



HAL
open science

Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.

Samy Skander Bahoura

► **To cite this version:**

Samy Skander Bahoura. Quelques remarques sur les variétés, fonctions de Green et formule de Stokes.. 2017. hal-01635538v1

HAL Id: hal-01635538

<https://hal.science/hal-01635538v1>

Submitted on 15 Nov 2017 (v1), last revised 25 Apr 2024 (v23)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELQUES REMARQUES SUR LES VARIÉTÉS, FONCTIONS DE GREEN ET FORMULE DE STOKES.

SAMY SKANDER BAHOURA

RÉSUMÉ. On donne quelques remarques sur les surfaces K3, projectifs complexe, la topologie des surfaces réelles de dimension 2, la fonction distance au bord, l'orientabilité des boules geodesiques, traces de Sobolev et fonctions de Green.

1. QUELQUES REMARQUES :

1) Sur les mesures de Hausdorff et la formule d'integration par parties (Pourquoi la version Fusco est equivalente a celle de Necas ?) : $H^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ alors la mesure $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ est une mesure de Radon, donc reguliere.

Soit $A \subset \partial\Omega$, $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$ mesurable, comme la mesure est une mesure de Radon, elle est reguliere :

$$\forall \epsilon > 0 \exists K_\epsilon, O_\epsilon, K_\epsilon \subset A \subset O_\epsilon, H_{|\partial\Omega}^{n-1}(O_\epsilon - K_\epsilon) \leq \epsilon.$$

On a, $O_\epsilon = V_\epsilon \cap \partial\Omega$, avec V_ϵ ouvert de \mathbb{R}^n .

Dapres le Theoreme d'Urysohn ;

$$\exists f_\epsilon \in C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq f_\epsilon \leq 1, f_\epsilon \equiv 1, \text{ sur } K_\epsilon, \text{ supp } f_\epsilon \subset V_\epsilon,$$

Soient ν_1, ν_2 les normales (interieures) dans la formulation de Fusco et Necas :

Ω est un ouvert Lipschitzien, on ecrit la formule d'integration par parties, dans les deux formulation, la mesure sur le bord est la mesure de Hausdorff $H_{|\partial\Omega}^{n-1}$, ceci est du a la formule de l'aire appliquee localement dans des cartes. De plus par Fusco le bord reduit est egal au bord usuel et $|D\chi_\Omega| = H_{|\partial\Omega}^{n-1}$:

$$\int_\Omega \text{div} \varphi = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_1 dH^{n-1} = - \int_{\partial\Omega} \varphi \nu_2 dH^{n-1}, \forall \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n),$$

Avec $\nu_1, \nu_2 \in L^\infty(\partial\Omega)$.

Donc,

$$\int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = 0, \forall \varphi \in C_c^1,$$

Comme C_c^1 est dense dans C_c^0 , la formule precedente est vraie pour $\varphi \in C_c^0$

On applique cette formule a f_ϵ , on obtient pour tout mesurable A :

$$\int_A (\nu_1 - \nu_2) dH^{n-1} = O(\epsilon) \rightarrow 0,$$

Donc,

$$\nu_1 = \nu_2, H_{|\partial\Omega}^{n-1}, p.p$$

Ce qu'on a montré cest que la normale explicite de la formulation Necas est egale a la normale theorique de la formulation de Fusco.

Dans la formulation de Fusco, la normale est obtenue comme "blow-up" autour d'un point du bord, cela revient à prendre la normale à la tangente au bord, par des cartes Lipschitziennes, on voit par ce procédé "blow-up", que la normale exterieure est la normale exterieure usuelle. (Car, l'espace tangent "à la mesure" ("blow-up") est l'espace tangent usuel).

2) Pourquoi quand on a $u \in W^{1,p} \cap C^0(\bar{\Omega})$, $tr(u) = u$? on utilise Necas et Brezis :

On a :

Ω est un ouvert Lipschitzien \Rightarrow cartes Lipschitziennes \Rightarrow un operateur de Prolongement $Pu \in C_c^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, d'apres la consturction de loperateur de Prolongement dans des cartes,

$Pu|_{\bar{\Omega}} = u$ et, $\chi_n(\rho_n * Pu) \rightarrow Pu$ dans $C_K^0(\mathbb{R}^n)$ et dans $W^{1,p}$ où K est un compact de \mathbb{R}^n , donc :

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - Tr(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Et,

$$\|Tr(\chi_n(\rho_n * Pu)) - u\|_{C^0(\partial\Omega)} \rightarrow 0,$$

Doù,

$$Tr(u) = u, \quad H_{|\partial\Omega}^{n-1} p.p,$$

Remarque : Par la formulation de Fusco,

$$Tr(u) = u_{\Omega} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\int_{B_{\rho}(x)} u(y) dy}{|B_{\rho}(x)|}$$

on voit que si $u \in C^0(\bar{\Omega})$, $Tr(u) = u$.

3) Soit (M, g) une variété riemannienne et soit $B_r(x)$ une boule géodésique très petite, telle que l'exponentielle réalise un difféomorphisme sur la boule de \mathbb{R}^n : pourquoi, la normale extérieure $\nu = \partial_r$?

On a : l'image de la base canonique par l'exponentielle est la base canonique :

$$d(exp_x)(\partial_i) = \tilde{\partial}_i, \text{ on identifie les 1-formes } dx_i \text{ et } d\tilde{x}_i.$$

Soit B^0 la base canonique de \mathbb{R}^n et \tilde{B}^0 la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ la base canonique de la boule géodésique $B_r(x)$, alors $d(exp_x)(B^0) = \tilde{B}^0$.

La base $B_{0,r} = \{\partial_{0,r}, \partial_{\theta_1}, \dots, \partial_{\theta_{n-1}}\}$ est directe, donc $\det_{B^0}(B_{0,r}) > 0$.

Soit $\tilde{B}_r = \{d(exp_x)(\partial_{0,r}), \tilde{\partial}_{\theta_1} = d(exp_x)(\partial_{\theta_1}), \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}} = d(exp_x)(\partial_{\theta_{n-1}})\}$, alors :

$$\det_{\tilde{B}^0}(\tilde{B}_r) = [det : B_r \rightarrow B_{0,r}] \circ [det : B_{0,r} \rightarrow B_r, \text{ qui est directe}] \circ [det : B_r \rightarrow \tilde{B}_{0,r}] > 0$$

La première est $d(exp_x)^{-1}$ et la dernière $d(exp_x)$ le déterminant s'annule, il reste celui de $B_{0,r}$ vers B^0 qui est direct.

Donc la base \tilde{B}_r est directe par rapport à la base \tilde{B}^0 .

n_{ext} est défini précisément comme cela tel que $(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}})$ est directe par rapport à \tilde{B}^0 .

On peut utiliser la formulation de S. Lang :

Soient ω_{θ} et Ω les formes volumes sur la sphère $S_r(x)$ et la boule $B_r(x)$ n_{ext} est tel que son dual n_{ext}^* vérifie :

$$n_{ext}^* \wedge \omega_{\theta} = \Omega,$$

C'est-à-dire que à des constantes multiplicatives près (déterminant des métriques)) :

$$n_{ext}^* \wedge d\tilde{\theta}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{\theta}_{n-1} = d\tilde{x}_1 \wedge \dots \wedge d\tilde{x}_n$$

cela veut dire que :

$$\Omega(n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}) > 0$$

c'est à dire que la base $\{n_{ext}, \tilde{\partial}_{\theta_1}, \dots, \tilde{\partial}_{\theta_{n-1}}\}$ est directe par rapport à la base $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$ et donc $n_{ext} = \partial_r$.

Par sa construction, la boule géodésique est orientable et orientée. En chaque point, l'exponentielle conserve l'orientation et induit une orientation par rapport à la carte $[\Omega, \varphi]$ à partir de laquelle elle est construite. Par un argument de recouvrement, si on raisonne sur un compact K en utilisant l'exponentielle et cette propriété d'orientabilité des boules géodésiques via l'exponentielle, il faudra supposer la variété orientable.

4) Dans la construction de la fonction de Green pour un opérateur coercif $\Delta + a$ voir le livre d'Aubin et le monographe de Frédéric Robert, on utilise le produit de convolution et le fait que les traces des fonctions sont nulles jusqu'à l'étape :

$$-\Delta V_x + aV_x = 0, \text{ dans } M, V_x = -G_x, \text{ sur } \partial M,$$

Alors la fonction $G_x \in C^{1,\theta} \cap W^{2,p}(M - \{x\})$, car la pmetrix H_x verifie au sens C_0^2 (Agmon),

$$-\Delta_{dist} H_x = \delta_x - \Delta_y H_x \in L^\infty(M - \{x\})$$

Les Γ_i verifient cette proprité, elles sont nulles au bord car leur support est dans $B(m, \delta_m/2)$ et le rayon dinjectivité $= \delta_m \leq d(m, \partial\Omega)$. Puis on utilise des cartes pour se ramener au demi-espace et utiliser les estimations de Agmon-Douglis-Nirenberg.

On peut aussi, utiliser G_x dans lequation et utiliser les Theoremes de Gilbarg-Trudinger :

$$\Delta(V_x - \eta G_x) + a(V_x - \eta G_x) = -\Delta(\eta G_x) + a(\eta G_x) \in L^p, \text{ et } (V_x - \eta G_x) = 0, \text{ sur } \partial M,$$

Avec η une fonction cutoff egale a 1 dans un voisinage de ∂M et 0 au voisinage de x (nulle au voisinage de la singularité).

On obtient $V_x - \eta G_x \in W^{2,p}(M)$ et comme $\eta G_x \in W^{2,p}(M)$, alors : $V_x \in W^{2,p}(M)$.

Remarques :

1) Dans la formulation variationelle on pour une solution $u \in W_0^{1,2}$ de :

$$-\Delta u + au = f, \text{ et } u = 0 \text{ sur } \partial M,$$

Dans le monograph de Brezis-Marcus-Ponce (ils supposent les solutions $W_0^{1,1}$), ils prouvent que ces solutions sont au sens C_0^2 (Agmon), d'où on peut prouver qu'elles sont $W^{2,p}$ et qu'on a les estimations a priori dans $W^{2,p}$ d'Agmon (méthode des quotients differentiels) ou en sachant qu'elles sont $W^{2,p}$ qu'on a les estimations a priori par Calderon-Zygmund écrits dans le Gilbarg-Trudinger.

Dans le cas du Laplacien, la constante dans l'inegalité de Calderon-Zygmund, ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien. On approche l'operateur par un operateur constant.

2) Les estimations d'Agmon-Douglis-Nirenberg, dans ce cas sont basées (sur de l'intergartion par parties, par rapport a la variable $t > 0$) et sur les integrales singulieres de Calderon-Zygmund.

C'est une autre preuve par le potentiel du demi-espace.

Par exemple :

En effet, on considere le probleme suivant :

$$-Lu = 0, \text{ } u = \varphi \text{ sur } \partial\Omega$$

On peut supposer L le Laplacien euclidien, le cas general se ramene au cas constant (voir Gilbarg-Trudinger, par continuité on approche l'operateur general par un operateur constant).

De meme pour Agmon-Douglis-Nirenebrg, ils considerent des operateurs a coefficients constants, et dans le cas du Laplacien, la constante dans linegalité obtenue ne depend pas de Ω ce qui fait qu'on peut par coninuité obtenir l'estimation $W^{2,p}$ d'un operateur general à partir du Laplacien.

On approche l'operateur par un operateur constant.

Par exemple on ecrit à l'ordre 1 :

$$\text{Il suffit, par des cartes, de consider le demi-espace et on utilise le noyau de Poisson } P(x, t) = \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}}.$$

On suppose que $\varphi \in C^2 \cap W^{2,p}$. On ecrit :

$$\partial_s(P(x - y, t + s)\varphi(y, s)) = \partial_s P \varphi + P \partial_s \varphi,$$

On integre en y et s et on obtient (on utilise la representation integrale de u en fonction du noyau de Poisson) :

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} P(x - y, t)\varphi(y, 0)dy = \int P(x - y, t + T)\varphi(y, T) + \int \int \partial_t P \varphi + \int \int P \partial_t \varphi,$$

On a $\partial_t P \equiv \frac{1}{|Q|^{n+1}}$, Q un point quelconque, et $\dim(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}) = n + 1$, on utilise l'integrale singuliere de Calderon-Zygmund.

Pour $\partial_t u, \partial_x u$, on derive sous le signe \int et puis on integre par parties sur \mathbb{R}^n . On obtient des integrales du type,

$$\int \int \partial_t P \partial_t \varphi, \int \int \partial_t P \partial_x \varphi, \text{ et } \int \int \partial_x P \partial_t \varphi$$

On elimine $\int P(x-y, t+T)\varphi(y, T)$ par son estimation en $c(T) \rightarrow 0$ quand $T \rightarrow +\infty$.
On obtient des estimations du type :

$$\|\partial u\|_{L^p} \leq C \|\varphi\|_{W^{1,p}},$$

On refait la meme chose en derivant une deuxieme fois.

Comme dans le Gilbarg-Trudinger, on ecrit les solutions en fonction du potentiel du demi-espace (voir chapitre 4 de Gilbarg-Trudinger). Dans le cas d'Agmon-Douglis-Nirenberg, ils considerent le demi-espace.

5) Sur le degre topologique et l'article de De Figueiredo-Lions-Nussbaum : ils utilisent la definition du degre topologique de Leray-Schauder :

$\exists T_0 \in \mathbb{R}^+, \text{deg}[x - F(x, T_0)B_{R_2}, 0] = 0$ cela veut dire qu'il n'y a pas de solution a cette equation.

$x - F(x, t) \neq 0, t \in \mathbb{R}^+, x \in \partial B_{R_2}$, cela veut dire qu'on peut utiliser l'homotopie :

$$\text{deg}[x - F(x, t), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - F(x, 0), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - F(x, T_0), B_{R_2}, 0] = 0,$$

$t = 0, F(x, 0) = \Phi(x)$ et par Nussbaum et la propriete d'excision et d'additivite, on peut decomposer le degre en 2, la condition est que $\Phi(x) \neq x$ sur ∂B_{R_1} et $\Phi(x) = F(x, 0) \neq 0$ sur ∂B_{R_2} , alors :

$$0 = \text{deg}[x - \Phi(x), B_{R_2}, 0] = \text{deg}[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] + \text{deg}[x - \Phi(x), \{R_1 < \|x\| < R_2\}, 0],$$

La derniere condition est celle de l'homotopie avec l'identite et le degre de l'identite est 1.

$$\text{deg}[x - \beta\Phi(x), B_{R_1}, 0] = \text{deg}[x - \Phi(x), B_{R_1}, 0] = \text{deg}[x, B_{R_1}, 0] = 1,$$

Donc,

$$\text{deg}[x - \Phi(x), \{R_1 < \|x\| < R_2\}, 0] = -1,$$

Dans leur exemple, De Figueiredo-Lions-Nussbaum, utilisent l'estimation integrale $\int_{\Omega} f(u(x)+t)dx \leq C, C$ independante de t et les estimations a priori pour verifier que les conditions d'applications du degre topologique sont verifiees, dans ce cas les t et les solutions sont uniformement bornes.

6) Sur les surfaces $K3$. Soit E un fiber bundle et M une variete Complexe de metrique h .

Remarquons d'abord que cette variete est orientable car les changements de cartes sont holomorphes donc le Jacobien reel est le carre du Jacobien complexe, cest du a l'holomorphic, comme en dimension 2 (equation de Cauchy-Riemann).

Pour ce fibre bundle E , il existe une unique connexion compatible avec l'holomorphic et la metrique, c'est l'analogue complexe de la connexion de Levi-Cevita :

$$\pi^{0,1}\nabla = \bar{\partial}$$

et,

$$\nabla h = 0$$

C'est la connexion hermitienne ou connexion de Chern, semblable a la connexion de Levi-Cevita dans le cas Riemannien.

Des qu'on a une connexion, une derivee covariante, on a la courbure, on derive 2 fois, comme dans le cas Riemannien, on a la courbure et donc la courbure de Ricci et la classe de Chern, cest la classe de Ricci.

Connexion de Chern \Rightarrow symboles de Christoffels \Rightarrow Connexion form, ω, \Rightarrow Curvature form,

Dans le cas $E = \wedge^2 T^*(M)$ les 2-formes alternees :

$\omega = \omega_i dx^i \otimes (dx^j \wedge dx^k)$, car ici, ce qui joue le role de champs de vecteurs (pour la connexion de Levi-Cevita), c'est les sections sur E (les vecteurs de base sont les 2-formes alternees), les champs de 2-formes alternees,

$d\omega = \Omega_{ij} dx^i \wedge dx^j \otimes dx^l \wedge dx^m$, des qu'on derive encore deuxieme fois on obtient la courbure.

Dans le cas des surfaces $K3, E = \wedge^2 T^*(M) = 0, 2$ formes alternees :

Si $E = 0$, la connexion nulle convient pour la derivation sur E or la connexion de Chern est unique dou $\nabla \equiv 0$. Donc, il ny a pas de courbure do la classe de Chern est nulle, $c_1 = 0$.

Les groupes de cohomologies sont connues :

faire attention :

1) ici, c'est les coherent sheaves sur les varietes complexe, il faut prendre la dimension complexe 2 et non reelle pour les groupes de Cohomologie du Sheaf et pour la dualite de Serre, cela va de 0 à 2, par contre pour les nombres de Betti et la theorie de Hodge, on prend la dimension reelle 4, avec la convention $H^r = \sum_{\{p+q=r, 0 \leq p, q \leq 2\}} H^{p,q}$, p, q varient selon la dimension complexe, quand on inverse p et q on a par la conjugaison complexe, la meme dimension.

2) Par la cohomologie et dualité de Dolbeault, $H^{0,1}$ est isomorphe à la cohomologie de Cech $H^1(S = K3, \Omega^0) = H^1(S = K3, O_S)$ car les 0-formes sont les fonctions et on prend la cohomologie dans le faisceau de fonctions O_S et par definition $H^1(S, O_S) = 0$ d'ou $h^{0,1} = \dim H^{0,1} = \dim H^1(S, O_S) = 0$. On voit que les groupes de cohomologie de sheaf (faisceau) sont des données et par la dualité de Serre (dimension complexe), on les connait tous, il n'y a que le premier et le dernier, doù la caractéristique Sheaf egale a 2.

De meme pour la cohomologie de Hodge (dimension reelle 4) on les connait tous ainsi que les nombres de Betti.

Le theoreme de Max Noether donne $X = S = K3$:

$\chi(X, O_X) = \chi(S, O_S) = 2 = \frac{\int c_1 \wedge c_1 + \int c_2}{12}$, avec c_1 la premiere classe de Chern et c_2 la deuxieme classe de Chern, definies dans le developpement de la courbure Ω

$$\det(\Omega - tI) = 1 + tr(\Omega) + \Omega \wedge \dots = 1 + c_1 + c_2,$$

L'integrale $\int c_2$ est le 2ème nombre de Chern dans le cas d'une surface il est egale a la caracteristique d'Euler-Poincaré, dans le cas dune surface $K3$, cest donc $\chi(K3) = \int c_2 = 24$.

Ici, quand on contracte on elimine des termes du type $dx^j \wedge dx^k$ et c_2 est une quatre forme ("forme volume") car on a contracte une 8-forme.

Plus generalement, on definit les nombres de Chern comme : $\int c_k$ avec c_k la k -ieme classe de Chern.

Comme la surface $K3$ est de dimension 4 et de classe de Chern nul, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0, voir le livre d'Aubin. Donc, cette variété possède une metrique d'Einstein de constante nulle, donc la courbure de Ricci est nulle et donc la courbure scalaire aussi.

(Remarquons d'abord qu'avec $(K3, h, \nabla)$ on a une structure hermitienne et par Siu, $K3$ est Kahler, c'est a dire que la structure Riemannienne $(K3, g = Re(h), \nabla_g)$ est compatible avec la structure complexe, les connexions de Chern et Levi-Cevita coincident.

On sait que la classe de Chern est nulle et donc, il existe une metrique d'Einstein-Kahler de constante 0).

On utilise la formule donnant la caracteristique d'Euler-Poincaré en fonction du tenseur de Weyl et de la courbure de Ricci et Scalaire, pour enfin dire que le tenseur de Weyl est non nul.

$$0 \neq \chi(K3) \equiv \int |Weyl|^2 + (Ricci_g, S_g) = \int |Weyl|^2$$

Donc, une surface $K3$ possede une metrique non-loclamment conformement plate.

Le Projectif complexe de dimension complexe $n \geq 2$ est une variete Kahlerienne, c'est dire qu'elle possede (3 structures) dont la Riemannienne et complexe, qui sont compatibles, les connexions de Levi-Cevita et de Chern sont les memes, pour la metrique de Fubini-Study. Il est d'Einstein et de courbure sectionelle non constante, donc non localement conformement plat. Il est orientable.

Le Projectif complexe de dimension complexe 1, est isometrique la sphere de dimension 2 reelle et donc de curbure sectionelle constante. C'est une surface de Riemann reelle (donc localement plate).

7) La formule d'integration par parties est valable quand la variété est compacte sans bord et non orientable, voir le livre d'Hebey. Cela veut dire que dans les problemes variationels de degré 2, il est possible de resoudre par la formulation variationelle un probleme elliptique comme dans le cas du Projectif en dimension 2, c'est fait dans le livre d'Aubin et ceci sur une varieté non orientable.

Par contre quand il sagit de fonction de Green, sur une varieté compacte, il est imperatif de supposer la verieté orientable car, par exemple, pour la Parametrix, on a besoin d'utiliser l'integration par parties en dehors de petites boules, on se ramene a une varieté à bord, d'où, il faut utiliser la formule de Stokes et donc une orientation.

8) Pour les variétés de dimension 3. On considere un Torus bundle M_φ d'application φ (voir le Hatcher pour la definition, φ est la monodromy map), il est orientable si et seulement si $\varphi \in SL_2(\mathbb{Z})$. William Goldman prouve qu'il existe un Torus bundle orientable ne possedant pas de structure conformement plate, φ non periodique, (de valeur propres réelles) (par exemple, $\varphi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$) il n'y a pas de metrique localemeent conformement plate, comme une variete lisse possede toujours une metrique Riemannienne g , elle est dans ce cas non localement conformement plate, $Weyl_g \neq 0$. Ce theoreme dit qu'il n'existe pas de metrique localement conformement plate sur cette variété.

9) Concernant les sommes connexes, $M \sharp N$ de deux variétés M, N , elles sont definies a partir d'une relation d'equivalence qui donne une variété quotient Topologique, c'est à dire C^0 , à l'ordre 0 il n'y a pas de probleme, car par continuité le recollement se fait naturellement, mais des qu'on cherche une structure differentiable ou C^k , $k \geq 1$, c'es plus compliqué, dans ce cas on utilise le Disc Theorem de Palais, qui dit qu'on peut trouver une isotopie, c'est à dire une homotopie lisse entre les bords et donc le recollement se fait de maniere lisse.

Remarquons que endehors de la sphere ou se fait le recollement, la variété est egale à M ou N .

Lorsque on met une metrique sur M et N alors par des fonctions cutoff on peut mettre une metrique, par recollement, sur $M \sharp N$ et elle coincide avec celles de M et N en dehors des boules de recollement. voir par exemple les articles de Dominic Joyce (2001) et Mazzeo (1995).

Dans le cas Riemannien, en utilisant les cartes exponentielles en $p \in B(p, 2\epsilon) \subset M$ et $q \in B'(q, 2\epsilon) \subset N$, on a deux injections naturelles i_1, i_2 et on doit faire le recollement entre $Id_{B(p, 2\epsilon)}$ et $i_2 o i_1^{-1}$. On definit une relation dequivalence en partant de couronnes $B(p, 2\epsilon) - B(p, \epsilon)$, $B(q, 2\epsilon) - B(q, \epsilon)$ vers les varietes M et N . On choisit une carte pour N renversant l'orientation et puis on compose par une inversion et on obtient i_2 .

alors on recolle les deux applications de cartes et le changement de cartes, $i_2 o i_1^{-1}$ est lisse, ce qui permet le passage de l'atlas de M a celui de N de maniere lisse. (Les changements de cartes sont lisses de M, N et $M - B(p, \epsilon) \cup N - B'(q, \epsilon)$, par $i_2 o i_1^{-1}$.)

Comme cette carte permet le passage au deux atlas de M et N , alors $M \sharp N$ est orientable.

On a : $X = M \setminus B(p, \epsilon) \cup N \setminus B'(q, \epsilon)$ est compact, le graphe de la relation $Gr = \{(x, x), x\} \cup \{(x, i_2 o i_1^{-1}(x)), x\}$ est fermé, donc, $X \setminus \sim$ est séparé. Soit $O = B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon) \cup B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon)$, et π l'application de passage au quotient. Alors $\pi(O)$ est un ouvert de $X \setminus \sim$ car $\pi^{-1}[\pi(O)] = O$.

Soit : Φ l'application de recollement de cartes, definit precedemment sur $\pi(O)$, alors Φ est bien definit et est un homeomorphisme sur son image qui est un ouvert de \mathbb{R}^n , par le theoreme d'invariance du domaine de Brower (car i_2 et i_1 se recollent au bord qui est une sphere, par definition). C'est une carte, compatible avec l'orientation car, les changement de cartes à droite et à gauche sont l'identité.

$$\Phi([x]) = i_1(x), x \in B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon), \Phi([x]) = \frac{i_2(x)}{|i_2(x)|^2}, x \in B'(q, 2\epsilon) \setminus B'(q, \epsilon),$$

avec, $[x] = \pi(x)$, l'application de passage au quotient. i_2 inverse l'orientation de N . Comme on compose avec une inversion, au final, on a des jacobiens de determinant positifs, de plus, sur la sphere, les orientations sont inversées, ce qui permet un recollement correct (car sur le premier bout on a i_1 avec la bonne orientation et sur le deuxieme bout on a i_2 qui inverse l'orientation, et sur la sphere $|i_2| = 1$).

On voit que $\Phi \circ \pi$ est continue par definition et donc Φ est continue.

On a bien, $(\Phi, \pi(O))$ une carte de recollement.

Elle permet le passage au deux atlas. Comme M et N sont orientables, $M \sharp N$ est orientable.

Avec $(\Phi, \pi(O))$ on a une carte de recollement, et,

$$\Phi o [i_1]^{-1} = \Phi o [i_1^{-1}] = Id_{B(p, 2\epsilon) \setminus B(p, \epsilon)},$$

$$\Phi o[i_2/|i_2|^2]^{-1} = \Phi o[(i_2/|i_2|^2)^{-1}] = Id_{B'(q,2\epsilon) \setminus \bar{B}'(q,\epsilon)},$$

On voit que les changements de cartes sont lisses et conservent l'orientation.

En considérant les métriques g_M, g_N et $\Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n})$, par des fonctions cutoff, on a par recollement, une métrique sur $M \sharp N$:

$$g_{M \sharp N} = \chi_1 g_M + \chi_0 \Phi^*(\delta_{\mathbb{R}^n}) + \chi_2 g_N,$$

par exemple.

Pour voir que sur les bords, les inversions sont inversées, on considère un observateur a de M tel que le repère (a, T) est direct avec T une orientation du bord. on déplace par une rotation, ou selon un chemin circulaire, vers un observateur b de N alors le repère (b, T') est direct si et seulement si $T' = -T$.

10) Concernant la classification des surfaces. Cela peut se faire grâce aux fonctions de Morse. Par récurrence sur le nombre de points critiques.

1- On vérifie que sous certaines hypothèses d'orientabilité des bords et quand on a deux homeomorphismes entre deux ensembles, alors on a un homeomorphisme entre les recollés.

2- On utilise une récurrence sur le nombre de points critiques des fonctions de Morse.

On note g_1, g_2 les applications de recollement, dans le Gramain, $g_1 = f, g_2 = f'$. Ici, dans le cas des recollés, on prend, $g_1 = id$ et $g_2 = id$, les recollés sont les ensembles de départ (en fait ils sont difféomorphes aux ensembles de départ et $f_* = id, f'_* = id$, on a inversion des orientations quand on recolle, et, $h_* = id, h'_* = id$, h et h' conserve l'orientation et l'inversion de l'orientation, respectivement). Les ensembles A et A' , sont des ensembles de niveau pour une fonction de Morse C^∞ , donc ce sont des variétés compactes C^∞ , il y a un nombre fini de composantes connexes, sinon (en se plaçant sur le bord, vecteur tangent et vecteur rentrant, on aurait un point critique dans l'intersection de 2 lignes de niveaux), il y aurait un point critique.

Pour l'orientabilité des bords, A et A' sont (homéomorphes implique difféomorphes en dimension 1) difféomorphes à des cercles et, à droite (pour les sommes connexes), les orientations sont inversées, donc le difféomorphisme conserve l'inversion d'orientation, son Jacobien est positif. D'où, l'application k_0 conserve l'orientation. Ce n'est pas toujours vrai, car on n'a pas un difféomorphisme global h et h' , par contre il y a une définition par l'homologie de l'orientation. Voir ci-dessus.

(on pouvait le voir en remarquant qu'on inverse deux fois l'orientation, donc au final on conserve l'orientation pour k_0).

Par exemple, on suppose que toute surface orientable ayant $p \leq q - 1$ points critiques avec un maximum et un minimum et $p - 2$ points critiques d'indice 1 est homeomorphe à \mathbb{T}_p . On peut commencer la récurrence pour $p = 0$, la fonction de Morse a un maximum et un minimum et les ensembles de niveaux sont homeomorphes à des demi-disques et par recollement on a une sphere. A l'ordre $p = 1$, pour le Tore, c'est écrit dans le Gramain, la fonction "cote" a 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1 (au milieu), dans le Gramain, il colle deux cylindres (les cylindres eux-mêmes sont obtenus par recollement d'un ensemble d'indice 0 ou 2 avec un ensemble d'indice 1) et il obtient un Tore. Ou bien si on commence la récurrence à partir du Tore, il suffit de voir que la surface est homeomorphe par recollement, au recollement de deux cylindres (les cylindres sont eux-mêmes obtenus par recollement d'ensembles d'indice 0 ou 2 et d'un ensemble d'indice 1, 0-1 et 1-2, de haut(0) en bas(1) ou de bas (2) vers le haut (1)) avec l'application de recollement $g_1 = id, g_2 = id$, et on obtient le Tore, g_2 est la deuxième application de recollement). Dans le cas général, on sait qu'il existe une fonction de Morse u , on décompose en deux, la partie de u ayant $p - 1$ points critiques, on lui recolle un disque et par récurrence, elle est homeomorphe à \mathbb{T}_{q-1} et le reste possède 4 points critiques, un maximum, un minimum et deux points critiques d'indice 1, on lui recolle un disque, qui est, par récurrence, homeomorphe au Tore, \mathbb{T}_1 . Donc, comme c'est écrit dans le Gramain, en revenant à u , il y a une partie homeomorphe à V_{p-1} et l'autre à V_1 et sur V_1 on inverse l'orientation. Or aussi sur une partie de la surface considérée, on inverse l'orientation, donc, on inverse l'orientation deux fois (se placer à droite, $Y - g_1(A)$ et $V_1 = \mathbb{T}_1 - B$, B un disque), ce qui revient à conserver l'orientation en considérant la composée des deux homeomorphismes (c'est l'homeomorphisme $k_0 = h' o g_1 o g_2^{-1} o h^{-1}$ du Gramain). Il reste à voir donc avec ces hypothèses, qu'il y a des homeomorphismes entre les recollés, $S = (S - A) \sharp (S' - B) =$

$(X - A) \sharp (Y - g_1(A)) = (X - A) \cup (Y - A)$, $g_1 = id$, et $V_{p-1} \sharp V_1$, ce qui est fait dans le cas orientable (A homomorphe au cercle dans le Gramain).

On écrit $(X - A) \cup (Y - A)$ pour dire qu'on recolle X et Y via A . Les applications du Gramain, $f = g_1 = id$, $f' = g_2 = id$ et le recollé (pour la relation d'équivalence, $x \equiv f(x) = x, x \in A$, $f_* = -id$, $f'_* = -id$, est diffeomorphe a l'ensemble de depart. On a $f_* = -id$ et $f'_* = -id$ car on inverse les orientations de depart quand on recolle $(+, h, A \rightarrow A'$, conservation de l'orientation, $f', A' \rightarrow f'(A')$, $-$ inversion de l'orientation, $h'^{-1}, f'(A') \rightarrow f(A)$, $+$, conservation de l'orientation, $f^{-1}, f(A) \rightarrow A$, $-$, inversion de l'orientation). Donc, on a, $h_* = id$, $f'_* = -id$, $(h'^{-1})_* = id$ et $(f^{-1})_* = -id$. Et on écrit car $f = id$, $f' = id$, $f_* = id$, $f'_* = id$, pour dire qu'on envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation (meme si elle inversée).

On peut raisonner par les generateurs, si e_1 est generateur de $H_{1,A,X} = H_1(A, A - x_0, Z)$ et e_2 est generateur de $H_{1,A',X'} = H_1(A', A' - x'_0, Z)$, alors, comme sur la partie de Y et Y' on inverse les orientations, on a $-e_1$ est generateur de $H_{1,A,Y}$ et $-e_2$ est generateur de $H_{1,A',Y'}$, comme $f = id$ alors, $f_*(e_1) = -e_1$. On écrit, $f_* = id$ dans le sens qu'elle envoie un generateur d'orientation vers un generateur d'orientation. et on écrit $f_* = -id$, pour dire que f_* inverse l'orientation de depart sur A .

On a la meme chose pour A' et f' .

Des le depart on a deux homeomorphismes h et h' , supposons pas exemple que $h_* = -id$, $h_*(e_1) = -e_2$, comme pour A' on est dans l'espace euclidien, il suffit de composer avec une symetrie t pour avoir $t_*(e_2) = -e_2$ donc, hot conserve l'orientation sur le bord. $(hot)_*(e_1) = e_2$ et on fait la meme chose avec h' . Finalement, on a deux homomorphismes hot et $h'ot'$ ou h' (si h' conserve l'inversion de l'orientation); qui conservent l'orientation sur les bords.

On a utilisé l'orientation definie par l'homologie pour prouver, par recollement que la surface S est homomorphe à la somme connexe de q Tores, muni d'une orientation homologique. Or La somme connexe de Tore est une varieté differentiable et donc, cette orientation homologique est equivalente à l'orientation usuelle du Tore. (On pouvait prouver ceci à chaque etape, en utilisant, le fait que la surface de depart est orientable et donc s'injecte dans \mathbb{R}^3 , utiliser des "doubles", (voir le Vick, pour l'orientation homologique des variétés sans bord et des varietés bord), pour orienter les surfaces a bord de chaque etape, puis, obtenir des surfaces munies d'orientation homologiques et differentiables). L'équivalence entre orientation homologique et differentiable pour une variété lisse est écrite dans le livre de Bredon (geometry and topology). Remarquons qu'une variété a bord W est orientable si et seulement si son interieur \dot{W} est orientable, il y a induction de l'orientation sur le bord ∂W et il y a equivalence aussi entre orientation homologique et differentiable. (il y a un isomorphisme entre $H_n(W, \partial W, Z)$ et $H_n(W, W - x, Z)$).

Concernant la structure differentiable sur le recollé de $X - A \cup_{f,A} Y - A$, dans Milnor (Somme connexe et structure differentiable et Differentiable manifolds which are homotopy spheres), ils prouvent que les voisinages des bords de $X - A$ et $Y - A$, sont diffeomorphes a des tubes, puis recollent les tubes, c'est une carte de recollement, pour avoir une structure differentiable. Or, pour la somme connexe de deux variétés riemanniennes, les cartes exponentielles sont des voisinages tubulaires des bords, il n'y a pas besoin d'utiliser ce que dit Milnor. Quant à ici, le recollé $X - A \cup_{f,A} Y - A$ est diffeomorphe à $X - A \cup Y - A$, on a deja une structure differentiable sur le recollé, via ce diffeomorphisme. (la projection $p : x \rightarrow [x]$ est un diffeomorphisme).

Quant a l'écriture $\mathbb{T}_{q-1} \sharp \mathbb{T}_1$, c'est la somme connexe, comme on est dans \mathbb{R}^3 , somme connexe et recollement coincident.

Quand on a une application s qui conserve l'orientation, cela veut dire qu'on a, sur une variete M_1 compacte sans bord de dimension 1, $s_* = id$. Pour le voir, on a si l'orientation est inversée sur M_1 et $M_2 = s(M_1)$, cela veut dire que : -1 est generateur de $H_1(M_1, M_1 - x_0)$ et de $H_1(M_2, M_2 - s(x_0), Z) = H_1(s(M_1), s(M_1) - s(x_0), Z) = s_*(H_1(M_1, M_1 - x_0, Z))$. Donc, $s_*(-1) = -1$, c'est a dire que $s_* = id$. Lorsque φ_1 inverse l'orientation alors $(\varphi_1)_* = -id$.

En utilisant une suite de Mayer-Vietoris, et le fait que $M_1 - x_0$ est d'homotopie un segment donc a un point, donc d'homologie nulle on a :

s_* est un isomorphisme de $H_1(M_1)$ vers $H_1(M_2)$, comme il conserve l'orientation $s_* = id$.

Pour le voir il suffit de raisonner sur les generateurs $s_*(e_1) = ke_2$ et $(s^{-1})_*(e_2) = k'e_1$, donc, $kk' = 1$, comme ces des entiers $k = 1$ ou $k = -1$, comme s conserve l'orientation $k = 1$. On fait la meme chose pour φ_1 et on obtient $k = -1$.

On utilise l'homomorphisme surjectif d'Hurwicz qui est bijectif sur le cercle. De $\pi_1(S_1)$ dans $H_1(S_1)$

$$\bar{h} : [\gamma] \rightarrow \tilde{[\gamma]}$$

On applique cela aux applications du Gramain, $s = h'^{-1}oh$ (conserve l'orientation) et $\varphi_1 = \varphi$, $A = \varphi(S_1 \times \{0\})$, ici, $f = id, f' = id$ et $M_1 = M_2 = A$, puis on raisonne en considérant $S_1 \times \{0\}$ au lieu de S_1 .

$$\begin{aligned} k &= \varphi^{-1}oso\varphi, \\ \pi(k)[\gamma] &= [\varphi^{-1}oso\varphi\gamma] = \\ \bar{h}^{-1}([\varphi^{-1}oso\varphi\gamma]) &= \\ = \bar{h}^{-1}(((\varphi_1)^{-1})_*os_*o\varphi_*(\tilde{[\gamma]})) &= \\ = \bar{h}^{-1}\tilde{[\gamma]} = \bar{h}^{-1}\bar{h}([\gamma]) &= [\gamma], \end{aligned}$$

Où on a utilisé le fait que $\varphi_* = id$ si on se place sur X (on conserve l'orientation) ou $\varphi_* = -id$ si on se place de coté de Y (on inverse l'orientation).

On pouvait remplacer $[\gamma]$ par un generateur $e_1 = [\gamma_1]$ et raisonner sur les generateurs.
Donc,

$$\pi(k) = id$$

Ceci dans le cas ou $k(a) = a$, k fixe un point. Sinon, (k ne fixe pas a), on compose avec une rotation $r(e^{i\theta}) = e^{iu}e^{i\theta}$, or en considérant $F(e^{i\theta}, s) = e^{isu}e^{i\theta}$, $s \in [0, 1]$, on a une homotopie entre r et l'identité id , Donc, $r_* = id$ de $H_1(S_1) \rightarrow H_1(S_1)$.

Donc, $k'_* = id$, puis on utilise le meme groupe fondamental en a , $\pi_1(S_1, a)$ et l'application d'Hurwicz, comme precedemment pour prouver que $\pi(k') = id$.

On peut utiliser le lift dans le livre de Gramain et prolonger k .

L'autre cas, Y rectangle et $g_1(A)$, deux segments, correspond au cas non orientable. Pour le voir, on choisit une orientation (choisir un repere mobile) sur Y , celle-ci change quand on part de X et on lui recolle Y via A . (ici, $g_1 = f$ est l'application de recollement).

Notons que par Moise-Rado, homeomorphe implique diffeomorphe en dimension ≤ 3 .

11) Pour l'inegalité de Kato : on a $u \in L^1_{loc}$ et $\Delta u \in L^1_{loc}$ alors : $u \in W^{1,1}_{loc}$, pourquoi ?

Comme c'est local, on écrit dans une boule u en fonction de la fonction de Green (de la boule par exemple et $n \geq 3$ par exemple, $n = 2$ c'est la meme chose) :

$$u = \frac{1}{r^{n-2}} * \Delta u + \int_{\partial B} P * u,$$

Par Fubini, Fubini-Tonelli,

$$\partial u = \partial\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \Delta u + \int_{\partial B} (\partial P)u,$$

avec ∂P regulier des qu'on considere des points interieurs et donc on peut derivier sous le signe \int pour cette partie.

On a,

$$u \in L^1_{loc} \Rightarrow \exists r \int_{\partial B_r} u(\sigma)d\sigma < +\infty,$$

Au sens des distributions on a pour $\varphi \in D(B_{r/2})$:

$$\int (-\partial\varphi)u = \int (-\Delta u) \int (-\partial\varphi)\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) + \text{termes reguliers de la fonction de Green}$$

Donc, apres integration par parties pour le noyau Newtonien,

$$\int (\partial\varphi)u = \int \int (\partial(\frac{1}{r^{n-2}})(-\Delta u)\varphi + \int \int \partial P u \varphi dx d\sigma = \int a\varphi, \quad a \in L^1,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

Ceci est valable pour u régulière. Soit ρ_n un mollifieur, alors :

Si $u \in L^1(B_r)$, alors :

$$\rho_n * u(x) = \int_{B_r} \rho_n(x-y)u(y)dy,$$

et pour $x \in B_{r/2}$:

$$\Delta(\rho_n * u)(x) = (\rho_n * \Delta u)(x),$$

On a aussi,

$$\rho_n * u \rightarrow u, \quad \text{dans } L_{loc}^1(B_r),$$

et,

$$\Delta(\rho_n * u) = \rho_n * (\Delta u) \rightarrow \Delta u, \quad \text{dans } L_{loc}^1(B_{r/2}),$$

On fait ce qu'on a fait avec u , avec $\rho_n * u$, comme on a des bornes uniformes en L_{loc}^1 , alors,

$$\rho_n * u \in W_{loc}^{1,1}, \quad \text{et } \nabla(\rho_n * u) \rightarrow v \in L_{loc}^1,$$

Donc,

$$\int u \partial\varphi = \lim_n \int (\rho_n * u) \partial\varphi = - \lim_n \int \partial(\rho_n * u) \varphi \rightarrow - \int v \varphi,$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,1},$$

On a la même chose si on considère un problème variationnel $-\Delta u = f$, $f \in L_{loc}^1$ et $u \in L_{loc}^1$.

On a même mieux, $u \in W_{loc}^{1,q}$.

On peut retrouver ce résultat en se ramenant à une fonction harmonique en soustrayant une solution d'un problème de Dirichlet.

Soit $f \in L^1$, $\exists f_j \rightarrow f$ dans L^1 avec $f_j \in C_c^\infty$, on résout :

$$-\Delta u_j = f_j, \quad \text{avec } u_j = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

Alors, par Stampacchia ou Brezis-Strauss, on a :

$$\|u_j\|_{W_0^{1,q}} \leq C_q,$$

En passant à la limite en j , on a l'existence de $u_0 \in W_0^{1,q}$ tel que :

$$-\Delta u_0 = f,$$

Alors,

$$-\Delta(u - u_0) = 0, \quad \text{et } u - u_0 \in L^1,$$

On utilise le théorème de Weyl pour avoir,

$$u - u_0 \in C^\infty$$

Donc,

$$u \in W_{loc}^{1,q},$$

On retrouve le théorème dans le livre de Dautray-Lions.

12) Sur la fonction distance au bord : c'est bien écrit dans le Gilbarg-Trudinger. Grâce à la propriété de la sphère intérieure, il existe un voisinage du bord assez petit tel que la fonction

distance est C^k et est égale à la distance (pour chaque point) à un point unique du bord, car on fait varier des sphères le long du bord. Voir, Gilbarg-Trudinger. Le domaine (et le bord) doit être par exemple au moins C^2 .

RÉFÉRENCES

- [1] Agmon. 1957 ou 1959 sur les estimations a priori locales.
- [2] Agmon-Douglis-Nirenberg. 1959
- [3] Ambrosio. Fusco. Pallara. Functions of Bounded variations and Free Discontinuity problems. Oxford.2000.
- [4] T. Aubin. Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry. Springer-Verlag, 1998.
- [5] C. Bandle. Isoperimetric Inequalities and Applications. Pitman, 1980.
- [6] Bredon. Geometry and Topology. Springer.
- [7] Brezis. Analyse fonctionnelle; 1983
- [8] Brezis-Marcus-Ponce. Nonlinear elliptic equations with measures revisited. Mathematical aspects of nonlinear dispersive equations, 55-109, Ann. of Math. Stud., 163, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2007.
- [9] Dautray-Lions.
- [10] De Figueiredo-Lions-Nussbaum. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations. J. Math. Pures Appl. (9) 61 (1982), no. 1, 41-63
- [11] Gallot. Hulin. Lafontaine. Riemannian Geometry.
- [12] D. Gilbarg, N.S. Trudinger. Elliptic Partial Differential Equations of Second order, Berlin Springer-Verlag, Second edition, Grundlehren Math. Wiss.,224, 1983.
- [13] William Goldman. 1983. Existence de variétés sans structure plate.
- [14] Gramain.A. Topologie des surfaces. Puf. 1971.
- [15] E. Hebey. Introduction à l'analyse non-linéaire sur les variétés. Diderot Editions.
- [16] Hatcher. Sur les Torus Bundles.
- [17] D.Huybrechts. Lecture on K3 surfaces.
- [18] D. Joyce. Constant scalar curvature metrics on connected sums. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences.(2003), Issue 7, pp 405-450.
- [19] Lafontaine.Introduction à la géométrie Différentielle.2010.
- [20] Lang, S. Differentiable and Riemannian manifolds.
- [21] Necas, J. Direct Methods in the Theory of Elliptic Equations. Springer.
- [22] J.G. Ratcliffe.S.T. Tschantz. On the Davis hyperbolic 4-manifold. Topology and its Applications Volume 111, Issue 3. pp 327-342
- [23] Robert, Frederic. Preprint, Fonctions de Green sur les variétés à bord.

EQUIPED' ANALYSE COMPLEXE ET GEOMETRIE, UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE, 75005, PARIS, FRANCE.