Autour des plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs voisins d'un entier criblé

Zhiwei Wang

AUTOUR DES PLUS GRANDS FACTEURS PREMIERS D'ENTIERS CONSÉCUTIFS VOISINS D'UN ENTIER CRIBLÉ

ZHIWEI WANG (Nancy)

ABSTRACT. Denote by $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$) the largest (resp. the smallest) prime factor of the integer n. In this paper, we prove that there exists a positive proportion of integers n having no small prime factor such that $P^+(n) < P^+(n+2)$. Especially, we prove that the pattern $P^+(P_3) < P^+(P_3+2)$ is realized by a positive proportion of P_3 with $P^-(P_3) > x^{1/3-\delta}, 0 < \delta \leqslant \frac{1}{12}$, where P_3 denote the integer having at most three prime factors taken with multiplicity. We also prove that the pattern $P^+(p-1) < P^+(p+1)$ holds for a positive proportion of primes under the Elliott-Halberstam conjecture.

1. INTRODUCTION

Ce travail est le 3ème volet notre série d'articles consacrés à l'étude des plus grands facteurs premiers d'*entiers* consécutifs (voir [27, 28] pour les deux premiers). Ce problème a été considéré initialement par Erdős [7]. Désignons par $P^+(n)$ le plus grand facteur premier d'un entier générique $n \geqslant 1$ avec la convention que $P^+(1) = 1$. De Koninck et Doyon [5] ont formulé la conjecture suivante.

Hypothèse (A). (Conjecture de De Koninck et Doyon) *Soit $k \geqslant 2$ un entier fixé. Alors pour toute permutation $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ de $\{0, 1, \dots, k-1\}$, on a*

$$\mathrm{Prob}\big[P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \cdots < P^+(n+a_k)\big] = \frac{1}{k!},$$

c'est-à-dire,

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{n \leqslant x \\ P^+(n+a_1) < P^+(n+a_2) < \cdots < P^+(n+a_k)}} 1 \to \frac{1}{k!} \tag{1.1}$$

quand $x \to \infty$.

Cette conjecture mêle les structures additives et multiplicative des entiers et des applications dans divers arithmétiques. L'équivalence (1.1) semble extrêmement difficile à démontrer. Même dans le cas le plus simple, i.e. $k = 2$, elle reste encore ouverte. Ce problème a l'attention de nombreux mathématiciens et a une histoire riche (voir [27] pour une description historique).

– Pour $k = 2$, l'Hypothèse (A) devient :

$$|\{n \leqslant x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| \sim \tfrac{1}{2}x \tag{1.2}$$

pour $x \to \infty$, conjecturée initialement par Erdős et Pomerance [8] en 1978. Ils ont démontré

$$|\{n \leqslant x : P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 0,0099x$$

Date: 24 novembre 2017.

L'auteur est partiellement soutenu par une bourse de "China Scholarship Council".

pour $x \geqslant x_0$. La constante 0,0099 a été améliorée en 0,05544 par La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum [6], en 0,05866 par Fouvry, en 0,1063 et 0,1356 par Wang [27, 28], respectivement. Récemment Teräväinen [26] a montré que la densité logarithmique de cet ensemble vaut $\frac{1}{2}$.

– Pour trois entiers consécutifs, Erdős et Pomerance observent dans leur article [8] que les deux configurations $P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)$ et $P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)$ ont lieu pour une infinité d'entiers n. Par ailleurs, ils démontrent l'existence d'une infinité d'entiers n satisfaisant $P^+(n-1) < P^+(n) < P^+(n+1)$ en considérant des entiers n de la forme $n = p^{k_0}$ avec k_0 judicieusement choisi. Pour la quatrième configuration, en 2001 Balog [1] obtient la minoration suivante

$$|\{n \leqslant x : P^+(n-1) > P^+(n) > P^+(n+1)\}| \gg x^{1/2}$$

pour $x \to \infty$. Dans [28] , nous avons réussi à faire un progrès significatif en montrant qu'il existe une proportion positive pour les deux configurations suivantes :

$$|\{n \leqslant x : \ P^+(n-1) > P^+(n) < P^+(n+1)\}| > 1,063 \times 10^{-7} x \qquad (*)$$

et

$$|\{n \leqslant x : \ P^+(n-1) < P^+(n) > P^+(n+1)\}| > 8,84 \times 10^{-4} x \qquad (**)$$

pour $x \to \infty$. De plus, on obtient une majoration non triviale des quatre configurations mentionnées ci-dessus. Signalons que peu après la soumission de [28], Teräväinen [26] montre par une autre approche que les ensembles de $(*)$ et $(**)$ ont une densité inférieure positive.

Dans cet article, nous nous intéressons à l'analogue de l'Hypothèse (A) pour les *nombres premiers*. En tenant compte de (1.2), il semble raisonnable de faire la conjecture : *Pour $x \to \infty$, nous avons*

$$|\{p \leqslant x \ : \ P^+(p-1) < P^+(p+1)\}| \sim \tfrac{1}{2}\pi(x), \qquad (1.3)$$

où $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers n'excédant pas x. Sans doute, une telle conjecture est très difficile à démontrer, puisque la conjecture des nombres premiers jumeaux est équivalente à

$$|\{p \leqslant x : \ P^+(p) < P^+(p+2)\}| \to \infty$$

pour $x \to \infty$. Cette dernière reste encore ouverte, malgré les avancées spectaculaires de ces dernières années [12, 19, 29]. Une approche pour attaquer ce problème est de travailler sous des hypothèses raisonnables et établir ainsi des résultats conditionnels. L'hypothèse suivante est la conjecture d'Elliott-Halberstam sur la distribution des nombres premiers dans les progressions arithmétiques, une conjecture souvent utilisée en la théorie analytique des nombres.

Hypothèse (B). (Conjecture d'Elliott-Halberstam) *Pour tous $A > 0$ et $\varepsilon > 0$, on a*

$$\sum_{q \leqslant x^{1-\varepsilon}} \max_{y \leqslant x} \max_{(a,q)=1} \left| \sum_{\substack{p \leqslant y \\ p \equiv a \pmod q}} 1 - \frac{\pi(y)}{\varphi(q)} \right| \ll_{A,\varepsilon} \frac{x}{(\log x)^A}, \qquad (1.4)$$

où $\varphi(q)$ est la fonction d'Euler.

On remarque que, dans l'article [13, Section 5.3], Granville a indiqué sans donner de démonstration que l'équivalent asymptotique

$$\big|\{p \leqslant x :\ P^+(p-a) \leqslant y\}\big| \sim \rho(u)\pi(x) \tag{1.5}$$

découle de la forme faible de la conjecture d'Elliott-Halberstam, où a est un entier, $u = \log x/\log y$ est fixé et $\rho(u)$ est la fonction de Dickman définie par (3.2) ci-dessous. On propose une preuve de ce résultat dans le Lemme 4.1 ci-dessous, qui est cruciale dans la preuve du Théorème 1. Pour (1.5), on peut aussi voir par exemple [2, 3, 7, 20, 21].

Notre premier résultat est le suivant.

Théorème 1. *Sous l'Hypothèse* (B)*, on a*

$$\big|\{p \leqslant x\ :\ P^+(p-1) < P^+(p+1)\}\big| > 0,1779\,\pi(x) \tag{1.6}$$

pour $x \to \infty$.

Une autre manière d'approcher la conjecture (1.3) est d'étudier l'analogue de l'Hypothèse (A) pour les *entiers criblés* (c'est-à-dire, entiers sans petit facteur premier). Désignons par $P^-(n)$ le plus petit facteur premier de $n \geqslant 1$ avec la convention $P^-(1) = \infty$. Dans cette direction, nous avons le résultat suivant.

Théorème 2. *Soit $0 < \beta < \frac{1}{3}$. Alors pour $x \to \infty$, on a*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\, P^-(n)>x^\beta \\ P^+(n)<P^+(n+2)}} 1 \geqslant \{C(\beta)+o(1)\}\pi(x), \tag{1.7}$$

où $C(\beta)$ est la constante strictement positive définie par la formule (5.10) *ci-dessous.*

Désignons par P_r un entier ayant au plus r facteurs premiers. En prenant $\beta = \frac{1}{3} - \delta$ où $0 < \delta \leqslant \frac{1}{12}$ dans le Théorème 2, on obtient le résultat suivant.

Corollaire 1. *Soit $0 < \delta \leqslant \frac{1}{12}$. Alors pour $x \to \infty$, on a*

$$\sum_{\substack{P_3\leqslant x,\, P^-(P_3)>x^{1/3-\delta} \\ P^+(P_3)<P^+(P_3+2)}} 1 \geqslant \{C(\delta)+o(1)\}\pi(x). \tag{1.8}$$

En particulier, en prenant $\delta = \frac{1}{12}$, i.e. $P^-(n) > n^{1/4}$, on a $C(\frac{1}{12}) > 0,0267$.

On remarque que on ne peut pas remplacer P_3 par P_2 dans le Corollaire 1 car $C(\beta) = 0$ pour $\beta \geqslant \frac{1}{3}$. En effet, dans la démonstration du Théorème 2, on compte les entiers n avec

$$x^\beta < P^-(n) \leqslant P^+(n) < x^\alpha$$

où $\alpha < \frac{1}{2}$ est un paramètre. Ce qui implique que n est d'une forme $n = p$ avec $p < x^\alpha$ ou $n = p_1p_2$ avec $x^{1/3} < p_1 \leqslant p_2 < x^\alpha$ si on prend $\frac{1}{3} \leqslant \beta < \alpha < \frac{1}{2}$. Ainsi la condition « $\alpha < \frac{1}{2}$ » entraîne que ces entiers sont inférieurs à $x^{2\alpha}$ et que leur nombre est $o(\pi(x))$. Cette barrière en α découle du niveau « $\frac{1}{2}$ » du théorème de type Bombieri-Vinogradov (le Théorème 4 ci-dessous).

Il est intéressant de comparer (1.8) avec le théorème bien connu de Chen concernant la conjecture des nombres premiers jumeaux [4] :

$$\sum_{\substack{p\leqslant x \\ p+2=P_2}} 1 \geqslant 0,67 \prod_{p>2}\left(1-\frac{1}{(p-2)^2}\right)\frac{x}{(\log x)^2} \tag{1.9}$$

pour $x \to \infty$. On peut également faire un lien avec un résultat de Goldston, Graham and Pintz et Yıldırım [11]. Soit q_n le n-ème entier ayant exactement deux facteurs premiers, alors

$$\liminf_{n\to\infty} (q_{n+1} - q_n) \leqslant 6. \tag{1.10}$$

Bien que notre condition « $P^+(P_3) < P^+(P_3+2)$ » soit plus faible que « $p+2 = P_2$ » et « ayant exactement deux facteurs premiers » pour (1.9) et (1.10) respectivement, (1.8) fournit une minoration du bon ordre de grandeur contrairement à [4, 11].

Notre méthode permet de traiter les plus grands facteurs premiers des J entiers consécutifs dont l'un est criblé, en étendrant la condition « $P^+(n) < P^+(n+2)$ » dans le Théorème 2 à « $P^+(n+j_0) = \min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j)$ » pour $J \geqslant 2$.

Théorème 3. *Soient $J \geqslant 2$ et $0 < \beta < \frac{1}{2(J-1)+1}$. Alors il existe une constante $C(J,\beta) > 0$ telle que l'on a pour tout $j_0 \in \{0, 1, \dots, J-1\}$*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x \\ P^+(n+j_0)=\min_{0\leqslant j\leqslant J-1} P^+(n+j) \\ P^-(n+j_0)>x^\beta}} 1 \geqslant \{C(J,\beta) + o(1)\}\pi(x)$$

pour $x \to \infty$.

En particulier pour $j_0 = 0$, on montre qu'il existe une infinité de nombres presque premiers (dans le sens « sans petit facteur premiers ») tels que les $J-1$ entiers suivants aient également une structure *proche* de celle d'un nombres premiers puisqu'ils ont tous un *grand* facteur premier.

Comme dans le cas $J = 2$, nous pouvons comparer ce problème avec la conjecture des nombres premiers consécutifs. Désignons par p_n le n-ème nombre premier. Dans [18], Maynard développe une approche différente encore plus efficace que [12, 19, 29] et il démontre que pour chaque entier $m \geqslant 1$ fixé, on a

$$\liminf_{n\to\infty} (p_{n+m} - p_n) \ll m^3 \mathrm{e}^{4m},$$

où la constante implicite dans $\ll$ est absolue. En particulier, pour $m = 1$, il peut obtenir 600 à la place de 7×10^7 de Zhang [29].

Nous démontrerons les Théorèmes 1–3 en reprenant les méthodes développées dans les deux premières parties [27, 28]. Le fait de travailler avec des entiers criblés amène de nouvelles difficultés. On a besoin entre autre d'un théorème de type Bombieri-Vinogradov pour des entiers dont les facteurs premiers sont dans un intervalle donné.

Remerciements. Ce travail a été réalisé sous la direction de mes directeurs de thèse Cécile Dartyge et Jie Wu. Je les remercie vivement pour les nombreuses suggestions cruciales qu'ils ont proposées dans l'élaboration de ce travail.

2. Un théorème de type Bombieri-Vinogradov

Pour $x \geqslant y \geqslant z \geqslant 1$, on définit

$$S(x; y, z) := \{n \leqslant x : \ z < P^-(n) \leqslant P^+(n) \leqslant y\}, \tag{2.1}$$

l'ensemble des entiers inférieurs à x dont tous les facteurs premiers sont dans l'intervalle $]z, y]$. Le but de ce paragraphe est d'établir un théorème de type Bombieri-Vinogradov sur

$S(x;y,z)$, qui jouera un rôle clé dans la démonstration des Théorèmes 2 et 3. Sans doute, un tel résultat a des intérêts propres et trouvera d'autres applications.

Théorème 4. *Pour tout $A>0$, il existe une constante $B=B(A)>0$ telle que l'on ait*

$$\sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\max_{(a,q)=1}\Bigg|\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ n\equiv a(\mathrm{mod}\,q)}}1-\frac{1}{\varphi(q)}\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n,q)=1}}1\Bigg|\ll_A\frac{x}{(\log x)^A} \tag{2.2}$$

uniformément pour $2\leqslant z\leqslant y\leqslant x$, où $\varphi(q)$ est la fonction d'Euler.

Démonstration. La démonstration du Théorème 4 est très proche de celle du Théorème 6′ de [9]. Il suffit de remplacer la condition (7.4) de [9] suivante

$$n=mp,\quad P^+(m)\leqslant p\leqslant y$$

par

$$n=mp,\quad z<P^-(m)\leqslant P^+(m)\leqslant p\leqslant y.$$

On ne donne pas plus de détails. □

3. Quelques lemmes auxiliaires

Dans cette partie on rappelle quelques lemmes qui seviront dans les démonstrations des Théorèmes 1–3.

3.1. **Crible linéaire.**

Soient $\mathcal{A}$ une suite finie d'entiers, $\mathcal{P}$ un ensemble de nombres premiers, $z\geqslant 2$ un nombre réel, d un entier sans facteur carré dont les facteurs premiers appartiennent à $\mathcal{P}$. Notons

$$\mathcal{A}_d:=\{a\in\mathcal{A}\,:\,d\mid a\},\qquad P_{\mathcal{P}}(z):=\prod_{p<z,\,p\in\mathcal{P}}p.$$

On souhaite évaluer

$$S(\mathcal{A};\mathcal{P},z):=|\{a\in\mathcal{A}:(a,\,P_{\mathcal{P}}(z))=1\}|.$$

On suppose que $|\mathcal{A}_d|$ vérifie une formule de la forme

$$|\mathcal{A}_d|=\frac{w(d)}{d}X+r(\mathcal{A},d)\quad\text{pour }\ d\mid P_{\mathcal{P}}(z),$$

où X est une approximation de $|\mathcal{A}|$ indépendante de d, w une fonction multiplicative vérifiant $0<w(p)<p$ pour $p\in\mathcal{P}$, $w(d)d^{-1}X$ un terme principal et $r(\mathcal{A},d)$ un terme d'erreur que l'on espère petit en moyenne sur d. De plus, on définit

$$V(z):=\prod_{p<z,\,p\in\mathcal{P}}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big).$$

Nous pouvons maintenant énoncer la majoration donnée par le crible de Rosser-Iwaniec [15].

Lemme 3.1. *On suppose qu'il existe une constante $K\geqslant 2$ telle que*

$$\prod_{u\leqslant p<v}\Big(1-\frac{w(p)}{p}\Big)^{-1}\leqslant\frac{\log v}{\log u}\Big(1+\frac{K}{\log u}\Big)$$

pour tout $v > u \geqslant 2$. Alors pour tout $D \geqslant z \geqslant 2$, on a

$$S(\mathscr{A};\mathcal{P},z) \leqslant XV(z)\Big\{F(s)+O\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{\log x}}\Big)\Big\}+\sum_{d<D,\,d\mid P(z)}|R(\mathscr{A},d)|,$$

où $F(s) = 2\mathrm{e}^{\gamma}s^{-1}$ $(0 < s \leqslant 3)$ et γ est la constante d'Euler.

3.2. **Entiers friables, entiers criblés et nombres sans petits ni grands facteurs premiers.**

Pour $x \geqslant y > 1$, on définit

$$S(x,y) := \{n \leqslant x : P^+(n) \leqslant y\}, \qquad \Psi(x,y) := |S(x,y)|. \tag{3.1}$$

Alors on a le résultat suivant, dû à Hildebrand [14, Theorem 1].

Lemme 3.2. *Soit $\varepsilon > 0$. Alors on a*

$$\Psi(x,y) = x\rho(u)\Big\{1+O_\varepsilon\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\}$$

uniformément pour

$$x \geqslant x_0(\varepsilon), \qquad \exp\{(\log\log x)^{5/3+\varepsilon}\} \leqslant y \leqslant x, \tag{H_ε}$$

où $u := (\log x)/\log y$ et $\rho(u)$ est la fonction de Dickman, définie comme l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases}\rho(u) = 1 & \text{si } \ 0 \leqslant u \leqslant 1,\\ u\rho'(u) = -\rho(u-1) & \text{si } \ u > 1.\end{cases} \tag{3.2}$$

Pour $x \geqslant y \geqslant 2$, on définit

$$\Phi(x,y) := \big|\{n \leqslant x : P^-(n) > y\}\big|. \tag{3.3}$$

Alors le nombre d'entiers criblés $\Phi(x,y)$ est estimé par le suivant.

Lemme 3.3. [25, Chapitre III.6] *Pour $x \geqslant y \geqslant 2$, on a uniformément*

$$\Phi(x,y) = \frac{\omega(u)x-y}{\log y}+O\Big(\frac{x}{(\log y)^2}\Big),$$

où $u := (\log x)/\log y$ et $\omega(u)$ est la fonction de Buchstab définie comme l'unique solution continue de l'équation différentielle aux différences

$$\begin{cases}u\,\omega(u) = 1 & \text{si } \ 1 \leqslant u \leqslant 2,\\ (u\,\omega(u))' = \omega(u-1) & \text{si } \ u > 2.\end{cases}$$

De plus, nous prolongeons $\omega(u)$ par 0 pour $u < 1$.

Rappelons que $S(x;y,z)$ est l'ensemble défini par (2.1). Désignons par $\Theta(x;y,z)$ son cardinal :

$$\Theta(x;y,z) := |S(x;y,z)|.$$

Soit $\sigma(u,v)$ l'unique solution continue pour $u > 1$ de l'équation

$$u\frac{\partial\sigma}{\partial u}(u,v)+\sigma(u-1,v-v/u) = 0 \qquad (u > v/(v-1),\ v > 1) \tag{3.4}$$

avec les conditions initiales

$$\sigma(u,v)=\omega(v) \qquad (0\leqslant u<1),$$
$$\sigma(u,v)=\omega(v)-1/v \qquad (1<u\leqslant v/(v-1)).$$

En 1976, Friedlander [10] a montré le résultat suivant.

Lemme 3.4. *Pour $x\geqslant y\geqslant z>1$, on définit*

$$u=\frac{\log x}{\log y} \qquad \textit{et} \qquad v=\frac{\log x}{\log z}\cdot$$

Alors pour tout $\varepsilon>0$, on a

$$\Theta(x;y,z)=\sigma(u,v)\frac{x}{\log z}+O_\varepsilon\bigg(\frac{x}{(\log z)^2}\bigg)$$

pour

$$(F_\varepsilon) \qquad 1+\varepsilon\leqslant u\leqslant v\leqslant \varepsilon^{-1}.$$

La fonction $\sigma(u,v)$ est continue sur (F_ε) et positive strictement excepté $\sigma(u,v)=0$ pour $k<u\leqslant v\leqslant k+1$ où $k\geqslant 1$ est tout entier. On trouvera dans [22, 23, 24] d'autres résultats sur $\Theta(x;y,z)$.

3.3. **Valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques.**

Dans [17], Lachand et Tenenbaum étudient les valeurs moyennes de certaines fonctions arithmétiques sur les entiers criblés. Le lemme suivant est un cas particulier de leur résultat.

Lemme 3.5. *Soient $\mu(n)$ la fonction de möbius et $u=\log x/\log y$. Pour tout $\varepsilon>0$, nous avons*

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^-(n)>y}}\frac{\mu(n)}{n}=\bigg\{1+O\bigg(\frac{\log(u+1)}{\log y}\bigg)\bigg\}\rho(u)+O\big(\exp\{-(\log y)^{3/5-\varepsilon}\}\big)$$

uniformément pour

$$x\geqslant 2, \qquad \exp\big\{(\log x)^{2/5+\varepsilon}\big\}\leqslant y\leqslant x.$$

4. Démonstration du Théorème 1

4.1. **Lemme pour le nombre de premiers translatés friables.**

Pour démontrer le Théorème 1, on va tout d'abord établir le Lemme 4.1 ci-dessous pour le nombre de premiers translatés friables. La preuve du Lemme 4.1 suit la méthode de Lachand [16] sur $n(n^2+1)$ friable.

Lemme 4.1. *Soit a un entier. Pour $x\geqslant y>1$, on définit*

$$\pi(x,\,y):=\sum_{p\leqslant x,\,P^+(p-a)\leqslant y}1 \qquad \textit{et} \qquad u:=\frac{\log x}{\log y}\cdot \tag{4.1}$$

Alors pour tout $u\geqslant 1$ fixé et $x\to\infty$, on a sous la conjecture d'Elliott-Halberstam

$$\pi(x,\,y)\sim\rho(u)\pi(x), \tag{4.2}$$

où $\rho(u)$ est la fonction de Dickman définie comme dans (3.2) ci-dessus.

Démonstration. On a d'abord par la formule d'inversion de Möbius

$$\sum_{p\leqslant x,\, P^+(p-a)\leqslant y} 1 = \sum_{p\leqslant x,\,(p-a,\,\prod_{y<p\leqslant x} p)=1} 1 = \sum_{\substack{q\leqslant x-a\\ P^-(q)>y}} \mu(q) \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \pmod q}} 1 = S_1 + S_2, \tag{4.3}$$

où

$$S_1 := \sum_{\substack{q\leqslant x^{1-\varepsilon}\\ P^-(q)>y}} \mu(q) \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \pmod q}} 1,$$

$$S_2 := \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon}\leqslant q\leqslant x-a\\ P^-(q)>y}} \mu(q) \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \pmod q}} 1.$$

1. *Évaluation de S_1*

Pour S_1, on écrit

$$S_1 = S_1' + S_1'' \tag{4.4}$$

où

$$S_1' := \sum_{\substack{q\leqslant x^{1-\varepsilon}\\ P^-(q)>y}} \mu(q)\frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \qquad \text{et} \qquad S_1'' := \sum_{\substack{q\leqslant x^{1-\varepsilon}\\ P^-(q)>y}} \mu(q)\Big(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \pmod q}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\Big).$$

D'après l'Hypothèse (B), i.e. la conjecture d'Elliott-Halberstam, il suit

$$S_1'' \ll \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon}} \max_{(a,\,q)=1} \Big| \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \pmod q}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\Big| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{4.5}$$

pour tout A, qui est admissible.

Pour le terme principal S_1', on obtient en utilisant le Lemme 3.5

$$\begin{aligned} S_1' &= \pi(x) \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon},\, P^-(q)>y} \frac{\mu(q)}{q}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{y}\Big)\Big\} \\ &= \pi(x)\rho\Big(\frac{\log x^{1-\varepsilon}}{\log y}\Big)\Big\{1 + O\Big(\frac{\log(u+1)}{\log y}\Big)\Big\} \\ &= \pi(x)\rho(u)\{1 + o(1) + O(\varepsilon)\} \end{aligned} \tag{4.6}$$

pour $x \to \infty$ et $1 \leqslant u \ll 1$.

En reportant (4.6) et (4.5) dans (4.4), on obtient

$$S_1 = \pi(x)\rho(u)\big\{1 + o(1) + O(\varepsilon)\big\} \tag{4.7}$$

sous la condition que $x \to \infty$ et $1 \leqslant u \ll 1$.

2. *Évaluation de S_2*

Pour évaluer S_2, on écrit d'abord

$$|S_2| \leqslant \sum_{\substack{x^{1-\varepsilon}\leqslant q\leqslant x-a\\ P^-(q)>y}} \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a \pmod q}} 1.$$

On note que la dernière double somme compte les nombres premiers p tels que $p - a = mq$ avec $x^{1-\varepsilon} \leqslant q \leqslant x - a$, $P^-(q) > y$ et $(m,\, a) = 1$, $m \leqslant x^{\varepsilon}$. Pour chaque entier $m \leqslant x^{\varepsilon}$ et a, on pose

$$\mathscr{A}(m;\, a) := \big\{(p-a)/m \ :\ p \leqslant x \ \text{ et } \ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, m)\big\},$$

$$\mathcal{P}_{am} := \big\{p \ :\ p \text{ premier tel que } p \nmid am\big\},$$

$$P_{am}(z) := \prod_{p<z,\, p\in\mathcal{P}_{am}} p = \prod_{p<z,\, p\nmid am} p.$$

Alors

$$|S_2| \leqslant \sum_{\substack{m\leqslant x^{\varepsilon}\\(m,\,a)=1}} \big|\big\{q \in \mathscr{A}(m;\, a) \ :\ P^-(q) > y\big\}\big| \leqslant \sum_{\substack{m\leqslant x^{\varepsilon}\\(m,\,a)=1}} S(\mathscr{A}(m;\, a);\, \mathcal{P}_{am}, z).$$

pour tout $z \leqslant y$. On va appliquer le Lemme 3.1 (le crible de Rosser-Iwaniec) pour majorer les cardinaux des ensembles criblés $S(\mathscr{A}(m;\, a);\, \mathcal{P}_{am}, z)$. Pour tout $d \mid P_{am}(z)$, on a $(d, m) = 1$ et

$$\begin{aligned} |\mathscr{A}_d(m;\, a)| &= \big|\big\{(p-a)/m \ :\ p \leqslant x \ \text{ et } \ p \equiv a \,(\mathrm{mod}\, dm)\big\}\big| \\ &= \frac{1}{\varphi(d)} \cdot \frac{\pi(x)}{\varphi(m)} + \Big(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a (\mathrm{mod}\, dm)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(dm)}\Big). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ainsi on peut utiliser le Lemme 3.1 avec $D = z = y^{1-2\varepsilon}$ et

$$X = \frac{\pi(x)}{\varphi(m)}, \qquad r\big(\mathscr{A}(m;\, a), d\big) = \Big(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a (\mathrm{mod}\, dm)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(dm)}\Big)$$

et

$$w(p) = \begin{cases} 0 & p \mid am, \\ \dfrac{p}{p-1} & p \nmid am. \end{cases}$$

On obtient

$$|S_2| \leqslant S_2' + S_2'', \tag{4.9}$$

où

$$S_2' := \sum_{\substack{m\leqslant x^{\varepsilon}\\(m,\,a)=1}} \frac{\pi(x)}{\varphi(m)} \prod_{\substack{p<z\\p\nmid am}} \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big)\big\{F(1) + o(1)\big\},$$

$$S_2'' := \sum_{\substack{m\leqslant x^{\varepsilon}\\(m,\,a)=1}} \sum_{\substack{d<D\\ d\mid P_{am}(z)}} |r(\mathscr{A}(m;a), d)|.$$

Pour S_2'', compte tenu de la condition $d < D = y^{1-2\varepsilon} \leqslant x^{1-2\varepsilon}$, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$S_2'' \leqslant \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon}} \tau(q)\Big| \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\Big| \leqslant (S_{2,*}''S_{2,\dagger}'')^{1/2},$$

où $\tau(q)$ est la fonction diviseur et

$$S_{2,*}'' := \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon}} \tau^2(q)\Big| \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\Big|,$$

$$S_{2,\dagger}'' := \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon}} \Big| \sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)}\Big|.$$

Pour $S_{2,*}''$, on utilise l'inégalité de Brun-Titchmarsh :

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ p\equiv a(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \ll \frac{x}{\varphi(q)\log(x/q)},$$

et pour $S_{2,\dagger}''$ on applique l'Hypothèse (B). Cela donne pour tout A

$$S_2'' \ll \Big(\frac{x}{(\log x)^A}\Big)^{1/2}\Big\{ \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon}} \frac{\tau(q)^2}{\varphi(q)}\,\frac{x}{\varepsilon\log x}\Big\}^{1/2} \ll \frac{x}{(\log x)^{A/2-4}}. \tag{4.10}$$

Pour S_2', en tenant compte de la condition $m \leqslant x^\varepsilon \leqslant y^{1-2\varepsilon} = z$ pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on a

$$\prod_{\substack{p<z\\ p\nmid am}} \Big(1 - \frac{1}{p-1}\Big) = C_a \prod_{2<p\mid m} \frac{p-1}{p-2}\frac{2\mathrm{e}^{-\gamma}}{\log z}\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log z}\Big)\Big\},$$

d'où

$$S_2' \leqslant \big\{C_a + o(1)\big\}\frac{\pi(x)}{\log z}\sum_{m\leqslant x^\varepsilon} \frac{h(m)}{m}$$

avec

$$C_a := 4\prod_{p>2}\Big(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\Big)\prod_{\substack{p>2\\ p\mid a}}\Big(\frac{p-1}{p-2}\Big)$$

et

$$h(m) := \frac{m}{\varphi(m)}\prod_{\substack{p>2\\ p\mid m}}\Big(\frac{p-1}{p-2}\Big).$$

Puisque $m \mapsto h(m)$ est multiplicative et

$$h(p) = \begin{cases} 2 & \text{si } p = 2,\\ \frac{p}{p-2} & \text{si } p > 2,\end{cases}$$

un argument standard, similaire à ceux des travaux de La Bretèche, Pomerance et Tenenbaum [6, la formule (2.5)], nous donne, avec une constante $B > 0$,

$$\sum_{m\leqslant t} h(m) = Bt\Big\{1 + O\Big(\frac{1}{\log t}\Big)\Big\}.$$

On obtient donc à l'aide d'une intégration par parties

$$S_2' \leqslant \big\{1 + o(1)\big\}\frac{\pi(x)C_a}{\log z}\int_{1-}^{x^\varepsilon}\frac{1}{t}\mathrm{d}\sum_{m\leqslant t} h(m) = \big\{O_a(\varepsilon) + o_a(1)\big\}\pi(x). \tag{4.11}$$

La combinaison des formules (4.10), (4.11) et (4.9) entraîne la majoration

$$|S_2| \leqslant \big\{O_a(\varepsilon) + o_a(1)\big\}\pi(x). \tag{4.12}$$

En reportant (4.7) et (4.12) dans (4.3), on trouve finalement

$$\sum_{p\leqslant x,\, P^+(p-a)\leqslant y} 1 = \pi(x)\rho(u)\big\{1 + o_a(1) + O_a(\varepsilon)\big\}$$

pour

$$x \to \infty, \qquad 1 \leqslant u \ll 1.$$

Ce qui implique le Lemme 4.1.

□

4.2. **Démonstration du Théorème 1.**

1. *Point de départ*

Pour un paramètre θ vérifiant $\varepsilon_0 \leqslant \theta < \frac{1}{2}$, où ε_0 est une petite constante fixée, on a l'inégalité

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p-1)<P^+(p+1)}} 1 &\geqslant \sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p-1)\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} 1 - \sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p+1)\leqslant P^+(p-1)\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} 1\\ &\geqslant \sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p-1)\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} 1 - \Big(\sum_{\substack{p\leqslant x\\ x^\theta<P^+(p+1)\leqslant P^+(p-1)\leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} 1 + \sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p+1)\leqslant x^\theta}} 1\Big) \qquad (4.13)\\ &= S_A - (S_B + S_C).\end{aligned}$$

2. *Évaluation de $S_A - S_C$*

A l'aide du Lemme 4.1, on a

$$S_A - S_C \sim \{\rho(2) - \rho(1/\theta)\}\pi(x) \qquad (x \to \infty). \tag{4.14}$$

3. *Majoration de S_B*

Au premier abord, si $\big(P^+(p-1),\, P^+(p+1)\big) > 1$, alors il existe deux entiers $k_2 \geqslant k_1 \geqslant 0$ tels que

$$p - 1 = 2^{k_1}, \quad p + 1 = 2^{k_2},$$

compte tenu du fait que $(p-1,\, p+1) = (p-1,\, 2) = 2$. Ce qui implique que $p = 3$. On peut donc supposer que $\big(P^+(p-1),\, P^+(p+1)\big) = 1$ dans la suite.

Pour S_B, en posant $p_1 = P^+(p-1)$ et $p_2 = P^+(p+1)$, on a dans un premier temps

$$p \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, p_1) \quad \text{et} \quad p \equiv -1 \,(\mathrm{mod}\, p_2).$$

D'après le théorème des restes chinois, il existe un entier $a(p_1,p_2) < p_1p_2$ dépendant de p_1, p_2 tel que

$$(a(p_1,p_2), p_1p_2) = 1 \quad \text{et} \quad p \equiv a(p_1,p_2) \,(\mathrm{mod}\, p_1p_2).$$

Pour des commodités d'écriture, on écrit $a = a(p_1,p_2)$ dans la suite. Alors on peut majorer la somme S_B par

$$\begin{aligned} S_B &= \sum_{\substack{p\leqslant x \\ x^\theta < p_2 \leqslant p_1 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} 1 \\ &\leqslant \sum_{\substack{p_2 \\ x^\theta < p_2 < p_1 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} \sum_{\substack{p_1 \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, p_1p_2)}} \sum_{p\leqslant x} 1 + O(1) \\ &= S_{B1} + S_{B2} + O(1), \end{aligned} \tag{4.15}$$

où

$$\begin{aligned} S_{B1} &:= \sum_{\substack{p_2 \\ x^\theta < p_2 < p_1 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} \sum_{\substack{p_1 \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, p_1p_2)}} \frac{\pi(x)}{\varphi(p_1p_2)}, \\ S_{B2} &:= \sum_{\substack{p_2 \\ x^\theta < p_2 < p_1 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}}} \sum_{\substack{p_1 \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, p_1p_2)}} \Big(\sum_{p\leqslant x} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(p_1p_2)} \Big). \end{aligned}$$

Pour le terme d'erreur S_{B2}, de manière analogue à S_2'' dans (4.10), on obtient en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la conjecture d'Elliott-Halberstam et l'inégalité de Brun-Titchmarsh

$$S_{B2} \ll \sum_{q\leqslant x^{1-\varepsilon}} \tau(q) \Big| \sum_{\substack{p\leqslant x \\ p\equiv a \,(\mathrm{mod}\, q)}} 1 - \frac{\pi(x)}{\varphi(q)} \Big| \ll \frac{x}{(\log x)^A} \tag{4.16}$$

pour tout A.

Pour le terme principal S_{B1}, on a

$$\begin{aligned} S_{B1} &= \Big\{ \sum_{x^\theta < p_2 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}} \frac{1}{p_2} \sum_{p_2 < p_1 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}} \frac{1}{p_1} + o(1) \Big\} \pi(x) \\ &= \Big\{ \sum_{x^\theta < p_2 \leqslant x^{1/2-\varepsilon}} \frac{1}{p_2} \log \frac{\log x^{1/2-\varepsilon}}{\log p_2} + o(1) \Big\} \pi(x) \\ &= \Big\{ \int_{x^\theta}^{x^{1/2-\varepsilon}} \log \frac{\log x^{1/2-\varepsilon}}{\log t} \,\mathrm{d} \sum_{p_2\leqslant t} \frac{1}{p_2} + o(1) \Big\} \pi(x) \\ &= \Big\{ \int_\theta^{1/2} \log\Big(\frac{1}{2t}\Big) \frac{\mathrm{d}t}{t} + o(1) \Big\} \pi(x) \\ &= \Big\{ \frac{1}{2} \Big(\log \frac{1}{2\theta} \Big)^2 + o(1) \Big\} \pi(x) \end{aligned} \tag{4.17}$$

où l'on a appliqué le théorème des nombres premiers, une integration par parties et la formule suivante

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\log_2 x+c_1+O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)$$

avec $c_1\approx 0,261497$ la constante de Meissel-Mertens.

En combinant les estimations (4.17), (4.16) et (4.15), il suit

$$S_B=\Big\{\frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{2\theta}\Big)^2+o(1)\Big\}\pi(x). \tag{4.18}$$

En reportant (4.14) et (4.18) dans (4.13), on en déduit finalement

$$\sum_{\substack{p\leqslant x\\ P^+(p-1)<P^+(p+1)}}1\geqslant\big\{f(\theta)+o(1)\big\}\pi(x)$$

où

$$f(\theta):=\rho(2)-\rho\Big(\frac{1}{\theta}\Big)-\frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{2\theta}\Big)^2\qquad(\varepsilon_0\leqslant\theta<1/2).$$

Si on impose la condition $\theta\geqslant\frac{1}{3}$, on a

$$f(\theta)=\log\frac{1}{2\theta}-\frac{1}{2}\Big(\log\frac{1}{2\theta}\Big)^2-\int_1^{1/\theta-1}\frac{\log t}{t+1}\mathrm{d}t.$$

Á l'aide de *Mathematica 9.0*, on peut calculer

$$f(\widetilde{\theta})=\max_{\frac{1}{3}\leqslant\theta<\frac{1}{2}}f(\theta)>0,1779$$

avec $\widetilde{\theta}\approx\frac{1}{2,9}$.

Cela achève la démonstration du Théorème 1.

5. Démonstration du Théorèmes 2 et 3

Nous donnerons seulement une démonstration du Théorème 2 puisque celle du Théorème 3 se fait quasiment de la même manière (voir [28]). Soient

$$0<\beta<\tfrac{1}{3},\quad \beta<\alpha<\tfrac{1}{2} \tag{5.1}$$

et $y=x^\alpha$, $z=x^\beta$. Alors

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ P^+(n)<P^+(n+2)\\ P^-(n)>z}}1\geqslant\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n+2,\ P(x,y))>1}}1, \tag{5.2}$$

où $S(x;y,z)$ est définie par (2.1) et $P(x,y)$ est définie par $P(x,y):=\prod_{y<p\leqslant x}p$.

Pour $n\leqslant x$ et $y<x$, on a

$$\omega(n;\,x,y):=\sum_{\substack{y<p\leqslant x\\ p|n}}1\leqslant\frac{\log x}{\log y}, \tag{5.3}$$

d'où

$$\Big(\frac{\log x}{\log y}\Big)^{-1}\omega(n;\,x,y)\begin{cases}\leqslant 1 & \text{si } \big(n,\ P(x,y)\big)>1,\\ =0 & \text{sinon.}\end{cases} \tag{5.4}$$

Ainsi on peut détecter les conditions $(n+2,\ P(x,y))>1$ dans la formule (5.2) par (5.4) :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n\leqslant x,\,P^-(n)>z\\ P^+(n)<P^+(n+2)}} 1 &\geqslant \sum_{n\in S(x;y,z)}\frac{\omega(n+2;\,x,y)}{(\frac{\log x}{\log y})}\\ &\geqslant \alpha\sum_{n\in S(x;y,z)}\omega\big(n+2;\,x^{1/2}/(\log x)^B,\,x^\alpha\big)\\ &= \alpha\sum_{n\in S(x;y,z)}\ \sum_{\substack{p\mid n+2\\ x^\alpha<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}} 1 \qquad (5.5)\\ &= \alpha\sum_{x^\alpha<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\ \sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ n\equiv -2(\mathrm{mod}\,p)}} 1\\ &= \alpha(\mathscr{S}_1+\mathscr{S}_2)\end{aligned}$$

avec

$$\mathscr{S}_1 := \sum_{x^\alpha<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\frac{1}{\varphi(p)}\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n,p)=1}}1,$$

$$\mathscr{S}_2 := \sum_{x^\alpha<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\Bigg(\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ n\equiv -2\,(\mathrm{mod}\,p)}}1-\frac{1}{\varphi(p)}\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n,p)=1}}1\Bigg).$$

où B est une constante convenable.

Pour $\mathscr{S}_2$, en utilisant le Théorème 4 on obtient

$$\mathscr{S}_2 \ll \sum_{q\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\Bigg|\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ n\equiv -2\,(\mathrm{mod}\,q)}}1-\frac{1}{\varphi(p)}\sum_{\substack{n\in S(x;y,z)\\ (n,q)=1}}1\Bigg| \ll \frac{x}{(\log x)^A}. \tag{5.6}$$

Pour $\mathscr{S}_1$, on peut retirer la condition $(n,\,p)=1$ compte tenu de $p>x^\alpha$ et $P^+(n)\leqslant x^\alpha$ si $n\in S(x;\,x^\alpha,x^\beta)$. On évalue ensuite $\mathscr{S}_1$ à l'aide du Lemme 3.4 sur $\Theta(x;y,z)$

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_1 &= \sum_{x^\alpha<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\frac{\Theta(x;\,x^\alpha,x^\beta)}{\varphi(p)}\\ &= \sigma(1/\alpha,1/\beta)\frac{x}{\log x^\beta}\sum_{x^\alpha<p\leqslant x^{1/2}/(\log x)^B}\frac{1}{p}\big\{1+o(1)\big\} \qquad (5.7)\\ &= \Bigg\{\frac{\sigma(1/\alpha,1/\beta)}{\beta}\log\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big)+o(1)\Bigg\}\frac{x}{\log x}.\end{aligned}$$

En reportant (5.7) et (5.6) dans (5.5), on déduit que

$$\sum_{\substack{n\leqslant x,\, P^-(n)>x^\beta \\ P^+(n)<P^+(n+2)}} 1 \geqslant \big\{g(\alpha,\beta)+o_{\alpha,\beta}(1)\big\}\frac{x}{\log x} \tag{5.8}$$

où

$$g(\alpha,\,\beta) := \sigma\Big(\frac{1}{\alpha},\,\frac{1}{\beta}\Big)\frac{\alpha}{\beta}\log\Big(\frac{1}{2\alpha}\Big) \tag{5.9}$$

pour α et β vérifiant (5.1). Pour ces α et β, la fonction $g(\alpha,\beta)$ est strictement positive et continue. De plus, on a

$$\lim_{\alpha\to\frac12} g(\alpha,\,\beta)=0, \qquad \lim_{\alpha\to\beta} g(\alpha,\,\beta)=0.$$

Ainsi pour tout $0<\beta<\frac13$ fixé, il existe un $\alpha_0=\alpha_0(\beta)\in\,]\beta,\,\frac12[$ tel que

$$C(\beta) := g(\alpha_0,\,\beta) = \max_{\beta<\alpha<\frac12} g(\alpha,\,\beta) > 0. \tag{5.10}$$

En particulier, on a

$$C\big(\tfrac14\big) \geqslant g\big(\tfrac13,\,\tfrac14\big) > 0,0267$$

en prenant $\alpha=\frac13$, $\beta=\frac14$.

La preuve du Théorème 2 est complète.

Références

[1] A. Balog. On triplets with descending largest prime factors. *Studia Sci. Math. Hungar.*, 38 :45–50, 2001.

[2] W. Banks, J. B. Friedlander, C. Pomerance, and I. E. Shparlinski. Multiplicative structure of values of the Euler function. *High primes and misdemeanours : lectures in honour of the 60th birthday of Hugh Cowie Williams*, 41 :29–47, 2004.

[3] W. Banks, A. Harcharras, and I. E. Shparlinski. Smooth values of shifted primes in arithmetic progressions. *Michigan Math. J*, 52 :603–618, 2004.

[4] J. R. Chen. On the representation of a larger even integer as the sum of a prime and the product of at most two primes. *Sci. Sinica*, 16 :157–176, 1973.

[5] J. M. De Koninck and N. Doyon. On the distance between smooth numbers. *Integers*, 11 :647–669, 2011.

[6] R. de la Bretèche, C. Pomerance, and G. Tenenbaum. Products of ratios of consecutive integers. *Ramanujan J.*, 9 :131–138, 2005.

[7] P. Erdős. On the normal number of prime factors of $p-1$ and some related problems concerning Euler's ϕ-function. *Quart. J. Math.*, 6 :205–213, 1935.

[8] P. Erdős and C. Pomerance. On the largest prime factors of n and $n+1$. *Aequationes Math.*, 17(2-3) :311–321, 1978.

[9] E. Fouvry and G. Tenenbaum. Entiers sans grand facteur premier en progressions arithmétiques. *Proc. London Math. Soc.*, 3(63) :449–494, 1991.

[10] J. B. Friedlander. Integers free from large and small primes. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 3(3) :565–576, 1976.

[11] D. A. Goldston, S. W. Graham, J. Pintz, and C. Y. Yildirim. Small gaps between products of two primes. *Proc. Lond. Math. Soc.*, 98(3) :741–774, 2009.

[12] D. A. Goldston, J. Pintz, and C. Y. Yıldırım. Primes in tuples I. *Ann. of Math.*, 170 :819–862, 2009.

[13] A. Granville. Smooth numbers : computational number theory and beyond. *Algorithmic number theory : lattices, number fields, curves and cryptography*, 44 :267–323, 2008.

[14] A. Hildebrand. On the number of positive integers $\leqslant x$ and free of prime factors $> y$. *J. Number Theory*, 22 :289–307, 1986.

[15] H. Iwaniec. A new form of the error term in the linear sieve. *Acta Arith.*, 37 :307–320, 1980.

[16] A. Lachand. Valeurs friables d'une forme quadratique et d'une forme linéaire. *Quart. J. Math.*, 66(1) :225–244, 2015.

[17] A. Lachand and G. Tenenbaum. Note sur les valeurs moyennes criblées de certaines fonctions arithmétiques. *Quart. J. Math.*, 66(1) :245–250, 2015.

[18] J. Maynard. Small gaps between primes. *Ann. of Math.*, 181(1) :383–413, 2015.

[19] Y. Motohashi and J. Pintz. A smoothed GPY sieve. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 40(2) :298–310, 2008.

[20] C. Pomerance. Popular values of Euler's function. *Mathematika*, 27(01) :84–89, 1980.

[21] C. Pomerance and I. Shparlinski. Smooth orders and cryptographic applications. In *International Algorithmic Number Theory Symposium*, pages 338–348. Springer, 2002.

[22] E. Saias. Entiers sans grand ni petit facteur premier I. *Acta Arith.*, 61(3) :347–374, 1992.

[23] E. Saias. Entiers sans grand ni petit facteur premier II. *Acta Arith.*, 63(4) :287–312, 1993.

[24] E. Saias. Entiers sans grand ni petit facteur premier III. *Acta Arith*, 71(4) :351–379, 1995.

[25] G. Tenenbaum. *Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres,* 3ième édition. Collection Échelles, Édition Belin, 2008.

[26] J. Teräväinen. A note on binary correlations of multiplicative functions. prépublication.

[27] Z. W. Wang. On the largest prime factors of consecutive integers in short intervals. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(8) :3211–3220, 2017.

[28] Z. W. Wang. Sur les plus grands facteurs premiers d'entiers consécutifs. prépublication.

[29] Y. T. Zhang. Bounded gaps between primes. *Ann. of Math.*, 179(3) :1121–1174, 2014.

Institut Élie Cartan de Lorraine, Université de Lorraine, UMR 7502, 54506 Vandœuvre-lès-Nancy, France

E-mail address: zhiwei.wang@univ-lorraine.fr