



HAL
open science

Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.. 2017. hal-01635538v15

HAL Id: hal-01635538

<https://hal.science/hal-01635538v15>

Submitted on 17 Feb 2022 (v15), last revised 25 Apr 2024 (v23)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, réels, le Tore, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules geodesiques, traces de Sobolev et fonctions de Green et un Théorème de Dualité, la metrique induite sur un ouvert Lipschitzien, les coordonnées geodesiques polaires et la formule de Gauss-Bonnet et sur le Théorème de la masse positive en dimension 3 et dans le cas conformément plat. Et le flot de Ricci et sur les inégalités du type $\sup u = f(\inf u)$ et sur la théorie de Yang-Mills et la relativité générale et la cosmologie quantique et leur relation avec l'équation de Yamabe et de la courbure prescrite et du type courbure prescrite.

1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Hausssdorf et la formule d'integration par parties (Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ?) : $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ alors la mesure $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit $A \subset \partial\Omega$, $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon, H_{|\partial\Omega}^{n-1}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a, $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$, avec V_ϵ ouvert de \mathbb{R}^n .

Dapres le Theoreme d'Urysohn ;

$$\exists f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq f_\epsilon \leq 1, f_\epsilon \equiv 1, \text{ sur } K_\epsilon, \text{ supp } f_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient ν_1, ν_2 les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

Ω est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Hausssdorf $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$, ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et $|D\chi_\Omega| = H_{|\partial\Omega}^{n-1}$:

$$\int_\Omega \text{div} \varphi = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_1 dH^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_2 dH^{n-1}, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0, \forall \varphi \in C_c^1,$$

Comme C_c^1 est dense dans C_c^0 , la formule precedente est vraie pour $\varphi \in C_c^0$

On applique cette formule a f_ϵ , on obtient pour tout mesurable A :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \rightarrow 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2, H_{|\partial\Omega}^{n-1}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale exterieure est la normale exterieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure" ("blow-up") est l'espace tangent usuel).

La formule d'integration par parties est bien connue. Pour sa preuve, voir les livres de Fusco (bords avec singularités par recouvrement et suite de compacts $K_n \rightarrow \partial\Omega - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de points singuliers), Necas et Azé.

La formule d'integration par parties sur un domaine singulier en un nombre fini de points en dimension 2 (par exemple) :

La formule est locale, on considère $B(x_j, 1/n)$ avec x_j un point singulier du bord. La formule est locale, par un recouvrement et une partition de l'unité on écrit que (voir le Azé, dans chaque partie du recouvrement) :

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}((1 - \alpha_n)u) dx = \int_{\partial\Omega} (1 - \alpha_n)u d\sigma,$$

avec α_n une fonction régulière et à support compact dans $B(x_j, 1/n)$, $\alpha_n \equiv 1$ dans $B(x_j, 1/2n)$. Avec le fait, $|\nabla\alpha_n| \leq Cn$ et $\mu_L(B(x_j, 1/n)) \leq C/n^2$ et $H_1(\{x_j\}) = 0$, la mesure de Hausdorff 1-dimensionnelle (ici, on l'a fait pour le point x_j). Puis on fait tendre $n \rightarrow +\infty$. On obtient la formule de Stokes ou Green-Riemann pour un domaine contenant un nombre fini de singularités au bord.

2) Pourquoi quand on a $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar{\Omega})$, $tr(u) = u$? on utilise Necas et Brezis :

On a :

Ω est un ouvert Lipschitzien \Rightarrow cartes Lipschitziennes \Rightarrow un opérateur de Prolongement $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, d'après la construction de l'opérateur de Prolongement dans des cartes, $Pu|_{\bar{\Omega}} = u$ et, $\chi_n(\rho_n * Pu) \rightarrow Pu$ dans $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $W^{1,p}$ où K est un compact de \mathbb{R}^n , donc :

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Et,

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u\|_{C^0(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Donc,

$$Tr(u) = u, \quad H_{|\partial\Omega}^{n-1} p.p,$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_{\Omega} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_{\rho}(x)} u(y) dy}{|B_{\rho}(x)|}$$

on voit que si $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $Tr(u) = u$.

3) Pourquoi $W_0^{1,1} = \{u \in W^{1,1}, tr(u) = 0\}$ avec Ω ouvert Lipschitzien. Voir le livre de Necas. On raisonne par rapport aux suites ($\exists u_i \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n)$, $u_i \rightarrow u \in W^{1,p}(\Omega)$ pour les traces et la restrictions a des sous ensembles d'ouverts Lipschitzien).

a) On considère $\tilde{u} = u \times 1_{\Omega} \in W^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ par integration par parties et formule de Stokes.

b) Par des cartes et on multipliant par une fonction test à support compact, localement $\tilde{u} \in W^{1,1}(Q)$ avec Q un n-cube "au delà" du bord et nulle avant d'atteindre les cotes du bord qui sont intérieurs.

On considère alors \tilde{u}_{λ} , "la translatée" de \tilde{u} suivant la direction normale au bord. le support de \tilde{u}_{λ} est compact et strictement à l'intérieur du domaine.

On a : (on applique ces idées à un cube infini dans la direction normale au bord image (locale) de $\partial\Omega$, puis on se restreint au n-cube de départ. Sur les bords, la restriction de l'homeomorphisme Lipschitzien envoie les traces sur les traces par la formule de l'aire ou coaire. (par convergence de suites sur des ouverts Lipschitziens).)

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q_{-\lambda})$ avec,

$$\nabla(\tilde{u}_{\lambda}) = (\nabla\tilde{u})_{\lambda}.$$

puis en utilisant des fonctions tests dans Q on obtient :

$\tilde{u}_{\lambda} \in W^{1,1}(Q)$ pour λ assez petit.

Le support de \tilde{u}_{λ} est strictement dans Q , on obtient alors, $\tilde{u}_{\lambda} \in W_0^{1,1}(Q)$.

Par un theoreme de la moyenne (voir Necas, \tilde{u} s'annule en dehors de Q), on obtient $\tilde{u}_{\lambda} \rightarrow \tilde{u}$ dans $W^{1,1}$. Donc, $\tilde{u} \in W_0^{1,1}$ et $u \in W_0^{1,1}$.

4) Soit (M, g) une variété riemannienne et soit $B_r(x)$ une boule géodésique très petite, telle que l'exponentielle réalise un difféomorphisme sur la boule de \mathbb{R}^n : pourquoi, la normale extérieure $\nu = \partial_r$?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$d(\exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i$, on identifie les 1-formes dx_i et $d\tilde{x}_i$.

Soit B^0 la base canonique de \mathbb{R}^n et \tilde{B}^0 la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ la base canonique de la boule géodésique $B_r(x)$, alors $d(\exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$.

La base $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_{n-1}}\}$ est directe, donc $\det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$.

Soit $\tilde{B}_r = \{d(\exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_1}), \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(\exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$, alors :

$\det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [det : B_r \rightarrow B_{0,r}] o [det : B_{0,r} \rightarrow B_r, \text{ qui est directe}] o [det : B_r \rightarrow \tilde{B}_{0,r}] > 0$

La première est $d(\exp_x)^{-1}$ et la dernière $d(\exp_x)$ le déterminant s'annule, il reste celui de $B_{0,r}$ vers B^0 qui est direct.

Donc la base \tilde{B}_r est directe par rapport à la base \tilde{B}^0 .

n_{ext} est défini précisément comme cela tel que $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$ est directe par rapport à \tilde{B}^0 .

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient ω_θ et Ω les formes volumes sur la sphère $S_r(x)$ et la boule $B_r(x)$ n_{ext} est tel que son dual n_{ext}^* vérifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_\theta = \Omega,$$

C'est-à-dire que à des constantes multiplicatives près (déterminant des métriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est à dire que la base $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$ est directe par rapport à la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ et donc $n_{ext} = \partial_r$.

Voir aussi le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine où la normale extérieure est définie par le produit intérieur. (Par rapport à la base du bord et l'élément de volume du bord) On a le même résultat.

Par sa construction, la boule géodésique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par rapport à la carte (Ω, φ) à partir de laquelle elle est construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact K en utilisant l'exponentielle et cette propriété d'orientabilité des boules géodésiques via l'exponentielle, il faudra supposer la variété orientable.

5) Dans la construction de la fonction de Green pour un opérateur coercif $\Delta + a$ voir le livre d'Aubin et le monographe de Frédéric Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'étape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$, car la parmetrix H_x vérifie au sens C_0^2 (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les Γ_i vérifient cette propriété, elles sont nulles au bord car leur support est dans $B(m, \delta_m/2)$ et le rayon d'injectivité $= \delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$. Puis on utilise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser G_x dans l'équation et utiliser les Théorèmes de Gilbarg-Trudinger :

$$\Delta(V_x - \eta G_x) + a(V_x - \eta G_x) = -\Delta(\eta G_x) + a(\eta G_x) \in L^p, \text{ et } (V_x - \eta G_x) = 0, \text{ sur } \partial M,$$

Avec η une fonction cutoff égale à 1 dans un voisinage de ∂M et 0 au voisinage de x (nulle au voisinage de la singularité).

On obtient $V_x - \eta G_x \in W^{2,p}(M)$ et comme $\eta G_x \in W^{2,p}(M)$, alors : $V_x \in W^{2,p}(M)$.

Remarques :

1) Dans la formulation variationnelle on pour une solution $u \in W_0^{1,2}$ de :

$$-\Delta u + au = f, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial M,$$

Dans le monographe de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions $W_0^{1,1}$), ils prouvent que ces solutions sont au sens C_0^2 (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont $W^{2,p}$ et qu'on a les estimations a priori dans $W^{2,p}$ d'Agmon (méthode des quotients différentiels) ou en sachant qu'elles sont $W^{2,p}$ qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund écrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inégalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergation par parties, par rapport a la variable $t > 0$) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu = 0, \quad u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

On peut supposer L le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuité on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenebrg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans linegalité obtenue ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien.

On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on écrit à l'ordre 1 :

Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson $P(x, t) = \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}$.

On suppose que $\varphi \in C^2 \cap W^{2,p}$. On écrit :

$$\partial_s(P(x - y, t + s)\varphi(y, s)) = \partial_s P\varphi + P\partial_s\varphi,$$

On intergre en y et s et on obtient (on utilise la representation integrale de u en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - y, t)\varphi(y, 0)dy = \int P(x - y, t+T)\varphi(y, T) + \int \int \partial_t P\varphi + \int \int P\partial_t\varphi,$$

On a $\partial_t P \equiv \frac{1}{|Q|^{n+1}}$, Q un point quelconque, et $\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = n + 1$, on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour $\partial_t u, \partial_x u$, on derive sous le signe \int et puis on integre par parties sur \mathbb{R}^n . On obtient des integrales du type,

$$\int \int \partial_t P\partial_t\varphi, \quad \int \int \partial_t P\partial_x\varphi, \quad \text{et} \quad \int \int \partial_x P\partial_t\varphi$$

On elimine $\int P(x - y, t + T)\varphi(y, T)$ par son estimation en $c(T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$.

On obtient des estimations du type :

$$\|\partial u\|_{L^p} \leq C\|\varphi\|_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on écrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

6) Sur le degré topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la définition du degré topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, deg[x - F(x, T_0)B_{R_2}, 0] = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x, t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$, cela veut dire qu'on peut utiliser l'homotopie :

$$deg[x - F(x, t), B_{R_2}, 0] = deg[x - F(x, 0), B_{R_2}, 0] = deg[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$$

$t = 0, F(x, 0) = \Phi(x)$ et par Nussbaum et la propriété d'excision et d'additivité, on peut décomposer le degre en 2, la condition est que $\Phi(x) \neq x$ sur ∂B_{R_1} et $\Phi(x) = F(x, 0) \neq 0$ sur ∂B_{R_2} , alors :

$$0 = deg[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + deg[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0],$$

La dernière condition est celle de l'homotopie avec l'identité et le degre de l'identité est 1.

$$deg[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = deg[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = deg[x, B_{R_1}, 0] = 1,$$

Donc,

$$deg[x - \Phi(x), \{R_1 < ||x|| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation integrale $\int_{\Omega} f(u(x)+t)dx \leq C, C$ independante de t et les estimations a priori pour verifier que les conditions d'applications du degré topologique sont verifiées, dans ce cas les t et les solutions sont uniformément bornés.

Concernant l'article de Crandall-Rabinowitz, il traite du cas où en particulier on a un terme nonlineaire du type exponentiel. Grace à la condition de stabilité (ils prennent des fonctions tests particulieres), ils prouvent que la masse et le volume ou energie, sont bornées (jusqu'a la dimension 10).

7) Sur les surfaces $K3$. Soit E un fiber bundle (fibré vectoriel) et M une variété Complexe de metrique h .

Remarquons d'abord que cette variété est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien réel est le carré du Jacobien complexe, cest du a l'holomorphic, comme en dimension 2 (equation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fibre bundle E , il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphic et la metrique, c'est l'analogue complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable a la connexion de Levi-Civita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une derivate covariante, on a la courbure, on derive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern, cest la classe de Ricci.

Connexion de Chern \Rightarrow symboles de Christoffels \Rightarrow Connexion form, ω , \Rightarrow Curvature form,

Dans le cas $E = \wedge^2 T^*(M)$ les 2-formes alternees :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$, car ici, ce qui joue le role de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur E (les vecteurs de base sont les 2-formes alternees), les champs de 2-formes alternees,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$, des qu'on dérive encore deuxième fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces $K3, E = \wedge^2 T^*(M) = 0, 2$ formes alternees :

Si $E = 0$, la connexion nulle convient pour la derivation sur E or la connexion de Chern est unique dou $\nabla \equiv 0$. Donc, il ny a pas de courbure do la classe de Chern est nulle, $c_1 = 0$.

Les groupes de cohomologies sont connues :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les varietes complexe, il faut prendre la dimension complexe 2 et non réelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualité de Serre, cela

va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la theorie de Hodge, on prend la dimension reelle 4, avec la convention $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \leq p, q \leq 2\}} H^{p,q}$, p, q varient selon la dimension complexe, quand on inverse p et q on a par la conjugaison complexe, la meme dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault, $H^{0,1}$ est isomorphe à la cohomologie de Cech $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, O_S)$ car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions O_S et par definition $H^1(S, O_S) = 0$ d'où $h^{0,1} = \dim H^{0,1} = \dim H^1(S, O_S) = 0$. On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau) sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe), on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la caractéristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension reelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne $X = S = K3$:

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \frac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$, avec c_1 la premiere classe de Chern et c_2 la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure Ω

$$\det(\Omega - tI) = 1 + tr(\Omega) + \Omega \wedge \dots = 1 + c_1 + c_2,$$

L'integrale $\int c_2$ est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas d'une surface $K3$, cest donc $\chi(K3) = \int c_2 = 24$.

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type $dx^j \wedge dx^k$ et c_2 est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme : $\int c_k$ avec c_k la k -ieme classe de Chern.

Comme la surface $K3$ est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possède une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec $(K3, h, \nabla)$ on a une structure hermitienne et par Siu, $K3$ est Kahler, c'est a dire que la structure Riemannienne $(K3, g = Re(h), \nabla_g)$ est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Civita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euler-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (Ricci_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface $K3$ possède une metrique non-localement conformement plate.

a) Le Projectif complexe de dimension complexe $n \geq 2$ est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possède (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Civita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Pourquoi la courbure sectionelle du projectif complexe de dimension $n \geq 2$ est non-constante : C'est ecrit dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

a) Ils utilisent l'equation des champs de Jacobi, pour determiner le tenseur de Riemann.

b) Ils utilisent la multiplication par le nombre complexe, i , la structure complexe, J . Et le fait que H_x sont les vecteurs orthogonaux a z et iz , $z \in S^{2n+1}$.

Ils utilisent la variations $H(t, s)$ et les champs de Jacobi.

La courbure sectionelle pour u, v est calculée a partir du champs de Jacobi, $Y(s) = \cos s u + \sin s Jv$:

$$K(u, v) = 1 + 3 \sin^2 s.$$

qui n'est pas constante.

b) Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique a la sphere de dimension 2 reelle et donc de courbure sectionelle constante. C'est une surface de Riemann reelle (donc localement plate).

Pourquoi, le Projectif complexe de dimension 2 est isometrique à la sphere de dimension 2. Voir le Gallot-Hulin-Lafontaine :

1-On utilise le quotient par un groupe de Lie. Comme le groupe de Lie agit proprement et transitivement et..., cela veut dire qu'il existe une structure de variété sur le quotient $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$ telle que l'application de passage au quotient soit une submersion.

2-Le fait qu'on ait une submersion, on utilise la definition, localement, on a des sous-variétés, on construit, par des cartes, une base du noyau et apres un procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt, on construit un supplémentaire orthogonal. l'application de passage au quotient est bijective sur ce supplémentaire. ce qui permet de construire localement un "lift".

3-On definit la metrique sur le quotient de telle maniere que l'application de passage au quotient soit une isometrie, on la construit a partir du lift et par projection sur H_x .

(Remarque : soit $p(x) = [x]$ l'application de passage au quotient et γ une isometrie, $x = \gamma^{-1}o\gamma(x) \Rightarrow [x] = [\gamma(x)] \Leftrightarrow p(x) = p\circ\gamma(x)$, ceci est important dans la construction de l'isometrie en prouvant que cela ne depend pas de point de la fibre).

On voit que pour le cas de \mathbb{S}^3 et $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \equiv \mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1$, que la metrique du projectif est celle de la 3-sphere pour des vecteurs particuliers v, w , par exemple orthogonaux à z et iz avec $z \in \mathbb{S}^3$. (le produit scalaire sur H_x est egal a celui pour l'espace tangent au quotient).

Par exemple si on prend $z = (1, 0) = [(1, 0), (0, 0)]$ en notation complexe, les v, w sont de la forme $v = (0, v_1), w = (0, w_1)$. Puis en utilisant l'application H du Gallot-Hulin-Lafontaine $H(u, v) = (2u\bar{v}, |u|^2 - |v|^2)$ et les chemins $u(t) = costz + sintv, w(t) = costz + sintw$, (on se ramene à ce cas par une rotation car la variété est invariante par $U(n+1)$, les rotations complexes, (elle est construite à partir de S^{2n+1}), on a :

$$\langle H(u(t))', H(v(t))' \rangle_{\mathbb{S}^2_{t=0}} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{S}^3} = \langle v, w \rangle_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Cela veut dire que,

$$H^*(g_{\mathbb{S}^2}) = g_{\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} .$$

Remarque : Les revetements riemanniens, sont similaires, au lieu d'avoir une submersion, on a un diffeomorphisme local. Voir, le Gallot-Hulin-Lafontaine, pour la construction du Tore et des projectifs reels (leur metriques).

Dans le cas des revetements, puisqu'il y a un diffeomorphisme local, la courbure sectionelle se conserve (voir le Hebey). On voit alors, dans la construction du projectif reel et le Tore, que la courbure sectionelle est constante, donc, elles sont conformement plates.

On a la meme chose avec les groupes de Lie et les espaces homogenes. On a une fibration qui est une submersion et on construit une metrique G - invariante par le meme procédé que les submersions et les revetements. De plus, si par exemple, on considere $P_n(\mathbb{C})$, les groupes unitaires (les rotations complexes) $U(n+1)$ et $SU(n+1)$ agissent transitivement et proprement sur $P_n(\mathbb{C})$ par l'intermediaire de la sphere \mathbb{S}^{2n+1} .

1- $P_n(\mathbb{C})$ est à la fois identifiable à $U(n+1)/U(1) \times U(n)$ et $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$. De plus, comme on la vu dans le cas des submersions, pour connaitre la metrique de $P_n(\mathbb{C})$, il suffit de se placer sur la sphere S^{2n+1} , car on prend H_x l'orthogonal de z et iz , avec $z \in S^{2n+1}$. Pour ce qui concerne les groupes de Lie, la formule donnant la metrique G - invariante est egale à (C designe le produit scalaire dans \mathbb{C}) :

$$\langle x|y \rangle_{[e], P_n(\mathbb{C})} = \int_{H_1} \langle Ad_{h_1}.x | Ad_{h_1}.y \rangle_C dv_{H_1}$$

Or, dans l'espace des matrices, la derivee de l'adjoint est connue et est egale, (on raisonne par rapport aux chemins et en particulier de l'exponentielle) :

$$Ad_{h_1}.x = Ad_{G/H}h_1.x = h_1^{-1}.x.h_1, \quad Ad_{h_1}.y = h_1^{-1}.y.h_1,$$

avec l'identification, $x = [x] = u, [x] \in SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ et $x = u \in H_x \subset \mathbb{C} \equiv P_n(\mathbb{C})$.

Car ici, $G/H = P_n(\mathbb{C})$ et on prend le plan tangent et dans ce cas il faut prendre des vecteurs de H_x donc de S^{2n+1} , (raisonner par rapport à l'exponentielle et les chemins). ($t \rightarrow \exp(tx)$ est un bon chemin et en plus quand on derive on a l'adjoint). (on se ramene au produit scalaire de S^{2n+1}).

$G = SU(n+1), H = G_m = S(U(1) \times U(n)).$

Remarque : La metrique sur G/H est definie de telle maniere que la correspondance : $F : [x] \in G/H \rightarrow u \in P_n(C)$ soit une isometrie. (voir le livre de Gallot-Hulin-Lafontaine, sur la correspondance via S^{2n+1} entre $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ en tant que groupe de Lie et $P_n(C)$ via S^{2n+1} . Donc, on retrouve le fait que les metriques sont proportionnelles. (Eux, ils notent $U(n+1)/U(1) \times U(n)$).

Gallot-Hulin-Lafontaine disent qu'on peut prendre "any scalar product on $T_e(G/H)$ ". Comme G/H s'identifie par F à $P_n(C)$, on choisit le produit scalaire tel que F soit une isometrie vers le projectif complexe. Ce qui revient à obtenir le produit scalaire du projectif complexe.

Finalement, on ecrit, puisque $\bar{h}_1^t h_1 = 1$ et $(\bar{h}_1^{-1})^t h_1^{-1} = 1$:

$$\begin{aligned} \langle x|y \rangle_{[e], P_n(C)} &= \int_{H_1} \langle (h_1^{-1} \cdot y \cdot h_1)^t | h_1^{-1} \cdot x \cdot h_1 \rangle_C dv_{H_1} = \\ &= \int_{H_1} \langle (h_1^{-1})^t \cdot y^t \cdot (h_1^{-1})^t | h_1^{-1} \cdot x \cdot h_1 \rangle_C dv_{H_1} = \\ &= \int_{H_1} \langle y^t | x \rangle_C dv_{H_1} = \mu \langle x|y \rangle_C, \end{aligned}$$

avec, $\mu > 0$ et $x, y \in H_x$, on reconnait le produit de deux vecteurs de S^{2n+1} qui donne le produit scalaire dans $P_n(C)$.

Ce qui a été prouvé est que la metrique G -invariante est egale à la metrique usuelle du projectif complexe.

Pour savoir directement, que le projectif complexe est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante. Utiliser le livre de Kobayashi-Nomizu, tome 2, pour avoir l'expression de la metrique ou et le livre d'Aubin, pour avoir l'expression du tenseur de Ricci, et par les calculs, directement, on prouve qu'il est d'Einstein. Pour la courbure sectionelle, voir aussi dans, le livre de Kobayashi-Nomizu, K, K_0 , dans le chapitre Complex manifolds. Avec la metrique tirée du livre de Kobayashi-Nomizu, la courbure sectionelle holomorphe est constante, ce qui induit que la courbure sectionelle Riemannienne est de la forme :

$$K(X, Y) = (1 + 3(\cos a)^2)/4, \quad a, \text{ l'angle de } g(X, JY).$$

Ici, par la fomulation de Gallot-Hulin-Lafontaine avec la phrase "any scalar product", on transporte la metrique du projectif, pour avoir une structure d'espace homogene, une structure de plus sur le projectif complexe par l'isometrie (par definition et choix) de $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.

(On a une isometrie F entre la variété homogene $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ et $P_n(C)$, la courbure de la variété homogene est alors *RiccioF* (voir le Hebey), elle constante).

En tant que submersion :

Pour voir que la metrique de $P_n(C)$ est celle de S^{2n+1}/S^1 , du Gallot-Hulin-Lafontaine, on ecrit que la metrique ds du Kobayashi-Nomizu est a la fois invariante par "rotation", on se place alors dans la carte de $z = (1, 0, \dots, 0)$ avec la carte $(t_i) = (z_i/z_0)_{(1 \leq i \leq n)}$, on ecrit alors ds en coordonnées z_i et la metrique en z est euclidienne sur les vecteurs de $\mathbb{C}^n = H_x$, or la metrique de S^{2n+1}/S^1 dans H_x est la metrique de S^{2n+1} qui est la metrique euclidienne de $\mathbb{C}^n = H_x$. Donc la metrique ds , dite de Fubini-Study dans le Kobayashi-Nomizu est la metrique dite de Fubini-Study dans le Gallot-Hulin-Lafontaine.

Remarque sur les espaces homogènes : Tout ce travail sur les groupes de Lie, sert en fait pour les ensembles de matrices. Cette Théorie est construite pour les groupes matriciels, $SU(n+1), SO(n)$... (pour ces cas particuliers, les variétés sont de dimensions finies).

(Remarque sur les actions de groupes : le fait d'ecrire \cdot , le point, dans l'action de groupe, c'est une notation, pour dire que le groupe agit sur cet ensemble, comme c'est ecrit dans le debut du chapitre sur les groupes de Lie dans le Dieudonné, c'est une notation d'ecrire la derivation, $s \cdot k_x$ dans l'espace tangent $T_e(G)$, pour ecire la composition de la derivation, $\partial\psi/\partial\xi_j(s, \xi_1, \dots, \xi_n)k_j$. On voit bien par la formule de derivation de la composition, on a $s \cdot (t \cdot k_x)$ remplace $\partial_{\rho_i}(s, \rho)\partial_{\xi_j}^i(t, \dots)$

(Cette notation, (d'action de groupe, \cdot , le point), permet d'expliquer pourquoi l'espace tangent $T_e(G/H)$ s'identifie à $T_e(G)/T_e(H) = G_-/H_-$. Car en prenant des chemins, $c : t \rightarrow [g(t)]$ dans G/H et en les derivant cela revient à prendre l'action de la classe dans le quotient :

$\frac{dc(t)}{dt} = \left\{ \frac{d(g(t) \cdot h)}{dt} \cdot h, h \in H \right\} = \{g' \cdot h, h \in H\} = [g'] \cdot T_e(H) = \text{classe de } g', \text{ car on derive un chemin suivant } H \text{ donc dans l'espace tangent à } H.$

Le paragraphe suivant, traite du cas du projectif complexe et l'exercice proposé dans le Gallot-Hulin-Lafontaine, on a vu comment la submersion construite permet d'identifier $P_n(C)$ et S^{2n+1}/S^1 , on regarde aussi comment le projectif est vu comme un espace homogene en comparant S^{2n+1}/S^1 et $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$:

(***) Voir l'exercice sur le projectif complexe dans le Gallot-Hulin-Lafontaine, ici, aussi, on utilise les chemins dans la determination des espaces tangents en $e = I_n$ ou algebre de Lie, on derive par exemple $(I_n + H)(I_n + H^t) = I_n$ en prenant $dH/dt|_{t=0} = A$, pour $U(n)$, on voit alors que A est antihermitienne. Pour $SU(n)$, on derive le determinant en I_n on a de plus $Tr(A) = 0$ et l'application adjointe est l'application adjointe reellement, quand on calcule $h x h^{-1}$ avec $x =$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\bar{v} \\ v & 0 \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}; h^{-1} = \bar{h}^t = \begin{pmatrix} \bar{\lambda} & 0 \\ 0 & \bar{A} \end{pmatrix}$$

$$h x h^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\lambda A \bar{v} \\ \bar{\lambda} A v & 0 \end{pmatrix},$$

De plus pour voir que $x \in T_e(G)/T_e(H) = G_-/H_-$ est de la forme precedente, on a $T_e(G)$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes de trace nulles et $H = S(U(1) \times U(n))$, $T_e(H)$ est l'ensemble des matrices antihermitiennes, comme on quotient par $T_e(H)$ on elimine les termes centraux et x a la forme precedente. On voit alors que la condition d'irreductibilité isotope est vraie ici, la definition est : $\forall \lambda, \forall A, \forall w \in W, \bar{\lambda} A w \in W \Rightarrow W = \{0\}$ ou $W = G_-/H_-$. Et aussi, pour le produit scalaire dans \mathbb{C}^n des matrices est invariant par l'adjoint, $h x h^{-1}$, le produit scalaire choisit fait reference à la phrase du Gallot-Hulin-Lafontaine "any scalar product", ici c'est le plus simple, celui des matrices. En outre, ici, si on considere la matrice de la courbure de Ricci, Ricci c'est une matrice symetrique donc diagonalisable. Ici, pour le cas du projectif complexe, on prend le produit scalaire $(M_1 \cdot M_2)$ avec M_1, M_2 deux matrices de la forme $h x h^{-1}$ avec h, x, y trois matrices comme ci-dessus, cela revient à avoir le produit scalaire usuel $\langle \bar{\lambda} \lambda \bar{v}^t \bar{A}^t A w \rangle_{\mathbb{C}} = \langle v | w \rangle$, car $A \in U(n)$ et $\lambda \in U(1), |\lambda| = 1$.

On regarde alors si l'application \tilde{F} du livre de Gallot-Hulin-Lafontaine est une isometrie avec les bons produits scalaire (ce qu'on a dit au debut de ce point avec $[x] \in G/H = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ et $u \in P_n(C) = S^{2n+1}/S^1$) :

Soit \tilde{F} , l'application du livre de Gallot-Hulin-Lafontaine; $[x] \rightarrow \tilde{[x.m]} = q(x.m), [x] \in G/H = SU(n+1)/S(U(1) \times U(n)), \tilde{[x.m]} \in S^{2n+1}/S^1$ et $q : y \rightarrow \tilde{[y]}$, l'application du passage au quotient de $S^{2n+1} \rightarrow S^{2n+1}/S^1$. \tilde{F} est un diffeomorphisme. On prend alors $m = z = (1, 0, \dots, 0)$ et on se place dans la carte de m , $(t_k) = (z_k/z_0)$, voir le Gallot-Hulin-Lafontaine dans la construction de la metrique de Fubini-Study de S^{2n+1}/S^1 .

Alors $T_m(S^{2n+1}) = \{(i\eta, \xi^1, \dots, \xi^n), \eta \in \mathbb{R}, \xi^j \in \mathbb{C}, 1 \leq j \leq n\}$. Si on prend $t \rightarrow x(t)$ un chemin dans $SU(n+1)$ alors $x'(t) = dx/dt \in T_e(SU(n+1))$ est une matrice antisymetrique de trace nulle et $(dx/dt) \cdot m = (0, v_1, v_2, \dots, v_n) = (0, v)$ est orthogonal a m et $i.m$, et donc, $(dx/dt) \cdot m \in H_m$, le sous espace vectoriel qui permet de definir le produit scalaire dans S^{2n+1}/S^1 , de meme pour $(dy/dt) \cdot m = (0, w_1, \dots, w_n) = (0, w) \in H_m$. (Ne pas confondre H_m l'espace vectoriel ici dans la definition de la metrique de Fubini-Study et H_m l'espace isotope dans la definition de $G/H = G/G_m$). (On peut prendre x tel que $dx/dt = x$ avec des termes centraux nuls, comme ci-dessus).

Comme par definition q est une isometrie sur H_m , on a :

$$\begin{aligned} \langle (dx/dt) \cdot m | (dy/dt) \cdot m \rangle &= \langle dq[(dx/dt) \cdot m] | dq[(dy/dt) \cdot m] \rangle = \\ &= \langle (d/dt)[q(x.m)] | (d/dt)[q(y.m)] \rangle = \langle (d/dt)[\tilde{F}(x)] | (d/dt)[\tilde{F}(y)] \rangle = \\ &= \langle d\tilde{F}(dx/dt) | d\tilde{F}(dy/dt) \rangle, \end{aligned}$$

donc, \tilde{F} est une isometrie, ce qui permet de transporter la metrique de Fubini-Study.

De plus, le produit scalaire :

$$\langle (dx/dt) \cdot m | (dy/dt) \cdot m \rangle = \langle (dx/dt) \cdot m | (dy/dt) \cdot m \rangle_{H_m} = \langle v | w \rangle_{\mathbb{C}} =$$

$$= [(dx/dt) \cdot (dy/dt)] = \langle (dx/dt)|(dy/dt) \rangle,$$

est le produit scalaire sur les matrices et coincide avec $(M_1 \cdot M_2)$ de ce qu'on a dit precedemment et avec le produit scalaire dans $\mathbb{C}^n = H_m$, de la metrique de Fubini-Study, si on prend par exemple $dx/dt = x$ avec des termes contraux nuls. Le produit scalaire choisit sur l'espace homogene (de matrices) induit que, \tilde{F} , une isometrie sur S^{2n+1}/S^1 . C'est ce qu'on disait au debut de cette section sur les espaces homogenes, de maniere theorique, on choisit le produit scalaire de sorte que \tilde{F} soit une isometrie et donc on transporte la metrique. Ici, pour le cas du projectif complexe, le produit scalaire qu'on pris, fait de \tilde{F} une isometrie.***)

Concernant la courbure de Ricci et le fait qu'on a le projectif comme espace homogene d'Einstein, sans les calculs :

On a parle de la notation . d'action de de groupe, comme le groupe de Lie agit par isometries, dans la derivation on obtient des termes du type, dans le tenseur de courbure :

$$R(h'.X, h'.Y, h'.Z, h'.T) = R(X, Y, Z, T)$$

en composant à droite par l'inverse, on obtient l'application adjointe :

$$R(h'.X.h'^{-1}, h'.Y.h'^{-1}, h'.Z.h'^{-1}, h'.T.h'^{-1}) = R(X, Y, Z, T)$$

ce qui veut dire que le tenseur de courbure est invariant par l'application adjointe $h.x.h^{-1}$, donc la courbure de Ricci aussi et par invariance des sous-espaces propres, on a $R = cg$ d'Einstein. Ceci est dit dans le livre de Besse, dans le cas des metriques G - invariantes, lorsque H, G agissent par isometries. Pour le cas particulier du projectif complexe, on savait par les calculs que c'est une variété d'Einstein, et par l'identification isometrique du Gallot-Hulin-Lafontaine, à $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$, c'est une variété ou espace homogène, une propriété supplémentaire du projectif complexe d'être un espace homogene et d'Einstein.)

Le fait que la metrique soit invariante par l'adjoint, fait qu'elle invariante à droite et à gauche. C'est construit pour qu'elle soit bi-invariante. Ce qui induit des propriétés sur la courbure, car on a des isometries à droites et à gauche. C'est construit pour.

a) Les actions a droites et a gauches sont des isometries, soit s la metrique et $L_g : x \rightarrow g.x : L_g^*(s) = s \Rightarrow L_g^*(R) = R$ voir le livre de Hebey pour l'expression de la courbure quand on a une isometrie Riemannienne. On obtient l'expression ci-dessus.

b) Ici pour le cas particulier du projectif, on a des matrices, l'application $h \rightarrow hx$ avec h une matrice et x un vecteur, est lineaire, donc sa derivee est elle meme, d'où le fait que ce qu'on a ecrit ci-dessus, $h' = h$.

l'application : $x(t) \rightarrow h.x(t)$, sa derivee est $h.x'(t) = h.x$ avec x un vecteur.

Ce qui fait qu'ici pour le projectif complexe, on a $h'.X.h'^{-1} = hxh^{-1}$ avec le fait que pour la courbure de Ricci, $Ricci(hxh^{-1}, hyh^{-1}) = Ricci(x, y) \forall h$, l'invariance de la courbure de Ricci par l'adjoint.

C'est une formule générale qu'on applique au cas particulier du projectif complexe et des matrices. $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$.

(On a, soit x un vecteur propre de R pour le valeur propre λ , $R(x) = \lambda x$, on ecrit :

$$\begin{aligned} R(h.x.h^{-1}, h.y.h^{-1}) &= R(x, y) = \langle y^t | Rx \rangle = \lambda \langle y^t | x \rangle = \lambda \langle (h.y.h^{-1})^t | h.x.h^{-1} \rangle = \\ &= \langle (h.y.h^{-1})^t | R(h.x.h^{-1}) \rangle, \forall h, \forall y \\ &\Rightarrow R(h.x.h^{-1}) = \lambda(h.x.h^{-1}). \end{aligned}$$

Donc, si on note F_λ le sous-espace propre de R de valeur propre λ , alors $Ad(h)(F_\lambda) \subset F_\lambda, \forall h$, il vérifie la propriété d'invariance. d'où la conclusion.)

Donc, le projectif complexe vu du point de vue $SU(n+1)/S(U(1) \times U(n))$ comme espace homogène et d'Einstein de constante s_0 . Pour connaitre le signe de s_0 , on utilise le Théorème du livre de Besse qui dit que si $s_0 < 0$, il ne serait pas compact, ce qui n'est pas possible. Si $s_0 = 0$, il serait plat et donc Einstein et Conformement plat, par le résultat du livre de Hebey, il serait de courbure sectionnelle constante, ce n'est pas possible. Donc, $s_0 > 0$.

Donc :

1-les revêtements Riemanniens dans la construction des métriques de courbures sectionnelles constantes, comme les projectifs réels, le Tore, les variétés Hyperboliques.

2-les submersions riemanniennes, dans la construction des projectifs complexes.

3-les fibrations, et groupes de Lie, dans la constructions, des variétés homogènes, puis par exemples, on compare, les métriques, comme pour le projectif complexe, qui est d'Einstein de constante $s_0 > 0$. (La fibration est construite de telle manière qu'on a une structure de variété lisse pour la variété quotient. La fibration sert dans la construction de la métrique, les sections.).

(Par exemple, pour les revêtements, il est aisé d'avoir une structure de variété lisse sur le quotient. Un peu moins pour les submersions et les fibrations. De plus, dans la construction des métriques du quotient on s'assure que ça ne dépend pas du point de la fibre).

4-On a les variétés de courbures sectionnelles constantes, qui sont localement conformément plates. Le produit d'un cercle et d'une variété de courbure sectionnelle constante, est plate.

5-Les sommes connexes, de variétés conformément plates, peuvent être plates.

6-Les sommes connexes, par le théorème de D. Joyce, peuvent avoir une partie plate et une partie non plate et de courbure scalaire -1 .

7-Pour construire une variété nonlocalement conformément plate, on construit des produits. On l'a fait à partir des surfaces réelles de dimension 2. Et en considérant des produits dont un n'est pas plat.

8-Les surfaces $K3$. La variété de W. Goldman en dimension 3 sur la quelle on peut mettre n'importe quelle métrique, elle sera non plate.

8) La formule d'intégration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problèmes variationnels de degré 2, il est possible de résoudre par la formulation variationnelle un problème elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une variété non orientable.

Par contre quand il s'agit de fonction de Green, sur une variété compacte, il est impératif de supposer la variété orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'intégration par parties en dehors de petites boules, on se ramène à une variété à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

9) Pour les variétés de dimension 3. On considère un Torus bundle M_φ d'application φ (voir le Hatcher pour la définition, φ est la monodromy map), il est orientable si et seulement si $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$. William Goldman prouve qu'il existe un Torus bundle orientable ne possédant pas de structure conformément plate, φ non périodique, (de valeurs propres réelles) (par exemple, $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) il n'y a pas de métrique localement conformément plate, comme une variété lisse possède toujours une métrique Riemannienne g , elle est dans ce cas non localement conformément plate, $Weyl_g \neq 0$. Ce théorème dit qu'il n'existe pas de métrique localement conformément plate sur cette variété.

1-Une structure est conformément plate s'il existe une métrique conforme à la métrique euclidienne. Cette définition est équivalente à celle qui dit qu'une structure conformément plate s'il existe un atlas dont les changements de cartes sont des applications de Möbius (composée de translation, rotation et inversion). Cette équivalence est démontrée dans l'article de Kuiper (1949).

2-Cela veut dire que si on veut savoir si une variété a une structure conformément plate, il suffit d'étudier les transformations conformes, donc le groupe conforme. C'est l'idée de William Goldman, il caractérise le groupe fondamental et le groupe de transformations conforme des variétés conformément plates (il y a une relation entre le groupe fondamental et le groupe des transformations conformes). Si cette condition n'est pas satisfaite alors, la variété n'a pas de structure conformément plate. (le groupe fondamentale doit être polycyclique...).

10) Voir aussi, dans le livre d'Aubin ou la caractérisation de Kuiper de la structure conforme par une isométrie, sert à prouver le Théorème de la masse positive dans le cas conformément plat. En effet :

a) Quand on a une variété complète, conformément plate et simplement connexe, elle est conformément isométrique à une partie de la sphère dont on connaît la masse $m_0 = 0$, par la formule donnée dans le livre d'Aubin, $\alpha_0(P) = k \times \alpha_{\mathbb{R}^n}(P) = k \times 0 = 0$.

b) On considere une variété M compacte, conformemnt plate. Alors le revetement universel \tilde{M} , verifie les conditions du point a) precedent. Donc la masse est nulle.

c) Si de plus M n'est pas conformément diffeomorphe à la sphere, le revetement universel contient plus de deux feuilletts.(Par Kuiper une variété compacte connexe, conformément plate plate et simplement connexe, est diffeomorphe à la sphere. Donc, ici, elle ne peut pas etre simplement connexe). Ce qui fait que l'ensemble noté $W = \Pi^{-1}(\Pi(P))$ dans le livre d'Aubin n'est pas reduit à $\{P\}$. Par la construction de la fonction de Green minimale (notée \tilde{G}_P de \tilde{M}) et le principe du maximum, il existe une fonction \tilde{H} , qu'on peut prendre ici pour $G_{P \circ \Pi}$, ($\tilde{g} = \Pi^*(g)$ qui est conforme a $\bar{g} = \Phi^*(g_0)$ donc de la forme $u^{-1}H \circ \Phi \dots$), telle que on ait $\tilde{H} > \tilde{G}_P$ en P . Or $\tilde{M} = \Pi^*(M)$ et donc la fonction de Green de M , verifie au moins l'inégalité. $\alpha_P(G_{P \circ \Pi}) > \tilde{\alpha}_P = 0$, car pour le revetement universel, d'apres le point a), la masse est nulle (et la distance se conserve localement, car on a un revetement donc une isometrie locale). Ainsi la masse de M en P , $\alpha_P(G_P) > 0$, dans le cas où M n'est pas conformément diffeomorphe à la sphere.

Remarques : Sur la partie de la preuve du livre de Aubin (communication de M.Vaugon) concernant l'effet du changement conforme sur la masse α . On $\tilde{g} = \varphi^{4/(n-2)}g$ avec \tilde{g} et g des metriques conformément plates \tilde{d} et d . on se ramene au cas où le facteur conforme est constant. La variété est localement conformément plate. Donc la masse m ne depend pas des coordonnées (Bartnik). Comme :

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}(P) &= m(\tilde{G}_P^{4/(n-2)}\tilde{g}) = \\ &= m(G_P \frac{g}{\varphi(P)^{4/(n-2)}}) = m(G_{P,\lambda}^{4/(n-2)}g^\lambda) = \alpha(P)/(\varphi(P)^2). \end{aligned}$$

Car le raisonnement dans le livre d'Aubin reste vrai so considere une metrique conforme du type $g^\lambda = \lambda^{4/(n-2)}g$ avec λ un constante > 0 . Ici, $\lambda = \varphi(P)$ et $G_{P,\lambda} = G_P/\lambda^2$.

Pour le Theoreme de la masse positive de Schoen-Yau en dimension 3, ils prouvent qu'il exsiste une surface minimale complete ayant une propriété (integrale de la courbure de Gauss positive) alors que par les calculs cette inetgrale est negative ou nulle. Pour cela ils utilisent le theoreme d'exsistence de surfaces minimales et leur proprietes (Formule de Gauss-Bonnet et Travail de Huber, inegalites isoperimetriques classiques et de Huber, la metrique est voisine de la metrique euclidienne ce qui fait qu'on peut approcher ces deux notions (inegalites isoperimetrique classique)). En particulier, ils prouvent qu'elle est complete dans la premiere etape.(les fermés bornés sont compacts.

La positivité de la courbure scalaire implique que la surface minimale construite a son integrales de Gauss Positive. Et puisque la metrique est "presque" euclidienne, il y a conservation de l'inegalité isoperimetrique et par la formule de Gauss-Bonnet, elle serait negative ou nulle. Ce qui n'st pas possible.

Il s'agit de construire une metrique conforme avec une proprieté de la courbure scalaire.

Il s'agit de construire une surface minimale ayant une propriété qui decoule de la courbure scalaire.

Cette surface minimale complete n'exsiste pas , car cette propriété n'est pas vraie, par le fait que la metrique est "presque" plate et que l'inegalité isoperimetrique euclidienne se conserve et la fromule de Gauss-Bonnet.

Remarques :

a) Ils prouvent que la masse $m \geq 0$, par l'absurde :

1-La masse < 0 intervient dans la construction de la surface minimale complete. (raisonnement par l'absurde). (Ils prouvent qu'elle complete dans cette etape, car, en dehors des bouts, elle est dans un compact, et dans les bouts elle est entre deux plans et la metrique est equivalente à la metrique euclidienne.(les fermés bornés sont compacts)).

2-Une surface est dite de type fini, si $\int |K| < +\infty$: c'est le cas ds la demonstration de la masse positive de Schoen Yau.

3-Quand on a une surface de type fini, si $\chi(S') > 0$ (la caracteristique d'Euler-Poicaré > 0 , ce qui est le cas ici par Cohn-Vossen), alors S' est diffeomeorphe au plan. C'est ecrit dans Hulin-Troyanov(1992), premier theoreme, qui dit que, S' est diffeomorphe à une variété compacte S sans bord, sans un nombre fini de points. De plus il y a une formule de Gauss Bonnet, on a alors

S' est la sphere moins un au plus un point d'apres cette formule de Gauss-Bonnet. Donc, c'est le plan. Il s'agit d'un diffeomorphisme entre S' et le plan.

On a d'abord une isometrie i , puis une application conforme, F_1 . la courbure de Gauss "se conserve". D'abord $K_{i(S')} = K_{oi}$, puis par l'application conforme on a un facteur $|F_1'|^2$, qui s'elimine dans le changement de variable. $\int K = \int K_{F_1oi} = \int K_{oi} |F_1'|^2$, cette derniere inetgrale est la courbure de Gauss de $F_1oi(S')$. Puis on applique le result d'Huber. (On considere $i(S')$ au lieu de S' , car on a une isometrie et la courbure de Gauss "se conserve", $\int_{S'} K = \int_{i(S')} K_{oi}$ et $(F_1^{-1})^*(g_{i(S')}) = |F_1^{-1}|^2 g_{\mathbb{C}}$, car F_1 est conforme, la metrique se transporte suivant un facteur de la metrique de \mathbb{C} , on a des coordonnees isothermes globales, on peut appliquer ce que fait Huber (1957)).

(Pour obtenir l'application conforme, on raisonne par rapport au revetement universel et la caracteristique d'Euler-Poincaré).

4-Dans un article de Huber, il prouve que sur une surface ouverte, la formule de "Gauss-Bonnet", pour une suite de domaines :

$$\int K = 2\pi - \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} L_\sigma^2 / 2A_\sigma.$$

5-La consturction de la surface est en fait une construction d'un courant (surface avec singularité, par une minimisation d'une fonctionnelle relativement á une metrique), puis, voir le livre de Federer, la surface est reguliere en dehors du bord. $\partial(N \cap S) = (\partial N \cap S) \cup (\partial S \cap N)$, par la formule de Stokes, S est loin du bord, car la courbure moyenne est positive (c'est une hypothese).

(Voir aussi , le livre de Sa Earp-Tubiana, sur le theoreme de Poincaré-Koebe et la calssification par le revetement universel).

Un theoreme d'uniformisation de Poincaré-Koebe, dit que une surface non compacte simplement connexe est conforme au disque unité ou au plan. (voir l'article de Hulin-Troyanov(1992)).

b) Ils prouvent que si la masse est nulle, $m = 0$, alors l'espace est isometrique à \mathbb{R}^3 . la preuve de ce point est assez claire dans l'article de Schoen-Yau, ils se ramenant au cas de masse < 0 et de courbure scalaire ≥ 0 par des changement de metriques conformes...., ce n'est pas possible, ou bien la courbure sclaire et de Ricci seraient nulles comme on est en dimension 3 $Weyl \equiv 0$, donc c'est la cas plat. Puis il faut utiliser l'argument sur le volume de Bishop : $Ricci \geq 0$ (ici, $Ricci \equiv 0$), la fonction $f : r \rightarrow Vol_g(B_g(r)) / Vol_\delta(B_\delta(r))$ est decroissante sur la variété complete de depart M , et tend vers 1 quand $r \rightarrow 0$ et $r \rightarrow +\infty$ (par l'hypothese que la variété est asymptotiquement plate, la metrique tend vers la metrique euclidienne quand $r \rightarrow +\infty$), f est constante egale à 1 et le theoreme de comparaison de Bishop dit dans ce que que M est isometrique a (\mathbb{R}^3, δ) .

Ceci s'applique a une variété compacte sans bord :

En effet, soit M cette variété compacte sans bord. $P \in M$, en se palcant au voisinage de P et si considere les coordonnees geodesiques polaires alors la metrique est du type $g_{ij} = \delta_{ij} + (termes)r^2 + \dots$, si on fait le changement de variable $r = 1/\rho$, alors :

1-on exclut le point P et la variété devient asymptotique, car pour $r = 0$ (en P), ce n'est pas bien definit.

2- $M - \{P\}$ ressemble a \mathbb{R}^n .

3-on sait que les boules geodesiques sont de courbure moyenne < 0 concave, voir la preuve dans un des livres sur la conjecture de Poincaré (Chow and al, par exemple). Mais le changement de variable $r = 1/\rho$ inverse le signe. Ces boules $B_P(r) - \{P\}$ sont les bouts du cas general de la masse positive les N_k qui sont convexes. Cette hypothese de courbure moyenne positives de la variété $N = B_P(r_0) - \{P\}$ est verifiee dans le cas compact sans bord en se placant en un point P et changeant de variable.

4-C'est ecrit dans le livre d'Aubin, que la masse $m = cte \times A = 4(n-1)A$ avec A la partie reguliere de la fonction de Green. Donc elle est positive si $m > 0$.

5-Reste a voir ce qu'est la métrique g comme c dit dans le livre de Aubin, ils considerent $G_P^{4/(n-2)} \times g \equiv r^{-4}g$ avec G_P la fonction de Green, et le changement de variable $\rho = 1/r$ ou $r = 1/\rho$ on a le comportement asymptotique, une variété asymptotique d'ordre 2 en coordonnées geodesiques polaires.

(Dans le changement de variable $\rho = 1/r$, on écrit, $\partial_\rho = -\frac{1}{r^2}\partial_r$, puisque c'est un changement de variable, on calcule alors $g_{\rho\rho}$, de meme que pour $g_{\rho\theta}$ et finalement $g_{\theta\theta}$ qui se conserve, puisqu'il n'y a pas changement angulaire).

Donc, on voit que le cas compact sans bord se deduit du cas general. (Au voisinage du point P on est dans les bouts, mais ces voisinages sont des boules geodesiques dont on connait la courbure moyenne < 0 , et avec le changement de variables, pour avoir des coordonnees asymptotiques, ces boules deviennent de la variété N avec le bon signe sur la courbure moyenne > 0).

On a : $N = B_P(r_0) - \{P\}$, $N_k = B_P(r) - \{P\} = B_P(1/\rho) - \{P\}$ et $\partial N_k = S_P(r) = S_P(1/\rho)$ avec orientation inversée.

Remarque : Sur la courbure moyenne de la sphere de rayon r , $S_P(r)$. On écrit B est la seconde forme fondamentale :

$$H = \text{trace}(B)$$

Mais,

$$B(e_i, e_j) = \langle \nabla_{e_i}(e_j) | N \rangle,$$

avec e_i, e_j les elements de la base de l'espace tangent a la sphere et N la normale a la sphere.

On prend alors $e_i, e_j \in \{\partial_\theta\}$ et on utilise la dérivée covariante et le produit scalaire $\langle e_i, N \rangle = 0$, en permutant la dérivée covariante, jusqu'à obtenir :

$$\begin{aligned} \text{trace}(B) &= \text{trace}[\nabla_N(\langle \partial_\theta | \partial_\theta \rangle)] = \nabla_r(\langle \partial_\theta | \partial_\theta \rangle) = \\ &= \frac{1}{r^2} \times r \times g^{\theta_i \theta_j} g_{\theta_i \theta_j} + \dots = \frac{n-1}{r} + \dots \end{aligned}$$

Donc (avec l'orientation positive),

$$H = \frac{n-1}{r} + \dots$$

(Aussi, en permutant la derivation covariante dans $\langle e_i | N \rangle = 0$, on retrouve l'expression de la courbure moyenne (positive) écrite dans l'article de Schoen-Yau, $\text{div}(N) > 0$).

11) Concernant les sommes connexes, $M \sharp N$ de deux variétés M, N , elles sont définies a partir d'une relation d'équivalence qui donne une variété quotient Topologique, c'est à dire C^0 , à l'ordre 0 il n'y a pas de problème, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais dès qu'on cherche une structure différentiable ou C^k , $k \geq 1$, c'est plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de manière lisse.

Remarquons que en dehors de la sphere ou se fait le recollement, la variété est égale à M ou N .

Lorsque on met une metrique sur M et N alors par des fonctions cutoff on peut mettre une metrique, par recollement, sur $M \sharp N$ et elle coincide avec celles de M et N en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$ et $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$, on a deux injections naturelles i_1, i_2 et on doit faire le recollement entre $Id_{B(p, 2\epsilon)}$ et $i_2 \circ i_1^{-1}$. On definit une relation dequivalence en partant de couronnes $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$, $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$ vers les varietes M et N . On choisit une carte pour N renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient i_2 .

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes, $i_2 \circ i_1^{-1}$ est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de M a celui de N de maniere lisse. (Les changements de cartes sont lisses de M, N et $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$, par $i_2 \circ i_1^{-1}$.)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de M et N , alors $M \sharp N$ est orientable.

On a : $X = M \setminus B(p, \epsilon) \cup N \setminus B'(q, \epsilon)$ est compact, le graphe de la relation $Gr = \{(x, x), x\} \cup \{(x, i_2 \circ i_1^{-1}(x)), x\}$ est fermé, donc, $X \setminus \sim$ est séparé. Soit $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon)$, et π l'application de passage au quotient. Alors $\pi(O)$ est un ouvert de $X \setminus \sim$ car $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$.

Soit : Φ l'application de recollement de cartes, definit precedemment sur $\pi(O)$, alors Φ est bien definit et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de \mathbb{R}^n , par le theoreme

d'invariance du domaine de Brower (car i_2 et i_1 se recollent au bord qui est une sphere, par definition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changement de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x), \quad x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon), \quad \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2}, \quad x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon),$$

avec $[x] = \pi(x)$, l'application de passage au quotient. i_2 inverse l'orientation de N . Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de determinant positifs, de plus, sur la sphere, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a i_1 avec la bonne orientation et sur le deuxieme bout on a i_2 qui inverse l'orientation, et sur la sphere $|i_2| = 1$).

On voit que $\Phi \circ \pi$ est continue par definition et donc Φ est continue.

On a bien, $(\Phi, \pi(O))$ une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme M et N sont orientables, $M \sharp N$ est orientable.

Avec $(\Phi, \pi(O))$ on a une carte de recollement, et,

$$\Phi \circ [i_1]^{-1} = \Phi \circ [i_1^{-1}] = Id_{B(p, 2\epsilon) \setminus \bar{B}(p, \epsilon)},$$

$$\Phi \circ [i_2/|i_2|^2]^{-1} = \Phi \circ [(i_2/|i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q, 2\epsilon) \setminus \bar{B}'(q, \epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considerant les metriques g_M, g_N et $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$, par des fonctions cutoff, on a par recollement, une metrique sur $M \sharp N$:

$$g_{M \sharp N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considere un observateur a de M tel que le repere (a, T) est direct avec T une orientation du bord. on deplace par une rotation, ou selon un chemin circulaire, vers un observateur b de N alors le repere (b, T') est direct si et seulement si $T' = -T$.

D'autre part, on voit que dans la carte de recollement, on a composé avec une inversion. Si M et N ont des structures localement conformément plates, par Kuiper, il existe pour chaque variété un atlas dont les changement de cartes sont des applications de Mobius. En utilisant la carte de recollement, on obtient un atlas sur $M \sharp N$ formé d'applications de Mobius. Donc, sur la somme sonnexee on a une structure lcoalement conformément plate. (ceci est dit dans la papier de Kulkarni).

12) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grace aux fonctions de Morse. Par recurrence sur le nombre de point critiques.

1- On verifie que sous certaines hypotheses d'orientabilité des bords et quand on a deux homeomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homeomorphismes entre les recollés.

2- On utilise une recurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note g_1, g_2 les applications de recollement, dans le Gramain, $g_1 = f, g_2 = f'$. Ici, dans le cas des recollements, on prend, $g_1 = id$ et $g_2 = id$, les recollés sont les ensembles de depart (en fait ils sont diffeomorphes aux ensembles de depart et $f_* = id, f'_* = id$, on a inversion des orientations quand on recolle, et, $h_* = id, h'_* = id$, h et h' conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles A et A' , sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse C^∞ , donc ce sont des variétés compactes C^∞ , il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se placant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.

Pour l'orientabilité des bords, A et A' sont (homéomorphes implique diffeomorphes en dimension 1) diffeomorphes á des cerles et, á droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le diffeomrphisme conserve l'inversion d'orientation, son Jacobien est positif. D'où, l'application k_0 conserve l'orientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un diffeomorphisme global h et h' , par contre il y a une definition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orientation pour k_0).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant $p \leq q - 1$ point critiques avec un maximum et un minimum et $p - 2$ points critiques d'indice 1 est homeomorphe à \mathbb{T}_p . On peut commencer la recurrence pour $p = 0$, la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homeomorphes a des demi-disques et par recollement on a une sphere. A l'ordre $p = 1$, pour le Tore, c'est ecrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-memes sont obtenues par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore . Ou bien si on commence la recurrence a partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homeomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-memes obtenus par recollement d'ensembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas (2) vers le haut (1)) avec l'application de recollement $g_1 = id, g_2 = id$, et on obtient le Tore, g_2 est la deuxieme application de recollement). Dans le cas general, on sait qu'il existe une fonction de Morse u , on decompose en deux, la partie de u ayant $p - 1$ points critiques, on lui recolle un disque et par recurrence, elle homeomorphe à \mathbb{T}_{q-1} et le reste possede 4 point critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par recurrence, homeomorphe au Tore , \mathbb{T}_1 . Donc, comme c'est ecrit dans le Gramain, en revenant à u , il y a une partie homeomorphe à V_{p-1} et l'autre à V_1 et sur V_1 on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc , on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite, $Y - g_1(A)$ et $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$, B un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considerant la composée des deux homeomorphismes (c'est l'homeomorphisme $k_0 = h'og_1og_2^{-1}oh^{-1}$ du Gramain). Il reste a voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a homeomorphismes entre les recollements, $S = (S - A)\#(S' - B) = (X - A)\#(Y - g_1(A)) = (X - A) \cup (Y - A)$, $g_1 = id$, et $V_{p-1}\#V_1$, ce qui est fait dans le cas orientable (A homemorphe au cercle dans le Gramain).

On ecrit $(X - A) \cup (Y - A)$ pour dire qu'on recolle X et Y via A . Les applications du Gramain, $f = g_1 = id, f' = g_2 = id$ et le recollé (pour la relation d'equivalence, $x \equiv f(x) = x, x \in A$, $f_* = -id, f'_* = -id$, est diffeomorphes a l'ensemble de depart. On a $f_* = -id$ et $f'_* = -id$ car on inverse les orientations de depart quand on recolle $(+, h, A \rightarrow A'$, conservation de l'orientation, $f', A' \rightarrow f'(A')$, $-$ inversion de l'orientation, $h'^{-1}, f'(A') \rightarrow f(A)$, $+$, conservation de l'orientation, $f^{-1}, f(A) \rightarrow A$, $-$, inversion de l'orientation). Donc, on a, $h_* = id, f'_* = -id$, $(h'^{-1})_* = id$ et $(f^{-1})_* = -id$. Et on ecrit car $f = id, f' = id, f_* = id, f'_* = id$, pour dire qu'on envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation (meme si elle inversée).

On peut raisonner par les generateurs, si e_1 est generateur de $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$ et e_2 est gnerateur de $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$, alors, comme sur la partie de Y et Y' on inverse les orientations, on a $-e_1$ est generateur de $H_{1,A,Y}$ et $-e_2$ est generateur de $H_{1,A',Y'}$, comme $f = id$ alors , $f_*(e_1) = -e_1$. On ecrite, $f_* = id$ dans le sens qu'elle envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation. et on ecrit $f_* = -id$, pour dire que f_* inverse l'orientation de depart sur A .

On a la meme chose pour A' et f' .

Des le depart on a deux homeomorphismes h et h' , supposons pas exemple que $h_* = -id$, $h_*(e_1) = -e_2$, comme pour A' on est dans l'epsace euclidien, il suffit de composer avec une symetrie t pour avoir $t_*(e_2) = -e_2$ donc, hot conserve l'orientation sur le bord. $(hot)_*(e_1) = e_2$ et on fait la meme chose avec h' . Finalement, on a deux homemorphismes hot et $h'ot'$ ou h' (si h' conserve l'inversion de l'orientation); qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilisé l'orientation definie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface S est homemorphe à la somme connexe de q Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connxe de Tore est une varieté differentiable et donc, cette orientation homologique est equivalente à l'orientation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci à chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans \mathbb{R}^3 , utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des varietés sans bord et des varietés a bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et diffeerentiables). L'equivalence entre orientation homologique et differentiable pour une varieté lisse est ecrite dans le livre de Bredon (geometry and tpology). Remarquons

qu'une variété à bord W est orientable si et seulement si son intérieur \dot{W} est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord ∂W et il y a équivalence aussi entre orientation homologique et différentiable. (il y a un isomorphisme entre $H_n(W, \partial W, Z)$ et $H_n(W, W - x, Z)$).

Concernant la structure différentiable sur le recollé de $X - A \cup_{f,A} Y - A$, dans Milnor (Somme connexe et structure différentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de $X - A$ et $Y - A$, sont difféomorphes à des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure différentiable. Or, pour la somme connexe de deux variétés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant à ici, le recollé $X - A \cup_{f,A} Y - A$ est difféomorphe à $X - A \cup Y - A$, on a déjà une structure différentiable sur le recollé, via ce difféomorphisme. (la projection $p : x \rightarrow [x]$ est un difféomorphisme).

Quant à l'écriture $\mathbb{T}_{q-1} \# \mathbb{T}_1$, c'est la somme connexe, comme on est dans \mathbb{R}^3 , somme connexe et recollement coïncident.

Quand on a une application s qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variété M_1 compacte sans bord de dimension 1, $s_* = id$. Pour le voir, on a si l'orientation est inversée sur M_1 et $M_2 = s(M_1)$, cela veut dire que -1 est générateur de $H_1(M_1, M_1 - x_0)$ et de $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$. Donc, $s_*(-1) = -1$, c'est à dire que $s_* = id$. Lorsque φ_1 inverse l'orientation alors $(\varphi_1)_* = -id$.

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que $M_1 - x_0$ est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

s_* est un isomorphisme de $H_1(M_1)$ vers $H_1(M_2)$, comme il conserve l'orientation $s_* = id$.

Pour le voir il suffit de raisonner sur les générateurs $s_*(e_1) = ke_2$ et $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$, donc, $kk' = 1$, comme ces des entiers $k = 1$ ou $k = -1$, comme s conserve l'orientation $k = 1$. On fait la même chose pour φ_1 et on obtient $k = -1$.

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De $\pi_1(S_1)$ dans $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : [\gamma] \rightarrow \tilde{[\gamma]}$$

On applique cela aux applications du Gramain, $s = h'^{-1}oh$ (conserve l'orientation) et $\varphi_1 = \varphi$, $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$, ici, $f = id, f' = id$ et $M_1 = M_2 = A$, puis on raisonne en considérant $S_1 \times \{0\}$ au lieu de S_1 .

$$k = \varphi^{-1}oso\varphi,$$

$$\pi(k)[\gamma] = [\varphi^{-1}oso\varphi\gamma] =$$

$$\bar{h}^{-1}([\varphi^{-1}oso\varphi\gamma]) =$$

$$= \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_*os_*o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) =$$

$$= \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) = [\gamma],$$

Où on a utilisé le fait que $\varphi_* = id$ si on se place sur X (on conserve l'orientation) ou $\varphi_* = -id$ si on se place de côté de Y (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer $[\gamma]$ par un générateur $e_1 = [\gamma_1]$ et raisonner sur les générateurs.

Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas où $k(a) = a$, k fixe un point. Sinon, (k ne fixe pas a), on compose avec une rotation $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$, or en considérant $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$, $s \in [0, 1]$, on a une homotopie entre r et l'identité id . Donc, $r_* = id$ de $H_1(S_1) \rightarrow H_1(S_1)$.

Donc, $k'_* = id$, puis on utilise le même groupe fondamental en a , $\pi_1(S_1, a)$ et l'application d'Hurwicz, comme précédemment pour prouver que $\pi(k') = id$.

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger k .

L'autre cas, Y rectangle et $g_1(A)$, deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur Y , celle-ci change quand on part de X et on lui recolle Y via A . (ici, $g_1 = f$ est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension ≤ 3 .

13) Pour l'inegalité de Kato : on a $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \in L^1_{loc}$ alors : $u \in W^{1,1}_{loc}$, pourquoi ?

Comme c'est local, on ecrit dans une boule u en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et $n \geq 3$ par exemple, $n = 2$ c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec ∂P regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut derivier sous le signe \int pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists r \int_{\partial B_r} u(\sigma) d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour $\varphi \in D(B_{r/2})$:

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \text{termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int \int \left(\partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right)(-\Delta u)\varphi + \int \int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \quad a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

Ceci est valable pour u reguliere. Soit ρ_n un molliffier, alors :

Si $u \in L^1(B_r)$, alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour $x \in B_{r/2}$:

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \rightarrow u, \text{ dans } L^1_{loc}(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \rightarrow \Delta u, \text{ dans } L^1_{loc}(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec u , avec $\rho_n * u$, comme on a des bornes uniformes en L^1_{loc} , alors,

$$\rho_n * u \in W^{1,1}_{loc}, \text{ et } \nabla(\rho_n * u) \rightarrow v \in L^1_{loc},$$

Donc,

$$\int u \partial\varphi = \lim_n \int (\rho_n * u) \partial\varphi = - \lim_n \int \partial(\rho_n * u) \varphi \rightarrow - \int v \varphi,$$

Donc,

$$u \in W^{1,1}_{loc},$$

On a la meme chose si on considere un probleme variationnel $-\Delta u = f$, $f \in L^1_{loc}$ et $u \in L^1_{loc}$. On a meme mieux, $u \in W^{1,q}_{loc}$. Une partie du travail de Brezis-Merle suppose ces hypotheses, par ce qu'on vient de voir, on utilise le théorème 1 de Brezis-Merle et les estimations elliptiques, pour poser le probleme quand on n'a pas de condition aux bord dans la formulation de Brezis et Merle.

On peut retrouver ce resultat en se ramenant a une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un probleme de Dirichlet.

Soit $f \in L^1$, $\exists f_j \rightarrow f$ dans L^1 avec $f_j \in C_c^\infty$, on resout :

$$-\Delta u_j = f_j, \text{ avec } u_j = 0, \text{ sur } \partial\Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|u_j\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q,$$

En passant à la limite en j , on a l'existence de $u_0 \in W_0^{1,q}$ tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \text{ et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le theoreme de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,q},$$

On retrouve le Theoreme dans le livre de Dautray-Lions.

On fait la meme chose avec le Theoreme 1 de Brezis-Merle, sauf que les relations ne sont pas locales.

On a :

$$-\Delta u = f \in L^1, u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

On resout pour $f_j \rightarrow f$ dans L^1 . $f_j \in C_c^\infty(\Omega)$. (la regularité du bord est au moins C^2 pour pouvoir appliquer le theoreme de dualité de Stampacchia).

$$-\Delta u_j = f_j, u_j \in H_0^1(\Omega),$$

On a :

$$\|\nabla u_j\|_q \leq C_q, 1 \leq q < 2.$$

On passe a la limte en j .

On a :

$$-\Delta u_0 = f, u_0 \in W_0^{1,q}(\Omega).$$

Finalement :

$$-\Delta(u - u_0) = 0, u - u_0 \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

Soit on utilise le principe du maximum dans $W_0^{1,1}$ pour avoir $u = u_0$ p.p.

Soit, on utilise le theoreme de regularité d'Agmon pour avoir $u - u_0$ reguliere et appliquer le principe du maximum usuel.

Pour, $u_j, f_j, |f_j|$ on applique le raisonnement de Brezis Merle (theoreme 1, on ne peut utiliser le potentiel Newtonien qu'avec des hypotheses sur f_j ; integrables et bornées, par exemple, voir le livre de Gilbarg-Trudinger). Puis par le lemme de Fatou, l'inegalité de Brezis Merle est valide pour u_j et u_0 donc pour u . ($u = u_0$, p.p).

14) Sur la fonction distance au bord : c'est bien ecrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grace a la propriété de la sphere interieure, il existe un voisinage du bord assez petit tel que la fonction

distance est C^k et est égale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des sphères le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit être par exemple au moins C^2 .

Par des cartes, on a un segment, on peut faire rouler une sphère. On prend son image par l'application de carte, qui est suffisamment régulière pour que le domaine d'arrivée contienne des ellipses, donc des cercles.

15) Pour le théorème de Dualité de Stampacchia :

On part de l'équation :

$$-\Delta u_i = V_i e^{u_i},$$

avec la condition de Dirichlet. ($\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$).

On a :

$$u_i \in W^{2,k} \cap C^{1,\epsilon}(\bar{\Omega}), \quad u_i = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

On a :

$$\int_{\Omega} |\Delta u_i| dx \leq bC.$$

On considère un vecteur $f = (f_1, f_2) \in L^{q'}(\Omega)$ avec $q' > 2$. On utilise le Théorème de Lax-Milgram dans les Hilbert, (voir Gilbarg-Trudinger), pour avoir une solution de $z \in W_0^{1,2}(\Omega)$ de l'équation :

$$-\Delta z = \text{div}(f),$$

avec la propriété suivante (voir la preuve de l'inégalité de Harnack dans le Gilbarg-Trudinger) :

$$\|z\|_{L^\infty} \leq C \|f\|_{q'}.$$

On met u_i comme fonction test dans l'équation de z , on a, en valeur absolue à l'extérieur des intégrales :

$$\int_{\Omega} f \cdot \nabla u_i dx = \int_{\Omega} \nabla z \cdot \nabla u_i dx = - \int_{\Omega} z \Delta u_i dx \leq C' \|f\|_{q'},$$

On prend le supremum dans $L^{q'}$, et on a :

$$\|\nabla u_i\|_q \leq C_q, \quad \forall 1 \leq q < 2.$$

Dans le problème de Brezis-Merle, on a :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega_\epsilon)} = o(1),$$

c'est la convergence intérieure due au travail de Brezis et Merle. Après, par l'inégalité de Hölder :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_{L^q(\Omega - \Omega_\epsilon)} \leq |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q - 1/r} \|\nabla(u_i - u)\|_{L^r} \leq C_r |\Omega - \Omega_\epsilon|^{1/q - 1/r} = o(1), \quad 1 \leq q < r < 2.$$

On obtient finalement :

$$\|\nabla(u_i - u)\|_q = o(1).$$

16) Pourquoi dans le livre d'Aubin, il considère les solutions u pour un opérateur du type :

$$a_{ij}(M) \partial_{ij} u + b_j(M) \partial_j u + c(M) u = f(M)?$$

Dans le livre d'Aubin $a_{ij}(M)$, $b_j(M)$ sont des champs de tenseurs, pourquoi tenseur ? C'est lié aux cartes et aux changements par cartes et à la formulation variationnelle.

1) Dans le livre d'Hebey, il donne la définition d'un problème posé de manière variationnelle : Pour les variétés :

$$\int_M a_{ij} \partial u \partial \varphi dV_g + b_j u \partial \varphi dV_g + c u \varphi dV_g = \int f \varphi dV_g$$

a) Il faut que le probleme soit posé sur une variété de maniere globale, donc independemment des cartes. C pour cela que dans le livre d'Hebey, il dit pour toute carte h .

b) Si on revient à un probleme posé sur un ouvert de \mathbb{R}^n , il y a deja une carte disponible, la carte euclidienne, (Ω, id) . Donc pour \mathbb{R}^n , il suffit que le probleme soit posé en coordonnées cartésiennes.

Et apres, par la formule de changement de variable, on se ramene à toute carte de l'ouvert. Notons que la notation dV_g l'explique bien car par un changement de variable, on retrouve la Jacobien, qui donne l'element de volume pour la metrique euclidienne.

Mainteneant quand on fait le changement de variables, il faut que le probleme soit invariant, c'est à dire que les coefficients ne changent par or ceci est possible si on les suppose comme champs de tenseurs.

on ecrit par exemple :

$$a_{ij}(M) = a_{ij}[x(M)] = a_{kl}[y(M)] \partial_x y_i^k \partial_x y_j^l,$$

dans le changement de variables, cette loi est celle des tenseurs.

C'est pour cela qu'on suppose les coefficients, des champs de tenseurs. Pour que par changement de variables, ils soit invariants et ceci est possible si ils obeissent à la loi des tenseurs.

Et pour les ouverts de \mathbb{R}^n . Il suffit que le probleme soit posé en coordonnées cartésiennes. Alors on la pour toute carte.

Une forme bilineaire est un tenseur. Un champ de formes bilineaires est un champ de tenseurs. Un champ de vecteurs est un champ de tenseurs.

17) Pour quoi, quand on veut appliquer le principe du maximum sur une variété, on a besoin d'un opérateur global :

a) C'est parce qu'on a considéré une variété, qui est cosntituée de cartes. Il ne faut pas que ca depende de la carte.

Par exemple, si on veut appliquer la principe du maximum en P ,

On ecrit : $Lu(P) = L(u \circ \varphi^{-1}(x_1, x_2))$, on voit que dans l'écriture meme, il ne faut pas que ca depende de la carte et de l'application de carte φ .

b) Par recouvrement, dans l'intersection d'ouvert de carte, on ecrit :

$$Lu(P) = L[u \circ \varphi^{-1}] = L[u \circ \psi^{-1}]$$

dans cette écriture, on a deux cartes, et ile ne faut pas que ca depende des deux cartes, pour cela il faut que l'operateur soit global.

c) On a la meme chose, si on raisonne que la derivée normale et le principe du maximum de Hopf.

18) Sur les applications conformes du bord en dimension 2.

On a parlé d'application conforme en dimsnion 2 :

Pourquoi la definition d'un domaine analytique permet d'avoir une carte conforme locale du bord ?

a)-Sur le disque unité, on a une transformation conforme directe du disque sur le demi-plan de Poincaré. Il n'y pas besoin de definir l'application ψ (voir ci-dessous).

b)-L'application ψ , permet de definir des coordonnées qui permettent d'utiliser une application conforme.

Ce qui suit est la traduction de ce qui a été ecrit dans les preprints sur arXiv. Pour definir un carte "conforme" γ , en dimension 2.

1-Il suffit de prouver que $\gamma_1((-\epsilon, \epsilon)) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) = \partial\Omega \cap \tilde{\gamma}_1(B_\epsilon) \cap \{|abscisse| < \epsilon\}$, pour $\epsilon > 0$ assez petit. Avec $\tilde{\gamma}_1$ l'extension holomorphe de $\gamma_1(t) = t + i\varphi(t)$.

Pour voir ca, on raisonne par l'absurde. On a pour $z_\epsilon \in B_\epsilon$, $\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon) = (t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))$ avec $|t_\epsilon| \geq \epsilon$. Comme $\tilde{\gamma}_1$ est injective sur une boule fixés au depart par le theoreme d'inversion locale, B_1 et $\tilde{\gamma}_1 = \gamma_1 = t + i\varphi(t)$ sur l'axe réel, on a nécessairement $|t_\epsilon| \geq 1$. Mais par continuité $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| \rightarrow 0$ parce que $z_\epsilon \rightarrow 0$. Et on utilise le fait que $|\tilde{\gamma}_1(z_\epsilon)| = |(t_\epsilon, \varphi(t_\epsilon))| \geq |t_\epsilon| \geq 1$, pour avoir une contradiction.) (Cela veut dire que pour un rayon assez petit quand le graphe sort de la boule, il n'y retourne plus). (Ce fait implique, en raisonnant avec des chemins, quand un a chemin qui coupe $\partial\Omega$ in $\tilde{\gamma}_1(B_\epsilon)$ en un point ce point a pour abscisse $|abscisse| < \epsilon$. Encore, une fois, ce fait (par un raisonnement par l'absurde avec le fait que $\partial\tilde{\Omega} = \partial\Omega$, il faut raisonner avec des

chemins), implique que l'image de la partie superieure est entierement d'un coté de la courbe et l'image de l'autre est de l'autre coté de la courbe.

2- Posons : $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M \in \Omega$ telle que : $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$ avec (i'_1, j'_1) est une base telle que $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$. Et, $\varphi = id : (x_1, x_2) \rightarrow M$ telle que : $\overrightarrow{O M} = x_1 i_1 + x_2 i_2$ la base canonique (i_1, j_1) . Alors on a deux cartes de Ω , φ et ψ et les affixes $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z_M = x_1 + ix_2$ sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

On a :

$$\partial_{\lambda_1} = \cos \theta \partial_{x_1} + \sin \theta \partial_{x_2},$$

$$\partial_{\lambda_2} = -\sin \theta \partial_{x_1} + \cos \theta \partial_{x_2},$$

Donc, la métrique dans la carte ψ ou en coordonnées (λ_1, λ_2) est : $g_{ij}^\lambda = \delta_{ij}$ et le Laplacien dans les deux cartes (coordonnées), ψ et φ est le Laplacien usuel $\partial_{\lambda_1 \lambda_1} + \partial_{\lambda_2 \lambda_2}$.

On écrit :

$$\Delta u(M) = \Delta_\lambda(u \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2))$$

Puis on applique l'application conforme $\tilde{\gamma}_1$ qui envoie l'affixe T_M, M dans un voisinage de $x_0 \in \partial\Omega$ vers B_ϵ et envoie $T_M, M \in \partial\Omega$ sur l'axe réel $(-\epsilon, \epsilon)$ et l'autre partie vers l'autre partie de Ω et $\bar{\Omega}^c$.

On a : $\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M$ et $\tilde{\gamma}_1 : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow (\mu_1, \mu_2)$. L'application considérée est : $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$. C'est bien une carte. Pour le voir :

La premiere carte (carte usuelle) est : $\psi \circ g^{-1}$ avec g est l'application $g : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$ et φ_0 l'application qui permet de définir $\partial\Omega$ comme un graphe.

L'application de changement de carte est :

$$g \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$$

elle est reguliere d'un voisinage de 0 vers un autre voisinage de 0 et envoie la partie superieure du premier voisinage vers la partie superieure de l'autre voisinage (ainsi que les parties inferieures).

On voit bien que $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ est une carte avec la propriété que $\tilde{\gamma}_1$ est conforme.

(l'application $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ est aussi la composée de, une rotation et une translation (donc conforme) et de $\tilde{\gamma}_1^{-1}$ qui est conforme, si on se placait en coordonnées cartésiennes au départ. Mais, il faut voir que la carte ψ definit des coordonnées qui permettent la construction d'une application conforme. On n'a pas besoin de cela pour le disque unité, on a directement l'application du demi-plan de Poincaré).

Remarque : ψ et $\varphi = id$ sont des cartes de Ω et ψ est "presque" une carte de $\partial\Omega$. Mais $\psi \circ \tilde{\gamma}_1^{-1}$ et $\psi \circ g^{-1}$ sont des cartes du bord.

Le probleme elliptique peut etre vu de deux manieres : donc, si on considere, au depart, les coordonnées cartésiennes, on a une transformation conforme. Si, on considere le probleme posé sur une variété a bord, on a une carte analytique.

3- "Caractérisation des domaines C^k " : On peut dire que la définition d'un domaine $C^k, k \geq 1$ est équivalente à la définition d'une sous-variété + la condition : $\partial\bar{\Omega} = \partial\Omega$ or $\dot{\bar{\Omega}} = \Omega$.

19) Concernant l'élément de volume et la mesure de Hausdorff sur le bord :

Avec le point 18), la carte usuelle du bord est : $h = \psi \circ g^{-1}$ avec,

$\psi : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow M \in \Omega$ telle que : $\overrightarrow{x_0 M} = \lambda_1 i'_1 + \lambda_2 j'_1$ avec (i'_1, j'_1) est une base telle que $i'_1 = e^{-i\theta} i_1, j'_1 = e^{-i\theta} j_1$. Et, $\varphi = id : (x_1, x_2) \rightarrow M$ telle que : $\overrightarrow{O M} = x_1 i_1 + x_2 i_2$ la base canonique (i_1, j_1) . Alors on a deux cartes de Ω , φ et ψ et les affixes $T_M = \lambda_1 + i\lambda_2$ et $z_M = x_1 + ix_2$ sont tels que :(l'application de changement de cartes) :

$$T_M/e^{i\theta} + x_0 = z_M = \varphi^{-1} \circ \psi(\lambda_1, \lambda_2),$$

et,

g est l'application $g : (\lambda_1, \lambda_2) \rightarrow [\lambda_1, \lambda_2 + \varphi_0(\lambda_1)]$ et φ_0 l'application qui permet de définir $\partial\Omega$ comme un graphe.

La metrique sur le bord $\partial\Omega$ s'écrit localement :

$$h^*(i^*(\delta)) = \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda,$$

avec δ la metrique euclidienne de \mathbb{R}^2 . (la metrique sur le bord est $i^*(\delta)$ avec $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightarrow x$).

On l'a explicitement, en calculant (le determinant contient un terme car on est en dimension 1, c la meme chose en dimension superieure), $h^*(i^*(\delta)) = \delta(dh(\partial_\lambda), dh(\partial_\lambda)) = [1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2]$.

Avec $i : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $x \rightarrow x$ l'inclusion.

Et considerant l'application Lipschitzienne (c'est aussi l'application de carte, locale, du bord $\partial\Omega$ qui permet aussi de calculer g_{11} , ce qu'on a fait precedemment) :

$$\lambda \rightarrow (\lambda, \varphi_0(\lambda)) = h(\lambda, 0),$$

on a par la formule de l'aire, l'egalité entre la mesure de Hausdorff et le Jacobien (element d'aire) :

$$\int_{[a,b]} \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda = \int_{h([a,b],0) \subset \partial\Omega} dH_1,$$

Finalement, on a l'egalité suivante :

$$d\sigma = \sqrt{1 + [\varphi'_0(\lambda)]^2} d\lambda = dH_1|_{\partial\Omega}.$$

avec cette remarque, on voit par exemple que $H_1(\partial\Omega) < +\infty$, dans le cas $\partial\Omega$ compact.

20) Quand y a il une relation entre $W^{1,\infty}$ et $C^{0,1}(\bar{\Omega}) = Lipschitz(\bar{\Omega})$.

a) Dans le cas d'un convexe ou une boule, c'est écrit dans le livre de Brezis quand il approxime L^∞ par L^p , dans le critere pour qu'une fonction soit $W^{1,p}$.

b) Quand l'ouvert est Lipschitzien ou au moins C^1 , c'est un exercice dans livre d'Otared Kavian. On utilise l'operateur de prolongement (Notez que la constante de prolongement ne depend pas de p , on peut utiliser le proceder de Brezis $p \rightarrow +\infty$), puis on se ramene á un convexe, une boule, puis on revient aux fonctions de depart.

Dans les cas precedents, il y a egalité entre les deux ensembles.

21) pourquoi on écrit dan la derivation (ici $\nabla = \nabla_X$ pour un vecteur X) :

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = \langle \nabla a|b \rangle + \langle a|\nabla b \rangle$$

ceci est du à (g est la metrique et C la contraction) :

$$\langle a|b \rangle = C_1^3 C_2^4 (g \otimes a \otimes b)$$

La derivée covariante commute avec la contraction et $\nabla g = 0$, car c la connexion de Levi-Civita :

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = C_1^3 C_2^4 (\nabla g \otimes a \otimes b + g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b)$$

Donc,

$$\nabla(\langle a|b \rangle) = C_1^3 C_2^4 (g \otimes \nabla a \otimes b + g \otimes a \otimes \nabla b) = \langle \nabla a|b \rangle + \langle a|\nabla b \rangle .$$

22) Sur les coordonnées geodesiques polaires : elles sont definies a partir de la carte exponentielle. Il existe un voisinage du point tel que pour $y \in B(x, \epsilon)$, $z \rightarrow exp_y(z)$ est un diffeomorphisme. On a alors une carte. On definit les coordonnees geodesiques polaires. On s'assure que (lemme de Gauss) :

a)

$$\frac{d}{dt}(\langle \nabla_t|\nabla_t \rangle) = \nabla_t(\langle \nabla_t|\nabla_t \rangle) = 2 \langle \nabla_t(\nabla_t)|\nabla_t \rangle = 0$$

Car c'est une geodesique $\nabla_t(\nabla_t) = 0$. Donc, $\langle \nabla_t | \nabla_t \rangle \equiv cte = \lim_{t \rightarrow 0} \langle \nabla_t | \nabla_t \rangle = 1$, car la carte exponentielle est normale en y .

$$\nabla_t(\langle \nabla_t | \nabla_\theta \rangle) = \frac{1}{2} \nabla_\theta(\langle \nabla_t | \nabla_t \rangle) = \frac{1}{2} \nabla_\theta(1) = 0,$$

Ici, on utilise le fait que la connexion est sans torsion pour permuter la derivation en t et angulaire. Donc,

$$\langle \nabla_t | \nabla_\theta \rangle \equiv cte = \lim_{t \rightarrow 0} (\langle \nabla_t | \nabla_\theta \rangle) = 0$$

C'est le lemme de Gauss.

On pouvait ecrire $\nabla_{\partial_i}(\partial_j)$ avec $\partial_i, \partial_j \in \{\partial_t, \partial_{\theta_j}\}$.

b) Les geodesiques sont minimisantes, c bien ecrit dans le livre d'Hebey et Gallot-Hulin-Lafontaine, remarquons, comme c ecrit dans le Do Carmo. Pour calculer la longueur d'un chmin passant par l'origine, on prend \int_ϵ^1 , puis on fait tendre ϵ vers 0. Car les coordonnees geodesiques polaires sont definit en dehors de 0, origine, puis on fait tendre le rayon r vers 0.

c) On voit comme c dit dans le Hebey, que les geodesiques sont minimisantes, l'image de boules ouvertes sont des boules ouvertes, de boules fermees, sont des boules fermees, l'image de spheres, sont des spheres.

Soit, \tilde{z} l'application de \mathbb{S}_{n-1} vers \mathbb{S}_{n-1}^r définie par $\theta \rightarrow r\theta$.

Par définition, pour h une fonction définie au voisinage de x :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x \circ z \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x)}{\partial z_k} \times r \frac{\partial(\psi^{-1})^k}{\partial \theta_j}.$$

avec $\varphi_0 = \exp_x \circ z \circ \psi^{-1}$.

Ce qu'on peut ecrire :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \exp_x)}{\partial z_k} \times r \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta_j}.$$

et,

$$\partial_{\theta^i, x} = r b_i^k(\theta) \partial_{z^k, x}.$$

On a donc, pour tout $x \in B(x_0, \epsilon_0)$, $[B(x, \epsilon_0), \exp_x^{-1}]$ est une carte normale en x . Pour tout $x \in B(x_0, \epsilon_0)$:

$$g_{x, ij}(z) = g(z)(\partial_{z^i, x}, \partial_{z^j, x}),$$

où $\partial_{z^i, x}$ est le champ de vecteur locale canonique lié à la carte exponentielle.

On note, $a_i^k(z, x) = \frac{(\varphi \circ \exp_x)^k}{\partial z^i}[\exp_x^{-1}(z)]$, alors, $\partial_{z^i, x} = a_i^k(z, x) \partial_{u^k, \varphi}$,

avec, $\partial_{u^k, \varphi}$, le champ de vecteur canonique relatif à la carte (Ω, φ) , ce dernier ne dépend pas du point x , contrairement à celui de la carte exponentielle en x . Quant aux fonctions a_i^k elles sont C^∞ de z et x . On obtient,

$$g_{x, ij}(z) = g(z)[a_i^k(z, x) \partial_{u^k, \varphi}; a_j^l(z, x) \partial_{u^l, \varphi}] = a_i^k(z, x) a_j^l(z, x) g_{kl}(z),$$

où les g_{kl} sont les composantes de g dans la carte (Ω, φ) .

On a, $z = \exp_x(y)$, $y \in B(0, \epsilon_0) \subset \mathbb{R}^n$ et $y = r\theta$ en coordonnées polaires, ainsi, la fonction $(x, r, \theta) \rightarrow g_{x, ij}[\exp_x(r\theta)]$ est C^∞ des variables x , r et θ .

D'autre part, par définition, $g_{ij}^k(r\theta) = g_{[\exp_x(r\theta)]}(\partial_{\theta^i, x}, \partial_{\theta^j, x})$, (champs de vecteurs canoniques).

En utilisant le même type de calcul que précédemment, on a,

$$\partial_{\theta^i, x} = r b_i^k(\theta) \partial_{z^k, x},$$

avec, b_i^j des fonction très régulières. Donc,

$$g_{ij}^k(r, \theta) = r^2 g[\exp_x(r\theta)](b_i^k \partial_{z^k, x}, b_j^l \partial_{z^l, x}),$$

d'où,

$$g_{ij}^k(r, \theta) = r^2 b_i^k(\theta) b_j^l(\theta) g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)].$$

Donc, l'application, $\tilde{g}_{ij}^k : (x, r, \theta) \rightarrow b_j^k b_j^l g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)]$ est C^∞ des trois variables x, r et θ .
On a,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = b_i^k(\theta) b_j^l(\theta) c^m(\theta) \partial_m g_{x,kl}(x) = 0,$$

car, la carte exponentielle est normale en x et les $g_{x,kl}$ sont les composantes de g dans cette même carte. On a aussi,

$$\partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, r, \theta) = \tilde{b}_i^k(\theta) \tilde{b}_j^l(\theta) g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + r \bar{b}_i^k(\theta) \bar{b}_j^l(\theta) \bar{c}_m^s(\theta) \partial_s g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)],$$

En redérivant en r , on obtient,

$$\begin{aligned} \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, r, \theta) &= u_{ijmr}^{klq}(\theta) \partial_q g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + v_{ijmr}^{kl}(\theta) w^s(t) \partial_s g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)] + \\ &+ r h_{ijrm}^{klst}(\theta) \partial_{st} g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)]. \end{aligned}$$

Donc,

$$\partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k.$$

Ainsi, on obtient :

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (*)$$

On a la même chose en considérant le déterminant :

Comme, $\sqrt{|\tilde{g}^k|} = \alpha^k(\theta) \sqrt{[\det(g_{x,ij})]}$, on en déduit,

$$\partial_r (\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}) = \partial_r [\log(\sqrt{[\det(g_{x,ij})])}] .$$

Par définition du déterminant et en développant par rapport al ligne 1 par exemple, on obtient,

$$\det[g_{x,ij}][\exp_x(r\theta)] = \Sigma \Pi g_{x,kl}[\exp_x(r\theta)],$$

d'où,

$$\partial_r \det[g_{x,ij}](x) = \Sigma \Pi [g_{x,kl}(x)] a^s(\theta) \partial_s g_{x,mn}(x) = 0,$$

Car, la carte exponentielle est normale en x .

Finalement,

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0, \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k.$$

En utilisant le même raisonnement que celui qu'on utilisé pour calculer, $\partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta)$, on prouve que,

$$\partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0.$$

En conclusion,

$$\partial_r \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} \tilde{g}_{ij}^k(x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (**)$$

$$\partial_r |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta^m} |\tilde{g}^k|(x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (***)$$

$$\partial_r \partial_{\theta_m} \left[\frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right] (x, 0, \theta) = \partial_r \partial_{\theta_m} \partial_{\theta_{m'}} \left[\frac{\sqrt{|\tilde{g}^k|}}{\alpha^k(\theta)} \right] (x, 0, \theta) = 0 \quad \forall x \in B(x_0, \epsilon_0), \quad \forall \theta \in U^k. \quad (****)$$

L'ouvert U^k est choisit de telle manière qu'en le réduisant un peu, il reste un ouvert de carte.

On utilise alors, l'uniforme continuité des dérivées successives pour obtenir les résultats de la proposition 1.

Remarque :

$\partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}]$ qui est une fonction locale de θ , est la restriction d'une fonction globale, définie sur toute la sphère \mathbb{S}^{n-1} à savoir $\partial_r [\log \sqrt{\det(g_{x,ij})}]$. On notera, $J(x, r, \theta) = \sqrt{\det(g_{x,ij})}$.

23) Le Laplacien en polaires :

Ecrivons le laplacien dans $]0, \epsilon_1[\times U^k$,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log \sqrt{|\tilde{g}^k|}] \partial_r + \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

On a,

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r \log J(x, r, \theta) \partial_r + \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

Le laplacien s'écrit (décomposition radiale et angulaire),

$$-\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r - \Delta_{S_r(x)},$$

où $\Delta_{S_r(x)}$ est le laplacien sur la sphère $S_r(x)$.

$\Delta_{S_r(x)}$, s'écrit localement,

$$-\Delta_{S_r(x)} = \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} (\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}).$$

On conclut que l'opérateur de droite en θ , dans la première expression du laplacien, n'est que l'écriture locale d'un opérateur global.

On pose, $L_\theta(x, r)(\dots) = r^2 \Delta_{S_r(x)}(\dots)[\exp_x(r\theta)]$.

L'opérateur $L_\theta(x, r)$ est un opérateur définie sur les fonctions $C^2(\mathbb{S}_{n-1})$ de manière globale (il ne dépend pas de la carte choisie sur \mathbb{S}_{n-1} et vaut localement,

$$L_\theta(x, r) = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} [\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j}].$$

De plus cet opérateur est elliptique, on écrit alors,

$$\Delta = \partial_{rr} + \frac{n-1}{r} \partial_r + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r - \frac{1}{r^2} L_\theta(x, r).$$

Si, maintenant, u est une fonction définie sur M , alors, $\bar{u}(r, \theta) = u \circ \exp_x(r\theta)$ est la fonction qui lui correspond en coordonnées polaires centrées en x .

$$-\Delta u = \partial_{rr} \bar{u} + \frac{n-1}{r} \partial_r \bar{u} + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r \bar{u} - \Delta_{S_r(x)}(u|_{S_r(x)})[\exp_x(r\theta)],$$

$$r^2 \Delta_{S_r(x)}(u|_{S_r(x)})[\exp_x(r\theta)] = -\frac{1}{\sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} \left[\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j} [u \circ \exp_x(r\theta)] \right] = L_\theta(x, r) \bar{u}.$$

Ainsi,

$$-\Delta u = \partial_{rr} \bar{u} + \frac{n-1}{r} \partial_r \bar{u} + \partial_r [\log J(x, r, \theta)] \partial_r \bar{u} - \frac{1}{r^2} L_\theta(x, r) \bar{u}.$$

D'autre part, il est clair qu'en se plaçant dans la carte exponentielle, on transporte la métrique dans l'espace euclidien. Puis, en considérant les coordonnées géodésiques polaires, on voit que la métrique se décompose suivant les champs de vecteurs radial et angulaires. Comme l'espace se décompose suivant la partie radiale et angulaire sur la sphere, il est clair qu'en considérant les champs de vecteur $\partial_r, \partial_{\theta^j}$, on retrouve localement le laplacien radial et angulaire, qui est un laplacien global par la carte exponentielle. On retrouve par l'intermédiaire de la carte exponentielle un laplacien global qu'on décompose en coordonnées géodésiques polaires en partie radiale et angulaire par le lemme de Gauss.

L'opérateur $L_\theta(x, r)$ est un laplacien sur \mathbb{S}_{n-1} pour une certaine métrique qui dépend du paramètre r .

On a, $\Delta_{S_r(x)} = \Delta_{i_{x,r}^*(g)}$ où, $i_{x,r}$ est l'application identité de $S_r(x)$ dans M et $i_{x,r}^*(g) = \tilde{g}$ est la métrique induite sur la sous-variété $S_r(x)$ de M .

Comme \exp_x induit un difféomorphisme de $S_r(x)$ vers \mathbb{S}_{n-1}^r , on a :

$$\Delta_{S_r(x)} u|_{S_r(x)} = \Delta_{i_{x,r}^*(g)} u|_{S_r(x)} = \Delta_{\tilde{g}} u|_{S_r(x)} = \Delta_{\exp_x^*(\tilde{g}), \mathbb{S}_{n-1}^r} u \circ \exp_x(v),$$

Soit, \tilde{z} l'application de \mathbb{S}_{n-1} vers \mathbb{S}_{n-1}^r définie par $\theta \rightarrow r\theta$. Alors,

$$\Delta_{\exp_x^*(\tilde{g})} u \circ \exp_x(v) = \Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]} u \circ \exp_x(r\theta),$$

Pour le choix de la carte (ψ, U^k) , sur \mathbb{S}_{n-1} , la carte locale en coordonnées polaires pour le point x est, $(\varphi_0,]0, \epsilon_0[\times U^k)$, où $\varphi_0 = \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1}$. Les g_{jl}^k sont par définition :

$$g_{jl}^k(r, \theta) = g_{\exp_x(r\theta)}(\partial_{j, \varphi_0}, \partial_{l, \varphi_0}),$$

avec, $\partial_{j, \varphi_0}, \partial_{l, \varphi_0}$ les champs de vecteurs canoniques correspondant à la carte $(\varphi_0,]0, \epsilon_0[\times U^k)$.

Par définition, pour h une fonction définie au voisinage de x :

$$\partial_{j, \varphi_0}(h) = \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \bar{\theta}_j} = \frac{\partial(h \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j},$$

Rappelons, qu'on écrit, $\psi(\theta) = (\bar{\theta}_1, \dots, \bar{\theta}_{n-1})$ et $\theta_0 = r$ (dérivations angulaires et radiale).

Si, on s'occupe des composantes angulaires, c'est à dire les champs de vecteurs, ∂_{j, φ_0} avec $1 \leq j \leq n-1, j \in \mathbb{N}$, alors,

$$\begin{aligned} \partial_{j, \varphi_0}(h) &= \frac{\partial(h \circ i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z} \circ \psi^{-1})}{\partial \theta_j}, \\ \frac{\partial(h \circ \varphi_0)}{\partial \bar{\theta}_j} &= \frac{\partial(h \circ i_{x,r} \circ \varphi_0)}{\partial \theta_j}, \end{aligned}$$

Donc, si on note $\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l$ les champs de vecteurs canoniques de la sphere par rapport à la carte (ψ, U^k) , on obtient, en notant d désigne la différentielle,

$$\partial_{j, \varphi_0} = d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_j),$$

Donc,

$$g_{jl}^k(r, \theta) = g_{\exp_x(r\theta)}[d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_j), d(i_{x,r} \circ \exp_x \circ \tilde{z})(\bar{\partial}_l)],$$

d'où, en utilisant la définition du pull-back,

$$g_{jl}^k(r, \theta) = \tilde{z}^*[\exp_x^*(i_{x,r}^*(g))](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l) = \tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})](\bar{\partial}_j, \bar{\partial}_l),$$

le dernier terme à droite dans l'expression précédente, n'est que la composante j, l , de la métrique $\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})]$ définie sur la sphere unité \mathbb{S}_{n-1} .

Finalement, on peut comparer les expressions locales et globales,

$$-\Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})], \mathbb{S}_{n-1}} u \circ \exp_x(r\theta) = \frac{1}{r^2 \sqrt{|\tilde{g}^k|}} \partial_{\theta^i} [\tilde{g}^{\theta^i \theta^j} \sqrt{|\tilde{g}^k|} \partial_{\theta^j} u \circ \exp_x(r\psi^{-1})],$$

Maintenant, si on prend la nouvelle métrique sur \mathbb{S}_{n-1} définie par,

$$g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}} = r^{-2} \tilde{z}^* [\exp_x^*(\tilde{g})],$$

cette métrique est bien définie et de plus,

$$g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}jl} = r^{-2} g_{jl}^k = \tilde{g}_{jl}^k,$$

Nos raisonnements futurs se feront avec $r > 0$. On obtient,

$$\Delta_{g_{x,r,\mathbb{S}_{n-1}}} = r^2 \Delta_{\tilde{z}^*[\exp_x^*(\tilde{g})], \mathbb{S}_{n-1}} = L_\theta(x, r).$$

24) Sur les fonctions Green :

Le monograph de Druet-Hebey-Robert est assez clair et precis. On donne quelques explications sur les fonctions de Green et sur le fait que le dernier terme dans la decomposition de cette fonction est de classe C^1 . C'est essentiellement du au fait que le premier terme est donné explicitement et on utilise une recurrence pour prouver que les termes dela decomposition sont Sobolev et continues en dehors de la digonale. (Ou bien comme dans le monograph de Druet-Hebey-Robert, on fait la difference des fonctions en deux points et on remarque qu'on a des fonctions Lipschitziennes, Notons comme c'est ecrit dans Ambrosio-Fusco-Pallara, pour pouvoir savoir si une fonction est Sobolev, il suffit qu'on ait des derivees directionelles).

Les fonctions qu'on considere sont continues en dehors d'un ensemble de mesure nulle (un point ou la diagonale). Elles sont mesurables. Elles sont integrables par les theoremes de comparaisons.

Soit (\bar{W}, g) une variété Riemannienne compacte avec ou sans bord. Dans le cas sans bord, on la note (M, g) .

Soit H la fonction definie comme dans le livre d'Aubin. Cette fonction ne depend pas de la fonction rayon d'injectivé dans le cas d'une variété compacte sans bord. Elle depend (à gauche en P) du rayon d'injectivé dans le cas d'une variété à bord. On sait que la fonction rayon d'injectivité est continue sur W avec $\delta(P) \leq d(P, \partial W)$, on peut alors la prolonger par 0 sur ∂W . Alors $\delta(P)$ est continue sur \bar{W} .

On pose :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q), \quad \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_W \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Alors,

$$|\Gamma_1| \leq C[d(P, Q)]^{2-n}.$$

Explicitement et par recurrence les Γ_i sont continues en dehors de la diagonale et pour P ou Q proche du bord, elles sont nulles (conditions au bord). On les prolonge par 0 au bord. Par le theoreme de la convergence dominee de Lebesgue, on prouve qu'elles sont $W^{1,\infty}$ en dehors de la diagonale en Q car elles sont Sobolev est leur derivees bornees. La fonction $d(P, Q) = d_P(Q)$ est reguliere en Q en dehors de P et en fixant Q elle est Lipschitzienne en P , on alors le fait que $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d_R(Q)$ est continue en dehors de la diagonale et L_{loc}^∞ . Donc, par le theoreme de convergence dominee (enlever de petites boules) $\Gamma_i * \partial_Q \Gamma_1$ et $\Gamma_i * \partial_Q H$ sont C^0 en dehors de la diagonale. Donc, les Γ_i et $\Gamma_i * H$ sont C^1 en dehors de la diagonale. (Le point essentiel est la fonction distance). (Concernant la fonction distance, $(R_i, Q) \rightarrow d(R_i, Q) = d(R_i, \exp_{R_i}(r\theta))$, $Q = \exp_{R_i}(r\theta)$, $\epsilon_0/2 \leq r \leq \delta(R_i)/3$, $\theta \in \mathbb{S}_{n-1}$ et la carte de reference est $[B(R_0, \delta(R_0)/3), \exp_{R_0}]$ avec $R_i \rightarrow R_0$. On voit alors qu'en coordonnes geodesiques polaires centrees en R_i un calcul de $\Delta_{g,Q} d(R_i, Q) \in L^\infty$ et $d(R_i, \cdot) \rightarrow d(R_0, \cdot)$ et par les estimations elliptiques on a $\partial_Q d(R_i, Q) \rightarrow \partial_Q d(R_0, Q)$ pour $d(R_i, Q) \geq \epsilon_0 > 0$.)

Dans le cas où $W = M$ sans bord :

D'apres sa formule explicite H est C^1 en dehors de la diagonale. Elle est $W^{1,1+\epsilon}$ de chaque variable pour un $\epsilon > 0$ assez petit, par recurrence et par Fubini, Fubini-Tonnelli :

$$\partial_P \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \partial_P \Gamma_i(P, R) \Gamma_1(R, Q) dR,$$

et,

$$\partial_Q \Gamma_{i+1}(P, Q) = \int_M \Gamma_i(P, R) \partial_Q \Gamma_1(R, Q) dR.$$

Pour une variété avec bord, on ne peut pas dériver par rapport P , car l'expression de Γ_i et en particulier de Γ_1 contient δ_P qu'on sait seulement continue et pas forcément différentiable. Dans le cas avec bord, les fonctions Γ_i sont continues en P en dehors de la diagonales et $L^{1+\epsilon}$, $\epsilon > 0$ seulement, mais ceci suffit pour prouver la symétrie par le theoreme d'Agmon)

On a aussi, les estimees de Giraud. Ainsi de proche en proche, les Γ_i deviennent de plus en plus regulieres. on utilise le theoreme de Giraud pour prouver que $\Gamma_k = r^{\lambda-n} * r^{2-n}$ avec $\lambda + 2 > n$ (donc $\geq n + 1$ car λ est entier puisqu'on derive les Γ_i). (Si $\lambda > n - 1$ ($\lambda \geq n$) c'est fini (on regarde Γ_{k-1}), si $\lambda = n - 1$ alors : $\Gamma_k = r^{-1} * r^{2-n}$ et $\partial_P \Gamma_k = r^{-2} * r^{2-n}$ et $\partial_Q \Gamma_k = r^{-1} * r^{1-n}$ qui est en log par Giraud et donc $\partial_P \Gamma_{k+1}$ et $\partial_Q \Gamma_{k+1}$ sont $C^0(M \times M)$ par Giraud et donc Γ_{k+1} est $C^1(M \times M)$. (Utiliser le produit de convolution, car Γ_{k+1} et sa dérivée Sobolev, est continue pour écrire qu'elle est $\int \partial_P$, l'intégrale d'une fonction continue donc C^1 , il a convergence uniforme de la convolution, car la fonction et son Sobolev sont continues). Dans le cas avec bord, Γ_k continue implique que Γ_{k+1} est $W^{1,\infty}$ en Q . (On a mieux C^1 en Q car la fonction $(R, Q) \rightarrow \partial_Q d(R, Q)$ est C^0 en dehors de la diagonale de W et H est a support compact (elle s'annule avant le bord) et donc $(\Gamma_k * \partial_Q H)$ est C^0 en dehors de la diagonale de \bar{W})).

Dans le cas d'un operateur $-L = -\Delta + h$, la regularite de Γ_{k+1} depend de celle de h . Si par exemple h est C^1 alors comme precedemment Γ_{k+1} est C^1 de P et Q . Bien sur le Γ_1 change :

$$\Gamma_1(P, Q) = -\Delta_Q H(P, Q) + h(Q)H(P, Q).$$

Remarque : a) sur la borne inferieure de la fonction de Green G_ϵ de $-\Delta + \epsilon = -\nabla^i(\nabla_i) + \epsilon$, $\epsilon > 0$.

1) On a $G_\epsilon \geq 0$ donc par la propriété de la borne inferieure $m_\epsilon = \inf_{M \times M} G_\epsilon$ existe.

2) Par definition $m_\epsilon = \lim_{\delta \rightarrow 0} G_\epsilon(x_\delta, y_\delta)$. Si on suppose que $d(x_\delta, y_\delta) \rightarrow 0$, par la propriété du monograph de Druet-Hebey-Robert, $m_\epsilon = +\infty$, ceci n'est pas possible et Comme G_ϵ est continue en dehors de la diagonale. $m_\epsilon = G_\epsilon(x_\epsilon, y_\epsilon)$ avec $x_\epsilon \neq y_\epsilon$.

Si on met un indice i , alors on peut supposer que, $G_i = G_{\epsilon_i}$:

$$\inf_{M \times M} G_i = m_i = G_i(x_i, y_i), \quad x_i \neq y_i,$$

Après, on peut raisonner sur la borne inferieure globale sur tout $M \times M$, au lieu de prendre l'inf sur M en x puis en y .

b) sur les fonctions de Green des variétés à bord. on remarque que par exemple que pour les variétés à bord, la parametrix est solution d'une EDP elliptique en dehors de la singularité, on utilise les theoremes d'Agmon et de regularité dans la construction complete de la fonction de Green dans le cas des variétés a bord, voir le monograph de F.Robert.

25) Sur la formule de Gauss-Bonnet :

C'est bien écrit dans le livre de J.Lafontaine, edition 2010.

1) relation entre l'indice d'un champ de vecteurs et la courbure de Gauss.

2) relation entre indice d'un champ de vecteur, fonction de Morse et caracteristique d'Euler-Poincaré.

On a une surface riemannienne compacte sans bord (M, g) .

On part d'un champ de vecteur X ayant des zeros. On considère le normalisé $X_1 = X/\|X\|$, il n'est pas défini aux zeros de X . Puisqu'il y a produit scalaire, on considère X_2 son orthogonale de sorte qu'on ait un repere orthonormé.

(X_1, X_2) est un repere mobile ou "moving-frame". On a une connexion, donc on a de nouveaux symboles de Christoffel et une connexion forme ω . de sorte que $d\omega = \Omega$ la courbure. celle ci n'est pas définie aux zeros de X , puisqu'on considère X_1 et on divise par $\|X\|$.

(Comme on l'a dit pour la surface $K3$, on a une connexion \Rightarrow symboles de Christoffel \Rightarrow connexion forme (par dualité). Puis on derive $d\omega$ on retrouve la courbure ou forme volume par dualité. C'est bien écrit dans le livre de J. Lafontaine quand il considère $\nabla_{X_i}(X_j)$. Dans certains livres on note $\omega = \omega_1^2$. On peut le voir comme : quand on calcule $\nabla_i dx^j = -\Gamma_{ik}^j dx^k$ pour

les champs de vecteurs et les formes differentielles usuelles, ici pour X la forme ω , on calcule $\nabla_X \omega_i = -\omega_i^k(X)\omega_k$, changements de bases, nouveaux symboles de Christoffel.)

Mais au voisinage des zéros on a une carte (canonique si on veut, normalisé) et le passage des champs issus de cette carte notés (Z_1, Z_2) à (X_1, X_2) se fait via un champ de rotations $R = e^{i\varphi}$ (plus précisément de Z_1 à X_1 , on voit bien que $X_1 = e^{i\varphi}Z_1$ se contracte vers un vecteur du type $e_1 \times e^{i\varphi}$ car Z_1 est défini sur un voisinage de la singularité et qu'on peut le contracter en un vecteur fixe). (On voit ici que R est homotope à X_1). On note ω_0 la connexion forme pour ce repère mobile ou "moving-frame" (Z_1, Z_2) . Alors on a la relation :

$$\omega = \omega_0 - d\varphi.$$

Avec, ω_0 définie au voisinage de la singularité contrairement à ω . (on peut passer à la limite dans la formule de Stokes, voir ci-dessous).

La rotation R est homotope au champ X_1 donc : on a le même degré topologique.

$$\deg(R) = \deg(X_1).$$

Or,

$$\deg(R) = \deg(\text{rotation}) = \int d\varphi,$$

et par définition,

$$\deg(X_1) = \text{indice}(X).$$

(Pour une fonction de Morse f , on considérera $X = \nabla f$ et l'indice se calcule explicitement dans une carte particulière, car il ne dépend pas de la carte).

Maintenant la formule de Stokes donne, c'est bien écrit dans le Lafontaine :

$$\int \Omega = \int d\omega = \int \omega \rightarrow \int d\varphi = \text{indice}(X).$$

Ceci pour la relation entre courbure et indice de champs de vecteurs. (c'est lié à la connexion forme, qui induit la courbure et qui est produite par le repère mobile issu de X).

Maintenant un théorème, voir le Gramain ou Hirsch (Differential Topology), dit que sur une surface compacte, il y a une fonction de Morse f . On applique, ce qui précède à ∇f . Ceci revient à calculer un nombre lié aux différents indices de la fonction de Morse et qui est bien détaillé dans le livre de Hirsch (Differential Topology). Ceci revient à calculer l'homologie d'un complexe cellulaire et qui donne la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Pour ce qui est du calcul de la caractéristique d'Euler d'une somme connexe. C'est bien connu. Voir aussi dans le livre de J. Lafontaine.

26) Equation de Liouville : Pourquoi, lorsque la courbure de Gauss d'une surface est constante, K alors $K > 0$ la surface est localement isométrique à la sphère (un ouvert de la sphère), $K = 0$ elle est isométrique au plan (un ouvert du plan), $K < 0$ elle est isométrique à un ouvert de l'espace hyperbolique ?

En effet soit S une surface de métrique g , alors, on peut définir des coordonnées géodésiques polaires, (r, θ) , dans ses coordonnées $g = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2$. Alors la courbure de Gauss vérifie l'équation différentielle suivante $\partial_{rr}(\sqrt{G}) + K\sqrt{G} = 0$, avec les conditions à l'origine $\sqrt{G}(0, \theta) = 0$ et $\partial_r(\sqrt{G}(0, \theta)) = 1$. Clairement lorsque K est une constante, cette équation différentielle s'intègre facilement et donne la métrique de la sphère ou du plan ou du plan hyperbolique. $((\sin r)^2, \text{ ou } r^2 \text{ ou } (\sinh r)^2)$.

Si on note $\varphi : (r, \theta) \rightarrow \exp_x(r\theta)$, la carte définissant les coordonnées géodésiques polaires pour la surface S , on écrit alors, $\varphi^*(g) = dr^2 + G(r, \theta)d\theta^2 = \psi^*(g_0)$, avec ψ la carte définissant les coordonnées géodésiques polaires, selon qu'on soit sur la sphère, le plan, ou le plan hyperbolique (à partir de la carte exponentielle, $\psi : (r, \theta) \rightarrow \exp_y(r\theta)$).

Alors, φ, ψ , qui sont des cartes, sont des difféomorphismes avec $(\varphi \circ \psi^{-1})^*(g) = g_0$ et $\varphi \circ \psi^{-1}$ est l'isométrie cherchée. (Par exemple si $K > 0$, $\varphi : \Omega_1 \subset S \rightarrow]0, r_0[\times]a, b[,]a, b[\subset \mathbb{S}_1$ et $\psi : \Omega_2 \subset \mathbb{S}_2 \rightarrow]0, r_0[\times]a, b[,]a, b[\subset \mathbb{S}_1$, sont deux cartes dont les images sont les mêmes dans $]0, r_0[\times]a, b[,]a, b[\subset \mathbb{S}_1$ et $\psi^{-1} \circ \varphi : \Omega_1 \subset S \rightarrow \Omega_2 \subset \mathbb{S}_2$).

27) Sur le flot de Ricci et la conjecture de Poincaré : l'idée est qu'on déforme une métrique, a partir de l'équation du flot de Ricci pour obtenir une métrique de courbure de Ricci strictement positive, puis on réutilise le flot de Ricci pour déformer la métrique pour obtenir une métrique de courbure sectionnelle constante positive, (la variété est simplement connexe et compacte), elle est alors difféomorphe à la 3-sphère :

a) On part du Resultat de Gao et Yau ou Lohkamp, il existe toujours une métrique de courbure de Ricci strictement négative. Puis on utilise le flot de Ricci.

b) Par le blow-up et les estimations de Hamilton, on déforme la métrique pour obtenir une métrique de courbure de Ricci positive ou nulle (blow-up, à la limite). Ici, c'est dit dans le monographe de John-W Morgan et Gang Tian (Ricci flow and The Poincaré conjecture), on étend petit à petit le flot de Ricci par chirurgie (le travail de Perelman). La conjecture de Géométrisation. On passe d'une variété de courbure négative strictement à une variété de courbure positive ou nulle. (on change de métrique). (heuristiquement, si on note $R_k = \max R_t$ avec R_t la courbure scalaire, en divisant par R_k , on aurait, $Ricci < b(n) < 0 \Rightarrow \frac{Ricci}{R_k} > \frac{b(n)}{R_k} \rightarrow 0$, si $k \rightarrow +\infty$. En faisant le blow-up, a) on change d'échelle, b) il faut "recoller" les morceaux à la limite, pour avoir une variété et une métrique régulière qui sera de courbure sectionnelle positive ou nulle, c) la variété en question est notée \mathbb{M} de métrique g , dépendant du temps et de l'espace et obtenue par chirurgie (à la limite), telle que $\mathbb{M}(0) = \mathbb{M}_\infty(0) = M$ et $g(0) = g_\infty(0)$, avec M la variété de départ sur laquelle on a une nouvelle métrique, $g(0) = g_\infty(0)$ de courbure positive ou nulle.).

(Dans le cas blow-up avec $R_k \not\rightarrow +\infty$, voir l'article de Hamilton, référence 36 dans Morgan-Tian, on ne peut pas avoir collapse par les théorèmes de comparaison, voir Morgan-Tian (derniers chapitres, 15-16-17), on ne peut pas avoir $(0 \neq \pi_1(H_1) \subset ou = \pi_1(M) = 0)$, H_1 non compacte est difféomorphe à M qui est compacte, ce n'est pas possible, voir l'article de Hamilton, référence 36 de Morgan-Tian et on obtient alors la convergence. Notons le flot de Ricci ici est défini sur $(0, +\infty)$, sinon, on l'étend petit à petit, comme pour le Theoreme des equations differentielles, de Cauchy, ou le Theoreme des Geodesiques avec en plus le tenseur de Riemann uniformement borné (derniers chapitres de Morgan-Tian, pour la non collapse et donc convergence dans ce cas $R_k \not\rightarrow +\infty$). C'est ce qu'on a écrit avant, dans l'écriture ci-dessus entre Ricci, $R_k, b(n)$, c'est la convergence vers une métrique de courbure de Ricci > 0 partout.)

c) Dès qu'on a une métrique de courbure de Ricci positive ou nulle, elle doit être strictement positive quelque part, car comme on est en dimension 3 ($Weyl = 0$), si $Ricci = 0$, la variété ne peut pas être compacte, car elle serait de courbure sectionnelle nulle et simplement connexe, elle serait difféomorphe à \mathbb{R}^3 (On a $Riemann \geq 0$. Si $Riemann = 0 \Rightarrow Ricci = 0$ la variété compacte M serait difféomorphe à l'espace euclidien, ce n'est pas possible. Donc $\exists x_0$ tel que $Riemann_{x_0} \neq 0$ et ≥ 0 , en utilisant les valeurs propres de $Riemann \geq 0$ qui devient alors symétrique (Voir Morgan-Tian), il y a au moins une valeur propre $\lambda_{x_0} > 0$, comme $Ricci_{x_0} = trace(Riemann_{x_0})$ alors, (la trace ne dépend pas de la base), $Ricci_{x_0} = \lambda_{x_0} + \mu_{x_0} + \nu_{x_0} \geq \lambda_{x_0} > 0$ et donc, $Ricci_{x_0}(\theta, \theta) > 0, \forall \theta \in \mathbb{S}_2$). Par un argument d'Aubin, il existe une métrique conforme telle que la courbure de Ricci est partout strictement positive.

d) On conclut grâce au travail de Hamilton, on déforme la métrique par le flot de Ricci jusqu'à obtenir une métrique de courbure sectionnelle constante positive. la variété est simplement connexe et compacte, c'est la 3-sphère.

28) Sur l'article de Chen-Li :

On a aussi la compacité globale de Chen-Li, cité dans la section 4.1. Le resultat de Chen-Li utilise le fait qu'on a compacité au voisinage du bord lorsque $\|\nabla \log V\| \leq A$, puis il étend ce resultat lorsque $\|\nabla V\| \leq A_1$, pour cela il utilise l'extension des resultats de Brezis-Merle (Theorem 1 de Brezis Merle), qui reste vrai dans des domaines Lipschitzien dès qu'on a la régularité des solutions dans $W_0^{1,2}$, car le principe du maximum est valable dans ce cas (on utilise l'intégration par parties, qui est vrai dès que la régularité du bord est Lipschitzien. Pour l'inégalité de Sobolev aussi et la résolution d'un problème variationnel dans L^2 . Lipschitz suffit). Ceci pour la fonction u_2 du début de preuve de Chen-Li. (et aussi l'extension des fonctions harmoniques et la formule de Poisson, pour u_1 qui nécessite une application conforme). Voir la preuve du corollaire de l'article de Chen-Li.

(Voir l'article de Sweers-Nazarov. Journal.Diff.Equations. 2007. Pour les conditions de regularité $W^{2,p}$ des problemes sur des ouverts Lipschitziens.)

Remarque sur la preuve de Chen-Li : pour etendre la partie u_1 harmonique, il faut supposer le domaine analytique, pour pouvoir utiliser une transformation conforme qui reste invariante par le Laplacien. Principe de symetrisation de Schwarz. Donc, le resultat de compacite reste vrai avec la regularite smooth, lorsque on suppose $\|\nabla \log V\| \leq A$. Mais la regularite du domaine doit etre supposee analytique lorsqu'on passe a $\|\nabla V\| \leq A_1$.

Dans leur preuve Chen-Li, utilisent le fait que l'operateur est invariant par application de carte, ceci est possible si cette application est conforme, elle preserve le Laplacien. Puis, symetrise la fonction en symetrisant un probleme de Dirichlet, puis soustrayent les valeurs aux bords et ils obtiennent l'image de v_1 . Alors u_1 est l'image de v_1 par l'application de carte. Maintenant pour construire v_1 ils utilisent une symetrisation d'un probleme de Dirichlet, qui requiert les solutions dans $W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon)$, $p > 2$ (la formule de representation de Green reste valable, dans ce cas, voir la preuve dans Gilbarg-Trudinger). Puis, ils utilisent la formule integrale de Poisson (qui necessite d'avoir l'operateur Laplacien).

a) Pour utiliser la formule de Poisson, on conserve le Laplacien : transformation conforme φ .

b) Ils symetrisent $u \circ \varphi$ ils obtiennent une fonction $u_v \in C^1(\bar{B}_\epsilon(0)) \cap W^{2,p}$.

c) Ils resolvent : $-\Delta v_1 = -\Delta u_v$ avec condition de Dirichlet sur $B_\epsilon(0)$.

d) Ils utilisent la formule integrale de Poisson pour $v_1 - u_v \in W^{2,p} \cap C^2(B_\epsilon) \cap C^1(\bar{B}_\epsilon)$, $p > 2$. Sur le bord, il n'y a que les valeurs de u .

(Ce travail revient à symetriser une fonction harmonique qui nécessite le theoreme de symetrisation de Schwarz, qui necessite une application conforme, donc un domaine de depart Ω analytique).

Remarque : sur le fait que la régularité du domaine dans (De Figueiredo-Lions-Nussbaum et Chen-Li) est au moins $C^{2,\beta}$, $\beta > 0$. Soit $\alpha_y = \langle \nu_1 | \nu(y) \rangle$, l'angle avec la normale qui doit etre > 0 , avec $y \in \partial\Omega$, qu'on devrait obtenir pour appliquer la méthode moving-plane. Ici, $\nu(y)$ est la normale au bord en y : Pour définir l'angle, il suffit d'avoir une tangente a la courbe de $y \rightarrow \nu(y)$, et donc une dérivée de $\nu(y)$, (l'application de carte φ est au moins deux fois dérivable). Pour avoir une branche continue de 'cones', il suffit que $y \rightarrow (\nu(y))'$ soit continue, (l'application de carte φ est C^2 , φ'' continue). Pour que l'angle $\alpha_y > 0$ soit strictement positif, il suffit que la tangente a la courbe de $\nu(y)$ soit non nulle, il suffit alors d'avoir la regularité $C^{0,\beta}$, $\beta > 0$ de la tangente (forme arrondie : continue et arrondie : $C^{0,\beta}$). (Donc, il suffit que l'application de carte soit $C^{2,\beta}$, $\beta > 0$).

29) Sur l'article de C.C. Chen et C.S. Lin : (Comm. Pure. Appli. Math. 1997) :

1) Application du principe du maximum et le lemme de Hopf

2) Fonction auxiliaire pour attenuer la perturbation due a la variation de la courbure scalaire prescrite et les conditions aux bords.

3) Ils s'assurent de la positivité de la fonction finale obtenue comme somme d'une fonction et la fonction auxiliaire. La positivité sert dans le raisonnement par l'absurde quand on prend le sup des λ tel que ..., le fait de prendre un sup signifie qu'au dela du sup les fonctions sont negatives ou nulles en des points, les conditions dans cet articles assurent que le point limite reste dans le domaine (car les fonctions sont strictement positives au voisinage du bord), ils appliquent le principe du maximum et (ou) le lemme de Hopf au point limite (point minimum, on peut parler de principe du minimum ou principe du maximum). (raisonnement par l'absurde ($\sup \lambda < \lambda_1 = -1/4$) et application du principe du maximum et le lemme de Hopf au point limite qui est censé etre à l'interieur du domaine).

De plus, les fonctions h_λ sont C^1 , pour le voir, elles sont definies par la representation integrale de fonction de Green, elles verifient au sens des distributions et d'Agmon C_0^2 , une EDP, ici aussi on utilise Fubini, Fubini-Tonelli et les definitions des fonctions de Green au sens C_0^2 pour les fonctions test, pour se ramener au Theoreme d'Agmon et conclure que h_λ sont C^1 . (Ecrire $\Delta(h^\lambda - h^\mu) = \bar{Q}_\lambda - \bar{Q}_\mu$, pour la continuité en λ). Aussi, $h^\lambda \geq 0$ sont nulles au bord $\Rightarrow \partial_{x_1} h^\lambda \geq 0$ et par le lemme de Hopf $\partial_\nu(w_\lambda - h^\lambda) < 0$, (principe du minimum), avec $\partial_\nu = -\partial_e = -\partial_{x_1}$, donc, $\partial_{x_1} w_\lambda > \partial_{x_1} h^\lambda \geq 0$).

4) pour prouver que les courbures prescrites sont nulles au point "blow-up", ils utilisent un raisonnement du type $K(y) = \int_0^1 \langle \nabla K(y_i + sM_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y)) | M_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y) \rangle ds$ puis font la difference :

$$K(y) = \int_0^1 \langle [\nabla K(y_i + sM_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y)) - \nabla K(y_i)] | M_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y) \rangle ds + \\ + M_i^{-2/(n-2)} \langle \nabla K(y_i) | I_\delta(y) \rangle$$

a) Dans le premier ensemble $I_\delta(y)$ est borné car y est borné, et son symétrisé aussi, car $\lambda_0 \leq \lambda \leq -1/4$.

b) Dans la preuve de l'estimation asymptotique $M_i^{2/(n-2)}|\nabla K_i(y)|^{1/(\alpha-1)} \leq C$, on utilise le raisonnement ci-dessus des que le gradient est holderien ou C^2 . (comme la difference ci-dessus et un raisonnement du type $|\nabla K(y_i + M_i^{-2/(n-2)}I_\delta(y)) - \nabla K(y_i)| \leq BM_i^{-2\alpha/(n-2)}|I_\delta(y)|^\alpha$ dans la formule de Taylor integrale (ci-dessus). Et apres les integrales du type Giraud. Dans la partie qu'ils considere, les $M_i^{-2/(n-2)}I_\delta$ sont bornées.

30) Sur le probleme de Brezis-Merle : Pourquoi la condition sur le potentiel V est $W^{1,\infty}$ pour obtenir la compacité des solutions $u > 0$?

1) On a e^u et le potentiel V sont liés par dualité $\int Ve^u < +\infty$, $e^u \in L^1$, $V \in L^\infty$. on considere le potentiel V comme une forme lineaire, une distribution et donc de possibles derivées (entieres).

Par dualité et le fait qu'on considere le probleme de maniere globale : on a : la condition maximale et globale $e^u \in L^1 = W^{0,1}$, par dualité des Sobolev, le minimum requis pour le potentiel V est $W^{1,\infty}$. Si on veut diminuer la régularité de $V \in W^{1-s,\infty}$, $1 > s > 0$, qui est presque l'espace $(1-s)$ -holderien, alors par dualité, e^u doit etre $e^u \in W^{s,1} > W^{0,1} = L^1$, or la condition $e^u \in L^1$ est maximale.

a) $e^u \in L^1 = W^{0,1}$: pas de derivée pour e^u et $e^u \in L^1 \Rightarrow$ au moins une derivée pour V et $V, \nabla V \in L^\infty \Leftrightarrow V \in W^{1,\infty}$ au minimum :

b) Si on veut diminuer la régularité de V et utiliser la dualité et l'integration par parties, on part aussi du fait qu'on a la compacité pour $V \in W^{1,\infty}$:

$\int \nabla V \cdot e^u < +\infty \Rightarrow \int \nabla^{1-s} V \cdot \nabla^s(e^u) < +\infty \Rightarrow e^u \in W^{s,1} > W^{0,1} = L^1$, or la condition $e^u \in L^1$ est maximale.

2) Le cas holderien depend du point et du nombre de points, il est local. On a la compacité avec $\int Ve^u \leq bC < 16\pi$ ou $\int Ve^u \leq bC < 24\pi$ et V holderien uniformement. Brezis et Merle donnent des exemples de (u, V) qui blow-up avec $\int Ve^u \leq bC < 16\pi$ ou $\int Ve^u \leq bC < 24\pi$.

(31) Sur le degré topologique et l'equation avec non linearité exponentielle :

Voir l'article de Brezis-Turner. Comme on l'a dit concernant l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum, ils considerent un operateur M tel que $M(0) = 0$, nulle en 0. On peut considerer :

$$-Lu = V(x)(e^u - 1), \quad 0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1, \quad \|\nabla V\|_\infty \leq A$$

$f(u) = e^u - 1$ et $f(0) = 0$, $(-L)^{-1}$ un operateur compact. voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : $M = (-L)^{-1}(V(x)f(u))$. λ_1 premiere valeur propre de $-L$ avec condition de Dirichlet.

Voir l'article de Brezis-Turner. Une des conditions pour prouver l'existence de solutions est : $g(x, u, p)/u < \lambda_1$ pour u voisin de 0. et la presence de la nonlinearité exponentielle en $+\infty$ assure que les $t \geq 0$ de l'article de Brezis-Turner sont uniformément bornés. Il reste à borner les solutions u positives ou nulles pour appliquer la théorie du degré topologique. Ceci se fait par l'identité de Pohozaev en ramenant l'equation précédente a l'equation qu'on a considéré dans des articles précédents avec seulement e^u et non $e^u - 1$. En resolvant $-Lw_1 = V$, $-Lw_2 = tJ$ avec condition de Dirichlet, ($J = \varphi_1$ premiere fonction propre) ces fonctions w_1, w_2 sont uniformément bornées dans $C^2(\bar{\Omega})$ car t est borné unifromément et V aussi. Donc, on s'est ramené, dans un domaine régulier étoilé par rapport a l'origine a notre equation considrée dans des articles précédents et l'identié de Pohozaev donne le résultat de borne uniforme de u , comme voulu dans Brezis-Turner.

Voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum, pour l'idée sur le degré topologique et son applications.

Voir l'article de : H.H.Zou dans Calculus of variation. Pour une idée sur l'application du degré topologique.

Voir aussi, l'article de Brezis-Turner.

Donc :

Degré topologique $\Rightarrow \forall V \in C^\infty, 0 < a \leq V \leq b < \lambda_1, \|\nabla V\|_\infty \leq A, \exists u \in C_0^2(\bar{\Omega}), -Lu = V(x)(e^u - 1)$, et $u > 0$ dans Ω .

Soit w tel que $-Lw = V$ avec condition de Dirichlet. Par le principe du maximum, théorème de Dualité et les estimations elliptiques, $w \geq 0$ et $w > 0$ dans Ω et $\|w\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c_1(a, b, A, \Omega)$. Soit $W = Ve^{-w}$, alors w et $u+w$ sont deux solutions distinctes de $-Lv = We^v$ avec conditions de Dirichlet et $0 < a_1 \leq W \leq b < \lambda_1$, et $\|\nabla W\|_\infty \leq A_1$, avec $\|v\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$.

Donc : Pour tout V on a W dans le meme type de classe avec deux solutions distinctes par le degré topologique et l'ensemble des solutions est borné dans $C^2(\bar{\Omega})$.

On a : Pour tout V il existe W dans la meme classe que V tel que l'équation $-Lv = We^v$ (avec condition de Dirichlet), possède au moins 2 solutions distinctes dont une topologique et ces solutions sont bornées uniformément dans $C^2(\bar{\Omega})$.

Donc : si on note C le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$.

Degré topologique $\Rightarrow deg = i_C = -1 \Rightarrow$ il y a un point fixe pour $u \rightarrow M(u) \Rightarrow \forall V \in C^\infty, \exists W \in C^\infty, W(x) = V(x)e^{-w}$, tel que l'équation $-Lv = We^v$ possède 2 solutions distinctes dans $C_0^2(\bar{\Omega})$ pour W avec $0 < a_1 \leq W \leq b_1 < \lambda_1$ et $\|\nabla W\|_\infty \leq A_1$ et $\|v\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$.

1) Donc on a : Pour tout V il existe W dans la meme classe que V tel que l'équation $-Lv = We^v$ (avec condition de Dirichlet), possède au moins 2 solutions distinctes dont une topologique et ces solutions sont bornées uniformément dans $C^2(\bar{\Omega})$.

2) a)(Equation sinh-Poisson en mecanique statistique et en physique des plasmas). On peut prendre $M = (-\Delta)^{-1}(V(x)g(u))$ avec $g(u) = \sinh(u)$. On obtient alors $u > 0$ solution par le degré topologique de l'équation sinh-Poisson, qui modelise la 2d-turbulence en mecanique statistique et apparait en physique des plasmas. Voir les prints de Pablo Figueroa et de Joel Spruck. Donc : si on note C le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$, on a $deg = i_C = -1$ et l'application $u \rightarrow M(u)$ possède un point fixe.(Voir l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum et ce qu'on a écrit sur le degré topologique, au debut de ce print). Et on a une solution topologique de : $-\Delta u = V(x) \sinh(u)$ avec condition de Dirichlet et $u \not\equiv 0, u \geq 0$ (par le principe du maximum $u > 0$ dans Ω), pour $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$ et $\|\nabla V\|_\infty \leq A$ ou V avec poids holderrien $(1 + |x - x_0|^{2\beta}), \beta \in (0, 1/2), x_0 \in \partial\Omega$ avec Ω particulier, une couronne et, $A = \frac{a}{2(1+2^{2\beta})}$, la solution u est uniformément bornée dans $C^2(\bar{\Omega})$, $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, \beta, \Omega)$.

b) On peut faire la meme chose en considerant une singularité au bord. On peut prendre $M = (-\Delta)^{-1}(\frac{V(x)}{|x-x_0|^{2\alpha}}g(u))$ avec $g(u) = \sinh(u), x_0 \in \partial\Omega, \Omega$ une couronne et $\alpha \in (0, 1/2)$, (ca reste vrai avec $\alpha \in (-\infty, 0)$), et λ_1 premiere valeur propre avec condition de Dirichlet et avec poids singulier, $(-\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1 \frac{1}{|x-x_0|^{2\alpha}}$, qu'on resout par la methode variationnelle comme dans le cas regulier), et $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1, \|\nabla V\|_\infty \leq A = \frac{(-\alpha + 1)a}{2}$. Si on note C le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$, on a $deg = i_C = -1$ et l'application $u \rightarrow M(u)$ a un point fixe et on obtient une solution topologique de : $-\Delta u = \frac{V(x)}{|x-x_0|^{2\alpha}} \sinh(u), u \not\equiv 0$ et $u \geq 0$ (par le principe du maximum $u > 0$ dans Ω) avec condition de Dirichlet et la solution u est uniformément bornée dans $C^1(\bar{\Omega})$, $\|u\|_{C^1(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, \alpha, \Omega)$.

c) On obtient la meme chose avec $\alpha \in (-\infty, 0)$ avec une solution topologique avec singularité au bord et bornée uniformément dans $C^2(\bar{\Omega})$.

d) On peut faire la meme chose que dans le point a) avec l'operateur L du point 1), on prend $M = (-L)^{-1}(V(x)g(u))$ avec $g(u) = \sinh(u)$. On obtient dans le cone $C = \{u \in C^1(\bar{\Omega}), u \geq 0\}$, $deg = i_C = -1$ et $u \rightarrow M(u)$ a un point fixe. On obtient une solution topologique de : $-Lu = V(x) \sinh(u)$ avec condition de Dirichlet et $u \not\equiv 0$ et $u \geq 0$ (par le principe du maximum $u > 0$ dans Ω), pour V tel que, $0 < a \leq V(x) \leq b < \lambda_1$ et $\|\nabla V\|_\infty \leq A, \Omega$ un domaine régulier étoilé par rapport à l'origine, λ_1 premiere valeur propre de $-L$ avec condition de Dirichlet, la solution u est uniformément bornée dans $C^2(\bar{\Omega})$, $\|u\|_{C^2(\bar{\Omega})} \leq c(a, b, A, \Omega)$.

Ceci s'applique aux systemes du type $-\Delta u = Ve^v$, $-\Delta v = We^u$ avec conditions de Dirichlet en considerant un operateur de vecteurs :

$M(u, v) = (-\Delta)^{-1}(V \sinh v, W \sinh u) + t(\varphi_1, \psi_1)$, $t \geq 0$, avec singularité interieure x_0 , (pour le cas holderien d'ordre $\beta > 0$, ca marche avec une singularité pour une equation dans un systeme, reste le cas ou on a la singularité interieure holderienne dans les deux equations du systeme.) ou singularité au bord x_0 et φ_1, ψ_1 premieres fonctions propres du Laplacien avec conditions de Dirichlet. avec singularité ou pas, $(-\Delta)^{-1}$ s'applique aux deux equations du systeme.

Dans le cas de singularité interieure $0 = x_0 \in \Omega$, l'estimation a priori au voisinage du bord est obtenue dans les articles de, De Figueiredo-Do O-Ruf au bord et interieure (Par la methode moving-plane, comme dans De Figueiredo-Lions-Nussbaum, De Figueiredo-Do O-Ruf le font et le disent dans leur article) et Bartolucci-Tarantello-Chen-Lin (eux utilisent Pohozaev-Rellich pour quantifier, calculer la masse) pour une equation et x_0 singularité a l'interieure, c'est vrai pour une equation (reste le cas d'un systeme avec 0 comme singularité positive dans les deux equations du systeme).

Ici, on s'interesse au cas avec singularité au bord, pour des systemes avec singularité au bord ou poids Holderien avec singularité au bord, sur une couronne c'est possible.

Remarque sur les inégalités du type Harnack sup inf :

a) La théorie des cordes (string theory) unifie les théories de Jauge (des champs), des champs conformes, (théorie des champs de Liouville), de Yang-Mills, et la gravitation quantique (Kaluza-Klein, $n + 1$, $n = 3, 4, 5, 6, 9, 10$ ou plus générale $n \geq 3$). Les inégalités du type Harnack apparaissent dans ces trois théories, on peut considerer alors que cette notion est une notion de la théorie des cordes. Corde qui est un 'fil' ou un ensemble de particules.

b) Concernant la minoration du sup \times inf, on a les exemples de Brendle et Marques-Brendle pour l'equation Yamabe (variété sans bord, sphere, et non loc.conf.plate) en dimension $n \geq 25$ (P blow-up, pole sud de la sphere et $Weyl(P) \neq 0$). Et celui de Khuri-Disconzi pour l'Equation de Yamabe (variété à bord, demi-sphere, et non loc.conf.plate) en dimension $n \geq 25$ (P , blow-up, pole sud et $Weyl(P) \neq 0$). Dans le cas plat, on utilise l'exemple de C.Chen-C.S.Lin dans Commun.Pure.Appl.math.1997, ici, $n \geq 3$.

32) Equation de la courbure scalaire prescrite (et du type Yamabe) en dimension 4 et champs de Yang-Mills :

a) exemple : 1-si on note SW la variété hyperbolique sans bord et orientable de dimension 3, de Seifert-Weber, alors $SW \times S_1$ est une variété loc.conf.plate de courbure scalaire constante stric.negative de dimension 4, elle est lié aux champs de Yang-Mills. 2- En dimension 4, aussi on considere, la variété de Davis ou le produit de deux surfaces de courbure sectionelle non opposées et de courbure scalaire stric.negative (donc, non-loc-conf.plate $S_{-1} \times S_{-1}$ (elle est d'Einstein) avec S_{-1} une surface de courbure scalaire constante < 0), on obtient une variété Riemannienne lié aux champs de Yang-Mills. On peut considerer sur ses variétés l'Equation de la courbure scalaire prescrite (dimension 4).

Dans le cas positif (pour l'equation de Yamabe et du type Yamabe), $S_2 \times S_2, S_3 \times S_1$.

b) En physique (description de la force nucléaire responsable de la cohesion des protons-neutrons dans le noyau) le cas le plus important est porté aux variétés de dimension 4 avec une metrique Riemannienne ou Lorentzienne.

c) Regarder l'article de, Andrzej Derdzinski, dont le titre est : "Riemannian manifolds with harmonic curvature", il y a la fonctionnelle de Yang-Mills et pour lui la derivée du tenseur de courbure donne les points critiques de la fonctionnelle de Yang-Mills. En fait il s'agit de la variété, de la metrique et de la connection. C'est la courbure de Riemann qui est un champ de Yang-Mills.

d) Pour ce qui est des champs de Yang-Mills en dimension 4 et la théorie de Seiberg-Witten, apparait la fonctionnelle de Yamabe et l'invariant de Yamabe et la courbure scalaire et les metriques conformes, dans des articles de M.Gursky par exemple en dimension 4 :

Si on prend une variété Riemannienne compacte sans bord (M^4, g) , de dimension 4 avec champ de Yang-Mills, cela veut dire que le tenseur de Riemann, $Riem = F_{\nabla}$ est un champ de Yang-Mills. Comme la courbure scalaire S_g se déduit du tenseur de Riemann (elle est liée

au tenseur de Riemann), alors, S_g est un objet de la physique et l'Equation de la courbure scalaire prescrite, en dimension 4, sur les variétés de Yang-Mills, est liée à la physique puisqu'elle contient S_g . De même pour la métrique conforme, qui est liée à g , la métrique Riemannienne g est appelé en dimension 4 un instanton.

La théorie de Yang-Mills existe sur des variétés non-compactes ou complètes. (non compact, or complete Manifolds with harmonic curvature). Voir Taubes et les articles de Gabor Etesi et Yawei Chu. Exemples : variétés d'Einstein (Einstein manifolds) $n \geq 3$ et les variétés loc.conf. plates de courbure scalaire constante (pour $n \geq 4$, en particulier pour $n = 4$) ou Ricci parallèle, en particulier les variétés de courbure sectionnelle constante.

Du point de vue de la physique, en dimension 4, on peut considérer les champs de Yang-Mills sur une variété compacte ou complète ou non compacte et localement on a une notion de champs de Yang-Mills. On peut considérer au départ la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs de Yang-Mills. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, observation, à partir des données et du champs de Yang-Mills).

Comme pour l'équation de Schrödinger : La donnée est la courbure scalaire prescrite V (elle est prescrite, pulsion ou signal ou potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" qui lie V à S_g , S_g est un "champ scalaire de Yang-Mills". L'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 et sur une variété de Yang-Mills de dimension 4 est un objet de la physique.

Aussi, c'est écrit dans l'article de T.H. Parker (Gauge Theories on four dimensional Riemannian manifold, Comm.Math.Physics, 1982), si on considère un terme ("potentiel de Higgs") du type $P(u) = au^4 + mu^2$ avec $u > 0$ la solution et a, m deux fonctions réelles avec $m \leq 0$ possible, l'équation bosonique dans un champs de Yang-Mills devient du type Yamabe (ou de type courbure scalaire prescrite). ($\Delta_g u + (\frac{s_g}{6} + 2m)u = -4au^3$, $\Delta_g = -\nabla^i \nabla_i$ et s_g la courbure scalaire). On conclut, voir l'article de T.H. Parker (dans un champ de Yang-Mills, l'équation bosonique, induit (avec le fait qu'on a un champ de Yang-Mills, les lagrangiens s'annulent et la dérivée par rapport à la connexion est nulle), que le résidu est nul et constitue une solution de couplage des champs). (le lagrangien Yang-Mills bosonique, $Y = B_1 + B_2$ avec B_1 la fonctionnelle de Yang-Mills et B_2 la lagrangien bosonique, la loi de la particule : $\dot{Y} = dY = 0 = dB_1 + dB_2 = 0$, si on se place dans un champ de Yang-Mills, alors, $dB_1 = 0$, ce qui implique que $dB_2 = 0$, si de plus, $u > 0$ est solution de l'équation bosonique (cela veut dire que $\frac{\partial B_2}{\partial u} = 0$), ceci implique que $\frac{\partial B_2}{\partial \nabla} = 0$ et le résidu est nul : $\Sigma < \nabla_j u | \rho(e_i) u > = 0$ et donc, les deux équations du système de couplage sont vérifiées. Donc l'équation bosonique (du type courbure prescrite) dans un champ de Yang-Mills suffit à déterminer le système. Ces deux conditions, champs de Yang-Mills et équation bosonique constituent une solution particulière du système.)

On peut aussi considérer chaque lagrangien seul dans n'importe quelle formulation, par exemple ici, celui de Yang-Mills seul et celui bosonique seul. Ici (dans l'article de Parker, T.H) on a le lagrangien de Yang-Mills bosonique.

33) En dimension 2 : équation de Liouville :

a) Equation de la courbure scalaire prescrite sur la sphère de dimension 2 (vortex equation) ou un ouvert de \mathbb{R}^2 (vortex equation) ou surface de dimension 2 (vortex equation). Mean-Field-equation.

b) Voir les articles de Crandall-Rabinowitz, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, Chen-Li, pour la provenance de ses équations : Géométrie (courbure de Gauss), Gazs, combustion, astronomie et astrophysique.

c) En dimension 2, aussi, c'est un cas particulier des champs de Yang-Mills, la théorie de Glashow-Weinberg-Salam, modélise les interactions (faibles) électromagnétiques des particules. C'est la théorie de jauge (théorie de champs) avec un groupe de jauge (groupe de symétries locales) $U(1) \times SU(2)$

voir le livre de G. Tarantello Self-dual Gauge theories.

d) L'équation de Liouville ou de type Liouville apparaît aussi dans le phénomène de "cordes cosmiques", un objet de l'univers "cosmic strings" et à ne pas confondre avec la théorie des cordes. Voir l'article de J. Spruck et Yisong Yang (cosmic strings). (On prend une métrique Lorentzienne $ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij} dx^i dx^j$, la métrique g_{ij} est définie sur une surface, M de

dimension 2 et apres on peut choisir g_{ij} conforme a une autre metrique, par exemple $g_{ij} = e^u \delta_{ij}$ et on choisit le champ particulier). C'est là, par exemple l'idée générale.

e-En dimension 2 : c'est aussi, la theorie des champs de Liouville en dimension 2. Qui a été étudiée pour des surfaces à courbure négative et plus récemment sur la sphere de dimension 2. (LCFT, Liouville conformal field theory (2+1)).

De meme ici, du point de vue de la physique, de la chimie, astronomie ou la physique quantique, en dimension $n = 2$, on peut considerer des sources, des champs sur un ouvert de \mathbb{R}^2 ou une surface compacte ou complete ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considerer au depart l'ouvert ou la surface et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, observation, à partir des données et du champs ou des parametres).

Ici aussi, comme pour l'equation de Schrodinger : La donnée est la fonction V , (V est la source ou pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" ou emission, qui lie V à la donnée de départ, par exemple S_g (dans le cas d'un ouvert $S_g = 0$), S_g est un "champ scalaire". Il se peut que ce ne soit pas S_g comme pour l'operateur $\Delta + \epsilon(x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2)$, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$.

34) En dimension $n \geq 3$: Relativité générale ($n = 3$) et Cosmologie quantique ($n \geq 3$) :

Cette idée de partir d'un espace Lorentzien $n + 1$ et de choisir une metrique conforme, sur la variété M , en partant de l'espace temps $M \times (0, \delta)$, se généralise aux dimensions superieures. (Il y a la correspondance, ADS-CFT(Anti-de-Sitter, Conformal field theory) proposée par Juan Maldacena ($\Lambda < 0$, constante cosmologique strictement négative dans l'equation d'Einstein). Les equations d'Einstein classiques et quand la dimension $n \geq 3$ c'est la "quantum-cosmology qui correspond au cas $\Lambda = 0$, equation d'einstein du début, (1915)). On a $ds^2 = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$ avec $g_{ij} = u^{4/(n-2)} g_0$, une metrique conforme a celle de départ g_0 sur M .

L'idée générale est la suivante : (On part de la formulation Lorentzienne ($n + 1$), $M \times (0, \delta)$, d'Einstein en relativité générale et on introduit sur la variable espace des metriques conformes dans la fonctionnelle du champ (ici au lieu de la fonctionnelle du champ comme dans la théorie de Yang-Mills, on a l'equation d'Einstein), on a des champs particuliers liés au changement de metriques conformes, tout cela dans le but d'etudier les interactions des particules et des astres (gravitation dûe à la courbure de l'espace temps ou à la formulation en $n + 1$ et les ondes qui sont les effets de la gravitation ou des champs, en particulier gravitationnel, un autre champ est le champ T d'energie-impulsion, peut etre vu comme une donnée, l'interaction est ecrite dans l'equation d'Einstein ci-dessous, gravitation, $Ricci^\gamma, R^\gamma$, et les données ou un autre champ, est le tenseur T). C'est l'adpatation à ($n + 1$) de la théorie d'Einstein, en relativité générale, qui est en ($3 + 1$). L'espace Anti-de-Sitter est une solution particuliere des equations d'Einstein, comme l'espace de Minkowski ou la metrique de Schwazrchild, l'inconnu ici est un espace Lorentzien (V, γ) de metrique Lorentzienne γ , qui verifie l'equation d'Einstein $Ricci^\gamma - \frac{1}{2} R^\gamma \gamma = T$, avec $Ricci^\gamma, R^\gamma, T$ respectivement le tenseur de Ricci et la courbure scalaire et le tenseur d'Energie-impulsion. Dans certains cas, cela revient à resoudre ce qu'on appelle le probleme de Cauchy en relativité. par exemple $T = 0 \Rightarrow Ricci^\gamma = 0$. Un autre cas particulier, on en parlé ci-dessus, est de trouver des solutions du type $V = M \times (0, \delta)$ et $\gamma = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$ avec $g = u^{4/(n-2)} g_0$. Resoudre les equations des contraintes pour (V, γ) particuliers avec la méthode conforme de Lichnerowicz. On prend $V = M \times (0, \delta)$ avec $\gamma = -dt^2 + g_{ij} dx^i dx^j$, on transforme les equations d'Einstein en 2 Equations des contraintes (Probleme de Cauchy, par les relations Gauss-Codazzi), puis on prend $g = u^{4/(n-2)} g_0$ sur M , on transforme les 2 equations des contraintes en un systeme de deux equations elliptiques. Einstein scalar field Lichnerowicz equations. Voir, Hebey, Pollack, Pacard, Choquet-Bruhat, Bartnik.)

Remarque : Pour ce qui est de la théorie de Yang-Mills, on s'interesse à une fonctionnelle du champ, on peut se ramener à la dimension 2 et utiliser la methode conforme comme dans Spruck-Yisong (cosmic-strings) ou d'autres théories avec fonctionnelle de champs sur une variété Lorentzienne de dimension 4. ($ds^2 = -dt^2 + dz^2 + g_{ij} dx^i dx^j$) (exemple, Glashow-Weinberg-Salam, combine fonctionnelle de Yang-Mills et theorie conforme en 2 dimensions). Ici dans ADS-CFT ($\Lambda < 0$ ou bien $\Lambda = 0$ et on retrouve les Equations d'Einstein classiques avec $n = 3$ pour la relativité générale et $n \geq 3$ pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology"), on remplace la fonctionnelle par l'equation d'Einstein. De meme, ici, dans la relativité générale

($n = 3$) et pour la cosmologie quantique ou "quantum cosmology" ($n \geq 3$), on remplace la fonctionnelle par l'équation d'Einstein.

a) il y a une application et réalisation en physique, en $(3 + 1)$ et $(4 + 1)$ et $(6 + 1)$ de la correspondance de ADS-CFT, de Juan.Maldacena (on voit bien le problème du bon espace-temps). Et aussi $(2 + 1)$ (LCFT, Liouville conformal field theory).

La correspondance ADS-CFT correspond à l'équation d'Einstein avec une constante cosmologique $\Lambda < 0$ (Anti-de-Sitter) : $Ricci^\gamma - \frac{1}{2}R^\gamma g + \Lambda g = T = 0$. Si $\Lambda = 0$, on retrouve l'équation d'Einstein (1915) écrite plus haut, et les théories en question sont : $n = 3$, la relativité générale et $n \geq 3$ la cosmologie quantique ou "quantum cosmology".

Il y a des auteurs qui font référence à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps avec $\Lambda < 0$. Dans la théorie classique d'Einstein ($\Lambda = 0$), c'est la "quantum cosmology", trouver le bon espace-temps pour $n \geq 3$.

b) Pour ce qui est des équations d'Einstein et méthode conforme : ($n \geq 3$ ("quantum-cosmology") et $n = 3$ qui correspond à la théorie de la relativité générale :) Voir les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, dans general relativity and quantum cosmology. Cosmologie quantique pour $n \geq 3$. (il y a des auteurs qui font référence à la correspondance ADS-CFT, qui essaie de trouver le bon espace-temps pour $n \geq 3$ avec $\Lambda < 0$. Ici, on a la théorie classique d'Einstein ($n = 3$ relativité générale et "quantum cosmology" pour $n \geq 3$ avec $\Lambda = 0$)).

(Equation d'Einstein classique : $\Lambda = 0$, (1915) cosmologie). Voir le monographe de : E.Hebey, D. Pollack, F. Pacard, Y. Choquet-Bruhat, R. Bartnik : dans la théorie des champs de Klein-Gordon massive le potentiel $V(\Psi) = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$. (les données $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$ peuvent être choisies librement ainsi que la métrique g_0 de la variété Riemannienne).

Voir aussi les articles de Choquet-Bruhat-Isenberg-Pollack, la variété Riemannienne (M, g_0) peut être compacte sans bord ou non compacte. Voir la Thèse de C.Valcu.

c) On part des équations de contraintes qui dérivent des équations d'Einstein et qui sont obtenues par les équations de Gauss-Codazzi (on contracte le tenseur de Riemann dans les équations de Gauss-Codazzi pour avoir le tenseur de Ricci). On contracte le tenseur de Ricci pour faire apparaître la courbure scalaire et on sépare les termes en variables temporelles et spatiales. Puis on utilise une métrique conforme.

d) Inversement, dès qu'on a une solution des équations de contraintes avec champ scalaire, il existe une solution des équations d'Einstein, un espace-temps maximal unique avec une métrique Lorentzienne, d'après Choquet-Bruhat et Choquet-Bruhat-Geroch. C'est ce qu'on appelle le formalisme de Choquet-Bruhat-Geroch-Lichnerowicz. (Il existe un espace temps (L, γ) maximal et unique à isométrie près avec γ Lorentzienne, et un plongement $i : M \rightarrow L$, tel que $i^*(\gamma) = g$, (L, γ) 'prolonge' (M, g) et les autres paramètres, comme le champ scalaire par exemple). Voir le print de B. Premoselli et l'article de A. Carlotto (The general relativistic constraints equations).

Pour chaque solution des équations des contraintes on a une solution des équations d'Einstein, on a une multitude d'univers ou plusieurs espace-temps. La multitude d'espace-temps, modélise aussi la multitude d'états quantiques, en particulier c'est la combinaison entre la gravité et les différents champs dont le champ électromagnétique et d'autres champs : Yang-Mills, Klein-Gordon, fluides, etc. Cela veut dire que du point de vue mathématique on a plusieurs espace-temps alors que, du point de vue de la physique, il y a plusieurs états quantiques ou plusieurs fonctions d'ondes à l'instant $t = 0$, dans le même espace ou variété M avec des propriétés concernant les fonctions d'ondes ou états quantiques (Plusieurs ondes au même instant qui sont dans un espace commun, et, différents au même temps). Ceci est un modèle mathématique pour expliquer l'existence de plusieurs états quantiques ou fonctions d'ondes, qui sont à la fois différents, dans plusieurs espaces différents, et dans un même espace au même temps : $(M, g_0, \psi, \sigma, \tau, \pi)$, modèle de base commun à tous les espaces, qui est lui-même un 'univers' de 'paramètres'. Phénomène physique \leftrightarrow Propriété mathématique : i) Etat quantique \leftrightarrow fonction d'onde $u > 0$, et, ii) extra-dimensions ou dimensions supplémentaires \leftrightarrow propriété des fonctions d'ondes : $\sup u = f(\inf u)$, (notion d'enroulement, de torsion), et les 2 valeurs (\sup, \inf).

Dans un article de Choquet-Bruhat (1968), on ne peut pas avoir existence globale d'un espace temps car d'après Penrose et Hawking, les Eq de la relativité d'Einstein développent des singularités. Mais on a existence locale d'un espace temps $(-t_0, t_0) \times M, t_0 > 0$ et unicité locale et globale.

Théorie de la gravitation quantique : du type Kaluza-Klein. La théorie de Kaluza-Klein c'est en $(4 + 1)$ comme espace-temps avec une dimension cachée. Les théories du 'type' Kaluza-Klein, c'est en $(5 + 1), (6 + 1), (n + 1), n = 9, 10$ ou $(n + 1), n \geq 3$ avec plusieurs dimensions cachées.

Pour ce qui est des solutions des Equations d'Einstein par la méthode conforme de Lichnerowicz-Choquet-Bruhat-York : on a :

i) Si on prend $\Psi = 0, \tau \equiv \text{constante} \neq 0, \sigma = \pi = 0$, alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'équation de Yamabe (dans "le cas négatif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

ii) Si on prend $\Psi \equiv \text{constante} \neq 0, \tau = 0, \sigma = \pi = 0$, alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'équation de Yamabe (dans "le cas positif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

iii) Si on prend $\Psi \neq \text{constante}, \sigma = \pi = 0$ et $\tau = 0$ alors $W = 0$ est une solution et $u > 0$ est solution de l'équation du type courbure scalaire prescrite avec $h = S_{g_0} - |\nabla\psi|_{g_0}^2 \leq S_{g_0}$ (dans "le cas positif", la variété n'est pas nécessairement, compacte sans bord).

De même ici, du point de vue de la physique, de l'astronomie ou de la cosmologie ou de la cosmologie quantique, en dimension $n = 3$ ou $n \geq 3$, on peut considérer les champs sur une variété compacte ou complète ou non compacte et localement on a une notion de champs local. On peut considérer au départ la variété et puis on regarde ce qui se passe localement, on a encore des champs. Puis, on regarde ce qui se passe globalement ou localement (mesures, observation, à partir des données et du champs ou des paramètres, comme $(\Psi, \sigma, \tau, \pi)$ et (M, g_0)).

Ici aussi, comme pour l'équation de Schrodinger : La donnée est la fonction V (du type courbure scalaire prescrite) qui peut être constante (Yamabe), (V est prescrite (ou Yamabe, $V \equiv \text{constante}$)), on peut prendre $V = \frac{1}{2}m^2\Psi^2$, V est la pulsion ou le signal ou le potentiel), la solution u est une "fonction d'onde" qui lie V à S_{g_0} ou $S_{g_0} - |\nabla\psi|_{g_0}^2$, S_{g_0} est un "champ scalaire".

35) En dimension $n \geq 3$: résultat d'unicité et de rigidité : en Biologie Mathématique :

Interpretation en Biologie Mathématique : la Chimiotaxie (Chemotaxis en anglais), est l'étude du mouvement de certaines cellules (les amibes, amoebae en anglais) dans leur environnement, mouvement dû à la libération de substances chimiques par les amibes. Les amibes se déplacent vers les endroits où la concentration de cette substance chimique est la plus grande et s'agregent, forment des agregats. L'interpretation biologique du resultat d'unicité est que les amibes ne peuvent pas former des agregats (ne se concentrent pas) quand on a une solution unique et constante au système de Keller-Segel. Voir l'article de Lin-Ni-Takagi. Le système de Keller-Segel peut se réduire à l'étude d'une seule équation, voir l'article de Lin-Ni-Takagi, Journal of Diff. Equations, 1988. Cette formulation existe sur les variétés compactes sans bord de dimension $n \geq 3$, voir T. Hillen et K.Painter.

Remarque 1 : Il y a aussi les D-branes en dimension 2, cordes ouvertes avec condition de Dirichlet.(fait référence à l'équation du type Liouville (équation de mouvement des particules ou de la corde) avec condition de Dirichlet). Pour la théorie conforme des champs de Liouville.

Remarque 2 : En ce qui concerne l'existence de dimensions supplémentaires (extra-dimensions) dans les théories du type Kaluza-Klein : ceci est lié à l'existence d'une nouvelle particule qui est l'axion qui se déplace dans ces dimensions cachées, on peut les détecter ou savoir comment les éliminer avec des outils, des télescopes, voir les articles ou preprint de Horvat, Krcmar, Lakic. Il y a le télescope du CERN, et aussi d'autres appareils, pour essayer de détecter ou éliminer ces particules que sont les axions. C'est dit dans le preprint de Horvat, Krcmar, Lakic, les dimensions supplémentaires $(5 + 1), (6 + 1)$ sont liés à l'astrophysique, elles ont des réalisations.

2. QUELQUES PROBLEMES :

Concernant les inégalités de Harnack :

Fixant un minorant $m > 0$, on a une relation entre $\sup_K v$ et m pour toute $v > 0$ relativement à un W avec des conditions a priori sur W , v et W sont liés par une équation ou plusieurs équations. Or, en prenant le minorant $m = \inf_M u > 0$, on a l'inégalité pour $v > 0$ or $u > 0$ est déjà une solution du problème, donc $\sup_K u$ est fonction de $\inf_M u$ et des autres paramètres.

Pour l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimensions 3 et 4 :

a) En dimension 3, on a la dépendance explicite du sup en fonction du inf,

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c.$$

b) En dimension 4, on a une estimation a priori. On plus on a des exemples pour ce cas.

En general, dans le cas d'une variété Riemannienne M de dimension 4, on a une estimation a priori. on peut se ramener a une estimation du sup en fonction du inf en écrivant :

$$\sup_K u \leq c(a, b, \inf_M u, K, \Omega),$$

pour toute $u > 0$ solution de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 sur M , relativement a V (Lipschitzienne) verifiant :

$$\|\nabla V\|_\infty \leq \frac{3a\sqrt{a}}{32e^2\sqrt{2}} \inf_M u,$$

et,

$$0 < a \leq V \leq b < +\infty,$$

En effet, $u > 0$ et V sont liés par l'équation, on peut supposer que le gradient de V et $\inf_M u$ sont aussi liés, ici on a deux equations liant $u > 0$ et V , une contrainte de plus. On a des exemples quand $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$ et $\inf_M u_i \geq m > 0$, on a une estimation locale uniforme.

Ici, la constante $k(a) = \frac{32e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$ entre $\min_M u$ et la norme du gradient est plus grande que dans le cas plat(ouvert de \mathbb{R}^4). Il faut faire la preuve pour $\min_M u \geq m > 0$, car on doit eliminer des termes en $o(1)$. Dans le cas d'un ouvert de \mathbb{R}^4 , la constante $k(a) = \frac{8e^2\sqrt{2}}{3a\sqrt{a}}$.¹

Remarque : Dans le cas d'un ouvert Ω de \mathbb{R}^4 , la deuxieme contrainte est "vérifiée" (après blow-up), dans l'article de C.C.Chen et C.S.Lin, si on suppose $V \in C^2$ uniformément. Ils obtiennent une inegalité entre $\nabla V(y_i)$ et $[u_i(y_i)]^{-1}$, dans ce cas ils obtiennent l'inégalité optimale $\sup \times \inf$. (les points y_i sont les points blow-up).

i) Un exemple, ce resultat s'applique lorsque $V \equiv \text{constante} > 0$. On retrouve le résultat de YY.Li et L. Zhang, eux obtiennent l'inégalité optimale $\sup \times \inf$.

ii) Un autre cas, on l'a dit ci-dessus, c'est celui où $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$ et $\min_M u_i \geq m > 0$, on obtient une estimation locale uniforme.

iii) On a un résultat analogue a celui de Brezis-Merle en dimension 2, en dimension 4 : pour deux suites $(u_i), (V_i)$ solutions de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4, $0 < a \leq V_i \leq b$ et $\|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$, alors $u_i \geq m > 0 \Rightarrow \sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), m, K, M)$. En particulier, si on prend $m = \inf_M u_i > 0$, on a l'inégalité de Harnack implicite, $\sup_K u_i \leq c(a, b, (A_i), \inf_M u_i, K, M)$ (La fonction $m \rightarrow c$ est décroissante de $m > 0$ et change en une autre fonction \tilde{c} si on remplace les suites (u_i, V_i) par une d'autres suites (v_i, W_i) avec des hypothèses similaires, et on obtient : $\sup_K v_i \leq \tilde{c}(\tilde{a}, \tilde{b}, (\tilde{A}_i), \inf_M v_i, K, M)$).

1. Pour la preuve, comme c'est locale, on prend $x_0 \in M$, on fait un changement de metrique conforme $\tilde{g} = e^f g = \varphi^3 g$ de sorte que $\tilde{Ricci}_{x_0} = 0$, on a (voir le livre d'Aubin) $f(x_0) = 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. On prouve l'estimation en supposant $\min_M u \geq m > 0$ pour la nouvelle fonction $v = u/\varphi$ pour $m > 0$ (car, voir l'article de la preuve du cas general en dimension 4, il y a des termes \tilde{Ricci}_{y_i} et $\tilde{R}_{\tilde{g}}(y_i)$, des termes en $o(1)$), comme $\varphi(x_0) = 1$, $\min_{B_{\tilde{g}}(x_0)} v \geq (\min_M u)/2 \geq m/2 > 0$. Comme on fait un changement de metrique conforme, au voisinage de x_0 , tout est de "l'ordre" de u et m car $\varphi(x_0) = 1$, $f(x_0) = 1$, l'exponentielle (en norme de matrices) est $(1 + \epsilon)$ -Lipschitzienne, on a changé de metrique, les majorants restent de l'ordre de $1 + \epsilon$ au voisinage de x_0 car $\varphi(x_0) = 1$, ($f(x_0) = 0$), et la constante $k(a)$ entre $\min_M u$ et la norme du gradient de V est plus grande.

On prouve alors, en supposant l'inegalité entre le $\min_M u$ et le gardient de V : $\min_M u \geq m > 0 \Rightarrow \sup_{B_{\tilde{g}}(x_0)} v \leq c \Rightarrow \sup_K u \leq c(a, b, m, K, M)$. Apres on remplace m par $\min_M u$.

La formulation précédente en dimension 4 s'applique lorsqu'on suppose en x_0 point critique de $V > 0$ $V \in C^1(M)$. on fait la preuve avec $\min_M u \geq m > 0$ pour $v = u/\varphi$ avec $\varphi > 0$ duc changement de metrique conforme telle que $\tilde{R}icci_{\tilde{g}}(x_0) = 0$, on obtient :

$$\exists c, R > 0, \sup_{B_R(x_0)} v \leq c,$$

Donc,

$$\exists c, R > 0, u(x_0) \leq \sup_{B_R(x_0)} u \leq c, \forall u > 0$$

Donc, on obtient une inégalité du type :

$$u(x_0) \leq c(x_0, V, \inf_M u, M, g),$$

pour toute solution $u > 0$ de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à un $V > 0$, $V \in C^1(M)$ fixé ayant le point x_0 comme point critique, $\nabla V(x_0) = 0$. Ou bien $V \in C^{1,\alpha}(M)$, $0 < \alpha \leq 1$, $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et $\|V\|_{C^{1,\alpha}} \leq A$ et $\nabla V(x_0) = 0$, on obtient :

$$\forall u > 0, u(x_0) \leq c(a, b, A, \alpha, x_0, \inf_M u, M, g).$$

Il y a des exemples de solutions de l'équation de la courbure prescrite en dimension 4 avec x_0 point où V est maximum et M compacte sans bord dans le livre d'Aubin.

Quand on prend les notations de YY.Li et L.Zhang : $(M, g) = (B_1(0) \subset \mathbb{R}^4, g)$ et $0 < V \in C^1(B_1(0))$ avec $\nabla V(0) = 0$, on obtient l'estimation a priori dans un voisinage de 0 en supposant le minimum unifromément minoré et aussi :

$$(1) \quad u(0) \leq c(V, B_1(0), g, \inf_{B_1(0)} u),$$

pour toute solution $u > 0$ de l'équation de la courbure scalaire prescrite en dimension 4 relativement à V avec les conditions précédentes ou $V \in C^{1,\alpha}(B_1(0))$ avec $0 < \alpha \leq 1$, $0 < a \leq V \leq b < +\infty$ et $\|V\|_{C^{1,\alpha}} \leq A$ et $\nabla V(0) = 0$.

$$(2) \quad \forall u > 0, u(0) \leq c(a, b, A, \alpha, \inf_{B_1(0)} u, B_1(0), g).$$

Pour l'équation de Yamabe en dimensions 5 et 6 :

c) En dimension 5, il y a une relation explicite entre $\sup_K u$ et $\inf_M u$,

$$(\sup_K u)^{1/7} \times \inf_M u \leq c.$$

d) En dimension 6, on a une estimation a priori et une relation non explicite entre $\sup_K u$ et $\inf_M u$. Pour toute solution $u > 0$ de l'équation de Yamabe en dimension 6 :

$$(3) \quad \sup_K u \leq c(K, M, g, \inf_M u).$$

Pour l'équation de Yamabe et du type Yamabe en dimension 4, on a l'inégalité :

2. Concernant l'exponentielle dans la preuve du résultat ci-dessus. On commence par changer la metrique $d_g \rightarrow d_{\tilde{g}}$, on a un facteur $(1 + \epsilon)$, puis on considere $e^{\tilde{x}p_y}$, l'exponentielle pour la metrique \tilde{g} , construite a partir d'une carte (Ω, ψ) normale en x_0 pour la metrique \tilde{g} , on passe de $d_{\tilde{g}}$ à $\|\psi \circ e^{\tilde{x}p}\|_{\mathbb{R}^4}$, on a un majorant $(1 + \epsilon)$, puis on utilise le fait que $\frac{d}{dz}[z \rightarrow e^{\tilde{x}p_{x_0}}(z)]|_{z=0} = id_{\mathbb{R}^4}$, c'est à dire que c'est vrai pour la différentielle de $\psi \circ e^{\tilde{x}p}$ et par continuité des différentielle, (en y et z assez petits), on a un majorant $(1 + \epsilon)$, puis on utilise la norme matricielle sup des matrices et on écrit que : $\psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_1) - \psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_2) = \int_0^1 \partial_s [\psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(s(z_1 - z_2) + z_2)] ds = \int_0^1 [(\partial_z (\psi \circ e^{\tilde{x}p_y})(s(z_1 - z_2) + z_2)) \cdot (z_1 - z_2)] ds$ et on obtient; $\|\psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_1) - \psi \circ e^{\tilde{x}p_y}(z_2)\|_{\mathbb{R}^4} \leq (1 + \epsilon) \|z_1 - z_2\|_{\mathbb{R}^4}$, uniformément en y voisin de x_0 et $|z_1| \leq r, |z_2| \leq r, r > 0$ assez petit.

$$(\sup_K u)^{1/3} \times \inf_M u \leq c.$$

Concernant l'article : "Some uniform estimates for scalar curvature type equations". En dimension 4, on a en plus de l'estimation a priori une dependance non explicite du $\sup_K u$ en fonction du $\inf_\Omega u$:

$$(4) \quad \sup_K u \leq c(a, b, A, \alpha, K, \Omega, \inf_\Omega u),$$

pour le theoreme 3

et,

$$(5) \quad \sup_K u \leq c(a, V, K, \Omega, \inf_\Omega u).$$

pour le theoreme 4.

Remarque : On a bien une fonction c de l'inf car, pour chaque m on a une constante c_0 majorant de $\sup_K u$ et l'ensemble des majorants est lui meme minoré par $\sup_K u$, c est alors l'inf des majorants de $\sup_K u$, qui est unique. On voit alors que cette correspondance $m \rightarrow c$ est bien une fonction et aussi la correspondance $(a, b, K, \Omega, m) \rightarrow c$ est une fonction. Apres on remplace m par $\inf_\Omega u$ comme on l'a dit ci-dessus. On a bien la correspondance $(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \rightarrow c$ est une fonction.

De plus la fonction $m \rightarrow c$ est décroissante en $m > 0$. On a alors, si $\inf_\Omega u \geq m > 0$ (ou $\inf_M u \geq m > 0$, si on considere une variété Riemannienne M), alors $c(a, b, K, \Omega, \inf_\Omega u) \leq c(a, b, K, \Omega, m) < +\infty$, ou $(c(a, b, K, M, \inf_M u) \leq c(a, b, K, M, m)$, si on est sur une variété Riemannienne M), on obtient alors l'estimation a priori lorsque l'inf est uniformement minoré.

On a aussi les faits suivants :

I) 1) Conditions de platitudes d'ordre C^{n-2} de Yanyan Li \Rightarrow :

1-1) blow-up,

1-2) blow-up isolé,

1-3) blow-up isolé simple \Rightarrow ,

1-3-1) $\sup \times \inf < +\infty$,

1-3-2) Energies bornées, $\int u^{2n/(n-2)} < +\infty$.

Voir les articles de Yanyan Li sur la sphere et de C.C.Chen-C.S.Lin, commun.pure.appl.math.1997.

2) Conditions de platitudes d'ordre C^α , $\frac{(n-2)}{2} \leq \alpha < n-2$ de C.C.Chen-C.S.Lin \Rightarrow :

2-1) blow-up,

2-2) blow-up isolé,

2-3) Pas de blow-up isolé simple \Rightarrow ,

2-3-1) $\sup \times \inf \rightarrow +\infty$,

2-3-2) Energies bornées, $\int u^{2n/(n-2)} < +\infty$.

Voir les articles de C.C.Chen-C.S.Lin, J.Differential.Geometry.1998.

3) Conditions de platitudes d'ordre C^α , $1 \leq \alpha < \frac{(n-2)}{2}$ de C.C.Chen-C.S.Lin \Rightarrow :

3-1) blow-up,

3-2) Energies non bornées, $\int u^{2n/(n-2)} \rightarrow +\infty$.

Voir les articles de C.C.Chen-C.S.Lin, J.Differential.Geometry.1998.

4) *Propriété intermediaire* : Propriété intermédiaire entre les points 1) et 2) : Inégalités du type $(\sup)^\alpha \times \inf < +\infty$. Voir travail de Thèse et Journal.Funct.Analysis.

II) Concernant les inégalités du type $(\sup)^\alpha \times \inf < +\infty$: Il faut considerer M_i^β dans les methodes, avec $M_i = u_i(y_i)$, y_i les points blow-ups et résoudre une equation en β du premier ordre liée a la positivité de la fonction (+-) la fonction auxiliaire.

Ceci s'applique aux methodes de :

a) Brezis-Li-Shafirir.

b) YY.Li-L.Zhang,

c) C.C.Chen-C.S.Lin.

Voir travail de Thèse et Journ.Funct.Analysis. Acta.Math.Scientia. Analysis in Theory and Applications.

III) Assertion minimale : $\sup < +\infty$ si $\inf > 0$: c'est vrai en dimension $n = 6$ Eq.de Yamabe. et en dimension $n = 4$ Eq de Yamabe et Eq de la courbure scalaire prescrite. Comme consequence $\sup_K u \leq f(\inf_M u)$ pour l'Eq de Yamabe en dimensions 4 et 6, et, $\sup_K u_i \leq f(\inf_M u_i)$, pour chaque suite (u_i) relativement a une suite (V_i) avec $0 < a \leq V_i \leq b < +\infty$ et $|\nabla V_i| \leq A_i \rightarrow 0$, pour l'Eq de la courbure scalaire prescrite en dimension 4. Si on a une autre suite (v_i) relativement à une suite (W_i) Lipschitziennes avec $0 < c \leq W_i \leq d < +\infty$, de constantes de Lipschitz $B_i \rightarrow 0$ alors $\sup_K v_i \leq g(\inf_M v_i)$. Voir Journal. Funct. Analysis. et Journal.Math.Anal.Applications.

Conséquence du resultat donnant une solution unique : inegalite de Sobolev et inegalite interpolation

Soit (M, g) une variété Riemannienne compacte sans bord de dimension $n \geq 4$ et de courbure scalaire $S_g > 0$ partout sur M et orientable. Alors, voir le livre d'Aubin pour $\epsilon > 0$ assez petit $\epsilon < S_g$, l'équation $4 \frac{(n-1)}{n-2} \Delta u + \epsilon u = u^{N-1}, u > 0$ a une solution et le resultat d'unicité dit que cette solution est unique. (Voir le livre d'Aubin, la fonctionnelle associée à cette equation possède un infimum atteint par cette solution unique). On a alors (voir aussi l'article de L.Veron et J.R. Licois et l'article sur Hal de J.Dolbeault, Esteban, Loss), une inégalité d'interpolation et une inégalité de Sobolev :

$\exists \epsilon_0 = \epsilon_0(n, M, g) > 0$, tel que pour $0 < \epsilon < \epsilon_0$ on ait :

$$\inf_{u \in H^1(M) - \{0\}} \frac{4 \frac{(n-1)}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g + \epsilon \int_M u^2 dV_g}{\left(\int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N}} = \epsilon (\text{vol}(M))^{2/n},$$

Qu'on peut écrire :

Pour tout $u \in H^1(M)$, on a :

$$4 \frac{(n-1)}{n-2} \int_M |\nabla u|^2 dV_g \geq \epsilon \left(\left(\int_M |u|^N dV_g \right)^{2/N} (\text{vol}(M))^{2/n} - \int_M u^2 dV_g \right),$$

ou encore,

$$\forall u \in H^1(M), 4 \frac{(n-1)}{n-2} \|\nabla u\|_2^2 \geq \epsilon \left((\text{vol}(M))^{2/n} \|u\|_{2^*}^2 - \|u\|_2^2 \right) \geq 0,$$

avec $2^* = N = \frac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 4$.

Finalement : il existe $C = C(n, M, g) > 0$ telle que :

$$\forall u \in H^1(M), \|\nabla u\|_2^2 \geq C \left((\text{vol}(M))^{2/n} \|u\|_{2^*}^2 - \|u\|_2^2 \right) \geq 0,$$

avec $2^* = N = \frac{2n}{n-2}$ pour $n \geq 4$.

2.1. Sur les problemes du type $\sup \times \inf$:

1) Probleme de Li-Zhang :

Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension $n \geq 5$ de courbure scalaire S_g , on considere l'équation de Yamabe :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u + S_g u = u^{N-1}, u > 0, N = 2n/(n-2).$$

$\Delta = -\nabla^i(\nabla_i)$ l'operateur de Laplace-Beltrami.

a) Est il vrai d'avoir pour tout compact $K \subset M$,

$$\sup_K u \times \inf_M u \leq c(K, M, g) ?$$

b) En particulier pour $n = 6$ (inégalité explicite), est il vrai qu'on a :

$$(\sup_K u)^\alpha \times \inf_K u \leq c, \quad 0 < \alpha \leq 1?$$

2) Soit (M, g) une variété Riemannienne de dimension 4 de courbure scalaire S_g , on considère l'équation de la courbure scalaire prescrite V :

$$\Delta u + \frac{1}{6} S_g u = V u^3, \quad u > 0.$$

$\Delta = -\nabla^i(\nabla_i)$ l'opérateur de Laplace-Beltrami. On suppose :

$$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty, \quad \|\nabla V_i\|_\infty \leq A_i \rightarrow 0$$

a) Est-il vrai que :

$$\exists \alpha \in (0, 1], \quad (\sup_K u_i)^\alpha \times \inf_M u_i \leq c = c(a, b, (A_i)_i, K, M, g)?$$

b) Qu'en est-il du cas $(M, g) = (\Omega \subset \mathbb{R}^4, \delta)$?

c) (Résultat du type CC.Chen-CS.Lin du cas plat), qu'en est-il si on suppose que V vérifie :

$$0 < a \leq V_i \leq b < +\infty, \quad \|\nabla V_i\|_\infty \leq A, \quad \|\nabla^2 V_i\|_\infty \leq B?$$

Plus précisément, a-t-on :

$$\exists \alpha \in (0, 1], \quad (\sup_K u)^\alpha \times \inf_M u \leq c = c(a, b, A, B, K, M)?$$

2.2. Problème de Brezis-Li-Shafrir :

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , ici, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$, on considère l'équation suivante :

$$-\Delta u = V e^u,$$

avec $V > 0$ et continue sur Ω .

A-t-on, pour tout compact $K \subset \Omega$:

$$\sup_K u + \inf_\Omega u \leq c = c(K, V, \Omega)?$$

2.3. Problèmes du type Brezis-Merle :

Soit Ω un ouvert régulier de \mathbb{R}^2 , ici, $\Delta = \partial_{11} + \partial_{22}$. On considère les équations suivantes :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = |x - x_0|^{2\beta} V e^u, \quad \epsilon \in (0, 1], \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

avec,

$$\beta \geq 0, \quad 0 \leq V \leq b, \quad |x - x_0|^{2\beta} e^u \in L^1(\Omega), \quad u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

a) Donner le comportement "blow-up" au bord et un critère de compacité des solutions en u .

b) Qu'en est-il si V est Lipschitzienne ?

c) De même, donner le comportement "blow-up" et un critère de compacité pour les solutions de :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = |x - x_0|^{-2\alpha} V e^u, \quad \epsilon \in (0, 1], \quad x_0 \in \partial\Omega.$$

Ici $\alpha \in (0, 1)$ ou $\alpha \in (0, 1/2)$ et,

$$0 \leq V \leq b, \quad |x - x_0|^{-2\alpha} e^u \in L^1(\Omega), \quad u \in W_0^{1,1}(\Omega)$$

d) Qu'en est-il si on suppose V Lipschitzienne ?

e) Mêmes questions avec le cas régulier ; équation elliptique avec poids holderien et singularité au bord :

$$-\Delta u - \epsilon(x_1 \partial_1 u + x_2 \partial_2 u) = (1 + |x - x_0|^{2\beta}) V e^u, \quad \epsilon \in (0, 1], \quad x_0 \in \partial\Omega,$$

avec,

$$1/2 > \beta \geq 0, 0 \leq V \leq b, e^u \in L^1(\Omega), u \in W_0^{1,1}(\Omega).$$

RÉFÉRENCES

- [1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.
- [2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959
- [3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.
- [4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [5] Azé. Analyse variationnelle...ellipse.1997.
- [6] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [7] A. Besse. Einstein manifolds. Springer. 1987.
- [8] Bredon. Geometry and Topology. Springer.
- [9] Brezis. Analyse fonctionnelle; 1983
- [10] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [11] Brezis, Merle. Uniform estimate and blow-up behavior... Comm.P.D.E..1991.
- [12] W. Chen, C. Li. A priori Estimates for solutions to Nonlinear Elliptic Equations. Arch. Rational. Mech. Anal. 122 (1993) 145-157.
- [13] M. G. Crandall. P.H. Rabinowitz. Some continuation and variational methods for positive solutions of nonlinear elliptic eigenvalue problems. 1975.
- [14] Dautray-Lions. Part 2. Laplace Operator.
- [15] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63
- [16] Do Carmo. Riemannian Geometry.
- [17] Druet.Hebey.Robert. Green functions. 2004.
- [18] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.
- [19] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehren Math. Wiss.,224, 1983.
- [20] William Goldman. 1983. Existence de varietes sans structure plate.
- [21] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.
- [22] E. Hebey. Introduction a l'analyse non-lineaire sur les varietes. Diderot Editions.
- [23] Hatcher. Sur les Torus Bundles.
- [24] Hirsch. M. Differential Topology.
- [25] Huber.A. On subharmonic functions in the large. (1957)
- [26] Hulin, Troyanov. Prescribing curvature on open surfaces.(1992)
- [27] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [28] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [29] Kobayashi, Nomizu. Differential Geometry.
- [30] Kuiper. (Conformally flat structure in the large). (1949).
- [31] Kulkarni. Conformally flat manifolds.1972.
- [32] Lafontaine.Introduction a la geometrie Differentielle.2010.
- [33] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.
- [34] Nazaraov, S, A. Sweers, G. A hinged plate equation and iterated Dirichlet Laplace operator on domains with concave corners. Journal of Differential Equations. 233, 1, 2007, 151-180.
- [35] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.
- [36] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [37] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les varietes a bord.
- [38] Schoen, R. Yau, S-T, On the positive mass conjecture in dimension 3. Comm. Math. Phys. 1979.
- [39] R. Sa Earp. E. Tubiana. Introduction a la geometrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann.
- [40] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The Einstein-scalar field constraints on asymptotically Euclidean manifolds. arXiv :gr-qc/0506101.
- [41] Choquet-Bruhat.Y, Isenberg.J, Pollack.D. The constraint equations for the Einstein-scalar field system on compact manifolds. arXiv :gr-qc/0610045.

- [42] Choquet-Bruhat.Yvonne, Isenberg.James, York.James. W. Einstein Constraints on Asymptotically Euclidean Manifolds. arXiv :gr-qc/9906095.
- [43] Premoselli.B. Stability and instability of the Einstein-Lichnerowicz constraint system. arXiv :1502.04233v1
- [44] Carlotto.A. The general relativistic constraints equations. Living reviews in Relativity. 24, 2, 2021. Springer.
- [45] Horvat.R, Krcmar.M, Lakić.B. Recent searches for solar axions and large extra dimensions. arXiv :hep-ph/0112224.
- [46] Horvat.R, Krcmar.M, Lakić.B. CERN Axion Solar Telescope as a probe of large extra dimensions. arXiv :astro-ph/0312030.
- [47] Hillen.T, Painter.K. Global existence for a parabolic chemotaxis model with prevention of overcrowding. Adv. Appl. Math. 26, 280-301, 2001.
- [48] Keller. E. F, Segel, L.A. Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability.J. Theoret. Biol., 26 (1970), pp. 399-415.
- [49] Lin. C.S, Ni. W.M, Takagi.I Large amplitude stationary solutions to a chemotaxis system. Journ. Diff. Equations, volume 72, no 1, 1988, pp 1-27.
- [50] T. H; Parker. Gauge theories on four dimensional Riemannian manifolds, Comm. Math. Phys. 1982.
- [51] Brendle.S. Blow-up phenomena for the Yamabe equation. arXiv :0905.3840v1
- [52] Brendle.S, Marques.F.C. Blow-up phenomena for the Yamabe equation II. arXiv :0905.3841v1
- [53] Disconzi.M.M, Khuri. M. Compactness and Non-compactness for the Yamabe Problem on Manifolds With Boundary. arXiv :1201.4559v3
- [54] YY.Li. Prescribing Scalar curvature on S_n . Part I. Journ.Diff.Eq.1995.Part II.
- [55] C.C.Chen. C.S.Lin. Journal. Differential.Geometry. 1998.

EQUIPE D'ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 2, PLACE JUSSIEU, 75005, PARIS, FRANCE.

Email address: samybahoura@yahoo.fr, samybahoura@gmail.com