



HAL
open science

Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.. 2017. hal-01635538v4

HAL Id: hal-01635538

<https://hal.science/hal-01635538v4>

Submitted on 9 May 2018 (v4), last revised 8 Nov 2023 (v22)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules géodésiques, traces de Sobolev et fonctions de Green.

1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Hausssdorf et la formule d'integration par parties (Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ?) : $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ alors la mesure $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit $A \subset \partial\Omega$, $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon, H_{|\partial\Omega}^{n-1}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a, $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$, avec V_ϵ ouvert de \mathbb{R}^n .

Dapres le Theoreme dUrysohn ;

$$\exists f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq f_\epsilon \leq 1, f_\epsilon \equiv 1, \text{ sur } K_\epsilon, \text{ supp } f_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient ν_1, ν_2 les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

Ω est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Hausssdorf $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$, ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et $|D\chi_\Omega| = H_{|\partial\Omega}^{n-1}$:

$$\int_\Omega \text{div} \varphi = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_1 dH^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_2 dH^{n-1}, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0, \forall \varphi \in C_c^1,$$

Comme C_c^1 est dense dans C_c^0 , la formule precedente est vraie pour $\varphi \in C_c^0$

On applique cette formule a f_ϵ , on obtient pour tout mesurable A :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \rightarrow 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2, H_{|\partial\Omega}^{n-1}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale exterieure est la normale exterieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure" ("blow-up") est l'espace tangent usuel).

La formule d'integration par parties est bien connues. Pour sa preuve, voir les livres de Fusco (bords avec singularités par recouvrement et suite de compacts $K_n \rightarrow \partial\Omega - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers), Necas et Azé.

La formule d'integration par parties sur un domaine singulier en un nombre fini de points en dimension 2 (par exemple) :

La formule est locale, on considere $B(x_j, 1/n)$ avec x_j un point singulier du bord. La formule est locale, par un recouvrement et une partition de l'unité on écrit que (voir le Azé, dans chaque partie du recouvrement) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((1 - \alpha_n)u) dx = \int_{\partial\Omega} (1 - \alpha_n)u d\sigma,$$

avec α_n une fonction reguliere et à support compact dans $B(x_j, 1/n)$, $\alpha_n \equiv 1$ dans $B(x_j, 1/2n)$. Avec le fait, $|\nabla\alpha_n| \leq Cn$ et $\mu_L(B(x_j, 1/n)) \leq C/n^2$ et $H_1(\{x_j\}) = 0$, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle (ici, on l'a fait pour le point x_j). Puis on fait tendre $n \rightarrow +\infty$. On obtient la formule de Stokes pour un domaine contenant un nombre fini de singularités au bord.

2) Pourquoi quand on a $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar{\Omega})$, $tr(u) = u$? on utilise Necas et Brezis :

On a :

Ω est un ouvert Lipschitzien \Rightarrow cartes Lipschitziennes \Rightarrow un operateur de Prolongement $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, d'après la construction de l'operateur de Prolongement dans des cartes, $Pu|_{\bar{\Omega}} = u$ et, $\chi_n(\rho_n * Pu) \rightarrow Pu$ dans $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $W^{1,p}$ où K est un compact de \mathbb{R}^n , donc :

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Et,

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u\|_{C^0(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Doù,

$$Tr(u) = u, \quad H_{|\partial\Omega}^{n-1} p.p.,$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_{\Omega} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_{\rho}(x)} u(y) dy}{|B_{\rho}(x)|}$$

on voit que si $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $Tr(u) = u$.

3) Pourquoi $W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1}, tr(u) = 0\}$ avec Ω ouvert Lipschitzien. Voir le livre de Necas. On raisonne par rapport aux suites ($\exists u_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $u_i \rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour les traces et la restrictions a des sous ensembles d'ouverts Lipschitzien).

a) On considere $\tilde{u} = u \times 1_{\Omega} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ par integration par parties et formule de Stokes.

b) Par des cartes et on multipliant par une fonction test a support compact, localement $\tilde{u} \in W^{1,1}(Q)$ avec Q un n-cube "au dela" du bord et nulle avant d'atteindre les cotes du bord qui sont interieurs.

On considere alors \tilde{u}_{λ} , "la translátée" de \tilde{u} suivant la direction normale au bord. le support de \tilde{u}_{λ} est compact et strictement á l'interieur du domaine.

On a : (on applique ces idées à un cube infini dans la direction normale au bord image (locale) de $\partial\Omega$, puis on se restreint au n-cube de depart. Sur les bords, la restriction de l'homeomorphisme Lipschitzien envoie les traces sur les traces par la formule de l'aire ou coaire. (par convergence de suites sur des ouverts Lipschitziens).)

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q_{-\lambda})$ avec,

$$\nabla(\tilde{u}_{\lambda}) = (\nabla\tilde{u})_{\lambda}.$$

puis en utilisant des fonctions tests dans Q on obtient :

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q)$ pour λ assez petit.

Le support de \tilde{u}_{λ} est strictement dans Q , on obtient alors, $\tilde{u}_{\lambda} \in W_0^{1,1}(Q)$.

Par un theoreme de la moyenne (voir Necas, \tilde{u} s'annule en dehors de Q), on obtient $\tilde{u}_{\lambda} \rightarrow \tilde{u}$ dans $W^{1,1}$. Donc, $\tilde{u} \in W_0^{1,1}$ et $u \in W_0^{1,1}$.

4) Soit (M, g) une variete riemannienne et soit $B_r(x)$ une boule geodesique tres petite, telle que l'exponentielle realise un diffeomorphisme sur la boule de \mathbb{R}^n : pourquoi, la normale exterieure $\nu = \partial_r$?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$d(\exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i$, on identifie les 1-formes dx_i et $d\tilde{x}_i$.

Soit B^0 la base canonique de \mathbb{R}^n et \tilde{B}^0 la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ la base canonique de la boule geodesique $B_r(x)$, alors $d(\exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$.

La base $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_{n-1}}\}$ est directe, donc $\det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$.

Soit $\tilde{B}_r = \{d(\exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_1}), \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$, alors :

$\det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [\det : B_r \rightarrow B_{0,r}] \circ [\det : B_{0,r} \rightarrow B_r, \text{ qui est directe}] \circ [\det : B_r \rightarrow \tilde{B}_{0,r}] > 0$

La premiere est $d(\exp_x)^{-1}$ et la derniere $d(\exp_x)$ le determinant selimine, il reste celui de $B_{0,r}$ vers B^0 qui est direct.

Donc la base \tilde{B}_r est directe par rapport a la base \tilde{B}^0 .

n_{ext} est definit precisement comme cela tel que $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$ est directe par rapport a \tilde{B}^0 .

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient ω_θ et Ω les formes volumes sur la sphere $S_r(x)$ et la boule $B_r(x)$ n_{ext} est tel que son dual n_{ext}^* verifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_\theta = \Omega,$$

C'est-a-dire que à des constantes multiplicatives pres (determinant des metriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est a dire que la base $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$ est directe par rapport a la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ et donc $n_{ext} = \partial_r$.

Voir aussi le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine où la normale exterieure est definie par le produit interieur. (Par rapport à la base du bord et l'element de volume du bord) On a le meme resultat.

Par sa construction, la boule geodesique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par rapport à la carte (Ω, φ) à partir de laquelle elle construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact K en utilisant l'exponentielle et cette propriété d'orientabilité des boules geodesiques via l'exponentielle, il faudra supposé la variété orientable.

5) Dans la construction de la fonction de Green pour un operateur coercif $\Delta + a$ voir le livre d'Aubin et le monograph de Frederic Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'etape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$, car la parmetrix H_x verifie au sens C_0^2 (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les Γ_i verifient cette proprité, elles sont nulles au bord car leur support est dans $B(m, \delta_m/2)$ et le rayon dinjectivité = $\delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$. Puis on utilise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser G_x dans lequation et utiliser les Theoremes de Gilbarg-Trudinger :

$$\Delta(V_x - \eta G_x) + a(V_x - \eta G_x) = -\Delta(\eta G_x) + a(\eta G_x) \in L^p, \text{ et } (V_x - \eta G_x) = 0, \text{ sur } \partial M,$$

Avec η une fonction cutoff egale a 1 dans un voisinage de ∂M et 0 au voisinage de x (nulle au voisinage de la singularité).

On obtient $V_x - \eta G_x \in W^{2,p}(M)$ et comme $\eta G_x \in W^{2,p}(M)$, alors : $V_x \in W^{2,p}(M)$.

Remarques :

1) Dans la formulation variationelle on pour une solution $u \in W_0^{1,2}$ de :

$$-\Delta u + au = f, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial M,$$

Dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions $W_0^{1,1}$), ils prouvent que ces solutions sont au sens C_0^2 (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont $W^{2,p}$ et qu'on a les estimations a priori dans $W^{2,p}$ d'Agmon (méthode des quotients différentiels) ou en sachant qu'elles sont $W^{2,p}$ qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund écrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inégalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par continuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergration par parties, par rapport a la variable $t > 0$) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu = 0, \quad u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

On peut supposer L le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuité on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inégalité obtenue ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par continuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on écrit à l'ordre 1 :

Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson $P(x, t) = \frac{1}{t} \frac{1}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$.

On suppose que $\varphi \in C^2 \cap W^{2,p}$. On écrit :

$$\partial_s(P(x-y, t+s)\varphi(y, s)) = \partial_s P \varphi + P \partial_s \varphi,$$

On integre en y et s et on obtient (on utilise la representation integrale de u en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x-y, t)\varphi(y, 0)dy = \int P(x-y, t+T)\varphi(y, T) + \int \int \partial_t P \varphi + \int \int P \partial_t \varphi,$$

On a $\partial_t P \equiv \frac{1}{|Q|^{n+1}}$, Q un point quelconque, et $\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = n+1$, on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour $\partial_t u, \partial_x u$, on derive sous le signe \int et puis on integre par parties sur \mathbb{R}^n . On obtient des integrales du type,

$$\int \int \partial_t P \partial_t \varphi, \quad \int \int \partial_t P \partial_x \varphi, \quad \text{et} \quad \int \int \partial_x P \partial_t \varphi$$

On elimine $\int P(x-y, t+T)\varphi(y, T)$ par son estimation en $c(T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$.

On obtient des estimations du type :

$$\|\partial u\|_{L^p} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on écrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

6) Sur le degré topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la definition du degré topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, \text{deg}[x - F(x, T_0)B_{R_2}, 0] = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x, t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$, cela veut dire qu'on peut utiliser l'homotopie :

$$\text{deg}[x - F(x, t), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - F(x, 0), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$$

$t = 0$, $F(x, 0) = \Phi(x)$ et par Nussbaum et la propriété d'excision et d'additivité, on peut décomposer le degré en 2, la condition est que $\Phi(x) \neq x$ sur ∂B_{R_1} et $\Phi(x) = F(x, 0) \neq 0$ sur ∂B_{R_2} , alors :

$$0 = \deg[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = \deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + \deg[x - \Phi(x), \{R_1 < \|x\| < R_2\}, 0],$$

La dernière condition est celle de l'homotopie avec l'identité et le degré de l'identité est 1.

$$\deg[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = \deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = \deg[x, B_{R_1}, 0] = 1,$$

Donc,

$$\deg[x - \Phi(x), \{R_1 < \|x\| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation intégrale $\int_{\Omega} f(u(x) + t) dx \leq C$, C indépendante de t et les estimations a priori pour vérifier que les conditions d'applications du degré topologique sont vérifiées, dans ce cas les t et les solutions sont uniformément bornés.

Concernant l'article de Crandall-Rabinowitz, il traite du cas où en particulier on a un terme non linéaire du type exponentiel. Grâce à la condition de stabilité (ils prennent des fonctions tests particulières), ils prouvent que la masse et le volume ou énergie, sont bornées (jusqu'à la dimension 10).

7) Sur les surfaces $K3$. Soit E un fiber bundle et M une variété Complexe de métrique h .

Remarquons d'abord que cette variété est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien réel est le carré du Jacobien complexe, c'est dû à l'holomorphie, comme en dimension 2 (équation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fiber bundle E , il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphie et la métrique, c'est l'analogie complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable à la connexion de Levi-Cevita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une dérivée covariante, on a la courbure, on dérive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern, c'est la classe de Ricci.

Connexion de Chern \Rightarrow symboles de Christoffels \Rightarrow Connexion form, ω , \Rightarrow Curvature form,

Dans le cas $E = \wedge^2 T^*(M)$ les 2-formes alternées :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$, car ici, ce qui joue le rôle de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur E (les vecteurs de base sont les 2-formes alternées), les champs de 2-formes alternées,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$, des qu'on dérive encore deuxième fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces $K3$, $E = \wedge^2 T^*(M) = 0$, 2 formes alternées :

Si $E = 0$, la connexion nulle convient pour la dérivation sur E or la connexion de Chern est unique donc $\nabla \equiv 0$. Donc, il n'y a pas de courbure donc la classe de Chern est nulle, $c_1 = 0$.

Les groupes de cohomologies sont connus :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les variétés complexes, il faut prendre la dimension complexe 2 et non réelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualité de Serre, cela va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la théorie de Hodge, on prend la dimension réelle 4, avec la convention $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \leq p, q \leq 2\}} H^{p,q}$, p, q varient selon la dimension complexe, quand on inverse p et q on a par la conjugaison complexe, la même dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault, $H^{0,1}$ est isomorphe à la cohomologie de Čech $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, \mathcal{O}_S)$ car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions \mathcal{O}_S et par définition $H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$ d'où $h^{0,1} = \dim H^{0,1} = \dim H^1(S, \mathcal{O}_S) = 0$. On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau)

sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe) ,on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la caractéristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension réelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne $X = S = K3$:

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \frac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$, avec c_1 la premiere classe de Chern et c_2 la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure Ω

$$\det(\Omega - tI) = 1 + tr(\Omega) + \Omega \wedge \dots = 1 + c_1 + c_2,$$

L'integrale $\int c_2$ est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas dune surface $K3$, cest donc $\chi(K3) = \int c_2 = 24$.

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type $dx^j \wedge dx^k$ et c_2 est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme : $\int c_k$ avec c_k la k -ieme classe de Chern.

Comme la surface $K3$ est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possède une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec $(K3, h, \nabla)$ on a une structure hermitienne et par Siu, $K3$ est Kahler, c'est a dire que la structure Riemannienne $(K3, g = Re(h), \nabla_g)$ est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Cevita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euler-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (Ricci_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface $K3$ possède une metrique non-localement conformement plate.

a) Le Projectif complexe de dimension complexe $n \geq 2$ est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possède (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Cevita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Pourquoi la courbure sectionelle du projectif complexe de dimension $n \geq 2$ est non-constante : C'est ecrit dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

a) Ils utilisent l'equation des champs de Jacobi, pour determiner le tenseur de Riemann.

b) Ils utilisent la multiplication par le nombre complexe, i , la structure complexe, J . Et le fait que H_x sont les vecteurs orthogonaux a z et iz , $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$.

Ils utilisent la variations $H(t, s)$ et les champs de Jacobi.

La courbure sectionelle pour u, v est calculée a partir du champs de Jacobi, $Y(s) = \cos s u + \sin s Jv$:

$$K(u, v) = 1 + 3\sin^2 s.$$

qui n'est pas constante.

b) Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique la sphere de dimension 2 réelle et donc de curbure sectionnelle constante. C'est une surface de Riemann réelle (donc localement plate).

Pourquoi, le Projectif complexe de dimension 2 est isometrique à la sphere de dimension 2. Voir le Gallot-Hulin-Lafontaine :

1-On utilise le quotient par un groupe de Lie. Comme le groupe de Lie agit proprement et transitivement et..., cela veut dire qu'il existe une structure de variété sur le quotient $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ telle que l'application de passage au quotient soit une submersion.

2-Le fait qu'on ait une submersion, on utilise la définition, localement, on a des sous-variétés, on construit, par des cartes, une base du noyau et après un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on construit un supplémentaire orthogonal. l'application de passage au quotient est bijective sur ce supplémentaire. ce qui permet de construire localement un "lift".

3-On définit la métrique sur le quotient de telle manière que l'application de passage au quotient soit une isométrie, on la construit à partir du lift et par projection sur H_x .

(Remarque : soit $p(x) = [x]$ l'application de passage au quotient et γ une isométrie, $x = \gamma^{-1} \circ \gamma(x) \Rightarrow [x] = [\gamma(x)] \Leftrightarrow p(x) = p \circ \gamma(x)$, ceci est important dans la construction de l'isométrie en prouvant que cela ne dépend pas de point de la fibre).

On voit que pour le cas de \mathbb{S}^3 et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$, que la métrique du projectif est celle de la 3-sphère pour des vecteurs particuliers v, w , par exemple orthogonaux à z et iz avec $z \in \mathbb{S}^3$. (le produit scalaire sur H_x est égal à celui pour l'espace tangent au quotient).

Par exemple si on prend $z = (1, 0) = [(1, 0), (0, 0)]$ en notation complexe, les v, w sont de la forme $v = (0, v_1), w = (0, w_1)$. Puis en utilisant l'application H du Gallot-Hulin-Lafontaine $H(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$ et les chemins $u(t) = \cos t z + \sin t v, w(t) = \cos t z + \sin t w$, on a :

$$\langle H(u(t))', H(v(t))' \rangle_{\mathbb{S}^2_{t=0}} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{S}^3} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Cela veut dire que,

$$H^*(g_{\mathbb{S}^2}) = g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Remarque : Les revêtements riemanniens, sont similaires, au lieu d'avoir une submersion, on a un difféomorphisme local. Voir, le Gallot-Hulin-Lafontaine, pour la construction du Tore et des projectifs réels (leur métriques).

Dans le cas des revêtements, puisqu'il y a un difféomorphisme local, la courbure sectionnelle se conserve (voir le Hebey). On voit alors, dans la construction du projectif réel et le Tore, que la courbure sectionnelle est constante, donc, elles sont conformement plates.

8) La formule d'intégration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problèmes variationnels de degré 2, il est possible de résoudre par la formulation variationnelle un problème elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une variété non orientable.

Par contre quand il s'agit de fonction de Green, sur une variété compacte, il est impératif de supposer la variété orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'intégration par parties en dehors de petites boules, on se ramène à une variété à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

9) Pour les variétés de dimension 3. On considère un Torus bundle M_φ d'application φ (voir le Hatcher pour la définition, φ est la monodromy map), il est orientable si et seulement si $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$. William Goldman prouve qu'il existe un Torus bundle orientable ne possédant pas de structure conformement plate, φ non périodique, (de valeurs propres réelles) (par exemple, $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) il n'y a pas de métrique localement conformement plate, comme une variété lisse possède toujours une métrique Riemannienne g , elle est dans ce cas non localement conformement plate, $Weyl_g \neq 0$. Ce théorème dit qu'il n'existe pas de métrique localement conformement plate sur cette variété.

1- Une structure est conformement plate s'il existe une métrique conforme à la métrique euclidienne. Cette définition est équivalente à celle qui dit qu'une structure conformement plate s'il existe un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Möbius (composée de translation, rotation et inversion). Cette équivalence est démontrée dans l'article de Kuiper (1949).

2-Cela veut dire que si on veut savoir si une variété a une structure conformement plate, il suffit d'étudier les transformations conformes, donc le groupe conforme. C'est l'idée de William Goldman, il caractérise le groupe fondamental et le groupe de transformations conformes des variétés conformement plate (il y a une relation entre le groupe fondamental et le groupe des transformations conformes). Si cette condition n'est pas satisfaite alors, la variété n'a pas de structure conformement plate. (le groupe fondamentale doit être polycyclique...).

10) Voir aussi, dans le livre d'Aubin ou la caractérisation de Kuiper de la structure conforme par une isométrie, sert à prouver le Théorème de la masse positive dans le cas conformement plat.

Pour le Théorème de la masse positive de Schoen-Yau en dimension 3, ils prouvent qu'il existe une surface minimale complète ayant une propriété (intégrale de la courbure de Gauss positive) alors que par les calculs cette intégrale est négative ou nulle. Pour cela ils utilisent le théorème d'existence de surfaces minimales et leurs propriétés (Formule de Gauss-Bonnet et Travail de Huber, inégalités isopérimétriques classiques et de Huber, la métrique est voisine de la métrique euclidienne ce qui fait qu'on peut approcher ces deux notions (inégalités isopérimétrique classique)). En particulier, ils prouvent qu'elle est complète dans la première étape. (les fermés bornés sont compacts).

La positivité de la courbure scalaire implique que la surface minimale construite a son intégrale de Gauss Positive. Et puisque la métrique est "presque" euclidienne, il y a conservation de l'inégalité isopérimétrique et par la formule de Gauss-Bonnet, elle serait négative ou nulle. Ce qui n'est pas possible.

Il s'agit de construire une métrique conforme avec une propriété de la courbure scalaire.

Il s'agit de construire une surface minimale ayant une propriété qui découle de la courbure scalaire.

Cette surface minimale complète n'existe pas, car cette propriété n'est pas vraie, par le fait que la métrique est "presque" plate et que l'inégalité isopérimétrique euclidienne se conserve et la formule de Gauss-Bonnet.

Remarques :

1-La masse < 0 intervient dans la construction de la surface minimale complète. (raisonnement par l'absurde). (Ils prouvent qu'elle est complète dans cette étape, car, en dehors des bords, elle est dans un compact, et dans les bords elle est entre deux plans et la métrique est équivalente à la métrique euclidienne. (les fermés bornés sont compacts)).

2-Une surface est dite de type fini, si $\int |K| < +\infty$: c'est le cas dans la démonstration de la masse positive de Schoen-Yau.

3-Quand on a une surface de type fini, si $\chi(S') > 0$ (la caractéristique d'Euler-Poincaré > 0 , ce qui est le cas ici par Cohn-Vossen), alors S' est difféomorphe au plan. C'est écrit dans Hulin-Troyanov(1992), premier théorème, qui dit que, S' est difféomorphe à une variété compacte S sans bord, sans un nombre fini de points. De plus il y a une formule de Gauss-Bonnet, on a alors S' est la sphère moins un au plus un point d'après cette formule de Gauss-Bonnet. Donc, c'est le plan. Il s'agit d'un difféomorphisme entre S' et le plan.

On a d'abord une isométrie i , puis une application conforme, F_1 . la courbure de Gauss "se conserve". D'abord $K_{i(S')} = K_{oi}$, puis par l'application conforme on a un facteur $|F_1'|^2$, qui s'élimine dans le changement de variable. $\int K = \int K_{F_1oi} = \int K_{oi} |F_1'|^2$, cette dernière intégrale est la courbure de Gauss de $F_1oi(S')$. Puis on applique le résultat d'Huber. (On considère $i(S')$ au lieu de S' , car on a une isométrie et la courbure de Gauss "se conserve", $\int_{S'} K = \int_{i(S')} K_{oi}$ et $(F_1^{-1})^*(g_{i(S')}) = |F_1^{-1}|^2 g_{\mathbb{C}}$, car F_1 est conforme, la métrique se transporte suivant un facteur de la métrique de \mathbb{C} , on a des coordonnées isothermes globales, on peut appliquer ce que fait Huber (1957)).

(Pour obtenir l'application conforme, on raisonne par rapport au revêtement universel et la caractéristique d'Euler-Poincaré).

4-Dans un article de Huber, il prouve que sur une surface ouverte, la formule de "Gauss-Bonnet", pour une suite de domaines :

$$\int K = 2\pi - \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L_\sigma^2 / 2A_\sigma.$$

5-La construction de la surface est en fait une construction d'un courant (surface avec singularité, par une minimisation d'une fonctionnelle relativement à une métrique), puis, voir le livre de Federer, la surface est régulière en dehors du bord. $\partial(N \cap S) = (\partial N \cap S) \cup (\partial S \cap N)$, par la formule de Stokes, S est loin du bord, car la courbure moyenne est positive (c'est une hypothèse).

(Voir aussi, le livre de Sa Earp-Tubiana, sur le théorème de Poincaré-Koebe et la classification par le revêtement universel).

Un théorème d'uniformisation de Poincaré-Koebe, dit que une surface non compacte simplement connexe est conforme au disque unité ou au plan. (voir l'article de Hulin-Troyanov(1992)).

11) Concernant les sommes connexes, $M \sharp N$ de deux variétés M, N , elles sont définies à partir d'une relation d'équivalence qui donne une variété quotient Topologique, c'est à dire C^0 , à l'ordre 0 il n'y a pas de problème, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais dès qu'on cherche une structure différentiable ou $C^k, k \geq 1$, c'est plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de manière lisse.

Remarquons que en dehors de la sphere ou se fait le recollement, la variété est égale à M ou N .

Lorsque on met une metrique sur M et N alors par des fonctions cutoff on peut mettre une metrique, par recollement, sur $M \sharp N$ et elle coincide avec celles de M et N en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$ et $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$, on a deux injections naturelles i_1, i_2 et on doit faire le recollement entre $Id_{B(p, 2\epsilon)}$ et $i_2 \circ i_1^{-1}$. On definit une relation dequivalence en partant de couronnes $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$, $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$ vers les varietes M et N . On choisit une carte pour N renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient i_2 .

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes, $i_2 \circ i_1^{-1}$ est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de M a celui de N de maniere lisse. (Les changements de cartes sont lisses de M, N et $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$, par $i_2 \circ i_1^{-1}$.)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de M et N , alors $M \sharp N$ est orientable.

On a : $X = M \setminus B(p, \epsilon) \cup N \setminus B'(q, \epsilon)$ est compact, le graphe de la relation $Gr = \{(x, x), x\} \cup \{(x, i_2 \circ i_1^{-1}(x)), x\}$ est fermé, donc, $X \setminus \sim$ est séparé. Soit $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon)$, et π l'application de passage au quotient. Alors $\pi(O)$ est un ouvert de $X \setminus \sim$ car $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$.

Soit : Φ l'application de recollement de cartes, definit precedemment sur $\pi(O)$, alors Φ est bien definit et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de \mathbb{R}^n , par le theoreme d'invariance du domaine de Brower (car i_2 et i_1 se recollent au bord qui est une sphere, par definition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changement de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x), \quad x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon), \quad \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2}, \quad x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon),$$

avec, $[x] = \pi(x)$, l'application de passage au quotient. i_2 inverse l'orientation de N . Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de determinant positifs, de plus, sur la sphere, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a i_1 avec la bonne orientation et sur le deuxieme bout on a i_2 qui inverse l'orientation, et sur la sphere $|i_2| = 1$).

On voit que $\Phi \circ \pi$ est continue par definition et donc Φ est continue.

On a bien, $(\Phi, \pi(O))$ une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme M et N sont orientables, $M \sharp N$ est orientable.

Avec $(\Phi, \pi(O))$ on a une carte de recollement, et,

$$\Phi \circ [i_1]^{-1} = \Phi \circ [i_1^{-1}] = Id_{B(p, 2\epsilon) \setminus \bar{B}(p, \epsilon)},$$

$$\Phi \circ [i_2 / |i_2|^2]^{-1} = \Phi \circ [(i_2 / |i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q, 2\epsilon) \setminus \bar{B}'(q, \epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considerant les metriques g_M, g_N et $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$, par des fonctions cutoff, on a par recollement, une metrique sur $M \sharp N$:

$$g_{M \sharp N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considere un observateur a de M tel que le repere (a, T) est direct avec T une orientation du bord. on deplace par une rotation, ou selon un chemin circulaire, vers un observateur b de N alors le repere (b, T') est direct si et seulement si $T' = -T$.

D'autre part, on voit que dans la carte de recollement, on a composé avec une inversion. Si M et N ont des structures localement conformément plates, par Kuiper, il existe pour chaque variété un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Möbius. En utilisant la carte de recollement, on obtient un atlas sur $M \# N$ formé d'applications de Möbius. Donc, sur la somme sonnexée on a une structure localement conformément plate. (ceci est dit dans la papier de Kulkarni).

12) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grâce aux fonctions de Morse. Par récurrence sur le nombre de points critiques.

1- On vérifie que sous certaines hypothèses d'orientabilité des bords et quand on a deux homéomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homéomorphisme entre les recollés.

2- On utilise une récurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note g_1, g_2 les applications de recollement, dans le Gramain, $g_1 = f, g_2 = f'$. Ici, dans le cas des recollements, on prend, $g_1 = id$ et $g_2 = id$, les recollés sont les ensembles de départ (en fait ils sont difféomorphes aux ensembles de départ et $f_* = id, f'_* = id$, on a inversion des orientations quand on recolle, et, $h_* = id, h'_* = id$, h et h' conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles A et A' , sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse C^∞ , donc ce sont des variétés compactes C^∞ , il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se plaçant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.

Pour l'orientabilité des bords, A et A' sont (homéomorphes implique difféomorphes en dimension 1) difféomorphes à des cercles et, à droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le difféomorphisme conserve l'inversion d'orientation, son Jacobien est positif. D'où, l'application k_0 conserve l'orientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un difféomorphisme global h et h' , par contre il y a une définition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orientation pour k_0).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant $p \leq q - 1$ points critiques avec un maximum et un minimum et $p - 2$ points critiques d'indice 1 est homéomorphe à \mathbb{T}_p . On peut commencer la récurrence pour $p = 0$, la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homéomorphes à des demi-disques et par recollement on a une sphère. À l'ordre $p = 1$, pour le Tore, c'est écrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-mêmes sont obtenus par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore. Ou bien si on commence la récurrence à partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homéomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-mêmes obtenus par recollement d'ensembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas(2) vers le haut(1)) avec l'application de recollement $g_1 = id, g_2 = id$, et on obtient le Tore, g_2 est la deuxième application de recollement). Dans le cas général, on sait qu'il existe une fonction de Morse u , on décompose en deux, la partie de u ayant $p - 1$ points critiques, on lui recolle un disque et par récurrence, elle est homéomorphe à \mathbb{T}_{q-1} et le reste possède 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par récurrence, homéomorphe au Tore, \mathbb{T}_1 . Donc, comme c'est écrit dans le Gramain, en revenant à u , il y a une partie homéomorphe à V_{p-1} et l'autre à V_1 et sur V_1 on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc, on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite, $Y - g_1(A)$ et $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$, B un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considérant la composée des deux homéomorphismes (c'est l'homéomorphisme $k_0 = h'og_1og_2^{-1}oh^{-1}$ du Gramain). Il reste à voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a des homéomorphismes entre les recollés, $S = (S - A) \# (S' - B) = (X - A) \# (Y - g_1(A)) = (X - A) \cup (Y - A)$, $g_1 = id$, et $V_{p-1} \# V_1$, ce qui est fait dans le cas orientable (A homéomorphe au cercle dans le Gramain).

On écrit $(X - A) \cup (Y - A)$ pour dire qu'on recolle X et Y via A . Les applications du Gramain, $f = g_1 = id, f' = g_2 = id$ et le recollé (pour la relation d'équivalence, $x \equiv f(x) = x, x \in A$, $f_* = -id, f'_* = -id$, est difféomorphe à l'ensemble de départ. On a $f_* = -id$ et $f'_* = -id$ car

on inverse les orientations de depart quand on recolle $(+, h, A \rightarrow A'$, conservation de l'orientation, $f', A' \rightarrow f'(A')$, $-$ inversion de l'orientation, $h'^{-1}, f'(A') \rightarrow f(A)$, $+$, conservation de l'orientation, $f^{-1}, f(A) \rightarrow A$, $-$, inversion de l'orientation). Donc, on a, $h_* = id$, $f'_* = -id$, $(h'^{-1})_* = id$ et $(f^{-1})_* = -id$. Et on écrit car $f = id$, $f' = id$, $f_* = id$, $f'_* = id$, pour dire qu'on envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation (meme si elle inversée).

On peut raisonner par les generateurs, si e_1 est generateur de $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$ et e_2 est generateur de $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$, alors, comme sur la partie de Y et Y' on inverse les orientations, on a $-e_1$ est generateur de $H_{1,A,Y}$ et $-e_2$ est generateur de $H_{1,A',Y'}$, comme $f = id$ alors, $f_*(e_1) = -e_1$. On écrit, $f_* = id$ dans le sens qu'elle envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation. et on écrit $f_* = -id$, pour dire que f_* inverse l'orientation de depart sur A .

On a la meme chose pour A' et f' .

Des le depart on a deux homeomorphismes h et h' , supposons pas exemple que $h_* = -id$, $h_*(e_1) = -e_2$, comme pour A' on est dans l'espace euclidien, il suffit de composer avec une symetrie t pour avoir $t_*(e_2) = -e_2$ donc, hot conserve l'orientation sur le bord. $(hot)_*(e_1) = e_2$ et on fait la meme chose avec h' . Finalement, on a deux homomorphismes hot et $h'ot'$ ou h' (si h' conserve l'inversion de l'orientation); qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilisé l'orientation definie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface S est homomorphe à la somme connexe de q Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connexe de Tore est une varieté differentiable et donc, cette orientation homologique est equivalente à l'orientation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci à chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans \mathbb{R}^3 , utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des variétés sans bord et des varietés bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et differentiables). L'equivalence entre orientation homologique et differentiable pour une variété lisse est écrite dans le livre de Bredon (geometry and topology). Remarquons qu'une variété a bord W est orientable si et seulement si son interieur \dot{W} est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord ∂W et il y a equivalence aussi entre orientation homologique et differentiable.(il y a un isomorphisme entre $H_n(W, \partial W, Z)$ et $H_n(W, W - x, Z)$).

Concernant la structure differentiable sur le recollé de $X - A \cup_{f,A} Y - A$, dans Milnor (Somme connexe et structure differentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de $X - A$ et $Y - A$, sont diffeomorphes a des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure differentiable. Or, pour la somme connexe de deux variétés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant à ici, le recollé $X - A \cup_{f,A} Y - A$ est diffeomorphe à $X - A \cup Y - A$, on a deja une structure differentiable sur le recollé, via ce diffeomorphisme. (la projection $p : x \rightarrow [x]$ est un diffeomorphisme).

Quant a l'écriture $\mathbb{T}_{q-1} \# \mathbb{T}_1$, c'est la somme connexe, comme on est dans \mathbb{R}^3 , somme connexe et recollement coincident.

Quand on a une application s qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variete M_1 compacte sans bord de dimension 1, $s_* = id$. Pour le voir, on a si l'orientation est inversée sur M_1 et $M_2 = s(M_1)$, cela veut dire que : -1 est generateur de $H_1(M_1, M_1 - x_0)$ et de $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$. Donc, $s_*(-1) = -1$, c'est a dire que $s_* = id$. Lorsque φ_1 inverse l'orientation alors $(\varphi_1)_* = -id$.

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que $M_1 - x_0$ est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

s_* est un isomorphisme de $H_1(M_1)$ vers $H_1(M_2)$, comme il conserve l'orientation $s_* = id$.

Pour le voir il suffit de raisonner sur les generateurs $s_*(e_1) = ke_2$ et $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$, donc, $kk' = 1$, comme ces des entiers $k = 1$ ou $k = -1$, comme s conserve l'orientation $k = 1$. On fait la meme chose pour φ_1 et on obtient $k = -1$.

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De $\pi_1(S_1)$ dans $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : [\gamma] \rightarrow [\tilde{\gamma}]$$

On applique cela aux applications du Gramain, $s = h'^{-1}oh$ (conserve l'orientation) et $\varphi_1 = \varphi$, $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$, ici, $f = id, f' = id$ et $M_1 = M_2 = A$, puis on raisonne en considérant $S_1 \times \{0\}$ au lieu de S_1 .

$$\begin{aligned} k &= \varphi^{-1}oso\varphi, \\ \pi(k)[\gamma] &= [\varphi^{-1}oso\varphi\sigma\gamma] = \\ &= \bar{h}^{-1}([\varphi^{-1}oso\varphi\sigma\gamma]) = \\ &= \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_*os_*o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) = \\ &= \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) = [\gamma], \end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que $\varphi_* = id$ si on se place sur X (on conserve l'orientation) ou $\varphi_* = -id$ si on se place de coté de Y (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer $[\gamma]$ par un generateur $e_1 = [\gamma_1]$ et raisonner sur les generateurs.
Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas ou $k(a) = a$, k fixe un point. Sinon, (k ne fixe pas a), on compose avec une rotation $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$, or en considérant $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$, $s \in [0, 1]$, on a une homotopie entre r et l'identité id , Donc, $r_* = id$ de $H_1(S_1) \rightarrow H_1(S_1)$.

Donc, $k'_* = id$, puis on utilise le meme groupe fondamental en a , $\pi_1(S_1, a)$ et l'application d'Hurwicz, comme precedemment pour prouver que $\pi(k') = id$.

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger k .

L'autre cas, Y rectangle et $g_1(A)$, deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur Y , celle-ci change quand on part de X et on lui recolle Y via A . (ici, $g_1 = f$ est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension ≤ 3 .

13) Pour l'inegalité de Kato : on a $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \in L^1_{loc}$ alors : $u \in W^{1,1}_{loc}$, pourquoi ?

Comme c'est local, on écrit dans une boule u en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et $n \geq 3$ par exemple, $n = 2$ c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec ∂P regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut derivier sous le signe \int pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists r \int_{\partial B_r} u(\sigma)d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour $\varphi \in D(B_{r/2})$:

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \text{termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int \int \left(\partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right)(-\Delta u)\varphi + \int \int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \quad a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

Ceci est valable pour u régulière. Soit ρ_n un mollifieur, alors :
Si $u \in L^1(B_r)$, alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour $x \in B_{r/2}$:

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \rightarrow u, \text{ dans } L_{loc}^1(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \rightarrow \Delta u, \text{ dans } L_{loc}^1(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec u , avec $\rho_n * u$, comme on a des bornes uniformes en L_{loc}^1 , alors,

$$\rho_n * u \in W_{loc}^{1,1}, \text{ et } \nabla(\rho_n * u) \rightarrow v \in L_{loc}^1,$$

Donc,

$$\int u \partial \varphi = \lim_n \int (\rho_n * u) \partial \varphi = - \lim_n \int \partial(\rho_n * u) \varphi \rightarrow - \int v \varphi,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

On a la même chose si on considère un problème variationnel $-\Delta u = f$, $f \in L_{loc}^1$ et $u \in L_{loc}^1$.

On a même mieux, $u \in W_{loc}^{1,q}$.

On peut retrouver ce résultat en se ramenant à une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un problème de Dirichlet.

Soit $f \in L^1, \exists f_j \rightarrow f$ dans L^1 avec $f_j \in C_c^\infty$, on résout :

$$-\Delta u_j = f_j, \text{ avec } u_j = 0, \text{ sur } \partial \Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|u_j\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q,$$

En passant à la limite en j , on a l'existence de $u_0 \in W_0^{1,q}$ tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \text{ et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le théorème de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,q},$$

On retrouve le théorème dans le livre de Dautray-Lions.

14) Sur la fonction distance au bord : c'est bien écrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grâce à la propriété de la sphère intérieure, il existe un voisinage du bord assez petit tel que la fonction distance est C^k et est égale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des sphères le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit être par exemple au moins C^2 .

15) Pour le théorème de Dualité de Stampacchia :

On part de l'équation :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec la condition de Dirichlet. ($\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$).

On a :

$$u_i \in W^{2,k} \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega}), \quad u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On a :

$$\int_{\Omega} |\Delta u_i| dx \leq bC.$$

On considère un vecteur $f = (f_1, f_2) \in L^{q'}(\Omega)$ avec $q' > 2$. On utilise le Theoreme de Lax-Milgram dans les Hilbert, (voir Gilbarg-Trudinger), pour avoir une solution de $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'équation :

$$-\Delta z = \text{div}(f),$$

avec la propriété suivante (voir la preuve de l'inégalité de Harnack dans le Gilbarg-Trudinger) :

$$\|z\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{q'}.$$

On met u_i comme fonction test dans l'équation de z , on a :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nabla u_i dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u_i dx = - \int_{\Omega} z \Delta u_i dx \leq C'\|f\|_{q'},$$

On prend le supremum dans $L^{q'}$, et on a :

$$\|\nabla u_i\|_q \leq C_q, \quad \forall 1 \leq q < 2.$$

Dans le probleme de Brezis-Merle, on a :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} = o(1),$$

c'est la convergence interieure due au travail de Brezis et Merle. Après, par l'inegalité de Hölder :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega - \Omega_\epsilon)} \leq |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q - 1/r} \|\nabla(u_i - u)\|_{L^r} \leq C_r |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q - 1/r} = o(1), \quad 1 \leq q < r < 2.$$

On obtient finalement :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_q = o(1).$$

RÉFÉRENCES

- [1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.
- [2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959
- [3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.
- [4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [5] Azé. Analyse variationelle...ellipse.1997.
- [6] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [7] Bredon. Geometry and Topology. Springer.
- [8] Brezis. Analyse fonctionnelle; 1983
- [9] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [10] M. G. Crandall. P.H. Rabinowitz. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. 1975.
- [11] Dautray-Lions.
- [12] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63
- [13] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.

- [14] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.
- [15] William Goldman. 1983. Existence de varietes sans structure plate.
- [16] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.
- [17] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.
- [18] Hatcher. Sur les Torus Bandles.
- [19] Huber.A. On subharmonic functions in the large. (1957)
- [20] Hulin, Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces.(1992)
- [21] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [22] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [23] Kuiper. (Conformally flat structure in the large). (1949).
- [24] Kulkarni. Conformally flat manifolds.1972.
- [25] Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.
- [26] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.
- [27] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.
- [28] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [29] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les varietes a bord.
- [30] R. Sa Earp. E. Tubiana. Introduction a la geometrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.

EQUIPE D'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 75005, PARIS, FRANCE.
E-mail address: samybahoura@yahoo.fr, samybahoura@gmail.com