



**HAL**  
open science

# Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.. 2017. hal-01635538v3

**HAL Id: hal-01635538**

**<https://hal.science/hal-01635538v3>**

Submitted on 17 Apr 2018 (v3), last revised 8 Nov 2023 (v22)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules geodesiques, traces de Sobolev et fonctions de Green.

## 1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Hausdorff et la formule d'integration par parties ( Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ? ) :  $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$  alors la mesure  $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$  est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit  $A \subset \partial\Omega$ ,  $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$  mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon, H_{|\partial\Omega}^{n-1}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a,  $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$ , avec  $V_\epsilon$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Dapres le Theoreme d'Urysohn ;

$$\exists f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq f_\epsilon \leq 1, f_\epsilon \equiv 1, \text{ sur } K_\epsilon, \text{ supp } f_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient  $\nu_1, \nu_2$  les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

$\Omega$  est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Hausdorff  $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ , ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et  $|D\chi_\Omega| = H_{|\partial\Omega}^{n-1}$  :

$$\int_\Omega \text{div} \varphi = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_1 dH^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_2 dH^{n-1}, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec  $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$ .

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0, \forall \varphi \in C_c^1,$$

Comme  $C_c^1$  est dense dans  $C_c^0$ , la formule precedente est vraie pour  $\varphi \in C_c^0$

On applique cette formule a  $f_\epsilon$ , on obtient pour tout mesurable  $A$  :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \rightarrow 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2, H_{|\partial\Omega}^{n-1}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale exterieure est la normale exterieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure" ("blow-up") est l'espace tangent usuel).

2) Pourquoi quand on a  $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar{\Omega})$ ,  $tr(u) = u$  ? on utilise Necas et Brezis :

On a :

$\Omega$  est un ouvert Lipschitzien  $\Rightarrow$  cartes Lipschitziennes  $\Rightarrow$  un operateur de Prolongement  $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , d'apres la consturction de loperateur de Prolongement dans des cartes,

$Pu|_{\bar{\Omega}} = u$  et,  $\chi_n(\rho_n * Pu) \rightarrow Pu$  dans  $C_K^0(\mathbb{R}^n)$  et dans  $W^{1,p}$  où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , donc :

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Et,

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u\|_{C^0(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Doù,

$$Tr(u) = u, \quad H_{|\partial\Omega}^{n-1} p.p,$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_\Omega = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_\rho(x)} u(y) dy}{|B_\rho(x)|}$$

on voit que si  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $Tr(u) = u$ .

3) Pourquoi  $W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1}, tr(u) = 0\}$  avec  $\Omega$  ouvert Lipschitzien. Voir le livre de Necas.

a) On considere  $\tilde{u} = u \times 1_\Omega \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  par integration par parties et formule de Stokes.

b) Par des cartes et on multipliant par une fonction test a support compact, localement  $\tilde{u} \in W^{1,1}(Q)$  avec  $Q$  un n-cube "au dela" du bord et nulle avant d'atteindre les cotes du bord qui sont interieurs.

On considere alors  $\tilde{u}_\lambda$ , "la translatee" de  $\tilde{u}$  suivant la direction normale au bord. le support de  $\tilde{u}_\lambda$  est compact et strictement á l'interieur du domaine.

On a : (on applique ces idées à un cube infini dans la direction normale au bord image (locale) de  $\partial\Omega$ , puis on se restreint au n-cube de depart. Sur les bords, la restriction de l'homeomorphisme Lipschitzien envoie les traces sur les traces par la formule de l'aire ou coaire.)

$\tilde{u}_\lambda \in W^{1,1}(Q_{-\lambda})$  avec,

$$\nabla(\tilde{u}_\lambda) = (\nabla\tilde{u})_\lambda.$$

puis en utilisant des fonctions tests dans  $Q$  on obtient :

$\tilde{u}_\lambda \in W^{1,1}(Q)$  pour  $\lambda$  assez petit.

Le support de  $\tilde{u}_\lambda$  est strictement dans  $Q$ , on obtient alors,  $\tilde{u}_\lambda \in W_0^{1,1}(Q)$ .

Par un theoreme de la moyenne (voir Necas,  $\tilde{u}$  s'annule en dehors de  $Q$ ), on obtient  $\tilde{u}_\lambda \rightarrow \tilde{u}$  dans  $W^{1,1}$ . Donc,  $\tilde{u} \in W_0^{1,1}$  et  $u \in W_0^{1,1}$ .

4) Soit  $(M, g)$  une variete riemannienne et soit  $B_r(x)$  une boule geodesique tres petite, telle que l'exponentielle realise un diffeomorphisme sur la boule de  $\mathbb{R}^n$  : pourquoi, la normale exterieure  $\nu = \partial_r$  ?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$$d(exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i, \text{ on identifie les 1-formes } dx_i \text{ et } d\tilde{x}_i.$$

Soit  $B^0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\tilde{B}^0$  la base  $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$  la base canonique de la boule geodesique  $B_r(x)$ , alors  $d(exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$ .

La base  $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_{n-1}}\}$  est directe, donc  $det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$ .

Soit  $\tilde{B}_r = \{d(exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(exp_x)(\partial_{\theta_1}), \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$ , alors :

$$det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [det : B_r \rightarrow B_{0,r}] o [det : B_{0,r} \rightarrow B_r, \text{ qui est directe}] o [det : B_r \rightarrow \tilde{B}_{0,r}] > 0$$

La premiere est  $d(exp_x)^{-1}$  et la derniere  $d(exp_x)$  le determinant selimine, il reste celui de  $B_{0,r}$  vers  $B^0$  qui est direct.

Donc la base  $\tilde{B}_r$  est directe par rapport a la base  $\tilde{B}^0$ .

$n_{ext}$  est definit precisement comme cela tel que  $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$  est directe par rapport a  $\tilde{B}^0$ .

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient  $\omega_\theta$  et  $\Omega$  les formes volumes sur la sphere  $S_r(x)$  et la boule  $B_r(x)$   $n_{ext}$  est tel que son dual  $n_{ext}^*$  verifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_\theta = \Omega,$$

C'est-a-dire que à des constantes multiplicatives pres (determinant des metriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est a dire que la base  $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$  est directe par rapport a la base  $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$  et donc  $n_{ext} = \partial_r$ .

Voir aussi le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine où la normale exterieure est definie par le produit interieur. (Par rapport à la base du bord et l'element de volume du bord) On a le meme resultat.

Par sa construction, la boule geodesique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par rapport à la carte  $(\Omega, \varphi)$  à partir de laquelle elle est construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact  $K$  en utilisant l'exponentielle et cette propriété d'orientabilité des boules geodesiques via l'exponentielle, il faudra supposer la variété orientable.

5) Dans la construction de la fonction de Green pour un operateur coercif  $\Delta + a$  voir le livre d'Aubin et le monograph de Frederic Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'etape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction  $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$ , car la parmetrix  $H_x$  verifie au sens  $C_0^2$  (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les  $\Gamma_i$  verifient cette propriete, elles sont nulles au bord car leur support est dans  $B(m, \delta_m/2)$  et le rayon d'injectivité  $= \delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$ . Puis on utilise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser  $G_x$  dans l'equation et utiliser les Theoremes de Gilbarg-Trudinger :

$$\Delta(V_x - \eta G_x) + a(V_x - \eta G_x) = -\Delta(\eta G_x) + a(\eta G_x) \in L^p, \text{ et } (V_x - \eta G_x) = 0, \text{ sur } \partial M,$$

Avec  $\eta$  une fonction cutoff egale a 1 dans un voisinage de  $\partial M$  et 0 au voisinage de  $x$  (nulle au voisinage de la singularité).

On obtient  $V_x - \eta G_x \in W^{2,p}(M)$  et comme  $\eta G_x \in W^{2,p}(M)$ , alors :  $V_x \in W^{2,p}(M)$ .

Remarques :

1) Dans la formulation variationnelle on peut avoir une solution  $u \in W_0^{1,2}$  de :

$$-\Delta u + au = f, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial M,$$

Dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions  $W_0^{1,1}$ ), ils prouvent que ces solutions sont au sens  $C_0^2$  (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont  $W^{2,p}$  et qu'on a les estimations a priori dans  $W^{2,p}$  d'Agmon (methode des quotients differentiels) ou en sachant qu'elles sont  $W^{2,p}$  qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund ecrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inegalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de  $\Omega$  ce qui fait qu'on peut par continuite obtenir l'estimation  $W^{2,p}$  d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergation par parties, par rapport a la variable  $t > 0$ ) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu = 0, \quad u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

On peut supposer  $L$  le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuite on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inegalité obtenue ne depend pas de  $\Omega$  ce qui fait qu'on peut par continuité obtenir l'estimation  $W^{2,p}$  d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on ecrit à l'ordre 1 :

Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson  $P(x, t) = \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$ .

On suppose que  $\varphi \in C^2 \cap W^{2,p}$ . On ecrit :

$$\partial_s(P(x - y, t + s)\varphi(y, s)) = \partial_s P \varphi + P \partial_s \varphi,$$

On integre en  $y$  et  $s$  et on obtient (on utilise la representation integrale de  $u$  en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - y, t)\varphi(y, 0)dy = \int P(x - y, t + T)\varphi(y, T) + \int \int \partial_t P \varphi + \int \int P \partial_t \varphi,$$

On a  $\partial_t P \equiv \frac{1}{|Q|^{n+1}}$ ,  $Q$  un point quelconque, et  $\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = n + 1$ , on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour  $\partial_t u, \partial_x u$ , on derive sous le signe  $\int$  et puis on integre par parties sur  $\mathbb{R}^n$ . On obtient des integrales du type,

$$\int \int \partial_t P \partial_t \varphi, \int \int \partial_t P \partial_x \varphi, \text{ et } \int \int \partial_x P \partial_t \varphi$$

On elimine  $\int P(x - y, t + T)\varphi(y, T)$  par son estimation en  $c(T) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow +\infty$ .

On obtient des estimations du type :

$$\|\partial u\|_{L^p} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on ecrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

6) Sur le degré topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la definition du degré topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, \deg[x - F(x, T_0)B_{R_2}, 0] = 0$  cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x, t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$ , cela veut dire qu'on peut utiliser l'homotopie :

$$\deg[x - F(x, t), B_{R_2}, 0] = \deg[x - F(x, 0), B_{R_2}, 0] = \deg[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$$

$t = 0, F(x, 0) = \Phi(x)$  et par Nussbaum et la propriété d'excision et d'additivité, on peut décomposer le degre en 2, la condition est que  $\Phi(x) \neq x$  sur  $\partial B_{R_1}$  et  $\Phi(x) = F(x, 0) \neq 0$  sur  $\partial B_{R_2}$ , alors :

$$0 = \deg[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = \deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + \deg[x - \Phi(x), \{R_1 < |x| < R_2\}, 0],$$

La dernière condition est celle de l'homotopie avec l'identité et le degre de l'identité est 1.

$$\deg[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = \deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = \deg[x, B_{R_1}, 0] = 1,$$

Donc,

$$\deg[x - \Phi(x), \{R_1 < |x| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation integrale  $\int_{\Omega} f(u(x) + t)dx \leq C$ ,  $C$  independante de  $t$  et les estimations a priori pour verifier que les conditions d'applications du degré topologique sont verifiées, dans ce cas les  $t$  et les solutions sont uniformément bornés.

7) Sur les surfaces  $K3$ . Soit  $E$  un fiber bundle et  $M$  une variété Complexe de metrique  $h$ .

Remarquons d'abord que cette variété est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien réel est le carré du Jacobien complexe, c'est du à l'holomorphicité, comme en dimension 2 (equation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fibre bundle  $E$ , il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphicité et la metrique, c'est l'analogue complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable à la connexion de Levi-Cevita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une derivee covariante, on a la courbure, on derive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern, c'est la classe de Ricci.

Connexion de Chern  $\Rightarrow$  symboles de Christoffels  $\Rightarrow$  Connexion form,  $\omega$ ,  $\Rightarrow$  Curvature form,

Dans le cas  $E = \wedge^2 T^*(M)$  les 2-formes alternees :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$ , car ici, ce qui joue le role de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur  $E$  (les vecteurs de base sont les 2-formes alternees), les champs de 2-formes alternees,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$ , des qu'on derive encore deuxieme fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces  $K3$ ,  $E = \wedge^2 T^*(M) = 0, 2$  formes alternees :

Si  $E = 0$ , la connexion nulle convient pour la derivation sur  $E$  or la connexion de Chern est unique dou  $\nabla \equiv 0$ . Donc, il ny a pas de courbure do la classe de Chern est nulle,  $c_1 = 0$ .

Les groupes de cohomologies sont connues :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les varietes complexe, il faut prendre la dimension complexe 2 et non reelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualite de Serre, cela va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la theorie de Hodge, on prend la dimension reelle 4, avec la convention  $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \leq p, q \leq 2\}} H^{p,q}$ ,  $p, q$  varient selon la dimension complexe, quand on inverse  $p$  et  $q$  on a par la conjugaison complexe, la meme dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault,  $H^{0,1}$  est isomorphe à la cohomologie de Cech  $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, O_S)$  car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions  $O_S$  et par definition  $H^1(S, O_S) = 0$  d'ou  $h^{0,1} = \dim H^{0,1} = \dim H^1(S, O_S) = 0$ . On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau) sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe), on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la caractéristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension reelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne  $X = S = K3$  :

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \frac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$ , avec  $c_1$  la premiere classe de Chern et  $c_2$  la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure  $\Omega$

$$\det(\Omega - tI) = 1 + tr(\Omega) + \Omega \wedge \dots = 1 + c_1 + c_2,$$

L'integrale  $\int c_2$  est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas d'une surface  $K3$ , c'est donc  $\chi(K3) = \int c_2 = 24$ .

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type  $dx^j \wedge dx^k$  et  $c_2$  est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme  $\int c_k$  avec  $c_k$  la  $k$ -ieme classe de Chern.

Comme la surface  $K3$  est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possede une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec  $(K3, h, \nabla)$  on a une structure hermitienne et par Siu,  $K3$  est Kahler, c'est a dire que la structure Riemannienne  $(K3, g = Re(h), \nabla_g)$  est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Cevita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euler-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (Ricci_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface  $K3$  possede une metrique non-localement conformement plate.

a) Le Projectif complexe de dimension complexe  $n \geq 2$  est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possede (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Cevita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Pourquoi la courbure sectionelle du projectif complexe de dimension  $n \geq 2$  est non-constante : C'est ecrit dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

a) Ils utilisent l'equation des champs de Jacobi, pour determiner le tenseur de Riemann.

b) Ils utilisent la multiplication par le nombre complexe,  $i$ , la structure complexe,  $J$ . Et le fait que  $H_x$  sont les vecteurs orthogonaux a  $z$  et  $iz$ ,  $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ .

Ils utilisent la variations  $H(t, s)$  et les champs de Jacobi.

La courbure sectionelle pour  $u, v$  est calculée a partir du champs de Jacobi,  $Y(s) = \cos su + \sin sJv$  :

$$K(u, v) = 1 + 3\sin^2 s.$$

qui n'est pas constante.

b) Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique la sphere de dimension 2 reellev et donc de curbure sectionelle constante. C'est une surface de Riemann reellev (donc localement plate).

Pourquoi, le Projectif complexe de dimension 2 est isometrique à la sphere de dimension 2. Voir le Gallot-Hulin-Lafontaine :

1-On utilise le quotient par un groupe de Lie. Comme le groupe de Lie agit proprement et transitivement et..., cela veut dire qu'il existe une structure de variété sur le quotient  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$  telle que l'application de passage au quotient soit une submersion.

2-Le fait qu'on ait une submersion, on utilise la definition, localement, on a des sous-variétés, on construit, par des cartes, une base du noyau et apres un procédé d'orthogonalisation de Gramm-Schmidt, on construit un supplementaire orthogonal. l'application de passage au quotient est bijective sur ce supplementaire. ce qui permet de constuire localement un "lift".

3-On definit la metrique sur le quotient de telle maniere que l'application de passage au quotient soit une isometrie, on la construit a partir du lift et par projection sur  $H_x$ .

(Remarque : soit  $p(x) = [x]$  l'application de passage au quotient et  $\gamma$  une isometrie,  $x = \gamma^{-1} \circ \gamma(x) \Rightarrow [x] = [\gamma(x)] \Leftrightarrow p(x) = p \circ \gamma(x)$ , ceci est important dans la consturction de l'isometrie en prouvant que cela ne depend pas de point de la fibre).

On voit que pour le cas de  $\mathbb{S}^3$  et  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ , que la metrique du projectif est celle de la 3-sphere pour des vecteurs particuliers  $v, w$ , par exemple orthogonaux à  $z$  et  $iz$  avec  $z \in \mathbb{S}^3$ . ( le produit scalaire sur  $H_x$  est egal a celui pour l'espace tangent au quotient).

Par exemple si on prend  $z = (1, 0) = [(1, 0), (0, 0)]$  en notation complexe, les  $v, w$  sont de la forme  $v = (0, v_1), w = (0, w_1)$ . Puis en utilisant l'aplication  $H$  du Gallot-Hulin-Lafontaine  $H(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$  et les chemains  $u(t) = \cos tz + \sin tv, w(t) = \cos tz + \sin tw$ , on a :

$$\langle H(u(t))', H(v(t))' \rangle_{\mathbb{S}^2_{t=0}} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{S}^3} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Cela veut dire que,

$$H^*(g_{\mathbb{S}^2}) = g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Remarque : Les revetements riemanniens, sont similaires, au lieu d'avoir une submersion, on a un diffeomorphisme local. Voir, le Gallot-Hulin-Lafontaine, pour la contruction du Tore et des projectifs reels (leur metriques).

Dans le cas des revêtements, puisqu'il y a un difféomorphisme local, la courbure sectionnelle se conserve (voir le Hebey). On voit alors, dans la construction du projectif réel et le Tore, que la courbure sectionnelle est constante, donc, elles sont conformement plates.

8) La formule d'intégration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problèmes variationnels de degré 2, il est possible de résoudre par la formulation variationnelle un problème elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une variété non orientable.

Par contre quand il s'agit de fonction de Green, sur une variété compacte, il est impératif de supposer la variété orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'intégration par parties en dehors de petites boules, on se ramène à une variété à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

9) Pour les variétés de dimension 3. On considère un Torus bundle  $M_\varphi$  d'application  $\varphi$  (voir le Hatcher pour la définition,  $\varphi$  est la monodromy map), il est orientable si et seulement si  $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$ . William Goldman prouve qu'il existe un Torus bundle orientable ne possédant pas de structure conformement plate,  $\varphi$  non périodique, (de valeur propres réelles) (par exemple,  $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ) il n'y a pas de métrique localement conformement plate, comme une variété lisse possède toujours une métrique Riemannienne  $g$ , elle est dans ce cas non localement conformement plate,  $Weyl_g \neq 0$ . Ce théorème dit qu'il n'existe pas de métrique localement conformement plate sur cette variété.

1- Une structure est conformement plate s'il existe une métrique conforme à la métrique euclidienne. Cette définition est équivalente à celle qui dit qu'une structure conformement plate s'il existe un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Möbius (composée de translation, rotation et inversion). Cette équivalence est démontrée dans l'article de Kuiper (1949).

2- Cela veut dire que si on veut savoir si une variété a une structure conformement plate, il suffit d'étudier les transformations conformes, donc le groupe conforme. C'est l'idée de William Goldman, il caractérise le groupe fondamental et le groupe de transformations conforme des variétés conformement plate (il y a une relation entre le groupe fondamental et le groupe des transformations conformes). Si cette condition n'est pas satisfaite alors, la variété n'a pas de structure conformement plate. (le groupe fondamentale doit être polycyclique...).

10) Voir aussi, dans le livre d'Aubin ou la caractérisation de Kuiper de la structure conforme par une isométrie, sert à prouver le Théorème de la masse positive dans le cas conformement plat.

Pour le Théorème de la masse positive de Schoen-Yau en dimension 3, ils prouvent qu'il existe une surface minimale complète ayant une propriété (intégrale de la courbure de Gauss positive) alors que par les calculs cette intégrale est négative ou nulle. Pour cela ils utilisent le théorème d'existence de surfaces minimales et leurs propriétés (Formule de Gauss-Bonnet et Travail de Huber, inégalités isopérimétriques classiques et de Huber, la métrique est voisine de la métrique euclidienne ce qui fait qu'on peut approcher ces deux notions (inégalités isopérimétrique classique)). En particulier, ils prouvent qu'elle est complète dans la première étape. (les fermés bornés sont compacts).

La positivité de la courbure scalaire implique que la surface minimale construite a son intégrale de Gauss Positive. Et puisque la métrique est "presque" euclidienne, il y a conservation de l'inégalité isopérimétrique et par la formule de Gauss-Bonnet, elle serait négative ou nulle. Ce qui n'est pas possible.

Il s'agit de construire une métrique conforme avec une propriété de la courbure scalaire.

Il s'agit de construire une surface minimale ayant une propriété qui découle de la courbure scalaire.

Cette surface minimale complète n'existe pas, car cette propriété n'est pas vraie, par le fait que la métrique est "presque" plate et que l'inégalité isopérimétrique euclidienne se conserve et la formule de Gauss-Bonnet.

#### Remarques :

1-La masse  $< 0$  intervient dans la construction de la surface minimale complète. (raisonnement par l'absurde). (Ils prouvent qu'elle est complète dans cette étape, car, en dehors des bouts,



elle est dans un compact, et dans les bouts elle est entre deux plans et la metrique est equivalente à la metrique euclidienne. (les fermés bornés sont compacts)).

2- Une surface est dite de type fini, si  $\int |K| < +\infty$  : c'est le cas ds la demonstration de la masse positive de Schoen Yau.

3- Quand on a une surface de type fini, si  $\chi(S') > 0$  (la caracteristique d'Euler-Poincaré  $> 0$ , ce qui est le cas ici par Cohn-Vossen), alors  $S'$  est diffeomeorphe au plan. C'est ecrit dans Hulin-Troyanov(1992), premier theoreme, qui dit que,  $S'$  est diffeomorphe à une variété compacte  $S$  sans bord, sans un nombre fini de points. De plus il y a une formule de Gauss Bonnet, on a alors  $S'$  est la sphere moins un au plus un point d'apres cette formule de Gauss-Bonnet. Donc, c'est le plan. Il s'agit d'un diffeomorphisme entre  $S'$  et le plan.

On a d'abord une isometrie  $i$ , puis une application conforme,  $F_1$ . la courbure de Gauss "se conserve". D'abord  $K_{i(S')} = K_{oi}$ , puis par l'application conforme on a un facteur  $|F_1'|^2$ , qui s'elimine dans le changement de variable.  $\int K = \int K_{F_1oi} = \int K_{oi} |F_1'|^2$ , cette derniere inetgrale est la courbure de Gauss de  $F_1oi(S')$ . Puis on applique le result d'Huber. (On considere  $i(S')$  au lieu de  $S'$ , car on a une isometrie et la courbure de Gauss "se conserve",  $\int_{S'} K = \int_{i(S')} K_{oi}$  et  $(F_1^{-1})^*(g_{i(S')}) = |F_1^{-1}|^2 g_C$ , car  $F_1$  est conforme, la metrique se transporte suivant un facteur de la metrique de  $\mathbb{C}$ , on a des coordonnees isothermes globales, on peut appliquer ce que fait Huber (1957)).

(Pour obtenir l'application conforme, on raisonne par rapport au revetement universel et la caracteristique d'Euler-Poincaré).

4- Dans un article de Huber, il prouve que sur une surface ouverte, la formule de "Gauss-Bonnet", pour une suite de domaines :

$$\int K = 2\pi - \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L_\sigma^2 / 2A_\sigma.$$

5- La consturction de la surface est en fait une construction d'un courant (surface avec singularité, par une minimisation d'une fonctionnelle relativement à une metrique), puis, voir le livre de Federer, la surface est reguliere en dehors du bord.  $\partial(N \cap S) = (\partial N \cap S) \cup (\partial S \cap N)$ , par la formule de Stokes,  $S$  est loin du bord, car la courbure moyenne est positive (c'est une hypothese).

(Voir aussi, le livre de Sa Earp-Tubiana, sur le theoreme de Poincaré-Koebe et la calssification par le revetement universel).

Un theoreme d'uniformisation de Poincaré-Koebe, dit que une surface non compacte simplement connexe est conforme au disque unité ou au plan. (voir l'article de Hulin-Troyanov(1992)).

11) Concernant les sommes connexes,  $M \sharp N$  de deux variétés  $M, N$ , elles sont definies a partir d'une relation d'equivalence qui donne une variété quotient Topologique, c'est à dire  $C^0$ , à l'ordre 0 il n'y a pas de probleme, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais des qu'on cherche une structure differentiable ou  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , c'es plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de maniere lisse.

Remarquons que endehors de la sphere ou se fait le recollement, la variété est egale à  $M$  ou  $N$ .

Lorsque on met une metrique sur  $M$  et  $N$  alors par des fonctions cutoff on peut mettre une metrique, par recollement, sur  $M \sharp N$  et elle coincide avec celles de  $M$  et  $N$  en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en  $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$  et  $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$ , on a deux injections naturelles  $i_1, i_2$  et on doit faire le recollement entre  $Id_{B(p, 2\epsilon)}$  et  $i_2oi_1^{-1}$ . On definit une relation dequivalence en partant de couronnes  $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$ ,  $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$  vers les varietes  $M$  et  $N$ . On choisit une carte pour  $N$  renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient  $i_2$ .

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes,  $i_2oi_1^{-1}$  est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de  $M$  a celui de  $N$  de maniere lisse. (Les changements de cartes sont lisses de  $M, N$  et  $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$ , par  $i_2oi_1^{-1}$ .)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de  $M$  et  $N$ , alors  $M \sharp N$  est orientable.

On a :  $X = M \setminus B(p, \epsilon) \cup N \setminus B'(q, \epsilon)$  est compact, le graphe de la relation  $Gr = \{(x, x), x\} \cup \{(x, i_2oi_1^{-1}(x)), x\}$  est fermé, donc,  $X \setminus \sim$  est séparé. Soit  $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus$

$B'(q, \epsilon)$ , et  $\pi$  l'application de passage au quotient. Alors  $\pi(O)$  est un ouvert de  $X \setminus \sim$  car  $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$ .

Soit :  $\Phi$  l'application de recollement de cartes, défini précédemment sur  $\pi(O)$ , alors  $\Phi$  est bien défini et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , par le théorème d'invariance du domaine de Brouwer (car  $i_2$  et  $i_1$  se recollent au bord qui est une sphère, par définition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changements de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x), \quad x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon), \quad \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2}, \quad x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon),$$

avec  $[x] = \pi(x)$ , l'application de passage au quotient.  $i_2$  inverse l'orientation de  $N$ . Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de déterminant positifs, de plus, sur la sphère, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a  $i_1$  avec la bonne orientation et sur le deuxième bout on a  $i_2$  qui inverse l'orientation, et sur la sphère  $|i_2| = 1$ ).

On voit que  $\Phi \circ \pi$  est continue par définition et donc  $\Phi$  est continue.

On a bien,  $(\Phi, \pi(O))$  une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme  $M$  et  $N$  sont orientables,  $M \sharp N$  est orientable.

Avec  $(\Phi, \pi(O))$  on a une carte de recollement, et,

$$\Phi \circ [i_1]^{-1} = \Phi \circ [i_1^{-1}] = Id_{B(p, 2\epsilon) \setminus \bar{B}(p, \epsilon)},$$

$$\Phi \circ [i_2 / |i_2|^2]^{-1} = \Phi \circ [(i_2 / |i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q, 2\epsilon) \setminus \bar{B}'(q, \epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considérant les métriques  $g_M, g_N$  et  $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$ , par des fonctions cutoff, on a par recollement, une métrique sur  $M \sharp N$  :

$$g_{M \sharp N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considère un observateur  $a$  de  $M$  tel que le repère  $(a, T)$  est direct avec  $T$  une orientation du bord. on déplace par une rotation, ou selon un chemin circulaire, vers un observateur  $b$  de  $N$  alors le repère  $(b, T')$  est direct si et seulement si  $T' = -T$ .

12) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grâce aux fonctions de Morse. Par récurrence sur le nombre de points critiques.

1- On vérifie que sous certaines hypothèses d'orientabilité des bords et quand on a deux homeomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homeomorphisme entre les recollés.

2- On utilise une récurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note  $g_1, g_2$  les applications de recollement, dans le Gramain,  $g_1 = f, g_2 = f'$ . Ici, dans le cas des recollés, on prend,  $g_1 = id$  et  $g_2 = id$ , les recollés sont les ensembles de départ (en fait ils sont difféomorphes aux ensembles de départ et  $f_* = id, f'_* = id$ , on a inversion des orientations quand on recolle, et,  $h_* = id, h'_* = id, h$  et  $h'$  conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles  $A$  et  $A'$ , sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse  $C^\infty$ , donc ce sont des variétés compactes  $C^\infty$ , il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se plaçant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.

Pour l'orientabilité des bords,  $A$  et  $A'$  sont (homéomorphes implique difféomorphes en dimension 1) difféomorphes à des cercles et, à droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le difféomorphisme conserve l'inversion d'orientation, son jacobien est positif. D'où, l'application  $k_0$  conserve l'orientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un difféomorphisme global  $h$  et  $h'$ , par contre il y a une définition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orientation pour  $k_0$ ).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant  $p \leq q - 1$  point critiques avec un maximum et un minimum et  $p - 2$  points critiques d'indice 1 est homeomorphe à  $\mathbb{T}_p$ . On peut commencer la recurrence pour  $p = 0$ , la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homeomorphes a des demi-disques et par recollement on a une sphere. A l'ordre  $p = 1$ , pour le Tore, c'est ecrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-memes sont obtenues par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore . Ou bien si on commence la recurrence a partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homeomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-memes obtenus par recollement denssembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas (2) vers le haut (1)) avec l'application de recollement  $g_1 = id, g_2 = id$ , et on obtient le Tore,  $g_2$  est la deuxieme application de recollement). Dans le cas general, on sait qu'il existe une fonction de Morse  $u$ , on decompose en deux, la partie de  $u$  ayant  $p - 1$  points critiques, on lui recolle un disque et par recurrence, elle homeomorphe à  $\mathbb{T}_{q-1}$  et le reste possede 4 point critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par recurrence, homeomorphe au Tore ,  $\mathbb{T}_1$ . Donc, comme c'est ecrit dans le Gramain, en revenant à  $u$ , il y a une partie homeomorphe à  $V_{p-1}$  et l'autre à  $V_1$  et sur  $V_1$  on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc , on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite,  $Y - g_1(A)$  et  $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$ ,  $B$  un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considerant la composée des deux homeomrphismes (c'est l'homeomorphisme  $k_0 = h'og_1og_2^{-1}oh^{-1}$  du Gramain). Il reste a voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a homeomorphismes entre les recollements,  $S = (S - A)\#(S' - B) = (X - A)\#(Y - g_1(A)) = (X - A) \cup (Y - A)$ ,  $g_1 = id$ , et  $V_{p-1}\#V_1$ , ce qui est fait dans le cas orientable ( $A$  homemorphe au cercle dans le Gramain).

On ecrit  $(X - A) \cup (Y - A)$  pour dire qu'on recolle  $X$  et  $Y$  via  $A$ . Les applications du Gramain,  $f = g_1 = id, f' = g_2 = id$  et le recollé (pour la relation d'equivalence,  $x \equiv f(x) = x, x \in A$ ,  $f_* = -id, f'_* = -id$ , est diffeomorphes a l'ensemble de depart. On a  $f_* = -id$  et  $f'_* = -id$  car on inverse les orientations de depart quand on recolle  $(+, h, A \rightarrow A'$ , conservation de l'orientation,  $f', A' \rightarrow f'(A')$ ,  $-$  inversion de l'orientation,  $h'^{-1}, f'(A') \rightarrow f(A)$ ,  $+$ , conservation de l'orientation,  $f^{-1}, f(A) \rightarrow A$ ,  $-$ , inversion de l'orientation). Donc, on a,  $h_* = id, f'_* = -id$ ,  $(h'^{-1})_* = id$  et  $(f^{-1})_* = -id$ . Et on ecrit car  $f = id, f' = id, f_* = id, f'_* = id$ , pour dire qu'on envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation (meme si elle inversée).

On peut raisonner par les generateurs, si  $e_1$  est generateur de  $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$  et  $e_2$  est gnerateur de  $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$ , alors, comme sur la partie de  $Y$  et  $Y'$  on inverse les orientations, on a  $-e_1$  est generateur de  $H_{1,A,Y}$  et  $-e_2$  est generateur de  $H_{1,A',Y'}$ , comme  $f = id$  alors ,  $f_*(e_1) = -e_1$ . On ecrite,  $f_* = id$  dans le sens qu'elle envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation. et on ecrit  $f_* = -id$ , pour dire que  $f_*$  inverse l'orientation de depart sur  $A$ .

On a la meme chose pour  $A'$  et  $f'$ .

Des le depart on a deux homeomorphismes  $h$  et  $h'$ , supposons pas exemple que  $h_* = -id$ ,  $h_*(e_1) = -e_2$ , comme pour  $A'$  on est dans l'epsace euclidien, il suffit de composer avec une symetrie  $t$  pour avoir  $t_*(e_2) = -e_2$  donc,  $hot$  conserve l'orientation sur le bord.  $(hot)_*(e_1) = e_2$  et on fait la meme chose avec  $h'$ . Finalement, on a deux homemorphismes  $hot$  et  $h'ot'$  ou  $h'$  (si  $h'$  conserve l'inversion de l'orientation); qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilisé l'orientation definie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface  $S$  est homemorphe à la somme connexe de  $q$  Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connxe de Tore est une varieté differentiable et donc, cette orientation homologique est equivalente à l'orientation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci à chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans  $\mathbb{R}^3$ , utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des variétés sans bord et des varietés bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et diffeerentiables). L'equivalence entre orientation homologique et differentiable pour une variété lisse est ecrite dans le livre de Bredon (geometry and tpolgy). Remarquons

qu'une variété à bord  $W$  est orientable si et seulement si son intérieur  $\dot{W}$  est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord  $\partial W$  et il y a équivalence aussi entre orientation homologique et différentiable. (il y a un isomorphisme entre  $H_n(W, \partial W, Z)$  et  $H_n(W, W - x, Z)$ ).

Concernant la structure différentiable sur le recollé de  $X - A \cup_{f,A} Y - A$ , dans Milnor (Somme connexe et structure différentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de  $X - A$  et  $Y - A$ , sont difféomorphes à des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure différentiable. Or, pour la somme connexe de deux variétés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant à ici, le recollé  $X - A \cup_{f,A} Y - A$  est difféomorphe à  $X - A \cup Y - A$ , on a déjà une structure différentiable sur le recollé, via ce difféomorphisme. (la projection  $p : x \rightarrow [x]$  est un difféomorphisme).

Quant à l'écriture  $\mathbb{T}_{q-1} \# \mathbb{T}_1$ , c'est la somme connexe, comme on est dans  $\mathbb{R}^3$ , somme connexe et recollement coïncident.

Quand on a une application  $s$  qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variété  $M_1$  compacte sans bord de dimension 1,  $s_* = id$ . Pour le voir, on a si l'orientation est inversée sur  $M_1$  et  $M_2 = s(M_1)$ , cela veut dire que  $-1$  est générateur de  $H_1(M_1, M_1 - x_0)$  et de  $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$ . Donc,  $s_*(-1) = -1$ , c'est à dire que  $s_* = id$ . Lorsque  $\varphi_1$  inverse l'orientation alors  $(\varphi_1)_* = -id$ .

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que  $M_1 - x_0$  est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

$s_*$  est un isomorphisme de  $H_1(M_1)$  vers  $H_1(M_2)$ , comme il conserve l'orientation  $s_* = id$ .

Pour le voir il suffit de raisonner sur les générateurs  $s_*(e_1) = ke_2$  et  $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$ , donc,  $kk' = 1$ , comme ces des entiers  $k = 1$  ou  $k = -1$ , comme  $s$  conserve l'orientation  $k = 1$ . On fait la même chose pour  $\varphi_1$  et on obtient  $k = -1$ .

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De  $\pi_1(S_1)$  dans  $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : [\gamma] \rightarrow \tilde{[\gamma]}$$

On applique cela aux applications du Gramain,  $s = h'^{-1}oh$  (conserve l'orientation) et  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$ , ici,  $f = id, f' = id$  et  $M_1 = M_2 = A$ , puis on raisonne en considérant  $S_1 \times \{0\}$  au lieu de  $S_1$ .

$$k = \varphi^{-1}oso\varphi,$$

$$\pi(k)[\gamma] = [\varphi^{-1}oso\varphi\gamma] =$$

$$\bar{h}^{-1}([\varphi^{-1}oso\varphi\gamma]) =$$

$$= \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_*os_*o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) =$$

$$= \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) = [\gamma],$$

Où on a utilisé le fait que  $\varphi_* = id$  si on se place sur  $X$  (on conserve l'orientation) ou  $\varphi_* = -id$  si on se place de côté de  $Y$  (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer  $[\gamma]$  par un générateur  $e_1 = [\gamma_1]$  et raisonner sur les générateurs.

Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas où  $k(a) = a$ ,  $k$  fixe un point. Sinon, ( $k$  ne fixe pas  $a$ ), on compose avec une rotation  $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$ , or en considérant  $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$ ,  $s \in [0, 1]$ , on a une homotopie entre  $r$  et l'identité  $id$ . Donc,  $r_* = id$  de  $H_1(S_1) \rightarrow H_1(S_1)$ .

Donc,  $k'_* = id$ , puis on utilise le même groupe fondamental en  $a$ ,  $\pi_1(S_1, a)$  et l'application d'Hurwicz, comme précédemment pour prouver que  $\pi(k') = id$ .

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger  $k$ .

L'autre cas,  $Y$  rectangle et  $g_1(A)$ , deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur  $Y$ , celle-ci change quand on part de  $X$  et on lui recolle  $Y$  via  $A$ . (ici,  $g_1 = f$  est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension  $\leq 3$ .

13) Pour l'inegalité de Kato : on a  $u \in L^1_{loc}$  et  $\Delta u \in L^1_{loc}$  alors :  $u \in W^{1,1}_{loc}$ , pourquoi ?

Comme c'est local, on ecrit dans une boule  $u$  en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et  $n \geq 3$  par exemple,  $n = 2$  c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec  $\partial P$  regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut deriver sous le signe  $\int$  pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists r \int_{\partial B_r} u(\sigma) d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour  $\varphi \in D(B_{r/2})$  :

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \text{termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int \int \left(\partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right)(-\Delta u)\varphi + \int \int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \quad a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

Ceci est valable pour  $u$  reguliere. Soit  $\rho_n$  un molliffier, alors :

Si  $u \in L^1(B_r)$ , alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour  $x \in B_{r/2}$  :

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \rightarrow u, \text{ dans } L^1_{loc}(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \rightarrow \Delta u, \text{ dans } L^1_{loc}(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec  $u$ , avec  $\rho_n * u$ , comme on a des bornes uniformes en  $L^1_{loc}$ , alors,

$$\rho_n * u \in W^{1,1}_{loc}, \text{ et } \nabla(\rho_n * u) \rightarrow v \in L^1_{loc},$$

Donc,

$$\int u \partial\varphi = \lim_n \int (\rho_n * u) \partial\varphi = - \lim_n \int \partial(\rho_n * u) \varphi \rightarrow - \int v \varphi,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

On a la meme chose si on considere un probleme variationnel  $-\Delta u = f$ ,  $f \in L^1_{loc}$  et  $u \in L^1_{loc}$ .  
On a meme mieux,  $u \in W^{1,q}_{loc}$ .

On peut retrouver ce resultat en se ramenant a une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un probleme de Dirichlet.

Soit  $f \in L^1$ ,  $\exists f_j \rightarrow f$  dans  $L^1$  avec  $f_j \in C^\infty$ , on resout :

$$-\Delta u_j = f_j, \text{ avec } u_j = 0, \text{ sur } \partial\Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|u_j\|_{W^{1,q}_0} \leq Cq,$$

En passant à la limite en  $j$ , on a l'existence de  $u_0 \in W^{1,q}_0$  tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \text{ et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le theoreme de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W^{1,q}_{loc},$$

On retrouve le Theoreme dans le livre de Dautray-Lions.

14) Sur la fonction distance au bord : c'est bien ecrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grace a la propriété de la sphere interieure, il existe un voisinage du bord assez petit tel que la fonction distance est  $C^k$  et est egale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des spheres le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit etre par exemple au moins  $C^2$ .

15) Pour le theoreme de Dualité de Stampacchia :

On part de l'equation :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec la condition de Dirichlet. ( $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ ).

On a :

$$u_i \in W^{2,k} \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega}), \quad u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On a :

$$\left| \int_{\Omega} \Delta u_i dx \right| \leq bC.$$

On considere un vecteur  $f = (f_1, f_2) \in L^{q'}(\Omega)$  avec  $q' > 2$ . On utilise le Theoreme de Lax-Milgram dans les Hilbert, (voir Gilbarg-Trudinger), pour avoir une solution de  $z \in W^{1,2}_0(\Omega)$  de l'equation :

$$-\Delta z = \text{div}(f),$$

avec la propriété suivante (voir la preuve de l'inégalité de Harnack dans le Gilbarg-Trudinger) :

$$\|z\|_{L^\infty} \leq C\|f\|_{q'}.$$

On met  $u_i$  comme fonction test dans l'equation de  $z$ , on a :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nabla u_i dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u_i dx = - \int_{\Omega} z \Delta u_i dx \leq C'\|f\|_{q'},$$

On prend le supremum dans  $L^{q'}$ , et on a :

$$\|\nabla u_i\|_q \leq C_q, \forall 1 \leq q < 2.$$

Dans le probleme de Brezis-Merle, on a :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} = o(1),$$

c'est la convergence interieure d'ue au travail de Brezis et Merle. Apr'es, par l'inegalit' de H'older :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega - \Omega_\epsilon)} \leq |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/r-1/q} \|\nabla(u_i - u)\|_{L^r} \leq C_r |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/r-1/q} = o(1), \quad 1 \leq q < r < 2.$$

On obtient finalement :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_q = o(1).$$

#### R'EF'ERENCES

- [1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.
- [2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959
- [3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.
- [4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [5] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [6] Bredon. Geometry and Topology. Springer.
- [7] Brezis. Analyse fonctionnelle; 1983
- [8] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [9] Dautray-Lions.
- [10] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63
- [11] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.
- [12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.
- [13] William Goldman. 1983. Existence de varietes sans structure plate.
- [14] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.
- [15] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.
- [16] Hatcher. Sur les Torus Bundles.
- [17] Huber.A. On subharmonic functions in the large. (1957)
- [18] Hulin, Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces.(1992)
- [19] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [20] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [21] Kuiper. (Conformally flat structure in the large). (1949).
- [22] Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.
- [23] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.
- [24] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.
- [25] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [26] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les varietes a bord.
- [27] R. Sa Earp. E. Tubiana. Introduction a la geometrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.

EQUIPED' ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 75005, PARIS, FRANCE.  
E-mail address: samybahoura@yahoo.fr, samybahoura@gmail.com