



**HAL**  
open science

# Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.. 2023. hal-01635538v21

**HAL Id: hal-01635538**

**<https://hal.science/hal-01635538v21>**

Preprint submitted on 12 Sep 2023 (v21), last revised 8 Nov 2023 (v22)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, réels, le Tore, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules geodesiques, traces de Sobolev et fonctions de Green et un Théorème de Dualité, le degré topologique de Leray-Schauder et des points fixes topologiques (en particulier, application en dimension 2), les solutions topologiques dans le cas negatif (critique et supercritique, Eq de courbure scalaire prescrite negatif et Eq. supercritique negatif), la metrique induite sur un ouvert Lipschitzien, les coordonnées geodesiques polaires et la formule de Gauss-Bonnet et sur le Théorème de la masse positive en dimension 3 et dans le cas conformément plat. Et le flot de Ricci et sur les inégalités du type  $\sup u = f(\inf u)$ , et sur la théorie de Yang-Mills et la relativité générale et la cosmologie quantique et leur relation avec l'equation de Yamabe et de la courbure prescrite et du type courbure prescrite. Et des obstructions d'astronomie. Et sur les cordes, supercordes et D-branes.

## 1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Hausdorff et la formule d'integration par parties ( Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ?) :  $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$  alors la mesure  $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$  est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit  $A \subset \partial\Omega$ ,  $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$  mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon, H_{|\partial\Omega}^{n-1}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a,  $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$ , avec  $V_\epsilon$  ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

Dapres le Theoreme d'Urysohn ;

$$\exists f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq f_\epsilon \leq 1, f_\epsilon \equiv 1, \text{ sur } K_\epsilon, \text{ supp } f_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient  $\nu_1, \nu_2$  les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

$\Omega$  est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Hausdorff  $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ , ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et  $|D\chi_\Omega| = H_{|\partial\Omega}^{n-1}$  :

$$\int_\Omega \text{div} \varphi = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_1 dH^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_2 dH^{n-1}, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec  $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$ .

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0, \forall \varphi \in C_c^1,$$

Comme  $C_c^1$  est dense dans  $C_c^0$ , la formule precedente est vraie pour  $\varphi \in C_c^0$

On applique cette formule a  $f_\epsilon$ , on obtient pour tout mesurable  $A$  :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \rightarrow 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2, H_{|\partial\Omega}^{n-1}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale extérieure est la normale extérieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure" ("blow-up") est l'espace tangent usuel).

La formule d'intégration par parties est bien connue. Pour sa preuve, voir les livres de Fusco (bords avec singularités par recouvrement et suite de compacts  $K_n \rightarrow \partial\Omega - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers), Necas et Azé.

La formule d'intégration par parties sur un domaine singulier en un nombre fini de points en dimension 2 (par exemple) :

La formule est locale, on considère  $B(x_j, 1/n)$  avec  $x_j$  un point singulier du bord. La formule est locale, par un recouvrement et une partition de l'unité on écrit que (voir le Azé, dans chaque partie du recouvrement et on rajoute la boule où il y a la singularité  $B(x_j, 1/n)$ ) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((1 - \alpha_n)u) dx = \int_{\partial\Omega} (1 - \alpha_n)u d\sigma,$$

avec  $\alpha_n$  une fonction régulière et à support compact dans  $B(x_j, 1/n)$ ,  $\alpha_n \equiv 1$  dans  $B(x_j, 1/2n)$ . Avec le fait,  $|\nabla\alpha_n| \leq Cn$  et  $\mu_L(B(x_j, 1/n)) \leq C/n^2$  et  $H_1(\{x_j\}) = 0$ , la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle (ici, on l'a fait pour le point  $x_j$ ). Puis on fait tendre  $n \rightarrow +\infty$ . On obtient la formule de Stokes ou Green-Riemann pour un domaine contenant un nombre fini de singularités au bord.

2) Pourquoi quand on a  $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar{\Omega})$ ,  $tr(u) = u$ ? on utilise Necas et Brezis :

On a :

$\Omega$  est un ouvert Lipschitzien  $\Rightarrow$  cartes Lipschitziennes  $\Rightarrow$  un opérateur de Prolongement  $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , d'après la construction de l'opérateur de Prolongement dans des cartes,  $Pu|_{\bar{\Omega}} = u$  et,  $\chi_n(\rho_n * Pu) \rightarrow Pu$  dans  $C_K^0(\mathbb{R}^n)$  et dans  $W^{1,p}$  où  $K$  est un compact de  $\mathbb{R}^n$ , donc :

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Et,

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u\|_{C^0(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Donc,

$$Tr(u) = u, \quad H_{|\partial\Omega}^{n-1} p.p,$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_{\Omega} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_{\rho}(x)} u(y) dy}{|B_{\rho}(x)|}$$

on voit que si  $u \in C^0(\bar{\Omega})$ ,  $Tr(u) = u$ .

3) Pourquoi  $W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1}, tr(u) = 0\}$  avec  $\Omega$  ouvert Lipschitzien. Voir le livre de Necas. On raisonne par rapport aux suites ( $\exists u_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ ,  $u_i \rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$  pour les traces et la restrictions à des sous ensembles d'ouverts Lipschitzien).

a) On considère  $\tilde{u} = u \times 1_{\Omega} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$  par intégration par parties et formule de Stokes.

b) Par des cartes et on multiplie par une fonction test à support compact, localement  $\tilde{u} \in W^{1,1}(Q)$  avec  $Q$  un n-cube "au delà" du bord et nulle avant d'atteindre les cotés du bord qui sont intérieurs.

On considère alors  $\tilde{u}_{\lambda}$ , "la translatée" de  $\tilde{u}$  suivant la direction normale au bord. le support de  $\tilde{u}_{\lambda}$  est compact et strictement à l'intérieur du domaine.

On a : (on applique ces idées à un cube infini dans la direction normale au bord image (locale) de  $\partial\Omega$ , puis on se restreint au n-cube de départ. Sur les bords, la restriction de l'homeomorphisme Lipschitzien envoie les traces sur les traces par la formule de l'aire ou coaire. (par convergence de suites sur des ouverts Lipschitziens).)

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q_{-\lambda})$  avec,

$$\nabla(\tilde{u}_{\lambda}) = (\nabla\tilde{u})_{\lambda}.$$

puis en utilisant des fonctions tests dans  $Q$  on obtient :

$\tilde{u}_\lambda \in W^{1,1}(Q)$  pour  $\lambda$  assez petit.

Le support de  $\tilde{u}_\lambda$  est strictement dans  $Q$ , on obtient alors,  $\tilde{u}_\lambda \in W_0^{1,1}(Q)$ .

Par un theoreme de la moyenne (voir Necas,  $\tilde{u}$  s'annule en dehors de  $Q$ ), on obtient  $\tilde{u}_\lambda \rightarrow \tilde{u}$  dans  $W^{1,1}$ . Donc,  $\tilde{u} \in W_0^{1,1}$  et  $u \in W_0^{1,1}$ .

4) Soit  $(M, g)$  une variete riemannienne et soit  $B_r(x)$  une boule geodesique tres petite, telle que l'exponentielle realise un diffeomorphisme sur la boule de  $\mathbb{R}^n$  : pourquoi, la normale exterieure  $\nu = \partial_r$  ?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$d(\exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i$ , on identifie les 1-formes  $dx_i$  et  $d\tilde{x}_i$ .

Soit  $B^0$  la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et  $\tilde{B}^0$  la base  $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$  la base canonique de la boule geodesique  $B_r(x)$ , alors  $d(\exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$ .

La base  $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_{n-1}}\}$  est directe, donc  $\det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$ .

Soit  $\tilde{B}_r = \{d(\exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_1}), \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$ , alors :

$\det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [det : B_r \rightarrow B_{0,r}]o[det : B_{0,r} \rightarrow B_r, \text{ qui est directe}]o[det : B_r \rightarrow \tilde{B}_{0,r}] > 0$

La premiere est  $d(\exp_x)^{-1}$  et la derniere  $d(\exp_x)$  le determinant se elimine, il reste celui de  $B_{0,r}$  vers  $B^0$  qui est direct.

Donc la base  $\tilde{B}_r$  est directe par rapport a la base  $\tilde{B}^0$ .

$n_{ext}$  est definit precisement comme cela tel que  $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$  est directe par rapport a  $\tilde{B}^0$ .

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient  $\omega_\theta$  et  $\Omega$  les formes volumes sur la sphere  $S_r(x)$  et la boule  $B_r(x)$   $n_{ext}$  est tel que son dual  $n_{ext}^*$  verifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_\theta = \Omega,$$

C'est-a-dire que à des constantes multiplicatives pres (determinant des metriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est a dire que la base  $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$  est directe par rapport a la base  $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$  et donc  $n_{ext} = \partial_r$ .

Voir aussi le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine où la normale exterieure est definie par le produit interieur. (Par rapport à la base du bord et l'element de volume du bord) On a le meme resultat.

Par sa construction, la boule geodesique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par rapport à la carte  $(\Omega, \varphi)$  à partir de laquelle elle est construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact  $K$  en utilisant l'exponentielle et cette propriété d'orientabilité des boules geodesiques via l'exponentielle, il faudra supposer la variété orientable.

5) Dans la construction de la fonction de Green pour un operateur coercif  $\Delta + a$  voir le livre d'Aubin et le monograph de Frederic Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'etape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction  $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$ , car la parmetrix  $H_x$  verifie au sens  $C_0^2$  (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les  $\Gamma_i$  verifient cette proprité, elles sont nulles au bord car leur support est dans  $B(m, \delta_m/2)$  et le rayon d'injectivité  $= \delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$ . Puis on utilise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser  $G_x$  dans l'equation et utiliser les Theoremes de Gilbarg-Trudinger :

$\Delta(V_x - \eta G_x) + a(V_x - \eta G_x) = -\Delta(\eta G_x) + a(\eta G_x) \in L^p$ , et  $(V_x - \eta G_x) = 0$ , sur  $\partial M$ ,

Avec  $\eta$  une fonction cutoff egale a 1 dans un voisinage de  $\partial M$  et 0 au voisinage de  $x$  ( nulle au voisinage de la singularité).

On obtient  $V_x - \eta G_x \in W^{2,p}(M)$  et comme  $\eta G_x \in W^{2,p}(M)$ , alors :  $V_x \in W^{2,p}(M)$ .

Remarques :

1) Dans la formulation variationelle on pour une solution  $u \in W_0^{1,2}$  de :

$$-\Delta u + au = f, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial M,$$

Dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions  $W_0^{1,1}$ ), ils prouvent que ces solutions sont au sens  $C_0^2$  (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont  $W^{2,p}$  et qu'on a les estimations a priori dans  $W^{2,p}$  d'Agmon ( méthode des quotients differentiels) ou en sachant qu'elles sont  $W^{2,p}$  qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund écrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inegalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de  $\Omega$  ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation  $W^{2,p}$  d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergartion par parties, par rapport a la variable  $t > 0$ ) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu = 0, \quad u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

On peut supposer  $L$  le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuité on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenebrg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans linegalité obtenue ne depend pas de  $\Omega$  ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation  $W^{2,p}$  d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on écrit à l'ordre 1 :

Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson  $P(x, t) = \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$ .

On suppose que  $\varphi \in C^2 \cap W^{2,p}$ . On écrit :

$$\partial_s(P(x - y, t + s)\varphi(y, s)) = \partial_s P\varphi + P\partial_s\varphi,$$

On integre en  $y$  et  $s$  et on obtient (on utilise la representation integrale de  $u$  en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - y, t)\varphi(y, 0)dy = \int P(x - y, t + T)\varphi(y, T) + \int \int \partial_t P\varphi + \int \int P\partial_t\varphi,$$

On a  $\partial_t P \equiv \frac{1}{|Q|^{n+1}}$ ,  $Q$  un point quelconque, et  $dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = n + 1$ , on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour  $\partial_t u, \partial_x u$ , on derive sous le signe  $\int$  et puis on integre par parties sur  $\mathbb{R}^n$ . On obtient des integrales du type,

$$\int \int \partial_t P\partial_t\varphi, \quad \int \int \partial_t P\partial_x\varphi, \quad \text{et} \quad \int \int \partial_x P\partial_t\varphi$$

On elimine  $\int P(x - y, t + T)\varphi(y, T)$  par son estimation en  $c(T) \rightarrow 0$  quand  $T \rightarrow +\infty$ .

On obtient des estimations du type :

$$\|\partial u\|_{L^p} \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on ecrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

6) Sur le degre topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la definition du degre topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, deg[x - F(x, T_0)B_{R_2}, 0] = 0$  cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x, t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$ , cela veut dire qu'on peut utiliser l'homotopie :

$$deg[x - F(x, t), B_{R_2}, 0] = deg[x - F(x, 0), B_{R_2}, 0] = deg[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$$

$t = 0, F(x, 0) = \Phi(x)$  et par Nussbaum et la propriété d'excision et d'additivité, on peut décomposer le degre en 2, la condition est que  $\Phi(x) \neq x$  sur  $\partial B_{R_1}$  et  $\Phi(x) = F(x, 0) \neq x$  sur  $\partial B_{R_2}$ , alors :

$$0 = deg[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + deg[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0],$$

La dernière condition est celle de l'homotopie avec l'identité et le degre de l'identité est 1.

$$deg[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = deg[x, B_{R_1}, 0] = 1,$$

Donc,

$$deg[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation integrale  $\int_{\Omega} f(u(x)+t)dx \leq C, C$  independante de  $t$  et les estimations a priori pour verifier que les conditions d'applications du degre topologique sont verifiées, dans ce cas les  $t$  et les solutions sont uniformément bornés.

Concernant l'article de Crandall-Rabinowitz, il traite du cas où en particulier on a un terme nonlineaire du type exponentiel. Grace à la condition de stabilité (ils prennent des fonctions tests particulieres), ils prouvent que la masse et le volume ou energie, sont bornées (jusqu'a la dimension 10).

La formulation du degre précédente s'applique aux equations en sinh sans poids ou avec poids, pour le laplacien ou l'operateur plus general que le laplacien, en dimension 2 par exemple. Voir l'article de Brezis-Turner et vers la fin de ce print, sur le degre en dimmension 2 et pour des systemes avec singularités.

7) Sur les surfaces  $K3$ . Soit  $E$  un fiber bundle (fibré vectoriel) et  $M$  une variété Complexe de metrique  $h$ .

Remarquons d'abord que cette varité est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien réel est le carré du Jacobien complexe, cest du a l'holomorphie, comme en dimension 2 (equation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fibre bundle  $E$ , il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphie et la metrique, c'est l'analogue complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable a la connexion de Levi-Civita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une derivee covariante, on a la courbure, on derive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern , cest la classe de Ricci.

Connexion de Chern  $\Rightarrow$  symboles de Christofels  $\Rightarrow$  Connexion form,  $\omega, \Rightarrow$  Curvature form,

Dans le cas  $E = \wedge^2 T^*(M)$  les 2-formes alternees :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$ , car ici, ce qui joue le role de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur  $E$  (les vecteurs de base sont les 2-formes alternees), les champs de 2-formes alternees,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$ , des qu'on dérive encore deuxieme fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces  $K3$ ,  $E = \wedge^2 T^*(M) = 0$ , 2 formes alternees :

Si  $E = 0$ , la connexion nulle convient pour la derivation sur  $E$  or la connexion de Chern est unique dou  $\nabla \equiv 0$ . Donc, il ny a pas de courbure do la classe de Chern est nulle,  $c_1 = 0$ .

Les groupes de cohomologies sont connues :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les varietes complexe, il faut prendre la dimension complexe 2 et non reelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualite de Serre, cela va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la theorie de Hodge, on prend la dimension reelle 4, avec la convention  $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \leq p, q \leq 2\}} H^{p,q}$ ,  $p, q$  varient selon la dimension complexe, quand on inverse  $p$  et  $q$  on a par la conjugaison complexe, la meme dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault,  $H^{0,1}$  est isomorphe à la cohomologie de Cech  $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, O_S)$  car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions  $O_S$  et par definition  $H^1(S, O_S) = 0$  d'ou  $h^{0,1} = \dim H^{0,1} = \dim H^1(S, O_S) = 0$ . On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau) sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe), on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la caractéristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension reelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne  $X = S = K3$  :

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \frac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$ , avec  $c_1$  la premiere classe de Chern et  $c_2$  la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure  $\Omega$

$$\det(\Omega - tI) = 1 + \text{tr}(\Omega) + \Omega \wedge \dots = 1 + c_1 + c_2,$$

L'integrale  $\int c_2$  est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas dune surface  $K3$ , cest donc  $\chi(K3) = \int c_2 = 24$ .

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type  $dx^j \wedge dx^k$  et  $c_2$  est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme :  $\int c_k$  avec  $c_k$  la  $k$ -ieme classe de Chern.

Comme la surface  $K3$  est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possède une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec  $(K3, h, \nabla)$  on a une structure hermitienne et par Siu,  $K3$  est Kahler, c'est a dire que la structure Riemannienne  $(K3, g = \text{Re}(h), \nabla_g)$  est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Civita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euler-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (\text{Ricci}_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface  $K3$  possède une metrique non-loclamment conformement plate.

a) Le Projectif complexe de dimension complexe  $n \geq 2$  est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possède (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Civita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Pourquoi la courbure sectionelle du projectif complexe de dimension  $n \geq 2$  est non-constante : C'est ecrit dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

a) Ils utilisent l'equation des champs de Jacobi, pour determiner le tenseur de Riemann.

b) Ils utilisent la multiplication par le nombre complexe,  $i$ , la structure complexe,  $J$ . Et le fait que  $H_x$  sont les vecteurs orthogonaux a  $z$  et  $iz$ ,  $z \in \mathbb{S}^{2n+1}$ .

Ils utilisent la variations  $H(t, s)$  et les champs de Jacobi.

La courbure sectionnelle pour  $u, v$  est calculée a partir du champs de Jacobi,  $Y(s) = \cos s u + \sin s Jv$  :

$$K(u, v) = 1 + 3\sin^2 s.$$

qui n'est pas constante.

b) Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique a la sphere de dimension 2 reellev et donc de curbure sectionnelle constante. C'est une surface de Riemann reellev (donc localement plate).

Pourquoi, le Projectif complexe de dimension 2 est isometrique à la sphere de dimension 2. Voir le Gallot-Hulin-Lafontaine :

1-On utilise le quotient par un groupe de Lie. Comme le groupe de Lie agit proprement et transitivement et..., cela veut dire qu'il existe une structure de variété sur le quotient  $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$  telle que l'application de passage au quotient soit une submersion.

2-Le fait qu'on ait une submersion, on utilise la definition, localement, on a des sous-variétés, on construit, par des cartes, une base du noyau et apres un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on construit un supplémentaire orthogonal. l'application de passage au quotient est bijective sur ce supplémentaire. ce qui permet de construire localement un "lift".

3-On definit la metrique sur le quotient de telle maniere que l'application de passage au quotient soit une isometrie, on la construit a partir du lift et par projection sur  $H_x$ .

(Remarque : soit  $p(x) = [x]$  l'application de passage au quotient et  $\gamma$  une isometrie,  $x = \gamma^{-1}o\gamma(x) \Rightarrow [x] = [\gamma(x)] \Leftrightarrow p(x) = p\circ\gamma(x)$ , ceci est important dans la construction de l'isometrie en prouvant que cela ne depend pas de point de la fibre).

On voit que pour le cas de  $\mathbb{S}^3$  et  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ , que la metrique du projectif est celle de la 3-sphere pour des vecteurs particuliers  $v, w$ , par exemple orthogonaux à  $z$  et  $iz$  avec  $z \in \mathbb{S}^3$ . ( le produit scalaire sur  $H_x$  est egal a celui pour l'espace tangent au quotient).

Par exemple si on prend  $z = (1, 0) = [(1, 0), (0, 0)]$  en notation complexe, les  $v, w$  sont de la forme  $v = (0, v_1), w = (0, w_1)$ . Puis en utilisant l'application  $H$  du Gallot-Hulin-Lafontaine  $H(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$  et les chemins  $u(t) = \cos t z + \sin t v, w(t) = \cos t z + \sin t w$ , (on se ramene à ce cas par une rotation car la variété est invariante par  $U(n+1)$ , les rotations complexes, (elle est construite à partir de  $S^{2n+1}$ ), on a :

$$\langle H(u(t))', H(v(t))' \rangle_{\mathbb{S}^2_{t=0}} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{S}^3} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}.$$

Cela veut dire que,

$$H^*(g_{\mathbb{S}^2}) = g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}.$$

Remarque : Les revetements riemanniens, sont similaires, au lieu d'avoir une submersion, on a un diffeomorphisme local. Voir, le Gallot-Hulin-Lafontaine, pour la construction du Tore et des projectifs reels (leur metriques).

Dans le cas des revetements, puisqu'il y a un diffeomorphisme local, la courbure sectionnelle se conserve (voir le Hebey). On voit alors, dans la construction du projectif reellev et le Tore, que la courbure sectionnelle est constante, donc, elles sont conformement plates.

On a la meme chose avec les groupes de Lie et les espaces homogenes. On a une fibration qui est une submersion et on construit une metrique  $G$ - invariante par le meme procédé que les submersions et les revetements. De plus, si par exemple, on considere  $P_n(\mathbb{C})$ , les groupes unitaires (les rotations complexes)  $U(n+1)$  et  $SU(n+1)$  agissent transitivement et proprement sur  $P_n(\mathbb{C})$  par l'intermediaire de la sphere  $\mathbb{S}^{2n+1}$ .

1-  $P_n(\mathbb{C})$  est à la fois identifiable à  $U(n+1)/U(1) \times U(n)$  et  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ . De plus, comme on la vu dans le cas des submersions, pour connaître la metrique de  $P_n(\mathbb{C})$ , il suffit de se placer sur la sphere  $S^{2n+1}$ , car on prend  $H_x$  l'orthogonal de  $z$  et  $iz$ , avec  $z \in S^{2n+1}$ . Pour ce qui concerne les groupes de Lie, la formule donnant la metrique  $G$ - invariante est egale à ( $C$  designe le produit scalaire dans  $\mathbb{C}$ ) :

$$\langle x|y \rangle_{[e], P_n(\mathbb{C})} = \int_{H_1} \langle Adh_1.x | Adh_1.y \rangle_C dv_{H_1}$$

Or, dans l'espace des matrices, la derivee de l'adjoint est connue et est egale, (on raisonne par rapport aux chemins et en particulier de l'exponentielle) :



$$Adh_1.x = Ad_{G/H}h_1.x = h_1^{-1}.x.h_1, \quad Adh_1.y = h_1^{-1}.y.h_1,$$

avec l'identification,  $x = [x] = u$ ,  $[x] \in SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$  et  $x = u \in H_x \subset \mathbb{C} \equiv P_n(C)$ .

Car ici,  $G/H = P_n(C)$  et on prend le plan tangent et dans ce cas il faut prendre des vecteurs de  $H_x$  donc de  $S^{2n+1}$ , (raisonner par rapport à l'exponentielle et les chemins). ( $t \rightarrow \exp(tx)$  est un bon chemin et en plus quand on derive on a l'adjoint). (on se ramene au produit scalaire de  $S^{2n+1}$ ).

$$G = SU(n+1), H = G_m = S(U(1) \times U(n)).$$

**Remarque :** La metrique sur  $G/H$  est definie de telle maniere que la correspondance :  $F : [x] \in G/H \rightarrow u \in P_n(C)$  soit une isometrie. (voir le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine, sur la correspondance via  $S^{2n+1}$  entre  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$  en tant que groupe de Lie et  $P_n(C)$  via  $\mathbb{S}^{2n+1}$ . Donc, on retrouve le fait que les metriques sont proportionnelles. (Eux, ils notent  $U(n+1)/U(1) \times U(n)$ ).

Gallot-Hulin-Lafontaine disent qu'on peut prendre "any scalar product on  $T_e(G/H)$ ". Comme  $G/H$  s'identifie par  $F$  à  $P_n(C)$ , on choisit le produit scalaire tel que  $F$  soit une isometrie vers le projectif complexe. Ce qui revient à obtenir le produit scalaire du projectif complexe.

Finalement, on ecrit, puisque  $\bar{h}_1^t h_1 = 1$  et  $(\bar{h}_1^{-1})^t h_1^{-1} = 1$  :

$$\begin{aligned} \langle x|y \rangle_{[e], P_n(C)} &= \int_{H_1} \langle (h_1^{-1}.y.h_1)^t | h_1^{-1}.x.h_1 \rangle_C dv_{H_1} = \\ &= \int_{H_1} \langle (h_1^{-1})^t .y^t .(h_1^{-1})^t | h_1^{-1}.x.h_1 \rangle_C dv_{H_1} = \\ &= \int_{H_1} \langle y^t | x \rangle_C dv_{H_1} = \mu \langle x|y \rangle_{\mathbb{C}}, \end{aligned}$$

avec,  $\mu > 0$  et  $x, y \in H_x$ , on reconnait le produit de deux vecteurs de  $S^{2n+1}$  qui donne le produit scalaire dans  $P_n(C)$ .

Ce qui a été prouvé est que la metrique  $G$ -invariante est egale à la metrique usuelle du projectif complexe.

Pour savoir directement, que le projectif complexe est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante. Utiliser le livre de Kobayashi-Nomizu, tome 2, pour avoir l'expression de la metrique ou et le livre d'Aubin, pour avoir l'expression du tenseur de Ricci, et par les calculs, directement, on prouve qu'il est d'Einstein. Pour la courbure sectionelle, voir aussi dans, le livre de Kobayashi-Nomizu,  $K, K_0$ , dans le chapitre Complex manifolds. Avec la metrique tirée du livre de Kobayashi-Nomizu, la courbure sectionelle holomorphe est constante, ce qui induit que la courbure sectionelle Riemannienne est de la forme :

$$K(X, Y) = (1 + 3(\cos a)^2)/4, \quad a, \text{ l'angle de } g(X, JY).$$

Ici, par la fomulation de Gallot-Hulin-Lafontaine avec la phrase "any scalar product", on transporte la metrique du projectif, pour avoir une structure d'espace homogene, une structure de plus sur le projectif complexe par l'isometrie (par definition et choix) de  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ .

(On a une isometrie  $F$  entre la variété homogene  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$  et  $P_n(C)$ , la courbure de la variété homogene est alors  $RiccioF$  (voir le Hebey), elle constante).

En tant que submersion :

Pour voir que la metrique de  $P_n(C)$  est celle de  $S^{2n+1}/S^1$ , du Gallot-Hulin-Lafontaine, on ecrit que la metrique  $ds$  du Kobayashi-Nomizu est a la fois invariante par "rotation", on se place alors dans la carte de  $z = (1, 0, \dots, 0)$  avec la carte  $(t_i) = (z_i/z_0)_{(1 \leq i \leq n)}$ , on ecrit alors  $ds$  en coordonnées  $z_i$  et la metrique en  $z$  est euclidienne sur les vecteurs de  $\mathbb{C}^n = H_x$ , or la metrique de  $S^{2n+1}/S^1$  dans  $H_x$  est la metrique de  $S^{2n+1}$  qui est la metrique euclidienne de  $\mathbb{C}^n = H_x$ . Donc la metrique  $ds$ , dite de Fubini-Study dans le Kobayashi-Nomizu est la metrique dite de Fubini-Study dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

**Remarque sur les espaces homogènes :** Tout ce travail sur les groupes de Lie, sert en fait pour les ensembles de matrices. Cette Théorie est construite pour les groupes matriciels,  $SU(n+1), SO(n)$ ... (pour ces cas particuliers, les variétés sont de dimensions finies).

(Remarque sur les actions de groupes : le fait d'écrire  $\cdot$ , le point, dans l'action de groupe, c'est une notation, pour dire que le groupe agit sur cet ensemble, comme c'est écrit dans le debut du chapitre sur les groupes de Lie dans le Dieudonné, c'est une notation d'écrire la derivation,  $s \cdot k_x$  dans l'espace tangent  $T_e(G)$ , pour écrire la composition de la derivation,  $\partial\psi/\partial\xi_j(s, \xi_1, \dots, \xi_n)k_j$ . On voit bien par la formule de derivation de la composition, on a  $s \cdot (t \cdot k_x)$  remplace  $\partial_{\rho_i}(s, \rho)\partial_{\xi_j}^i(t, \dots)$

(Cette notation, (d'action de groupe,  $\cdot$ , le point), permet d'expliquer pourquoi l'espace tangent  $T_e(G/H)$  s'identifie à  $T_e(G)/T_e(H) = G_-/H_-$ . Car en prenant des chemins,  $c : t \rightarrow [g(t)]$  dans  $G/H$  et en les derivant cela revient à prendre l'action de la classe dans le quotient :

$\frac{dc(t)}{dt} = \left\{ \frac{d(g(t) \cdot h)}{dt} \cdot h, h \in H \right\} = \{g' \cdot h, h \in H\} = [g'] \cdot T_e(H) = \text{classe de } g'$ , car on derive un chemin suivant  $H$  donc dans l'espace tangent à  $H$ .)

Le paragraphe suivant, traite du cas du projectif complexe et l'exercice proposé dans le Gallot-Hulin-Lafontaine, on a vu comment la submersion construite permet d'identifier  $P_n(C)$  et  $S^{2n+1}/S^1$ , on regarde aussi comment le projectif est vu comme un espace homogene en comparant  $S^{2n+1}/S^1$  et  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$  :

(\*\*\*Voir l'exercice sur le projectif complexe dans le Gallot-Hulin-Lafontaine, ici, aussi, on utilise les chemins dans la determination des espaces tangents en  $e = I_n$  ou algebre de Lie, on derive par exemple  $(I_n + H)(I_n + H^t) = I_n$  en prenant  $dH/dt|_{t=0} = A$ , pour  $U(n)$ , on voit alors que  $A$  est antihérmittienne. Pour  $SU(n)$ , on derive le determinant en  $I_n$  on a de plus  $Tr(A) = 0$  et l'application adjointe est l'application adjointe reellement, quand on calcule  $h x h^{-1}$  avec  $x =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\bar{v} \\ v & 0 \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}; h^{-1} = \bar{h}^t = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$$

$$h x h^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda A \bar{v} \\ \bar{\lambda} A v & 0 \end{pmatrix},$$

De plus pour voir que  $x \in T_e(G)/T_e(H) = G_-/H_-$  est de la forme precedente, on a  $T_e(G)$  est l'ensemble des matrices antihérmittiennes de trace nulles et  $H = S(U(1) \times U(n))$ ,  $T_e(H)$  est l'ensemble des matrices antihérmittines, comme on quotient par  $T_e(H)$  on elimine les termes centraux et  $x$  a la forme precedente. On voit alors que la condition d'irreductibilité isotope est vraie ici, la definition est :  $\forall \lambda, \forall A, \forall w \in W, \bar{\lambda} A w \in W \Rightarrow W = \{0\}$  ou  $W = G_-/H_-$ . Et aussi, pour le produit scalaire dans  $C^n$  des matrices est invariant par l'adjoint,  $h x h^{-1}$ , le produit scalaire choisit fait reference à la phrase du Gallot-Hulin-Lafontaine "any scalar product", ici c'est le plus simple, celui des matrices. En outre, ici, si on considere la matrice de la courbure de Ricci, *Ricci* c'est une matrice symétrique donc diagonalisable. Ici, pour le cas du projectif complexe, on prend le produit scalaire  $(M_1 \cdot M_2)$  avec  $M_1, M_2$  deux matrices de la forme  $h x h^{-1}$  avec  $h, x, y$  trois matrices comme ci-dessus, cela revient à avoir le produit scalaire usuel  $\langle \bar{\lambda} \lambda \bar{v}^t \bar{A}^t A w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v | w \rangle$ , car  $A \in U(n)$  et  $\lambda \in U(1), |\lambda| = 1$ .

On regarde alors si l'application  $\tilde{F}$  du livre de Gallot-Hulin-Lafontaine est une isometrie avec les bons produits scalaire (ce qu'on a dit au debut de ce point avec  $[x] \in G/H = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$  et  $u \in P_n(C) = S^{2n+1}/S^1$ ) :

Soit  $\tilde{F}$ , l'application du livre de Gallot-Hulin-Lafontaine;  $[x] \rightarrow \tilde{[x.m]} = q(x.m), [x] \in G/H = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)), \tilde{[x.m]} \in S^{2n+1}/S^1$  et  $q : y \rightarrow \tilde{[y]}$ , l'application du passage au quotient de  $S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/S^1$ .  $\tilde{F}$  est un diffeomorphisme. On prend alors  $m = z = (1, 0, \dots, 0)$  et on se place dans la carte de  $m$ ,  $(t_k) = (z_k/z_0)$ , voir le Gallot-Hulin-Lafontaine dans la construction de la metrique de Fubini-Study de  $S^{2n+1}/S^1$ .

Alors  $T_m(S^{2n+1}) = \{(i\eta, \xi^1, \dots, \xi^n), \eta \in \mathbb{R}, \xi^j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n\}$ . Si on prend  $t \rightarrow x(t)$  un chemin dans  $SU(n+1)$  alors  $x'(t) = dx/dt \in T_e(SU(n+1))$  est une matrice antisymétrique de trace nulle et  $(dx/dt) \cdot m = (0, v_1, v_2, \dots, v_n) = (0, v)$  est orthogonal à  $m$  et  $i \cdot m$ , et donc,  $(dx/dt) \cdot m \in H_m$ , le sous espace vectoriel qui permet de definir le produit scalaire dans  $S^{2n+1}/S^1$ , de meme pour  $(dy/dt) \cdot m = (0, w_1, \dots, w_n) = (0, w) \in H_m$ . (Ne pas confondre  $H_m$  l'espace vectoriel ici dans la definition de la metrique de Fubini-Study et  $H_m$  l'espace isotrope dans la definition de  $G/H = G/G_m$ ). (On peut prendre  $x$  tel que  $dx/dt = x$  avec des termes centraux nuls, comme ci-dessus).

Comme par definition  $q$  est une isometrie sur  $H_m$ , on a :

$$\langle (dx/dt) \cdot m | (dy/dt) \cdot m \rangle = \langle dq[(dx/dt) \cdot m] | dq[(dy/dt) \cdot m] \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \langle (d/dt)[q(x.m)] | (d/dt)[q(y.m)] \rangle = \langle (d/dt)[\tilde{F}(x)] | (d/dt)[\tilde{F}(y)] \rangle = \\
&= \langle d\tilde{F}(dx/dt) | d\tilde{F}(dy/dt) \rangle,
\end{aligned}$$

donc,  $\tilde{F}$  est une isometrie, ce qui permet de transporter la metrique de Fubini-Study. De plus, le produit scalaire :

$$\begin{aligned}
\langle (dx/dt) \cdot m | (dy/dt) \cdot m \rangle &= \langle (dx/dt) \cdot m | (dy/dt) \cdot m \rangle_{H_m} = \langle v | w \rangle_{\mathbb{C}} = \\
&= [(dx/dt) \cdot (dy/dt)] = \langle (dx/dt) | (dy/dt) \rangle,
\end{aligned}$$

est le produit scalaire sur les matrices et coincide avec  $(M_1 \cdot M_2)$  de ce qu'on a dit precedemment et avec le produit scalaire dans  $\mathbb{C}^n = H_m$ , de la metrique de Fubini-Study, si on prend par exemple  $dx/dt = x$  avec des termes contraux nuls. Le produit scalaire choisit sur l'espace homogene (de matrices) induit que,  $\tilde{F}$ , une isometrie sur  $S^{2n+1}/S^1$ . C'est ce qu'on disait au debut de cette section sur les espaces homogenes, de maniere theorique, on choisit le produit scalaire de sorte que  $\tilde{F}$  soit une isometrie et donc on transporte la metrique. Ici, pour le cas du projectif complexe, le produit scalaire qu'on pris, fait de  $\tilde{F}$  une isometrie.\*\*\*)

Concernant la courbure de Ricci et le fait qu'on a le projectif comme espace homogene d'Einstein, sans les calculs :

On a parle de la notation . d'action de de groupe, comme le groupe de Lie agit par isometries, dans la derivation on obtient des termes du type, dans le tenseur de courbure :

$$R(h'.X, h'.Y, h'.Z, h'.T) = R(X, Y, Z, T)$$

en composant à droite par l'inverse, on obtient l'application adjointe :

$$R(h'.X.h'^{-1}, h'.Y.h'^{-1}, h'.Z.h'^{-1}, h'.T.h'^{-1}) = R(X, Y, Z, T)$$

ce qui veut dire que le tenseur de courbure est invariant par l'application adjointe  $h.x.h^{-1}$ , donc la courbure de Ricci aussi et par invariance des sous-espaces propres, on a  $R = cg$  d'Einstein. Ceci est dit dans le livre de Besse, dans le cas des metriques  $G$ - invariantes, lorsque  $H, G$  agissent par isometries. Pour le cas particulier du projectif complexe, on savait par les calculs que c'est une variété d'Einstein, et par l'identification isometrique du Gallot-Hulin-Lafontaine, à  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ , c'est une variété ou espace homogène, une propriété supplementaire du projectif complexe d'etre un espace homogene et d'Einstein.)

Le fait que la metrique soit invariante par l'adjoint, fait qu'elle invariante à droite et à gauche. C'est construit pour qu'elle soit bi-invariante. Ce qui induit des propriétés sur la courbure, car on a des isometries à droites et à gauche. C'est construit pour.

a) Les actions a droites et a gauches sont des isometries, soit  $s$  la metrique et  $L_g : x \rightarrow g.x : L_g^*(s) = s \Rightarrow L_g^*(R) = R$  voir le livre de Hebey pour l'expression de la courbure quand on a une isometrie Riemannienne. On obtient l'expression ci-dessus.

b) Ici pour le cas particulier du projectif, on a des matrices, l'application  $h \rightarrow hx$  avec  $h$  une matrice et  $x$  un vecteur, est lineaire, donc sa derivee est elle meme, d'où le fait que ce qu'on a ecrit ci-dessus,  $h' = h$ .

l'application :  $x(t) \rightarrow h.x(t)$ , sa derivee est  $h.x'(t) = h.x$  avec  $x$  un vecteur.

Ce qui fait qu'ici pour le projectif complexe, on a  $h'.X.h'^{-1} = h.x.h^{-1}$  avec le fait que pour la courbure de Ricci,  $Ricci(h.x.h^{-1}, h.y.h^{-1}) = Ricci(x, y) \forall h$ , l'invariance de la courbure de Ricci par l'adjoint.

C'est une formule générale qu'on applique au cas particulier du projectif complexe et des matrices.  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ .

( On a, soit  $x$  un vecteur propre de  $R$  pour le valeur propre  $\lambda$ ,  $R(x) = \lambda x$ , on ecrit :

$$\begin{aligned}
R(h.x.h^{-1}, h.y.h^{-1}) &= R(x, y) = \langle y^t | Rx \rangle = \lambda \langle y^t | x \rangle = \lambda \langle (h.y.h^{-1})^t | h.x.h^{-1} \rangle = \\
&= \langle (h.y.h^{-1})^t | R(h.x.h^{-1}) \rangle, \forall h, \forall y \\
&\Rightarrow R(h.x.h^{-1}) = \lambda(h.x.h^{-1}).
\end{aligned}$$

Donc, si on note  $F_\lambda$  le sous-espace propre de  $R$  de valeur propre  $\lambda$ , alors  $Ad(h)(F_\lambda) \subset F_\lambda, \forall h$ , il vérifie la propriété d'invariance. d'où la conclusion.)

Donc, le projectif complexe vu du point de vue  $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$  comme espace homogène et d'Einstein de constante  $s_0$ . Pour connaître le signe de  $s_0$ , on utilise le Théorème du livre de Besse qui dit que si  $s_0 < 0$ , il ne serait pas compact, ce qui n'est pas possible. Si  $s_0 = 0$ , il serait plat et donc Einstein et Conformement plat, par le résultat du livre de Hebey, il serait de courbure sectionnelle constante, ce n'est pas possible. Donc,  $s_0 > 0$ .

Donc :

1-les revêtements Riemanniens dans la construction des métriques de courbures sectionnelles constantes, comme les projectifs réels, le Tore, les variétés Hyperboliques.

2-les submersions riemanniennes, dans la construction des projectifs complexes.

3-les fibrations, et groupes de Lie, dans la constructions, des variétés homogènes, puis par exemples, on compare, les métriques, comme pour le projectif complexe, qui est d'Einstein de constante  $s_0 > 0$ . (La fibration est construite de telle manière qu'on a une structure de variété lisse pour la variété quotient. La fibration sert dans la construction de la métrique, les sections.).

(Par exemple, pour les revêtements, il aisé d'avoir une structure de variété lisse sur le quotient. Un peu moins pour les submersions et les fibrations. De plus, dans la construction des métriques du quotient on s'assure que ça ne dépend pas du point de la fibre).

4-On a les variétés de courbures sectionnelles constantes, qui sont localement conformement plates. Le produit d'un cercle et d'une variété de courbure sectionnelle constante, est plate.

5-Les sommes connexes, de variétés conformement plates, peuvent être plates.

6-Les sommes connexes, par le théorème de D. Joyce, peuvent avoir une partie plate et une partie non plate et de courbure scalaire  $-1$ .

7-Pour construire une variété nonlocalement conformement plate, on construit des produits. On a l'a fait à partir des surfaces réelles de dimension 2. Et en considérant des produits dont un n'est pas plat.

8-Les surfaces  $K3$ . La variété de W. Goldman en dimension 3 sur la quelle on peut mettre n'importe quelle métrique, elle sera non plate.

8) La formule d'intégration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problèmes variationnels de degré 2, il est possible de résoudre par la formulation variationnelle un problème elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une variété non orientable.

Par contre quand il s'agit de fonction de Green, sur une variété compacte, il est impératif de supposer la variété orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'intégration par parties en dehors de petites boules, on se ramène à une variété à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

9) Pour les variétés de dimension 3. On considère un Torus bundle  $M_\varphi$  d'application  $\varphi$  (voir le Hatcher pour la définition,  $\varphi$  est la monodromy map), il est orientable si et seulement si  $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$ . William Goldman prouve qu'il existe un Torus bundle orientable ne possédant pas de structure conformement plate,  $\varphi$  non périodique, (de valeurs propres réelles) (par exemple,  $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ) il n'y a pas de métrique localement conformement plate, comme une variété lisse possède toujours une métrique Riemannienne  $g$ , elle est dans ce cas non localement conformement plate,  $Weyl_g \neq 0$ . Ce théorème dit qu'il n'existe pas de métrique localement conformement plate sur cette variété.

1-Une structure est conformement plate s'il existe une métrique conforme à la métrique euclidienne. Cette définition est équivalente à celle qui dit qu'une structure conformement plate s'il existe un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Möbius (composée de translation, rotation et inversion). Cette équivalence est démontrée dans l'article de Kuiper (1949).

2-Cela veut dire que si on veut savoir si une variété a une structure conformement plate, il suffit d'étudier les transformations conformes, donc le groupe conforme. C'est l'idée de William Goldman, il caractérise le groupe fondamental et le groupe de transformations conformes des variétés conformement plate (il y a une relation entre le groupe fondamental et le groupe des

transformations conformes). Si cette condition n'est pas satisfaite alors, la variété n'a pas de structure conformément plate. (le groupe fondamentale doit être polycyclique...).

10) Voir aussi, dans le livre d'Aubin ou la caractérisation de Kuiper de la structure conforme par une isométrie, sert à prouver le Théorème de la masse positive dans le cas conformément plat. En effet :

a) Quand on a une variété complète, conformément plate et simplement connexe, elle est conformément isométrique à une partie de la sphère dont on connaît la masse  $m_0 = 0$ , par la formule donnée dans le livre d'Aubin,  $\alpha_0(P) = k \times \alpha_{\mathbb{R}^n}(P) = k \times 0 = 0$ .

b) On considère une variété  $M$  compacte, conformément plate. Alors le revêtement universel  $\tilde{M}$ , vérifie les conditions du point a) précédent. Donc la masse est nulle.

c) Si de plus  $M$  n'est pas conformément difféomorphe à la sphère, le revêtement universel contient plus de deux feuillettes. (Par Kuiper une variété compacte connexe, conformément plate et simplement connexe, est difféomorphe à la sphère. Donc, ici, elle ne peut pas être simplement connexe). Ce qui fait que l'ensemble noté  $W = \Pi^{-1}(\Pi(P))$  dans le livre d'Aubin n'est pas réduit à  $\{P\}$ . Par la construction de la fonction de Green minimale (notée  $\tilde{G}_P$  de  $\tilde{M}$ ) et le principe du maximum, il existe une fonction  $\tilde{H}$ , qu'on peut prendre ici pour  $G_P \circ \Pi$ , ( $\tilde{g} = \Pi^*(g)$  qui est conforme à  $\tilde{g} = \Phi^*(g_0)$  donc de la forme  $u^{-1}H \circ \Phi \dots$ ), telle que on ait  $\tilde{H} > \tilde{G}_P$  en  $P$ . Or  $\tilde{M} = \Pi^*(M)$  et donc la fonction de Green de  $M$ , vérifie au moins l'inégalité.  $\alpha_P(G_P \circ \Pi) > \tilde{\alpha}_P = 0$ , car pour le revêtement universel, d'après le point a), la masse est nulle (et la distance se conserve localement, car on a un revêtement donc une isométrie locale). Ainsi la masse de  $M$  en  $P$ ,  $\alpha_P(G_P) > 0$ , dans le cas où  $M$  n'est pas conformément difféomorphe à la sphère.

**Remarques :** Sur la partie de la preuve du livre de Aubin (communication de M. Vaugon) concernant l'effet du changement conforme sur la masse  $\alpha$ . On  $\tilde{g} = \varphi^{4/(n-2)}g$  avec  $\tilde{g}$  et  $g$  des métriques conformément plates  $\tilde{d}$  et  $d$ . on se ramène au cas où le facteur conforme est constant. La variété est localement conformément plate. Donc la masse  $m$  ne dépend pas des coordonnées (Bartnik). Comme :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(P) &= m(\tilde{G}_P^{4/(n-2)}\tilde{g}) = \\ &= m(G_P \frac{g}{\varphi(P)^{4/(n-2)}}) = m(G_{P,\lambda}^{4/(n-2)}g^\lambda) = \alpha(P)/(\varphi(P)^2). \end{aligned}$$

Car le raisonnement dans le livre d'Aubin reste vrai so considère une métrique conforme du type  $g^\lambda = \lambda^{4/(n-2)}g$  avec  $\lambda$  un constante  $> 0$ . Ici,  $\lambda = \varphi(P)$  et  $G_{P,\lambda} = G_P/\lambda^2$ .

Pour le Théorème de la masse positive de Schoen-Yau en dimension 3, ils prouvent qu'il existe une surface minimale complète ayant une propriété (intégrale de la courbure de Gauss positive) alors que par les calculs cette intégrale est négative ou nulle. Pour cela ils utilisent le théorème d'existence de surfaces minimales et leur propriétés (Formule de Gauss-Bonnet et Travail de Huber, inégalités isopérimétriques classiques et de Huber, la métrique est voisine de la métrique euclidienne ce qui fait qu'on peut approcher ces deux notions (inégalités isopérimétrique classique)). En particulier, ils prouvent qu'elle est complète dans la première étape. (les fermés bornés sont compacts).

La positivité de la courbure scalaire implique que la surface minimale construite a son intégrale de Gauss Positive. Et puisque la métrique est "presque" euclidienne, il y a conservation de l'inégalité isopérimétrique et par la formule de Gauss-Bonnet, elle serait négative ou nulle. Ce qui n'est pas possible.

Il s'agit de construire une métrique conforme avec une propriété de la courbure scalaire.

Il s'agit de construire une surface minimale ayant une propriété qui découle de la courbure scalaire.

Cette surface minimale complète n'existe pas, car cette propriété n'est pas vraie, par le fait que la métrique est "presque" plate et que l'inégalité isopérimétrique euclidienne se conserve et la formule de Gauss-Bonnet.

**Remarques :**

a) Ils prouvent que la masse  $m \geq 0$ , par l'absurde :

1-La masse  $< 0$  intervient dans la construction de la surface minimale complète. (raisonnement par l'absurde). (Ils prouvent qu'elle est complète dans cette étape, car, en dehors des bouts,

elle est dans un compact, et dans les bouts elle est entre deux plans et la metrique est equivalente à la metrique euclidienne.(les fermés bornés sont compacts)).

2-Une surface est dite de type fini, si  $\int |K| < +\infty$  : c'est le cas ds la demonstration de la masse positive de Schoen Yau.

3-Quand on a une surface de type fini, si  $\chi(S') > 0$  (la caracteristique d'Euler-Poincaré  $> 0$ , ce qui est le cas ici par Cohn-Vossen), alors  $S'$  est diffeomeorphe au plan. C'est ecrit dans Hulin-Troyanov(1992), premier theoreme, qui dit que,  $S'$  est diffeomorphe à une variété compacte  $S$  sans bord, sans un nombre fini de points. De plus il y a une formule de Gauss Bonnet, on a alors  $S'$  est la sphere moins un au plus un point d'apres cette formule de Gauss-Bonnet. Donc, c'est le plan. Il s'agit d'un diffeomorphisme entre  $S'$  et le plan.

On a d'abord une isometrie  $i$ , puis une application conforme,  $F_1$ . la courbure de Gauss "se conserve". D'abord  $K_{i(S')} = K_{oi}$ , puis par l'application conforme on a un facteur  $|F_1'|^2$ , qui s'elimine dans le changement de variable.  $\int K = \int K_{F_1,oi} = \int K_{oi} |F_1'|^2$ , cette derniere inetgrale est la courbure de Gauss de  $F_1oi(S')$ . Puis on applique le result d'Huber. (On considere  $i(S')$  au lieu de  $S'$ , car on a une isometrie et la courbure de Gauss "se conserve",  $\int_{S'} K = \int_{i(S')} K_{oi}$  et  $(F_1^{-1})^*(g_{i(S')}) = |F_1^{-1}|^2 g_C$ , car  $F_1$  est conforme, la metrique se transporte suivant un facteur de la metrique de  $\mathbb{C}$ , on a des coordonnees isothermes globales, on peut appliquer ce que fait Huber (1957)).

(Pour obtenir l'application conforme, on raisonne par rapport au revetement universel et la caracteristique d'Euler-Poincaré).

4-Dans un article de Huber, il prouve que sur une surface ouverte, la formule de "Gauss-Bonnet", pour une suite de domaines :

$$\int K = 2\pi - \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L_\sigma^2 / 2A_\sigma.$$

5-La consturction de la surface est en fait une construction d'un courant (surface avec singularité, par une minimisation d'une fonctionnelle relativement á une metrique), puis, voir le livre de Federer, la surface est reguliere en dehors du bord.  $\partial(N \cap S) = (\partial N \cap S) \cup (\partial S \cap N)$ , par la formule de Stokes,  $S$  est loin du bord, car la courbure moyenne est positive (c'est une hypothese).

(Voir aussi, le livre de Sa Earp-Tubiana, sur le theoreme de Poincaré-Koebe et la calssification par le revetement universel).

Un theoreme d'uniformisation de Poincaré-Koebe, dit que une surface non compacte simplement connexe est conforme au disque unité ou au plan. (voir l'article de Hulin-Troyanov(1992)).

b) Ils prouvent que si la masse est nulle,  $m = 0$ , alors l'espace est isometrique à  $\mathbb{R}^3$ . la preuve de ce point est assez claire dans l'article de Schoen-Yau, ils se ramenant au cas de masse  $< 0$  et de courbure scalaire  $\geq 0$  par des changement de metriques conformes..., ce n'est pas possible, ou bien la courbure scaire et de Ricci seraient nulles comme on est en dimension 3  $Weyl \equiv 0$ , donc c'est la cas plat. Puis il faut utiliser l'argument sur le volume de Bishop :  $Ricci \geq 0$  (ici,  $Ricci \equiv 0$ ), la fonction  $f : r \rightarrow Vol_g(B_g(r)) / Vol_\delta(B_\delta(r))$  est decroissante sur la variété complete de depart  $M$ , et tend vers 1 quand  $r \rightarrow 0$  et  $r \rightarrow +\infty$  (par l'hypothese que la variété est asymptotiquement plate, la metrique tend vers la metrique euclidienne quand  $r \rightarrow +\infty$ ),  $f$  est constante egale à 1 et le theoreme de comparaison de Bishop dit dans ce que que  $M$  est isometrique a  $(\mathbb{R}^3, \delta)$ .

**Ceci s'applique a une variété compacte sans bord :**

En effet, soit  $M$  cette variété compacte sans bord.  $P \in M$ , en se palcant au voisinage de  $P$  et si considere les coordonnees geodesiques polaires alors la metrique est du type  $g_{ij} = \delta_{ij} + (termes)r^2 + \dots$ , si on fait le changement de variable  $r = 1/\rho$ , alors :

1-on exclut le point  $P$  et la variété devient asymptotique, car pour  $r = 0$  (en  $P$ ), ce n'est pas bien definit.

2- $M - \{P\}$  ressemble a  $\mathbb{R}^n$ .

3-on sait que les boules geodesiques sont de courbure moyenne  $< 0$  concave, voir la preuve dans un des livres sur la conjecture de Poincaré (Chow and al, par exemple). Mais le changement de variable  $r = 1/\rho$  inverse le signe. Ces boules  $B_P(r) - \{P\}$  sont les bouts du cas general de la masse positive les  $N_k$  qui sont convexes. Cette hypothese de courbure moyenne positives de la variété  $N = B_P(r_0) - \{P\}$  est verifiee dans le cas compact sans bord en se placant en un point  $P$  et changeant de variable.

4-C'est écrit dans le livre d'Aubin, que la masse  $m = cte \times A = 4(n-1)A$  avec  $A$  la partie régulière de la fonction de Green. Donc elle est positive si  $m > 0$ .

5-Reste à voir ce qu'est la métrique  $g$  comme c'est dit dans le livre de Aubin, ils considèrent  $G_P^{4/(n-2)} \times g \equiv r^{-4}g$  avec  $G_P$  la fonction de Green, et le changement de variable  $\rho = 1/r$  ou  $r = 1/\rho$  on a le comportement asymptotique, une variété asymptotique d'ordre 2 en coordonnées géométriques polaires.

(Dans le changement de variable  $\rho = 1/r$ , on écrit,  $\partial_\rho = -\frac{1}{r^2}\partial_r$ , puisque c'est un changement de variable, on calcule alors  $g_{\rho\rho}$ , de même que pour  $g_{\rho\theta}$  et finalement  $g_{\theta\theta}$  qui se conserve, puisqu'il n'y a pas de changement angulaire).

Donc, on voit que le cas compact sans bord se déduit du cas général. (Au voisinage du point  $P$  on est dans les bouts, mais ces voisinages sont des boules géométriques dont on connaît la courbure moyenne  $< 0$ , et avec le changement de variables, pour avoir des coordonnées asymptotiques, ces boules deviennent de la variété  $N$  avec le bon signe sur la courbure moyenne  $> 0$ ).

On a :  $N = B_P(r_0) - \{P\}$ ,  $N_k = B_P(r) - \{P\} = B_P(1/\rho) - \{P\}$  et  $\partial N_k = S_P(r) = S_P(1/\rho)$  avec orientation inversée.

**Remarque :** Sur la courbure moyenne de la sphère de rayon  $r$ ,  $S_P(r)$ . On écrit  $B$  est la seconde forme fondamentale :

$$H = \text{trace}(B)$$

Mais,

$$B(e_i, e_j) = \langle \nabla_{e_i}(e_j) | N \rangle,$$

avec  $e_i, e_j$  les éléments de la base de l'espace tangent à la sphère et  $N$  la normale à la sphère.

On prend alors  $e_i, e_j \in \{\partial_\theta\}$  et on utilise la dérivée covariante et le produit scalaire  $\langle e_i, N \rangle = 0$ , en permutant la dérivée covariante, jusqu'à obtenir :

$$\begin{aligned} \text{trace}(B) &= \text{trace}[\nabla_N(\langle \partial_\theta | \partial_\theta \rangle)] = \nabla_r(\langle \partial_\theta | \partial_\theta \rangle) = \\ &= \frac{1}{r^2} \times r \times g^{\theta_i \theta_j} g_{\theta_i \theta_j} + \dots = \frac{n-1}{r} + \dots \end{aligned}$$

Donc (avec l'orientation positive),

$$H = \frac{n-1}{r} + \dots$$

(Aussi, en permutant la dérivation covariante dans  $\langle e_i | N \rangle = 0$ , on retrouve l'expression de la courbure moyenne (positive) écrite dans l'article de Schoen-Yau,  $\text{div}(N) > 0$ ).

11) Concernant les sommes connexes,  $M \sharp N$  de deux variétés  $M, N$ , elles sont définies à partir d'une relation d'équivalence qui donne une variété quotient topologique, c'est à dire  $C^0$ , à l'ordre 0 il n'y a pas de problème, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais dès qu'on cherche une structure différentiable ou  $C^k$ ,  $k \geq 1$ , c'est plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de manière lisse.

Remarquons que en dehors de la sphère où se fait le recollement, la variété est égale à  $M$  ou  $N$ .

Lorsque on met une métrique sur  $M$  et  $N$  alors par des fonctions cutoff on peut mettre une métrique, par recollement, sur  $M \sharp N$  et elle coïncide avec celles de  $M$  et  $N$  en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en  $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$  et  $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$ , on a deux injections naturelles  $i_1, i_2$  et on doit faire le recollement entre  $\text{Id}_{B(p, 2\epsilon)}$  et  $i_2 \circ i_1^{-1}$ . On définit une relation d'équivalence en partant de couronnes  $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$ ,  $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$  vers les variétés  $M$  et  $N$ . On choisit une carte pour  $N$  renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient  $i_2$ .

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes,  $i_2 \circ i_1^{-1}$  est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de  $M$  à celui de  $N$  de manière lisse. (Les changements de cartes sont lisses de  $M, N$  et  $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$ , par  $i_2 \circ i_1^{-1}$ .)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de  $M$  et  $N$ , alors  $M \# N$  est orientable.

On a :  $X = M \setminus B(p, \epsilon) \cup N \setminus B'(q, \epsilon)$  est compact, le graphe de la relation  $Gr = \{(x, x), x\} \cup \{(x, i_2 \circ i_1^{-1}(x)), x\}$  est fermé, donc,  $X \setminus \sim$  est séparé. Soit  $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon)$ , et  $\pi$  l'application de passage au quotient. Alors  $\pi(O)$  est un ouvert de  $X \setminus \sim$  car  $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$ .

Soit :  $\Phi$  l'application de recollement de cartes, défini précédemment sur  $\pi(O)$ , alors  $\Phi$  est bien défini et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , par le theoreme d'invariance du domaine de Brower (car  $i_2$  et  $i_1$  se recollent au bord qui est une sphere, par definition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changement de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x), \quad x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon), \quad \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2}, \quad x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon),$$

avec,  $[x] = \pi(x)$ , l'application de passage au quotient.  $i_2$  inverse l'orientation de  $N$ . Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de determinant positifs, de plus, sur la sphere, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a  $i_1$  avec la bonne orientation et sur le deuxieme bout on a  $i_2$  qui inverse l'orientation, et sur la sphere  $|i_2| = 1$ ).

On voit que  $\Phi \circ \pi$  est continue par definition et donc  $\Phi$  est continue.

On a bien,  $(\Phi, \pi(O))$  une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme  $M$  et  $N$  sont orientables,  $M \# N$  est orientable.

Avec  $(\Phi, \pi(O))$  on a une carte de recollement, et,

$$\Phi \circ [i_1]^{-1} = \Phi \circ [i_1^{-1}] = Id_{B(p, 2\epsilon) \setminus \bar{B}(p, \epsilon)},$$

$$\Phi \circ [i_2/|i_2|^2]^{-1} = \Phi \circ [(i_2/|i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q, 2\epsilon) \setminus \bar{B}'(q, \epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considerant les metriques  $g_M, g_N$  et  $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$ , par des fonctions cutoff, on a par recollement, une metrique sur  $M \# N$  :

$$g_{M \# N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considere un observateur  $a$  de  $M$  tel que le repere  $(a, T)$  est direct avec  $T$  une orientation du bord. on deplace par une rotation, ou selon un chemin circulaire, vers un observateur  $b$  de  $N$  alors le repere  $(b, T')$  est direct si et seulement si  $T' = -T$ .

D'autre part, on voit que dans la carte de recollement, on a composé avec une inversion. Si  $M$  et  $N$  ont des structures localement conformément plates, par Kuiper, il existe pour chaque variété un atlas dont les changement de cartes sont des applications de Mobius. En utilisant la carte de recollement, on obtient un atlas sur  $M \# N$  formé d'applications de Mobius. Donc, sur la somme sonnexo on a une structure lcoalement conformément plate. (ceci est dit dans la papier de Kulkarni).

12) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grace aux fonctions de Morse. Par recurrence sur le nombre de point critiques.

1- On verifie que sous certaines hypotheses d'orientabilité des bords et quand on a deux homeomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homeomorphismes entre les recollés.

2- On utilise une recurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note  $g_1, g_2$  les applications de recollement, dans le Gramain,  $g_1 = f, g_2 = f'$ . Ici, dans le cas des recollements, on prend,  $g_1 = id$  et  $g_2 = id$ , les recollés sont les ensembles de depart (en fait ils sont difféomorphes aux ensembles de depart et  $f_* = id, f'_* = id$ , on a inversion des orientations quand on recolle, et,  $h_* = id, h'_* = id, h$  et  $h'$  conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles  $A$  et  $A'$ , sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse  $C^\infty$ , donc ce sont des variétés compactes  $C^\infty$ , il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se placant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.



Pour l'orientabilité des bords,  $A$  et  $A'$  sont (homéomorphes implique difféomorphes en dimension 1) difféomorphes à des cerles et, à droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le difféomorphisme conserve l'inversion d'orientation, son Jacobien est positif. D'où, l'application  $k_0$  conserve l'orientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un difféomorphisme global  $h$  et  $h'$ , par contre il y a une définition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orientation pour  $k_0$ ).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant  $p \leq q - 1$  point critiques avec un maximum et un minimum et  $p - 2$  points critiques d'indice 1 est homeomorphe à  $\mathbb{T}_p$ . On peut commencer la récurrence pour  $p = 0$ , la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homeomorphes à des demi-disques et par recollement on a une sphere. A l'ordre  $p = 1$ , pour le Tore, c'est écrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-mêmes sont obtenus par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore. Ou bien si on commence la récurrence à partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homeomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-mêmes obtenus par recollement d'ensembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas (2) vers le haut (1)) avec l'application de recollement  $g_1 = id, g_2 = id$ , et on obtient le Tore,  $g_2$  est la deuxième application de recollement). Dans le cas general, on sait qu'il existe une fonction de Morse  $u$ , on décompose en deux, la partie de  $u$  ayant  $p - 1$  points critiques, on lui recolle un disque et par récurrence, elle homeomorphe à  $\mathbb{T}_{q-1}$  et le reste possède 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par récurrence, homeomorphe au Tore,  $\mathbb{T}_1$ . Donc, comme c'est écrit dans le Gramain, en revenant à  $u$ , il y a une partie homeomorphe à  $V_{p-1}$  et l'autre à  $V_1$  et sur  $V_1$  on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc, on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite,  $Y - g_1(A)$  et  $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$ ,  $B$  un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considérant la composée des deux homeomorphismes (c'est l'homeomorphisme  $k_0 = h'og_1og_2^{-1}oh^{-1}$  du Gramain). Il reste à voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a homeomorphismes entre les recollements,  $S = (S - A) \# (S' - B) = (X - A) \# (Y - g_1(A)) = (X - A) \cup (Y - A)$ ,  $g_1 = id$ , et  $V_{p-1} \# V_1$ , ce qui est fait dans le cas orientable ( $A$  homeomorphe au cercle dans le Gramain).

On écrit  $(X - A) \cup (Y - A)$  pour dire qu'on recolle  $X$  et  $Y$  via  $A$ . Les applications du Gramain,  $f = g_1 = id, f' = g_2 = id$  et le recollé (pour la relation d'équivalence,  $x \equiv f(x) = x, x \in A, f_* = -id, f'_* = -id$ , est difféomorphe à l'ensemble de départ. On a  $f_* = -id$  et  $f'_* = -id$  car on inverse les orientations de départ quand on recolle  $(+, h, A \rightarrow A'$ , conservation de l'orientation,  $f', A' \rightarrow f'(A')$ ,  $-$  inversion de l'orientation,  $h'^{-1}, f'(A') \rightarrow f(A)$ ,  $+$ , conservation de l'orientation,  $f^{-1}, f(A) \rightarrow A$ ,  $-$ , inversion de l'orientation). Donc, on a,  $h_* = id, f'_* = -id, (h'^{-1})_* = id$  et  $(f^{-1})_* = -id$ . Et on écrit car  $f = id, f' = id, f_* = id, f'_* = id$ , pour dire qu'on envoie un générateur d'orientation vers un générateur d'orientation (même si elle est inversée).

On peut raisonner par les générateurs, si  $e_1$  est générateur de  $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$  et  $e_2$  est générateur de  $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$ , alors, comme sur la partie de  $Y$  et  $Y'$  on inverse les orientations, on a  $-e_1$  est générateur de  $H_{1,A,Y}$  et  $-e_2$  est générateur de  $H_{1,A',Y'}$ , comme  $f = id$  alors,  $f_*(e_1) = -e_1$ . On écrit,  $f_* = id$  dans le sens qu'elle envoie un générateur d'orientation vers un générateur d'orientation. et on écrit  $f_* = -id$ , pour dire que  $f_*$  inverse l'orientation de départ sur  $A$ .

On a la même chose pour  $A'$  et  $f'$ .

Des le départ on a deux homeomorphismes  $h$  et  $h'$ , supposons par exemple que  $h_* = -id, h_*(e_1) = -e_2$ , comme pour  $A'$  on est dans l'espace euclidien, il suffit de composer avec une symétrie  $t$  pour avoir  $t_*(e_2) = -e_2$  donc,  $hot$  conserve l'orientation sur le bord.  $(hot)_*(e_1) = e_2$  et on fait la même chose avec  $h'$ . Finalement, on a deux homeomorphismes  $hot$  et  $h'ot'$  ou  $h'$  (si  $h'$  conserve l'inversion de l'orientation); qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilisé l'orientation définie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface  $S$  est homeomorphe à la somme connexe de  $q$  Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connexe de Tore est une variété différentiable et donc, cette orientation homologique est

equivalente à l'orientation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci à chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans  $\mathbb{R}^3$ , utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des variétés sans bord et des variétés a bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et differentiables). L'equivalence entre orientation homologique et differentiable pour une variété lisse est ecrite dans le livre de Bredon (geometry and topology). Remarquons qu'une variété a bord  $W$  est orientable si et seulement si son interieur  $\dot{W}$  est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord  $\partial W$  et il y a equivalence aussi entre orientation homologique et differentiable. (il y a un isomorphisme entre  $H_n(W, \partial W, Z)$  et  $H_n(W, W - x, Z)$ ).

Concernant la structure differentiable sur le recollé de  $X - A \cup_{f,A} Y - A$ , dans Milnor (Somme connexe et structure differentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de  $X - A$  et  $Y - A$ , sont diffeomorphes a des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure differentiable. Or, pour la somme connexe de deux variétés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant à ici, le recollé  $X - A \cup_{f,A} Y - A$  est diffeomorphe à  $X - A \cup Y - A$ , on a deja une structure differentiable sur le recollé, via ce diffeomorphisme. (la projection  $p : x \rightarrow [x]$  est un diffeomorphisme).

Quant a l'écriture  $\mathbb{T}_{q-1} \# \mathbb{T}_1$ , c'est la somme connexe, comme on est dans  $\mathbb{R}^3$ , somme connexe et recollement coincident.

Quand on a une application  $s$  qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variete  $M_1$  compacte sans bord de dimension 1,  $s_* = id$ . Pour le voir, on a si l'orientation est inversée sur  $M_1$  et  $M_2 = s(M_1)$ , cela veut dire que  $-1$  est generateur de  $H_1(M_1, M_1 - x_0)$  et de  $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$ . Donc,  $s_*(-1) = -1$ , c'est a dire que  $s_* = id$ . Lorsque  $\varphi_1$  inverse l'orientation alors  $(\varphi_1)_* = -id$ .

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que  $M_1 - x_0$  est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

$s_*$  est un isomorphisme de  $H_1(M_1)$  vers  $H_1(M_2)$ , comme il conserve l'orientation  $s_* = id$ .

Pour le voir il suffit de raisonner sur les generateurs  $s_*(e_1) = ke_2$  et  $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$ , donc,  $kk' = 1$ , comme ces des entiers  $k = 1$  ou  $k = -1$ , comme  $s$  conserve l'orientation  $k = 1$ . On fait la meme chose pour  $\varphi_1$  et on obtient  $k = -1$ .

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De  $\pi_1(S_1)$  dans  $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : [\gamma] \rightarrow \tilde{[\gamma]}$$

On applique cela aux applications du Gramain,  $s = h'^{-1}oh$  (conserve l'orientation) et  $\varphi_1 = \varphi$ ,  $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$ , ici,  $f = id, f' = id$  et  $M_1 = M_2 = A$ , puis on raisonne en considerant  $S_1 \times \{0\}$  au lieu de  $S_1$ .

$$k = \varphi^{-1}oso\varphi,$$

$$\pi(k)[\gamma] = [\varphi^{-1}oso\varphi\gamma] =$$

$$\bar{h}^{-1}(\tilde{[\varphi^{-1}oso\varphi\gamma]}) =$$

$$= \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_*os_*o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) =$$

$$= \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) = [\gamma],$$

Où on a utilisé le fait que  $\varphi_* = id$  si on se place sur  $X$  (on conserve l'orientation) ou  $\varphi_* = -id$  si on se place de coté de  $Y$  (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer  $[\gamma]$  par un generateur  $e_1 = [\gamma_1]$  et raisonner sur les generateurs.

Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas ou  $k(a) = a$ ,  $k$  fixe un point. Sinon, ( $k$  ne fixe pas  $a$ ), on compose avec une rotation  $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$ , or en considerant  $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$ ,  $s \in [0, 1]$ , on a une homotopie entre  $r$  et l'identit e  $id$ . Donc,  $r_* = id$  de  $H_1(S_1) \rightarrow H_1(S_1)$ .

Donc,  $k'_* = id$ , puis on utilise le meme groupe fondamental en  $a$ ,  $\pi_1(S_1, a)$  et l'application d'Hurwicz, comme precedemment pour prouver que  $\pi(k') = id$ .

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger  $k$ .

L'autre cas,  $Y$  rectangle et  $g_1(A)$ , deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur  $Y$ , celle-ci change quand on part de  $X$  et on lui recolle  $Y$  via  $A$ . (ici,  $g_1 = f$  est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension  $\leq 3$ .

13) Pour l'inegalit e de Kato : on a  $u \in L^1_{loc}$  et  $\Delta u \in L^1_{loc}$  alors :  $u \in W^{1,1}_{loc}$ , pourquoi ?

Comme c'est local, on ecrit dans une boule  $u$  en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et  $n \geq 3$  par exemple,  $n = 2$  c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec  $\partial P$  regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut deriver sous le signe  $\int$  pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists r \int_{\partial B_r} u(\sigma) d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour  $\varphi \in D(B_{r/2})$  :

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \text{termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int \int \left(\partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right)(-\Delta u)\varphi + \int \int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \quad a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

Ceci est valable pour  $u$  reguliere. Soit  $\rho_n$  un mollifier, alors :

Si  $u \in L^1(B_r)$ , alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour  $x \in B_{r/2}$  :

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \rightarrow u, \quad \text{dans } L^1_{loc}(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \rightarrow \Delta u, \quad \text{dans } L^1_{loc}(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec  $u$ , avec  $\rho_n * u$ , comme on a des bornes uniformes en  $L^1_{loc}$ , alors,

$$\rho_n * u \in W^{1,1}_{loc}, \quad \text{et } \nabla(\rho_n * u) \rightarrow v \in L^1_{loc},$$

Donc,

$$\int u \partial \varphi = \lim_n \int (\rho_n * u) \partial \varphi = - \lim_n \int \partial (\rho_n * u) \varphi \rightarrow - \int v \varphi,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

On a la meme chose si on considere un probleme variationel  $-\Delta u = f$ ,  $f \in L_{loc}^1$  et  $u \in L_{loc}^1$ .  
On a meme mieux,  $u \in W_{loc}^{1,q}$ . Une partie du travail de Brezis-Merle suppose ces hypotheses, par ce qu'on vient de voir, on utilise le théorème 1 de Brezis-Merle et les estimations elliptiques, pour poser le probleme quand on n'a pas de condition aux bord dans la formulation de Brezis et Merle.

On peut retrouver ce resultat en se ramenant a une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un probleme de Dirichlet.

Soit  $f \in L^1$ ,  $\exists f_j \rightarrow f$  dans  $L^1$  avec  $f_j \in C_c^\infty$ , on resout :

$$-\Delta u_j = f_j, \text{ avec } u_j = 0, \text{ sur } \partial \Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|u_j\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q,$$

En passant à la limite en  $j$ , on a l'existence de  $u_0 \in W_0^{1,q}$  tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \text{ et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le theoreme de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,q},$$

On retrouve le Theoreme dans le livre de Dautray-Lions.

On fait la meme chose avec le Theoreme 1 de Brezis-Merle, sauf que les relations ne sont pas locales.

On a :

$$-\Delta u = f \in L^1, u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

On resout pour  $f_j \rightarrow f$  dans  $L^1$ .  $f_j \in C_c^\infty(\Omega)$ . (la regularité du bord est au moins  $C^2$  pour pouvoir appliquer le theoreme de dualité de Stampacchia).

$$-\Delta u_j = f_j, u_j \in H_0^1(\Omega),$$

On a :

$$\|\nabla u_j\|_q \leq C_q, 1 \leq q < 2.$$

On passe a la limte en  $j$ .

On a :

$$-\Delta u_0 = f, u_0 \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Finalement :

$$-\Delta(u - u_0) = 0, u - u_0 \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit on utilise le principe du maximum dans  $W_0^{1,1}$  pour avoir  $u = u_0$  p.p.

Soit, on utilise le theoreme de regularité d'Agmon pour avoir  $u - u_0$  reguliere et appliquer le principe du maximum usuel.

Pour,  $u_j, f_j, |f_j|$  on applique le raisonnement de Brezis Merle (theoreme 1, on ne peut utiliser le potentiel Newtonien qu'avec des hypothèses sur  $f_j$ ; integrables et bornées, par exemple, voir le livre de Gilbarg-Trudinger). Puis par le lemme de Fatou, l'inegalité de Brezis Merle est valide pour  $u_j$  et  $u_0$  donc pour  $u$ . ( $u = u_0, p.p$ ).

14) Sur la fonction distance au bord : c'est bien ecrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grace a la propriété de la sphere interieure, il existe un voisinage du bord assez petit tel que la fonction distance est  $C^k$  et est egale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des spheres le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit etre par exemple au moins  $C^2$ .

Par des cartes, on a un segment, on peut faire rouler une sphere. On prend son image par l'application de carte, qui est suffisamment reguliere pour que le domaine d'arrivée contienne des ellipses, donc des cercles.

15) Pour le theoreme de Dualité de Stampacchia :

On part de l'equation :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec la condition de Dirichlet. ( $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ ).

On a :

$$u_i \in W^{2,k} \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega}), \quad u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On a :

$$\int_{\Omega} |\Delta u_i| dx \leq bC.$$

On considere un vecteur  $f = (f_1, f_2) \in L^{q'}(\Omega)$  avec  $q' > 2$ . On utilise le Theoreme de Lax-Milgram dans les Hilbert, (voir Gilbarg-Trudinger), pour avoir une solution de  $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$  de l'equation :

$$-\Delta z = \text{div}(f),$$

avec la propriété suivante (voir la preuve de l'inegalité de Harnack dans le Gilbarg-Trudinger) :

$$\|z\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{q'}.$$

On met  $u_i$  comme fonction test dans l'equation de  $z$ , on a, en valeur absolue a l'exterieur des integrales :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nabla u_i dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u_i dx = - \int_{\Omega} z \Delta u_i dx \leq C' \|f\|_{q'},$$

On prend le supremum dans  $L^{q'}$ , et on a :

$$\|\nabla u_i\|_q \leq C_q, \quad \forall 1 \leq q < 2.$$

Dans le probleme de Brezis-Merle, on a :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} = o(1),$$

c'est la convergence interieure dûe au travail de Brezis et Merle. Après, par l'inegalité de Hölder :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega - \Omega_\epsilon)} \leq |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q-1/r} \|\nabla(u_i - u)\|_{L^r} \leq C_r |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q-1/r} = o(1), \quad 1 \leq q < r < 2.$$

On obtient finalement :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_q = o(1).$$

16) Pourquoi dans le livre d'Aubin, il considere les solutions  $u$  pour un operateur du type :

$$a_{ij}(M) \partial_{ij} u + b_j(M) \partial_j u + c(M) u = f(M)?$$

Dans le livre d'Aubin  $a_{ij}(M), b_j(M)$  sont des champs de tenseurs, pourquoi tenseur ?

C'est lié au cartes et au changements par cartes et à la formulation variationnelle.

1) Dans le livre d'Hebey, il donne la définition d'un problème posé de manière variationnelle :  
Pour les variétés :

$$\int_M a_{ij} \partial u \partial \varphi dV_g + b_j u \partial \varphi dV_g + c u \varphi dV_g = \int f \varphi dV_g$$

a) Il faut que le problème soit posé sur une variété de manière globale, donc indépendamment des cartes. C pour cela que dans le livre d'Hebey, il dit pour toute carte  $h$ .

b) Si on revient à un problème posé sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , il y a déjà une carte disponible, la carte euclidienne,  $(\Omega, id)$ . Donc pour  $\mathbb{R}^n$ , il suffit que le problème soit posé en coordonnées cartésiennes.

Et après, par la formule de changement de variable, on se ramène à toute carte de l'ouvert. Notons que la notation  $dV_g$  l'explique bien car par un changement de variable, on retrouve le Jacobien, qui donne l'élément de volume pour la métrique euclidienne.

Maintenant quand on fait le changement de variables, il faut que le problème soit invariant, c'est à dire que les coefficients ne changent pas or ceci est possible si on les suppose comme champs de tenseurs.

on écrit par exemple :

$$a_{ij}(M) = a_{ij}[x(M)] = a_{kl}[y(M)] \partial_x y_i^k \partial_x y_j^l,$$

dans le changement de variables, cette loi est celle des tenseurs.

C'est pour cela qu'on suppose les coefficients, des champs de tenseurs. Pour que par changement de variables, ils soient invariants et ceci est possible si ils obéissent à la loi des tenseurs.

Et pour les ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Il suffit que le problème soit posé en coordonnées cartésiennes. Alors on la pour toute carte.

Une forme bilinéaire est un tenseur. Un champ de formes bilinéaires est un champ de tenseurs. Un champ de vecteurs est un champ de tenseurs.

17) Pour quoi, quand on veut appliquer le principe du maximum sur une variété, on a besoin d'un opérateur global :

a) C'est parce qu'on a considéré une variété, qui est constituée de cartes. Il ne faut pas que ça dépende de la carte.

Par exemple, si on veut appliquer le principe du maximum en  $P$ ,

On écrit :  $Lu(P) = L(u \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2))$ , on voit que dans l'écriture même, il ne faut pas que ça dépende de la carte et de l'application de carte  $\varphi$ .

b) Par recouvrement, dans l'intersection d'ouvert de carte, on écrit :

$$Lu(P) = L[u \circ \varphi^{-1}] = L[u \circ \psi^{-1}]$$

dans cette écriture, on a deux cartes, et il ne faut pas que ça dépende des deux cartes, pour cela il faut que l'opérateur soit global.

c) On a la même chose, si on raisonne que la dérivée normale et le principe du maximum de Hopf.

18) Sur les applications conformes du bord en dimension 2.

On a parlé d'application conforme en dimension 2 :

Pourquoi la définition d'un domaine analytique permet d'avoir une carte conforme locale du bord ?

a)-Sur le disque unité, on a une transformation conforme directe du disque sur le demi-plan de Poincaré. Il n'y a pas besoin de définir l'application  $\psi$  (voir ci-dessous).

b)-L'application  $\psi$ , permet de définir des coordonnées qui permettent d'utiliser une application conforme.

Ce qui suit est la traduction de ce qui a été écrit dans les preprints sur arXiv. Pour définir une carte "conforme"  $\gamma$ , en dimension 2.

1-Il suffit de prouver que  $\gamma_1((-\epsilon, \epsilon)) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) \cap \{|abscisse| < \epsilon\}$ , pour  $\epsilon > 0$  assez petit. Avec  $\tilde{\gamma}_1$  l'extension holomorphe de  $\gamma_1(t) = t + i\varphi(t)$ .

Pour voir ça, on raisonne par l'absurde. On a pour  $z_\epsilon \in B_\epsilon$ ,  $\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon) = (t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))$  avec  $|t_\epsilon| \geq \epsilon$ . Comme  $\tilde{\gamma}_1$  est injective sur une boule fixés au départ par le théorème d'inversion locale,  $B_1$  et

$\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 = t + i\varphi(t)$  sur l'axe réel, on a nécessairement  $|t_\epsilon| \geq 1$ . Mais par continuité  $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| \rightarrow 0$  parce que  $z_\epsilon \rightarrow 0$ . Et on utilise le fait que  $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| = |(t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))| \geq |t_\epsilon| \geq 1$ , pour avoir une contradiction. ( Cela veut dire que pour un rayon assez petit quand le graphe sort de la boule, il n'y retourne plus). ( Ce fait implique, en raisonnant avec des chemins, quand un a chemin qui coupe  $\partial\Omega$  in  $\tilde{\gamma}_1(B_\epsilon)$  en un point ce point a pour abscisse  $|abscisse| < \epsilon$ . Encore, une fois, ce fait (par un raisonnement par l'absurde avec le fait que  $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$ , il faut raisonner avec des chemins), implique que l'image de la partie superieure est entierement d'un coté de la courbe et l'image de l'autre est de l'autre coté de la courbe.

2- Posons :  $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M \in \Omega$  telle que :  $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$  avec  $(i'_1, j'_1)$  est une base telle que  $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$ . Et,  $\varphi = id : (x_1, x_2) \rightarrow M$  telle que :  $\overrightarrow{O M} = x_1 i_1 + x_2 i_2$  la base canonique  $(i_1, j_1)$ . Alors on a deux cartes de  $\Omega$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  et les affixes  $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$  et  $z_M = x_1 + ix_2$  sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

On a :

$$\partial_{\lambda_1} = \cos \theta \partial_{x_1} + \sin \theta \partial_{x_2},$$

$$\partial_{\lambda_2} = -\sin \theta \partial_{x_1} + \cos \theta \partial_{x_2},$$

Donc, la métrique dans la carte  $\psi$  ou en coordonnées  $(\lambda_1, \lambda_2)$  est :  $g_{ij}^\lambda = \delta_{ij}$  et le Laplacien dans les deux cartes (coordonnées),  $\psi$  et  $\varphi$  est le Laplacien usuel  $\partial_{\lambda_1 \lambda_1} + \partial_{\lambda_2 \lambda_2}$ .

On écrit :

$$\Delta u(M) = \Delta_\lambda(u \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2))$$

Puis on applique l'application conforme  $\tilde{\gamma}_1$  qui envoie l'affixe  $T_M, M$  dans un voisinage de  $x_0 \in \partial\Omega$  vers  $B_\epsilon$  et envoie  $T_M, M \in \partial\Omega$  sur l'axe réel  $(-\epsilon, \epsilon)$  et l'autre partie vers l'autre partie de  $\Omega$  et  $\bar{\Omega}^c$ .

On a :  $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M$  et  $\tilde{\gamma}_1 : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (\mu_1, \mu_2)$ . L'application considérée est :  $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ . C'est bien une carte. Pour le voir :

La premiere carte (carte usuelle) est :  $\psi \circ g^{-1}$  avec  $g$  est l'application  $g : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$  et  $\varphi_0$  l'application qui permet de définir  $\partial\Omega$  comme un graphe.

L'application de changement de carte est :

$$g \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$$

elle est reguliere d'un voisinage de 0 vers un autre voisinage de 0 et envoie la partie superieure du premier voisinage vers la partie superieure de l'autre voisinage (ainsi que les parties inferieures).

On voit bien que  $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$  est une carte avec la propriété que  $\tilde{\gamma}_1$  est conforme.

(l'application  $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$  est aussi la composée de, une rotation et une translation (donc conforme) et de  $\tilde{\gamma}_1^{-1}$  qui est conforme, si on se placait en coordonnées cartésiennes au départ. Mais, il faut voir que la carte  $\psi$  definit des coordonnés qui permettent la construction d'une application conforme. On n'a pas besoin de cela pour le disque unité, on a directement l'application du demi-plan de Poincaré).

Remarque :  $\psi$  et  $\varphi = id$  sont des cartes de  $\Omega$  et  $\psi$  est "presque" une carte de  $\partial\Omega$ . Mais  $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$  et  $\psi \circ g^{-1}$  sont des cartes du bord.

Le probleme elliptique peut etre vu de deux manieres : donc, si on considere, au depart, les coordonnées cartésiennes, on a une transformation conforme. Si, on considere le probleme posé sur une variété a bord, on a une carte analytique.

3- "Caractérisation des domaines  $C^k$ " : On peut dire que la définition d'un domaine  $C^k, k \geq 1$  est équivalente à la définition d'une sous-variété + la condition :  $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$  or  $\bar{\Omega} = \Omega$ .

19) Concernant l'element de volume et la mesure de Hausdorff sur le bord :

Avec le point 18), la carte usuelle du bord est :  $h = \psi \circ g^{-1}$  avec,

$\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M \in \Omega$  telle que :  $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$  avec  $(i'_1, j'_1)$  est une base telle que  $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$ . Et,  $\varphi = id : (x_1, x_2) \rightarrow M$  telle que :  $\overrightarrow{O M} = x_1 i_1 + x_2 i_2$  la

base canonique  $(i_1, j_1)$ . Alors on a deux cartes de  $\Omega$ ,  $\varphi$  et  $\psi$  et les affixes  $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$  et  $z_M = x_1 + ix_2$  sont tels que (l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

et,

$g$  est l'application  $g : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$  et  $\varphi_0$  l'application qui permet de définir  $\partial\Omega$  comme un graphe.

La metrique sur le bord  $\partial\Omega$  s'écrit localement :

$$h^*(i^*(\delta)) = \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda,$$

avec  $\delta$  la metrique euclidienne de  $\mathbb{R}^2$ . (la metrique sur le bord est  $i^*(\delta)$  avec  $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \rightarrow x$ ).

On l'a explicitement, en calculant (le determinant contient un terme car on est en dimension 1, c la meme chose en dimension superieure),  $h^*(i^*(\delta)) = \delta(dh(\partial\lambda), dh(\partial\lambda)) = [1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2]$ .

Avec  $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $x \rightarrow x$  l'inclusion.

Et considerant l'application Lipschitzienne ( c'est aussi l'application de carte, locale, du bord  $\partial\Omega$  qui permet aussi de calculer  $g_{11}$ , ce qu'on a fait precedemment) :

$$\lambda \rightarrow (\lambda, \varphi_0(\lambda)) = h(\lambda, 0),$$

on a par la formule de l'aire, l'egalité entre la mesure de Hausdorff et le Jacobien (element d'aire) :

$$\int_{[a,b]} \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda = \int_{h([a,b],0) \subset \partial\Omega} dH_1,$$

Finalement, on a l'egalité suivante :

$$d\sigma = \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda = dH_1|_{\partial\Omega}.$$

avec cette remarque, on voit par exemple que  $H_1(\partial\Omega) < +\infty$ , dans le cas  $\partial\Omega$  compact.

20) Quand y a il une relation entre  $W^{1,\infty}$  et  $C^{0,1}(\bar{\Omega}) = Lipschitz(\bar{\Omega})$ .

a) Dans le cas d'un convexe ou une boule, c'est écrit dans le livre de Brezis quand il approxime  $L^\infty$  par  $L^p$ , dans le critere pour qu'une fonction soit  $W^{1,p}$ .

b) Quand l'ouvert est Lipschitzien ou au moins  $C^1$ , c'est un exercice dans livre d'Otared Kavian. On utilise l'operateur de prolongement (Notez que la constante de prolongement ne depend pas de  $p$ , on peut utiliser le proceder de Brezis  $p \rightarrow +\infty$ ), puis on se ramene á un convexe, une boule, puis on revient aux fonctions de depart.

Dans les cas precedents, il y a egalité entre les deux ensembles.

21) pourquoi on écrit dans la derivation (ici  $\nabla = \nabla_X$  pour un vecteur  $X$ ) :

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = \langle \nabla a|b \rangle + \langle a|\nabla b \rangle$$

ceci est du à ( $g$  est la metrique et  $C$  la contraction) :

$$\langle a|b \rangle = C_1^3 C_2^4 (g \otimes a \otimes b)$$

La derivée covariante commute avec la contraction et  $\nabla g = 0$ , car c la connexion de Levi-Civita :

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = C_1^3 C_2^4 (\nabla g \otimes a \otimes b + g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b)$$

Donc,

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = C_1^3 C_2^4 (g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b) = \langle \nabla a|b \rangle + \langle a|\nabla b \rangle .$$



22) Sur les coordonnées géodésiques polaires : elles sont définies à partir de la carte exponentielle. Il existe un voisinage du point tel que pour  $y \in B(x, \epsilon)$ ,  $z \rightarrow \exp_y(z)$  est un difféomorphisme. On a alors une carte. On définit les coordonnées géodésiques polaires. On s'assure que (lemme de Gauss) :

a)

$$\frac{d}{dt} \langle \nabla_t | \nabla_t \rangle = \nabla_t \langle \nabla_t | \nabla_t \rangle = 2 \langle \nabla_t(\nabla_t) | \nabla_t \rangle = 0$$

Car c'est une géodésique  $\nabla_t(\nabla_t) = 0$ . Donc,  $\langle \nabla_t | \nabla_t \rangle \equiv cte = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla_t | \nabla_t \rangle = 1$ , car la carte exponentielle est normale en  $y$ .

$$\nabla_t \langle \nabla_t | \nabla_\theta \rangle = \frac{1}{2} \nabla_\theta \langle \nabla_t | \nabla_t \rangle = \frac{1}{2} \nabla_\theta(1) = 0,$$

Ici, on utilise le fait que la connexion est sans torsion pour permuter la dérivation en  $t$  et angulaire.

Donc,

$$\langle \nabla_t | \nabla_\theta \rangle \equiv cte = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla_t | \nabla_\theta \rangle = 0$$

C'est le lemme de Gauss.

On pouvait écrire  $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)$  avec  $\partial_i, \partial_j \in \{\partial_t, \partial_{\theta_j}\}$ .

b) Les géodésiques sont minimisantes, c bien écrit dans le livre d'Hebey et Gallot-Hulin-Lafontaine, remarquons, comme c écrit dans le Do Carmo. Pour calculer la longueur d'un chemin passant par l'origine, on prend  $\int_\epsilon^1$ , puis on fait tendre  $\epsilon$  vers 0. Car les coordonnées géodésiques polaires sont définies en dehors de 0, origine, puis on fait tendre le rayon  $r$  vers 0.

c) On voit comme c dit dans le Hebey, que les géodésiques sont minimisantes, l'image de boules ouvertes sont des boules ouvertes, de boules fermées, sont des boules fermées, l'image de sphères, sont des sphères.

Soit,  $\tilde{z}$  l'application de  $\mathbb{S}_{n-1}$  vers  $\mathbb{S}_{n-1}^r$  définie par  $\theta \rightarrow r\theta$ .

Par définition, pour  $h$  une fonction définie au voisinage de  $x$  :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x \circ z \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x)}{\partial z_k} \times r \frac{\partial(\psi^{-1})^k}{\partial \theta_j}.$$

avec  $\varphi_0 = \exp_x \circ z \circ \psi^{-1}$ .

Ce qu'on peut écrire :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \exp_x)}{\partial z_k} \times r \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta_j}.$$

et,

$$\partial_{\theta^i, x} = r b_i^k(\theta) \partial_{z^k, x}.$$

On a donc, pour tout  $x \in B(x_0, \epsilon_0)$ ,  $[B(x, \epsilon_0), \exp_x^{-1}]$  est une carte normale en  $x$ . Pour tout  $x \in B(x_0, \epsilon_0)$  :

$$g_{x, ij}(z) = g(z)(\partial_{z^i, x}, \partial_{z^j, x}),$$

où  $\partial_{z^i, x}$  est le champ de vecteur locale canonique lié à la carte exponentielle.

On note,  $a_i^k(z, x) = \frac{(\varphi \circ \exp_x)^k}{\partial z^i}[\exp_x^{-1}(z)]$ , alors,  $\partial_{z^i, x} = a_i^k(z, x) \partial_{u^k, \varphi}$ ,

avec,  $\partial_{u^k, \varphi}$ , le champ de vecteur canonique relatif à la carte  $(\Omega, \varphi)$ , ce dernier ne dépend pas du point  $x$ , contrairement à celui de la carte exponentielle en  $x$ . Quant aux fonctions  $a_i^k$  elles sont  $C^\infty$  de  $z$  et  $x$ . On obtient,

$$g_{x, ij}(z) = g(z)[a_i^k(z, x) \partial_{u^k, \varphi}; a_j^l(z, x) \partial_{u^l, \varphi}] = a_i^k(z, x) a_j^l(z, x) g_{kl}(z),$$

où les  $g_{kl}$  sont les composantes de  $g$  dans la carte  $(\Omega, \varphi)$ .

On a,  $z = \exp_x(y)$ ,  $y \in B(0, \epsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$  et  $y = r\theta$  en coordonnées polaires, ainsi, la fonction  $(x, r, \theta) \rightarrow g_{x, ij}[\exp_x(r\theta)]$  est  $C^\infty$  des variables  $x$ ,  $r$  et  $\theta$ .

D'autre part, par définition,  $g_{ij}^k(r\theta) = g_{[\exp_x(r\theta)]}(\partial_{\theta^i}, \partial_{\theta^j}, x)$ , (champs de vecteurs canoniques).

En utilisant le même type de calcul que précédemment, on a,

$$\partial_{\theta^i}, x = r b_i^k(\theta) \partial_{z^k}, x,$$

avec,  $b_i^j$  des fonction très régulières. Donc,

$$g_{ij}^k(r, \theta) = r^2 g_{[\exp_x(r\theta)]}(b_i^k \partial_{z^k}, x, b_j^l \partial_{z^l}, x),$$

d'où,

$$g_{ij}^k(r, \theta) = r^2 b_i^k(\theta) b_j^l(\theta) g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)].$$

Donc, l'application,  $\tilde{g}_{ij}^k : (x, r, \theta) \rightarrow b_i^k b_j^l g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)]$  est  $C^\infty$  des trois variables  $x, r$  et  $\theta$ . On a,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = b_i^k(\theta) b_j^l(\theta) c^m(\theta) \partial_m g_{x,kl}(x) = 0,$$

car, la carte exponentielle est normale en  $x$  et les  $g_{x,kl}$  sont les composantes de  $g$  dans cette même carte. On a aussi,

$$\partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, r, \theta) = \tilde{b}_i^k(\theta) \tilde{b}_j^l(\theta) g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + r \bar{b}_i^k(\theta) \bar{b}_j^l(\theta) \bar{c}_m^s(\theta) \partial_s g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)],$$

En redérivant en  $r$ , on obtient,

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, r, \theta) &= u_{ijmr}^{klq}(\theta) \partial_q g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + v_{ijmr}^{kl}(\theta) w^s(t) \partial_s g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + \\ &+ r h_{ijrm}^{klst}(\theta) \partial_{st} g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k.$$

Ainsi, on obtient :

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (*)$$

On a la même chose en considérant le déterminant :

Comme,  $\sqrt{|\tilde{g}^k|} = \alpha^k(\theta) \sqrt{[\det(g_{x,ij})]}$ , on en déduit,

$$\partial_r (\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}) = \partial_r [\log(\sqrt{[\det(g_{x,ij})])}] .$$

Par définition du déterminant et en développant par rapport al ligne 1 par exemple, on obtient,

$$\det[g_{x,ij}][\exp_x(r\theta)] = \Sigma \Pi g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)],$$

d'où,

$$\partial_r \det[g_{x,ij}](x) = \Sigma \Pi [g_{x,kl}(x)] a^s(\theta) \partial_s g_{x,mn}(x) = 0,$$

Car, la carte exponentielle est normale en  $x$ .

Finalement,

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k.$$

En utilisant le même raisonnement que celui qu'on utilisé pour calculer,  $\partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta)$ , on prouve que,

$$\partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0.$$

En conclusion,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (**)$$

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (***)$$

$$\partial_r \partial_{\theta^m} \left[ \frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right] (x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \partial_{\theta^{m'}} \left[ \frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right] (x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (****)$$

L'ouvert  $U^k$  est choisit de telle manière qu'en le réduisant un peu, il reste un ouvert de carte.

On utilise alors, l'uniforme continuité des dérivées successives pour obtenir les résultats de la proposition 1.

**Remarque :**

$\partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}]$  qui est une fonction locale de  $\theta$ , est la restriction d'une fonction globale, définie sur toute la sphère  $\mathbb{S}^{n-1}$  à savoir  $\partial_r [\log \sqrt{\det(g_{x,ij})}]$ . On notera,  $J(x, r, \theta) = \sqrt{\det(g_{x,ij})}$ .

23) Le Laplacien en polaires :

Ecrivons le laplacien dans  $]0, \epsilon_1[ \times U^k$ ,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}] \partial_r + \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

On a,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r \log J(x, r, \theta) \partial_r + \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

Le laplacien s'écrit (décomposition radiale et angulaire),

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r - \Delta_{S_r(x)},$$

où  $\Delta_{S_r(x)}$  est le laplacien sur la sphère  $S_r(x)$ .

$\Delta_{S_r(x)}$ , s'écrit localement,

$$-\Delta_{S_r(x)} = \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

On conclut que l'opérateur de droite en  $\theta$ , dans la première expression du laplacien, n'est que l'écriture locale d'un opérateur global.

On pose,  $L_\theta(x, r)(\dots) = r^2 \Delta_{S_r(x)}(\dots)[\exp_x(r\theta)]$ .

L'opérateur  $L_\theta(x, r)$  est un opérateur définie sur les fonctions  $C^2(\mathbb{S}_{n-1})$  de manière globale (il ne dépend pas de la carte choisie sur  $\mathbb{S}_{n-1}$  et vaut localement,

$$L_\theta(x, r) = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} [\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}].$$

De plus cet opérateur est elliptique, on écrit alors,

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r - \frac{1}{r^2} L_\theta(x, r).$$

Si, maintenant,  $u$  est une fonction définie sur  $M$ , alors,  $\bar{u}(r, \theta) = u \circ \exp_x(r\theta)$  est la fonction qui lui correspond en coordonnées polaires centrées en  $x$ .

$$-\Delta u = \partial_{rr} \bar{u} + \frac{n-1}{r} \partial_r \bar{u} + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r \bar{u} - \Delta_{S_r(x)}(u|_{S_r(x)})[\exp_x(r\theta)],$$

$$r^2 \Delta_{S_r(x)}(u|_{S_r(x)})[\exp_x(r\theta)] = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} \left[ \tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j} [u \circ \exp_x(r\theta)] \right] = L_\theta(x, r) \bar{u}.$$

Ainsi,

$$-\Delta u = \partial_{rr} \bar{u} + \frac{n-1}{r} \partial_r \bar{u} + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r \bar{u} - \frac{1}{r^2} L_\theta(x, r) \bar{u}.$$

D'autre part, il est clair qu'en se plaçant dans la carte exponentielle, on transporte la métrique dans l'espace euclidien. Puis, en considérant les coordonnées géodésiques polaires, on voit que la métrique se décompose suivant les champs de vecteurs radial et angulaires. Comme l'espace se décompose suivant la partie radiale et angulaire sur la sphère, il est clair qu'en considérant les champs de vecteur  $\partial_r, \partial_{\theta^j}$ , on retrouve localement le laplacien radial et angulaire, qui est un laplacien global par la carte exponentielle. On retrouve par l'intermédiaire de la carte exponentielle un laplacien global qu'on décompose en coordonnées géodésiques polaires en partie radiale et angulaire par le lemme de Gauss.

L'opérateur  $L_\theta(x, r)$  est un laplacien sur  $\mathbb{S}_{n-1}$  pour une certaine métrique qui dépend du paramètre  $r$ .

On a,  $\Delta_{S_r(x)} = \Delta_{i_{x,r}^*(g)}$  où,  $i_{x,r}$  est l'application identité de  $S_r(x)$  dans  $M$  et  $i_{x,r}^*(g) = \tilde{g}$  est la métrique induite sur la sous-variété  $S_r(x)$  de  $M$ .

Comme  $\exp_x$  induit un difféomorphisme de  $S_r(x)$  vers  $\mathbb{S}_{n-1}^r$ , on a :

$$\Delta_{S_r(x)} u|_{S_r(x)} = \Delta_{i_{x,r}^*(g)} u|_{S_r(x)} = \Delta_{\tilde{g}} u|_{S_r(x)} = \Delta_{\exp_x^*(\tilde{g}), \mathbb{S}_{n-1}^r} u \circ \exp_x(v),$$

Soit,  $\tilde{z}$  l'application de  $\mathbb{S}_{n-1}$  vers  $\mathbb{S}_{n-1}^r$  définie par  $\theta \rightarrow r\theta$ . Alors,

$$\Delta_{\exp_x^*(\tilde{g})} u \circ \exp_x(v) = \Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]} u \circ \exp_x(r\theta),$$

Pour le choix de la carte  $(\psi, U^k)$ , sur  $\mathbb{S}_{n-1}$ , la carte locale en coordonnées polaires pour le point  $x$  est,  $(\varphi_0, ]0, \epsilon_0[ \times U^k)$ , où  $\varphi_0 = \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1}$ . Les  $g_{jl}^k$  sont par définition :

$$g_{jl}^k(r, \theta) = g_{\exp_x(r\theta)}(\partial_{j, \varphi_0}, \partial_{l, \varphi_0}),$$

avec,  $\partial_{j, \varphi_0}, \partial_{l, \varphi_0}$  les champs de vecteurs canoniques correspondant à la carte  $(\varphi_0, ]0, \epsilon_0[ \times U^k)$ .

Par définition, pour  $h$  une fonction définie au voisinage de  $x$  :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j},$$

Rappelons, qu'on écrit,  $\psi(\theta) = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{n-1})$  et  $\theta_0 = r$  (dérivations angulaires et radiale).

Si, on s'occupe des composantes angulaires, c'est à dire les champs de vecteurs,  $\partial_{j, \varphi_0}$  avec  $1 \leq j \leq n-1, j \in \mathbb{N}$ , alors,

$$\begin{aligned} \partial_{j, \varphi_0}(h) &= \frac{\partial(h \circ i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j}, \\ \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} &= \frac{\partial(h \circ i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j}, \end{aligned}$$

Donc, si on note  $\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l$  les champs de vecteurs canoniques de la sphère par rapport à la carte  $(\psi, U^k)$ , on obtient, en notant  $d$  désigne la différentielle,

$$\partial_{j, \varphi_0} = d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_j),$$

Donc,

$$g_{jl}^k(r, \theta) = g_{\exp_x(r\theta)}[d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_j), d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_l)],$$

d'où, en utilisant la définition du pull-back,

$$g_{jl}^k(r, \theta) = \tilde{z}^*[\exp_x^*(i_{x,r}^*(g))](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l) = \tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l),$$

le dernier terme à droite dans l'expression précédente, n'est que la composante  $j, l$ , de la métrique  $\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]$  définie sur la sphère unité  $\mathbb{S}_{n-1}$ .

Finalement, on peut comparer les expressions locales et globales,

$$-\Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})], \mathbb{S}_{n-1}} u \circ \exp_x(r\theta) = \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} [\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j} u \circ \exp_x(r\psi^{-1})],$$

Maintenant, si on prend la nouvelle métrique sur  $\mathbb{S}_{n-1}$  définie par,

$$g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}} = r^{-2} \tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})],$$

cette métrique est bien définie et de plus,

$$g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}jl} = r^{-2} g_{jl}^k = \tilde{g}_{jl}^k,$$

Nos raisonnements futurs se feront avec  $r > 0$ . On obtient,

$$\Delta_{g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}}} = r^2 \Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})], \mathbb{S}_{n-1}} = L_\theta(x, r).$$

**Remarque :** Dans le cas plat, un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ , on n'a pas besoin de tout cela. Dès qu'on a une boule, on peut définir les coordonnées polaires. On écrit  $x = a_i + r\theta$  en polaires. Alors, on passe aux différentielles, on obtient :  $dx = dr\theta + rd\theta$  et quand on prend la norme euclidienne,  $dx^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$ , on voit bien que  $d\theta^2$  est la métrique euclidienne restreinte à la sphère, qui est la métrique de la sphère. On obtient alors la formule du Laplacien en polaires dans le cas euclidien, un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  (formule usuelle dans des cartes, ici, la carte polaire,  $(r, \theta)$ ). ( $\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \frac{1}{r^2} \Delta_\theta$ ,  $\Delta_\theta$  est la laplacien de la métrique de la sphère  $d\theta^2 = g_{ij}(\theta) d\theta^i d\theta^j$ ).

24) Sur les fonctions Green :

Le monograph de Druet-Hebey-Robert est assez clair et précis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la décomposition de cette fonction est de classe  $C^1$ . C'est essentiellement du au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une récurrence pour prouver que les termes de la décomposition sont Sobolev et continues en dehors de la diagonale. (Ou bien comme dans le monograph de Druet-Hebey-Robert, on fait la différence des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est écrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara, pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des dérivées directionnelles).

Les fonctions qu'on considère sont continues en dehors d'un ensemble de mesure nulle (un point ou la diagonale). Elles sont mesurables. Elles sont intégrables par les théorèmes de comparaisons.

Soit  $(\bar{W}, g)$  une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note  $(M, g)$ .

Soit  $H$  la fonction définie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne dépend pas de la fonction rayon d'injectivité dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle dépend (à gauche en  $P$ ) du rayon d'injectivité dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur  $W$  avec  $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$ , on peut alors la prolonger par 0 sur  $\partial W$ . Alors  $\delta(P)$  est continue sur  $\bar{W}$ .

On pose :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q), \quad \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_W \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P, Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par récurrence les  $\Gamma_i$  sont continues en dehors de la diagonale et pour  $P$  ou  $Q$  proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on prouve qu'elles sont  $W^{1,\infty}$  en dehors de la diagonale en  $Q$  car elles sont Sobolev est leur dérivées bornées. La fonction  $d(P, Q) = d_P(Q)$

est reguliere en  $Q$  en dehors de  $P$  et en fixant  $Q$  elle est Lipschitzienne en  $P$ , on alors le fait que  $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d_R(Q)$  est continue en dehors de la diagonale et  $L_{loc}^\infty$ . Donc, par le theoreme de convergence dominee (enlever de petites boules)  $\Gamma_i * \partial_Q \Gamma_1$  et  $\Gamma_i * \partial_Q H$  sont  $C^0$  en dehors de la diagonale. Donc, les  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_i * H$  sont  $C^1$  en dehors de la diagonale. (Le point essentiel est la fonction distance). (Concernant la fonction distance,  $(R_i, Q) \rightarrow d(R_i, Q) = d(R_i, \exp_{R_i}(r\theta))$ ,  $Q = \exp_{R_i}(r\theta)$ ,  $\epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3$ ,  $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$  et la carte de reference est  $[B(R_0, \delta(R_0)/3), \exp_{R_0}]$  avec  $R_i \rightarrow R_0$ . On voit alors qu'en coordonnes geodesiques polaires centrees en  $R_i$  un calcul de  $\Delta_{g,Q} d(R_i, Q) \in L^\infty$  et  $d(R_i, \cdot) \rightarrow d(R_0, \cdot)$  et par les estimations elliptiques on a  $\partial_Q d(R_i, Q) \rightarrow \partial_Q d(R_0, Q)$  pour  $d(R_i, Q) \geq \epsilon_0 > 0$ .)

Dans le cas où  $W = M$  sans bord :

D'apres sa formule explicite  $H$  est  $C^1$  en dehors de la diagonale. Elle est  $W^{1,1+\epsilon}$  de chaque variable pour un  $\epsilon > 0$  assez petit, par recurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli :

$$\partial_P \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \partial_P \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR,$$

et,

$$\partial_Q \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \Gamma_i(P, R) \partial_Q \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Pour une varieté avec bord, on ne peut pas derivier par rapport  $P$ , car l'expression de  $\Gamma_i$  et en particulier de  $\Gamma_1$  contient  $\delta_P$  qu'on sait seulement continue et pas forcement differentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions  $\Gamma_i$  sont continues en  $P$  en dehors de la diagonales et  $L^{1+\epsilon}$ ,  $\epsilon > 0$  seulement, mais ceci suffit pour prouver la symetrie par le theoreme d'Agmon)

On a aussi, les estimees de Giraud. Ainsi de proche en proche, les  $\Gamma_i$  deviennent de plus en plus regulieres. on utilise le theoreme de Giraud pour prouver que  $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$  avec  $\lambda + 2 > n$  (donc  $\geq n + 1$  car  $\lambda$  est entier puisqu'on derive les  $\Gamma_i$ ). ( Si  $\lambda > n - 1$  ( $\lambda \geq n$ ) c'est fini (on regarde  $\Gamma_{k-1}$ ), si  $\lambda = n - 1$  alors :  $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$  et  $\partial_P \Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$  et  $\partial_Q \Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$  qui est en log par Giraud et donc  $\partial_P \Gamma_{k+1}$  et  $\partial_Q \Gamma_{k+1}$  sont  $C^0(M \times M)$  par Giraud et donc  $\Gamma_{k+1}$  est  $C^1(M \times M)$ . (Utiliser le produit de convolution, car  $\Gamma_{k+1}$  et sa derivee Sobolev, est continue pour ecrire qu'elle est  $\int \partial_P$ , l'integrale d'une fonction continue donc  $C^1$ , il a convergence uniforme de la convolution, car la fonction et son Sobolev sont continues). Dans le cas avec bord,  $\Gamma_k$  continue implique que  $\Gamma_{k+1}$  est  $W^{1,\infty}$  en  $Q$ . (On a mieux  $C^1$  en  $Q$  car la fonction  $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d(R, Q)$  est  $C^0$  en dehors de la diagonale de  $W$  et  $H$  est a support compact (elle s'annule avant le bord) et donc  $(\Gamma_k * \partial_Q H)$  est  $C^0$  en dehors de la diagonale de  $(\bar{W})$ ).

Dans le cas d'un operateur  $-L = -\Delta + h$ , la regularite de  $\Gamma_{k+1}$  depend de celle de  $h$ . Si par exemple  $h$  est  $C^1$  alors comme precedemment  $\Gamma_{k+1}$  est  $C^1$  de  $P$  et  $Q$ . Bien sur le  $\Gamma_1$  change :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q) + h(Q)H(P, Q).$$

**Remarque :** a) sur la borne inferieure de la fonction de Green  $G_\epsilon$  de  $-\Delta + \epsilon = -\nabla^i(\nabla_i) + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ .

1) On a  $G_\epsilon \geq 0$  donc par la propriété de la borne inferieure  $m_\epsilon = \inf_{M \times M} G_\epsilon$  existe.

2) Par definition  $m_\epsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} G_\epsilon(x_\delta, y_\delta)$ . Si on suppose que  $d(x_\delta, y_\delta) \rightarrow 0$ , par la propriété du monograph de Druet-Hebey-Robert,  $m_\epsilon = +\infty$ , ceci n'est pas possible et Comme  $G_\epsilon$  est continue en dehors de la diagonale.  $m_\epsilon = G_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon)$  avec  $x_\epsilon \neq y_\epsilon$ .

Si on met un indice ,  $i$ , alors on peut supposer que,  $G_i = G_{\epsilon_i}$  :

$$\inf_{M \times M} G_i = m_i = G_i(x_i, y_i), \quad x_i \neq y_i,$$

Apres, on peut raisonner sur la borne inferieure globale sur tout  $M \times M$ , au lieu de prendre l'inf sur  $M$  en  $x$  puis en  $y$ .

b) sur les fonctions de Green des varietés à bord. on remarque que par exemple que pour les varietes à bord, la parametrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les theoremes d'Agmon et de regularité dans la construction complete de la fonction de Green dans le cas des varietes a bord, voir le monograph de F.Robert, c'est essentiellement l'utilisation des noyaux, la formule sommatoire et les théorèmes d'Agmon.

////////////////////////////////////

25) Sur la formule de Gauss-Bonnet :

C'est bien écrit dans le livre de J.Lafontaine, édition 2010.

1) relation entre l'indice d'un champ de vecteurs et la courbure de Gauss.

2) relation entre indice d'un champ de vecteur, fonction de Morse et caractéristique d'Euler-Poincaré.

On a une surface riemannienne compacte sans bord  $(M, g)$ .

On part d'un champ de vecteur  $X$  ayant des zéros. On considère le normalisé  $X_1 = X/\|X\|$ , il n'est pas défini aux zéros de  $X$ . Puisqu'il y a produit scalaire, on considère  $X_2$  son orthogonale de sorte qu'on ait un repère orthonormé.

$(X_1, X_2)$  est un repère mobile ou "moving-frame". On a une connexion, donc on a de nouveaux symboles de Christoffel et une connexion forme  $\omega$ . de sorte que  $d\omega = \Omega$  la courbure. celle-ci n'est pas définie aux zéros de  $X$ , puisqu'on considère  $X_1$  et on divise par  $\|X\|$ .

(Comme on l'a dit pour la surface  $K3$ , on a une connexion  $\Rightarrow$  symboles de Christoffel  $\Rightarrow$  connexion forme (par dualité). Puis on dérive  $d\omega$  on retrouve la courbure ou forme volume par dualité. C'est bien écrit dans le livre de J. Lafontaine quand il considère  $\nabla_{X_i}(X_j)$ . Dans certains livres on note  $\omega = \omega_1^2$ . On peut le voir comme : quand on calcule  $\nabla_i dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k$  pour les champs de vecteurs et les formes différentielles usuelles, ici pour  $X$  la forme  $\omega$ , on calcule  $\nabla_X \omega_i = -\omega_i^k(X)\omega_k$ , changements de bases, nouveaux symboles de Christoffel.)

Mais au voisinage des zéros on a une carte (canonique si on veut, normalisé) et le passage des champs issus de cette carte notés  $(Z_1, Z_2)$  à  $(X_1, X_2)$  se fait via un champ de rotations  $R = e^{i\varphi}$  (plus précisément de  $Z_1$  à  $X_1$ , on voit bien que  $X_1 = e^{i\varphi} Z_1$  se contracte vers un vecteur du type  $e_1 \times e^{i\varphi}$  car  $Z_1$  est défini sur un voisinage de la singularité et qu'on peut le contracter en un vecteur fixe). (On voit ici que  $R$  est homotope à  $X_1$ ). On note  $\omega_0$  la connexion forme pour ce repère mobile ou "moving-frame"  $(Z_1, Z_2)$ . Alors on a la relation :

$$\omega = \omega_0 - d\varphi.$$

Avec  $\omega_0$  définie au voisinage de la singularité contrairement à  $\omega$ . (on peut passer à la limite dans la formule de Stokes, voir ci-dessous).

La rotation  $R$  est homotope au champ  $X_1$  donc : on a le même degré topologique.

$$\deg(R) = \deg(X_1).$$

Or,

$$\deg(R) = \deg(\text{rotation}) = \int d\varphi,$$

et par définition,

$$\deg(X_1) = \text{indice}(X).$$

(Pour une fonction de Morse  $f$ , on considérera  $X = \nabla f$  et l'indice se calcule explicitement dans une carte particulière, car il ne dépend pas de la carte).

Maintenant la formule de Stokes donne, c'est bien écrit dans le Lafontaine :

$$\int \Omega = \int d\omega = \int \omega \rightarrow \int d\varphi = \text{indice}(X).$$

Ceci pour la relation entre courbure et indice de champs de vecteurs. (c'est lié à la connexion forme, qui induit la courbure et qui est produite par le repère mobile issu de  $X$ ).

Maintenant un théorème, voir le Gramain ou Hirsch (Differential Topology), dit que sur une surface compacte, il y a une fonction de Morse  $f$ . On applique, ce qui précède à  $\nabla f$ . Ceci revient à calculer un nombre lié aux différents indices de la fonction de Morse et qui est bien détaillé dans le livre de Hirsch (Differential Topology). Ceci revient à calculer l'homologie d'un complexe cellulaire et qui donne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Pour ce qui est du calcul de la caractéristique d'Euler d'une somme connexe. C'est bien connu. Voir aussi dans le livre de J. Lafontaine.

////////////////////////////////////

26) Equation de Liouville : Pourquoi, lorsque la courbure de Gauss d'une surface est constante,  $K$  alors  $K > 0$  la surface est localement isometrique a la sphere (un ouvert de la sphere),  $K = 0$  elle est isometrique au plan (un ouvert du plan),  $K < 0$  elle est isometrique a un ouvert de l'espace hyperbolique ?

En effet soit  $S$  une surface de metrique  $g$ , alors, on peut definir des coordonnées geodesiques polaires,  $(r, \theta)$ , dans ses coordonnés  $g = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2$ . Alors la courbure de Gauss verifie l'equation differentielle suivante  $\partial_{rr}(\sqrt{G}) + K\sqrt{G} = 0$ , avec les conditions a l'origine  $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$  et  $\partial_r(\sqrt{G}(0, \theta)) = 1$ . Clairement lorsque  $K$  est une constante, cette equation differentielle s'integre facilement et donne la metrique de la sphere ou du plan ou du plan hyperbolique. ( $(\sin r)^2$ , ou  $r^2$  ou  $(\sinh r)^2$ ).

Si on note  $\varphi : (r, \theta) \rightarrow \exp_x(r\theta)$ , la carte definissant les coordonnées geodesiques polaires pour la surface  $S$ , on ecrit alors,  $\varphi^*(g) = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2 = \psi^*(g_0)$ , avec  $\psi$  la carte definissant les coordonnes geodesiques polaires, selon qu'on soit sur la sphere, le plan, ou le plan hyperbolique (a partir de la carte exponentielle,  $\psi : (r, \theta) \rightarrow \exp_y(r\theta)$ ).

Alors,  $\varphi, \psi$ , qui sont des diffeomorphisme avec  $(\varphi \circ \psi^{-1})^*(g) = g_0$  et  $\varphi \circ \psi^{-1}$  est l'isometrie cherchée. (Par exemple si  $K > 0$ ,  $\varphi : \Omega_1 \subset S \rightarrow ]0, r_0[ \times ]a, b[, ]a, b[ \subset \mathbb{S}_1$  et  $\psi : \Omega_2 \subset \mathbb{S}_2 \rightarrow ]0, r_0[ \times ]a, b[, ]a, b[ \subset \mathbb{S}_1$ , sont deux cartes dont les images sont les memes dans  $]0, r_0[ \times ]a, b[, ]a, b[ \subset \mathbb{S}_1$  et  $\psi^{-1} \circ \varphi : \Omega_1 \subset S \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{S}_2$ ).

27) Sur le flot de Ricci et la conjecture de Poincaré : l'idée est qu'on déforme une metrique, a partir de l'equation du flot de Ricci pour obtenir une metrique de courbure de Ricci strictement positive, puis on réutilise le flot de Ricci pour deformer la metrique pour obtenir une metrique de courbure sectionelle constante positive, (la variété est simplement connexe et compacte), elle est alors diffeomorphe a la 3-sphere :

a) On part du Resultat de Gao et Yau ou Lohkamp, il existe toujours une metrique de courbure de Ricci strictement negative. Puis on utilise le flot de Ricci.

b) Par le blow-up et les estimations de Hamilton, on deforme la metrique pour obtenir une metrique de courbure de Ricci positive ou nulle (blow-up, a la limite). Ici, c'est dit dans le monograph de John-W Morgan et Gang Tian (Ricci flow and The Poincaré conjecture), on étend petit a petit le flot de Ricci par chirurgie (le travail de Perelman). La conjecture de Geometrisation. On passe d'une variété de courbure negative strictement à une variété de courbure positive ou nulle. (on change de metrique). (heuristiquement, si on note  $R_k = \max R_t$  avec  $R_t$  la courbure scalaire, en divisant par  $R_k$ , on aurait,  $Ricci < b(n) < 0 \Rightarrow \frac{Ricci}{R_k} > \frac{b(n)}{R_k} \rightarrow 0$ , si  $k \rightarrow +\infty$ . En faisant le blow-up, a) on change d'echelle, b) il faut "recoller" les morceaux a la limite, pour avoir une variété et une metrique reguliere qui sera de courbure sectionelle positive ou nulle, c) la variété en question est notée  $\mathbb{M}$  de metrique  $g$ , dependant du temps et de l'espace et obtenue par chirurgie (à la limite), telle que  $\mathbb{M}(0) = \mathbb{M}_\infty(0) = M$  et  $g(0) = g_\infty(0)$ , avec  $M$  la variété de départ sur laquelle on a une nouvelle metrique,  $g(0) = g_\infty(0)$  de courbure positive ou nulle.).

(Dans le cas blow-up avec  $R_k \nearrow +\infty$ , voir l'article de Hamilton, référence 36 dans Morgan-Tian, on ne peut pas avoir collapse par les théorèmes de comparaison, voir Morgan-Tian (derniers chapitres, 15-16-17), on ne peut pas avoir  $(0 \neq \pi_1(H_1) \subset ou = \pi_1(M) = 0)$ ,  $H_1$  non compacte est diffeomorphe a  $M$  qui est compacte, ce n'est pas possible, voir l'article de Hamilton, référence 36 de Morgan-Tian et on obtient alors la convergence. Notons le flot de Ricci ici est defini sur  $(0, +\infty)$ , sinon, on l'etend petit a petit, comme pour le Theorme des equations differentielles, de Cauchy, ou le Theoreme des Geodesiques avec en plus le tenseur de Riemann uniformement borné (derniers chapitres de Morgan-Tian, pour la non collapse et donc convergence dans ce cas  $R_k \nearrow +\infty$ ). C'est ce qu'on a ecrit avant, dans l'écriture ci-dessus entre Ricci,  $R_k, b(n)$ , c'est la convergence vers une metrique de courbure de Ricci  $> 0$  partout.)

c) Dès qu'on a une metrique de courbure de Ricci positive ou nulle, elle doit etre strictement positive quelque part, car comme on est en dimension 3 ( $Weyl = 0$ ), si  $Ricci = 0$ , la variété ne peut pas etre compacte, car elle serait de courbure sectionelle nulle et simplement connexe, elle serait diffeomorphe à  $\mathbb{R}^3$  (On a  $Riemann \geq 0$ . Si  $Riemann = 0 \Rightarrow Ricci = 0$  la variété compacte  $M$  serait diffeomorphe a l'espace euclidien, ce n'est pas possible. Donc  $\exists x_0$  tel que  $Riemann_{x_0} \neq 0$  et  $\geq 0$ , en utilisant les valeurs propres de  $Riemann \geq 0$  qui devient alors symetrique ( Voir Morgan-Tian), il y a au moins une valeur propre  $\lambda_{x_0} > 0$ , comme  $Ricci_{x_0} =$



$trace(Riemann_{x_0})$  alors, (la trace ne depend pas de la base),  $Ricci_{x_0} = \lambda_{x_0} + \mu_{x_0} + \nu_{x_0} \geq \lambda_{x_0} > 0$  et donc,  $Ricci_{x_0}(\theta, \theta) > 0, \forall \theta \in \mathbb{S}_2$ ). Par un argument d'Aubin, il existe une métrique conforme telle que la courbure de Ricci est partout strictement positive.

d) On conclut grâce au travail de Hamilton, on déforme la métrique par le flot de Ricci jusqu'à obtenir une métrique de courbure sectionnelle constante positive. la variété est simplement connexe et compacte, c'est la 3-sphere.

28) Sur l'article de Chen-Li :

On a aussi la compacité globale de Chen-Li, cité dans la section 4.1. Le resultat de Chen-Li utilise le fait qu'on a compacité au voisinage du bord lorsque  $\|\nabla \log V\| \leq A$ , puis il étend ce resultat lorsque  $\|\nabla V\| \leq A_1$ , pour cela il utilise l'extension des resultats de Brezis-Merle (Theorem 1 de Brezis Merle), qui reste vrai dans des domaines Lipschitzien dès qu'on a la régularité des solutions dans  $W_0^{1,2}$ , car le principe du maximum est valable dans ce cas (on utilise l'intégration par parties, qui est vrai dès que la régularité du bord est Lipschitzien. Pour l'inégalité de Sobolev aussi et la résolution d'un problème variationnel dans  $L^2$ . Lipschitz suffit). Ceci pour la fonction  $u_2$  du début de preuve de Chen-Li. (et aussi l'extension des fonctions harmoniques et la formule de Poisson, pour  $u_1$  qui nécessite une application conforme). Voir la preuve du corollaire de l'article de Chen-Li.

(Voir l'article de Sweers-Nazarov. Journal.Diff.Equations. 2007. Pour les conditions de régularité  $W^{2,p}$  des problèmes sur des ouverts Lipschitziens.)

Remarque sur la preuve de Chen-Li : pour étendre la partie  $u_1$  harmonique, il faut supposer le domaine analytique, pour pouvoir utiliser une transformation conforme qui reste invariante par le Laplacien. Principe de symétrisation de Schwarz. Donc, le resultat de compacité reste vrai avec la régularité smooth, lorsque on suppose  $\|\nabla \log V\| \leq A$ . Mais la régularité du domaine doit être supposée analytique lorsqu'on passe à  $\|\nabla V\| \leq A_1$ .

Dans leur preuve Chen-Li, utilisent le fait que l'opérateur est invariant par application de carte, ceci est possible si cette application est conforme, elle préserve le Laplacien. Puis, symétrise la fonction en symétrisant un problème de Dirichlet, puis soustrayent les valeurs aux bords et ils obtiennent l'image de  $v_1$ . Alors  $u_1$  est l'image de  $v_1$  par l'application de carte. Maintenant pour construire  $v_1$  ils utilisent une symétrisation d'un problème de Dirichlet, qui requiert les solutions dans  $W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon), p > 2$  (la formule de représentation de Green reste valable, dans ce cas, voir la preuve dans Gilbarg-Trudinger). Puis, ils utilisent la formule intégrale de Poisson (qui nécessite d'avoir l'opérateur Laplacien).

a) Pour utiliser la formule de Poisson, on conserve le Laplacien : transformation conforme  $\varphi$ .

b) Ils symétrisent  $u \circ \varphi$  ils obtiennent une fonction  $u_v \in C^1(\bar{B}_\epsilon(0)) \cap W^{2,p}$ .

c) Ils résolvent :  $-\Delta v_1 = -\Delta u_v$  avec condition de Dirichlet sur  $B_\epsilon(0)$ .

d) Ils utilisent la formule intégrale de Poisson pour  $v_1 - u_v \in W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon), p > 2$ . Sur le bord, il n'y a que les valeurs de  $u$ .

(Ce travail revient à symétriser une fonction harmonique qui nécessite le théorème de symétrisation de Schwarz, qui nécessite une application conforme, donc un domaine de départ  $\Omega$  analytique).

**Remarque :** sur le fait que la régularité du domaine dans (De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li) est au moins  $C^{2,\beta}, \beta > 0$ . Soit  $\alpha_y = \langle \nu_1 | \nu(y) \rangle$ , l'angle avec la normale qui doit être  $> 0$ , avec  $y \in \partial\Omega$ , qu'on devrait obtenir pour appliquer la méthode moving-plane. Ici,  $\nu(y)$  est la normale au bord en  $y$  : Pour définir l'angle, il suffit d'avoir une tangente à la courbe de  $y \rightarrow \nu(y)$ , et donc une dérivée de  $\nu(y)$ , (l'application de carte  $\varphi$  est au moins deux fois dérivable). Pour avoir une branche continue de 'cones', il suffit que  $y \rightarrow (\nu(y))'$  soit continue, (l'application de carte  $\varphi$  est  $C^2$ ,  $\varphi''$  continue). Pour que l'angle  $\alpha_y > 0$  soit strictement positif, il suffit que la tangente à la courbe de  $\nu(y)$  soit non nulle, il suffit alors d'avoir la régularité  $C^{0,\beta}, \beta > 0$  de la tangente (forme arrondie : continue et arrondie :  $C^{0,\beta}$ ). (Donc, il suffit que l'application de carte soit  $C^{2,\beta}, \beta > 0$ ).

29) Sur l'article de C.C. Chen et C.S. Lin : (Comm. Pure. Appl. Math. 1997) :

1) Application du principe du maximum et le lemme de Hopf

2) Fonction auxiliaire pour atténuer la perturbation due à la variation de la courbure scalaire prescrite et les conditions aux bords.

3) Ils s'assurent de la positivité de la fonction finale obtenue comme somme d'une fonction et la fonction auxiliaire. La positivité sert dans le raisonnement par l'absurde quand on prend le sup des  $\lambda$  tel que ..., le fait de prendre un sup signifie qu'au delà du sup les fonctions sont négatives ou nulles en des points, les conditions dans ces articles assurent que le point limite reste dans le domaine (car les fonctions sont strictement positives au voisinage du bord), ils appliquent le principe du maximum et (ou) le lemme de Hopf au point limite (point minimum, on peut parler de principe du minimum ou principe du maximum). (raisonnement par l'absurde ( $\sup \lambda < \lambda_1 = -1/4$ ) et application du principe du maximum et le lemme de Hopf au point limite qui est censé être à l'intérieur du domaine).

De plus, les fonctions  $h_\lambda$  sont  $C^1$ , pour le voir, elles sont définies par la représentation intégrale de fonction de Green, elles vérifient au sens des distributions et d'Agmon  $C_0^2$ , une EDP, ici aussi on utilise Fubini, Fubini-Tonelli et les définitions des fonctions de Green au sens  $C_0^2$  pour les fonctions test, pour se ramener au Théorème d'Agmon et conclure que  $h_\lambda$  sont  $C^1$ . (Écrire  $\Delta(h^\lambda - h^\mu) = \bar{Q}_\lambda - \bar{Q}_\mu$ , pour la continuité en  $\lambda$ ). Aussi,  $h^\lambda \geq 0$  sont nulles au bord  $\Rightarrow \partial_{x_1} h^\lambda \geq 0$  et par le lemme de Hopf  $\partial_\nu(w_\lambda - h^\lambda) < 0$ , (principe du minimum), avec  $\partial_\nu = -\partial_e = -\partial_{x_1}$ , donc,  $\partial_{x_1} w_\lambda > \partial_{x_1} h^\lambda \geq 0$ ).

4) pour prouver que les courbures prescrites sont nulles au point "blow-up", ils utilisent un raisonnement du type  $K(y) = \int_0^1 \langle \nabla K(y_i + sM_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y)) | M_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y) \rangle ds$  puis font la différence :

$$K(y) = \int_0^1 \langle \nabla K(y_i + sM_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y)) - \nabla K(y_i) | M_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y) \rangle ds + \\ + M_i^{-2/(n-2)} \langle \nabla K(y_i) | I_\delta(y) \rangle$$

a) Dans le premier ensemble  $I_\delta(y)$  est borné car  $y$  est borné, et son symétrisé aussi, car  $\lambda_0 \leq \lambda \leq -1/4$ .

b) Dans la preuve de l'estimation asymptotique  $M_i^{2/(n-2)} |\nabla K_i(y)|^{1/(\alpha-1)} \leq C$ , on utilise le raisonnement ci-dessus des que le gradient est holderien ou  $C^2$ . (comme la différence ci-dessus et un raisonnement du type  $|\nabla K(y_i + M_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y)) - \nabla K(y_i)| \leq BM_i^{-2\alpha/(n-2)} |I_\delta(y)|^\alpha$  dans la formule de Taylor intégrale (ci-dessus). Et après les intégrales du type Giraud. Dans la partie qu'ils considèrent, les  $M_i^{-2/(n-2)}I_\delta$  sont bornées.

30) Sur le problème de Brezis-Merle : Pourquoi la condition sur le potentiel  $V$  est  $W^{1,\infty}$  pour obtenir la compacité des solutions  $u > 0$  ?

1) On a  $e^u$  et le potentiel  $V$  sont liés par dualité  $\int V e^u < +\infty$ ,  $e^u \in L^1$ ,  $V \in L^\infty$ . on considère le potentiel  $V$  comme une forme linéaire, une distribution et donc de possibles dérivées (entières).

Par dualité et le fait qu'on considère le problème de manière globale : on a : la condition maximale et globale  $e^u \in L^1 = W^{0,1}$ , par dualité des Sobolev, le minimum requis pour le potentiel  $V$  est  $W^{1,\infty}$ . Si on veut diminuer la régularité de  $V \in W^{1-s,\infty}$ ,  $1 > s > 0$ , qui est presque l'espace  $(1-s)$ -holderien, alors par dualité,  $e^u$  doit être  $e^u \in W^{s,1} > W^{0,1} = L^1$ , or la condition  $e^u \in L^1$  est maximale.

a)  $e^u \in L^1 = W^{0,1}$  : pas de dérivée pour  $e^u$  et  $e^u \in L^1 \Rightarrow$  au moins une dérivée pour  $V$  et  $V, \nabla V \in L^\infty \Leftrightarrow V \in W^{1,\infty}$  au minimum :

b) Si on veut diminuer la régularité de  $V$  et utiliser la dualité et l'intégration par parties, on part aussi du fait qu'on a la compacité pour  $V \in W^{1,\infty}$  :

$\int \nabla V \cdot e^u < +\infty \Rightarrow \int \nabla^{1-s} V \cdot \nabla^s(e^u) < +\infty \Rightarrow e^u \in W^{s,1} > W^{0,1} = L^1$ , or la condition  $e^u \in L^1$  est maximale.

2) Le cas holderien dépend du point et du nombre de points, il est local. On a la compacité avec  $\int V e^u \leq bC < 16\pi$  ou  $\int V e^u \leq bC < 24\pi$  et  $V$  holderien uniformément. Brezis et Merle donnent des exemples de  $(u, V)$  qui blow-up avec  $\int V e^u \leq bC < 16\pi$  ou  $\int V e^u \leq bC < 24\pi$ .

31) **Remarques** : Du point de vue de la logique mathématique (donc du point de vue mathématique), sur le blow-up et la compacité en dimension 2 et concernant l'article de Wei-Ye-Zhou (dans Annales de l'IHP, 2008) :

i) On donne des conditions pour qu'un raisonnement blow-up au bord soit possible ( En plus, il y a des exemples comme celui de Brezis-Merle).

ii) On donne des conditions pour que le raisonnement mis en défaut par Wei-Ye-Zhou (voir point, iv, ci-dessous), de compacité soit possible.

iii) On donne des conditions pour qu'un raisonnement par l'absurde soit possible.

iv) Dans Wei-Ye-Zhou (Annales de l'IHP, 2008), lorsque  $a = \text{constante}$  au voisinage du bord, les solutions sont bornées au voisinage du bord, par la méthode directe, moving-plane, de, De Figueiredo-Lions-Nussbaum (sous-critique, 1982), Suzuki (1990), Chen-Li(1993) et Ma-Wei(2001), (Ma-Wei, en donnent une nouvelle preuve directe, dans convergence for Liouville Eq.). Il n'y a pas d'analyse blow-up à faire. Il n'y a pas de raisonnement par l'absurde à faire. Et dans la compacité, on obtient à la limite  $0 = 0$ , dans l'identité de Pohozaev-Rellich, ce qui ne veut rien dire.

(Assertion,  $A : \exists U$  un voisinage du bord  $\partial\Omega$ ,  $\exists C > 0$ , pour toute solution  $u > 0$  de l'Eq avec condition de Dirichlet,  $\|u\|_{L^\infty(U)} \leq C$ . Wei-Ye-Zhou disent que  $A$  est vraie, ils ne peuvent pas supposer  $\text{non}A$  vraie, ils ne peuvent pas faire un raisonnement par l'absurde)

(Argument supplémentaire à l'article de Wei-Ye-Zhou (Annales de l'IHP, 2008) : Lorsqu'on met un potentiel  $V$  : l'analyse blow-up est possible. Par contre la compacité, elle est donnée par Chen-Li, dans le cas  $V$  Lipschitzien, par la méthode directe, moving-plane. Il n'y a pas de raisonnement par l'absurde à faire. Dans la compacité, qui nécessite  $V$  Lipschitzien, dans Wei-Ye-Zhou, on obtient à la limite  $0 = 0$ , ce qui ne veut rien dire.)

Ceci dans le cas  $a = \text{constante}$  au voisinage du bord et le potentiel constant. Wei-Ye-Zhou, mettent en défaut ce raisonnement par l'absurde. On donne des conditions pour que le raisonnement par l'absurde soit possible.

Dans le cas  $a \neq \text{constante}$ , au voisinage du bord et le potentiel constant (le but de l'article de Wei-Ye-Zhou, Annales de l'IHP, 2008), la preuve n'est pas correcte, ce qui veut dire que le raisonnement par l'absurde n'est pas possible.

Concernant l'article : Note on the Chen-Lin result with the Li-Zhang method. Là aussi, on dit que le raisonnement par l'absurde est possible. C'est ce que prouvent Chen-Lin.

L'assertion :  $(A : \text{sup} + \text{inf} < +\infty)$ . Alors :  $(\text{non} A : \text{sup} + \text{inf} \rightarrow +\infty)$ .

Chen-Lin font :

Etape 1 :  $(\text{non} A : \text{fausse})$  (Chen-Lin).

Etape 2 :  $(\text{non} A : \text{fausse}) \Rightarrow (A : \text{vraie})$ .

Dans, Note on the Chen-Lin result with the Li-Zhang method : on dit que l'étape 1 est vraie ou possible ;  $((\text{non} A : \text{fausse}) : \text{vraie})$ . (hypothèse  $\text{non}A : \text{vraie}$ , implique contradiction). Le raisonnement par l'absurde est possible dans Chen-Lin.

////////////////////////////////////

Pour revenir à l'article de Wei-Ye-Zhou :

1) Supposons qu'on puisse définir ou considérer,  $v$ , la symétrisée de Schwarz par rapport à l'axe des ordonnées de  $u$ . Alors,  $v$  et ses dérivées successives à droites et à gauche sont bornées. De plus  $v$  est solution au sens des distributions :

$$-\Delta_{distr}v = We^{|v|} = Heaviside$$

On se place au voisinage de 0. Si on dérive une fois par rapport à la première variable,  $\partial_1 v$  est solution au sens des distributions, un dirac sur l'axe des ordonnées :

$$-\Delta_{distr}(\partial_1 v) = -\partial_{1,distr}(\Delta v) = -\partial_1(\Delta v) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k\varphi(0, x_2)dx_2,$$

avec  $k = -2\Delta u(0, x_2) > 0$ ,  $x_2 \in (-\epsilon, \epsilon)$ , au voisinage de 0,

$$-\Delta_{distr}(\partial_1 v) = -\partial_1(\Delta v) + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k\delta_{(0,x_2)}dx_2$$

On note  $G((0, x_2), y) = -\frac{1}{2\pi} \log \|(0, x_2) - y\| = -\frac{1}{2\pi} \log |(x_2 - y_2)^2 + y_1^2|$  le potentiel Newtonien et  $h_0(y) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} kG((0, x_2), y)dx_2$ ,  $h_0 \in L^p$ ,  $p > 1$  :

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(0, x_2)dx_2 = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta_{(0,x_2)}dx_2 = \int_{B(0,\epsilon)} -h_0(y)\Delta\varphi(y)dy,$$

C'est a dire que :

$$-\Delta_{distr}(\partial_1 v - h_0) = -\partial_1(\Delta v) \in L^\infty$$

On a par les estimations elliptiques :

$$\partial_1 v - h_0 \in C^1(B(0, \epsilon))$$

Or,  $\partial_{11}v$  est reguliere et bornée en dehors de l'axe des ordonnées et  $h_0$  est reguliere en dehors de l'axe des ordonnées.

Donc,  $\partial_1 h_0$  serait bornée en dehors de l'axe des ordonnées.  $\exists C > 0, \forall y \in B(0, \epsilon) - \{(0, x_2), x_2 \in (-\epsilon, \epsilon)\}, |\partial_1 h_0(y)| \leq C$ .

Or,  $h_0(y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \log |(x_2 - y_2)^2 + y_1^2| dx_2$ , et si on derive par rapport a  $y_1$  on a :

$$\partial_1 h_0(y)|_{\{y_1 \rightarrow 0, y_2 \rightarrow 0, y_1 \neq 0\}} \equiv \frac{1}{y_1} \rightarrow +\infty$$

Ce qui est contradictoire avec le fait qu'en dehors de l'axe des ordonnées,  $\partial_1 h_0$  est bornée.

Donc, on ne peut pas considerer  $v$ ,  $v$  n'est pas définie, n'exsiste pas, avec autant d'informations.

2) De meme, si on considere,  $w$  la fonction reflexion par rapport à l'axe des ordonnées, son laplacien serait comme precedemment une somme de Dirac + une fonction  $L^\infty$ . Si on considere  $\partial_1 w - \partial_1 h_0$  elle serait  $C^0(B(0, \epsilon))$ , ce qui impliquerait que  $\partial_1 h_0$  serait bornée en dehors de l'axe des ordonnées, comme precedemment, c'est pas possible.

$$-\Delta_{distr} w = -\Delta w + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k_0 \varphi(0, x_2) dx_2, k_0 > 0,$$

$$-\Delta_{distr} w = -\Delta w + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} k_0 \delta_{(0, x_2)} dx_2$$

Donc pour 1) et 2) on ne peut pas considerer,  $v$  et  $w$ , ces fonctions n'existent pas, avec autant d'informations.

////////////////////////////////////

**(32) Sur le degré topologique et l'equation avec non linearité exponentielle :**

Voir l'article de Brezis-Turner. Comme on l'a dit concernant l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum, ils considerent un operateur  $M$  tel que  $M(0) = 0$ , nulle en 0. On peut considerer :

$$-Lu = V(x)(e^u - 1), 0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1, \|\nabla V\|_\infty \leq A$$

$f(u) = e^u - 1$  et  $f(0) = 0$ ,  $(-L)^{-1}$  un operateur compact. voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum :  $M = (-L)^{-1}(V(x)f(u))$ .  $\lambda_1$  premiere valeur propre de  $-L$  avec condition de Dirichlet.

Voir l'article de Brezis-Turner. Une des conditions pour prouver l'existence de solutions est :  $g(x, u, p)/u < \lambda_1$  pour  $u$  voisin de 0. et la presence de la nonlinearité exponentielle en  $+\infty$  assure que les  $t \geq 0$  de l'article de Brezis-Turner sont uniformément bornés. Il reste à borner les solutions  $u$  positives ou nulles pour appliquer la théorie du degré topologique. Ceci se fait par l'identité de Pohozaev en ramenant l'equation précédente a l'equation qu'on a considéré dans des articles précédents avec seulement  $e^u$  et non  $e^u - 1$ . En resolvant  $-Lw_1 = V, -Lw_2 = tJ$  avec condition de Dirichlet, ( $J = \varphi_1$  premiere fonction propre) ces fonctions  $w_1, w_2$  sont uniformément bornées dans  $C^2(\bar{\Omega})$  car  $t$  est borné unifromément et  $V$  aussi. Donc, on s'est ramené, dans un domaine régulier étoilé par rapport a l'origine a notre equation considrée dans des articles précédents et l'identié de Pohozaev donne le résultat de borne uniforme de  $u$ , comme voulu dans Brezis-Turner.

Voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum, pour l'idée sur le degre topologique et son applications.

Voir l'article de : H.H.Zou dans Calculus of variation. Pour une idée sur l'application du degre topologique.

Voir aussi, l'article de Brezis-Turner.

Donc :

Degré topologique  $\Rightarrow \forall V \in C^\infty, 0 < a \leq V \leq b < \lambda_1, \|\nabla V\|_\infty \leq A, \exists u \in C_0^2(\bar{\Omega}), -Lu = V(x)(e^u - 1)$ , et  $u > 0$  dans  $\Omega$ .

Soit  $w$  tel que  $-Lw = V$  avec condition de Dirichlet. Par le principe du maximum, théorème de Dualité et les estimations elliptiques,  $w \geq 0$  et  $w > 0$  dans  $\Omega$  et  $\|w\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c_1(a, b, A, \Omega)$ . Soit  $W = Ve^{-w}$ , alors  $w$  et  $u+w$  sont deux solutions distinctes de  $-Lv = We^v$  avec conditions de Dirichlet et  $0 < a_1 \leq W \leq b < \lambda_1$ , et  $\|\nabla W\|_\infty \leq A_1$ , avec  $\|v\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$ .

Donc : Pour tout  $V$  on a  $W$  dans le meme type de classe avec deux solutions distinctes par le degré topologique et l'ensemble des solutions est borné dans  $C^2(\bar{\Omega})$ .

On a : Pour tout  $V$  il existe  $W$  dans la meme classe que  $V$  tel que l'équation  $-Lv = We^v$  (avec condition de Dirichlet), possède au moins 2 solutions distinctes dont une topologique et ces solutions sont bornées uniformément dans  $C^2(\bar{\Omega})$ .

Donc : si on note  $C$  le cone  $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$ .

Degré topologique  $\Rightarrow deg = i_C = -1 \Rightarrow$  il y a un point fixe pour  $u \rightarrow M(u) \Rightarrow \forall V \in C^\infty, \exists W \in C^\infty, W(x) = V(x)e^{-w}$ , tel que l'équation  $-Lv = We^v$  possède 2 solutions distinctes dans  $C_0^2(\bar{\Omega})$  pour  $W$  avec  $0 < a_1 \leq W \leq b_1 < \lambda_1$  et  $\|\nabla W\|_\infty \leq A_1$  et  $\|v\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$ .

1) Donc on a : Pour tout  $V$  il existe  $W$  dans la meme classe que  $V$  tel que l'équation  $-Lv = We^v$  (avec condition de Dirichlet), possède au moins 2 solutions distinctes dont une topologique et ces solutions sont bornées uniformément dans  $C^2(\bar{\Omega})$ .

2) a) (Equation sinh-Poisson en mecanique statistique et en physique des plasmas). On peut prendre  $M = (-\Delta)^{-1}(V(x)g(u))$  avec  $g(u) = \sinh(u)$ . On obtient alors  $u > 0$  solution par le degré topologique de l'équation sinh-Poisson, qui modelise la 2d-turbulence en mecanique statistique et apparait en physique des plasmas. Voir les prints de Pablo Figueroa et de Joel Spruck. Donc : si on note  $C$  le cone  $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$ , on a  $deg = i_C = -1$  et l'application  $u \rightarrow M(u)$  possède un point fixe. (Voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum et ce qu'on a écrit sur le degré topologique, au debut de ce print). Et on a une solution topologique de :  $-\Delta u = V(x) \sinh(u)$  avec condition de Dirichlet et  $u \not\equiv 0, u \geq 0$  (par le principe du maximum  $u > 0$  dans  $\Omega$ ), pour  $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$  et  $\|\nabla V\|_\infty \leq A$  ou  $V$  avec poids holderien  $(1 + |x - x_0|^{2\beta}), \beta \in (0, 1/2), x_0 \in \partial\Omega$  avec  $\Omega$  particulier, une couronne et,  $A = \frac{a}{2(1+2^{2\beta})}$ , la solution  $u$  est uniformément bornée dans  $C^2(\bar{\Omega}), \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, \beta, \Omega)$ .

b) On peut faire la meme chose en considerant une singularité au bord. On peut prendre  $M = (-\Delta)^{-1}(\frac{V(x)}{|x-x_0|^{2\alpha}}g(u))$  avec  $g(u) = \sinh(u), x_0 \in \partial\Omega, \Omega$  une couronne et  $\alpha \in (0, 1/2)$ , (ca reste vrai avec  $\alpha \in (-\infty, 0)$ ), et  $\lambda_1$  premiere valeur propre avec condition de Dirichlet et avec poids singulier,  $(-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \frac{1}{|x-x_0|^{2\alpha}}$ , qu'on resout par la methode variationnelle comme dans le cas regulier), et  $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1, \|\nabla V\|_\infty \leq A = \frac{(-\alpha + 1)a}{2}$ . Si on note  $C$  le cone  $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$ , on a  $deg = i_C = -1$  et l'application  $u \rightarrow M(u)$  a un point fixe et on obtient une solution topologique de :  $-\Delta u = \frac{V(x)}{|x-x_0|^{2\alpha}} \sinh(u), u \not\equiv 0$  et  $u \geq 0$  (par le principe du maximum  $u > 0$  dans  $\Omega$ ) avec condition de Dirichlet et la solution  $u$  est uniformément bornée dans  $C^1(\bar{\Omega}), \|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, \alpha, \Omega)$ .

c) On obtient la meme chose avec  $\alpha \in (-\infty, 0)$  avec une solution topologique avec singularité au bord et bornée uniformément dans  $C^2(\bar{\Omega})$ .

d) On peut faire la meme chose que dans le point a) avec l'operateur  $L$  du point 1), on prend  $M = (-L)^{-1}(V(x)g(u))$  avec  $g(u) = \sinh(u)$ . On obtient dans le cone  $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$ ,  $deg = i_C = -1$  et  $u \rightarrow M(u)$  a un point fixe. On obtient une solution topologique de :  $-Lu = V(x) \sinh(u)$  avec condition de Dirichlet et  $u \not\equiv 0$  et  $u \geq 0$  (par le principe du maximum  $u > 0$  dans  $\Omega$ ), pour  $V$  tel que,  $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$  et  $\|\nabla V\|_\infty \leq A, \Omega$  un domaine régulier étoilé par rapport à l'origine,  $\lambda_1$  premiere valeur propre de  $-L$  avec condition de Dirichlet, la solution  $u$  est uniformément bornée dans  $C^2(\bar{\Omega}), \|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$ .

**Remarque :** Lorsque  $V \equiv a = b \geq \lambda_1$ , par un argument d'integration et integration par parties de la solution l'Eq si elle existe; avec la fonction propre et de positivité, il n'y a pas de solution à l'Eq. De meme pour  $b \geq V \geq a \geq \lambda_1$ , il n'y a pas de solutions. Par contre Il y a des solutions si  $b < \lambda_1$ .

e) Ceci s'applique aux systemes du type  $-\Delta u = Ve^v, -\Delta v = We^u$  avec conditions de Dirichlet en considerant un operateur de vecteurs :

$M(u, v) = (-\Delta)^{-1}(V \sinh v, W \sinh u) + t(\varphi_1, \psi_1)$ ,  $t \geq 0$ , avec singularité intérieure  $x_0$ , (pour le cas holderien d'ordre  $\beta > 0$ , ça marche avec une singularité pour une equation dans un systeme, reste le cas ou on a la singularité intérieure holderienne dans les deux equations du systeme.) ou singularité au bord  $x_0$  et  $\varphi_1, \psi_1$  premieres fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet. avec singularité ou pas,  $(-\Delta)^{-1}$  s'applique aux deux equations du systeme.

Dans le cas de singularité intérieure  $0 = x_0 \in \Omega$ , l'estimation a priori au voisinage du bord est obtenue dans les articles de, De Figueiredo-Do O-Ruf au bord et intérieure (Par la methode moving-plane, comme dans De Figueiredo-Lions-Nussbaum, De Figueiredo-Do O-Ruf le font et le disent dans leur article) et Bartolucci-Tarantello-Chen-Lin (eux utilisent Pohozaev-Rellich pour quantifier, calculer la masse) pour une equation et  $x_0$  singularité a l'intérieure, c'est vrai pour une equation (reste le cas d'un systeme avec 0 comme singularité positive dans les deux equations du systeme).

Ici, on s'intéresse au cas avec singularité au bord, pour des systemes avec singularité au bord ou poids Holderien avec singularité au bord, sur une couronne c'est possible.

**Remarque sur les inégalités du type Harnack sup inf :**

a) La théorie des cordes (string theory) unifie les théories de Jauge (des champs), des champs conformes, (théorie des champs de Liouville), de Yang-Mills, et la gravitation quantique (Kaluza-Klein,  $n + 1$ ,  $n = 3, 4, 5, 6, 9, 10$  ou plus générale  $n \geq 3$ ). Les inégalités du type Harnack apparaissent dans ces trois théories, on peut considerer alors que cette notion est une notion de la théorie des cordes. Corde qui est un 'fil' ou un ensemble de particules.

b) Concernant la minoration du  $\sup \times \inf$ , on a les exemples dans le livre d'Aubin (cas compact). Dans le cas plat, on utilise l'exemple de C.Chen-C.S.Lin dans Commun.Pure.Appl.math.1997, ici,  $n \geq 3$ .

**33) Equation de la courbure scalaire prescrite (et du type Yamabe) en dimension 4 et champs de Yang-Mills :**

a) exemple : 1-si on note  $SW$  la variété hyperbolique sans bord et orientable de dimension 3, de Seifert-Weber, alors  $SW \times S_1$  est une variété loc.conf.plate de courbure scalaire constante stric.negative de dimension 4, elle est lié aux champs de Yang-Mills. 2- En dimension 4, aussi on considere, la variété de Davis ou le produit de deux surfaces de courbure sectionelle non opposées et de courbure scalaire stric.negative (donc, non-loc.conf.plate  $S_{-1} \times S_{-1}$  (elle est d'Einstein) avec  $S_{-1}$  une surface de courbure scalaire constante  $< 0$ ), on obtient une variété Riemannienne lié aux champs de Yang-Mills. On peut considerer sur ses variétés l'Equation de la courbure scalaire prescrite (dimension 4).

Dans le cas positif (pour l'equation de Yamabe et du type Yamabe),  $S_2 \times S_2, S_3 \times S_1$ .

b) En physique (description de la force nucléaire responsable de la cohesion des protons-neutrons dans le noyau) le cas le plus important est porté aux variétés de dimension 4 avec une metrique Riemannienne ou Lorentzienne.

c) Regarder l'article de, Andrzej Derdzinski, dont le titre est : "Riemannian manifolds with harmonic curvature", il y a la fonctionnelle de Yang-Mills et pour lui la derivée du tenseur de courbure donne les points critiques de la fonctionelle de Yang-Mills. En fait il s'agit de la variété, de la metrique et de la connection. C'est la courbure de Riemann qui est un champ de Yang-Mills.

d) Pour ce qui est des champs de Yang-Mills en dimension 4 et la théorie de Seiberg-Witten, apparait la fonctionelle de Yamabe et l'invariant de Yamabe et la courbure scalaire et les metriques conformes, dans des articles de M.Gursky par exemple en dimension 4 :

Si on prend une variété Riemannienne compacte sans bord  $(M^4, g)$ , de dimension 4 avec champ de Yang-Mills, cela veut dire que le tenseur de Riemann,  $Riem = F_{\nabla}$  est un champ de Yang-Mills. Comme la courbure scalaire  $S_g$  se déduit du tenseur de Riemann (elle est liée au tenseur de Riemann), alors,  $S_g$  est un objet de la physique et l'Equation de la courbure scalaire prescrite, en dimension 4, sur les variétés de Yang-Mills, est liée à la physique puisqu'elle contient  $S_g$ . De meme pour la metrique conforme, qui est liée à  $g$ , la metrique Riemannienne  $g$  est appelé en dimension 4 un instanton.

La théorie de Yang-Mills existe sur des variétés non-compactes ou complètes. (non compact, or complete Manifolds with harmonic curvature). Voir Taubes et les articles de Gabor Etesi et Yawei Chu. Exemples : variétés d'Einstein (Einstein manifolds)  $n \geq 3$  et les variétés loc.conf.plates de courbure scalaire constante (pour  $n \geq 4$ , en particulier pour  $n = 4$ ) ou Ricci parallèle, en particulier les variétés de courbure sectionnelle constante.

Du point de vue de la physique, en dimension 4, on peut considérer les champs de Yang-Mills sur une variété compacte ou complète ou non compacte et localement on a une notion de champs de Yang-Mills. On peut considérer au départ la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs de Yang-Mills. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, observation, à partir des données et du champs de Yang-Mills).

Comme pour l'équation de Schrödinger : La donnée est la courbure scalaire prescrite  $V$  (elle est prescrite, pulsion ou signal ou potentiel), la solution  $u$  est une "fonction d'onde" qui lie  $V$  à  $S_g$ ,  $S_g$  est un "champ scalaire de Yang-Mills". L'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 et sur une variété de Yang-Mills de dimension 4 est un objet de la physique.

Aussi, c'est écrit dans l'article de T.H. Parker (Gauge Theories on four dimensional Riemannian manifold, Comm.Math.Physics, 1982), si on considère un terme ("potentiel de Higgs") du type  $P(u) = au^4 + mu^2$  avec  $u > 0$  la solution et  $a, m$  deux fonctions réelles avec  $m \leq 0$  possible, l'équation bosonique dans un champs de Yang-Mills devient du type Yamabe (ou de type courbure scalaire prescrite).  $(\Delta_g u + (\frac{2g}{6} + 2m)u = -4au^3, \Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$  et  $s_g$  la courbure scalaire). On conclut, voir l'article de T.H. Parker (dans un champ de Yang-Mills, l'équation bosonique, induit (avec le fait qu'on a un champ de Yang-Mills, les lagrangiens s'annulent et la dérivée par rapport à la connexion est nulle), que le résidu est nul et constitue une solution de couplage des champs).(le lagrangien Yang-Mills bosonique,  $Y = B_1 + B_2$  avec  $B_1$  la fonctionnelle de Yang-Mills et  $B_2$  la lagrangien bosonique, la loi de la particule :  $\dot{Y} = dY = 0 = dB_1 + dB_2 = 0$ , si on se place dans un champ de Yang-Mills, alors,  $dB_1 = 0$ , ce qui implique que  $dB_2 = 0$ , si de plus,  $u > 0$  est solution de l'équation bosonique (cela veut dire que  $\frac{\partial B_2}{\partial u} = 0$ ), ceci implique que  $\frac{\partial B_2}{\partial \nabla} = 0$  et le résidu est nul :  $\Sigma < \nabla_j u | \rho(e_i) u > = 0$  et donc, les deux equations du systeme de couplage sont vérifiées. Donc l'équation bosonique (du type courbure prescrite) dans un champ de Yang-Mills suffit à déterminer le systeme.Ces deux conditions, champs de Yang-Mills et equation bosonique constituent une solution particuliere du systeme.)

On peut aussi considérer chaque lagrangien seul dans n'importe quelle formulation, par exemple ici, celui de Yang-Mills seul et celui bosonique seul. Ici (dans l'article de Parker, T.H) on a le lagrangien de Yang-Mills bosonique.

### 34) En dimension 2 : equation de Liouville :

a) Equation de la courbure scalaire prescrite sur la sphere de dimension 2 (vortex equation) ou un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  (vortex equation) ou surface de dimension 2 (vortex equation). Mean-Field-equation.

b) Voir les articles de Crandall-Rabinowitz, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, Chen-Li, pour la provenance de ses equations : Géométrie (courbure de Gauss), Gazs, combustion, astronomie et astrophysique.

c) En dimension 2, aussi, c'est un cas particulier des champs de Yang-Mills, la theorie de Glashow-Weinberg-Salam, modelise les interactions (faibles) electromagnetiques des particules. C'est la theorie de jauge (theorie de champs) avec un groupe de jauge (groupe de symetries locales)  $U(1) \times SU(2)$

voir le livre de G. Tarantello Self-dual Gauge theories.

d) L'équation de Liouville ou de type Liouville apparait aussi dans le phénomène de "cordes cosmiques", un objet de l'univers "cosmic strings" et à ne pas confondre avec la theorie des cordes. Voir l'article de J. Spruck et Yisong Yang (cosmic strings).(On prend une metrique Lorentzienne  $ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij} dx^i dx^j$ , la metrique  $g_{ij}$  est definie sur une surface,  $M$  de dimension 2 et apres on peut choisir  $g_{ij}$  conforme a une autre metrique, par exemple  $g_{ij} = e^u \delta_{ij}$  et on choisit le champ particulier). C'est là, par exemple l'idée générale.

e-En dimension 2 : c'est aussi, la theorie des champs de Liouville en dimension 2. Qui a été étudiée pour des surfaces à courbure négative et plus récemment sur la sphere de dimension 2. (LCFT, Liouville conformal field theory (2+1)).

De meme ici, du point de vue de la physique, de la chimie, astronomie ou la physique quantique, en dimension  $n = 2$ , on peut considerer des sources, des champs sur un ouvert de  $\mathbb{R}^2$  ou une surface compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considerer au depart l'ouvert ou la surface et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, observation, à partir des données et du champs ou des parametres).

Ici aussi, comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la fonction  $V$ , ( $V$  est la source ou pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution  $u$  est une "fonction d'onde" ou emission, qui lie  $V$  à la donnée de départ, par exemple  $S_g$  (dans le cas d'un ouvert  $S_g = 0$ ),  $S_g$  est un "champ scalaire". Il se peut que ce ne soit pas  $S_g$  comme pour l'operateur  $\Delta + \epsilon(x_1\partial_1 + x_2\partial_2)$ ,  $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ .

////////////////////////////////////

**35) En dimension  $n \geq 3$  : Relativité générale ( $n = 3$ ) et Cosmologie quantique ( $n \geq 3$ ) :**

Cette idée de partir d'un espace Lorentzien  $n + 1$  et de choisir une metrique conforme, sur la variété  $M$ , en partant de l'espace temps  $M \times (0, \delta)$ , se généralise aux dimensions superieures. (Il y a la correspondance, ADS-CFT(Anti-de-Sitter, Conformal field theory) proposée par Juan Maldacena ( $\Lambda < 0$ , constante cosmologique strictement négative dans l'equation d'Einstein). Les equations d'Einstein classiques et quand la dimension  $n \geq 3$  c'est la "quantum-cosmology qui correspond au cas  $\Lambda = 0$ , equation d'einstein du debut, (1915)). On a  $ds^2 = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$  avec  $g_{ij} = u^{4/(n-2)}g_0$ , une metrique conforme a celle de départ  $g_0$  sur  $M$ .

L'idée générale est la suivante : (On part de la formulation Lorentzienne ( $n + 1$ ),  $M \times (0, \delta)$ , d'Einstein en relativité générale et on introduit sur la variable espace des metriques conformes dans la fonctionnelle du champ (ici au lieu de la fonctionnelle du champ comme dans la théorie de Yang-Mills, on a l'equation d'Einstein), on a des champs particuliers liés au changement de metriques conformes, tout cela dans le but d'étudier les interactions des particules et des astres (gravitation dûe à la courbure de l'espace temps ou à la formulation en  $n + 1$  et les ondes qui sont les effets de la gravitation ou des champs, en particulier gravitationnel, un autre champ est le champ  $T$  d'energie-impulsion, peut etre vu comme une donnée, l'interaction est ecrite dans l'equation d'Einstein ci-dessous, gravitation,  $Ricci^\gamma, R^\gamma$ , et les données ou un autre champ, est le tenseur  $T$ ). C'est l'adpatation à ( $n + 1$ ) de la théorie d'Einstein, en relativité générale, qui est en ( $3 + 1$ ). L'espace Anti-de-Sitter est une solution particuliere des equations d'Einstein, comme l'espace de Minkowski ou la metrique de Schwazrchild, l'inconnu ici est un espace Lorentzien ( $V, \gamma$ ) de metrique Lorentzienne  $\gamma$ , qui verifie l'equation d'Einstein  $Ricci^\gamma - \frac{1}{2}R^\gamma\gamma = T$ , avec  $Ricci^\gamma, R^\gamma, T$  respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire et le tenseur d'Energie-impulsion. Dans certains cas, cela revient à resoudre ce qu'on appelle le probleme de Cauchy en relativité. par exemple  $T = 0 \Rightarrow Ricci^\gamma = 0$ . Un autre cas particulier, on en parlé ci-dessus, est de trouver des solutions du type  $V = M \times (0, \delta)$  et  $\gamma = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$  avec  $g = u^{4/(n-2)}g_0$ . Resoudre les equations des contraintes pour ( $V, \gamma$ ) particuliers avec la méthode conforme de Lichnerowicz. On prend  $V = M \times (0, \delta)$  avec  $\gamma = -dt^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ , on transforme les equations d'Einstein en 2 Equations des contraintes (Probleme de Cauchy, par les relations Gauss-Codazzi), puis on prend  $g = u^{4/(n-2)}g_0$  sur  $M$ , on transforme les 2 equations des contraintes en un systeme de deux equations elliptiques. Einstein scalar field Lichnerowicz equations. Voir, Hebey, Pollack, Pacard, Choquet-Bruhat, Bartnik.)

**Remarque :** Pour ce qui est de la théorie de Yang-Mills, on s'interesse à une fonctionnelle du champ, on peut se ramener à la dimension 2 et utiliser la methode conforme comme dans Spruck-Yisong (cosmic-strings) ou d'autres théories avec fonctionnelle de champs sur une variété Lorentzienne de dimension 4. ( $ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij}dx^i dx^j$ ) (exemple, Glashow-Weinberg-Salam, combine fonctionnelle de Yang-Mills et theorie conforme en 2 dimensions). Ici dans ADS-CFT ( $\Lambda < 0$  ou bien  $\Lambda = 0$  et on retrouve les Equations d'Einstein classiques avec  $n = 3$  pour la relativité générale et  $n \geq 3$  pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology"), on remplace la fonctionnelle par l'equation d'Einstein. De meme, ici, dans la relativité générale ( $n = 3$ ) et pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology" ( $n \geq 3$ ), on remplace la fonctionnelle par l'equation d'Einstein.



a) il y a une application et réalisation en physique, en  $(3 + 1)$  et  $(4 + 1)$  et  $(6 + 1)$  de la correspondance de ADS-CFT, de Juan.Maldacena (on voit bien le probleme du bon espace-temps). Et aussi  $(2 + 1)$  (LCFT, Liouville conformal field theory).

La correspondance ADS-CFT correspond a l'equation d'Einstein avec une constante cosmologique  $\Lambda < 0$  (Anti-de-Sitter) :  $Ricci^\gamma - \frac{1}{2}R^\gamma g + \Lambda g = T = 0$ . Si  $\Lambda = 0$ , on retrouve l'equation d'Einstein (1915) ecrite plus haut, et les théories en question sont :  $n = 3$ , la relativité générale et  $n \geq 3$  la cosmologie quantique ou "quantum cosmology".

Il y a des auteurs qui font référence à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps avec  $\Lambda < 0$ . Dans la théorie classique d'Einstein ( $\Lambda = 0$ ), c'est la "quantum cosmology", trouver le bon espace-temps pour  $n \geq 3$ .

b) Pour ce qui est des equations d'Einstein et methode conforme : ( $n \geq 3$  ("quantum-cosmology") et  $n = 3$  qui correspond à la théorie de la relativité générale :) Voir les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, dans general relativity and quantum cosmology. Cosmologie quantique pour  $n \geq 3$ . (il y a des auteurs qui font référence à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps pour  $n \geq 3$  avec  $\Lambda < 0$ . Ici, on a la théorie classique d'Einstein ( $n = 3$  relativité générale et "quantum cosmology" pour  $n \geq 3$  avec  $\Lambda = 0$ )).

(Equation d'Einstein classique :  $\Lambda = 0$ , (1915) cosmologie). Voir le monograph de : E.Hebey, D. Pollack, F. Pacard, Y. Choquet-Bruhat, R. Bartnik : dans la théorie des champs de Klein-Gordon massive le potentiel  $V(\Psi) = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$ . (les données  $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$  peuvent etre choisies librement ainsi que la metrique  $g_0$  de la variété Riemannienne).

Voir aussi les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, la variété Riemanninne  $(M, g_0)$  peut etre compacte sans bord ou non compacte. Voir la These de C.Valcu.

c) On part des equations de contraintes qui derivent des equations d'Einstein et qui sont obtenues par les equations de Gauss-Codazzi (on contracte le tenseur de Riemann dans les equations de Gauss-Codazzi pour avoir le tenseur de Ricci). On contracte le tenseur de Ricci pour faire apparaitre la courbure scalaire et on separe les termes en variables temporelles et spaciales. Puis on utilise une metrique conforme.

d) Inversement, dès qu'on a une solution des equations de contraintes avec champ scalaire, il existe une solution des equations d'Einstein, un espace-temps maximal unique avec une metrique Lorentzienne, d'apres Choquet-Bruhat et Choquet-Bruhat-Geroch. C'est ce qu'on appelle le formalisme de Choquet-Bruhat-Geroch-Lichnerowicz.(Il existe un espace temps  $(L, \gamma)$  maximal et unique à isometrie près avec  $\gamma$  Lorentzienne, et un plongement  $i : M \rightarrow L$ , tel que  $i^*(\gamma) = g$ ,  $(L, \gamma)$  'prolonge'  $(M, g)$  et les autres parametres, comme le champ scalaire par exemple). Voir le print de B. Premoselli et l'article de A. Carlotto (The general relativistic constraints equations).

Pour chaque solution des equations des contraintes on a une solution des equation d'Einstein, on a une multitude d'univers ou plusieurs espace-temps. La multitude d'espace-temps, modelise aussi la multitude d'etats quantiques, en particulier c'est la combinaison entre la gravité et les differents champs dont le champ electromagnetique et d'autres champs : Yang-Mills, Klein-Gordon, fluides, etc. Cela veut dire que du point de vue mathematique on a plusieurs espace-temps alors que, du point de vue de la physique, il y a plusieurs etats quantiques ou plusieurs fonctions d'ondes a l'instant  $t = 0$ , dans le meme espace ou variété  $M$  avec des propriétés concernant les fonctions d'ondes ou etats quantiques (Plusieurs ondes au meme instant qui sont dans un espace commun, et, differents au meme temps). Ceci est un modele mathematique pour expliquer l'existence de plusieurs etats quantiques ou fonctions d'ondes, qui sont a la fois differents, dans plusieurs espaces differents, et dans un meme espace au meme temps :  $(M, g_0, \psi, \sigma, \tau, \pi)$ , modele de base commun a tous les espaces, qui est lui meme un 'univers' de 'parametres'. Phénomene physique  $\leftrightarrow$  Propriété mathematique : i) Etat quantique  $\leftrightarrow$  fonction d'onde  $u > 0$ , et, ii) extra-dimensions ou dimensions supplementaires  $\leftrightarrow$  propriété des fonctions d'ondes :  $\sup u = f(\inf u)$ , (notion d'enroulement, de torsion), et les 2 valeurs ( $\sup, \inf$ ).

Dans un article de Choquet-Bruhat (1968), on ne peut pas avoir existence globale d'un espace temps car d'apres Penrose et Hawking, les Eq de la relativité d'Einstein developpent des singularités. Mais on a existence locale d'un espace temps  $(-t_0, t_0) \times M, t_0 > 0$  et unicité locale et globale.



particules que sont les axions. C'est dit dans le print de Horvat, Krcmar, Lakic, les dimensions supplementaires (5 + 1), (6 + 1) sont liés a l'astrophysique, elles ont des réalisations.

////////////////////////////////////

37) Remarques :

Pour ce point voir l'expression du tenseur metrique en coordonnées géodesiques polaires. On le calcul pour des vecteurs de la sphere particuliers en utilisant des transformations orthogonales. La carte choisit sur la sphere est celle des coordonnées spheriques sur la (n - 1)-sphere :

Ici, on utilise la formule suivante qui donne le coefficient de la metrique d'ordre  $r^2$  :

$$\frac{1}{3}R_{kpql}(y_i)\theta^p\theta^q\partial_i\theta^k\partial_j\theta^l.$$

On a :  $\theta_1 = \cos \tilde{\theta}_1, \theta_2 = \sin \tilde{\theta}_1 \cos \tilde{\theta}_2, \dots, \theta_{n-1} = \sin \tilde{\theta}_1 \sin \tilde{\theta}_2 \dots \sin \tilde{\theta}_{n-1} \cos \tilde{\theta}_{n-1}, \theta_n = \sin \tilde{\theta}_1 \sin \tilde{\theta}_2 \dots \sin \tilde{\theta}_{n-2} \sin \tilde{\theta}_{n-1}$ . le (n-1)-uplet est  $(\pi/2, \pi/2, \dots, \pi/2)$ , le vecteur  $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ . Alors le terme d'ordre  $r^2$  de la metrique est  $R_{innj}(t_0), t_0 = P_0 = x = y_i$ .

On prend le (n - 1)-uplet,  $(\pi/2, \pi/2, \dots, \pi/2)$ .

Quand on remplace la composante  $i$  par celle de  $n$  et celle de  $n$  par celle de 1, on a  $\tilde{g}_{11} = R_{niin}, 1 \leq i \leq n - 1$  (et on sait que  $R_{nnnn} = 0$ ). On avait un terme contenant  $R_{1nn1}$ .

Quand on conserve les composantes 1 et 2 et on remplace la composante  $i$  par celle de  $n$ , on a  $\tilde{g}_{12} = R_{1ii2}, 3 \leq i \leq n$  et on sait que  $R_{1112} = R_{1222} = 0$ .

De meme, pour  $\tilde{g}_{mm}$ , on remplace la composante  $i$  par celle de  $n$  et celle de  $n$  par celle de  $m$ . on obtient  $\tilde{g}_{mm} = R_{niin}$ , pour  $i \neq m$  et on avait un terme =  $R_{mnnm}$ , et on sait que  $R_{mnnm} = R_{nnmm}$ . Avec,  $R_{nnnn} = 0$ .

De meme, pour  $\tilde{g}_{ij}$ , on conserve les composantes,  $i$  et  $j$  et pour  $k \neq i, j$ , on remplace la composante  $k$  par celle de  $n$ . On a alors,  $\tilde{g}_{ij} = R_{ikkj}$  pour  $k \neq i, j$ , mais on sait que  $R_{iii} = R_{ijjj} = 0$ . On avait un terme contenant  $R_{innj}$ .

1) ce n'est pas vrai, que l'ordre soit forcément superieur a  $r^2$ , on ne sait rien de cela, dans le theoreme 1.53 du livre d'Aubin, on doit prendre  $b > 0, a > 0$ . Le tenseur metrique est de l'ordre de  $r^2$  et sa derivée est de l'ordre de  $r$ . Il n'y a plus rien a faire.

2) Si on suppose que  $Ricci \neq 0$ , il y a au moins un terme  $Ricci_{ij} \neq 0$ , cela veut dire qu'il y a au moins un terme de la courbure de Riemann  $R_{ikkj} \neq 0$ . Or on a vu par les transformations orthogonales qu'en se placant en un des vecteurs de base  $e_i$ , on a le terme d'ordre  $r^2$  de la metrique est un  $R_{ikkj} \neq 0$ . Cela veut dire qu'on ne peut pas l'eliminer.

Donc, on ne peut pas ameliorer l'ordre de la derivée du tenseur metrique, sur une variété quelconque en particulier  $Ricci \neq 0$ . Sur une variété quelconque, on ne peut pas dépasser l'ordre  $r^2$  dans la metrique en coordonnées geodesiques polaires. Il faut supposer au moins que  $Ricci \equiv 0$ . Mais dans le cas general ce n'est pas possible.

3) Pour arriver par un changement de metrique conforme a avoir  $Ricci = 0$ , voir le livre de Hebey, il faut avoir  $Weyl = 0$  et resoudre une equation en utilisant les conditions de Frobinius, donc, il faut supposer une condition sur  $Weyl$  ou supposer que  $Weyl = 0$ , ce qui veut dire que la variété est loc.conf.plat, ce qui ne sert a rien car on est dans le cas, non.loc.conf.plat.

4) Meme si on suppose par exemple tous les termes de la forme  $R_{ikkj} = 0$ , avec un double indice quelque part, ce qui implique que  $Ricci = 0$ , alors il y aura toujours un point ou on a un terme du type  $R_{ijkl}$ , comme le tenseur de Riemann est non nul ceci implique que la metrique a un terme d'ordre  $r^2$ . Par exemple avec  $\tilde{\theta}_1 \neq 0, \pi/2$  et  $\tilde{\theta}_2 = \dots = \tilde{\theta}_{n-1} = \pi/2$ , on conserve le terme  $R_{2n13}$ , en permutant les lignes, on conserve  $R_{2kl3}$ , comme les indices 2 et 3 sont quelconques, on a au moins un point avec  $R_{1234}$  ou plus généralement  $R_{ijkl}$ .

En fait, on a soit  $R_{2n13}$  soit  $R_{21n3}$ (on a calculé  $g_{23}$ ) et on regarde aussi  $R_{23n1}$  et  $R_{2n31} = -R_{2n13}$  (on echange certaines lignes, et on calcul  $g_{23}$ ), et on utilise l'identite de Bianchi.

5) Quand on considère l'equation de Yamabe, cela veut dire qu'on considere une courbure prescrite  $\equiv 1$ . Le gradient est nul dans toutes les directions. Cela veut dire que toutes les directions sont prises en compte ou bien aucune direction n'est privilegiee, la symetrie de la sphere. La technique utilisée dans la recherche d'estimation a priori est la technique moving-sphere, elle optimise la recherche d'estimations a priori et ne privilegie aucune direction. Pour les dimensions



-Le continu et minorant-majorant. Dans le cas du continu, émissions continues, on utilise l'estimation a priori, qui, à partir du minorant  $m_0 > 0$  donne le majorant  $M_0 = c(m_0) = c(a, b, m_0, K, M)$  et cette fonction est décroissante de  $m_0 > 0$ , donc, quand on prend  $m_0 > 0$  petit et voisin de 0,  $0 < m_0 \rightarrow 0$ ,  $c(m_0)$  croit,  $m_0 \searrow 0 \Rightarrow c(m_0) \nearrow$ , on voit alors l'amplitude générée par la variation du minorant  $m_0 > 0$ , ainsi que l'enroulement et la torsion et les valeurs,  $(majorant, minorant) = (M_0, m_0)$ ,  $M_0 = c(m_0)$ , (et extra-dimensions). Avec ici,  $u > 0$  solution relativement à  $V > 0$  proche d'une constante, dans le cas continu. On a une "inégalité de Harnack" implicite entre minorant et majorant dans le cas continu : il existe une relation entre le minorant et le majorant, notée  $c = c(m_0) = M_0$ , décroissante, avec l'inégalité suivante  $0 < m_0 \leq M_0 = c(m_0) < +\infty$  :

$$0 < m_0 \leq \inf_M u \leq \sup_K u \leq M_0 = c(m_0) < +\infty.$$

////////////////////////////////////

**Sur les relations sup, inf, explicites et implicites :**

Relation explicite (il y a plus d'informations : notions d'enroulement+ de torsion). Relation implicite (il y a moins d'informations : notion d'enroulement). (On l'a déjà dit dans la partie relativité generale et cosmologie quantique, notion d'enroulement et de torsion et les valeurs (sup, inf)).

a) **Relation explicite** entre sup et inf : sup et inf liés. Enroulement+Torsion. Type liaison :  $\sup \uparrow \inf$ , ou  $\sup \leftrightarrow \inf$ . Type de torsion en une fonction :  $x \rightarrow \frac{1}{x^t}$ ,  $t > 0$ .

a1) Relation explicite. sup et inf se controlent mutuellement. Stabilité. Stabilité des vibrations : en sup et inf. Premier type de stabilité : stabilité en normes essentielles, entre sup et inf. Deuxieme type de stabilité : en norme  $L^p_{loc}$ ,  $p > N - 1$ ,  $N = \frac{2n}{n-2}$ , stabilité en norme  $W^{1,1+\epsilon}_{loc}$ , pour ces normes, il y a un "tunnel" dans lequel, les ondes, leurs vibrations, leurs oscillations, sont stables, avec le fait que le sup et inf peuvent avoir de grandes amplitudes, mais restent confinées ou leur  $p$ -volume reste borné, stable, maitrisable : stabilité des vibrations.

a2) **relation ouverte** entre sup et inf : de sup vers inf et de inf vers sup,  $\sup \leftrightarrow \inf$

a3) sup controle inf et inf controle sup. Intervalles de precisions de nombres pour sup et pour inf.

a4) Bornes uniformes pour les normes,  $L^p_{loc}$ ,  $p > N - 1$ ,  $N = \frac{2n}{n-2}$  et  $W^{1,1+\epsilon}_{loc}$ .

a5) estimations a priori explicites :  $\sup \leq c < +\infty$  si  $\inf \geq m > 0$  et  $\inf \leq c < +\infty$  si  $\sup \geq M_0$ . On peut quantifier explicitement  $c$  en fonction de  $m$  ou  $M_0$ .

b) **Relation implicite** entre sup et inf : sup et inf liés. Enroulement. Type liaison :  $\sup \uparrow \inf$  ou  $\sup \leftarrow \inf$ .

b1) Relation implicite. sup est controlé par inf. Dans un sens seulement. Stabilité dans un sens, du inf vers sup.

b2) **relation semi-ouverte** entre sup et inf : de inf vers sup,  $\sup \leftarrow \inf$

b3) inf controle sup. Pas necessairement d'intervalles de precisions de nombres pour sup et pour inf.

b4) estimation a priori implicite :  $\sup \leq c < +\infty$  si  $\inf \geq m > 0$ , ca va dans un sens.

////////////////////////////////////

39) Sur l'estimation asymptotique de l'article de D.Holcman : on ecrit :  $l_\epsilon = \epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon$ , on sépere l'integrale en deux, la partie sur  $B_P(\delta)$  et celle sur  $M - B_P(\delta)$ , puis on fait une changement de variable  $u = \epsilon r$  dans  $B_P(\delta)$  :

1)

$$\begin{aligned} & \epsilon^{-(n/2)+1} (\mu_\epsilon)^{N-1} = \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} = \\ & = \int_0^{\delta/\epsilon} r^{n-1} \left| \frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}} - \frac{\epsilon^{n-2}}{(\epsilon^2 + \delta^2)^{(n-2)/2}} - \epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon \right|^{4/(n-2)} \times \left( \frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}} - \frac{\epsilon^{n-2}}{(\epsilon^2 + \delta^2)^{(n-2)/2}} - \epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon \right) \\ & \leq C + O(\delta^2) \frac{l_\epsilon^{N-2}}{\epsilon^2} + O(\delta^n) \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} + O(\delta^n) \frac{l_\epsilon}{\epsilon^{n-4}} \end{aligned}$$

Avec  $C > 0$ , on a développé l'inégalité précédente et on a utilisé  $|x + y|^\alpha \leq |x|^\alpha + |y|^\alpha$ ,  $\alpha = \frac{4}{n-2} \leq 1$  ( $n \geq 6$ ). Si,  $l_\epsilon \rightarrow +\infty$ , on multiplie par  $\epsilon^n > 0$  on divise par  $l_\epsilon^{N-1}$  puis on fait tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient  $0 < C' \leq 0$  c'est pas possible. Donc  $l_\epsilon \rightarrow k \geq 0$ ,  $k < +\infty$ , on multiplie l'inégalité précédente par  $\epsilon^n$  et on fait tendre  $\epsilon$  vers 0, on obtient  $l_\epsilon \rightarrow 0$  quand  $\epsilon \rightarrow 0$ .

2)  $l_\epsilon \rightarrow 0 \Rightarrow \exists r_\epsilon \rightarrow +\infty$  tel que :

$$\frac{1}{(1+r_\epsilon^2)^{(n-2)/2}} = l_\epsilon = \epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon,$$

2-1) Si  $0 < r_\epsilon < \frac{\delta}{\epsilon}$  :  $0 \leq r \leq r_\epsilon \Rightarrow (r^2 + 1)^{-(n-2)/2} \geq (r_\epsilon^2 + 1)^{-(n-2)/2}$  et  $r \geq r_\epsilon \Rightarrow (r^2 + 1)^{-(n-2)/2} \leq (r_\epsilon^2 + 1)^{-(n-2)/2} = \epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon$ , apres on utilise le theoreme de convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned} \epsilon^{-(n/2)+1} (\mu_\epsilon)^{N-1} &= \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} = \\ &= \int_0^{r_\epsilon} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+2)/2}} (1 + O(\frac{\epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon}{(1+r^2)^{(n-2)}})) + \int_{r_\epsilon}^{\delta/\epsilon} r^{n-1} (3(\epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon)^{N-1}) = \\ &= C + O(\delta^n) \frac{(\epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon)^{N-1}}{\epsilon^n} = C + O(\delta^n) \epsilon^{-(n-2)/2} \mu_\epsilon^{N-1} \end{aligned}$$

avec  $C > 0$ . Donc,

$$\mu_\epsilon \equiv \epsilon^{(n-2)^2/2(n+2)},$$

2-2) Si,  $r_\epsilon \geq \frac{\delta}{\epsilon}$ , on utilise le meme type de calcul que dans le, 2-1) et le Theoreme de convergence dominée de Lebesgue :

$$\begin{aligned} \epsilon^{-(n/2)+1} (\mu_\epsilon)^{N-1} &= \frac{l_\epsilon^{N-1}}{\epsilon^n} = \\ &= \int_0^{\delta/\epsilon} r^{n-1} (\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}} + \dots)^{N-2} (\frac{1}{(1+r^2)^{(n-2)/2}} + \dots) = \int_0^{\delta/\epsilon} \frac{r^{n-1}}{(1+r^2)^{(n+2)/2}} (1 + O(\frac{\epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon}{(1+r^2)^{(n-2)}})) \rightarrow C > 0, \end{aligned}$$

avec,  $r \leq \frac{\delta}{\epsilon} \leq r_\epsilon \Rightarrow \epsilon^{(n-2)/2} \mu_\epsilon = (1+r_\epsilon^2)^{-(n-2)/2} \leq (1+r^2)^{-(n-2)/2}$ . Donc,

$$\mu_\epsilon \equiv \epsilon^{(n-2)^2/2(n+2)}.$$

////////////////////////////////////

#### 40) D-Branes, cordes, supercordes, Yamabe, courbure scalaire, Kaluza-Klein :

Sur les D-Branes, c'est des cordes avec condition de Dirichlet au bord. C'est construit comme pour Kaluza-Klein,  $(n + 1)$ . D'apres Bennequin, dans Astérisque, Seminaire Bourbaki, 2003, voir aussi, Collion-Vaugon, pour la fibration. On prend la variété totale,  $W$  en  $(n + 1)$  de la forme  $W = X \times M$ , avec  $M$  une variété de Kahler-Einstein ou Aubin-Calabi-Yau,  $K_6$  de dimension complexe 3 et réelle 6. Donc, Ricci plate donc scalaire plate. Et,  $X$  l'espace temps de dimension 4 de la forme  $(3 + 1)$ ,  $X = Y \times \mathbb{R}$  avec  $Y$  de courbure scalaire  $\geq 0$  et du au théorème de la masse positive, la courbure scalaire est quelque part  $> 0$ , car la courbure agit et courbe l'espace (aussi, mesures experimentales sur l'existence d'ondes gravitationnelles, donc,  $Weyl \neq 0$  ici en dimension 3 pour l'espace  $Y$  le tenseur de Cotton non nul quelque part, se rappeler aussi que la courbure scalaire est liée à la courbure ou l'inverse du rayon de courbure et la masse est  $> 0$ ) et de masse  $m > 0$ , voir le monographe de Jonathan.Rosenberg et David.Wraith, sur le fait que la courbure scalaire est  $> 0$  quelque part et est  $\geq 0$  (Titre : Positive Scalar curvature). Comme le formalisme des D-branes, est aussi lié à la reduction de Kaluza-Klein, on a l'equation de Yamabe ou de type courbure scalaire prescrite avec condions de Dirichlet au bord, comme  $S_g \geq 0$  et  $S_g > 0$  quelque part, on voit qu'on est dans le cas d'un operateur coercif pour les D-branes avec formalisme ou reduction de Kaluza-Klein, car on a  $Y \times M$  et  $S_g = \text{Scalaire}_Y + \text{Scalaire}_M = \text{Scalaire}_Y + 0 = \text{Scalaire}_Y \geq 0$  et  $> 0$  quelque part. L'invariant de Yamabe est  $> 0$  ou operateur conforme coercif.(on peut prendre aussi,  $M = K_6 = T_6$  le tore de dimension 6, Einstein-Kahler).

Voir aussi le print de, Mariana Grana et Hagen Triendl, Saclay. Kaluza-Klein mechanism and d-branes. Titre : String Theory compactifications.(ils disent que le monde ou espace est un brane,  $Y \times M$ , c'est censé être une variété à bord.)

Voir aussi l'article de Schoen-Yau sur le th. de masse positive, ils disent que la variété de dimension 3 est sans bord ou avec bord, avec une métrique complète,  $\mathbb{R}^n$  n'est ni avec bord ni sans bord, car "son bord" est  $\infty$ , un point, mais cela ne peut pas être un bord, car une variété à bord, son bord est une variété sans bord de dimension 2. On peut considérer par exemple la boule unité diffeomorphe à  $\mathbb{R}^3$  avec l'application  $x \mapsto x/(1 - \|x\|)$ , ou bien sans bord avec une variété proche de la sphère de dimension 3, ou une déformation de la sphère de dimension 3.(par la projection stéréographique, on en lève un point, le pôle nord et l'hémisphère sud, et on applique la projc.stéréographique de pôle, le pôle nord, c'est un bout, par exemple). Comme Schoen-Yau disent que la variété est soit sans bord ou avec bord, mais avec des coordonnées asymptotiques dans les bouts, avec une métrique asymptotique qui la rend complète, et ici, c'est censé être un brane, avoir une membrane, ou un bord. On est dans le cas avec bord dans le théorème de la masse positive, mais on a toujours, la courbure scalaire  $\geq 0$  et  $> 0$  quelque part.

Pour l'Eq. de Yamabe, on a un potentiel constant  $> 0$  et l'opérateur est l'opérateur conforme,  $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta + S_g$ ,  $\Delta = -\nabla^i \nabla_i$ , l'opérateur conforme est coercif. mais quand le potentiel varie, l'opérateur devient  $\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta + h$  avec  $h = S_g - |\nabla \Psi|^2 \leq S_g$ . Ce nouvel opérateur reste encore coercif, car du point de vue de la physique, l'impulsion est proche d'une constante et diminue progressivement, un observateur extérieur, regarde l'effet de l'impulsion à l'instant  $t$  où elle est maximale et au voisinage de l'impulsion maximale, c'est à dire voisine d'une constante. C'est à dire  $\Psi(x_0) + \epsilon$  avec  $\epsilon > 0$  petit. Il y a une impulsion à l'instant  $t$ , qui est constante et après on regarde au voisinage de  $a = \Psi(x_0) = \text{constante}$  à l'instant  $t$ .

Ceci confirme et explique ce qu'on a dit au point (37), sur Kaluza-Klein classique en présence d'un potentiel en dimension  $n = 4$  ou plus généralement  $n \neq 4$ . Du point de vue de la physique, un observateur extérieur regarde ce qui se passe pour une impulsion à l'instant  $t$  et au voisinage de l'impulsion. Oscillation autour d'une constante. Il y a impulsion, observateur, puis le potentiel diminue de  $\epsilon > 0$  petit. Quand on met un potentiel, un observateur extérieur regarde ce qui se passe autour d'une impulsion, c'est à dire autour d'une constante.

**Remarque :** Ceci est une interprétation assez intuitive ( les espaces sont **indépendants les uns des autres**, mais forment des espaces-temps dont la restriction à la variété voulue ou cherchée, est Riemannienne). Concernant la formulation en  $(n+1)$ , on écrit :  $W = M \times X = M \times (Y \times \mathbb{R})$  et par Jonathan. Rosenberg et David. Wraith (titre : positive scalar curvature), on a  $X = Y \times \mathbb{R}$  est un espace temps tel que la métrique Lorentzienne sur  $X$  est Riemannienne sur  $Y$  ou sa restriction. Puis on regroupe  $M$  et  $Y$  en un produit, car les espaces sont indépendants l'un de l'autre. Donc, on obtient un espace temps total  $W$  tel qu'on ait une métrique produit sur  $M \times Y$ , ainsi, les courbures scalaires s'additionnent et donnent une courbure scalaire totale,  $S_g \geq 0$  et  $> 0$  quelque part par la contribution de la courbure scalaire de  $Y$ , donnée par le th. de la masse positive.

Cas 1 :  $Y$  compacte sans bord, alors la variété Riemannienne  $M \times Y$  est compacte sans bord. Ici les cordes sont fermées.

Cas 2 :  $Y$  compacte à bord, alors la variété Riemannienne  $M \times Y$  est compacte à bord. Ici les cordes sont ouvertes. avec condition de Dirichlet. C'est le cas traité dans ce point.

////////////////////////////////////

41) Sur le cas négatif de l'Eq. de courbure scalaire (et sous-critique) (solutions positives) et supercritique négatif (pour ce cas les solutions peuvent changer de signe) : Ici on prouve la compacité locale sans conditions sur la courbure ou la variété Riemannienne. Les estimations a priori locales dans le cas négatif ne dépendent pas de la courbure ou de la nature de la variété Riemannienne. Il n'y a pas de conditions sur la courbure, on a des estimations du type Keller-Osserman. Dans l'article de Marco Rigoli : il a supposé la variété complète et a imposé une condition sur la courbure de Ricci, pour obtenir des estimations asymptotiques à l'infini du type Keller-Osserman, à la distance à un point :  $|u| \leq C/[d(x, x_0)]^\tau$ ,  $\tau > 0$ , par principe du maximum et des raisonnements du type théorèmes de comparaisons, ici la notation  $|u|$  signifie qu'ils majorent et ils minorent les solutions, d'autres estimations sont données par L.Véron et M.F.Bidaut-Véron, pour d'autres types d'équations ou systèmes. Estimations asymptotiques

aussi pour la complétude. Aussi, l'article de L.Véron, 1992, Journal d'Analyse Mathématique, ici, sur un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et operateur "strongly elliptic" pour se ramener au laplacien dans  $\mathbb{R}^n$ , operateur non en divergence forme.

Il y a aussi l'article de Aviles-McOwen, Journ.Diff.Geometry,1988.(Examen de DEA). Ici, ils considerent le potentiel constant  $K \equiv -1$  sur une variété complete et considerent une suite exhaustive de compacts.

Il y a aussi l'article de Ratto.Rigoli.Véron. Math Zeitschrift. 1997. Ils prennent le cas ou la courbure prescrite  $0 > K \in C^\infty(M)$  **fixée** et sur une **variété complète**  $M$  non-compacte et disent qu'ils s'inspirent de la méthode de Aviles-McOwen, donc aussi avec une suite exhaustive de compacts.

A aucun moment ces auteurs, ne posent le probleme de l'estimation a priori et de compacité locale(ne dependant que des parmetres extérieurs,  $a, b, A, M, B, g$ , avec  $B$  le compact), avec ou sans conditions sur la courbure(courbure de Ricci, de Riemann...) ou la variété Riemannienne (localement conformément plate ou non, complète, à bord, sans bord...). On a aussi, des estimations du type Keller-Osserman : pour toute carte normale en  $y_0$ ,  $\sup_{B_R(y_0)} u \circ \varphi^{-1} \leq \frac{c}{R^{2/(q-2)}}$  par un la technique "blow-up" ou eclatement, on sépare les constantes, une estimation a priori du type inégalité de Harnack (dans l'inégalité de Harnack, il y a majoration par l'integrale, ici, il n'y en a pas, c'est une estimation a priori du type inegalité de Harnack sans condition sur l'integrale. Autre chose, la constante  $c$  depend du point, car on est sur une variété, ca depend du point, alors que sur  $\mathbb{R}^n$ , en tout point on a une carte normale et c'est invariant par translation, ce qui fait que les constantes ne dependant pas du point, l'inegalité de Harnack usuelle ne depend pas du point, ceci est lié au fait que l'espace est plat partout, c'est une hypothese forte, en tout point la carte est normale, c'est l'identité. Mais la constante de l'inegalité de Harnack depend du rayon. La technique blow-up qu'on a utilisé fait que  $c$  et  $R$  sont séprées, la constante totale est plus explicite  $C = \frac{c}{R^{2/(q-2)}}$ , on explicite la dependance en  $R$  de  $C$ , et aussi en  $c$  de  $C$ . Et l'estimation a priori est vraie pour tout point  $y_0 \in M$  et toute carte normale, il y a l'influence de la géometrie, ce qui était sous-entendu dans  $\mathbb{R}^n$ . Pour tout  $y_0$  et toute carte normale, on a l'estimation a priori au voisinage de  $y_0$  c'est a dire qu'a l'interieur d'un voisinage de  $y_0$  ca ne depend pas du point  $y \in V_{y_0}$ , cela suffit comme estimation a priori, ca depend d'un rayon maximal  $R$  du point  $y_0$  et la forme explicite de  $C$  fait que c'est une estimation a priori du type Harnack, comme on l'a dit ci-dessus, uniforme en  $y \in V_{y_0}$ , comme si on était dans le cas plat, localement uniforme avec dependance du type Harnack en  $R$  rayon maximal). Non seulement on a l'estimation locale globale dans une boule  $B(y_0, R)$ , mais aussi, dans toute petite boule  $B_{R'}(y)$  de  $V_{y_0} = B(y_0, R)$  :

$$\sup_{B_{R'}(y)} u_i \circ \varphi^{-1} \leq \frac{c}{R'^{2/(q-2)}}, \quad (**)$$

avec  $c = c(y_0, a, b, A, \alpha, M, g)$ , c'est une estimation a priori du type Harnack. On peut l'ecrire aussi pour la distance geodesique en comparant les boules pour les metriques  $g, \varphi^*(g) = h$ . ici, on a melangé boules de cartes, euclidiennes et boules geoedesiques, mais on a toujours l'estimation a priori du type Harnack :

a) Pour un point  $y \in V_{y_0} = B(y_0, R)$  et un réel  $R' > 0$  donnés : on a l'estimation a priori globale par rapport à un rayon maximal  $R > 0$  lié à  $y_0$ . Estimation par rapport à un rayon maximal  $R > 0$  lié au point  $y_0$ . A la Bonnesen, du type inégalité de Bonnesen, par rapport à un rayon maximal.

b) Soit par soucis d'homogénéité, l'inégalité (\*\*), qui exprime comment les solutions  $u_i$  evoluent en fonction de  $y$  et  $R' > 0$  uniformément dans  $V_{y_0} = B(y_0, R)$ , ici  $R > 0$  est lié au point  $y_0$ , alors que  $y$  et  $R' > 0$  sont pris de maniere quelconque dans  $V_{y_0} = B(y_0, R)$ . On a la formule (\*\*), vraie pour tout  $y$  et  $R' > 0$  dans  $V_{y_0} = B(y_0, R)$ . Estimation qui peut etre interieure et spherique. Par soucis d'homogénéité, pour  $y$  et  $R'$ , on veut voir comment evoluent les solutions  $u_i$  en fonctions de  $y$  et  $R'$  : il n'y a pas de dependance en  $y$ , mais ca depend d'un rayon maximal qui est lié à  $y_0$ , un autre point. (\*\*), permet d'exprimer l'evolution de  $u_i$  en fonction de  $R'$ , on considere une boule  $B_{R'}(y)$  et on regarde comment evoluent  $u_i$  en fonction des parametres de cette boule, donc, en fonction de  $y$  et  $R'$ , ca ne depend par de  $y$  dans  $V_{y_0}$  mais ca depend de  $R'$ . On a,  $y_0 \leftrightarrow R$  et  $y \leftrightarrow R'$ .

c) Ces assertions sont equivalentes, l'estimation a priori locale globale dans  $V_{y_0} = B(y_0, R)$  est equivalente à l'estimation a priori du type Harnack :



$$\sup_{B(y_0, R)} u_i o \varphi^{-1} \leq \frac{c}{R^{2/(q-2)}} \Leftrightarrow \sup_{B_{R'}(y)} u_i o \varphi^{-1} \leq \frac{c}{R'^{2/(q-2)}},$$

avec,  $B_{R'}(y) \subset B(y_0, R), \forall R' \leq R, \forall y \in B(y_0, R)$ .

Dans le cas super-critique negatif, on a comme consequence, un principe d'Harnack. On a un critere de compacite si la variete est compacte sans bord et  $\int_M R < 0$  avec  $R$  la fonction de l'Eq.  $\Delta u + R = Ve^u, \Delta = -\nabla^i \nabla_i, a \leq V \leq b < 0$ .

Pour ce qui nous concerne, la compacite locale ne necessite pas de conditions sur la courbure ou la variete Riemannienne. Les **estimations a priori locales, compacite locale**, dans le cas negatif, ne necessitent pas de conditions sur la courbure ou sur la variete Riemannienne.

(Ce qui suit, a ete dit dans l'introduction du print "Cas d'existence de solutions d'EDP", quand on a parle l'elimination des blow-up isolés simples par le th. de la masse positive. Mais cela reste vrai dans le cas strictement negatif, sans th. de la masse positive. On l'a dit, compacite : resultat d'existence par le degre topologique et par consequent l'estimation a priori. Voir aussi pour les solutions variationnelles dans le livre d'Aubin chapitre 6, cas strictement negatif.)

1) Consequence pour le cas strictement negatif avec potentiel negatif strictement et sur une variete compacte sans bord : ( $\Delta = -\nabla^i \nabla_i, c_n$  la constante de l'operateur conforme, on se ramene a la courbure scalaire  $S = -1$ ):

On a une solution topologique pour  $c_n \Delta u - u = Vu^{N-1}, u > 0, -\infty < a \leq V \leq b < 0, \|V\|_{C^{\alpha+\epsilon}} \leq A, \epsilon > 0$ . Pour cela on considere l'homotopie d'operateurs compact :  $K_t(u) = (c_n \Delta + 1)^{-1}(V_t u^{N-1} + 2u)$ , avec  $V_t = -(1-t) + tV, t \in [0, 1]$ . On a la compacite, implique qu'on peut considerer le degre de Leray-Schauder dans  $X = \{u \in C^{2,\alpha}(M), u \geq 0, \|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq 2c_0\}$ , de sorte que  $(Id - K_t)(u) = 0$  n'a pas de solution  $u$  dans  $\partial X$ , on peut alors considerer le degre de Leray-Schauder dans  $X$ . Par homotopie :

$$\deg(Id - K_1, X, 0) = \deg(Id - K_0, X, 0),$$

Or,  $f = Id - K_0$  a une derivee qui est un isomorphisme, car dans le cas negatif, la seule solution de  $(Id - K_0)(u) = 0$  est  $u = u_0 \equiv 1$  (l'eq. est :  $c_n \Delta u - u = -u^{N-1}$ , soit on utilise le resultat d'unicite dans le livre d'Aubin, Kadzdan-Warner, chapitre 6, soit, se placer au maximum et au minimum on a a la fois  $u \leq 1$  et  $u \geq 1$ , voir le livre d'Aubin, pour l'unicite dans le cas negatif, chapitre 6). Et en  $u_0 = 1, f'(h) = f'(u_0)(h), u_0 = 1$ , est un isomorphisme  $f'(h) = h - (c_n \Delta + 1)^{-1}(-(N-3)h)$  et en appliquant  $c_n \Delta + 1$  le noyau est reduit a 0 et  $f'$  est surjectif. Car l'operateur  $c_n \Delta + (N-2)$  est inversible. Donc le degre de  $f$  est l'index de  $f' = I - \tilde{K}_0, \tilde{K}_0$  compact et  $f'$  est un isomorphisme et est egal a +1 ou -1, voir l'article de Leray-Schauder, 1934, titre : Topologie et equations fonctionnelles, Annales de l'E.N.S, voir aussi l'article resume de Jean Mawhin, donc le degre est non nul. Donc : le degre de  $Id - K_1$  est non nul ce qui veut dire que l'eq.  $c_n \Delta u - u = Vu^{N-1}, u > 0$ , a une solution topologique, et on a l'estimation a priori.

Si on divise l'eq. par  $u > 0$  et on integre, on obtient que l'integrale de  $u^{N-2}$  est uniformement minorée par une constante  $> 0$  et par le principe du maximum les solutions sont alors uniformement minorées par une constante  $> 0$ , on utilise la compacite et la convergence vers une fonction non identiquement nulle, puis le principe du maximum implique qu'elle est  $> 0$ . On pouvait prendre l'ensemble  $X = \{u \in C^{2,\alpha}(M), u \geq \frac{c_0}{2} > 0, \|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq 2c_0\}$ , c'est cet ensemble qu'il faut prendre.

Ici, on n'a pas utilise l'idee du livre d'Aubin, dans le cas compact, se placer au maximum et au minimum, pour majorer et minorer les solutions, c'est une methode differente.

2) Pour le cas super critique et negatif, sur une variete compacte sans bord, on a la meme chose avec l'eq.  $\Delta u - 1 = Ve^u, u \geq 0$ . Ici on a impose un signe, mais le fait que la variete soit compacte, implique que les solutions sont minorées, en se placant au point minimum,  $Q, \Delta u(Q) \leq 0$ . Ici aussi on peut se passer de cette idee du livre d'Aubin : en effet, on utilise la majoration uniforme des solutions, on resout un probleme de Dirichlet,  $w$ , car  $Ve^u + 1$  est uniformement bornée (On se place dans des ouverts de cartes de bords reguliers  $(U_x, \varphi_x), x \in M$  et  $w = w_x$ , on se ramene a  $\mathbb{R}^n$ ) et on soustrait  $w, u - w$ , on se ramene a des fonctions harmoniques, puis on utilise le principe de Harnack. Donc, soit  $u$  converge, soit, elle tend vers  $-\infty$ , or l'integrale de  $u$  est uniformement minorée par une constante  $> 0$ , ce qui n'est pas

possible. (on est sur une variété compacte sans bord, on intègre l'éq de  $u$ ). Donc, les  $u$  sont uniformément minorées.

L'application  $K_t(u) = (\Delta + 1)^{-1}(V_t e^u + 1 + u)$  et  $X = \{u \in C^{2,\alpha}(M), u \geq \frac{k'_0}{2}, \|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq 2k_0\}$ . Avec,  $V_t = -(1-t) + tV$  et  $-\infty < a \leq V \leq b < 0$  et  $\|V\|_{C^{\alpha+\epsilon}} \leq A, \epsilon > 0$ . Avec,  $g(u) = K_0(u) = (\Delta + 1)^{-1}(-e^u + 1 + u)$  et  $g'_{u_0=0}(h) \equiv 0$ , donc,  $(Id - g)'_{u_0=0}(h) = h = Id$ .

**Remarques :** a) En ce qui concerne l'unicité pour l'éq.  $\Delta u - 1 = -e^u$  sur une variété compacte. On veut prouver que  $u \equiv 0$ . Alors on écrit  $\Delta u = (1 - e^u)$ , on multiplie par  $u$  et on intègre, on obtient : on a toujours  $(1 - e^u)u \leq 0$  :

$$0 \leq \int_M |\nabla u|^2 = \int_M (1 - e^u)u \leq 0.$$

Donc :  $u(1 - e^u) \equiv 0$ , donc,  $u \equiv 0$ .

b) On a la même chose avec l'éq.  $c_n \Delta u - u = -u^{N-1}, u > 0$ , on déplace  $u$  au second membre et on multiplie par  $u - 1$  et on intègre, on obtient un terme positif ou nul égal à un terme négatif ou nul, donc, nul et donc,  $u \equiv 1$ .

$$c_n \Delta u = u(1 - u^{N-2}),$$

on multiplie par  $u - 1$  (on a toujours  $u(1 - u^{N-2})(u - 1) \leq 0$ ) et on intègre :

$$0 \leq c_n \int_M |\nabla u|^2 = \int_M u(1 - u^{N-2})(u - 1) \leq 0.$$

Donc,  $u(1 - u^{N-2})(u - 1) = 0$ , d'où,  $u \equiv 1$ .

c) Tout ceci pour ne pas utiliser l'idée du livre d'Aubin : se placer au minimum et au maximum des solutions. Dans le cas d'un potentiel, on a l'unicité aussi, par la technique du point a) et b).

////////////////////////////////////

42) Sur l'article de Brezis-Merle et le problème 1 de Brezis-Merle. Dans leur introduction Brezis-Merle commencent par se poser les problèmes des estimations a priori. ( $p = +\infty$ )

a) Ils trouvent une condition sur les bornes  $C_1$  et  $C_2$  pour avoir la compacité jusqu'au bord. Ici, les potentiels peuvent changer de signe et  $C_1$  et  $C_2$  sont quelconques, mais  $C_1 \cdot C_2 < 4\pi$ , c'est une condition sur la "masse" ou l'invariant conforme qui est la masse. C'est une condition à la Bol ou à la Fiala ou à la Alexandrov pour les inégalités isopérimétriques.

C'est une condition "masse-niveau d'énergie" comme pour les inégalités isopérimétriques. Et sur un invariant conforme. Pour avoir la compacité globale.

b) Comme Brezis-Merle ont restreint le champ des possibilités pour  $C_1$  et  $C_2$ . Ils ont trouvé une condition sur le potentiel  $V$  pour qu'il n'y ait pas de conditions sur  $C_1$  et  $C_2$  et l'invariant conforme  $C_1 \cdot C_2$ . Cette condition est la positivité de  $V$ . Ils obtiennent la compacité locale. Mais la compacité globale n'est pas vraie, comme le montre leur exemple et contre-exemple de la fin de l'article.

C'est un exemple d'existence de solutions d'un problème aux limites avec conditions de Dirichlet, avec les conditions de Brezis-Merle qui illustre bien la compacité locale et met en défaut la compacité globale. Ces exemples existent pour toute masse  $m = 4\pi A, A > 1$ .

**Masse ou invariant conforme, conditions sur  $V$  (et ou  $C_1$ ) et niveau d'énergie ou masse. (Pour ce qui est de l'inégalité isopérimétrique de Bol, Fiala, Alexandrov).**

c) Donc, pour le problème 1 de Brezis-Merle, se pose la question de la compacité globale, jusqu'au bord. Pour cela, il faut des conditions :

c1) Soit une condition sur  $C_1$  et  $C_2$  ? Comme la positivité de  $V$  pour la compacité locale, qui est une sorte de condition sur la borne inférieure de  $V$ , comme pour les inégalités, sup, inf.

Ou comme pour les espaces uniformément convexes. Des valeurs explicites pour caractériser un ensemble.

c2) Soit une condition sur la masse  $C_1 \cdot C_2$  ? Comme pour les inégalités isopérimétriques de Bol, Fiala, Alexandrov. Ou Comme pour les espaces uniformément convexes, des valeurs explicites pour caractériser un ensemble. Ou les conditions sur l'invariant de Yamabe de Aubin en dimensions  $\geq 3$ .

Brezis-Merle dans leur exemple et contre-exemple insistent sur le fait que la masse  $m = 4\pi A, A > 1$  est arbitraire.

c3) Soit une condition sur  $V$ ? C'est en partie le probleme 1 de Brezis-Merle, les potentiels convergent en norme  $C^0(\bar{\Omega})$  ou comme dans la remarque qui le precede, des conditions fortes sur  $V$ .

c4) Soit une condition sur les solutions  $u$ ? comme pour les theoremes dans les  $L^p$ , Lebesgue, Beppo-Levi, Fatou, ou d'Ascoli-Arzelà ou Dunford-Pettis, ou les inegalités sup, inf.

d) Chen-Li, donnent une reponse a ce probleme (le probleme 1 de Brezis-Merle) en imposant à  $V$  d'etre  $C^1$  uniformément. On voit alors qu'à partir de la difference  $|V(x) - V(y)| \leq A|x - y|$ , on a au moins, aussi, la condition sur  $C_1 \leq A \cdot \text{diamtre}(\Omega)$ . Ici, on a trois conditions,  $V$ ,  $C^1$ , uniformément, et sur  $C_1$ . Et ils obtiennent la compacité globale pour toute valeur de la masse,  $m = C_1 \cdot C_2 > 0$  quelconque. Independemment de la masse.

On a aussi, les articles de, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, cas sous critique et Suzuki, cas  $V$  constant et Ma-Wei, cas  $V$  constant. Compacité globale par la méthode moving-plane.

e) Pour ce qui nous concerne, dans "About Brezis-Merle Problem with Holderian condition". On fixe la regularité de  $V$ ,  $s$ -holderienne,  $\frac{1}{2} < s < 1$  et on a une condition sur la masse ou l'invariant conforme,  $C_1$  et  $C_2$  sont quelconques, mais  $C_1 \cdot C_2 < 24\pi$ , borne explicite de  $24\pi$ . Condition du type inegalité isoperimetrique de Bol, Fiala, Alexandrov, ou de Brezis-Merle pour des potentiels changeant de signe.

f) Maintenant, si on veut eliminer cette condition sur la masse ou l'invariant conforme. Il faut une condition sur le potentiel  $V$ . C'est l'objet de l'article : "A Compactness result for an equation with Holderian condition". On prend  $V = W \cdot (1 + |x|^{2\beta})$ ,  $\beta \in (0, 1/2)$  avec  $W$ , Lipschitz et uniformément. Presence d'un poids et ce poids est holderien et Sobolev. On obtient la compacité pour une masse  $m = C_1 \cdot C_2$  quelconque.

Cette condition du point  $f$ ) est suffisante, car le poids engendre un cone holderien. Par exemple, si on prend  $V$  une fonction holderienne totale, elle verifie;  $|V(x) - V(y)| \leq B|x - y|^{2\beta}$ ,  $\beta \in (0, 1/2)$ , si  $0 \in \partial\Omega$  est sur le bord, on ecrit  $|V(x) - V(0)| \leq B|x|^{2\beta}$ , c'est a dire que  $V(0) - B|x|^{2\beta} \leq V(x) \leq V(0) + B|x|^{2\beta}$ , on voit alors que  $V$  est equivalente au poids  $1 + k|x|^{2\beta}$  au voisinage de 0. Donc, il suffit de prendre directement le poids, pour avoir une bonne approximation d'une fonction holderienne.

Le poids  $(1 + k|x|^{2\beta})$ , force  $W$  a etre holderienne dans un cone centré en 0.

Dans la pratique, par la methode des differences finies et des elements finis, on considere, des approximations, un maillage, il suffit de considerer les solutions en des points, pour cela il suffit d'avoir un produit fini de poids en un nombre fini de points, qui peut etre grand. Ceci est possible et c'est une approximation.  $V = W \cdot \prod_{i=1}^k (1 + a_i|x - x_i|^{2\beta})$ ,  $a_i = \pm\epsilon_i$ ,  $1 \gg \epsilon_i > 0$ ,  $\epsilon_i > 0$  petit,  $W$  Lipschitz et uniforme. Avec  $k$  tres grand si possible.

Ceci concerne le probleme 1 de Brezis-Merle avec un produit de poids. On a une approximation par un produit de poids holderiens d'une fonction holderienne. Approximation des fonctions et des solutions en considerant un nombre fini de points du maillage.

g) Maintenant, si on s'interesse au volume et une borne uniforme du volume lorsqu'on a un produit de  $k$  poids holderiens. On se place sur un domaine analytique et on utilise les idées (en partie) du print "Uniform bound for the volume of the solutions to Liouville type equations on the annulus".  $0 < a \leq W \leq b$  et  $W$ ,  $C^1$  uniformément,  $\|\nabla W\| \leq A$ .

On ne se place pas forcément sur une couronne, mais sur un domaine analytique. Alors, pour tout  $x \in \partial\Omega$ , il existe une tranformation conforme  $f_x$  d'un voisinage de  $x$  sur la demi boule unité. Alors, avant de faire agir la tranformation conforme autour d'un point  $x_i$  du poids holderien, on utilise l'estimation locale par la méthode moving-plane de Chen-Li et on se retrouve (en partie) dans la situation du print "Uniform bound ... on the annulus". Tout est borné en dehors de la singularité, sauf en la singularité. Alors on utilise la tranformation conforme  $f_{x_i}$ , le bord contenant la singularité devient plat et on se retrouve (en partie) comme dans le print "Uniform bound...on the annulus". On utilise la formule de Pohozaev avec le poids,  $1 + a_i|x - x_i|^{2\beta}$ , on obtient : termes de bords =  $O(1) + 0$  = l'invariant conforme a un facteur près d  à  $f_{x_i}$  et on obtient en prenant le rayon du demi-disque assez petit que le volume est alors borné par une constante dependant de  $a, A, \beta, f_{x_i}, \Omega$ , qui sont fixées au depart.

Comme pour le probleme de Brezis-Merle avec  $k$  poids holderiens, ou Lipschitziens, dans la pratique, par la methode des differences finies et elements finis, il suffit de considerer  $k$  grand, on a une approximation du volume et des fonctions et des solutions.

////////////////////////////////////

43) Pour revenir aux supercordes, dans l'article de 2006 dans Bulletin des Sciences Mathematiques, on a ecrit pour un point interieur  $x_0, x_0 \in M$  :

$$u_i(x_0) \geq m > 0 \Rightarrow \sup_M u_i \times \inf_K u_i \geq c = c(a, b, m, x_0, K, M, g) > 0,$$

Si on prend par exemple  $x_0 \equiv K$  le compact  $K$ , on peut ecire (on a la meme preuve, car on fixe  $x_0$  et le compact  $K$ ) :

$$\sup_K u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_M u_i \times \inf_K u_i \geq c,$$

On remplace  $m = \sup_K u$ , on obtient l'inégalité de Harnack "enroulement-torsion", suivante :

$$\sup_M u \times \inf_K u \geq c(a, b, \sup_K u, K, M, g) > 0,$$

la fonction  $m \rightarrow c$  est croissante de  $m > 0$ . (dans le cas de dépendance linéaire, on a l'inegalité de Harnack classique d'un coté).

On a la fois l'enroulement et la torsion et c'est une inégalité "harmonique-Yamabe", car elle met en relation  $\inf_K u$  et  $\sup_K u$  pour ce qui est harmonique, et  $\sup \times \inf$  pour ce qui est Yamabe. ici, relation entre  $\sup_M u, \sup_K u, \inf_K u$ . ou dans le sens  $\sup_M u, \inf_K u, \sup_K u$ . On a les relations suivantes : ouverte+semi-ouverte :  $\sup_M u \leftrightarrow \inf_K u \leftarrow \sup_K u$ . Ou si, on place tout ce qui est inf d'un coté et tout ce qui sup de l'autre :

$$\inf_K u \geq \frac{c(a, b, \sup_K u, K, M, g)}{\sup_M u} = C(a, b, \sup_K u, \sup_M u, K, M, g) > 0,$$

ou Formellement, on ecrit :

$$\inf \geq c(\sup) > 0,$$

ou si on revient a l'ecriture initiale,

$$\sup_M u \times \inf_K u \geq c(a, b, \sup_K u, K, M, g) > 0.$$

On voit alors pour ce qui est  $n + 1$  avec  $n \geq 3$  (et en particulier  $n = 9$ ), concernant les supercordes et Kaluza-Klein, l'enroulement, la torsion, qui sont mélangés, et, harmonique-Yamabe, les differentes relations d'Harnack mélangées et ceci sans nécessairement avec conditions au bord, Dirichlet ou Neumann ou mixtes.

**Remarques : quelques exemples**

1) Pour les fonctions solutions d'edp du type :

$$Lu = f,$$

On a des inégalités de Harnack avec une contibution de la norme  $L^n$  de  $f$  :

$$\sup_K u \leq C_1 \inf_K u + C_2 \|f\|_n,$$

Si  $f = Vu^{N-1}$ , on voit qu'on doit avoir une contibution de  $\|u\|_p, p = nN$ , dans l'inégalité de Harnack. Pour des equations plus generales que les fonctions harmoniques (presence d'un  $f$ ), il faut une information ou une contirbution de  $f$ , si de plus on suppose  $f$  dependant de  $u$  alors, dans l'inégalité de Harnack classique il faut une contribution d'une integrale de  $u$ . Voir le Gilbarg-Trudinger pour les inégalités de Harnack classiques avec une fonction  $f$ .

On explique ainsi l'inegalité de Harnack a trois parametres, ci-dessus, avec,  $\sup_M u, \inf_K u, \sup_K u$ . La presence de 3 parametres.

2) Dans le Gilbarg-Trudinger, il y a l'inégalité d'oscillation, dans la solution de, De Giorgi et Nash, de régularité holderienne. Le lemme d'oscillation : il fait apparaitre  $\sup_{B_R} u, \inf_{B_R} u$  et  $\sup_{B_{R_0}} |u|$ , avec  $R_0$  fixé plus grand ou egal que  $R$ .

On explique que dans l'inégalité de Harnack a 3 parametres, ci-dessus, on prend  $M$  plus grand que  $K$  avec presence de  $\sup_K u$ ,  $\inf_K u$  et  $\sup_M u$ . 3 parametres dont deux d'Harnack harmonique et deux de Yamabe.

3) on explique la presence de 3 parametres dans l'inegalité de Harnack harmonique-Yamabe, qui est du a la non linearité de l'equation.

4) Il y a l'exemple suivant :

$$u_\mu(x) = \frac{\mu^{(n-2)/2}}{(\mu^2 + |x|^2)^{(n-2)/2}},$$

a) quand  $\mu \rightarrow +\infty$ , on a l'inegalité  $\sup_{B_k(0)} u_\mu \leq c \inf_{B_k(0)} u_\mu$ ,  $c > 0$ ,

b) quand  $\mu \rightarrow 0$ , on a l'inegalité  $\sup_{B_1(0)} u_\mu \times \inf_{B_k(0)} u_\mu \geq c > 0$ ,

L'inegalité ci-dessus, melange ce type d'inegalités de Harnack.

Formelement, on ecrit :

$$\inf \geq c(\sup) > 0,$$

ou si on revient a l'ecriture initiale,

$$\sup_M u \times \inf_K u \geq c(a, b, \sup_K u, K, M, g) > 0.$$

On voit alors l'enroulement et la torsion en ce qui concerne les supercordes.

On a :

(1)  $\sup_K u \times \inf_M u \leq c$ , ou,  $\sup_M u \times \inf_K u \geq c > 0$  : *inegalites tres fortes*,

(2)  $(\sup_K u)^\alpha \times \inf_M u \leq c$ , ou,  $(\sup_M u)^{1/\alpha} \times \inf_K u \geq c > 0$  : *inegalites fortes*,

(3)  $\sup_K u \leq c(\inf_M u)$ , ou,  $\inf_K u \geq c(\sup_M u) > 0$  : *inegalites faibles*,

(4)  $\sup_M u \times \inf_K u \geq c(\sup_K u) > 0$  : *inegalites tres faibles*.

a) Pour le (3) et (4), pour le (3), le sup controle l'inf. Pour le (4) le sup local controle l'inf  $\times$  sup, l'inf doit etre difficile a controler. Donc, (4) est plus faible que (3) qui est plus faible que (2) qui est plus faible que (1).

b) On a :

(1) :  $1 - Torsion - Enroulement$ ,

(2) :  $\alpha - Torsion - Enroulement$ ,

(3) :  $Enroulement$ ,

(4) :  $Enroulement - Torsion$ , enroulement dans la torsion

////////////////////////////////////

44) les Equations, apparition et provenence : voir, Aubin, T. Lions, P-L. Rabinowitz, P-H.

a) Equation de Yamabe : precisement elle s'appelle Eq de Yamabe. En Géometrie et Physique et Astronomie. Kaluza-Klein, cordes, supercordes et D-branes, en dimension 4, Yang-Mills. **Dynamique relativiste**., energie, volume, potentiel...

b) Equation de la courbure scalaire prescrite : on peut la nommer "Eq de Schrodinger particuliere". En Géometrie et en Physique, en dimension 4, Yang-Mills., energie, volume, potentiel...

c) Equation de type courbure scalaire, comme on en a parlé. En cosmologie, Astronomie, Kaluza-Klein, cordes, supercordes, D-branes. En dimension 4, Yang-Mills., energie, potentiel...

d) Equation de Lane-Emden-Fowler :  $\Delta u = V(x)u^p$ ;  $u > 0, p > 1$ , en astronomie.

e) Equation de Schrodinger :(stationnaire : du type Yamabe ; du type courbure scalaire prescrite) :  $\Delta u + b(x)u = f(x, u), u > 0$  avec  $f$  avec des combinaisons de termes avec exposant critique et sous-critique,  $n \geq 3$ , par exemple,  $f(x, u) = V(x)u^{N-1} + W(x)u^\alpha, 1 < \alpha < N - 1 = \frac{n+2}{n-2}$ . En physique, en optique non-linéaire (du type Yamabe), **Eq de Schrodinger : dynamique d'une particule non relativiste**. Energie, potentiel...

f) Eq de Liouville ou du type Liouville (courbure de Gauss) : En Géométrie et Physique et Chimie et Astronomie. Gaz, Cordes, D-branes, en dimension 2., energie, volume, potentiel...

////////////////////////////////////

45) Sur l'article de C.C.Chen. C.S.Lin. Communications on pure and applied math, 1997. Ils supposent les potentiels  $V, C^1$  :

Ceci est du au fait suivant : Ils cherchent a avoir comme donnée, dans la convergence des fonctions blow-up,  $R_i^{n-2} \|v_i - U\|_{C^2(B_{2R_i}(0))} \rightarrow 0$ . En faisant le rescaling, ou changement d'échelle,  $x = R_i y, y \in B_3(0)$ , il suffit et il faut que, la difference,  $w_i(y) = v_i(R_i y) - U(R_i y)$  tend vers 0 et appliquer les estimations de Schauder, aux fonctions,  $w_i, \Delta(w_i - U) \rightarrow 0$ , or,  $-\Delta(w_i - U) = R_i^2 (V_i(y_i + R_i y) - V_i(y_i))(v_i)^{N-1} + \dots \rightarrow 0$ . C'est a dire qu'il faut que  $R_i^2 (V_i(y_i + R_i y) - V_i(y_i)) \rightarrow 0$ , or cette difference n'est que la dérivée de  $V_i$  au point blow-up :  $\frac{V_i(y_i+h) - V_i(y_i)}{h}$  avec  $h = \frac{1}{R_i^2}$ . Donc, il faut que  $V_i$  soit derivable en  $y_i$  et  $V_i'(y_i) = 0$  et par le theoreme des accroissement fini,  $V_i'(c_h) \rightarrow 0$  avec  $0 < c_h < h = \frac{1}{R_i^2}$  et la dérivée en 0 doit etre continue. Donc,  $V_i$  doit etre  $C^1$  en  $y_i$ , comme le point  $y_i$  est quelconque, il faut que  $V_i$  et sa limite  $V$  soient  $C^1$ .

## 2. QUELQUES PROBLEMES :

### Concernant les inégalités de Harnack :

Fixant un minorant  $m > 0$ , on a une relation entre  $\sup_K v$  et  $m$  pour toute  $v > 0$  relativement a un  $W$  avec des conditions a priori sur  $W, v$  et  $W$  sont liés par une equation ou plusieurs equations. Or, en prenant le minorant  $m = \inf_M u > 0$ , on a l'inegalité pour  $v > 0$  or  $u > 0$  déjà une solution du probleme, donc  $\sup_K u$  est fonction de  $\inf_M u$  et des autres paramètres.

Pour l'equation de la courbure scalaire prescrite en dimensions 3 et 4 :

a) En dimension 3, on a la dependance explicite du sup en fonction du inf,

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c.$$

b) En dimension 4, on a une estimation a priori. On plus on a des exemples pour ce cas.

En general, dans le cas d'une variété Riemannienne  $M$  de dimension 4, on a une estimation a priori. on peut se ramener a une estimation du sup en fonction du inf en ecrivant :

$$\sup_K u \leq c(a, b, \inf_M u, K, \Omega),$$

pour toute  $u > 0$  solution de l'equation de la courbure prescrite en dimension 4 sur  $M$ , relativement a  $V$  (Lipschitzienne) verifiant :

$$\|\nabla V\|_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u,$$

et,

$$0 < a \leq V \leq b < +\infty,$$

En effet,  $u > 0$  et  $V$  sont liés par l'equation, on peut supposer que le gradient de  $V$  et  $\inf_M u$  sont aussi liés, ici on a deux equations liant  $u > 0$  et  $V$ , une contrainte de plus. On a des exemples quand  $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$  et  $\inf_M u_i \geq m > 0$ , on a une estimation locale uniforme.

Ici, la constante  $k(a) = \frac{32e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$  entre  $\min_M u$  et la norme du gradient est plus grande que dans le cas plat(ouvert de  $\mathbb{R}^4$ ). Il faut faire la preuve pour  $\min_M u \geq m > 0$ , car on doit éliminer des termes en  $o(1)$ . Dans le cas d'un ouvert de  $\mathbb{R}^4$ , la constante  $k(a) = \frac{8e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$ .<sup>1</sup>

**Remarque :** Dans le cas d'un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^4$ , la deuxième contrainte est "vérifiée" (après blow-up), dans l'article de C.C.Chen et C.S.Lin, si on suppose  $V \in C^2$  uniformément. Ils obtiennent une inégalité entre  $\nabla V(y_i)$  et  $[u_i(y_i)]^{-1}$ , dans ce cas ils obtiennent l'inégalité optimale  $\sup \times \inf$ . (les points  $y_i$  sont les points blow-up).

i) Un exemple, ce résultat s'applique lorsque  $V \equiv \text{constante} > 0$ . On retrouve le résultat de YY.Li et L. Zhang, eux obtiennent l'inégalité optimale  $\sup \times \inf$ .

ii) Un autre cas, on l'a dit ci-dessus, c'est celui où  $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$  et  $\min_M u_i \geq m > 0$ , on obtient une estimation locale uniforme.

iii) On a un résultat analogue à celui de Brezis-Merle en dimension 2, en dimension 4 : pour deux suites  $(u_i), (V_i)$  solutions de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4,  $0 < a \leq V_i \leq b$  et  $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$ , alors  $u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), m, K, M)$ . En particulier, si on prend  $m = \inf_M u_i > 0$ , on a l'inégalité de Harnack implicite,  $\sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), \inf_M u_i, K, M)$  (La fonction  $m \rightarrow c$  est décroissante de  $m > 0$  et change en une autre fonction  $\tilde{c}$  si on remplace les suites  $(u_i, V_i)$  par une d'autres suites  $(v_i, W_i)$  avec des hypothèses similaires, et on obtient :  $\sup_K v_i \leq \tilde{c}(\tilde{a}, \tilde{b}, (\tilde{A}_i), \inf_M v_i, K, M)$ ).

La formulation précédente en dimension 4 s'applique lorsqu'on suppose en  $x_0$  point critique de  $V > 0$   $V \in C^1(M)$ . on fait la preuve avec  $\min_M u \geq m > 0$  pour  $v = u/\varphi$  avec  $\varphi > 0$  duc changement de métrique conforme telle que  $\tilde{Ricci}_{\tilde{g}}(x_0) = 0$ , on obtient :

$$\exists c, R > 0, \sup_{B_R(x_0)} v \leq c,$$

Donc,

$$\exists c, R > 0, u(x_0) \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c, \forall u > 0$$

Donc, on obtient une inégalité du type :

$$u(x_0) \leq c(x_0, V, \inf_M u, M, g),$$

pour toute solution  $u > 0$  de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à un  $V > 0$ ,  $V \in C^1(M)$  fixé ayant le point  $x_0$  comme point critique,  $\nabla V(x_0) = 0$ . Ou bien  $V \in C^{1,\alpha}(M)$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < a \leq V \leq b < +\infty$  et  $\|V\|_{C^{1,\alpha}} \leq A$  et  $\nabla V(x_0) = 0$ , on obtient :

1. Pour la preuve, comme c'est locale, on prend  $x_0 \in M$ , on fait un changement de métrique conforme  $\tilde{g} = e^f g = \varphi^3 g$  de sorte que  $\tilde{Ricci}_{x_0} = 0$ , on a (voir le livre d'Aubin)  $f(x_0) = 0$  et  $\varphi(x_0) = 1$ . On prouve l'estimation en supposant  $\min_M u \geq m > 0$  pour la nouvelle fonction  $v = u/\varphi$  pour  $m > 0$  (car, voir l'article de la preuve du cas général en dimension 4, il y a des termes  $\tilde{Ricci}_{y_i}$  et  $\tilde{R}_{\tilde{g}}(y_i)$ , des termes en  $o(1)$ ), comme  $\varphi(x_0) = 1$ ,  $\min_{B_{\tilde{g}}(x_0)} v \geq (\min_M u)/2 \geq m/2 > 0$ . Comme on fait un changement de métrique conforme, au voisinage de  $x_0$ , tout est de "l'ordre" de  $u$  et  $m$  car  $\varphi(x_0) = 1$ ,  $f(x_0) = 1$ , l'exponentielle (en norme de matrices) est  $(1 + \epsilon)$ -Lipschitzienne, on a changé de métrique, les majorants restent de l'ordre de  $1 + \epsilon$  au voisinage de  $x_0$  car  $\varphi(x_0) = 1$ ,  $(f(x_0) = 0)$ , et la constante  $k(a)$  entre  $\min_M u$  et la norme du gradient de  $V$  est plus grande.

On prouve alors, en supposant l'inégalité entre le  $\min_M u$  et le gradient de  $V$  :  $\min_M u \geq m > 0 \Rightarrow \sup_{B_{\tilde{g}}(x_0)} v \leq c \Rightarrow \sup_K u \leq c(a, b, m, K, M)$ . Après on remplace  $m$  par  $\min_M u$ .

2. Concernant l'exponentielle dans la preuve du résultat ci-dessus. On commence par changer la métrique  $d_g \rightarrow d_{\tilde{g}}$ , on a un facteur  $(1 + \epsilon)$ , puis on considère  $\text{e}\tilde{x}p_y$ , l'exponentielle pour la métrique  $\tilde{g}$ , construite à partir d'une carte  $(\Omega, \psi)$  normale en  $x_0$  pour la métrique  $\tilde{g}$ , on passe de  $d_{\tilde{g}}$  à  $\|\psi \circ \text{e}\tilde{x}p\|_{\mathbb{R}^4}$ , on a un majorant  $(1 + \epsilon)$ , puis on utilise le fait que  $\frac{d}{dz}[z \rightarrow \text{e}\tilde{x}p_{x_0}(z)]|_{z=0} = id_{\mathbb{R}^4}$ , c'est à dire que c'est vrai pour la différentielle de  $\psi \circ \text{e}\tilde{x}p$  et par continuité des différentielles, (en  $y$  et  $z$  assez petits), on a un majorant  $(1 + \epsilon)$ , puis on utilise la norme matricielle sup des matrices et on écrit que :  $\psi \circ \text{e}\tilde{x}p_y(z_1) - \psi \circ \text{e}\tilde{x}p_y(z_2) = \int_0^1 \partial_s [\psi \circ \text{e}\tilde{x}p_y(s(z_1 - z_2) + z_2)] ds = \int_0^1 [(\partial_z (\psi \circ \text{e}\tilde{x}p_y)(s(z_1 - z_2) + z_2)) \cdot (z_1 - z_2)] ds$  et on obtient ;  $\|\psi \circ \text{e}\tilde{x}p_y(z_1) - \psi \circ \text{e}\tilde{x}p_y(z_2)\|_{\mathbb{R}^4} \leq (1 + \epsilon)\|z_1 - z_2\|_{\mathbb{R}^4}$ , uniformément en  $y$  voisin de  $x_0$  et  $|z_1| \leq r, |z_2| \leq r, r > 0$  assez petit.

$$\forall u > 0, u(x_0) \leq c(a, b, A, \alpha, x_0, \inf_M u, M, g).$$

Il y a des exemples de solutions de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 avec  $x_0$  point où  $V$  est maximum et  $M$  compacte sans bord dans le livre d'Aubin.

Quand on prend les notations de YY.Li et L.Zhang :  $(M, g) = (B_1(0) \subset \mathbb{R}^4, g)$  et  $0 < V \in C^1(B_1(0))$  avec  $\nabla V(0) = 0$ , on obtient l'estimation a priori dans un voisinage de 0 en supposant le minimum uniformément minoré et aussi :

$$(5) \quad u(0) \leq c(V, B_1(0), g, \inf_{B_1(0)} u),$$

pour toute solution  $u > 0$  de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à  $V$  avec les conditions précédentes ou  $V \in C^{1,\alpha}(B_1(0))$  avec  $0 < \alpha \leq 1$ ,  $0 < a \leq V \leq b < +\infty$  et  $\|V\|_{C^{1,\alpha}} \leq A$  et  $\nabla V(0) = 0$ .

$$(6) \quad \forall u > 0, u(0) \leq c(a, b, A, \alpha, \inf_{B_1(0)} u, B_1(0), g).$$

Pour l'équation de Yamabe en dimensions 5 et 6 :

c) En dimension 5, il y a une relation explicite entre  $\sup_K u$  et  $\inf_M u$ ,

$$(\sup_K u)^{1/7} \times \inf_M u \leq c.$$

d) En dimension 6, on a une estimation a priori et une relation non explicite entre  $\sup_K u$  et  $\inf_M u$ . Pour toute solution  $u > 0$  de l'équation de Yamabe en dimension 6 :

$$(7) \quad \sup_K u \leq c(K, M, g, \inf_M u).$$

Pour l'équation de Yamabe et du type Yamabe en dimension 4, on a l'inégalité :

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c.$$

Concernant l'article : "Some uniform estimates for scalar curvature type equations". En dimension 4, on a en plus de l'estimation a priori une dépendance non explicite du  $\sup_K u$  en fonction du  $\inf_\Omega u$  :

$$(8) \quad \sup_K u \leq c(a, b, A, \alpha, K, \Omega, \inf_\Omega u),$$

pour le théorème 3

et,

$$(9) \quad \sup_K u \leq c(a, V, K, \Omega, \inf_\Omega u).$$

pour le théorème 4.

**Remarque :** On a bien une fonction  $c$  de l'inf car, pour chaque  $m$  on a une constante  $c_0$  majorant de  $\sup_K u$  et l'ensemble des majorants est lui-même minoré par  $\sup_K u$ ,  $c$  est alors l'inf des majorants de  $\sup_K u$ , qui est unique. On voit alors que cette correspondance  $m \rightarrow c$  est bien une fonction et aussi la correspondance  $(a, b, K, \Omega, m) \rightarrow c$  est une fonction. Après on remplace  $m$  par  $\inf_\Omega u$  comme on l'a dit ci-dessus. On a bien la correspondance  $(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \rightarrow c$  est une fonction.

De plus la fonction  $m \rightarrow c$  est décroissante en  $m > 0$ . On a alors, si  $\inf_\Omega u \geq m > 0$  (ou  $\inf_M u \geq m > 0$ , si on considère une variété Riemannienne  $M$ ), alors  $c(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \leq c(a, b, K, \Omega, m) < +\infty$ , ou  $(c(a, b, K, M, \inf_M u) \leq c(a, b, K, M, m)$ , si on est sur une variété Riemannienne  $M$ ), on obtient alors l'estimation a priori lorsque l'inf est uniformément minoré.





$$\inf_{u \in H^1(M) - \{0\}} \frac{4 \frac{(n-1)}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \epsilon \int_M u^2 dV_g}{\left( \int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N}} = \epsilon (\text{vol}(M))^{2/n},$$

Qu'on peut écrire :

Pour tout  $u \in H^1(M)$ , on a :

$$4 \frac{(n-1)}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g \geq \epsilon \left( \left( \int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N} (\text{vol}(M))^{2/n} - \int_M u^2 dV_g \right),$$

ou encore,

$$\forall u \in H^1(M), 4 \frac{(n-1)}{n-2} \|\nabla u\|_2^2 \geq \epsilon \left( (\text{vol}(M))^{2/n} \|u\|_{2^*}^2 - \|u\|_2^2 \right) \geq 0,$$

avec  $2^* = N = \frac{2n}{n-2}$  pour  $n \geq 4$ .

Finalement : il existe  $C = C(n, M, g) > 0$  telle que :

$$\forall u \in H^1(M), \|\nabla u\|_2^2 \geq C \left( (\text{vol}(M))^{2/n} \|u\|_{2^*}^2 - \|u\|_2^2 \right) \geq 0,$$

avec  $2^* = N = \frac{2n}{n-2}$  pour  $n \geq 4$ .

On a une interprétation du point de vue de la physique de cette inégalité. Pour les inégalités isopérimétriques, on a une relation entre le périmètre et l'aire, du point de vue de la géométrie. Ici, on a une relation entre l'énergie et le  $N$ -volume pour une distribution Sobolev  $H^1(M)$ . Distributions, énergie (normes  $H^1$ ) et  $N$ -volume généré par cette distribution.

## 2.1. Sur les problèmes du type sup $\times$ inf :

1) Problème de Li-Zhang :

Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension  $n \geq 5$  de courbure scalaire  $S_g$ , on considère l'équation de Yamabe :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + S_g u = u^{N-1}, \quad u > 0, \quad N = 2n/(n-2).$$

$\Delta = -\nabla^i(\nabla_i)$  l'opérateur de Laplace-Beltrami.

a) Est-il vrai d'avoir pour tout compact  $K \subset M$ ,

$$\sup_K u \times \inf_M u \leq c(K, M, g) ?$$

b) En particulier pour  $n = 6$  (inégalité explicite), est-il vrai qu'on a :

$$\left( \sup_K u \right)^\alpha \times \inf_K u \leq c, \quad 0 < \alpha \leq 1 ?$$

2) Soit  $(M, g)$  une variété Riemannienne de dimension 4 de courbure scalaire  $S_g$ , on considère l'équation de la courbure scalaire prescrite  $V$  :

$$\Delta u + \frac{1}{6} S_g u = V u^3, \quad u > 0.$$

$\Delta = -\nabla^i(\nabla_i)$  l'opérateur de Laplace-Beltrami. On suppose :

$$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty, \quad \|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$$

a) Est-il vrai que :

$$\exists \alpha \in (0, 1], \quad \left( \sup_K u_i \right)^\alpha \times \inf_M u_i \leq c = c(a, b, (A_i)_i, K, M, g) ?$$

b) Qu'en est-il du cas  $(M, g) = (\Omega \subset \mathbb{R}^4, \delta)$  ?

c) (Résultat du type CC.Chen-CS.Lin du cas plat), qu'en est-il si on suppose que  $V$  vérifie :

$$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty, \|\nabla V_i\|_\infty \leq A, \|\nabla^2 V_i\|_\infty \leq B?$$

Plus précisément, a t on :

$$\exists \alpha \in ]0, 1], (\sup_K u)^\alpha \times \inf_M u \leq c = c(a, b, A, B, K, M) ?$$

### 2.2. Probleme de Brezis-Li-Shafir :

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ , ici,  $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ , on considere l'equation suivante :

$$-\Delta u = V e^u,$$

avec  $V > 0$  et continue sur  $\Omega$ .

A t on, pour tout compact  $K \subset \Omega$  :

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(K, V, \Omega) ?$$

### 2.3. Problemes du type Brezis-Merle :

Soit  $\Omega$  un ouvert regulier de  $\mathbb{R}^2$ , ici,  $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$ . On considere les equations suivantes :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = |x - x_0|^{2\beta} V e^u, \epsilon \in (0, 1], x_0 \in \partial\Omega,$$

avec,

$$\beta \geq 0, 0 \leq V \leq b, |x - x_0|^{2\beta} e^u \in L^1(\Omega), u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

a) Donner le comportement "blow-up" au bord et un critere de compacité des solutions en  $u$ .

b) Qu'en est il si  $V$  est Lipschitzienne ?

c) De meme, donner le comportement "blow-up" et un critere de compacité pour les solutions de :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = |x - x_0|^{-2\alpha} V e^u, \epsilon \in (0, 1], x_0 \in \partial\Omega.$$

Ici  $\alpha \in (0, 1)$  ou  $\alpha \in (0, 1/2)$  et,

$$0 \leq V \leq b, |x - x_0|^{-2\alpha} e^u \in L^1(\Omega), u \in W_0^{1,1}(\Omega)$$

d) Qu'en est il si on suppose  $V$  Lipschitzienne ?

e) Memes questions avec le cas regulier ; equation elliptique avec poids holderien et singularité au bord :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = (1 + |x - x_0|^{2\beta}) V e^u, \epsilon \in (0, 1], x_0 \in \partial\Omega,$$

avec,

$$1/2 > \beta \geq 0, 0 \leq V \leq b, e^u \in L^1(\Omega), u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

### RÉFÉRENCES

- [1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.
- [2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959
- [3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.
- [4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [5] Azé. Analyse variationelle...ellipse.1997.
- [6] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [7] A. Besse. Einstein manifolds. Springer. 1987.
- [8] Bredon. Geometry and Topology. Springer.
- [9] Brezis. Analyse fonctionnelle ; 1983
- [10] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [11] Brezis, Merle. Uniform estimate and blow-up behavior... Comm.P.D.E..1991.

- [12] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. Arch. Rational. Mech. Anal. 122 (1993) 145-157.
- [13] M. G. Crandall. P.H. Rabinowitz. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. 1975.
- [14] Dautray-Lions. Part 2. Laplace Operator.
- [15] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63
- [16] De Figueiredo. Do O. Ruf. System. 2006.
- [17] Do Carmo. Riemannian Geometry.
- [18] Druet.Hebey.Robert. Green functions. 2004.
- [19] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.
- [20] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehern Math. Wiss.,224, 1983.
- [21] William Goldman. 1983. Existence de varietes sans structure plate.
- [22] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.
- [23] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.
- [24] Hatcher. Sur les Torus Bandles.
- [25] Hirsch. M. Differential Topology.
- [26] Huber.A. On subharmonic functions in the large. (1957)
- [27] Hulin, Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces.(1992)
- [28] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [29] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [30] Kobayashi, Nomizu. Differential Geometry.
- [31] Kuiper. (Conformally flat structure in the large). (1949).
- [32] Kulkarni. Conformally flat manifolds.1972.
- [33] Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.
- [34] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.
- [35] Nazaraov, S, A. Sweers, G. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. Journal of Differential Equations. 233, 1, 2007, 151-180.
- [36] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.
- [37] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [38] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les varietes a bord.
- [39] Schoen, R. Yau, S-T, On the positive mass conjecture in dimension 3. Comm. Math. Phys. 1979.
- [40] R. Sa Earp. E. Tubiana. Introduction a la geometrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.
- [41] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds. arXiv :gr-qc/0506101.
- [42] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds. arXiv :gr-qc/0610045.
- [43] Choquet-Bruhat.Yvonne, Isenberg.James, York.James. W. Einstein Constraints on Asymptotically Euclidean Manifolds. arXiv :gr-qc/9906095.
- [44] Premoselli.B. Stability and instability of the Einstein-Lichnerowicz constraint system. arXiv :1502.04233v1
- [45] Carlotto.A. The general relativistic constraints equations. Living reviews in Relativity. 24, 2, 2021. Springer.
- [46] Horvat.R, Krcmar.M, Lakić.B. Recent searches for solar axions and large extra dimensions. arXiv :hep-ph/0112224.
- [47] Horvat.R, Krcmar.M, Lakić.B. CERN Axion Solar Telescope as a probe of large extra dimensions. arXiv :astro-ph/0312030.
- [48] Hillen.T, Painter.K. Global existence for a parabolic chemotaxis model with prevention of overcrowding. Adv. Appl. Math. 26, 280-301, 2001.
- [49] Keller. E. F. Segel, L.A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability.J. Theoret. Biol., 26 (1970), pp. 399-415.
- [50] Lin. C.S, Ni. W.M, Takagi.I Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. Journ. Diff. Equations, volume 72, no 1, 1988, pp 1-27.
- [51] T. H; Parker. Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds, Comm. Math. Phys. 1982.
- [52] YY.Li. Prescribing Scalar curvature on  $S_n$ . Part I. Journ.Diff.Eq.1995.Part II.
- [53] C.C.Chen. C.S.Lin. Journal. Differential.Geometry. 1998.
- [54] L.Ma. J.Wei. Convergence for Liouville Equation. 2001.

- [55] Nagasaki.Suzuki. 1990.
- [56] G.F. Giudice. J.D. Wells; Extra-dimensions. Review of Particle Physics, 2005-2006. Particle Data Group. nouvelle edition 2021.
- [57] Keller-Osserman.
- [58] M.F.Bidaut-Véron. L. Véron. Estimations pour equations et systemes, voir leur bibliographie.
- [59] Véron.L. Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary. Journal d'Analyse Mathématique, 59, 231-250, 1992.
- [60] M.Rigoli. S. Zamperlin. A priori estimates, uniqueness and existence of positive solutions of Yamabe type equations on complete manifolds. Journ. Funct.Analysis. 245, 1, 2007, 144-176.
- [61] P.Aviles. R. C. McOwen. Conformal Defomration to constant negative scalar curvature on noncomapct manifolds. Journal.Diff.Geometry. 27, (1988), 225-239.
- [62] A.Ratto. M.Rigoli. L.Veron. Scalar curvature and conformal deformations of noncompact Riemannian manifolds. Math Z. 225, 395-426 (1997).
- [63] Leray,J, Schauder,J. Topologie et equations fonctionnelles. Annales de l'ENS. 1934.
- [64] Mawhin,J. Leray-Schauder degree :a half century of extensions and applications. Topological methods in Nonlinear Analysis.Journal of the Juliusz Schauder Center. volume 14, 1999, 195-228.
- [65] Brezis,H, F.Browder. PDEs in 20th century. Advances in Mathematics, volume 135, 1, 76-144, 1998.

EQUIPE D'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 2, PLACE JUSSIEU, 75005, PARIS, FRANCE.

*Email address:* samybahoura@gmail.com