que  $X$  et  $Y$  sont des espaces de Loewner.

Supposons que le lemme est vrai et démontrons le théorème. Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme quasi-conforme entre deux espaces de Loewner de dimension  $Q > 1$ . Soit  $x \in X$  et soit  $R > 0$  tel que  $Y \setminus B_f(f(x), 2L_f(x, 2R)) \neq \emptyset$ . Un tel  $R$  existe car  $f$  est un homéomorphisme. Nous allons montrer qu'alors  $f$  est faiblement quasi-symétrique dans  $B(x, R)$ , ce qui est suffisant d'après le théorème 4.117. Considérons donc trois points  $w, a, b$  dans  $B(x, R)$  tels que  $d_X(a, w) \leq d_X(b, w)$ . Soit  $M \geq 0$  tel

que  $d_Y(f(a), f(w)) > Md_Y(f(b), f(w))$ . Nous allons montrer qu'alors  $M$  est majoré, ce qui permet de conclure. Pour simplifier les notations, on note  $\delta = d_Y(f(a), f(w))$ . On commence par quelques remarques (les deux premières sont triviales) :

(i)  $f(b) \in B(f(w), \delta/M)$  ;

(ii)  $f(a) \notin B(f(w), \delta)$  ;

(iii) Il existe  $z \in X \setminus B_f(x, 2R)$  tel que  $f(z) \notin B(f(w), \delta/2)$ .

Démontrons le point (iii). Notons tout d'abord que par définition de  $L_f$ ,  $\delta \leq d_Y(f(w), f(x)) + d_Y(f(x), f(a)) \leq 2L_f(x, 2R)$ . Or, par choix de  $R$ , il existe  $z' = f(z)$  avec  $d_Y(z', f(x)) > 2L_f(x, 2R)$ . Il s'en suit que  $z \in X \setminus B_f(x, 2R)$  (par définition de  $L_f$ ). Donc,

$$\begin{aligned} 2L_f(x, 2R) &< d_Y(f(z), f(x)) \\ &< d_Y(f(z), f(w)) + d_Y(f(w), f(x)) \\ &\leq d_Y(f(z), f(w)) + L_f(x, 2R). \end{aligned}$$

On a donc  $d_Y(f(z), f(w)) > L_f(x, 2R)$ . Or, par l'inégalité triangulaire,  $\delta \leq 2L_f(x, 2R)$ . D'où,  $d_Y(f(z), f(w)) > \frac{1}{2}\delta$ . Nous avons donc obtenu (iii).

Nous allons maintenant utiliser la propriété LLC de  $Y$  pour construire des continua qui nous permettront d'utiliser le lemme 4.126. Ainsi, on peut trouver un continuum  $E'$  reliant  $f(w)$  à  $f(b)$  dans  $B(f(w), \frac{C\delta}{M})$  et un continuum  $F'$  reliant  $f(a)$  à  $f(z)$  dans  $Y \setminus B_f(f(w), \delta/C)$  (où  $C$  est la constante donnée par la propriété LLC). Posons  $E = f(E')$  et  $F = f(F')$ . On a alors

- (1) Comme  $E$  joint  $w$  à  $b$  et que  $F$  joint  $a$  à  $z$ , on a  $d_X(E, F) \leq d_X(w, a)$ ,  $\text{diam}E \geq d_X(w, b)$  et  $\text{diam}F \geq R$ . Donc  $\Delta(E, F) \leq \frac{d_X(w, a)}{\min(d_X(w, b), R)} \leq 2$ . Comme  $X$  est un espace de Loewner de dimension  $Q$ , on a  $\text{Mod}_Q(E, F) \geq \phi(2) > 0$ .
- (2) Si  $M \leq 2C^2$ , on peut conclure. Sinon, on peut appliquer le lemme 4.126 pour obtenir  $\text{Mod}_Q(E, F) \leq C \left(\log \frac{M}{C^2}\right)^{1-Q}$ . On en déduit d'après le point (1) que  $0 < \phi(2) \leq C \left(\log \frac{M}{C^2}\right)^{1-Q}$ . Ce qui donne une borne sur  $M$ .

Nous allons maintenant démontrer le lemme dans le cas euclidien. On pose  $U = \mathbb{R}^n \setminus (E \cup F)$  et on se donne un  $\delta > 0$  qui sera choisi plus tard. Pour tout  $x \in U$ , on choisit un rayon  $r_x$  tel que

(i)  $0 < r_x < \delta$  ;

(ii)  $B(x, 4r_x) \subset U$  ;

(iii)  $L_f(x, r_x) \leq H$  où  $H$  est la constante dans la définition de la quasi-conformité de  $f$ .

Nous pouvons maintenant appliquer le théorème de recouvrement de Besicovitch (proposition 1.90) à la famille de boules  $\mathcal{B} = \{B(x, r_x; x \in U)\}$ . Ainsi, il existe une sous-famille dénombrable  $\mathcal{B}_1$  de  $\mathcal{B}$  telle que

(i)  $U = \cup_{B \in \mathcal{B}_1} B$  ;

(ii) Si  $B, B' \in \mathcal{B}_1$  avec  $B \neq B'$ , alors  $\frac{1}{5}B \cap \frac{1}{5}B' = \emptyset$  ;

(iii) Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\sum_{B \in \mathcal{B}_1} \chi_B(x) \leq C(n)$  avec  $C(n)$  une constante positive ne dépendant que de la dimension de  $\mathbb{R}^n$ .

**Remarque 4.128.** Le point est que nous pouvons utiliser le théorème de recouvrement de Besicovitch. Cependant, celui-ci est faux dans les espaces métriques généraux (par exemple, les groupes de Carnot, voir le chapitre 1). Il faut alors adapter notre preuve en considérant plusieurs sous-famille de boules  $B(x, r_x)$ . Voir [62] Lemma 4.12.

L'idée est maintenant d'utiliser le module discret (qui a été introduit à la fin de la section 2.3) et pour cela, on pose si  $B \in \mathcal{B}$ ,

$$\rho(B) = (\log(R/r))^{-1} \frac{\text{diam} f(B)}{d(f(B), f(x_0))}.$$

On commence par montrer que  $(\rho, \mathcal{B})$  est admissible pour  $(E, F)$  et pour cela, on considère une chaîne  $\mathcal{C}$  de boules dans  $\mathcal{B}$  reliant  $E$  à  $F$ . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{C}} \rho(B) &= (\ln(R/r))^{-1} \sum_{B \in \mathcal{C}} \frac{\text{diam} f(B)}{d(f(B), x_0)} \\ &= (\ln(R/r))^{-1} \sum_{j \geq 0} \sum_{B \in \mathcal{C}_j} \frac{\text{diam} f(B)}{d(f(B), x_0)} \end{aligned}$$

où  $\mathcal{C}_j$  est l'ensemble des boules  $B \in \mathcal{B}$  telles que  $f(B)$  est soit dans l'anneau  $B(f(x_0), 2^{-j}R) \setminus B(f(x_0), 2^{-j-1}R)$  ou intersecte  $\partial B(f(x_0), 2^{-j}R)$ . On choisit  $\delta$  de sorte que si  $B \subset U$ ,  $\text{diam} B < 2\delta \implies \text{diam} f(B) < 2^{-j_0-1}R$  où  $j_0$  est le plus petit entier tel que  $2^{-j}R < r$ . En particulier,  $\{\mathcal{C}_j\}$  est une partition de  $\mathcal{C}$ . On a alors

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{C}} \rho(B) &\geq (\log(R/r))^{-1} \sum_{j \geq 0} \sum_{B \in \mathcal{C}_j} (2^{-j}R)^{-1} \text{diam} f(B) \\ &\geq (\log(R/r))^{-1} \sum_{j \geq 0} (2^{-j}R)^{-1} \sum_{B \in \mathcal{C}_j} \text{diam} f(B) \\ &\geq C (\log(R/r))^{-1} \sum_{j=0}^{j_0} (2^{-j}R)^{-1} 2^{-j}R \\ &\geq C. \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que  $(\rho, \mathcal{B})$  est admissible pour  $(E, F)$ .

Nous allons maintenant estimer de façon analogue  $\sum_{B \in \mathcal{B}} \rho(B)^Q$ .

$$\begin{aligned} \sum_{B \in \mathcal{B}} \rho(B)^Q &= (\log(R/r))^{-Q} \sum_{j \geq 0} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \frac{(\text{diam} f(B))^Q}{(d(f(B), f(x_0)))^Q} \\ &\leq C (\log(R/r))^{-Q} \sum_{j=0}^{j_0} (2^{-j}R)^{-Q} \sum_{B \in \mathcal{B}_j} \mu(f(B)) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{B}_j$  est l'ensemble des boules  $B$  de  $\mathcal{B}$  telles que soit  $f(B)$  est dans l'anneau  $B(f(x_0), 2^{-j}R) \setminus B(f(x_0), 2^{-j-1}R)$  ou intersecte  $\partial B(f(x_0), 2^{-j}R)$ . et  $j_0$  est le plus petit entier tel que  $2^{-j}R < r$ . Or par choix de  $\mathcal{B}$  (c'est à dire par le théorème de recouvrement de Besicovitch), on a

$$\sum_{B \in \mathcal{B}_j} \mu(f(B)) \leq C \mu(B(f(x_0), 2^{-j}R)) \leq C (2^{-j}R)^Q.$$

Il s'en suit que

$$\sum_{B \in \mathcal{B}} \rho(B)^Q \leq C (\log(R/r))^{1-Q}.$$

D'où en faisant tendre  $\delta$  vers 0, on obtient  $\text{d-Mod}_Q(E, F) \leq C (\log(R/r))^{1-Q}$ . On peut conclure par le lemme 4.31.  $\square$



Nous allons maintenant expliquer comment cette théorie quasi-conforme peut être utile pour démontrer des théorèmes de rigidité en géométrie hyperbolique. Pour cela, on commence par décrire l'exemple fondamental d'espace/variété à courbure négative, à savoir le disque de Poincaré. Ceci nous permettra d'introduire la notion d'espaces CAT(-1) qui est une notion forte d'hyperbolicité, c'est à dire de courbure négative. Nous suivons la présentation de [79]. Définissons tout d'abord quelques notions de base de géométrie différentielle dans le cas d'un domaine  $\Omega$  du plan complexe  $\mathbb{C}$ . On notera  $|z|$  le module du nombre complexe  $z \in \mathbb{C}$ . Une métrique riemannienne permet de mesurer la longueur d'un vecteur tangent. De façon plus précise, soit  $\Omega$  un domaine du plan complexe  $\mathbb{C}$ . Une métrique  $\rho$  sur  $\Omega$  est une fonction de classe  $C^2$  telle que  $\rho(z) > 0$  pour tout  $z \in \Omega$ . Si  $z \in \Omega$  et  $\xi \in \mathbb{C}$  ( $\xi$  doit être vu comme un vecteur, par exemple dans l'espace tangent de  $z$  que l'on peut identifier avec  $\mathbb{C}$ ), on pose  $\|\xi\|_{z,\rho} = \rho(z) \cdot \|\xi\|$  où  $\|\xi\|$  est la norme euclidienne de  $\xi$ . Si  $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  est une courbe de classe  $C^1$ , alors la longueur de  $\gamma$  par rapport à la métrique  $\rho$  est définie par

$$l_\rho(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\|_{\rho,\gamma(t)} dt.$$

On peut alors définir la distance entre  $z, z' \in \Omega$  par

$$d_\rho(z, z') = \inf l_\rho(\gamma)$$

où l'infimum est pris sur toutes les courbes de classe  $C^1$   $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega$  telles que  $\gamma(a) = z$  et  $\gamma(b) = z'$ .

**Remarque 4.129.** Dans le paragraphe sur la condition de Bakry-Emery, nous avons expliqué qu'une métrique riemannienne sur  $\Omega$  est la donnée en tout point d'un produit scalaire et donc d'une norme sur l'espace tangent (ici, le plan complexe). Les métriques que nous considérons sont d'un type spécial. Elles sont dans la classe conforme de la métrique euclidienne, c'est à dire proportionnelle en tout point à la métrique euclidienne.

On définit maintenant la notion de courbure de la métrique. Si  $\rho$  est une métrique sur le domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  alors sa courbure en  $z \in \Omega$  est définie par

$$K_{\Omega,\rho}(z) = -\frac{\Delta \log \rho(z)}{\rho(z)^2}.$$

Notons que la courbure a des singularités si  $\rho(z) = 0$ . La courbure est un invariant conforme au sens suivant.

**Proposition 4.130.** Soient  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  des domaines du plan complexe et soit  $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  une application conforme. Si  $\rho_2$  est une métrique sur  $\Omega_2$ , alors pour tout  $z \in \Omega_1$ ,  $K_{\Omega_1, f^* \rho_2}(z) = K_{\Omega_2, \rho_2}(f(z))$ . Ici,  $f^* \rho_2$  est la métrique définie par  $f^* \rho_2(z) = \rho_2(f(z)) \partial f / \partial z$ .

*Démonstration.* Des calculs directs donnent

$$\begin{aligned} K_{\Omega_1, f^* \rho_2}(z) &= \frac{-\Delta \log(\rho_2(f(z)) \cdot |f'(z)|)}{(\rho_2(f(z)) \cdot (f'(z)))^2} \\ &= \frac{-\Delta \log(\rho_2(f(z))) - \Delta \log(|f'(z)|)}{(\rho_2(f(z)) \cdot (f'(z)))^2} \\ &= \frac{-\Delta \log(\rho_2(f(z))) + \Delta \log(|f'(z)|^2)}{(\rho_2(f(z)) \cdot (f'(z)))^2} \\ &= \frac{-\Delta \log \rho_2(f(z))}{\rho_2(f(z))^2} \\ &= K_{\Omega_2, \rho_2}(f(z)). \end{aligned}$$

□

**Exemple 4.131.** Dans le cas euclidien, on pose  $\rho_{eucl}(z) = 1$  (et on retrouve la distance usuelle). La courbure est alors nulle partout, ce qui était attendu.

Nous allons maintenant voir comment des résultats classiques d'analyse complexe peuvent aider à comprendre la géométrie du disque de Poincaré. On commence par donner une version du lemme de Schwarz.

**Théorème 4.132.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ . On suppose que  $|f(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$  et que  $f(0) = 0$ . Alors,  $|f(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . De plus, s'il y a égalité pour un  $z_0 \in \mathbb{D}$ , alors il existe  $\lambda \in \mathbb{C}$  avec  $|\lambda| = 1$  de sorte que  $f(z) = \lambda z$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ .

On peut trouver la démonstration (par le principe du maximum par exemple) de ce résultat dans tout livre d'analyse complexe. Si on prend  $z \rightarrow 0$ , on a

**Corollaire 4.133.** Soit  $f$  une fonction holomorphe sur  $\mathbb{D}$ . On suppose que  $|f(z)| \leq 1$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$  et que  $f(0) = 0$ . Alors,  $|f'(0)| \leq 1$ , avec égalité si et seulement si  $f(z) = \lambda z$  avec  $|\lambda| = 1$ .

Une application classique du lemme de Schwarz est la caractérisation des représentations conformes du disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$ .

**Théorème 4.134.** Les représentations conformes du disque unité  $\mathbb{D}$  sont les transformations de Möbius définies pour tout  $z \in \mathbb{D}$  par

$$f_{a,\phi}(z) = e^{i\phi} \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$$

où  $a$  est un nombre complexe avec  $|a| = 1$  et  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ .

Nous rappelons la démonstration.

*Démonstration.* 1) On commence par noter que  $f_{a,\phi}$  est une représentation conforme de  $\mathbb{D}$ . Nous devons donc vérifier que toute représentation conforme de  $\mathbb{D}$  est de cette forme.

2) Soit  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une représentation conforme avec  $g(0) = 0$ . On peut appliquer le lemme de Schwarz à  $g$  pour obtenir que  $|g(z)| \leq |z|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$  et pour  $g^{-1}$  pour obtenir  $|z| \leq |g(z)|$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ . D'où,  $g(z)/z$  est de module constant (égal à 1). Il s'en suit que  $g(z)/z$  est constant et que  $g$  est une rotation (c'est à dire  $g$  est de la forme  $g(z) = e^{i\phi} z$  pour un  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ ).

3) Soit  $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  une représentation conforme. Posons  $a = g^{-1}(0)$  et  $h(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z}$ . Alors,  $g \circ h^{-1}$  est conforme et  $(g \circ h^{-1})(0) = g(a) = 0$ . Par le point 2, ceci implique qu'il existe  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  de sorte que  $(g \circ h^{-1})(w) = e^{i\phi} w$  pour tout  $w \in \mathbb{D}$ . En appliquant l'égalité précédente à  $w = h(z)$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ , on obtient  $g(z) = e^{i\phi} h(z)$  et le résultat est démontré.  $\square$

On donne maintenant une version du lemme de Schwarz (connue sous le nom de lemme de Schwarz-Pick) qui est invariante sous l'action des représentations conformes de  $\mathbb{D}$ .

**Théorème 4.135.** Si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est holomorphe, alors pour tout  $z \in \mathbb{D}$ ,

$$|f'(z)| \leq \frac{1 - |f(z)|^2}{1 - |z|^2}. \quad (4.136)$$

Si  $f$  est conforme alors l'égalité dans (4.136) est vrai dans  $\mathbb{D}$ . Sinon, l'inégalité est stricte pour tout  $z \in \mathbb{D}$ .

*Démonstration.* Fixons  $z_0 \in \mathbb{D}$  et soit  $w_0 = f(z_0)$ . Considérons les représentations conformes  $g$  et  $h$  envoyant 0 sur  $z_0$  et  $w_0$  sur 0 respectivement, c'est à dire

$$g(z) = \frac{z + z_0}{1 + \bar{z}_0 z} \text{ and } g(w) = \frac{w - w_0}{1 - \bar{w}_0 w}.$$

Alors,  $h \circ f \circ g(0) = 0$  et par le corollaire précédent, on a

$$|(h \circ f \circ g)'(0)| = |h'(w_0)f'(z_0)g'(0)| \leq 1. \quad (4.137)$$

Puisque  $g'(0) = 1 - |z_0|^2$  et  $h'(w_0) = 1/(1 - |w_0|^2)$ , on obtient (4.136).

Si  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est conforme, alors  $h \circ f \circ g$  est aussi conforme et on a égalité dans (4.137) et donc dans (4.136). Réciproquement, supposons que  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  soit une fonction holomorphe telle que l'égalité (4.136) est vraie pour tout  $z_0$ . Les calculs précédents montrent qu'on a alors aussi égalité dans (4.137) et on peut conclure par le théorème précédent.  $\square$

Nous allons donner une interprétation géométrique qui motivera la définition de la métrique de Poincaré. Soit  $w = f(z)$  une application conforme sur le disque unité  $\mathbb{D}$  de  $\mathbb{C}$ . Alors, par le lemme de Schwarz-Pick, on a  $\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1 - |w|^2}{1 - |z|^2}$ , c'est à dire sous forme différentielle  $\frac{|dw|}{1 - |w|^2} = \frac{|dz|}{1 - |z|^2}$ . Ceci signifie que pour toute courbe lisse  $\gamma$ , on a

$$\int_{f \circ \gamma} \frac{|dw|}{1 - |w|^2} = \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Donc, si on pose  $\rho_P(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$ , on obtient une métrique qui est invariante sous l'action des représentations conformes de  $\mathbb{D}$ . Cette métrique est appelée souvent métrique de Poincaré. On note  $d_P$  la distance associée. La métrique de Poincaré est de courbure  $-1$ . En effet,  $-\Delta \log \rho_P(z) = \Delta \log(1 - |z|^2) = 4(\partial/\partial z)(\partial/\partial \bar{z}) \log(1 - |z|^2)$ . En écrivant  $|z|^2 = z\bar{z}$ , on a facilement que  $-\Delta \log \rho_P(z) = -4/(1 - |z|^2)^2 = -(\rho_P(z))^2$  et donc  $K_{\rho_P}(z) = -1$  pour tout  $z \in \mathbb{D}$ .

Nous décrivons maintenant les géodésiques pour la métrique de Poincaré.

Soit  $\gamma$  un chemin défini par  $\gamma(t) = t$  pour tout  $0 \leq t \leq 1 - \varepsilon$ . Alors,

$$l_{\rho_P}(\gamma) = 2 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{|\gamma'(t)|}{1 + |\gamma(t)|^2} dt = 2 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1 - t^2} dt = \ln \left( \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} \right).$$

En particulier, notons que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} l_{\rho_P}(\gamma) = +\infty$ . Soit  $\alpha$  une autre courbe reliant 0 et  $1 - \varepsilon$  :  $\alpha(t) = t + iw(t)$  for  $0 \leq t \leq 1 - \varepsilon$  de sorte que  $\alpha(0) = 0$  et  $\alpha(1 - \varepsilon) = 1 - \varepsilon$ . Alors,

$$l_{\rho_P}(\alpha) = 2 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1 - t^2 - (w(t))^2} (1 + (w'(t))^2)^{1/2} dt \geq 2 \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1 - t^2} dt.$$

Ainsi, les segments (euclidiens) doivent être des géodésiques. On a en fait le résultat suivant.

**Proposition 4.138.** Pour tout couple de points distincts  $z_0, z_1$  dans le disque unité  $\mathbb{D}$ , il existe un unique segment géodésique dans  $\mathbb{D}$  reliant  $z_0$  et  $z_1$  pour la métrique de Poincaré, c'est à dire l'arc de cercle passant par  $z_0$  et  $z_1$  qui est orthogonal au cercle unité. En particulier, si  $z_0 = 0$ , la géodésique est juste  $[0, z_1]$ .

Il s'en suit que  $d_P(0, z) = \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)$ . Donc, si  $|z| \rightarrow 1$ , alors  $d_P(0, z)$  tend vers  $+\infty$ .

*Démonstration.* Soit  $f$  une représentation conforme de  $\mathbb{D}$  telle que  $f(z_0) = 0$ . Quitte à multiplier par une constante de module 1, on peut supposer que  $f(z_1) = r > 0$ . Rappelons que les applications conformes préservent le birapport. D'où,  $f$  envoient les cercles orthogonaux au cercle unité sur les cercles orthogonaux au cercle unité. De plus,  $f$  préserve la longueur hyperbolique. Ainsi, il suffit de montrer que  $[0, r]$  est l'unique segment géodésique de 0 à  $r$ . Pour voir cela, considérons un chemin de classe  $C^1$  noté  $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$  reliant 0 et  $r$ . Alors,  $\gamma(t) = \operatorname{Re}(\alpha(t)) = x(t)$  (si nous posons  $\alpha(t) = x(t) + iy(t)$ ) définit dans  $\mathbb{D}$  un chemin de 0 à  $r$  contenu dans la droite réelle et on a

$$\int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2} = \int_0^1 \frac{|dx(t)|}{1 - |x(t)|^2} \leq \int_0^1 \frac{|dx(t)|}{1 - |\alpha(t)|^2} \leq \int_{\alpha} \frac{|dz|}{1 - |z|^2}.$$

Si  $y(t) \neq 0$  pour un  $t$ , l'inégalité précédente est stricte et le chemin  $\gamma$  est strictement plus court (par rapport à la métrique de Poincaré) que le chemin  $\alpha$ . Pour obtenir une géodésique, on doit supposer que  $\gamma$  est croissante et notre preuve est finie.  $\square$

Nous donnons maintenant une interprétation géométrique du fait que le disque de Poincaré est à courbure négative. Un triangle géodésique de  $\mathbb{D}$  est une surface bornée par trois segments géodésiques (distincts) hyperboliques (des arcs de cercle orthogonaux au cercle unité). On peut voir facilement que la somme des angles dans un triangle géodésique de  $\mathbb{D}$  est inférieure à  $\pi$  qui est la somme des angles dans un triangle euclidien. Ainsi, les triangles géodésiques de  $\mathbb{D}$  sont plus fins que ceux de l'espace euclidien. La notion d'hyperbolicité au sens de Gromov est en partie basée sur cette observation.

**Théorème 4.139.** *Toute fonction holomorphe  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  est une contraction pour la distance de Poincaré :*

$$d_P(f(z_0), f(z_1)) \leq d_P(z_0, z_1) \text{ pour tout } z_0, z_1 \in \mathbb{D}.$$

*De plus, l'inégalité est stricte si  $z_0 \neq z_1$ , sauf si  $f$  est une représentation conforme du disque unité  $\mathbb{D}$ . Dans ce cas,  $f$  est une isométrie pour la distance de Poincaré, au sens où  $f$  préserve la distance de Poincaré :*

$$d_P(f(z_0), f(z_1)) = d_P(z_0, z_1) \text{ pour tout } z_0, z_1 \in \mathbb{D}.$$

*Démonstration.* Soit un segment géodésique  $\gamma$  (donné par le résultat précédent) dans  $\mathbb{D}$  reliant  $z_0$  à  $z_1$ . Alors,  $f \circ \alpha$  est une courbe (qui ne minimise pas forcément la distance !) reliant  $f(z_0)$  à  $f(z_1)$ . Par définition de la distance de Poincaré et par le lemme de Schwarz-Pick, on a

$$d_P(f(z_0), f(z_1)) \leq 2 \int_{f \circ \gamma} \frac{|dw|}{1 - |w|^2} = 2 \int_{\gamma} \frac{|f'(z)||dz|}{1 - |f(z)|^2} \leq 2 \int_{\gamma} \frac{|dz|}{1 - |z|^2} = d_P(z_0, z_1).$$

Le cas d'égalité est le même que celui pour le lemme de Schwarz-Pick.  $\square$

Comme application, nous avons la description complète de la distance de Poincaré.

**Proposition 4.140.** Si  $z_0$  et  $z_1$  sont des points du disque unité  $\mathbb{D}$ , alors la distance de Poincaré entre ces deux points est donnée par

$$d_P(z_0, z_1) = \log \left( \frac{1 + \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0} z_1} \right|}{1 - \left| \frac{z_0 - z_1}{1 - \overline{z_0} z_1} \right|} \right).$$

En particulier,  $d_P(0, z) = \log \left( \frac{1 + |z|}{1 - |z|} \right)$ .

*Démonstration.* Nous avons déjà vu comment calculer  $d_P(0, z)$ . Dans le cas général, il suffit d'appliquer cette formule et de considérer les transformations de Möbius  $\phi(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z}$ . Alors par le théorème précédent, on a

$$d_P(z_0, z_1) = d_P(\phi(z_0), \phi(z_1)) = d_P(0, \phi(z_1)).$$

Puis, en utilisant l'invariance de  $d_P$  sous les rotations, on a  $d_P(z_0, z_1) = d_P(0, |\phi(z_1)|)$  et on peut conclure.  $\square$

Nous avons déjà vu que  $d_P(0, z)$  est infinie si  $|z| \rightarrow 1$ . Ainsi, la distance entre l'origine 0 du disque unité  $\mathbb{D}$  et le cercle unité est infinie ! On définit alors le bord à l'infini  $\partial_\infty \mathbb{D}$  comme l'ensemble des rayons géométriques partant de 0, c'est à dire d'après la proposition précédente,  $\partial_\infty \mathbb{D}$  est l'ensemble des droites de la forme  $L_\theta = \{re^{i\theta}; 0 \leq r < 1\}$ . On peut évidemment identifier ce bord avec le cercle unité  $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ .

**Remarque 4.141.** On peut facilement se convaincre que la topologie induite par la distance de Poincaré est la topologie euclidienne et que le disque unité de  $\mathbb{C}$  muni de la distance de Poincaré est un espace métrique complet.

Dans  $\mathbb{R}^n$ , on considère la boule unité  $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$  et la sphère unité  $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}$ . Par analogie avec le disque de Poincaré, l'espace hyperbolique  $H^n$  est  $B^n$  muni de la métrique de Poincaré  $ds = 4 \sum_{i=1}^n \frac{dx_i^2}{1 - \|x\|^2}$ . Son bord à l'infini peut être identifié avec  $S^{n-1}$  muni de la distance euclidienne induite. Donnons quelques notions de géométrie métrique hyperbolique. Par analogie avec les espaces d'Alexandrov (qui sont à courbure positive), on dit que l'espace géométrique  $X$  est de courbure négative (ou est un espace d'Hadamard) si pour tout triangle géométrique  $[x, y] \cup [y, z] \cup [z, x]$  de  $X$ , et tout triangle de comparaison de sommets  $x', y', z'$  de  $\mathbb{R}^2$  (ou d'un espace euclidien  $\mathbb{R}^n$ ), on a  $d(p, q) \leq \|p' - q'\|$  dès que  $p \in [x, y]$ ,  $q \in [x, z]$ ,  $p' \in [x', y']$  avec  $d(x, p) = \|x' - p'\|$  et  $q' \in [x', z']$  avec  $d(x, q) = \|x' - q'\|$ . Une notion plus forte d'hyperbolicité est celle d'espace  $CAT(-1)$ . Elle est similaire à la précédente mais on compare les triangles géométriques de  $X$  avec ceux de l'espace modèle à courbure  $-1$ , c'est à dire le disque de Poincaré. On peut définir de façon analogue les espaces  $CAT(-b^2)$  en multipliant la métrique de Poincaré par  $b$ . L'espace hyperbolique  $H^n$  est un espace  $CAT(-1)$ .

Le but de ce qui suit est de montrer comment on peut utiliser la théorie quasiconforme dans les espaces de Loewner pour démontrer un théorème de rigidité de type Mostow pour l'espaces hyperbolique réel  $H^n$ . On commence par rappeler qu'un réseau cocompact  $\Gamma$  du groupe  $Isom(H^n)$  des isométries de  $H^n$  est un sous-groupe discret de  $Isom(H^n)$  tel qu'il existe un compact  $K \subset H^n$  avec  $H^n = \cup_{g \in \Gamma} gK$ .

**Théorème 4.142.** Soient  $\Gamma_1, \Gamma_2$  deux réseaux cocompacts dans le groupe des isométries  $Isom(H^n)$  de l'espace hyperbolique réel  $H^n$ . Alors, tout isomorphisme  $\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  est la conjugaison par un élément du groupe  $Isom(H^n)$ .

Nous aurons besoin de quelques définitions.

**Définition 4.143.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. On dit que  $F : X \rightarrow Y$  est une quasi-isométrie s'il existe des constantes  $C, D > 0$  telles que

(i) Pour tous  $x, x' \in X$ ,  $C^{-1}d_X(x, x') - D \leq d_Y(f(x), f(x')) \leq Cd_X(x, x') + D$ .

(ii) Pour tout  $y \in Y$ , il existe  $x \in X$  avec  $d_Y(y, f(x)) \leq D$ .

**Définition 4.144.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique. On définit le birapport des points distincts  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$  par

$$[x_1, x_2, x_3, x_4] = \frac{d(x_1, x_3)d(x_2, x_4)}{d(x_1, x_4)d(x_2, x_3)}.$$

**Définition 4.145.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  deux espaces métriques. On dit que l'homéomorphisme  $f : X \rightarrow Y$  est quasi-Möbius s'il existe un homéomorphisme  $\eta : [0, +\infty[ \rightarrow [0, +\infty[$  tel que tel que si  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$  sont des points distincts,

$$[f(x_1), f(x_2), f(x_3), f(x_4)] \leq \eta([x_1, x_2, x_3, x_4]).$$

Un homéomorphisme quasi-symétrique est quasi-Möbius. Réciproquement, un homéomorphisme quasi-Möbius est localement quasi-symétrique.

Soit  $\phi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  un isomorphisme entre deux réseaux cocompacts de  $Isom(H^n)$ . Alors, on peut construire une quasi-isométrie  $F : H^n \rightarrow H^n$  qui est  $\phi$ -équivariante, c'est à dire  $F(g.x) = \phi(g).F(x)$  pour tout  $x \in H^n$  et tout  $g \in \Gamma_1$ . Le point-clé est que  $F$  induit sur le bord à l'infini de  $H^n$  une application  $f : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  qui est quasi-Möbius donc (localement) quasi-symétrique. Ceci est vrai en général pour les espaces hyperboliques. Par le théorème de Stepanov vu au chapitre 2,  $f$  est différentiable presque partout. En utilisant la structure de  $S^{n-1}$ , on peut montrer que  $f$  est en fait une application conforme et qu'elle est induite par une isométrie de  $H^n$ . Ceci permet de conclure, la conjugaison étant donnée par cette isométrie. Ce schéma de preuve peut être utilisée pour d'autres espaces hyperboliques. Par exemple, dans le cas de l'espace hyperbolique complexe, le bord à l'infini peut être muni d'une structure de groupe de Carnot et on peut utiliser une version du théorème de Pansu-Rademacher (voir chapitre 2). Dans le cas des immeubles hyperboliques, un point important est de montrer que le bord à l'infini peut être équipé d'une structure d'espace de Loewner. On utilise alors les propriétés de différentiabilité des applications quasi-symétriques (comme l'absolue continuité sur les courbes) dans ces espaces et la géométrie des immeubles pour conclure. Voir [19] pour une description plus précise des méthodes d'analyse quasi-conforme pour démontrer des théorèmes de rigidité en géométrie hyperbolique.

### 4.3 Fonctions harmoniques à croissance polynômiale

Soit  $(M, g)$  une variété riemannienne non compacte, complète de dimension  $n$  (que l'on munit de la distance riemannienne  $d_g$  et du volume riemannien  $vol_g$  associés). Le lecteur peu familier avec la géométrie riemannienne peut supposer que  $M = \mathbb{R}^n$  (muni de sa structure euclidienne usuelle). Une fonction  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  est dite harmonique si pour tout  $x \in M$ ,  $\Delta u(x) = 0$  pour tout  $x \in M$ . Soit  $p \in M$  et soit  $d_p$  la fonction distance à  $p$ , c'est à dire  $d_p(x) = d_g(x, p)$  pour tout  $x \in M$ . Pour  $\alpha \geq 0$ , on note  $H_\alpha(M)$  l'espace vectoriel des fonctions harmoniques  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  telles qu'il existe  $C \geq 0$  avec pour tous  $x, y \in M$ ,

$$|u(x)| \leq C(1 + d_p(x))^\alpha.$$

Ainsi,  $H_\alpha(M)$  est l'espace vectoriel des fonctions harmoniques à croissance polynômiale de degré au plus  $\alpha$ .

**Remarque 4.146.** 1) Si  $M = \mathbb{R}^n$ , on peut choisir  $p = 0$  et donc la condition s'écrit  $|u(x)| \leq C(1 + |x|)^\alpha$ .

2) Nous écartons le cas  $\alpha = 0$ , c'est à dire des fonctions harmoniques bornées. Dans les cas qui nous intéressent (par exemple le cas euclidien), ces fonctions sont en fait constantes (théorème de type Liouville comme dans le cas de l'analyse complexe).

**Théorème 4.147.** Si  $M$  est une variété riemannienne non compacte, complète telle que le volume riemannien est doublante et que  $M$  vérifie une inégalité de Poincaré (2, 2), alors pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'espace vectoriel  $H_\alpha(M)$  est de dimension finie.

En fait, la preuve dans [30] donne une borne sur la dimension en fonction de  $\alpha$ , de la constante de doublement et de la constante de l'inégalité de Poincaré. Ainsi, le théorème précédent peut être vu comme une généralisation du théorème de Liouville classique (voir au-dessus). On en déduit tout de suite d'après les résultats sur les variétés à courbure de Ricci positive le résultat suivant.

**Corollaire 4.148.** Soit  $M$  une variété riemannienne complète, non compacte à courbure de Ricci positive. Alors, pour tout  $\alpha \geq 0$ , l'espace vectoriel  $H_\alpha(M)$  est de dimension finie.

**Remarque 4.149.** Il existe un analogue du théorème précédent dans le cas des espaces métriques munis d'une mesure doublante et qui supportent une inégalité de Poincaré  $(1, 1)$ . Voir [26].

Un point-clé de la démonstration qui est aussi le seul endroit où est utilisé l'harmonicité est une inégalité de Poincaré inverse due à S.T. Yau (qui avait conjecturé que le théorème précédent est vraie). Voir [151].

**Théorème 4.150.** Soit  $M$  une variété riemannienne non compacte et complète de dimension  $n$ . Alors, il existe des constantes  $\tau \geq 1$  et  $C > 0$  telles que si  $u : M \rightarrow \mathbb{R}$  est harmonique,

$$R^2 \int_{B(x,R)} \|\nabla u\|^2 dvol_g \leq C \int_{B(x,\tau R)} u^2 dvol_g.$$

pour tout  $x \in X$  et tout  $R > 0$ .

*Démonstration.* Soit  $\phi \in C_c^\infty(B(x, \tau R))$  une fonction plateau qui vaut 1 sur  $B(x, R)$  et 0 sur  $\partial B(x, \tau R)$ , qui vérifie  $0 \leq \phi \leq 1$  et  $|\nabla \phi| \leq C/((1 - \tau)R)$ . L'existence d'une telle fonction dans le cas où  $M = \mathbb{R}^n$  est classique et est laissée comme exercice. On a alors

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B(x,\tau R)} \phi^2 u \Delta u dvol_g \\ &\leq - \int_{B(x,\tau R)} \phi^2 \|\nabla u\|^2 dvol_g - 2 \int_{B(x,\tau R)} \phi u \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle dvol_g. \end{aligned}$$

D'où, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \int_{B(x,\tau R)} \phi^2 \|\nabla u\|^2 dvol_g &\leq -2 \int_{B(x,\tau R)} \phi u \langle \nabla \phi, \nabla u \rangle dvol_g \\ &\leq 2 \left( \int_{B(x,\tau R)} \phi^2 \|\nabla u\|^2 dvol_g \right)^{1/2} \left( \int_{B(x,\tau R)} u^2 \|\nabla \phi\|^2 dvol_g \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons alors conclure

$$\begin{aligned} \int_{B(x,R)} \|\nabla u\|^2 dvol_g &\leq \int_{B(x,\tau R)} \phi^2 \|\nabla u\|^2 dvol_g \\ &\leq 4 \int_{B(x,\tau R)} u^2 \|\nabla \phi\|^2 dvol_g \\ &\leq \frac{C}{(1 - \tau)^2 R^2} \int_{B(x,\tau R)} u^2 dvol_g \end{aligned}$$

□

Nous pouvons maintenant donner une idée de la preuve du théorème de Colding-Minicozzi. Soit  $\varepsilon \in ]0, 1[0$  et soit  $R > 0$  assez grand. On fixe une origine  $p \in M$  comme au-dessus. On recouvre la boule  $B(p, R)$  par des boules  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  de rayon  $\varepsilon R$ . Comme la mesure riemannienne est doublante, on a un contrôle sur le nombre minimal  $N$  de boules nécessaires qui dépend de  $\varepsilon$

mais pas de  $R$ . Si  $M$  est une variété à courbure de Ricci positive, on a  $N \leq \left(\frac{4+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^n$  (voir le lemme 4.6 de [25]). Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie de fonctions harmoniques à croissance  $\leq R^\alpha$ . Pour conclure, il suffit de montrer que la dimension de  $V$  peut être bornée de façon indépendante de  $V$  mais pas de  $\alpha$  ! Pour cela, on considère l'application  $\Phi : V \rightarrow \mathbb{R}^N$  définie par

$$\Phi(f) = \left( \int_{B_j} f d\text{vol}_g \right)_{j=1, \dots, N}.$$

Il nous suffit de montrer que  $\Phi$  est injective. Comme  $\Phi$  est linéaire, nous allons montrer que  $\text{Ker}(\Phi) = \{0\}$ . Considérons donc  $f \in \text{Ker}(\Phi)$ . On a alors par l'inégalité de Poincaré et le doublement du volume (en notant  $dx$  l'intégration par rapport au volume riemannien)

$$\begin{aligned} \int_{B(p,R)} f^2 dx &\leq \sum_{j=1}^N \int_{B_j} f^2 dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{B_j} (f - f_{B_j})^2 dx \\ &\leq C(\varepsilon R)^2 \sum_{j=1}^N \int_{\tau B_j} \|\nabla f(x)\|^2 dx \\ &\leq C(\varepsilon R)^2 \int_{B(p,CR)} \|\nabla f(x)\|^2 dx. \end{aligned}$$

D'un autre côté, comme  $f$  est harmonique, on a par l'inégalité de Poincaré inverse

$$\int_{B(p,CR)} \|\nabla f(x)\|^2 dx \leq \frac{C}{R^2} \int_{B(p,C\tau R)} f^2(x) dx$$

On a donc

$$\int_{B(p,R)} f^2 dx \leq C\varepsilon^2 \int_{B(p,C\tau R)} f^2 dx$$

Ce qui est impossible puisque  $f$  est à croissance polynômiale et  $\varepsilon \in ]0, 1[$  est quelconque. L'argument peut être rendu rigoureux en faisant de bons recouvrements et c'est un point-clé de [30].

#### 4.4 Estimations gaussiennes du noyau de la chaleur

Soit  $M$  une variété riemannienne complète de dimension  $n$  que l'on munit de son volume riemannien  $\text{vol}_g$  et de sa distance riemannienne  $d_g$ . On notera  $V(x, r) = \text{vol}_g(B(x, r))$ . On considère sur cette variété l'équation de la chaleur :

$$(\partial_t + \Delta)u = 0$$

où la fonction  $u(x, t)$  dépend de  $x$  et de  $t$  (c'est la quantité de chaleur en  $x$  au temps  $t$ ). Les solutions sont données (formellement) par le semi-groupe de la chaleur :

$$H_t f(x) = \int_M h(t, x, y) f(y) dy$$

où  $h$  est une fonction lisse positive appelée noyau de la chaleur sur  $L^2(M)$  et  $f = u(\cdot, 0)$  est la répartition initiale de la chaleur. Ici (et dans la suite),  $dy$  est l'intégration par rapport au volume riemannien. Dans le cas euclidien, on a

$$h(t, x, y) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp(-|x - y|^2/4t).$$



Il est naturel de se demander pour quel types de variétés, on a ce type de comportement du noyau de la chaleur. De façon plus précise, on se demande pour quelles variétés  $M$ , il existe des constantes positives  $C_1, C_2, c_1, c_2$  telles que

$$\frac{c_2 \exp((-C_1 d(x, y)^2/t)}{V(x, \sqrt{t})} \leq h(t, x, y) \leq \frac{C_2 \exp((-c_2 d(x, y)^2/t)}{V(x, \sqrt{t})}$$

pour tout  $x \in M$ , tout  $y \in M$ , tout  $t > 0$ .

**Théorème 4.151** (Grigor'yan, Saloff-Coste). *Soit  $M$  une variété riemannienne complète. Alors, le noyau de la chaleur sur  $M$  a un comportement gaussien (au sens précédent) si et seulement si le volume riemannien  $V$  sur  $M$  est doublant et  $M$  admet une inégalité de Poincaré (2, 2) : il existe  $C > 0$  tel que, pour tout  $x \in M$ , tout  $r > 0$  et toute fonction  $u \in C^\infty(B(x, r))$ ,*

$$\int_{B(x, r)} |u - u_{B(x, r)}| dx \leq Cr^2 \int_{B(x, 2r)} |\nabla u|^2 dx.$$

Le point-clé est lié au fait que la condition de doublement du volume et l'inégalité de Poincaré (2, 2) (pour des rayons  $r$  inférieurs à  $R$  fixé) sont équivalents à l'inégalité de Harnack parabolique. On dit que  $M$  admet une inégalité de Harnack parabolique s'il existe une constante  $C$  telle que pour toute boule  $B(x, r)$  avec  $0 < r < R$  et toute solution  $u$  de l'équation de la chaleur dans le cylindre  $(s - r^2, s) \times B(x, r)$ , on a  $\sup_{Q_-} u \leq C \sup_{Q_+} u$  où

$$Q_- = (s - (3/4)r^2, s - (1/2)r^2) \times B(x, r/2)$$

$$Q_+ = (s - (1/4)r^2, s) \times B(x, r/2).$$

Pour plus de détails voir [127]. On explique ici très brièvement le schéma de la preuve de l'inégalité de Harnack parabolique à partir de la conjonction du doublement du volume et de l'inégalité de Poincaré :

1. on montre d'abord que la conjonction du doublement du volume et de l'inégalité de Poincaré implique une inégalité de Sobolev : il existe  $\nu > 2$  et  $C > 0$  tels que, pour toute boule  $B = B(x, r)$  et toute fonction  $f \in C^\infty(B)$ ,

$$\left( \int_B |\psi(y)|^{\frac{2\nu}{\nu-2}} \right)^{\frac{\nu-2}{\nu}} \leq CV(B)^{-\frac{2}{\nu}} r^2 \int_B (|\nabla \psi(y)|^2 + r^{-2} |\psi(y)|^2) d\mu(y), \quad (4.152)$$

2. de (4.152) et du doublement, on déduit des inégalités de valeurs moyennes  $L^p$  pour les sous-solutions et sur-solutions de l'équation de la chaleur,
3. la conjonction du doublement du volume et de l'inégalité de Poincaré impliquent aussi une inégalité de Poincaré à poids, dont on déduit des estimations sur la mesure des sous-ensembles et sur-ensembles de niveau de  $\ln u$  pour toute sur-solution positive  $u$  de l'équation de la chaleur,
4. on obtient alors une inégalité de Harnack "faible" (i.e. avec une norme  $L^p$  dans le membre de gauche au lieu de la borne supérieure) pour les sur-solutions positives  $u$  de l'équation de la chaleur,
5. la conjonction de cette inégalité de Harnack faible et des inégalités de valeurs moyennes donne finalement l'inégalité de Harnack parabolique.

## 5 Quelques exercices

**Exercice 4.153.** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^1$  sur  $\Omega$ . On suppose qu'il existe une fonction  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  telle que pour toute courbe rectifiable  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  (avec  $\gamma([0, 1]) \subset \Omega$ ),  $|f(\gamma(0)) - f(\gamma(1))| \leq \int_{\gamma} |\rho(\xi)| d\xi$ . Démontrer que pour presque tout  $x \in \Omega$ ,  $|\nabla f(x)| \leq \rho(x)$ .

**Exercice 4.154.** Soit  $\mathbb{R}^n$  muni de sa distance euclidienne et de la mesure  $d\mu = (1 + \|x\|)dx$ . Montrer que  $(\mathbb{R}^n, d_{eucl}, \mu)$  vérifie la  $n$ -propriété de Loewner, mais n'est pas un espace de Loewner de dimension  $n$ .

**Exercice 4.155.** Soit  $f : X \rightarrow Y$  un homéomorphisme quasi-symétrique entre les espaces métriques  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$ . Démontrer que  $f^{-1}$  est aussi quasi-symétrique.

**Exercice 4.156.** ([59], Théorème 4.18) Soient  $\lambda \geq 1$ ,  $M \geq 1$  et  $a > 1$ . On dit que le sous-ensemble borné  $A$  d'un espace métrique  $(X, d)$  vérifie la propriété de chaîne  $(\lambda, M, a)$  (par rapport à une boule de référence  $B_0$ ) si pour tout  $x \in A$ , il existe une suite de boules  $(B_i)$  telle que

- (i)  $\lambda B_i \subset A$  pour tout  $i$ ;
- (ii)  $B_i$  est centré en  $x$  pour  $i$  assez grand ;
- (iii) Pour tout  $i$ , le rayon  $r_i$  de  $B_i$  vérifie

$$M^{-1}a^{-i} \text{diam}A \leq r_i \leq Ma^{-i} \text{diam}A;$$

- (iv) L'intersection  $B_i \cap B_{i+1}$  contient une boule  $B'_i$  telle que  $B_i \cup B_{i+1} \subset MB'_i$  pour tout  $i$ .

1a) Montrer que toute boule de l'espace euclidien vérifie une condition de chaîne  $(\lambda, M(\lambda), a(\lambda))$  pour tout  $\lambda \geq 1$  et pour des constantes  $M(\lambda)$  et  $a(\lambda)$  dépendantes de  $\lambda$ .

1a) Montrer que toute boule d'un espace géodésique vérifie une condition de chaîne  $(\lambda, M(\lambda), a(\lambda))$  pour tout  $\lambda \geq 1$  et pour des constantes  $M(\lambda)$  et  $a(\lambda)$  dépendantes de  $\lambda$ .

2) Nous aurons besoin de deux résultats élémentaires que voici.

2a) Soit  $(X, d)$  muni d'une mesure doublante  $\mu$  (de constante de doublement notée  $C_{DV}$ ) et soit  $A \subset X$ . Montrer que pour toute boule  $B(x, r)$  avec  $x \in A$  et  $r < \text{diam}A$ , on a

$$\frac{\mu(B(x, r))}{\mu(A)} \geq 2^{-s} \left( \frac{r}{\text{diam}A} \right)^s \quad (4.157)$$

où  $s = \log_2(C_{DV}) > 0$ .

2b) Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré et soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. On suppose qu'il existe  $s > 1$  et  $C_0 \geq 0$  tel que pour tout  $t > 0$ ,

$$\mu(\{|u| \geq t\}) \leq C_0 t^{-s}.$$

Montrer que si  $q < s$ , on a

$$\|u\|_q \leq \left( \frac{s}{s-q} \right)^{1/q} C_0^{1/s} \mu(X)^{(s-q)/sq}.$$

3) Le but de ce qui suit est de démontrer le résultat suivant. Soit  $(X, d)$  un espace métrique muni d'une mesure doublante  $\mu$  de constante de doublement  $C_{DV}$ . Supposons que  $A \subset X$  vérifie une condition

de chaîne  $(\lambda, M, a)$  pour des  $\lambda \geq 1$ ,  $M \geq 1$  et  $a > 1$ . Alors, si  $s$  vérifie (4.157) et si  $u$  et  $\rho$  sont des fonctions localement intégrables sur  $A$  avec  $\rho$  positive telle que

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq C(\text{diam}(B)) \left( \int_{\lambda B} \rho^p d\mu \right)^{1/p}$$

pour un  $1 \leq p \leq s$ , une constante  $C \geq 1$  et pour toute boule  $B \subset X$  avec  $\lambda B \subset A$ , alors pour tout  $q < (ps)/(s-p)$ , il existe une constante  $C' \geq 1$  (dépendante de  $p, q, s, \lambda, M, a, C$  et  $C_{DV}$ ) telle que

$$\left( \int_A |u - u_A| d\mu \right)^{1/q} \leq C'(\text{diam}A) \left( \int_A \rho^p d\mu \right)^{1/p}.$$

3a) Montrer que l'on peut supposer  $u_A = 0$ .

3b) Soit  $0 < \varepsilon < 1$ . Montrer que l'on a l'estimation suivante

$$\mu(\{|u| \geq t\}) \leq C(\varepsilon) \left( t^{-p}(\text{diam}A)^p \mu(A)^{-r} \int_A \rho^p d\mu \right)^{1/(1-r)}$$

où  $C(\varepsilon)$  est une constante qui dépend de  $\varepsilon$  et  $r = (p(1-\varepsilon))/s$ .

3c) Conclure en appliquant 2b et 3b.

**Remarque 4.158.** Comme expliqué dans la remarque 4.12, des inégalités de Poincaré faibles impliquent des inégalités de Poincaré fortes dans des espaces vérifiant la propriété de chaîne. On peut adapter l'argument précédent pour obtenir ce résultat, voir la remarque 4.21 de [59].

**Exercice 4.159.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique doublant et soit  $p > 1$ . On suppose que  $(X, d)$  vérifie la propriété de Loewner combinatoire de dimension  $p$ . Montrer que

1)  $X$  est linéairement localement connexe (LLC).

2)  $X$  n'a pas de point de coupure locale, c'est à dire qu'il n'est pas possible de disconnecter un ouvert connexe de  $X$  en enlevant un point.

**Exercice 4.160.** Soit  $\{(X_j, d_j, \mu_j, p_j)\}$  une suite d'espaces métriques pointés mesurés qui sont de longueur et complets. Supposons que cette suite converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers un espace métrique pointé mesuré complet  $(X, d, \mu, p)$ . Montrer que si toutes les mesures  $\mu_j$  sont doublantes avec la même constante  $C_{DV}$ , il en est de même de  $\mu$ .

**Exercice 4.161.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\mu$  une mesure sur  $X$ .

1) Si  $\alpha > 0$ , on dit que  $\mu$  est  $\alpha$ -homogène s'il existe une constante  $C \geq 1$  telle que pour tout  $x \in X$ , tous les  $0 < r < R$ ,

$$\frac{\mu(B(x, r))}{\mu(B(x, R))} \geq C^{-1} \left( \frac{r}{R} \right)^\alpha. \quad (4.162)$$

1a) Démontrer que si  $\mu$  est  $\alpha$ -homogène pour un  $\alpha > 0$  alors  $\mu$  est doublante.

1b) Démontrer que si  $\mu$  est doublante alors  $\mu$  est  $\alpha$ -homogène pour un  $\alpha > 0$ .

2) On s'intéresse aux mesures qui vérifient l'estimation inverse :

$$\frac{\mu(B(x, r))}{\mu(B(x, R))} \leq C \left( \frac{r}{R} \right)^\alpha. \quad (4.163)$$

2a) On suppose que  $X$  est uniformément parfait, c'est à dire qu'il existe une constante  $C_{UP} \geq 1$  telle que pour tout  $x \in X$ , tout  $R > 0$ ,  $B(x, R) \setminus B(x, R/C_{UP}) \neq \emptyset$  dès que  $X \setminus B(x, R) \neq \emptyset$ . Si  $\mu$  est doublante, démontrer qu'il existe  $C \geq 1$  et  $\alpha > 0$  de sorte que l'on ait (4.163).

2b) En déduire que sous les hypothèses de 2a), la dimension de Hausdorff de  $X$  est minorée par une constante positive ne dépendant que de la constante de doublement de  $\mu$  et  $C_{UP}$ .

2c) En utilisant 2b), montrer que  $\mathbb{Q}$  muni de la distance euclidienne induite est métriquement doublant mais ne supporte pas de mesure doublante. Ceci montre que tout espace doublant ne supporte pas de mesure doublante (comparer avec le théorème 1.111).

**Exercice 4.164.** [73]

Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet muni d'une mesure doublante  $\mu$ . Soit  $p \geq 1$ . On considère deux types d'inégalité de type Poincaré :

(P1) Il existe des constantes  $C \geq 0$  et  $\tau \geq 1$  de sorte que pour toute fonction mesurable  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  et tout gradient supérieur  $\rho : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}^+}$  de  $u$

$$\int_{B(a,r)} |u - u_{B(a,r)}| d\mu \leq Cr \left( \int_{B(a,\tau r)} \rho^p d\mu \right)^{1/p} \quad (4.165)$$

pour tout  $a \in X$  et tout  $r > 0$ .

(P2) Il existe des constantes  $C > 0$  et  $\lambda \geq 1$  de sorte que pour toute fonction mesurable  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$\int_{B(a,r)} |u - u_{B(a,r)}| d\mu \leq Cr \left( \int_{B(a,\lambda r)} (D_\varepsilon u)^p d\mu \right)^{1/p} \quad (4.166)$$

dès que  $a \in X$  et  $0 < \varepsilon < r$ . Ici,  $D_\varepsilon u(x) = \sup_{y \in B(x,\varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|}{\varepsilon}$ .

Il est important de noter que dans (P2), les constantes ne dépendent pas de  $\varepsilon$ .

Le but de l'exercice est de montrer que (P1)  $\iff$  (P2).

PARTIE I : Preuve de (P2)  $\implies$  (P1).

Si  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction lipschitzienne, on pose  $Lip(u)(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{|u(x) - u(y)|}{d(x,y)}$ . Stephen

Keith (voir [71], theorem 2) a montré que (4.165) pour toutes fonctions mesurables est une conséquence de

$$\int_{B(a,r)} |u - u_{B(a,r)}| d\mu \leq Cr \left( \int_{B(a,\tau r)} (Lip(u))^p d\mu \right)^{1/p} \quad (4.167)$$

pour toute fonction lipschitzienne  $u$ .

Démontrer l'implication (P2)  $\implies$  (P1).

PARTIE II : Preuve de (P2)  $\implies$  (P1).

Fixons  $\varepsilon > 0$ .

1) Démontrer qu'il existe un recouvrement de  $X$  par des boules  $B_i = B(x_i, \varepsilon)$  ( $i \in I$ ) de sorte que les boules  $B(x_i, \varepsilon/5)$  sont deux à deux disjointes et pour tout  $x \in X$ , le nombre de boules  $B_i$  contenant  $x$  est borné par une constante ne dépendant que de la constante de doublement de  $\mu$  (et non de  $\varepsilon$ ).

2) Soit  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow [0, 1]$  telle que  $f(t) = 1/2$  si  $t \in [0, \varepsilon/2]$ ,  $f(t) = -(1/\varepsilon)t + 1$  si  $t \in [\varepsilon/2, \varepsilon]$ , et  $f(t) = 0$  si  $t \geq \varepsilon$ . Soit  $\psi_i(x) = f(d(x, x_i))$  et  $\phi_i = \psi_i(x) / \sum_{j \in I} \psi_j(x)$  pour tout  $x \in X$ . Montrer que  $\phi_i$  est  $C\varepsilon^{-1}$ -lipschitzienne,  $0 \leq \phi_i \leq 1$ , le support de  $\phi_i$  est dans  $B_i$  et  $\sum_{i \in I} \phi_i(x) = 1$  pour tout  $x \in X$ .

On pose

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{i \in I} V_i \phi_i(x) \text{ où } V_i = \int_{B_i} u(x) d\mu(x)$$

$$D_\varepsilon^A u(x) = \int_{B(x, \varepsilon)} \frac{|u(x) - u(y)|}{\varepsilon} d\mu(y)$$

$$g_\varepsilon(a) = \int_{B(x, 2\varepsilon)} D_{5\varepsilon}^A u(x) d\mu(x).$$

3a) Montrer que  $|u_\varepsilon(b) - u_\varepsilon(a)| \leq Cd(a, b)g_\varepsilon(a)$  où  $d(a, b) \leq \varepsilon$  (indication : si  $a \in B_0$ , vérifier que pour tout  $i \in I$ ,  $|V_i - V_0| \leq C\varepsilon g_\varepsilon(a)$ ).

3b) Démontrer que  $Cg_\varepsilon$  est un gradient supérieur de  $u_\varepsilon$ .

4) Démontrer les inégalités suivantes et conclure.

$$\int_{B(a, r)} |u(x) - u_{B(a, r)}| d\mu(x) \leq 2 \int_{B(a, r)} |u_\varepsilon(x) - u(x)| d\mu(x) + \int_{B(a, r)} |u_\varepsilon(x) - (u_\varepsilon)_{B(a, r)}| d\mu(x) \quad (4.168)$$

$$\int_{B(a, r)} |u_\varepsilon(x) - u(x)| d\mu(x) \leq 7Cr \left( \int_{B(a, \lambda r)} (D_{7\varepsilon} u(x))^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad (4.169)$$

$$\int_{B(a, r)} |u_\varepsilon(x) - (u_\varepsilon)_{B(a, r)}| d\mu(x) \leq 3Cr \left( \int_{B(a, \lambda r)} (D_{7\varepsilon} u(x))^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad (4.170)$$

#### Exercice 4.171. [134]

Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique mesuré. Pour  $p > 1$ , on note  $N^{1,p}(X)$  l'espace de Sobolev défini par Nageswari Shanmugalingam (voir chapitre 3).

1) Soit  $\Gamma$  une collection de courbes dans  $X$ . Montrer que  $Mod_p(\Gamma) = 0$  si et seulement si il existe une fonction positive  $p$ -intégrable  $\rho$  sur  $X$  de sorte que pour tout chemin  $\gamma$  de  $\Gamma$ ,  $\int_\gamma \rho ds = \infty$ .

2) Soit  $E$  un sous-ensemble de  $X$  tel que  $\mu(E) = 0$ . Montrer que  $Mod_p(\Gamma_E^+) = 0$  où  $\Gamma_E^+$  est la famille des courbes rectifiables  $\gamma$  de  $X$  telles que  $\mathcal{H}^1(E \cap \gamma) > 0$  (Ici,  $\mathcal{H}^1$  est la 1-mesure de Hausdorff de  $X$ ).

3) Soit  $\rho$  une fonction mesurable borélienne  $p$ -intégrable de  $X$ . On dit que  $x \sim_p y$  si soit  $x = y$  ou s'il existe une courbe rectifiable  $\gamma$  reliant  $x$  à  $y$  de sorte que  $\int_\gamma \rho(s) ds < \infty$ . Montrer que  $\sim_p$  est une relation d'équivalence.

Un espace métrique  $X$  vérifie la "Main Equivalence Class property  $MEC_p$ " si toute fonction  $\rho$  borélienne positive  $p$ -intégrable engendre une classe d'équivalence  $G_\rho$  (appelé la principale classe d'équivalence de  $\rho$ ) de sorte que  $\mu(X \setminus G_\rho) = 0$ .

4) Supposons que  $X$  vérifie  $MEC_p$  et contient au moins deux points.

4a) Soit  $E$  un sous-ensemble de  $X$ . Montrer que  $Mod_p(\Gamma_E) = 0$  si et seulement si  $cap_p(E) = 0$ , où  $\Gamma_E$  est l'ensemble des courbes rectifiables qui intersectent  $E$  et  $cap_p(E) = \inf \|u\|_{N^{1,p}(X)}^p$  où l'infimum est pris sur toutes les fonctions  $u \in N^{1,p}(X)$  de sorte que  $u \geq 1$  sur  $E$ .

- 4b) Soit  $\Gamma_{rect}$  l'ensemble des courbes rectifiables de  $X$ . Montrer que  $Mod_p(\Gamma_{rect}) > 0$ .
- 4c) Montrer qu'il existe une classe d'équivalence  $\mathcal{C}$  de fonctions dans  $L^p$  de sorte que  $u \in \mathcal{C}$  n'est dans aucune classe d'équivalence de  $N^{1,p}(X)$ . Montrer que cela implique que  $N^{1,p}(X)$  est strictement contenu dans  $L^p$ .
- 5) Supposons que  $X$  vérifie  $MEC_p$ . Soit  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction sur  $X$  et soit  $N$  un ensemble négligeable de  $X$ . Si la restriction de  $u$  à  $X \setminus N$  est constante le long de presque toute courbe de  $X$ , montrer que  $u$  est presque partout constante sur  $X$ .

Tout espace de Loewner de dimension  $Q$  vérifie  $MEC_Q$  (voir [134]).

**Exercice 4.172** (Une caractérisation de l'inégalité de Poincaré par la capacité, [63]). Soit  $(X, d, \mu)$  un espace métrique complet muni d'une mesure doublante. On suppose que pour toute boule  $B \subset X$ ,  $0 < \mu(B) < +\infty$  et donc  $\mu(A) = \sup\{\mu(K); K \subset A \text{ compact}\}$  où  $A$  est un borélien de  $X$  (propriété de régularité de  $\mu$ ). On rappelle que  $X$  satisfait une inégalité de Poincaré  $(1, 1)$  s'il existe des constantes  $C \geq 0$  et  $\tau \geq 1$  de sorte que pour tout  $u : X \rightarrow \mathbb{R}$  et tout gradient supérieur  $\rho : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^+$  de  $u$

$$\int_B |u - u_B| d\mu \leq C(\text{diam}B) \int_{\tau B} \rho d\mu \quad (4.173)$$

pour toute boule  $B \subset X$ .

Pour des ensembles fermés disjoints  $E$  et  $F$  dans un ouvert  $U$  de  $X$ , on pose  $Cap(E, F; U) = \inf_{\rho} \int_U \rho d\mu$  où l'infimum est pris sur tous les gradients supérieurs  $\rho$  de fonctions mesurables  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $u \geq 1$  sur  $E$  et  $u \leq 0$  sur  $F$ .

- 1) Supposons que  $X$  satisfait une inégalité de Poincaré  $(1, 1)$ . Soient  $E, F$  des sous-ensembles disjoints d'une boule  $B$  de  $X$ . Montrer qu'il existe des constantes  $C_0 > 0$  et  $\lambda \geq 1$  telles que

$$\min(\mu(E), \mu(F)) \leq C_0 \text{diam}B \text{Cap}(E, F, \lambda B). \quad (4.174)$$

(indication : appliquer l'inégalité de Poincaré à une fonction test pour la capacité).

- 2) Soit  $\rho$  un gradient supérieur de  $u$  sur  $X$ . Supposons que  $u$  est constante sur un sous-ensemble fermé  $E$  de  $X$ . Montrer que la fonction borélienne  $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)\chi_{X \setminus E}(x)$  est un gradient supérieur de  $u$  sur  $X$ .

A partir de maintenant, on suppose que  $X$  vérifie (4.174) et on veut montrer que  $X$  satisfait une inégalité de Poincaré. Pour cela, considérons une fonction mesurable  $u$  définie sur une boule  $\lambda B$  et soit  $\rho$  un gradient supérieur de  $u$ .

- 3) Soit  $t$  tel que à la fois  $\mu(\{x \in B; u(x) \geq t\})$  et  $\mu(\{x \in B; u(x) \leq t\})$  sont majorés par  $\mu(B)/2$ .
- 3a) Montrer qu'il est suffisant de montrer l'inégalité de Poincaré  $(1, 1)$  pour  $u$  avec  $|u - u_B|$  remplacé par  $|u - t|$ . Montrer que l'on suppose que  $t = 0$ .
- 3b) Montrer que l'on peut supposer que  $u \geq 0$  (indication : montrer que  $\rho$  est un gradient supérieur de  $u^+ = \max(u, 0)$  et de  $u^- = \min(u, 0)$ ).

Il nous reste à démontrer que

$$\int_B u d\mu \leq C \text{diam}B \int_{\lambda B} \rho d\mu. \quad (4.175)$$

- 4) Montrer que (4.175) est équivalente à

$$\int_B u d\mu \leq C \text{diam}B \int_{\lambda B} \rho d\mu.$$

Pour tout entier  $j$ , on pose  $F_j = \{x \in \lambda B; 2^j \leq u(x) < 2^{j+1}\}$ .

5) Montrer que la fonction  $\rho_j(x) = \rho(x)\chi_U(x)$  est un gradient supérieur de la fonction  $u_j(x) = \min(2^j, \max(0, u(x) - 2^j))$  dans  $\lambda B$  où  $U$  est un ouvert de  $\lambda B$  tel que  $\lambda B \setminus U$  est l'union de deux fermés  $K_j^0 \subset \{x \in \lambda B; u(x) < 2^j\}$  et  $K_j^1 \subset \{x \in \lambda B; u(x) \geq 2^{j+1}\}$  (indication : utiliser la question 2).

6) Pour conclure, montrer qu'il est suffisant de vérifier que pour tout  $j$ ,

$$2^j \mu(\{x \in B; u_j(x) \geq 2^j\}) \leq C \text{diam} B \int_{F_j} \rho d\mu \quad (4.176)$$

Il nous reste à montrer que (4.176) est satisfaite.

7) En utilisant la régularité de  $\mu$  (voir au dessus), montrer que l'on peut remplacer  $F_j$  par un ensemble qui vérifie la même condition que  $U$  dans la question 5.

8) Soit  $E \subset \{x \in B, u_j(x) = 0\}$  un compact avec  $\mu(E) \geq \frac{1}{2}\mu(\{x \in B; u(x) = 0\})$  et  $F \subset \{x \in B, u_j(x) = 2^j\}$  de sorte que  $\mu(F) \geq \frac{1}{2}\mu(\{x \in B; u(x) = 2^j\})$ . Montrer que  $\min(\mu(E), \mu(F)) \leq C \text{diam} B \int_V 2^{-j} \rho d\mu$  (où  $V = \lambda B \setminus (E \cap F)$ ) puis conclure.

# Index

- Ahlfors-régularité, 110
- Algèbre de Lie, 55
- Application  $F$ -différentiable, 132
- Application  $G$ -différentiable, 132
- Application  $H$ -linéaire, 135
- Application  $P$ -différentiable, 135
- Application exponentielle, 57
- Application lipschitzienne, 97
- Application quasi-conforme, 122, 314
- Application quasi-symétrique, 314
- Approximation de l'identité, 191
  
- Borélien, 17
  
- Capacité, 272
- Champ de vecteurs, 54
- Champ de vecteurs invariant à gauche, 56
- Classe monotone, 15
- Condition de Bakry-Emery, 309
- Condition de Rajala, 302
- Convergence de Hausdorff-Gromov, 278
- Convergence de Hausdorff-Gromov mesurée, 279
- Convergence de Hausdorff-Gromov pointée, 278, 279
- Convergence faible de mesures, 117
- Courant, 161
- Courbe admissible, 58
- Courbe de Von Koch, 112
- Courbe intégrale, 55
- Courbe rectifiable, 104
- Courbure de Menger, 161
- Crochet de Lie, 55
- Cube dyadique, 27
  
- Décomposition de Calderón-Zygmund, 85
- Décomposition de Whitney, 85, 90
- Dérivée au sens de Dini, 78
- Dérivée d'une mesure, 68
- Dérivée faible, 190
- Dérivée métrique, 105, 137
- Densité inférieure/supérieure, 114, 116
- Différentiabilité, 28
  
- Dilatation, 60
- Dimension d'Assouad, 182
- Dimension de Hausdorff, 102
- Dimension de Nagata, 144
- Dimension homogène, 61
- Dimension topologique, 180
- Distance de Carnot, 59
- Distance de Gromov-Hausdorff, 277
- Distance de Hausdorff, 277
  
- Ensemble Aronszajn nul, 131
- Ensemble autosimilaire, 110
- Ensemble cube nul, 132
- Ensemble de Besicovitch, 164
- Ensemble de Cantor, 94
- Ensemble de Cantor 4-coins, 112, 148
- Ensemble de périmètre fini, 157, 222
- Ensemble Gauss nul, 131
- Ensemble purement non-rectifiable, 148
- Ensemble rectifiable, 147
- Ensemble triadique de Cantor, 111
- Escalier de Cantor, 94
- Espace à courbure de Ricci positive, 304
- Espace contractible, 290
- Espace d'Alexandrov, 299
- Espace de Banach lisse, 91
- Espace de Banach uniformément convexe, 91
- Espace de Hölder, 190
- Espace de Loewner, 273
- Espace de longueur, 109
- Espace de Marcinkiewicz, 62
- Espace de nature homogène, 46
- Espace de Sobolev, 192
- Espace de Sobolev  $M^{1,p}$ , 240
- Espace de Sobolev  $N^{1,p}$ , 233
- Espace de Sobolev à valeurs dans un espace de Banach, 240
- Espace de Sobolev fractionnaire, 207
- Espace doublant, 49
- Espace géodésique, 109
- Espace Lipschitz  $m$ -connecté, 144
- Espace LLC, 273



Espace métrique Ahlfors régulier, 48  
 Espace métrique pointé, 278  
 Espace métrique propre, 107  
 Espace non branchant, 295  
 Espace quasi-convexe, 274, 284  
  
 Fonction à variations bornées, 222  
 Fonction absolument continue, 58  
 Fonction absolument continue le long d'une courbe, 233  
 Fonction absolument continue le long des lignes, 237  
 Fonction hölderienne, 190  
 Fonction maximale de Hardy-Littlewood, 62  
 Fonction maximale dyadique, 94  
 Fonction mesurable, 22  
 Fonction semicontinue, 75  
 Formule de Crofton, 172  
 Formule de l'aire, 166, 168, 174, 176, 178  
 Formule de la coaire, 169, 175, 179  
  
 Gradient supérieur, 230  
 Gradient supérieur faible, 230  
 Graphe à courbure positive, 311  
 Graphe lipschitzien, 148  
 Grassmannienne, 151  
 Groupe de Carnot, 59  
 Groupe de Heisenberg, 47  
 Groupe de Lie, 56  
 Groupe nilpotent, 59  
  
 Inégalité de Brunn-Minkowski, 34, 304  
 Inégalité de Gagliardo-Nirenberg, 220  
 Inégalité de Nash, 220  
 Inégalité de Poincaré, 220, 259, 266  
 Inégalité de Poincaré pour les boules, 221  
 Inégalité de Poincaré pour les graphes, 311  
 Inégalité de Prekopa-Leindler, 35  
 Inégalité de Trudinger Moser, 215  
 Inégalité isodiamétrique, 31  
 Inégalité isopérimétrique, 225  
 Injection de Morrey, 216  
 Injection de Sobolev, 212  
 Injection de Sobolev compacte, 218  
 Injection de Sobolev pour les espaces  $M^{1,p}$ , 245  
 Injection pour les espaces BV, 225  
  
 Lemme d'Urysohn, 22  
 Lemme de Frostman, 118  
 Lemme de recouvrement  $5r$ , 38  
 Lemme de recouvrement de Besicovitch, 41  
  
 Lemme de recouvrement de Vitali, 39, 44, 50  
 Lemme de Steinhaus, 88  
 Limite approchée, 92  
  
 Matrice jacobienne, 28  
 Mesure, 13  
 Mesure  $\alpha$ -homogène, 48  
 Mesure  $\sigma$ -finie, 17  
 Mesure  $s$ -uniforme, 49  
 Mesure absolument continue, 67  
 Mesure de comptage, 13  
 Mesure de Dirac, 13  
 Mesure de Haar, 61  
 Mesure de Lebesgue, 25  
 Mesure de Radon, 17  
 Mesure image, 22, 295  
 Mesure intégrale-géométrique, 172  
 Mesure mutuellement singulières, 71  
 Mesure produit, 24  
 Mesure tangente, 150  
 Mesure uniforme, 152  
 Mesures de Hausdorff, 101  
 Module conforme, 269  
 Module d'un anneau, 270, 271  
 Module d'une famille de courbes, 228  
 Module discret, 276  
  
 Norme du jacobien, 126, 127  
 Norme du jacobien, 127  
  
 Opérateur compact, 218  
 Opérateur de Cauchy, 160  
  
 Paramétrisation par longueur d'arc, 105  
 Partie mesurable, 14  
 Partition de l'unité, 98  
 Pinceau de courbes, 286  
 Plan tangent approximatif, 155  
 Poids  $A_\infty$  fort, 288  
 Point de Lebesgue, 66  
 Potentiel de Riesz, 240, 260, 262  
 Principe de Cavalieri, 64  
 Propriété d'extension lipschitzienne, 143  
 Propriété de contraction de la mesure, 296  
 Propriété de courbure positive, 292  
 Propriété de Loewner, 272  
 Propriété de Loewner combinatoire, 276  
 Propriété de Radon-Nikodym (RNP), 133  
  
 Quasi-distance, 46

Rétracté lipschitzien, 146  
 Restriction d'une mesure, 13  
  
 Segment géodésique, 109  
 Support d'une mesure, 21, 295  
 Symétrisation de Steiner, 31  
  
 Tamis de Sierpinski, 112  
 Tapis de Sierpinski, 112  
 Théorème d'approximation de Friedrichs, 194  
 Théorème d'approximation de Serrin, 203  
 Théorème d'approximation pour les fonctions BV, 223  
 Théorème d'Egoroff, 24  
 Théorème d'extension de Kirszbraun, 140, 142  
 Théorème d'extension de McShane, 139  
 Théorème d'extension de Whitney, 123  
 Théorème d'extension pour les espaces de Sobolev, 201  
 Théorème de Banach-Alaoglu, 142  
 Théorème de changement de variables dans les intégrales, 29  
 Théorème de décomposition de Whitney, 123  
 Théorème de différentiation de Lebesgue, 66, 70, 81  
 Théorème de Fubini, 24  
 Théorème de Lusin, 23  
 Théorème de Marstrand, 116  
 Théorème de Pansu-Rademacher, 135  
 Théorème de plongement d'Assouad, 51  
 Théorème de Rademacher, 119  
 Théorème de Rademacher en dimension 1, 75  
 Théorème de Radon-Nikodym, 71  
 Théorème de représentation de Riesz, 117, 222  
 Théorème de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, 219  
 Théorème de Sard, 113  
 Théorème de Stepanov, 121  
 Théorème de Tietze-Urysohn, 22  
 Topologie faible, 141  
 Topologie faible \*, 141  
 Trace dans les espaces de Sobolev, 204  
 Translation, 56  
 Tribu, 15  
  
 Varifold, 162  
 Vitesse d'une courbe, 105



# Bibliographie

- [1] R.A. ADAMS et J.J.F. FOURNIER : *Sobolev spaces*, volume 140 de *Pure and Applied Mathematics (Amsterdam)*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, deuxième édition, 2003.
- [2] M. AIGNER et G. M. ZIEGLER : *Raisonnements divins : quelques démonstrations mathématiques particulièrement élégantes*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [3] L. AMBROSIO, N. FUSCO et D. PALLARA : *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Math. Monographs. Oxford Univ. Press, 2000.
- [4] L. AMBROSIO et B. KIRCHHEIM : Currents in metric spaces. *Acta Math.*, 185(1):1–80, 2000.
- [5] L. AMBROSIO et B. KIRCHHEIM : Rectifiable sets in metric and Banach spaces. *Math. Ann.*, 318(3):527–555, 2000.
- [6] L. AMBROSIO et P. TILLI : *Topics on analysis in metric spaces*. Numéro 25 de Oxford Lecture Series in Mathematics and Applications. Oxford Univ. Press, 2004.
- [7] C. ANÉ, S. BLACHÈRE, D. CHAFAÏ, P. FOUGÈRES, I. GENTIL, F. MALRIEU, C. ROBERTO et G. SCHEFFER : *Sur les inégalités de Sobolev logarithmiques*. Société mathématique de France, 2000.
- [8] P. ASSOUD : Plongements lipschitziens dans  $\mathbb{R}^n$ . *Bull. S. M. F.*, 111:429–448, 1983.
- [9] P. AUSCHER, E. RUSS et P. TCHAMITCHIAN : Hardy Sobolev spaces on strongly Lipschitz domains of  $\mathbb{R}^n$ . *J. Funct. Anal.*, 218(1):54–109, 2005.
- [10] D. BAKRY, T. COULHON, M. LEDOUX et L. SALOFF-COSTE : Sobolev inequalities in disguise. *Indiana Univ. Math. J.*, 44(4):1033–1074, 1995.
- [11] D. BAKRY et Z. QIAN : *Volume comparison theorems without Jacobi fields*, pages 115–122. Theta, Bucarest, 2005.
- [12] Z. BALOGH, U. LANG et P. PANSU : Lipschitz extensions of maps between Heisenberg groups. *Annales de l’Institut Fourier*, 66(4):1653–1655, 2016.
- [13] P. BARBE et M. LEDOUX : *Probabilité (L3M1)*. EDP Sciences, 2012.
- [14] Y. BENYAMINI et J. LINDENSTRAUSS : *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, volume 48 de *Colloquium Publications*. Amer. Math. Soc., 1998.
- [15] A. BONFIGLIOLI, E. LANCONELLI et F. UGUZZONI : *Stratified Lie groups and potential theory for their sub-Laplacians*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Berlin, 2007.
- [16] G. BOURDAUD : Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. *Invent. Math.*, 104(2):435–446, 1991.
- [17] M. BOURDON et B. KLEINER : Combinatorial modulus, the combinatorial loewner property, and coxeter groups. *Groups Geom. Dyn.*, 7:39–107, 2013.
- [18] M. BOURDON et H. PAJOT : Poincaré inequalities and quasiconformal structure on the boundary of some hyperbolic buildings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(8):2315–2324, 1999.

- [19] M. BOURDON et H. PAJOT : Quasi-conformal geometry and hyperbolic geometry. *In Rigidity in dynamics and geometry*, pages 1–17. Springer, 2002.
- [20] J. BOURGAIN et H. BREZIS : New estimates for elliptic equations and Hodge type systems. *J. E. M. S.*, 9(2):277–315, 2007.
- [21] P. BOUSQUET, E. RUSS, Y. WANG et P.-L. YUNG : Approximation in fractional Sobolev spaces and Hodge systems. *arXiv preprint arXiv :1709.01762*, 2017.
- [22] H. BREZIS : *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*. Dunod, 1994.
- [23] D. BURAGO, Y. BURAGO et S. IVANOV : *A course in metric geometry*, volume 33. American Mathematical Society Providence, 2001.
- [24] L. CAPOGNA, D. DANIELLI, S. D. PAULS et J. TYSON : *An introduction to the Heisenberg group and the sub-Riemannian isoperimetric problem*, volume 259. Springer Science & Business Media, 2007.
- [25] I. CHAVEL : *Riemannian geometry : a modern introduction*, volume 98. Cambridge university press, 2006.
- [26] J. CHEEGER : Differentiability of Lipschitz functions in metric spaces. *Geom. Funct. Anal.*, 9:428–517, 1999.
- [27] J. CHEEGER et T. H. COLDING : On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III. *J. Diff. Geom.*, 54(1):37–74, 2000.
- [28] R. R. COIFMAN et G. WEISS : *Analyse harmonique non-commutative sur certains espaces homogènes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 242. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [29] R. R. COIFMAN et G. WEISS : Extensions of Hardy spaces and their use in analysis. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 83(4):569–645, 1977.
- [30] T. H. COLDING et W. P. MINICOZZI : Harmonic functions on manifolds. *Ann. of Math.*, 146:725–747, 1997.
- [31] T. COULHON et P. KOSKELA : Geometric interpretations of  $L^p$ -Poincaré inequalities on graphs with polynomial growth. *Milan J. Math.*, 72:200–248, 2004.
- [32] T. COULHON et L. SALOFF-COSTE : Isopérimétrie pour les groupes et les variétés. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 9(2):293–314, 1993.
- [33] G. DAVID : *Singular sets of minimizers for the Mumford-Shah functional*, volume 233 de *Progress in Math.* Springer Science & Business Media, 2006.
- [34] G. DAVID et S. SEMMES : *Strong  $A_\infty$  weights, Sobolev inequalities and quasiconformal mappings*, pages 101–111. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 122. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1990.
- [35] G. DAVID et S. SEMMES : *Analysis of and on uniformly rectifiable sets*, volume 38 de *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Soc., 1993.
- [36] G. DAVID et S. SEMMES : *Fractured fractals and broken dreams - self similar geometry through metric and measures*, volume 7 de *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications*. Clarendon Press, Oxford, 1997.
- [37] G. DAVID et M. SNIPES : A non-probabilistic proof of the Assouad embedding theorem with bounds on the dimension. *Anal. Geom. Metric Spaces*, 1:36–41, 2013.
- [38] E. DE GIORGI, M. CARRIERO et A. LEACI : Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 108(4):195–218, 1989.
- [39] C. DE LELLIS : *Rectifiable sets, densities and tangent measures*. European Mathematical Society, 2008.

- [40] T. DE PAUW, A. LEMENANT et V. MILLOT : On sets minimizing their weighted length in uniformly convex separable Banach spaces. *J. Reine Angew. Math.*, 558:109–157, 2003.
- [41] C. DELLACHERIE et P. A. MEYER : *Probabilities and potential*. North-Holland Mathematical Studies Volume 29. Elsevier Science, 1978.
- [42] J. DIESTEL et J. UHL : *Vector measures*, volume 15 de *Math. Surveys*. Amer. Math. Soc., 1977.
- [43] N. DUNFORD et J.T. SCHWARTZ : *Linear operators (part I : general theory)*. Wiley Classics Library, 1988.
- [44] L.C EVANS : *Partial differential equations*, volume 119 de *Graduate text in Mathematics*. Amer. Math. Soc., 1998.
- [45] L.C. EVANS et R.F. GARIEPY : *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [46] K. J. FALCONER : *The geometry of fractal sets*, volume 85. Cambridge University Press, 1986.
- [47] H. FEDERER : *Geometric measure theory*. Springer, 1969.
- [48] G. B. FOLLAND : *Real analysis : modern techniques and their applications*. John Wiley & Sons, 2013.
- [49] G. B. FOLLAND : *A course in abstract harmonic analysis*, volume 29. CRC press, 2016.
- [50] G. B. FOLLAND et E. M. STEIN : *Hardy spaces on homogeneous groups*, volume 28 de *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982.
- [51] David G. : Should we solve Plateau’s problem again ? *In Advances in mathematics : the legacy of Elias M. Stein*, pages 108–145. Princeton University Press, 2014.
- [52] S. GALLOT, D. HULIN et J. LAFONTAINE : *Riemannian geometry*. Universitext. Springer, 2004.
- [53] L. GRAFAKOS : *Classical Fourier analysis*. Springer, 2008.
- [54] P. HAJŁASZ : Sobolev spaces on an arbitrary metric space. *Pot. Anal.*, 5(4):403–415, 1996.
- [55] P. HAJŁASZ : Sobolev spaces on metric-measure spaces. *Contemp. Math.*, 338:173–218, 2003.
- [56] P. HAJŁASZ et P. KOSKELA : *Sobolev met Poincaré*, volume 688. Amer. Math. Soc., 2000.
- [57] J. HARRISON et H. PUGH : Plateau’s problem. *In Open problems in mathematics*, pages 273–302. Springer, 2016.
- [58] J. HEINONEN : Calculus on Carnot groups. *Ber. Jyv. Univ. Math. Inst.*, 68:1–31, 1995.
- [59] J. HEINONEN : *Lectures on analysis on metric spaces*. Springer, 2001.
- [60] J. HEINONEN : Lectures on Lipschitz analysis. Rapport technique, Univ. Jyv., 2005.
- [61] J. HEINONEN et P. KOSKELA : Definitions of quasiconformality. *Invent. Math.*, 120(1):61–79, 1995.
- [62] J. HEINONEN et P. KOSKELA : Quasiconformal maps in metric spaces with controlled geometry. *Acta Math.*, 181(1):1–61, 1998.
- [63] J. HEINONEN et P. KOSKELA : A note on Lipschitz functions, upper gradients, and the Poincaré inequality. *New Zealand J. Math*, 28(1):37–42, 1999.
- [64] J. HEINONEN, P. KOSKELA, N. SHANMUGALINGAM et J. T. TYSON : *Sobolev Spaces on Metric Measure Spaces*, volume 27. Cambridge University Press, 2015.
- [65] F. HIRSCH et G. LACOMBE : *Éléments d’analyse fonctionnelle*. Dunod, 1999.
- [66] W. JOHNSON, J. LINDENSTRAUSS et G. SCHECHTMAN : Extension of Lipschitz maps into Banach spaces. *Israel Journal of Mathematics*, 54(2):129–138, 1986.

- [67] P.W. JONES : Quasiconformal mappings and extendability of functions in Sobolev spaces. *Acta Math.*, 147(1):71–88, 1981.
- [68] J.-L. JOURNÉ : *Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderón*, volume 994 de *Lect. Notes Math.* Springer, 2006.
- [69] N. JUILLET : Geometric inequalities and generalized Ricci bounds in the Heisenberg group. *Int. Math. Res. Notices*, 2009(13):2347–2373, 2009.
- [70] N. JUILLET et M. SIGALOTTI : Pliability, or the Whitney extension theorem for curves in Carnot groups. *Preprint*, 2016.
- [71] S. KEITH : Modulus and the Poincaré inequality on metric measure spaces. *Math. Z.*, 245(2):255–292, 2003.
- [72] S. KEITH : A differentiable structure for metric measure spaces. *Adv. Math.*, 183(2):271–315, 2004.
- [73] S. KEITH et K. RAJALA : A remark on Poincaré inequalities on metric measure spaces. *Math. Scand.*, pages 299–304, 2004.
- [74] S. KEITH et X. ZHONG : The Poincaré inequality is an open ended condition. *Ann. Math.*, pages 575–599, 2008.
- [75] J. KIGAMI : *Analysis on fractals*, volume 143. Cambridge University Press, 2001.
- [76] B. KLEINER et J. MACKAY : Differentiable structures on metric measure spaces : A primer. *Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa*, 16(1):41–64, 2016.
- [77] H. KNOTHE : Contributions to the theory of convex bodies. *Mich. Math. J.*, 4(1):39–52, 1957.
- [78] A. KORÁNYI et H. M. REIMANN : Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group. *Adv. in Math.*, 111(1):1–87, 1995.
- [79] S. G. KRANTZ : *Complex analysis : the geometric viewpoint*. Numéro 23 de The Carus Mathematical Monographs. MAA, 2004.
- [80] S. G. KRANTZ et H. R. PARKS : *Geometric integration theory*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [81] K. KUWAE, Y. MACHIGASHIRA et T. SHIOYA : Sobolev spaces, Laplacian, and heat kernel on Alexandrov spaces. *Math. Z.*, 238(2):269–316, 2001.
- [82] T. J. LAAKSO : Ahlfors  $Q$ -regular spaces with arbitrary  $Q > 1$  admitting weak Poincaré inequality. *Geom. Funct. Anal.*, 10(1):111–123, 2000.
- [83] U. LANG : Notes on rectifiability. Consultable à [https://people.math.ethz.ch/~lang/rect\\_notes.pdf](https://people.math.ethz.ch/~lang/rect_notes.pdf), 2007.
- [84] U. LANG et T. SCHLICHENMAIER : Nagata dimension, quasisymmetric embeddings, and Lipschitz extensions. *I. M. R. N.*, 2005(58):3625–3655, 2005.
- [85] M. LEDOUX : The geometry of Markov diffusion generators. *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 9(2):305–366, 2000.
- [86] J. LEE et A. NAOR : Extending Lipschitz functions via random metric partitions. *Invent. Math.*, 160:59–95, 2005.
- [87] J. C. LÉGER : Rectifiability and Menger curvature. *Ann. Math.*, 149:831–869, 1999.
- [88] G. P. LEONARDI, S. RIGOT et D. VITTONI : Isodiametric sets in the Heisenberg group. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 28:999–1024, 2012.
- [89] E. H. LIEB et M. LOSS : *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics. Amer. Math. Soc., 2001.
- [90] J. LOTT et C. VILLANI : Ricci curvature for metric-measure spaces via optimal transport. *Ann. Math.*, pages 903–991, 2009.

- [91] J. LUUKKAINEN : Assouad dimension : antifractal metrization, porous sets, and homogeneous measures. *J. Kor. Math. Soc.*, 35(1):23–76, 1998.
- [92] J. LUUKKAINEN et E. SAKSMAN : Every complete doubling metric space carries a doubling measure. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 126(2):531–534, 1998.
- [93] F. MAGGI : *Sets of finite perimeter and geometric variational problems : an introduction to Geometric Measure Theory*. Numéro 135 de Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2012.
- [94] V. MAGNANI : *Elements of geometric measure theory on sub-Riemannian groups*. Thèse de doctorat, Scuola Normale Superiore, Pisa, 2002.
- [95] J. MAHWIN : *Poincaré et les équations aux dérivées partielles*, pages 278–301. Belin, 2006.
- [96] J. MALY : A simple proof of the Stepanov theorem on differentiability almost everywhere. *Exp. Math.*, 17:59–62, 1999.
- [97] M. MARCUS et V. J. MIZEL : Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 251:187–218, 1979.
- [98] P. MATTILA : *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*. Cambridge Univ. Press, 1995.
- [99] P. MATTILA : Hausdorff dimension, projections, and the Fourier transform. *Publ. Mat.*, 48(1):3–48, 2004.
- [100] P. MATTILA : *Fourier analysis and Hausdorff dimension*. volume 150 of Cambridge Studies in advanced Mathematics. Cambridge University Press, 2015.
- [101] P. MATTILA, R. SERAPIONI et F. SERRA CASSANO : Characterizations of intrinsic rectifiability in Heisenberg groups. *Ann. Scuol. Norm. Sup. Pisa*, 9(4):687, 2010.
- [102] V. MAZ'YA : *Sobolev spaces, with applications to elliptic partial differential equations*, volume 342 de *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer Verlag, 2011.
- [103] P. MIRONESCU : Fine properties of functions : an introduction. Consultable à [https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/747696/ filename/snsb\\_analysis\\_course\\_2005.pdf](https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/747696/filename/snsb_analysis_course_2005.pdf), 2005.
- [104] P. MIRONESCU : Note on Gagliardo's theorem “ $\text{tr } W^{1,1} = L^1$ ”. *Ann. Univ. Buch. Math. Ser.*, 6(1):99–103, 2015.
- [105] F. MORGAN : *Geometric measure theory : a beginner's guide*. Academic press, 2016.
- [106] V. MUNNIER : *Analyse et rectifiabilité dans les espaces métriques singuliers*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, 2011.
- [107] L. NIRENBERG : On elliptic partial differential equations. *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa*, 13:116–162, 1959.
- [108] S. OHTA : On the measure contraction property of metric measure spaces. *Comm. Math. Helv.*, 82(4):805–828, 2007.
- [109] R. OSSERMAN : *A survey on minimal surfaces*. Dover, 2014.
- [110] Y. OTSU : Differential geometric aspects of Alexandrov spaces. In *Comparison Geometry*, volume 30 de *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, pages 135–148. Cambridge Univ. Press., 1997.
- [111] H. PAJOT : *Analytic capacity, rectifiability, Menger curvature and the Cauchy integral*, volume 1799 de *Lecture notes in mathematics*. Springer, 2002.
- [112] H. PAJOT : Autour du problème de Kakeya. In *Une invitation à la théorie géométrique de la mesure, Journées X-UPS 2017*. Les Editions de l'Ecole Polytechnique, à paraître.
- [113] P. PANSU : Métriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isométries des espaces symétriques de rang un. *Ann. Math.*, 129:1–60, 1989.



- [114] P. PANSU : Plongements quasi-isométriques du groupe de Heisenberg dans  $L^p$ , d'après Cheeger, Kleiner, Lee, Naor. *Séminaire de Théorie spectrale et géométrie*, 25:159–176, 2006-2007.
- [115] A. PAPADOPOULOS : *Metric spaces, convexity and nonpositive curvature*, volume 6. European Mathematical Society, 2005.
- [116] A. PELCZYNSKI et M. WOJCIECHOWSKI : Spaces of functions with bounded variation and Sobolev spaces without local unconditional structure. *J. Reine Angew. Math.*, 558:109–157, 2003.
- [117] Y. PERES, K. SIMON et B. SOLOMYAK : Fractals with positive length and zero Buffon needle probability. *Amer. Math. Monthly*, 110(4):314–325, 2003.
- [118] D. PREISS : Geometry of measures in  $\mathbb{R}^n$  : distribution, rectifiability, and densities. *Ann. Math.*, 125(3):537–643, 1987.
- [119] D. PREISS et G. SPEIGHT : Differentiability of Lipschitz functions in Lebesgue null sets. *Invent. Math.*, 199(2):517–559, 2015.
- [120] H. QUEFFÉLEC et C. ZUILY : *Analyse pour l'agrégation*. Dunod, 2013.
- [121] T. RAJALA : Interpolated measures with bounded density in metric spaces satisfying the curvature-dimension conditions of Sturm. *J. Funct. Anal.*, 263(4):896–924, 2012.
- [122] T. RAJALA : Local Poincaré inequalities from stable curvature conditions on metric spaces. *Calc. Var. Part. Diff. Equ.*, 44(3-4):477–494, 2012.
- [123] S. RIGOT : Isodiametric inequality in Carnot groups. *Annales Acad. Sci. Fenn. Math.*, 36:245–260, 2011.
- [124] L. RIZZI : Measure contraction properties of Carnot groups. *Calc. Var. Partial Diff. Equ.*, 55(3):60, 2016.
- [125] W. RUDIN : *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third édition, 1987.
- [126] E. SAKSMAN : Remarks on the nonexistence of doubling measures. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 24(1):155–163, 1999.
- [127] L. SALOFF-COSTE : *Aspects of Sobolev-type inequalities*, volume 289. Cambridge University Press, 2002.
- [128] L. SANTALÒ : *Integral geometry and geometric probability*. Cambridge University Press, 2004.
- [129] S. SEMMES : Bilipschitz mappings and strong  $A_\infty$  weights. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1 Math.*, 18(2):211–248, 1993.
- [130] S. SEMMES : Finding curves on general spaces through quantitative topology, with applications to Sobolev and Poincaré inequalities. *Selecta Math.*, 2(2):155–295, 1996.
- [131] S. SEMMES : On the nonexistence of bi-Lipschitz parametrizations and geometric problems about  $A_\infty$ -weights. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 12(2):337–410, 1996.
- [132] S. SEMMES : *Metric spaces and mappings seen at many scales*, volume 152 de *Progress in Mathematics*, pages 401–518. Birkhäuser, 1999.
- [133] F. SERRA CASSANO : Some topics of geometric measure theory in Carnot groups. *In Geometry, Analysis and Dynamics on sub-Riemannian Manifolds-Volume I*, chapitre 1, pages 1–121. Europ. Math. Soc., 2016.
- [134] N. SHANMUGALINGAM : Newtonian spaces : an extension of Sobolev spaces to metric measure spaces. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 16(2):243–279, 2000.
- [135] G. STAMPACCHIA : *Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus*. Univ. Montreal Press, 1966.
- [136] E. M. STEIN : *Singular integrals and differentiability of functions*. Princeton Univ. Press, 1970.

- [137] E. M. STEIN : *Harmonic analysis : real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals*, volume 43 de *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1993.
- [138] K.-Th. STURM : On the geometry of metric measure spaces I. *Acta Math.*, 196(1):65–131, 2006.
- [139] K.-Th. STURM : On the geometry of metric measure spaces II. *Acta Math.*, 196(1):133–177, 2006.
- [140] T. TAO : From Rotating Needles to Stability of Waves : Emerging Connections between combinatorics, analysis and PDE. *Notices of the A. M. S.*, 48(3), 2001.
- [141] X. TOLSA : Painlevé’s problem and the semiadditivity of analytic capacity. *Acta Math.*, 190:105–149, 2003.
- [142] N. S. TRUDINGER : On imbeddings into Orlicz spaces and some applications. *J. Math. Mech.*, 17(5):473–483, 1967.
- [143] J. VÄISÄLÄ : *Lectures on  $n$ -dimensional quasiconformal mappings*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 229. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [144] J. VÄISÄLÄ : Quasiconformal maps of cylindrical domains. *Acta Math.*, 162(1):201–225, 1989.
- [145] N. T. VAROPOULOS, L. SALOFF-COSTE et T. COULHON : *Analysis and geometry on groups*, volume 100. Cambridge university press, 2008.
- [146] C. VILLANI : *Topics in optimal transportation*, volume 58 de *Graduate Studies in Mathematics*. Amer. Math. Soc., 2003.
- [147] C. VILLANI : *Optimal transport : old and new*, volume 338. Springer Science & Business Media, 2008.
- [148] Y. WANG et P.-L. YUNG : A subelliptic Bourgain–Brezis inequality. *J. E. M. S.*, 16(4):649–693, 2014.
- [149] M. WILLEM : *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini, 2003.
- [150] T. H. WOLFF : *Lectures on harmonic analysis*, volume 29 de *University Lecture Series*. American Mathematical Society, 2003.
- [151] S.-T. YAU : Harmonic functions on complete Riemannian manifolds. *Comm. Pure Appl. Math.*, 28(2):201–228, 1975.
- [152] V. YUDOVICH : On certain estimates related to integral operators and solutions of elliptic equations. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 139:805–808, 1961.
- [153] A. C. ZAANNEN et W. LUXEMBURG : 5029. *Amer. Math. Monthly*, 70(6):674–675, 1963.
- [154] W. P. ZIEMERS : *Weakly differentiable functions*, volume 120 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, 1989.