



HAL
open science

Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.. 2017. hal-01635538v9

HAL Id: hal-01635538

<https://hal.science/hal-01635538v9>

Submitted on 19 Mar 2019 (v9), last revised 8 Nov 2023 (v22)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, réels, le Tore, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules geodesiques, traces de Sobolev et fonctions de Green et un Théorème de Dualité, la metrique induite sur un ouvert Lipschitzien, les coordonnées geodesiques polaires et la formule de Gauss-Bonnet et sur le Théorème de la masse positive en dimension 3 et dans le cas conformément plat.

1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Hausssdorf et la formule d'integration par parties (Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ?) : $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ alors la mesure $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit $A \subset \partial\Omega$, $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon, H_{|\partial\Omega}^{n-1}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a, $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$, avec V_ϵ ouvert de \mathbb{R}^n .

Dapres le Theoreme d'Urysohn ;

$$\exists f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq f_\epsilon \leq 1, f_\epsilon \equiv 1, \text{ sur } K_\epsilon, \text{ supp } f_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient ν_1, ν_2 les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

Ω est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Hausssdorf $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$, ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et $|D\chi_\Omega| = H_{|\partial\Omega}^{n-1}$:

$$\int_\Omega \text{div} \varphi = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_1 dH^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_2 dH^{n-1}, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0, \forall \varphi \in C_c^1,$$

Comme C_c^1 est dense dans C_c^0 , la formule precedente est vraie pour $\varphi \in C_c^0$

On applique cette formule a f_ϵ , on obtient pour tout mesurable A :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \rightarrow 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2, H_{|\partial\Omega}^{n-1}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale exterieure est la normale exterieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure" ("blow-up") est l'espace tangent usuel).

La formule d'integration par parties est bien connue. Pour sa preuve, voir les livres de Fusco (bords avec singularités par recouvrement et suite de compacts $K_n \rightarrow \partial\Omega - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers), Necas et Azé.

La formule d'integration par parties sur un domaine singulier en un nombre fini de points en dimension 2 (par exemple) :

La formule est locale, on considère $B(x_j, 1/n)$ avec x_j un point singulier du bord. La formule est locale, par un recouvrement et une partition de l'unité on écrit que (voir le Azé, dans chaque partie du recouvrement) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((1 - \alpha_n)u) dx = \int_{\partial\Omega} (1 - \alpha_n)u d\sigma,$$

avec α_n une fonction régulière et à support compact dans $B(x_j, 1/n)$, $\alpha_n \equiv 1$ dans $B(x_j, 1/2n)$. Avec le fait, $|\nabla\alpha_n| \leq Cn$ et $\mu_L(B(x_j, 1/n)) \leq C/n^2$ et $H_1(\{x_j\}) = 0$, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle (ici, on l'a fait pour le point x_j). Puis on fait tendre $n \rightarrow +\infty$. On obtient la formule de Stokes ou Green-Riemann pour un domaine contenant un nombre fini de singularités au bord.

2) Pourquoi quand on a $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar{\Omega})$, $tr(u) = u$? on utilise Necas et Brezis :

On a :

Ω est un ouvert Lipschitzien \Rightarrow cartes Lipschitziennes \Rightarrow un opérateur de Prolongement $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, d'après la construction de l'opérateur de Prolongement dans des cartes, $Pu|_{\bar{\Omega}} = u$ et, $\chi_n(\rho_n * Pu) \rightarrow Pu$ dans $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $W^{1,p}$ où K est un compact de \mathbb{R}^n , donc :

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Et,

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u\|_{C^0(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Donc,

$$Tr(u) = u, \quad H_{|\partial\Omega}^{n-1, p, p},$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_{\Omega} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_{\rho}(x)} u(y) dy}{|B_{\rho}(x)|}$$

on voit que si $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $Tr(u) = u$.

3) Pourquoi $W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1}, tr(u) = 0\}$ avec Ω ouvert Lipschitzien. Voir le livre de Necas. On raisonne par rapport aux suites ($\exists u_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $u_i \rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour les traces et la restrictions a des sous ensembles d'ouverts Lipschitzien).

a) On considère $\tilde{u} = u \times 1_{\Omega} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ par integration par parties et formule de Stokes.

b) Par des cartes et on multipliant par une fonction test à support compact, localement $\tilde{u} \in W^{1,1}(Q)$ avec Q un n-cube "au delà" du bord et nulle avant d'atteindre les cotes du bord qui sont intérieurs.

On considère alors \tilde{u}_{λ} , "la translatée" de \tilde{u} suivant la direction normale au bord. le support de \tilde{u}_{λ} est compact et strictement à l'intérieur du domaine.

On a : (on applique ces idées à un cube infini dans la direction normale au bord image (locale) de $\partial\Omega$, puis on se restreint au n-cube de départ. Sur les bords, la restriction de l'homeomorphisme Lipschitzien envoie les traces sur les traces par la formule de l'aire ou coaire. (par convergence de suites sur des ouverts Lipschitziens).)

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q_{-\lambda})$ avec,

$$\nabla(\tilde{u}_{\lambda}) = (\nabla\tilde{u})_{\lambda}.$$

puis en utilisant des fonctions tests dans Q on obtient :

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q)$ pour λ assez petit.

Le support de \tilde{u}_{λ} est strictement dans Q , on obtient alors, $\tilde{u}_{\lambda} \in W_0^{1,1}(Q)$.

Par un theoreme de la moyenne (voir Necas, \tilde{u} s'annule en dehors de Q), on obtient $\tilde{u}_{\lambda} \rightarrow \tilde{u}$ dans $W^{1,1}$. Donc, $\tilde{u} \in W_0^{1,1}$ et $u \in W_0^{1,1}$.

4) Soit (M, g) une variété riemannienne et soit $B_r(x)$ une boule géodésique très petite, telle que l'exponentielle réalise un difféomorphisme sur la boule de \mathbb{R}^n : pourquoi, la normale extérieure $\nu = \partial_r$?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$d(\exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i$, on identifie les 1-formes dx_i et $d\tilde{x}_i$.

Soit B^0 la base canonique de \mathbb{R}^n et \tilde{B}^0 la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ la base canonique de la boule géodésique $B_r(x)$, alors $d(\exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$.

La base $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_{n-1}}\}$ est directe, donc $\det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$.

Soit $\tilde{B}_r = \{d(\exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_1}), \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$, alors :

$\det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [det : B_r \rightarrow B_{0,r}] o [det : B_{0,r} \rightarrow B_r, \text{ qui est directe}] o [det : B_r \rightarrow \tilde{B}_{0,r}] > 0$

La première est $d(\exp_x)^{-1}$ et la dernière $d(\exp_x)$ le déterminant se limite, il reste celui de $B_{0,r}$ vers B^0 qui est direct.

Donc la base \tilde{B}_r est directe par rapport à la base \tilde{B}^0 .

n_{ext} est défini précisément comme cela tel que $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$ est directe par rapport à \tilde{B}^0 .

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient ω_θ et Ω les formes volumes sur la sphère $S_r(x)$ et la boule $B_r(x)$ n_{ext} est tel que son dual n_{ext}^* vérifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_\theta = \Omega,$$

C'est-à-dire que à des constantes multiplicatives près (déterminant des métriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est à dire que la base $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$ est directe par rapport à la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ et donc $n_{ext} = \partial_r$.

Voir aussi le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine où la normale extérieure est définie par le produit intérieur. (Par rapport à la base du bord et l'élément de volume du bord) On a le même résultat.

Par sa construction, la boule géodésique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par rapport à la carte (Ω, φ) à partir de laquelle elle est construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact K en utilisant l'exponentielle et cette propriété d'orientabilité des boules géodésiques via l'exponentielle, il faudra supposer la variété orientable.

5) Dans la construction de la fonction de Green pour un opérateur coercif $\Delta + a$ voir le livre d'Aubin et le monographe de Frédéric Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'étape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$, car la paramétrix H_x vérifie au sens C_0^2 (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les Γ_i vérifient cette propriété, elles sont nulles au bord car leur support est dans $B(m, \delta_m/2)$ et le rayon d'injectivité $= \delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$. Puis on utilise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser G_x dans l'équation et utiliser les théorèmes de Gilbarg-Trudinger :

$$\Delta(V_x - \eta G_x) + a(V_x - \eta G_x) = -\Delta(\eta G_x) + a(\eta G_x) \in L^p, \text{ et } (V_x - \eta G_x) = 0, \text{ sur } \partial M,$$

Avec η une fonction cutoff égale à 1 dans un voisinage de ∂M et 0 au voisinage de x (nulle au voisinage de la singularité).

On obtient $V_x - \eta G_x \in W^{2,p}(M)$ et comme $\eta G_x \in W^{2,p}(M)$, alors : $V_x \in W^{2,p}(M)$.

Remarques :

1) Dans la formulation variationnelle on pour une solution $u \in W_0^{1,2}$ de :

$$-\Delta u + au = f, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial M,$$

Dans le monographe de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions $W_0^{1,1}$), ils prouvent que ces solutions sont au sens C_0^2 (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont $W^{2,p}$ et qu'on a les estimations a priori dans $W^{2,p}$ d'Agmon (méthode des quotients différentiels) ou en sachant qu'elles sont $W^{2,p}$ qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund écrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inégalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergation par parties, par rapport a la variable $t > 0$) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu = 0, \quad u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

On peut supposer L le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuité on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenebrg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans linegalité obtenue ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien.

On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on écrit à l'ordre 1 :

Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson $P(x, t) = \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$.

On suppose que $\varphi \in C^2 \cap W^{2,p}$. On écrit :

$$\partial_s(P(x - y, t + s)\varphi(y, s)) = \partial_s P\varphi + P\partial_s\varphi,$$

On integre en y et s et on obtient (on utilise la representation integrale de u en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - y, t)\varphi(y, 0)dy = \int P(x - y, t+T)\varphi(y, T) + \int \int \partial_t P\varphi + \int \int P\partial_t\varphi,$$

On a $\partial_t P \equiv \frac{1}{|Q|^{n+1}}$, Q un point quelconque, et $\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = n + 1$, on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour $\partial_t u, \partial_x u$, on derive sous le signe \int et puis on integre par parties sur \mathbb{R}^n . On obtient des integrales du type,

$$\int \int \partial_t P\partial_t\varphi, \quad \int \int \partial_t P\partial_x\varphi, \quad \text{et} \quad \int \int \partial_x P\partial_t\varphi$$

On elimine $\int P(x - y, t + T)\varphi(y, T)$ par son estimation en $c(T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$.

On obtient des estimations du type :

$$\|\partial u\|_{L^p} \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on écrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

6) Sur le degré topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la définition du degré topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, \text{deg}[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x, t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$, cela veut dire qu'on peut utiliser l'homotopie :

$$\text{deg}[x - F(x, t), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - F(x, 0), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$$

$t = 0, F(x, 0) = \Phi(x)$ et par Nussbaum et la propriété d'excision et d'additivité, on peut décomposer le degre en 2, la condition est que $\Phi(x) \neq x$ sur ∂B_{R_1} et $\Phi(x) = F(x, 0) \neq 0$ sur ∂B_{R_2} , alors :

$$0 = \text{deg}[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + \text{deg}[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0],$$

La dernière condition est celle de l'homotopie avec l'identité et le degre de l'identité est 1.

$$\text{deg}[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = \text{deg}[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = \text{deg}[x, B_{R_1}, 0] = 1,$$

Donc,

$$\text{deg}[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation integrale $\int_{\Omega} f(u(x)+t)dx \leq C, C$ independante de t et les estimations a priori pour verifier que les conditions d'applications du degré topologique sont verifiées, dans ce cas les t et les solutions sont uniformément bornés.

Concernant l'article de Crandall-Rabinowitz, il traite du cas où en particulier on a un terme nonlineaire du type exponentiel. Grace à la condition de stabilité (ils prennent des fonctions tests particulieres), ils prouvent que la masse et le volume ou energie, sont bornées (jusqu'a la dimension 10).

7) Sur les surfaces $K3$. Soit E un fiber bundle (fibré vectoriel) et M une variété Complexe de metrique h .

Remarquons d'abord que cette variété est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien réel est le carré du Jacobien complexe, cest du a l'holomorphic, comme en dimension 2 (equation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fibre bundle E , il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphic et la metrique, c'est l'analogie complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable a la connexion de Levi-Cevita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une derivee covariante, on a la courbure, on derive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern, cest la classe de Ricci.

Connexion de Chern \Rightarrow symboles de Christoffels \Rightarrow Connexion form, ω , \Rightarrow Curvature form,

Dans le cas $E = \wedge^2 T^*(M)$ les 2-formes alternees :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$, car ici, ce qui joue le role de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur E (les vecteurs de base sont les 2-formes alternees), les champs de 2-formes alternees,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$, des qu'on dérive encore deuxieme fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces $K3, E = \wedge^2 T^*(M) = 0, 2$ formes alternees :

Si $E = 0$, la connexion nulle convient pour la derivation sur E or la connexion de Chern est unique dou $\nabla \equiv 0$. Donc, il ny a pas de courbure do la classe de Chern est nulle, $c_1 = 0$.

Les groupes de cohomologies sont connues :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les varietes complexe, il faut prendre la dimension complexe 2 et non réelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualite de Serre, cela

va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la theorie de Hodge, on prend la dimension reelle 4, avec la convention $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \leq p, q \leq 2\}} H^{p,q}$, p, q varient selon la dimension complexe, quand on inverse p et q on a par la conjugaison complexe, la meme dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault, $H^{0,1}$ est isomorphe à la cohomologie de Cech $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, O_S)$ car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions O_S et par definition $H^1(S, O_S) = 0$ d'où $h^{0,1} = \dim H^{0,1} = \dim H^1(S, O_S) = 0$. On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau) sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe), on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la caractéristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension reelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne $X = S = K3$:

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \frac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$, avec c_1 la premiere classe de Chern et c_2 la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure Ω

$$\det(\Omega - tI) = 1 + \text{tr}(\Omega) + \Omega \wedge \dots = 1 + c_1 + c_2,$$

L'integrale $\int c_2$ est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas d'une surface $K3$, cest donc $\chi(K3) = \int c_2 = 24$.

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type $dx^j \wedge dx^k$ et c_2 est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme : $\int c_k$ avec c_k la k -ieme classe de Chern.

Comme la surface $K3$ est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possède une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec $(K3, h, \nabla)$ on a une structure hermitienne et par Siu, $K3$ est Kahler, c'est a dire que la structure Riemannienne $(K3, g = \text{Re}(h), \nabla_g)$ est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Cevita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euler-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (\text{Ricci}_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface $K3$ possède une metrique non-localement conformement plate.

a) Le Projectif complexe de dimension complexe $n \geq 2$ est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possède (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Cevita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Pourquoi la courbure sectionelle du projectif complexe de dimension $n \geq 2$ est non-constante : C'est ecrit dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

a) Ils utilisent l'equation des champs de Jacobi, pour determiner le tenseur de Riemann.

b) Ils utilisent la multiplication par le nombre complexe, i , la structure complexe, J . Et le fait que H_x sont les vecteurs orthogonaux a z et iz , $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$.

Ils utilisent la variations $H(t, s)$ et les champs de Jacobi.

La courbure sectionelle pour u, v est calculée a partir du champs de Jacobi, $Y(s) = \cos s u + \sin s Jv$:

$$K(u, v) = 1 + 3 \sin^2 s.$$

qui n'est pas constante.

b) Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique la sphere de dimension 2 reelle et donc de curbure sectionelle constante. C'est une surface de Riemann reelle (donc localement plate).

Pourquoi, le Projectif complexe de dimension 2 est isometrique à la sphere de dimension 2. Voir le Gallot-Hulin-Lafontaine :

1-On utilise le quotient par un groupe de Lie. Comme le groupe de Lie agit proprement et transitivement et..., cela veut dire qu'il existe une structure de variété sur le quotient $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ telle que l'application de passage au quotient soit une submersion.

2-Le fait qu'on ait une submersion, on utilise la definition, localement, on a des sous-variétés, on construit, par des cartes, une base du noyau et apres un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on construit un supplémentaire orthogonal. l'application de passage au quotient est bijective sur ce supplémentaire. ce qui permet de construire localement un "lift".

3-On definit la metrique sur le quotient de telle maniere que l'application de passage au quotient soit une isometrie, on la construit a partir du lift et par projection sur H_x .

(Remarque : soit $p(x) = [x]$ l'application de passage au quotient et γ une isometrie, $x = \gamma^{-1}o\gamma(x) \Rightarrow [x] = [\gamma(x)] \Leftrightarrow p(x) = p\circ\gamma(x)$, ceci est important dans la construction de l'isometrie en prouvant que cela ne depend pas de point de la fibre).

On voit que pour le cas de \mathbb{S}^3 et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$, que la metrique du projectif est celle de la 3-sphere pour des vecteurs particuliers v, w , par exemple orthogonaux à z et iz avec $z \in \mathbb{S}^3$. (le produit scalaire sur H_x est egal a celui pour l'espace tangent au quotient).

Par exemple si on prend $z = (1, 0) = [(1, 0), (0, 0)]$ en notation complexe, les v, w sont de la forme $v = (0, v_1), w = (0, w_1)$. Puis en utilisant l'application H du Gallot-Hulin-Lafontaine $H(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$ et les chemins $u(t) = costz + sintv, w(t) = costz + sintw$, (on se ramene à ce cas par une rotation car la variété est invariante par $U(n+1)$, les rotations complexes, (elle est construite à partir de S^{2n+1}), on a :

$$\langle H(u(t))', H(v(t))' \rangle_{S^2_{t=0}} = \langle v, w \rangle_{S^3} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Cela veut dire que,

$$H^*(g_{S^2}) = g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Remarque : Les revêtements riemanniens, sont similaires, au lieu d'avoir une submersion, on a un difféomorphisme local. Voir, le Gallot-Hulin-Lafontaine, pour la construction du Tore et des projectifs reels (leur metriques).

Dans le cas des revêtements, puisqu'il y a un difféomorphisme local, la courbure sectionelle se conserve (voir le Hebey). On voit alors, dans la construction du projectif réel et le Tore, que la courbure sectionelle est constante, donc, elles sont conformement plates.

On a la meme chose avec les groupes de Lie et les espaces homogenes. On a une fibration qui est une submersion et on construit une metrique G - invariante par le meme procédé que les submersions et les revêtements. De plus, si par exemple, on considere $P_n(\mathbb{C})$, les groupes unitaires (les rotations complexes) $U(n+1)$ et $SU(n+1)$ agissent transitivement et proprement sur $P_n(\mathbb{C})$ par l'intermediaire de la sphere \mathbb{S}^{2n+1} .

1- $P_n(\mathbb{C})$ est à la fois identifiable à $U(n+1)/U(1) \times U(n)$ et $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$. De plus, comme on la vu dans le cas des submersions, pour connaître la metrique de $P_n(\mathbb{C})$, il suffit de se placer sur la sphere S^{2n+1} , car on prend H_x l'orthogonal de z et iz , avec $z \in S^{2n+1}$. Pour ce qui concerne les groupes de Lie, la formule donnant la metrique G - invariante est egale à (C designe le produit scalaire dans \mathbb{C}) :

$$\langle x|y \rangle_{[e], P_n(\mathbb{C})} = \int_{H_1} \langle Ad_{h_1}.x | Ad_{h_1}.y \rangle_C dv_{H_1}$$

Or, dans l'espace des matrices, la derive de l'adjoint est connue et est egale, (on raisonne par rapport aux chemins et en particulier de l'exponentielle) :

$$Ad_{h_1}.x = Ad_{G/H}h_1.x = h_1^{-1}.x.h_1, \quad Ad_{h_1}.y = h_1^{-1}.y.h_1,$$

avec l'identification, $x = [x] = u, [x] \in SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ et $x = u \in H_x \subset \mathbb{C} \equiv P_n(\mathbb{C})$.

Car ici, $G/H = P_n(\mathbb{C})$ et on prend le plan tangent et dans ce cas il faut prendre des vecteurs de H_x donc de S^{2n+1} , (raisonner par rapport à l'exponentielle et les chemins). ($t \rightarrow \exp(tx)$ est un bon chemin et en plus quand on derive on a l'adjoint). (on se ramene au produit scalaire de S^{2n+1}).

$G = SU(n + 1), H = G_m = S(U(1) \times U(n)).$

Remarque : La metrique sur G/H est definie de telle maniere que la correspondance : $F : [x] \in G/H \rightarrow u \in P_n(C)$ soit une isometrie. (voir le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine, sur la correspondance via S^{2n+1} entre $SU(n + 1)/S(U(1) \times U(n))$ en tant que groupe de Lie et $P_n(C)$ via S^{2n+1} . Donc, on retrouve le fait que les metriques sont proportionnelles. (Eux, ils notent $U(n + 1)/U(1) \times U(n)$).

Gallot-Hulin-Lafontaine disent qu'on peut prendre "any scalar product on $T_e(G/H)$. Comme G/H s'identifie par F à $P_n(C)$, on choisit le produit scalaire tel que F soit une isometrie vers le projectif complexe. Ce qui revient à obtenir le produit scalaire du projectif complexe.

Finalement, on ecrit, puisque $\bar{h}_1^t h_1 = 1$ et $(\bar{h}_1^{-1})^t h_1^{-1} = 1$:

$$\begin{aligned} \langle x|y \rangle_{[e], P_n(C)} &= \int_{H_1} \langle (h_1^{-1} \cdot y \cdot h_1)^t | h_1^{-1} \cdot x \cdot h_1 \rangle_C dv_{H_1} = \\ &= \int_{H_1} \langle (h_1^{-1})^t \cdot y^t \cdot (h_1^{-1})^t | h_1^{-1} \cdot x \cdot h_1 \rangle_C dv_{H_1} = \\ &= \int_{H_1} \langle y^t | x \rangle_C dv_{H_1} = \mu \langle x|y \rangle_C, \end{aligned}$$

avec, $\mu > 0$ et $x, y \in H_x$, on reconnait le produit de deux vecteurs de S^{2n+1} qui donne le produit scalaire dans $P_n(C)$.

Ce qui a été prouvé est que la metrique G -invariante est egale à la metrique usuelle du projectif complexe.

Si, on considere la courbure de Ricci, alors :

Comme les seuls sous-espaces invariants sont $[e]$ et G/H , la diagonalisation donne un facteur commun entre la courbure de Ricci et la metrique. (Ici, les variétés sont de dimensions finies, on peut parler de diagonalisation).

Donc, le projectif complexe est une variété d'Einstein.

Pour voir si le coefficient est s , $s > 0$ on utilise le Theoreme du Livre de Besse qui dit que si $s = 0$ elle plate, c pas possible car la courbure sectionnelle serait constante. Si $s < 0$ le projectif ne serait pas compact.

Donc, le projectif complexe est d'Einstein de constante $s > 0$.

(On a une isometrie F entre la variété homogène $SU(n + 1)/S(U(1) \times U(n))$ et $P_n(C)$. La courbure de Ricci du projectif complexe est $(Ricci) \circ F$, elle reste constante. voir le Hebey).

Remarque : Tout ce travail sur les groupes de Lie, sert en fait pour les ensembles de matrices. Cette Théorie est construite pour les groupes matriciels, $SU(n + 1), SO(n)$... (pour ces cas particuliers, les variétés sont de dimensions finies).

Donc :

1-Les revetements, dans la construction des metriques de courbures sectionnelles constantes, comme les projectifs réels, le Tore, les variétés Hyperboliques.

2-les submersions riemanniennes, dans la construction des projectifs complexes.

3-les fibrations, et groupes de Lie, dans la constructions, des variétés homogènes, puis par exemples, on compare, les metriques, comme pour le projectif complexe, qui est d'Einstein de constante $s > 0$. (La fibration est construite de telle maniere qu'on a une strucutre de variété lisse pour la variété quotient. La fibration sert dans la construction de la métrique, les sections.).

(Par exemple, pour les revetements, il aisé d'avoir une structure de variété lisse sur le quotient. Un peu moins pour les submersions et les fibrations. De plus, dans la construction des metriques du quotient on s'assure que ca ne depend pas du point de la fibre).

4-On a les variétés de courbures sectionnelles constantes, qui sont localement conformement plates. Le produit d'un cercle et d'une variété de courbure sectionnelle constante, est plate.

5-Les sommes connexes, de variétés conformement plates, peuvent etre plates.

6-Les sommes connexes, par le theoreme de D. Joyce, peuvent avoir une partie plate et une partie non plate et de courbure scalaire -1 .

7-Pour construire une variété nonlocalement conformemtn plate, on construit des produit. On a l'a fait à partir des surfaces réelles de dimension 2. Et en considrant des produit dont un n'est pas plat.

8-Les surfaces $K3$. La variété de W. Goldman en dimension 3 sur la quelle on peut mettre n'importe qu'elle metrique, elle sera non plate.

8) La formule d'integration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problemes variationnels de degre 2, il est possible de resoudre par la formulation variationnelle un probleme elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une varieté non orientable.

Par contre quand il sagit de fonction de Green, sur une varieté compacte, il est imperatif de supposer la varieté orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'integration par parties en dehors de petites boules, on se ramene a une varieté à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

9) Pour les variétés de dimension 3. On considere un Torus bundle M_φ d'application φ (voir le Hatcher pour la definition, φ est la monodromy map), il est orientable si et seulement si $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$. William Goldman prouve qu'il existe un Torus bundle orientable ne possedant pas de structure conformement plate, φ non periodique, (de valeur propres réelles) (par exemple, $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) il n'y a pas de metrique localemeent conformement plate, comme une variete lisse possede toujours une metrique Riemannienne g , elle est dans ce cas non localement conformement plate, $Weyl_g \neq 0$. Ce theoreme dit qu'il n'existe pas de metrique localement conformement plate sur cette variété.

1- Une structure est conformement plate s'il existe une metrique conforme à la metrique euclidienne. Cette definition est equivalente à celle qui dit qu'une structure conformement plate s'il existe un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Mobius (composee de translation, rotation et inversion). Cette equivalence est demontree dans l'article de Kuiper (1949).

2- Cela veut dire que si on veut savoir si une variété a une structure conformement plate, il suffit d'etudier les transformations conformes, donc le groupe conforme. C'est l'idée de William Goldman, il caracterise le groupe fondamental et le groupe de transformations conforme des varietes conformement plate (il y a une relation entre le groupe fondamental et le groupe des transformations conformes). Si cette condition n'est pas satisfaite alors, la variete n'a pas de structure conformement plate. (le groupe fondamentale doit etre polycyclique...).

10) Voir aussi, dans le livre d'Aubin ou la caracterisation de Kuiper de la structure conforme par une isometrie, sert à prouver le Theoreme de la masse positive dans le cas conformement plat. En effet :

a) Quand on a une variété complete, conformement plate et simplement connexe, elle est conformement isometrique à une partie de la sphere dont on connait la masse $m_0 = 0$, par la formule donnée dans le livre d'Aubin, $\alpha_0(P) = k \times \alpha_{\mathbb{R}^n}(P) = k \times 0 = 0$.

b) On considere une variété M compacte, conformement plate. Alors le revetement universel \tilde{M} , verifie les conditions du point a) precedent. Donc la masse est nulle.

c) Si de plus M n'est pas conformement diffeomorphe à la sphere, le revetement universel contient plus de deux feuilletts. (Par Kuiper une variété compacte connexe, conformement plate et simplement connexe, est diffeomorphe à la sphere. Donc, ici, elle ne peut pas etre simplement connexe). Ce qui fait que l'ensemble noté $W = \Pi^{-1}(\Pi(P))$ dans le livre d'Aubin n'est pas reduit à $\{P\}$. Par la construction de la fonction de Green minimale (notée \tilde{G}_P de \tilde{M}) et le principe du maximum, il existe une fonction \tilde{H} , qu'on peut prendre ici pour $G_P \circ \Pi$, ($\tilde{g} = \Pi^*(g)$ qui est conforme a $\tilde{g} = \Phi^*(g_0)$ donc de la forme $u^{-1}H \circ \Phi \dots$), telle que on ait $\tilde{H} > \tilde{G}_P$ en P . Or $\tilde{M} = \Pi^*(M)$ et donc la fonction de Green de M , verifie au moins l'inégalité. $\alpha_P(G_P \circ \Pi) > \tilde{\alpha}_P = 0$, car pour le revetement universel, d'apres le point a), la masse est nulle (et la distance se conserve localement, car on a un revetement donc une isometrie locale). Ainsi la masse de M en P , $\alpha_P(G_P) > 0$, dans le cas où M n'est pas conformement diffeomorphe à la sphere.

Remarques : Sur la partie de la preuve du livre de Aubin (communication de M.Vaugon) concernant l'effet du changement conforme sur la masse α . On $\tilde{g} = \varphi^{4/(n-2)}g$ avec \tilde{g} et g des metriques conformement plates \tilde{d} et d . on se ramene au cas où le facteur conforme est constant. La variété est localement conformement plate. Donc la masse m ne depend pas des coordonnées (Bartnik). Comme :

$$\tilde{\alpha}(P) = m(\tilde{G}_P^{4/(n-2)}\tilde{g}) =$$

$$= m(G_P \frac{g}{\varphi(P)^{4/(n-2)}}) = m(G_{P,\lambda}^{4/(n-2)} g^\lambda) = \alpha(P)/(\varphi(P)^2).$$

Car le raisonnement dans le livre d'Aubin reste vrai si on considère une métrique conforme du type $g^\lambda = \lambda^{4/(n-2)}g$ avec λ une constante > 0 . Ici, $\lambda = \varphi(P)$ et $G_{P,\lambda} = G_P/\lambda^2$.

Pour le Théorème de la masse positive de Schoen-Yau en dimension 3, ils prouvent qu'il existe une surface minimale complète ayant une propriété (intégrale de la courbure de Gauss positive) alors que par les calculs cette intégrale est négative ou nulle. Pour cela ils utilisent le théorème d'existence de surfaces minimales et leurs propriétés (Formule de Gauss-Bonnet et Travail de Huber, inégalités isopérimétriques classiques et de Huber, la métrique est voisine de la métrique euclidienne ce qui fait qu'on peut approcher ces deux notions (inégalité isopérimétrique classique)). En particulier, ils prouvent qu'elle est complète dans la première étape. (les fermés bornés sont compacts).

La positivité de la courbure scalaire implique que la surface minimale construite a son intégrale de Gauss Positive. Et puisque la métrique est "presque" euclidienne, il y a conservation de l'inégalité isopérimétrique et par la formule de Gauss-Bonnet, elle serait négative ou nulle. Ce qui n'est pas possible.

Il s'agit de construire une métrique conforme avec une propriété de la courbure scalaire.

Il s'agit de construire une surface minimale ayant une propriété qui découle de la courbure scalaire.

Cette surface minimale complète n'existe pas, car cette propriété n'est pas vraie, par le fait que la métrique est "presque" plate et que l'inégalité isopérimétrique euclidienne se conserve et la formule de Gauss-Bonnet.

Remarques :

a) Ils prouvent que la masse $m \geq 0$, par l'absurde :

1-La masse < 0 intervient dans la construction de la surface minimale complète. (raisonnement par l'absurde). (Ils prouvent qu'elle est complète dans cette étape, car, en dehors des bords, elle est dans un compact, et dans les bords elle est entre deux plans et la métrique est équivalente à la métrique euclidienne. (les fermés bornés sont compacts)).

2-Une surface est dite de type fini, si $\int |K| < +\infty$: c'est le cas dans la démonstration de la masse positive de Schoen-Yau.

3-Quand on a une surface de type fini, si $\chi(S') > 0$ (la caractéristique d'Euler-Poincaré > 0 , ce qui est le cas ici par Cohn-Vossen), alors S' est difféomorphe au plan. C'est écrit dans Hulin-Troyanov(1992), premier théorème, qui dit que, S' est difféomorphe à une variété compacte S sans bord, sans un nombre fini de points. De plus il y a une formule de Gauss-Bonnet, on a alors S' est la sphère moins un au plus un point d'après cette formule de Gauss-Bonnet. Donc, c'est le plan. Il s'agit d'un difféomorphisme entre S' et le plan.

On a d'abord une isométrie i , puis une application conforme, F_1 . la courbure de Gauss "se conserve". D'abord $K_{i(S')} = K_{oi}$, puis par l'application conforme on a un facteur $|F_1'|^2$, qui s'élimine dans le changement de variable. $\int K = \int K_{F_1 \circ i} = \int K \circ F_1 \circ i |F_1'|^2$, cette dernière intégrale est la courbure de Gauss de $F_1 \circ i(S')$. Puis on applique le résultat d'Huber. (On considère $i(S')$ au lieu de S' , car on a une isométrie et la courbure de Gauss "se conserve", $\int_{S'} K = \int_{i(S')} K_{oi}$ et $(F_1^{-1})^*(g_{i(S')}) = |F_1^{-1}|^2 g_{\mathbb{C}}$, car F_1 est conforme, la métrique se transporte suivant un facteur de la métrique de \mathbb{C} , on a des coordonnées isothermes globales, on peut appliquer ce que fait Huber (1957)).

(Pour obtenir l'application conforme, on raisonne par rapport au revêtement universel et la caractéristique d'Euler-Poincaré).

4-Dans un article de Huber, il prouve que sur une surface ouverte, la formule de "Gauss-Bonnet", pour une suite de domaines :

$$\int K = 2\pi - \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L_\sigma^2 / 2A_\sigma.$$

5-La construction de la surface est en fait une construction d'un courant (surface avec singularité, par une minimisation d'une fonctionnelle relativement à une métrique), puis, voir le livre de Federer, la surface est régulière en dehors du bord. $\partial(N \cap S) = (\partial N \cap S) \cup (\partial S \cap N)$, par la formule de Stokes, S est loin du bord, car la courbure moyenne est positive (c'est une hypothèse).

(Voir aussi , le livre de Sa Earp-Tubiana, sur le theoreme de Poincaré-Koebe et la calssification par le revetement universel).

Un theoreme d'uniformisation de Poincaré-Koebe, dit que une surface non compacte simplement connexe est conforme au disque unité ou au plan. (voir l'article de Hulin-Troyanov(1992)).

b) Ils prouvent que si la masse est nulle, $m = 0$, alors l'espace est isometrique à \mathbb{R}^3 . la preuve de ce point est assez claire dans l'article de Schoen-Yau, ils se ramenant au cas de masse < 0 et de courbure scalaire ≥ 0 par des changement de metriques conformes..., ce n'est pas possible, ou bien la courbure scaire et de Ricci seraient nulles comme on est en dimension 3 $Weyl \equiv 0$, donc c'est la cas plat.

Ceci s'applique a une variété compacte sans bord :

En effet, soit M cette variété compacte sans bord. $P \in M$, en se palcant au voisinage de P et si considere les coordonnees geodesiques polaires alors la metrique est du type $g_{ij} = \delta_{ij} + (termes)r^2 +$, si on fait le changement de variable $r = 1/\rho$, alors :

1-on exclut le point P et la variété devient asymptotique, car pour $r = 0$ (en P), ce n'est pas bien definit.

2- $M - \{P\}$ ressemble a \mathbb{R}^n .

3-on sait que les boules geodesiques sont de courbure moyenne < 0 concave, voir la preuve dans un des livres sur la conjecture de Poincaré (Chow and al, par exemple). Mais le changement de variable $r = 1/\rho$ inverse le signe. Ces boules $B_P(r) - \{P\}$ sont les bouts du cas general de la masse positive les N_k qui sont convexes. Cette hypothese de courbure moyenne positives de la variété $N = B_P(r_0) - \{P\}$ est verifiee dans le cas compact sans bord en se placant en un point P et changeant de variable.

4-C'est ecrit dans le livre d'Aubin, que la masse $m = cte \times A = 4(n-1)A$ avec A la partie reguliere de la fonction de Green. Donc elle est positive si $m > 0$.

5-Reste a voir ce qu'est la métrique g comme c dit dans le livre de Aubin, ils considerent $G_P^{4/(n-2)} \times g \equiv r^{-4}g$ avec G_P la fonction de Green, et le changement de variable $\rho = 1/r$ ou $r = 1/\rho$ on a le comportement asymptotique, une variété asymptotique d'ordre 2 en coordonnées geodesiques polaires.

(Dans le changement de variable $\rho = 1/r$, on ecrit, $\partial_\rho = -\frac{1}{r^2}\partial_r$, puisque c'est un changement de variable, on calcule alors $g_{\rho\rho}$, de meme que pour $g_{\rho\theta}$ et finalement $g_{\theta\theta}$ qui se conserve, puiqu'il n'y a pas changement angulaire).

Donc, on voit que le cas compact sans bord se deduit du cas general. (Au voisinage du point P on est dans les bouts, mais ces vosinages sont des boules geodesiques dont on connait la courbure moyenne < 0 , et avec le changement de variables, pour avoir des coordonnes asymptotiques, ces boules deviennent de la variété N avec le bon signe sur la courbure moyenne > 0).

On a : $N = B_P(r_0) - \{P\}$, $N_k = B_P(r) - \{P\} = B_P(1/\rho) - \{P\}$ et $\partial N_k = S_P(r) = S_P(1/\rho)$ avec orientation inversée.

Remarque : Sur la courbure moyenne de la sphere de rayon r , $S_P(r)$. On ecrit B est la seconde forme fondamentale :

$$H = trace(B)$$

Mais,

$$B(e_i, e_j) = \langle \nabla_{e_i}(e_j) | N \rangle,$$

avec e_i, e_j les elements de la base de l'espace tangent a la sphere et N la normale a la sphere.

On prend alors $e_i, e_j \in \{\partial_\theta\}$ et on utilise la dérivée covariante et le produit scalaire $\langle e_i, N \rangle = 0$, en permutant la dérivée covariante, jusqu'a obtenir :

$$\begin{aligned} trace(B) &= trace[\nabla_N(\langle \partial_\theta | \partial_\theta \rangle)] = \nabla_r(\langle \partial_\theta | \partial_\theta \rangle) = \\ &= \frac{1}{r^2} \times r \times g^{\theta_i \theta_j} g_{\theta_i \theta_j} + \dots = \frac{n-1}{r} + \dots \end{aligned}$$

Donc (avec l'orientation positive),

$$H = \frac{n-1}{r} + \dots$$

(Aussi, en permutant la derivation covariante dans $\langle e_i | N \rangle = 0$, on retrouve l'expression de la courbure moyenne (positive) ecrite dans l'article de Schoen-Yau, $div(N) > 0$).

11) Concernant les sommes connexes, $M \sharp N$ de deux variétés M, N , elles sont definies a partir d'une relation d'equivalence qui donne une variété quotient Topologique, c'est à dire C^0 , à l'ordre 0 il n'y a pas de probleme, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais des qu'on cherche une structure differentiable ou $C^k, k \geq 1$, c'es plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de maniere lisse.

Remarquons que endehors de la sphere ou se fait le recollement, la variété est egale à M ou N .

Lorsque on met une metrique sur M et N alors par des fonctions cutoff on peut mettre une metrique, par recollement, sur $M \sharp N$ et elle coincide avec celles de M et N en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$ et $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$, on a deux injections naturelles i_1, i_2 et on doit faire le recollement entre $Id_{B(p, 2\epsilon)}$ et $i_2 o i_1^{-1}$. On definit une relation dequivalence en partant de couronnes $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$, $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$ vers les varietes M et N . On choisit une carte pour N renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient i_2 .

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes, $i_2 o i_1^{-1}$ est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de M a celui de N de maniere lisse. (Les changements de cartes sont lisses de M, N et $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$, par $i_2 o i_1^{-1}$.)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de M et N , alors $M \sharp N$ est orientable.

On a : $X = M \setminus B(p, \epsilon) \cup N \setminus B'(q, \epsilon)$ est compact, le graphe de la relation $Gr = \{(x, x), x\} \cup \{(x, i_2 o i_1^{-1}(x)), x\}$ est fermé, donc, $X \setminus \sim$ est séparé. Soit $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon)$, et π l'application de passage au quotient. Alors $\pi(O)$ est un ouvert de $X \setminus \sim$ car $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$.

Soit : Φ l'application de recollement de cartes, definit precedemment sur $\pi(O)$, alors Φ est bien definit et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de \mathbb{R}^n , par le theoreme d'invariance du domaine de Brower (car i_2 et i_1 se recollent au bord qui est une sphere, par definition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changement de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x), \quad x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon), \quad \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2}, \quad x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon),$$

avec, $[x] = \pi(x)$, l'application de passage au quotient. i_2 inverse l'orientation de N . Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de determinant positifs, de plus, sur la sphere, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a i_1 avec la bonne orientation et sur le deuxieme bout on a i_2 qui inverse l'orientation, et sur la sphere $|i_2| = 1$).

On voit que $\Phi o \pi$ est continue par definition et donc Φ est continue.

On a bien, $(\Phi, \pi(O))$ une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme M et N sont orientables, $M \sharp N$ est orientable.

Avec $(\Phi, \pi(O))$ on a une carte de recollement, et,

$$\Phi o [i_1]^{-1} = \Phi o [i_1^{-1}] = Id_{B(p, 2\epsilon) \setminus \bar{B}(p, \epsilon)},$$

$$\Phi o [i_2 / |i_2|^2]^{-1} = \Phi o [(i_2 / |i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q, 2\epsilon) \setminus \bar{B}'(q, \epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considerant les metriques g_M, g_N et $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$, par des fonctions cutoff, on a par recollement, une metrique sur $M \sharp N$:

$$g_{M \sharp N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considere un observateur a de M tel que le repere (a, T) est direct avec T une orientation du bord. on deplace par une rotation,

ou selon un chemin circulaire, vers un observateur b de N alors le repere (b, T') est direct si et seulement si $T' = -T$.

D'autre part, on voit que dans la carte de recollement, on a composé avec une inversion. Si M et N ont des structures localement conformément plates, par Kuiper, il existe pour chaque variété un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Mobius. En utilisant la carte de recollement, on obtient un atlas sur $M \# N$ formé d'applications de Mobius. Donc, sur la somme sonnexée on a une structure localement conformément plate. (ceci est dit dans la papier de Kulkarni).

12) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grâce aux fonctions de Morse. Par récurrence sur le nombre de points critiques.

1- On vérifie que sous certaines hypothèses d'orientabilité des bords et quand on a deux homeomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homeomorphisme entre les recollés.

2- On utilise une récurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note g_1, g_2 les applications de recollement, dans le Gramain, $g_1 = f, g_2 = f'$. Ici, dans le cas des recollements, on prend, $g_1 = id$ et $g_2 = id$, les recollés sont les ensembles de départ (en fait ils sont difféomorphes aux ensembles de départ et $f_* = id, f'_* = id$, on a inversion des orientations quand on recolle, et, $h_* = id, h'_* = id$, h et h' conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles A et A' , sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse C^∞ , donc ce sont des variétés compactes C^∞ , il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se plaçant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.

Pour l'orientabilité des bords, A et A' sont (homéomorphes implique difféomorphes en dimension 1) difféomorphes à des cercles et, à droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le difféomorphisme conserve l'inversion d'orientation, son Jacobien est positif. D'où, l'application k_0 conserve l'orientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un difféomorphisme global h et h' , par contre il y a une définition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orientation pour k_0).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant $p \leq q - 1$ points critiques avec un maximum et un minimum et $p - 2$ points critiques d'indice 1 est homeomorphe à \mathbb{T}_p . On peut commencer la récurrence pour $p = 0$, la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homeomorphes à des demi-disques et par recollement on a une sphere. A l'ordre $p = 1$, pour le Tore, c'est écrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-mêmes sont obtenus par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore. Ou bien si on commence la récurrence à partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homeomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-mêmes obtenus par recollement d'ensembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas (2) vers le haut (1)) avec l'application de recollement $g_1 = id, g_2 = id$, et on obtient le Tore, g_2 est la deuxième application de recollement). Dans le cas général, on sait qu'il existe une fonction de Morse u , on décompose en deux, la partie de u ayant $p - 1$ points critiques, on lui recolle un disque et par récurrence, elle est homeomorphe à \mathbb{T}_{p-1} et le reste possède 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par récurrence, homeomorphe au Tore, \mathbb{T}_1 . Donc, comme c'est écrit dans le Gramain, en revenant à u , il y a une partie homeomorphe à V_{p-1} et l'autre à V_1 et sur V_1 on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc, on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite, $Y - g_1(A)$ et $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$, B un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considérant la composée des deux homeomorphismes (c'est l'homeomorphisme $k_0 = h'og_1og_2^{-1}oh^{-1}$ du Gramain). Il reste à voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a un homeomorphisme entre les recollés, $S = (S - A) \# (S' - B) = (X - A) \# (Y - g_1(A)) = (X - A) \cup (Y - A)$, $g_1 = id$, et $V_{p-1} \# V_1$, ce qui est fait dans le cas orientable (A homeomorphe au cercle dans le Gramain).

On écrit $(X - A) \cup (Y - A)$ pour dire qu'on recolle X et Y via A . Les applications du Gramain, $f = g_1 = id, f' = g_2 = id$ et le recollé (pour la relation d'équivalence, $x \equiv f(x) = x, x \in A$,

$f_* = -id, f'_* = -id$, est diffeomorphes a l'ensemble de depart. On a $f_* = -id$ et $f'_* = -id$ car on inverse les orientations de depart quand on recolle $(+, h, A \rightarrow A'$, conservation de l'orientation, $f', A' \rightarrow f'(A')$, $-$ inversion de l'orientation, $h'^{-1}, f'(A') \rightarrow f(A)$, $+$, conservation de l'orientation, $f^{-1}, f(A) \rightarrow A$, $-$, inversion de l'orientation). Donc, on a, $h_* = id, f'_* = -id, (h'^{-1})_* = id$ et $(f^{-1})_* = -id$. Et on ecrit car $f = id, f' = id, f_* = id, f'_* = id$, pour dire qu'on envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation (meme si elle inversee).

On peut raisonner par les generateurs, si e_1 est generateur de $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$ et e_2 est generateur de $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$, alors, comme sur la partie de Y et Y' on inverse les orientations, on a $-e_1$ est generateur de $H_{1,A,Y}$ et $-e_2$ est generateur de $H_{1,A',Y'}$, comme $f = id$ alors, $f_*(e_1) = -e_1$. On ecrite, $f_* = id$ dans le sens qu'elle envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation. et on ecrit $f_* = -id$, pour dire que f_* inverse l'orientation de depart sur A .

On a la meme chose pour A' et f' .

Des le depart on a deux homeomorphismes h et h' , supposons pas exemple que $h_* = -id, h_*(e_1) = -e_2$, comme pour A' on est dans l'epsace euclidien, il suffit de composer avec une symetrie t pour avoir $t_*(e_2) = -e_2$ donc, hot conserve l'orientation sur le bord. $(hot)_*(e_1) = e_2$ et on fait la meme chose avec h' . Finalement, on a deux homomorphismes hot et $h'ot'$ ou h' (si h' conserve l'inversion de l'orientation); qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilise l'orientation definie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface S est homomorphe a la somme connexe de q Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connexe de Tore est une varieté differentiable et donc, cette orientation homologique est equivalente a l'orientation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci a chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans \mathbb{R}^3 , utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des varietés sans bord et des varietés bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et differentiables). L'equivalence entre orientation homologique et differentiable pour une varieté lisse est ecrite dans le livre de Bredon (geometry and topology). Remarquons qu'une varieté a bord W est orientable si et seulement si son interieur \dot{W} est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord ∂W et il y a equivalence aussi entre orientation homologique et differentiable.(il y a un isomorphisme entre $H_n(W, \partial W, Z)$ et $H_n(W, W - x, Z)$).

Concernant la structure differentiable sur le recollé de $X - A \cup_{f,A} Y - A$, dans Milnor (Somme connexe et structure differentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de $X - A$ et $Y - A$, sont diffeomorphes a des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure differentiable. Or, pour la somme connexe de deux varietés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant a ici, le recollé $X - A \cup_{f,A} Y - A$ est diffeomorphe a $X - A \cup Y - A$, on a deja une structure differentiable sur le recollé, via ce diffeomorphisme. (la projection $p : x \rightarrow [x]$ est un diffeomorphisme).

Quant a l'ecriture $\mathbb{T}_{q-1} \# \mathbb{T}_1$, c'est la somme connexe, comme on est dans \mathbb{R}^3 , somme connexe et recollement coincident.

Quand on a une application s qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variete M_1 compacte sans bord de dimension 1, $s_* = id$. Pour le voir, on a si l'orientation est inversee sur M_1 et $M_2 = s(M_1)$, cela veut dire que : -1 est generateur de $H_1(M_1, M_1 - x_0)$ et de $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$. Donc, $s_*(-1) = -1$, c'est a dire que $s_* = id$. Lorsque φ_1 inverse l'orientation alors $(\varphi_1)_* = -id$.

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que $M_1 - x_0$ est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

s_* est un isomorphisme de $H_1(M_1)$ vers $H_1(M_2)$, comme il conserve l'orientation $s_* = id$.

Pour le voir il suffit de raisonner sur les generateurs $s_*(e_1) = ke_2$ et $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$, donc, $kk' = 1$, comme ces des entiers $k = 1$ ou $k = -1$, comme s conserve l'orientation $k = 1$. On fait la meme chose pour φ_1 et on obtient $k = -1$.

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De $\pi_1(S_1)$ dans $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : [\gamma] \rightarrow [\tilde{\gamma}]$$

On applique cela aux applications du Gramain, $s = h'^{-1}oh$ (conserve l'orientation) et $\varphi_1 = \varphi$, $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$, ici, $f = id, f' = id$ et $M_1 = M_2 = A$, puis on raisonne en considérant $S_1 \times \{0\}$ au lieu de S_1 .

$$\begin{aligned} k &= \varphi^{-1}oso\varphi, \\ \pi(k)[\gamma] &= [\varphi^{-1}oso\varphi\sigma\gamma] = \\ &= \bar{h}^{-1}([\varphi^{-1}oso\varphi\sigma\gamma]) = \\ &= \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_*os_*o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) = \\ &= \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) = [\gamma], \end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que $\varphi_* = id$ si on se place sur X (on conserve l'orientation) ou $\varphi_* = -id$ si on se place de coté de Y (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer $[\gamma]$ par un generateur $e_1 = [\gamma_1]$ et raisonner sur les generateurs.
Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas ou $k(a) = a$, k fixe un point. Sinon, (k ne fixe pas a), on compose avec une rotation $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$, or en considérant $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$, $s \in [0, 1]$, on a une homotopie entre r et l'identité id , Donc, $r_* = id$ de $H_1(S_1) \rightarrow H_1(S_1)$.

Donc, $k'_* = id$, puis on utilise le meme groupe fondamental en a , $\pi_1(S_1, a)$ et l'application d'Hurwicz, comme precedemment pour prouver que $\pi(k') = id$.

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger k .

L'autre cas, Y rectangle et $g_1(A)$, deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur Y , celle-ci change quand on part de X et on lui recolle Y via A . (ici, $g_1 = f$ est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension ≤ 3 .

13) Pour l'inegalité de Kato : on a $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \in L^1_{loc}$ alors : $u \in W^{1,1}_{loc}$, pourquoi ?

Comme c'est local, on écrit dans une boule u en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et $n \geq 3$ par exemple, $n = 2$ c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec ∂P regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut derivier sous le signe \int pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists r \int_{\partial B_r} u(\sigma)d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour $\varphi \in D(B_{r/2})$:

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \text{termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int \int \left(\partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right)(-\Delta u)\varphi + \int \int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \quad a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

Ceci est valable pour u régulière. Soit ρ_n un mollifieur, alors :
Si $u \in L^1(B_r)$, alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour $x \in B_{r/2}$:

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \rightarrow u, \text{ dans } L_{loc}^1(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \rightarrow \Delta u, \text{ dans } L_{loc}^1(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec u , avec $\rho_n * u$, comme on a des bornes uniformes en L_{loc}^1 , alors,

$$\rho_n * u \in W_{loc}^{1,1}, \text{ et } \nabla(\rho_n * u) \rightarrow v \in L_{loc}^1,$$

Donc,

$$\int u \partial \varphi = \lim_n \int (\rho_n * u) \partial \varphi = - \lim_n \int \partial(\rho_n * u) \varphi \rightarrow - \int v \varphi,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

On a la même chose si on considère un problème variationnel $-\Delta u = f$, $f \in L_{loc}^1$ et $u \in L_{loc}^1$.

On a même mieux, $u \in W_{loc}^{1,q}$.

On peut retrouver ce résultat en se ramenant à une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un problème de Dirichlet.

Soit $f \in L^1$, $\exists f_j \rightarrow f$ dans L^1 avec $f_j \in C_c^\infty$, on résout :

$$-\Delta u_j = f_j, \text{ avec } u_j = 0, \text{ sur } \partial \Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|u_j\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q,$$

En passant à la limite en j , on a l'existence de $u_0 \in W_0^{1,q}$ tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \text{ et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le théorème de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,q},$$

On retrouve le théorème dans le livre de Dautray-Lions.

On fait la même chose avec le théorème 1 de Brezis-Merle, sauf que les relations ne sont pas locales.

On a :

$$-\Delta u = f \in L^1, \quad u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

On resout pour $f_j \rightarrow f$ dans L^1 . $f_j \in C_c^\infty(\Omega)$. (la regularité du bord est au moins C^2 pour pouvoir appliquer le theoreme de dualité de Stampacchia).

$$-\Delta u_j = f_j, u_j \in H_0^1(\Omega),$$

On a :

$$\|\nabla u_j\|_q \leq C_q, 1 \leq q < 2.$$

On passe a la limte en j .

On a :

$$-\Delta u_0 = f, u_0 \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Finalement :

$$-\Delta(u - u_0) = 0, u - u_0 \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit on utilise le principe du maximum dans $W_0^{1,1}$ pour avoir $u = u_0$ p.p.

Soit, on utilise le theoreme de regularité d'Agmon pour avoir $u - u_0$ reguliere et appliquer le principe du maximum usuel.

Pour, $u_j, f_j, |f_j|$ on applique le raisonnement de Brezis Merle (theoreme 1). Puis par le lemme de Fatou, l'inegalité de Brezis Merle est valide pour u_j et u_0 donc pour u . ($u = u_0$, p.p).

14) Sur la fonction distance au bord : c'est bien ecrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grace a la propriété de la sphere interieure, il existe un voisinage du bord assez petit tel que la fonction distance est C^k et est egale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des spheres le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit etre par exemple au moins C^2 .

Par des cartes, on a un segment, on peut faire rouler une sphere. On prend son image par l'application de carte, qui est suffisamment reguliere pour que le domaine d'arrivée contienne des ellipses, donc des cercles.

15) Pour le theoreme de Dualité de Stampacchia :

On part de l'equation :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec la condition de Dirichlet. ($\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$).

On a :

$$u_i \in W^{2,k} \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega}), u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On a :

$$\int_{\Omega} |\Delta u_i| dx \leq bC.$$

On considere un vecteur $f = (f_1, f_2) \in L^{q'}(\Omega)$ avec $q' > 2$. On utilise le Theoreme de Lax-Milgram dans les Hilbert, (voir Gilbarg-Trudinger), pour avoir une solution de $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'equation :

$$-\Delta z = \text{div}(f),$$

avec la propriété suivante (voir la preuve de l'inegalité de Harnack dans le Gilbarg-Trudinger) :

$$\|z\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{q'}.$$

On met u_i comme fonction test dans l'equation de z , on a :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nabla u_i dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u_i dx = - \int_{\Omega} z \Delta u_i dx \leq C'\|f\|_{q'},$$

On prend le supremum dans $L^{q'}$, et on a :

$$\|\nabla u_i\|_q \leq C_q, \forall 1 \leq q < 2.$$

Dans le probleme de Brezis-Merle, on a :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} = o(1),$$

c'est la convergence interieure dûe au travail de Brezis et Merle. Après, par l'inegalité de Hölder :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega - \Omega_\epsilon)} \leq |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q-1/r} \|\nabla(u_i - u)\|_{L^r} \leq C_r |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q-1/r} = o(1), \quad 1 \leq q < r < 2.$$

On obtient finalement :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_q = o(1).$$

16) Pourquoi dans le livre d'Aubin, il considere les solutions u pour un operateur du type :

$$a_{ij}(M)\partial_{ij}u + b_j(M)\partial_ju + c(M)u = f(M)?$$

Dans le livre d'Aubin $a_{ij}(M)$, $b_j(M)$ sont des champs de tenseurs, pourquoi tenseur ?

C'est lié au cartes et au changements par cartes et à la formulation variationnelle.

1) Dans le livre d'Hebey, il donne la definition d'un probleme posé de maniere variationnelle :

Pour les variétés :

$$\int_M a_{ij}\partial u\partial\varphi dV_g + b_ju\partial\varphi dV_g + cu\varphi dV_g = \int f\varphi dV_g$$

a) Il faut que le probleme soit posé sur une variété de maniere globale, donc independemment des cartes. C pour cela que dans le livre d'Hebey, il dit pour toute carte h .

b) Si on revient à un probleme posé sur un ouvert de \mathbb{R}^n , il y a deja une carte disponible, la carte euclidienne, (Ω, id) . Donc pour \mathbb{R}^n , il suffit que le probleme soit posé en coordonnées cartésiennes.

Et apres, par la formule de changement de variable, on se ramene à toute carte de l'ouvert. Notons que la notation dV_g l'explique bien car par un changement de variable, on retrouve la Jacobien, qui donne l'element de volume pour la metrique euclidienne.

Mainteneant quand on fait le changement de variables, il faut que le probleme soit invariant, c'est à dire que les coefficients ne changent par or ceci est possible si on les suppose comme champs de tenseurs.

on ecrit par exemple :

$$a_{ij}(M) = a_{ij}[x(M)] = a_{kl}[y(M)]\partial_x y_i^k \partial_x y_j^l,$$

dans le changement de variables, cette loi est celle des tenseurs.

C'est pour cela qu'on suppose les coefficients, des champs de tenseurs. Pour que par changement de variables, ils soit invariants et ceci est possible si ils obeissent à la loi des tenseurs.

Et pour les ouverts de \mathbb{R}^n . Il suffit que le probleme soit posé en coordonnées cartésiennes. Alors on la pour toute carte.

Une forme bilineaire est un tenseur. Un champ de formes bilineaires est un champ de tenseurs. Un champ de vecteurs est un champ de tenseurs.

17) Pour quoi, quand on veut appliquer le principe du maximum sur une variété, on a besoin d'un operateur global :

a) C'est parce qu'on a considéré une variété, qui est cosstituée de cartes. Il ne faut pas que ca depende de la carte.

Par exemple, si on veut appliquer la principe du maximum en P ,

On ecrit : $Lu(P) = L(u\circ\varphi^{-1}(x_1, x_2))$, on voit que dans l'écriture meme, il ne faut pas que ca depende de la carte et de l'application de carte φ .

b) Par recouvrement, dans l'intersection d'ouvert de carte, on ecrit :

$$Lu(P) = L[u\circ\varphi^{-1}] = L[u\circ\psi^{-1}]$$

dans cette écriture, on a deux cartes, et ile ne faut pas que ca depende des deux cartes, pour cela il faut que l'operateur soit global.

c) On a la meme chose, si on raisonne que la derivée normale et le principe du maximum de Hopf.

18) Sur les applications conformes du bord en dimension 2.

On a parlé d'application conforme en dimension 2 :

Pourquoi la définition d'un domaine analytique permet d'avoir une carte conforme locale du bord ?

a)-Sur le disque unité, on a une transformation conforme directe du disque sur le demi-plan de Poincaré. Il n'y a pas besoin de définir l'application ψ (voir ci-dessous).

b)-L'application ψ , permet de définir des coordonnées qui permettent d'utiliser une application conforme.

Ce qui suit est la traduction de ce qui a été écrit dans les preprints sur arXiv. Pour définir un carte "conforme" γ , en dimension 2.

1-Il suffit de prouver que $\gamma_1((-\epsilon, \epsilon)) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) \cap \{|abscisse| < \epsilon\}$, pour $\epsilon > 0$ assez petit. Avec $\tilde{\gamma}_1$ l'extension holomorphe de $\gamma_1(t) = t + i\varphi(t)$.

Pour voir ça, on raisonne par l'absurde. On a pour $z_\epsilon \in B_\epsilon$, $\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon) = (t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))$ avec $|t_\epsilon| \geq \epsilon$. Comme $\tilde{\gamma}_1$ est injective sur une boule fixés au départ par le theoreme d'inversion locale, B_1 et $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 = t + i\varphi(t)$ sur l'axe réel, on a nécessairement $|t_\epsilon| \geq 1$. Mais par continuité $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| \rightarrow 0$ parce que $z_\epsilon \rightarrow 0$. Et on utilise le fait que $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| = |(t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))| \geq |t_\epsilon| \geq 1$, pour avoir une contradiction.) (Cela veut dire que pour un rayon assez petit quand le graphe sort de la boule, il n'y retourne plus). (Ce fait implique, en raisonnant avec des chemins, quand un a chemin qui coupe $\partial\Omega$ in $\tilde{\gamma}_1(B_\epsilon)$ en un point ce point a pour abscisse $|abscisse| < \epsilon$. Encore, une fois, ce fait (par un raisonnement par l'absurde avec le fait que $\partial\tilde{\Omega} = \partial\Omega$, il faut raisonner avec des chemins), implique que l'image de la partie superieure est entierement d'un coté de la courbe et l'image de l'autre est de l'autre coté de la courbe.

2- Posons : $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M \in \Omega$ telle que : $\overrightarrow{x_0M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$ avec (i'_1, j'_1) est une base telle que $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$. Et, $\varphi = id : (x_1, x_2) \rightarrow M$ telle que : $\overrightarrow{OM} = x_1 i_1 + x_2 i_2$ la base canonique (i_1, j_1) . Alors on a deux cartes de Ω , φ et ψ et les affixes $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z_M = x_1 + ix_2$ sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

On a :

$$\partial_{\lambda_1} = \cos \theta \partial_{x_1} + \sin \theta \partial_{x_2},$$

$$\partial_{\lambda_2} = -\sin \theta \partial_{x_1} + \cos \theta \partial_{x_2},$$

Donc, la métrique dans la carte ψ ou en coordonnées (λ_1, λ_2) est : $g_{ij}^\lambda = \delta_{ij}$ et le Laplacien dans les deux cartes (coordonnées), ψ et φ est le Laplacien usuel $\partial_{\lambda_1 \lambda_1} + \partial_{\lambda_2 \lambda_2}$.

On écrit :

$$\Delta u(M) = \Delta_\lambda(u \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2))$$

Puis on applique l'application conforme $\tilde{\gamma}_1$ qui envoie l'affixe T_M, M dans un voisinage de $x_0 \in \partial\Omega$ vers B_ϵ et envoie $T_M, M \in \partial\Omega$ sur l'axe réel $(-\epsilon, \epsilon)$ et l'autre partie vers l'autre partie de Ω et $\bar{\Omega}^c$.

On a : $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M$ et $\tilde{\gamma}_1 : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (\mu_1, \mu_2)$. L'application considérée est : $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$. C'est bien une carte. Pour le voir :

La premiere carte (carte usuelle) est : $\psi \circ g^{-1}$ avec g est l'application $g : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$ et φ_0 l'application qui permet de définir $\partial\Omega$ comme un graphe.

L'application de changement de carte est :

$$g \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$$

elle est reguliere d'un voisinage de 0 vers un autre voisinage de 0 et envoie la partie superieure du premier voisinage vers la partie superieure de l'autre voisinage (ainsi que les parties inferieures).

On voit bien que $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ est une carte avec la propriété que $\tilde{\gamma}_1$ est conforme.

(l'application $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ est aussi la composée d'une rotation (donc conforme) et de $\tilde{\gamma}_1^{-1}$ qui est conforme, si on se placait en coordonnées cartésiennes au départ. Mais, il faut voir que la carte

ψ definit des coordonnées qui permettent la construction d'une application conforme. On n'a pas besoin de cela pour le disque unité, on a directement l'application du demi-plan de Poincaré).

Remarque : ψ et $\varphi = id$ sont des cartes de Ω et ψ est "presque" une carte de $\partial\Omega$. Mais $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ et $\psi \circ g^{-1}$ sont des cartes du bord.

Le probleme elliptique peut etre vu de deux manieres : donc, si on considere, au depart, les coordonnées cartésiennes, on a une transformation conforme. Si, on considere le probleme posé sur une variété a bord, on a une carte analytique.

3- "Caractérisation des domaines C^k " : On peut dire que la definition d'un domaine $C^k, k \geq 1$ est équivalente à la definition d'une sous-variété + la condition : $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$ or $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega$.

19) Concernant l'élément de volume et la mesure de Hausdorff sur le bord :

Avec le point 18), la carte usuelle du bord est : $h = \psi \circ g^{-1}$ avec,

$\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M \in \Omega$ telle que : $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$ avec (i'_1, j'_1) est une base telle que $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$. Et, $\varphi = id : (x_1, x_2) \rightarrow M$ telle que : $\overrightarrow{O M} = x_1 i_1 + x_2 i_2$ la base canonique (i_1, j_1) . Alors on a deux cartes de Ω , φ et ψ et les affixes $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z_M = x_1 + ix_2$ sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

et,

g est l'application $g : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$ et φ_0 l'application qui permet de definir $\partial\Omega$ comme un graphe.

La metrique sur le bord $\partial\Omega$ s'écrit localement :

$$h^*(i^*(\delta)) = \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda,$$

avec δ la metrique euclidienne de \mathbb{R}^2 . (la metrique sur le bord est $i^*(\delta)$ avec $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow x$).

On l'a explicitement, en calculant (le determinant contient un terme car on est en dimension 1, c la meme chose en dimension superieure), $h^*(i^*(\delta)) = \delta(dh(\partial_\lambda), dh(\partial_\lambda)) = [1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2]$.

Avec $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, x \rightarrow x$ l'inclusion.

Et considerant l'application Lipschitzienne (c'est aussi l'application de carte, locale, du bord $\partial\Omega$ qui permet aussi de calculer g_{11} , ce qu'on a fait precedemment) :

$$\lambda \rightarrow (\lambda, \varphi_0(\lambda)) = h(\lambda, 0),$$

on a par la formule de l'aire, l'égalité entre la mesure de Hausdorff et le Jacobien (element d'aire) :

$$\int_{[a,b]} \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda = \int_{h([a,b],0) \subset \partial\Omega} dH_1,$$

Finalement, on a l'égalité suivante :

$$d\sigma = \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda = dH_1|_{\partial\Omega}.$$

avec cette remarque, on voit par exemple que $H_1(\partial\Omega) < +\infty$, dans le cas $\partial\Omega$ compact.

20) Quand y a il une relation entre $W^{1,\infty}$ et $C^{0,1}(\bar{\Omega}) = Lipschitz(\bar{\Omega})$.

a) Dans le cas d'un convexe ou une boule, c'est écrit dans le livre de Brezis quand il approxime L^∞ par L^p , dans le critere pour qu'une fonction soit $W^{1,p}$.

b) Quand l'ouvert est Lipschitzien ou au moins C^1 , c'est un exercice dans livre d'Otared Kavian. On utilise l'operateur de prolongement (Notez que la constante de prolongement ne depend pas de p , on peut utiliser le proceder de Brezis $p \rightarrow +\infty$), puis on se ramene á un convexe, une boule, puis on revient aux fonctions de depart.

Dans les cas precedents, il y a egalité entre les deux ensembles.

21) pourquoi on écrit dans la derivation (ici $\nabla = \nabla_X$ pour un vecteur X) :

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = \langle \nabla a|b \rangle + \langle a|\nabla b \rangle$$

ceci est du à (g est la metrique et C la contraction) :

$$\langle a|b \rangle = C_1^3 C_2^4 (g \otimes a \otimes b)$$

La derivée covariante commute avec la contraction et $\nabla g = 0$, car c la connexion de Levi-civita :

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = C_1^3 C_2^4 (\nabla g \otimes a \otimes b + g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b)$$

Donc,

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = C_1^3 C_2^4 (g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b) = \langle \nabla a|b \rangle + \langle a|\nabla b \rangle.$$

22) Sur les coordonnées geodesiques polaires : elles sont definies a partir de la carte exponentielle. Il existe un voisinage du point tel que pour $y \in B(x, \epsilon)$, $z \rightarrow \exp_y(z)$ est un diffeomorphisme. On a alors une carte. On definit les coordonnees geodesiques polaires. On s'assure que (lemme de Gauss) :

a)

$$\frac{d}{dt}(\langle \nabla_t|\nabla_t \rangle) = \nabla_t(\langle \nabla_t|\nabla_t \rangle) = 2 \langle \nabla_t(\nabla_t)|\nabla_t \rangle = 0$$

Car cest une geodesique $\nabla_t(\nabla_t) = 0$. Donc, $\langle \nabla_t|\nabla_t \rangle \equiv cte = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla_t|\nabla_t \rangle = 1$, car la carte exponentielle est normale en y .

$$\nabla_t(\langle \nabla_t|\nabla_\theta \rangle) = \frac{1}{2} \nabla_\theta(\langle \nabla_t|\nabla_t \rangle) = \frac{1}{2} \nabla_\theta(1) = 0,$$

Ici, on utilise le fait que la connexion est sans torsion pour permuter la derivation en t et angulaire.

Donc,

$$\langle \nabla_t|\nabla_\theta \rangle \equiv cte = \lim_{t \rightarrow 0}(\langle \nabla_t|\nabla_\theta \rangle) = 0$$

C'est le lemme de Gauss.

On pouvait ecrire $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)$ avec $\partial_i, \partial_j \in \{\partial_t, \partial_\theta\}$.

b) Les geodesiques sont minimisantes, c bien ecrit dans le livre d'Hebey et Gallot-Hulin-Lafontaine, remarquons, comme c ecrit dans le Do Carmo. Pour calculer la longueur d'un chemin passant par l'origine, on prend \int_ϵ^1 , puis on fait tendre ϵ vers 0. Car les coordonnees geodesiques polaires sont definit en dehors de 0, origine, puis on fait tendre le rayon r vers 0.

c) On voit comme c dit dans le Hebey, que les geodesiques sont minimisantes, l'image de boules ouvertes sont des boules ouvertes, de boules fermees, sont des boules fermees, limage de spheres, sont des spheres.

Soit, \tilde{z} l'application de \mathbb{S}_{n-1} vers \mathbb{S}_{n-1}^r définie par $\theta \rightarrow r\theta$.

Par définition, pour h une fonction définie au voisinage de x :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x \circ z \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x)}{\partial z_k} \times r \frac{\partial(\psi^{-1})^k}{\partial \theta_j}.$$

avec $\varphi_0 = \exp_x \circ z \circ \psi^{-1}$.

Ce qu'on peut ecrire :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \exp_x)}{\partial z_k} \times r \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta_j}.$$

et,

$$\partial_{\theta^i, x} = r b_i^k(\theta) \partial_{z^k, x}.$$

On a donc, pour tout $x \in B(x_0, \epsilon_0)$, $[B(x, \epsilon_0), \exp_x^{-1}]$ est une carte normale en x . Pour tout $x \in B(x_0, \epsilon_0)$:

$$g_{x, ij}(z) = g(z)(\partial_{z^i, x}, \partial_{z^j, x}),$$

où $\partial_{z^i, x}$ est le champ de vecteur locale canonique lié à la carte exponentielle.

On note, $a_i^k(z, x) = \frac{(\varphi \circ \exp_x)^k}{\partial z^i}[\exp_x^{-1}(z)]$, alors, $\partial_{z^i, x} = a_i^k(z, x)\partial_{u^k, \varphi}$,

avec, $\partial_{u^k, \varphi}$, le champ de vecteur canonique relatif à la carte (Ω, φ) , ce dernier ne dépend pas du point x , contrairement à celui de la carte exponentielle en x . Quant aux fonctions a_i^k elles sont C^∞ de z et x . On obtient,

$$g_{x, ij}(z) = g(z)[a_i^k(z, x)\partial_{u^k, \varphi}; a_j^l(z, x)\partial_{u^l, \varphi}] = a_i^k(z, x)a_j^l(z, x)g_{kl}(z),$$

où les g_{kl} sont les composantes de g dans la carte (Ω, φ) .

On a, $z = \exp_x(y)$, $y \in B(0, \epsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$ et $y = r\theta$ en coordonnées polaires, ainsi, la fonction $(x, r, \theta) \rightarrow g_{x, ij}[\exp_x(r\theta)]$ est C^∞ des variables x , r et θ .

D'autre part, par définition, $g_{ij}^k(r\theta) = g_{[\exp_x(r\theta)]}(\partial_{\theta^i, x}, \partial_{\theta^j, x})$, (champs de vecteurs canoniques).

En utilisant le même type de calcul que précédemment, on a,

$$\partial_{\theta^i, x} = rb_i^k(\theta)\partial_{z^k, x},$$

avec, b_i^j des fonction très régulières. Donc,

$$g_{ij}^k(r, \theta) = r^2 g[\exp_x(r\theta)](b_i^k \partial_{z^k, x}, b_j^l \partial_{z^l, x}),$$

d'où,

$$g_{ij}^k(r, \theta) = r^2 b_i^k(\theta)b_j^l(\theta)g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)].$$

Donc, l'application, $\tilde{g}_{ij}^k : (x, r, \theta) \rightarrow b_i^k b_j^l g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)]$ est C^∞ des trois variables x , r et θ .
On a,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = b_i^k(\theta)b_j^l(\theta)c^m(\theta)\partial_m g_{x, kl}(x) = 0,$$

car, la carte exponentielle est normale en x et les $g_{x, kl}$ sont les composantes de g dans cette même carte. On a aussi,

$$\partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, r, \theta) = \tilde{b}_i^k(\theta)\tilde{b}_j^l(\theta)g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)] + r\tilde{b}_i^k(\theta)\tilde{b}_j^l(\theta)\tilde{c}_m^s(\theta)\partial_s g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)],$$

En redérivant en r , on obtient,

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, r, \theta) &= u_{ijmr}^{klq}(\theta)\partial_q g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)] + v_{ijmr}^{kl}(\theta)w^s(t)\partial_s g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)] + \\ &+ rh_{ijrm}^{klst}(\theta)\partial_{st} g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k.$$

Ainsi, on obtient :

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (*)$$

On a la même chose en considérant le déterminant :

Comme, $\sqrt{|\tilde{g}^k|} = \alpha^k(\theta)\sqrt{[\det(g_{x, ij})]}$, on en déduit,

$$\partial_r (\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}) = \partial_r [\log(\sqrt{[\det(g_{x, ij})])}]$$

Par définition du déterminant et en développant par rapport al ligne 1 par exemple, on obtient,

$$\det[g_{x, ij}][\exp_x(r\theta)] = \Sigma \Pi g_{x, kl}[\exp_x(r\theta)],$$

d'où,

$$\partial_r \det[g_{x, ij}](x) = \Sigma \Pi [g_{x, kl}(x)]a^s(\theta)\partial_s g_{x, mn}(x) = 0,$$

Car, la carte exponentielle est normale en x .

Finalement,

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k.$$

En utilisant le même raisonnement que celui qu'on a utilisé pour calculer, $\partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta)$, on prouve que,

$$\partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0.$$

En conclusion,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (**)$$

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (***)$$

$$\partial_r \partial_{\theta^m} \left[\frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right] (x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \partial_{\theta^{m'}} \left[\frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right] (x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (***)$$

L'ouvert U^k est choisit de telle manière qu'en le réduisant un peu, il reste un ouvert de carte.

On utilise alors, l'uniforme continuité des dérivées successives pour obtenir les résultats de la proposition 1.

Remarque :

$\partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}]$ qui est une fonction locale de θ , est la restriction d'une fonction globale, définie sur toute la sphère \mathbb{S}^{n-1} à savoir $\partial_r [\log \sqrt{\det(g_{x,ij})}]$. On notera, $J(x, r, \theta) = \sqrt{\det(g_{x,ij})}$.

23) Le Laplacien en polaires :

Ecrivons le laplacien dans $]0, \epsilon_1[\times U^k$,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}] \partial_r + \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

On a,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r \log J(x, r, \theta) \partial_r + \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

Le laplacien s'écrit (décomposition radiale et angulaire),

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r - \Delta_{S_r(x)},$$

où $\Delta_{S_r(x)}$ est le laplacien sur la sphère $S_r(x)$.

$\Delta_{S_r(x)}$, s'écrit localement,

$$-\Delta_{S_r(x)} = \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

On conclut que l'opérateur de droite en θ , dans la première expression du laplacien, n'est que l'écriture locale d'un opérateur global.

On pose, $L_\theta(x, r)(\dots) = r^2 \Delta_{S_r(x)}(\dots)[\exp_x(r\theta)]$.

L'opérateur $L_\theta(x, r)$ est un opérateur définie sur les fonctions $C^2(\mathbb{S}_{n-1})$ de manière globale (il ne dépend pas de la carte choisie sur \mathbb{S}_{n-1} et vaut localement,

$$L_\theta(x, r) = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} [\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}].$$

De plus cet opérateur est elliptique, on écrit alors,

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [J(x, r, \theta)] \partial_r - \frac{1}{r^2} L_\theta(x, r).$$

Si, maintenant, u est une fonction définie sur M , alors, $\bar{u}(r, \theta) = u \circ \exp_x(r\theta)$ est la fonction qui lui correspond en coordonnées polaires centrées en x .

$$-\Delta u = \partial_{rr} \bar{u} + \frac{n-1}{r} \partial_r \bar{u} + \partial_r [J(x, r, \theta)] \partial_r \bar{u} - \Delta_{S_r(x)}(u|_{S_r(x)})[\exp_x(r\theta)],$$

$$r^2 \Delta_{S_r(x)}(u|_{S_r(x)})[\exp_x(r\theta)] = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} \left[\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j} [u \circ \exp_x(r\theta)] \right] = L_\theta(x, r) \bar{u}.$$

Ainsi,

$$-\Delta u = \partial_{rr} \bar{u} + \frac{n-1}{r} \partial_r \bar{u} + \partial_r [J(x, r, \theta)] \partial_r \bar{u} - \frac{1}{r^2} L_\theta(x, r) \bar{u}.$$

D'autre part, il est clair qu'en se plaçant dans la carte exponentielle, on transporte la métrique dans l'espace euclidien. Puis, en considérant les coordonnées géodésiques polaires, on voit que la métrique se décompose suivant les champs de vecteurs radial et angulaires. Comme l'espace se décompose suivant la partie radiale et angulaire sur la sphère, il est clair qu'en considérant les champs de vecteur $\partial_r, \partial_{\theta^j}$, on retrouve localement le laplacien radial et angulaire, qui est un laplacien global par la carte exponentielle. On retrouve par l'intermédiaire de la carte exponentielle un laplacien global qu'on décompose en coordonnées géodésiques polaires en partie radiale et angulaire par le lemme de Gauss.

L'opérateur $L_\theta(x, r)$ est un laplacien sur \mathbb{S}_{n-1} pour une certaine métrique qui dépend du paramètre r .

On a, $\Delta_{S_r(x)} = \Delta_{i_{x,r}^*(g)}$ où, $i_{x,r}$ est l'application identité de $S_r(x)$ dans M et $i_{x,r}^*(g) = \tilde{g}$ est la métrique induite sur la sous-variété $S_r(x)$ de M .

Comme \exp_x induit un difféomorphisme de $S_r(x)$ vers \mathbb{S}_{n-1}^r , on a :

$$\Delta_{S_r(x)} u|_{S_r(x)} = \Delta_{i_{x,r}^*(g)} u|_{S_r(x)} = \Delta_{\tilde{g}} u|_{S_r(x)} = \Delta_{\exp_x^*(\tilde{g}), \mathbb{S}_{n-1}^r} u \circ \exp_x(v),$$

Soit, \tilde{z} l'application de \mathbb{S}_{n-1} vers \mathbb{S}_{n-1}^r définie par $\theta \rightarrow r\theta$. Alors,

$$\Delta_{\exp_x^*(\tilde{g})} u \circ \exp_x(v) = \Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]} u \circ \exp_x(r\theta),$$

Pour le choix de la carte (ψ, U^k) , sur \mathbb{S}_{n-1} , la carte locale en coordonnées polaires pour le point x est, $(\varphi_0,]0, \epsilon_0[\times U^k)$, où $\varphi_0 = \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1}$. Les g_{jl}^k sont par définition :

$$g_{jl}^k(r, \theta) = g_{\exp_x(r\theta)}(\partial_{j, \varphi_0}, \partial_{l, \varphi_0}),$$

avec, $\partial_{j, \varphi_0}, \partial_{l, \varphi_0}$ les champs de vecteurs canoniques correspondant à la carte $(\varphi_0,]0, \epsilon_0[\times U^k)$.

Par définition, pour h une fonction définie au voisinage de x :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j},$$

Rappelons, qu'on écrit, $\psi(\theta) = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{n-1})$ et $\theta_0 = r$ (dérivations angulaires et radiale).

Si, on s'occupe des composantes angulaires, c'est à dire les champs de vecteurs, ∂_{j, φ_0} avec $1 \leq j \leq n-1, j \in \mathbb{N}$, alors,

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \bar{\theta}_j},$$

$$\frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ i_{x,r} \circ \varphi_0)}{\partial \bar{\theta}_j},$$

Donc, si on note $\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l$ les champs de vecteurs canoniques de la sphère par rapport à la carte (ψ, U^k) , on obtient, en notant d désigne la différentielle,

$$\partial_{j, \varphi_0} = d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_j),$$

Donc,

$$g_{jl}^k(r, \theta) = g_{\exp_x(r\theta)}[d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_j), d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_l)],$$

d'où, en utilisant la définition du pull-back,

$$g_{jl}^k(r, \theta) = \tilde{z}^*[\exp_x^*[i_{x,r}^*(g)]](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l) = \tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l),$$

le dernier terme à droite dans l'expression précédente, n'est que la composante j, l , de la métrique $\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]$ définie sur la sphère unité \mathbb{S}_{n-1} .

Finalement, on peut comparer les expressions locales et globales,

$$-\Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})], \mathbb{S}_{n-1}} u \circ \exp_x(r\theta) = \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} [\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j} u \circ \exp_x(r\psi^{-1})],$$

Maintenant, si on prend la nouvelle métrique sur \mathbb{S}_{n-1} définie par,

$$g_{x,r, \mathbb{S}_{n-1}} = r^{-2} \tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})],$$

cette métrique est bien définie et de plus,

$$g_{x,r, \mathbb{S}_{n-1}}{}_{jl} = r^{-2} g_{jl}^k = \tilde{g}_{jl}^k,$$

Nos raisonnements futurs se feront avec $r > 0$. On obtient,

$$\Delta_{g_{x,r, \mathbb{S}_{n-1}}} = r^2 \Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})], \mathbb{S}_{n-1}} = L_\theta(x, r).$$

24) Sur les fonctions Green :

Le monograph de Druet-Hebey-Robert est assez clair et précis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la decomposition de cette fonction est de classe C^1 . C'est essentiellement du au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une recurrence pour prouver que les termes de la decomposition sont Sobolev et continues en dehors de la diagonale. (Ou bien comme dans le monograph de Druet-Hebey-Robert, on fait la difference des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est écrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara, pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des derivees directionnelles).

Les fonctions qu'on considere sont continues en dehors d'un ensemble de mesure nulle (un point ou la diagonale). Elles sont mesurables. Elles sont integrables par les theoremes de comparaisons.

Soit (\bar{W}, g) une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note (M, g) .

Soit H la fonction definie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne depend pas de la fonction rayon d'injectivité dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle depend (à gauche en P) du rayon d'injectivité dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur W avec $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$, on peut alors la prolonger par 0 sur ∂W . Alors $\delta(P)$ est continue sur \bar{W} .

On pose :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q), \quad \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_W \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P, Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par recurrence les Γ_i sont continues en dehors de la diagonale et pour P ou Q proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le theoreme de la convergence dominee de Lebesgue, on prouve qu'elles sont $W^{1, \infty}$ en dehors de la diagonale en Q car elles sont Sobolev est leur derivees bornees. La fonction $d(P, Q) = d_P(Q)$ est reguliere en Q en dehors de P et en fixant Q elle est Lipschitzienne en P , on alors le fait que $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d_R(Q)$ est continue en dehors de la diagonale et L_{loc}^∞ . Donc, par le theoreme de convergence dominee (enlever de petites boules) $\Gamma_i * \partial_Q \Gamma_1$ et $\Gamma_i * \partial_Q H$ sont C^0 en

dehors de la diagonale. Donc, les Γ_i et $\Gamma_i * H$ sont C^1 en dehors de la diagonale. (Le point essentiel est la fonction distance). (Concernant la fonction distance, $(R_i, Q) \rightarrow d(R_i, Q) = d(R_i, \exp_{R_i}(r\theta))$, $Q = \exp_{R_i}(r\theta)$, $\epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3$, $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$ et la carte de reference est $[B(R_0, \delta(R_0)/3), \exp_{R_0}]$ avec $R_i \rightarrow R_0$. On voit alors qu'en coordonnes geodesiques polaires centrees en R_i un calcul de $\Delta_{g,Q}d(R_i, Q) \in L^\infty$ et $d(R_i, \cdot) \rightarrow d(R_0, \cdot)$ et par les estimations elliptiques on a $\partial_Q d(R_i, Q) \rightarrow \partial_Q d(R_0, Q)$ pour $d(R_i, Q) \geq \epsilon_0 > 0$.)

Dans le cas où $W = M$ sans bord :

D'apres sa formule explicite H est C^1 en dehors de la diagonale. Elle est $W^{1,1+\epsilon}$ de chaque variable pour un $\epsilon > 0$ assez petit, par recurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli :

$$\partial_P \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \partial_P \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR,$$

et,

$$\partial_Q \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \Gamma_i(P, R) \partial_Q \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Pour une varieté avec bord, on ne peut pas derivier par rapport P , car l'expression de Γ_i et en particulier de Γ_1 contient δ_P qu'on sait seulement continue et pas forcement differentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions Γ_i sont continues en P en dehors de la diagonales et $L^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ seulement, mais ceci suffit pour prouver la symetrie par le theoreme d'Agmon)

On a aussi, les estimees de Giraud. Ainsi de proche en proche, les Γ_i deviennent de plus en plus regulieres. on utilise le theoreme de Giraud pour prouver que $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$ avec $\lambda + 2 > n$ (donc $\geq n + 1$ car λ est entier puisqu'on derive les Γ_i). (Si $\lambda > n - 1$ ($\lambda \geq n$) c'est fini (on regarde Γ_{k-1}), si $\lambda = n - 1$ alors : $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$ et $\partial_P \Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$ et $\partial_Q \Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$ qui est en log par Giraud et donc $\partial_P \Gamma_{k+1}$ et $\partial_Q \Gamma_{k+1}$ sont $C^0(M \times M)$ par Giraud et donc Γ_{k+1} est $C^1(M \times M)$. (Utiliser le produit de convolution, car Γ_{k+1} et sa derivée Sobolev, est continue pour ecrire qu'elle est $\int \partial_P$, l'integrale d'une fonction continue donc C^1 , il a convergence uniforme de la convolution, car la fonction et son Sobolev sont continues). Dans le cas avec bord, Γ_k continue implique que Γ_{k+1} est $W^{1,\infty}$ en Q . (On a mieux C^1 en Q car la fonction $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d(R, Q)$ est C^0 en dehors de la diagonale de W et H est a support compact (elle s'annule avant le bord) et donc $(\Gamma_k * \partial_Q H)$ est C^0 en dehors de la diagonale de \bar{W})).

Dans le cas d'un operateur $-L = -\Delta + h$, la regularite de Γ_{k+1} depend de celle de h . Si par exemple h est C^1 alors comme precedemment Γ_{k+1} est C^1 de P et Q . Bien sur le Γ_1 change :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q) + h(Q)H(P, Q).$$

Remarque : a) sur la borne inferieure de la fonction de Green G_ϵ de $-\Delta + \epsilon = -\nabla^i(\nabla_i) + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

1) On a $G_\epsilon \geq 0$ donc par la propriété de la borne inferieure $m_\epsilon = \inf_{M \times M} G_\epsilon$ existe.

2) Par definition $m_\epsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} G_\epsilon(x_\delta, y_\delta)$. Si on suppose que $d(x_\delta, y_\delta) \rightarrow 0$, par la propriété du monograph de Druet-Hebey-Robert, $m_\epsilon = +\infty$, ceci n'est pas possible et Comme G_ϵ est continue en dehors de la diagonale. $m_\epsilon = G_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon)$ avec $x_\epsilon \neq y_\epsilon$.

Si on met un indice , i , alors on peut supposer que, $G_i = G_{\epsilon_i}$:

$$\inf_{M \times M} G_i = m_i = G_i(x_i, y_i), \quad x_i \neq y_i,$$

Après, on peut raisonner sur la borne inferieure globale sur tout $M \times M$, au lieu de prendre l'inf sur M en x puis en y .

b) sur les fonctions de Green des variétés à bord. on remarque que par exemple que pour les varietes à bord, la parametrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les theoremes d'Agmon et de regularité dans la construction complete de la fonction de Green dans le cas des varietes a bord, voir le monograph de F.Robert.

25) Sur la formule de Gauss-Bonnet :

C'est bien ecrit dans le livre de J.Lafontaine, edition 2010.

1) relation entre l'indice d'un champ de vecteurs et la courbure de Gauss.

2) relation entre indice d'un champ de vecteur, fonction de Morse et caractéristique d'Euler-Poincaré.

On a une surface riemannienne compacte sans bord (M, g) .

On part d'un champ de vecteur X ayant des zéros. On considère le normalisé $X_1 = X/||X||$, il n'est pas défini aux zéros de X . Puisqu'il y a produit scalaire, on considère X_2 son orthogonale de sorte qu'on ait un repère orthonormé.

(X_1, X_2) est un repère mobile ou "moving-frame". On a une connexion, donc on a de nouveaux symboles de Christoffel et une connexion forme ω . de sorte que $d\omega = \Omega$ la courbure. celle-ci n'est pas définie aux zéros de X , puisqu'on considère X_1 et on divise par $||X||$.

(Comme on l'a dit pour la surface $K3$, on a une connexion \Rightarrow symboles de Christoffel \Rightarrow connexion forme (par dualité). Puis on dérive $d\omega$ on retrouve la courbure ou forme volume par dualité. C'est bien écrit dans le livre de J. Lafontaine quand il considère $\nabla_{X_i}(X_j)$. Dans certains livres on note $\omega = \omega_1^2$.)

Mais au voisinage des zéros on a une carte (canonique si on veut, normalisé) et le passage des champs issus de cette carte notés (Z_1, Z_2) à (X_1, X_2) se fait via un champ de rotations $R = e^{i\varphi}$ (plus précisément de Z_1 à X_1 , on voit bien que $X_1 = e^{i\varphi}Z_1$ se contracte vers un vecteur du type $e_1 \times e^{i\varphi}$ car Z_1 est défini sur un voisinage de la singularité et qu'on peut le contracter en un vecteur fixe). (On voit ici que R est homotope à X_1). On note ω_0 la connexion forme pour ce repère mobile ou "moving-frame" (Z_1, Z_2) . Alors on a la relation :

$$\omega = \omega_0 - d\varphi.$$

Avec, ω_0 définie au voisinage de la singularité contrairement à ω . (on peut passer à la limite dans la formule de Stokes, voir ci-dessous).

La rotation R est homotope au champ X_1 donc : on a le même degré topologique.

$$\deg(R) = \deg(X_1).$$

Or,

$$\deg(R) = \deg(\text{rotation}) = \int d\varphi,$$

et par définition,

$$\deg(X_1) = \text{indice}(X).$$

(Pour une fonction de Morse f , on considèrera $X = \nabla f$ et l'indice se calcule explicitement dans une carte particulière, car il ne dépend pas de la carte).

Maintenant la formule de Stokes donne, c'est bien écrit dans le Lafontaine :

$$\int \Omega = \int d\omega = \int \omega \rightarrow \int d\varphi = \text{indice}(X).$$

Ceci pour la relation entre courbure et indice de champs de vecteurs. (c'est lié à la connexion forme, qui induit la courbure et qui est produite par le repère mobile issu de X).

Maintenant un théorème, voir le Gramain ou Hirsch (Differential Topology), dit que sur une surface compacte, il y a une fonction de Morse f . On applique, ce qui précède à ∇f . Ceci revient à calculer un nombre lié aux différents indices de la fonction de Morse et qui est bien détaillé dans le livre de Hirsch (Differential Topology). Ceci revient à calculer l'homologie d'un complexe cellulaire et qui donne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Pour ce qui est du calcul de la caractéristique d'Euler d'une somme connexe. C'est bien connu. Voir aussi dans le livre de J. Lafontaine.

26) Sur l'article de Chen-Li :

On a aussi la compacité globale de Chen-Li, cité dans la section 4.1. Le résultat de Chen-Li utilise le fait qu'on a compacité au voisinage du bord lorsque $||\nabla \log V|| \leq A$, puis il étend ce résultat lorsque $||\nabla V|| \leq A_1$, pour cela il utilise l'extension des résultats de Brezis-Merle (Theorem 1 de Brezis Merle), qui reste vrai dans des domaines Lipschitzien dès qu'on a la régularité des solutions dans $W_0^{1,2}$, car le principe du maximum est valable dans ce cas (on utilise l'intégration par parties, qui est vraie dès que la régularité du bord est Lipschitzien. Pour l'inégalité

de Sobolev aussi et la resolution d'un probleme variationnel dans L^2 . Lipschitz suffit). Ceci pour la fonction u_2 du debut de preuve de Chen-Li. (et aussi l'extension des fonctions harmoniques et la formule de Poisson, pour u_1 qui necessite une application conforme). Voir la preuve du corollaire de l'article de Chen-Li.

(Voir l'article de Sweers-Nazarov. Journal.Diff.Equations. 2007. Pour les conditions de regularité $W^{2,p}$ des problemes sur des ouverts Lipschitziens.)

Remarque sur la preuve de Chen-Li : pour etendre la partie u_1 harmonique, il faut supposer le domaine analytique, pour pouvoir utiliser une transformation conforme qui reste invariante par le Laplacien. Principe de symetrisation de Schwarz. Donc, le resultat de compacite reste vrai avec la regularité smooth lorsque on suppose $\|\nabla \log V\| \leq A$. Mais la regularité du domaine doit etre supposée analytique lorsqu'on passe a $\|\nabla V\| \leq A_1$.

Dans leur preuve Chen-Li, utilisent le fait que l'operateur est invariant par application de carte, ceci est possible si cette application est conforme, elle preserve le Laplacien. Puis, symetrise la fonction en symetrisant un probleme de Dirichlet, puis soustrayent les valeurs aux bords et ils obtiennent l'image de v_1 . Alors u_1 est l'image de v_1 par l'application de carte. Maintenant pour construire v_1 ils utilisent une symetrisation d'un probleme de Dirichlet, qui requiert les solutions dans $W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon)$, $p > 2$ (la formule de representation de Green reste valable, dans ce cas, voir la preuve dans Gilbarg-Trudinger). Puis, ils utilisent la formule integrale de Poisson (qui necessite d'avoir l'operateur Laplacien).

- a) Pour utiliser la formule de Poisson, on conserve le Laplacien : transformation conforme φ .
- b) Ils symetrisent $u \circ \varphi$ ils obtiennent une fonction $u_v \in C^1(\bar{B}_\epsilon(0)) \cap W^{2,p}$.
- c) Ils resolvent : $-\Delta v_1 = -\Delta u_v$ avec condition de Dirichlet sur $B_\epsilon(0)$.
- d) Ils utilisent la formule integrale de Poisson pour $v_1 - u_v \in W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon)$, $p > 2$. Sur le bord, il n'y a que les valeurs de u .

(Ce travail revient à symetriser une fonction harmonique qui nécessite le theoreme de symetrisation de Schwarz , qui necessite une application conforme, donc un domaine de depart Ω analytique).

RÉFÉRENCES

- [1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.
- [2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959
- [3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.
- [4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [5] Azé. Analyse variationelle...ellipse.1997.
- [6] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [7] A. Besse. Einstein manifolds. Springer. 1987.
- [8] Bredon. Geometry and Topology. Springer.
- [9] Brezis. Analyse fonctionelle; 1983
- [10] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [11] Brezis, Merle. Uniform estimate and blow-up behavior... Comm.P.D.E..1991.
- [12] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. Arch. Rational. Mech. Anal. 122 (1993) 145-157.
- [13] M. G. Crandall. P.H. Rabinowitz. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. 1975.
- [14] Dautray-Lions.
- [15] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63
- [16] Do Carmo. Riemannian Geometry.
- [17] Druet.Hebey.Robert. Green functions. 2004.
- [18] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.
- [19] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.
- [20] William Goldman. 1983. Existence de varietes sans structure plate.
- [21] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.

- [22] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.
- [23] Hatcher. Sur les Torus Bundles.
- [24] Hirsch. M. Differential Topology.
- [25] Huber.A. On subharmonic functions in the large. (1957)
- [26] Hulin, Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces.(1992)
- [27] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [28] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [29] Kuiper. (Conformally flat structure in the large). (1949).
- [30] Kulkarni. Conformally flat manifolds.1972.
- [31] Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.
- [32] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.
- [33] Nazaraov, S, A. Sweers, G. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. Journal of Differential Equations. 233, 1, 2007, 151-180.
- [34] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.
- [35] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [36] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les varietes a bord.
- [37] Schoen, R. Yau, S-T, On the positive mass conjecture in dimension 3. Comm. Math. Phys. 1979.
- [38] R. Sa Earp. E. Tubiana. Introduction a la geometrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.

EQUIPE D'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 2, PLACE JUSSIEU, 75005, PARIS, FRANCE.

E-mail address: samybahoura@yahoo.fr, samybahoura@gmail.com