



HAL
open science

Corrélation entre la distribution des défauts et la distribution de la contrainte à rupture pour des matériaux à comportement fragile

François Hild, Didier Marquis

► **To cite this version:**

François Hild, Didier Marquis. Corrélation entre la distribution des défauts et la distribution de la contrainte à rupture pour des matériaux à comportement fragile. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie II, 1990, 311, pp.573-578. hal-01635384

HAL Id: hal-01635384

<https://hal.science/hal-01635384>

Submitted on 30 Oct 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Corrélation entre répartition de défauts et contrainte à rupture pour des matériaux à comportement fragile

François HILD et Didier MARQUIS

Résumé – Dans cette Note, on étudie l'influence de défauts initiaux sur la rupture des matériaux à comportement fragile. A l'aide d'une approche statistique et de la théorie du maillon le plus faible, on établit une relation générale entre la répartition aléatoire des défauts et une contrainte de rupture macroscopique. En particulier, à l'aide de cette démarche, on peut retrouver des formes de loi de rupture identiques à celles postulées par Weibull.

Correlation between defect distribution and failure stress for brittle materials

Abstract – In this Note, the influence of defects on failure is studied for brittle materials. Using the assumption of the weakest link theory, a general relationship between the statistical distribution of defects and the cumulative failure probability is deduced. Some correlations between the defect distribution and Weibull's parameters are derived from both linear fracture mechanics and continuum damage mechanics.

Abridged English Version – The initial defects are the main cause of the failure of structures made of brittle materials.

In section 2 (a) a statistical distribution of defects, of size a ($0 \leq a \leq a_M$), and its link with the failure probability of a structure are introduced. The flaws are supposed randomly distributed within the structure and are taken into account by a probability density function f . The local behaviour is described by an internal variable of degradation δ . Its evolution law (1) is given by the maximal dissipation assumption [3]. This allows us to determine, for a given loading, the critical defect size a_c under which the defect does not evolve. If the defect size is larger than a_c the rate of evolution is infinite and leads to a brittle failure. The cumulative failure probability P_{F_0} of a volume containing one defect (2) is related to the critical defect size a_c and the probability density function f . Using the weakest link theory, a relation between the failure probability P_F of the structure and P_{F_0} is deduced (3). The relations (2) and (3) lead to a general relationship (4) between the defect distribution and the cumulative failure probability. If the critical defect size a_c is close to the maximal defect size a_M , a simplified form of (4) is given (5).

Section 3 (a) is concerned with an application in the case of uniaxial states of stress and a probability density function f fitted by $k(a_M - a)^\beta$, $\beta > 0$ and $k > 0$, a being close to a_M . A general fracture criterion (6) is chosen: the function g is assumed defined from 0 to a_M , positive, continuously derivable and strictly decreasing. The threshold stress σ_u (7) is defined as the lowest value of the stress under which the failure probability has a zero value. Relation (9) between the β -parameter and Weibull's modulus m is derived from expressions (2) and (4).

Section 3 (b) deals with a Beta function (10), which verifies the hypothesis of section 3 (a), and takes into account the value of the most critical flaw a_M .

According to linear fracture mechanics, the defects are modelled by initial cracks which are orthogonal to the tensile direction. The failure criterion is chosen as the critical value reached by the energy release rate (Fig. 1). The threshold stress is defined by (11 a) and the normalising factor σ_0 by (11 b). The exponent β is the only parameter (among α and

β) to appear in (9) which remains valid. It gives the trend of the distribution for large defects which, in that case, are the most critical for rupture.

Continuum damage mechanics can also be used for brittle materials. Then, defects are taken into account by an initial value of a scalar damage variable (12). The chosen failure criterion (13) refers to the concept of effective stress [6] (*Fig. 2*). The same type of relationship is derived (14 *a, b*).

In Section 3 (*c*), the cracks are considered with a variable size and direction (*Fig. 3*) and the expression of P_{F_0} is given by (15). The same threshold stress as before (11 *b*) is obtained. It corresponds to the failure stress of the most critical defect which is the largest one with its orientation orthogonal to the tensile direction. The introduction of the fracture mode II leads to a modification of the relationship between m and β (16). As m is generally much larger than 1/2 (e.g. equal to 10 for monolithic ceramics), it appears that the influence of mode II is almost negligible.

For the three-dimensional case [section 3 (*d*)], a general relationship (18) between the initial value of damage and the defect size is assumed. A common failure criterion referring to the maximum principal stress criterion (19) is chosen. In that case, a denotes the radius of the sphere containing the defect inside an elementary cell the size of which is $2L$ (*Fig. 2*). The function h is defined from 0 to 1, positive, continuously derivable and strictly increasing. Under these conditions a relationship between m and β and an expression of the threshold stress (19 *a, b*) are derived.

A scalar damage variable is sufficient to describe the statistical aspect of the failure of brittle materials when the equations (9), (16) and (19 *a*) are compared. This correlation could be used to get informations on the flaw distribution within a brittle material from a statistical analysis of a set of macroscopical failure tests.

1. INTRODUCTION. — Il est classique de décrire la rupture des matériaux à comportement fragile à l'aide de la théorie du maillon le plus faible (*cf.* par exemple Weibull [1], Batdorf [2], ...). Physiquement, la rupture de ces matériaux est provoquée par l'extension instable de défauts présents initialement avant l'application de tout chargement : ces défauts sont, en général, distribués aléatoirement dans toute la structure.

Dans cette Note, il est proposé de tenir directement compte de ces défauts dans la théorie du maillon le plus faible et de corrélérer ainsi leur distribution statistique aux contraintes de rupture macroscopiques.

2. PRISE EN COMPTE DES DÉFAUTS DANS LA THÉORIE DU MAILLON LE PLUS FAIBLE. — On considère une structure occupant un domaine Ω de volume V , contenant des défauts initiaux de taille a supposée bornée par 0 et a_M , répartis suivant une densité de probabilité f .

Un défaut initial représente une dégradation initiale que l'on suppose être modélisée par une variable interne de dégradation δ de valeur initiale δ_0 (caractérisant l'état local ou global du système : par exemple un endommagement initial ou une fissure initiale). Soit Δ la force thermodynamique associée à la variable de dégradation δ . En faisant l'hypothèse de dissipation maximale [3], l'évolution de δ obéit à la règle de normalité généralisée :

$$(1) \quad (\Delta - \Delta^*) \dot{\delta} \geq 0, \quad \forall \Delta^* \in \mathcal{C}$$

où \mathcal{C} représente le domaine des forces admissibles. Pour un état de chargement donné, le convexe \mathcal{C} permet de déterminer une taille critique a_c de défaut initial, en dessous de laquelle la variable de dégradation δ , de valeur initiale δ_0 liée à la modélisation du défaut initial, n'évolue pas. Lorsque la taille de défaut est supérieure à a_c , la relation (1) conduit à une évolution brutale de la variable de dégradation δ . Cette modélisation constitue un cadre général d'étude des matériaux à comportement fragile.

(a) *Étude sur un maillon élémentaire.* — Soit un maillon élémentaire occupant un domaine Ω_0 de volume V_0 , ne contenant qu'un seul défaut. En supposant que le champ des contraintes varie lentement à l'intérieur de Ω_0 , la probabilité cumulée de rupture P_{F_0} associée à Ω_0 est la probabilité qu'il y ait un défaut de taille supérieure à la taille critique a_c dépendant de l'état de contrainte appliqué sur le maillon :

$$(2) \quad P_{F_0} = \int_{a_c}^{a_M} f(a) da$$

(b) *Étude sur toute la structure.* — En faisant l'hypothèse que la rupture d'un unique maillon (le maillon le plus faible) conduit à la rupture de l'ensemble de la structure et qu'il n'y a pas d'interaction entre les défauts (indépendance des événements), la probabilité cumulée de rupture P_F de la structure Ω est donnée par :

$$(3) \quad \ln(1 - P_F) = \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \ln(1 - P_{F_0}) dV$$

A l'aide du résultat sur un maillon élémentaire (2), la relation (3) peut être écrite en tenant compte directement des défauts :

$$(4) \quad P_F = 1 - \exp \left[\frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \ln \left\{ 1 - \int_{a_c}^{a_M} f(a) da \right\} dV \right]$$

V_0 représente ici le volume de matériau qui, en moyenne, ne contient qu'un seul défaut : il correspond donc à une *propriété caractéristique du matériau*.

(c) *Cas particulier.* — Si l'on suppose que seuls les défauts les plus gros sont critiques, vis-à-vis de la rupture, a_c est proche de a_M et l'expression (4) peut être simplifiée pour s'écrire :

$$(5) \quad P_F \approx 1 - \exp \left[- \frac{1}{V_0} \int_{\Omega} \int_{a_c}^{a_M} f(a) da dV \right]$$

On retrouve ici une généralisation de l'expression écrite par Jayatilaca et Trustrum [4] dans le cadre de la mécanique linéaire de la rupture (en remarquant qu'ils n'avaient pas borné supérieurement la taille des défauts).

Dans la suite, nous envisageons plusieurs applications à l'aide de la mécanique linéaire de la rupture et de la mécanique de l'endommagement continu en explicitant la corrélation entre les défauts et la contrainte de rupture.

3. APPLICATIONS. — (a) *Cas général unidimensionnel.* — On suppose, dans un premier temps, un critère général de rupture liant la taille critique du défaut a_c à une contrainte unidimensionnelle σ par :

$$(6) \quad \sigma = g(a_c)$$

où g est une fonction définie entre 0 et a_M , positive, continûment dérivable et strictement décroissante. Pour le maillon élémentaire, la taille maximale du défaut étant a_M , il existe

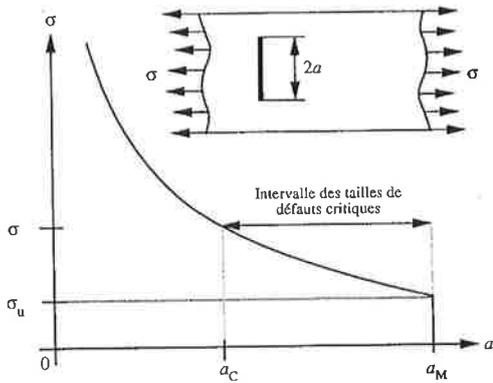


Fig. 1

Fig. 1. - Tailles de fissures critiques en mode I pour une contrainte donnée.

Fig. 1. - Critical crack size in fracture mode I for a given stress.

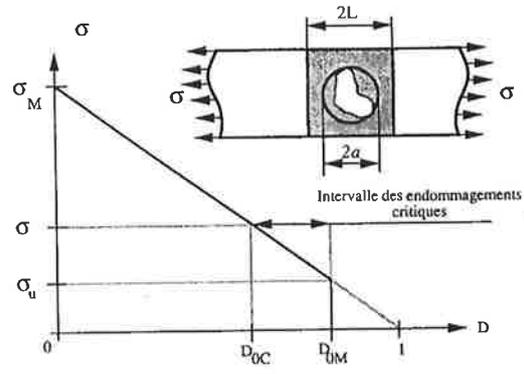


Fig. 2

Fig. 2. - Endommagements critiques pour une contrainte donnée.

Fig. 2. - Critical value of damage for a given stress.

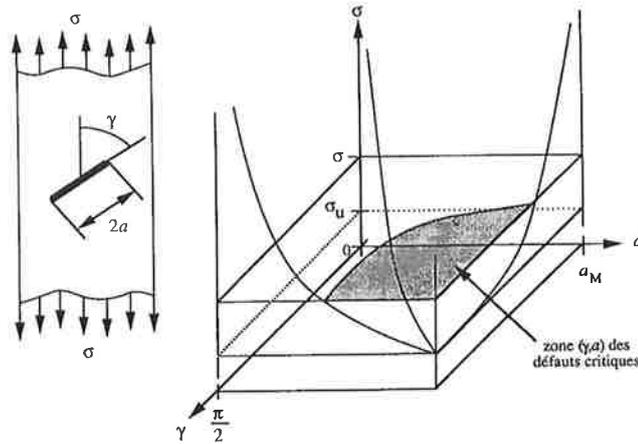


Fig. 3. - Tailles de fissures critiques en modes I et II pour une contrainte donnée.

Fig. 3. - Critical crack size in fracture modes I and II for a given stress.

une contrainte seuil σ_u en dessous de laquelle la probabilité de rupture est nulle :

$$(7) \quad \sigma_u = g(a_M)$$

En supposant que la taille du défaut critique a_c est proche de a_M , que la densité de probabilité f est approximée au voisinage de a_M par un polynôme $k(a_M - a)^\beta$, $k > 0$ et $\beta > 0$, la probabilité P_{M_0} peut être approchée par :

$$(8) \quad P_{F_0} \approx \left[\frac{\langle \sigma - \sigma_u \rangle}{\sigma_0} \right]^{\beta+1} \quad \text{avec} \quad \sigma_0 = -g'(a_M) \left[\frac{\beta+1}{k} \right]^{1/(\beta+1)}$$

Cette forme de la probabilité est identique à celle de Weibull [1] et à l'aide de (5) on retrouve également une expression identique au niveau de toute la structure. Dans ce cas, le coefficient β et le module de Weibull m satisfont la relation :

$$(9) \quad m = \beta + 1$$

(b) *Applications dans le cas unidimensionnel.* – Dans toute la suite, on suppose que la densité de probabilité f est donnée par une fonction bêta :

$$(10) \quad f(a) = \frac{a_M^{-1-\alpha-\beta}}{B_{\alpha\beta}} a^\alpha (a_M - a)^\beta, \quad a \in [0, a_M], \quad \alpha > -1 \text{ et } \beta > 0$$

où α , β , a_M sont les paramètres de la loi bêta, $B_{\alpha\beta} = B(\alpha + 1, \beta + 1)$ la fonction eulérienne de première espèce bêta appliquée à $\alpha + 1$ et $\beta + 1$. Cette densité de probabilité satisfait aux hypothèses énoncées en 3 (a).

En faisant appel à la mécanique linéaire de la rupture, les défauts sont modélisés par des fissures de demi-longueur a orthogonales à la direction de traction (fig. 1). La relation (1) peut être particularisée en prenant comme force thermodynamique Δ le taux de restitution d'énergie [3]. L'inégalité (1) peut alors être traduite en terme de facteur d'intensité des contraintes critique K_{IC} et on obtient :

$$(11 \text{ a, b}) \quad \sigma_u = \frac{K_{IC}}{\sqrt{\pi a_M}}, \quad \sigma_0 = \frac{\sigma_u}{2} [(\beta + 1) B_{\alpha\beta}]^{1/(\beta + 1)}$$

La relation (9) reste valable : des deux exposants α et β de la fonction bêta (10) seul β intervient. Il donne la tendance de la distribution pour les plus gros défauts qui sont, dans ce cas, les plus critiques pour la rupture.

On peut également faire appel à la mécanique de l'endommagement continu. Les défauts sont alors modélisés par un endommagement scalaire initial variable D_0 :

$$(12) \quad D_0 = \frac{a}{L}$$

où $2L$ représente la taille fixe de la cellule (ou du maillon) et $2a$ une taille variable de défaut ($L \geq a_M$). La relation (1) peut être obtenue en considérant comme force thermodynamique le taux de restitution de densité élastique (cf. par exemple Marigo [5]). En utilisant la notion de contrainte effective [6], le critère de rupture est donné par (fig. 2) :

$$(13) \quad \frac{\sigma}{(1 - D_0)} = \sigma_M$$

où σ_M correspond à un coefficient caractéristique du matériau. Ainsi on obtient :

$$(14 \text{ a, b}) \quad \sigma_u = \sigma_M (1 - D_{0M}), \quad \sigma_0 = \sigma_M D_{0M} [(\beta + 1) B_{\alpha\beta}]^{1/(\beta + 1)}$$

D_{0M} représente l'endommagement initial maximal.

(c) *Généralisation bidimensionnelle.* – A l'aide de la mécanique linéaire de la rupture, nous modélisons les défauts initiaux par des fissures de demi-longueur a et d'orientation γ variables. Ce cas n'entre pas dans le cadre général proposé plus haut, mais se traite directement. La densité de probabilité f est décrite par $f(a, \gamma)$, où γ est l'angle fait par la direction de la fissure avec la direction de traction (fig. 3). Le critère de rupture est donné, en première approximation, par : $K_{IC}^2 = K_I^2 + K_{II}^2$. En supposant une équirépartition angulaire des défauts, l'expression (2) peut être étendue dans ce cas à :

$$(15) \quad P_{F_0} = \int_{a_c}^{a_M} \frac{2}{\pi} \text{Arccos} \left[\frac{K_{IC}}{\sigma \sqrt{\pi a}} \right] f(a) da \quad \text{avec} \quad a_c = \frac{K_{IC}^2}{\pi \sigma^2}$$

La valeur de contrainte seuil σ_u est identique à celle obtenue en (11 a) : elle correspond à un défaut de taille maximale orienté par $\gamma = \pi/2$ (mode I). On obtient également :

$$(16) \quad m = \beta + 1 + \frac{1}{2}$$

L'influence du mode II apparaît donc faible surtout pour les valeurs usuelles de m (dans le cas des céramiques massives m est peu différent de 10).

(d) *Généralisation tridimensionnelle.* — A l'aide de la mécanique de l'endommagement continu, nous définissons un endommagement initial scalaire par :

$$(17) \quad D_0 = h \left(\frac{a}{L} \right)$$

où h est une fonction définie entre 0 et 1, positive, continûment dérivable et strictement croissante, a est le rayon de la sphère circonscrite au défaut (fig. 2). D'autre part, nous choisissons un critère de rupture relatif à la valeur maximale des contraintes principales effectives :

$$(18) \quad \tilde{\sigma}_{IM} = \frac{\sigma_{IM}}{1 - D_0} = \text{Max}_{i=1, 2, 3} \left[\frac{\sigma_i}{1 - D_0} \right] = \sigma_M$$

où σ_M est une caractéristique du matériau et σ_i les contraintes principales appliquées à la cellule. On obtient :

$$(19 \text{ a, b}) \quad m = \beta + 1, \quad \sigma_u = \sigma_M \left[1 - h \left(\frac{a_M}{L} \right) \right]$$

Dans toutes les applications, pour m grand (par rapport à 1/2), l'endommagement scalaire considéré ici est suffisant pour décrire les phénomènes statistiques de la rupture des matériaux à comportement fragile. En effet, la prise en compte de l'orientation des fissures dans le cas de la mécanique linéaire de la rupture ne modifie pas fondamentalement la relation entre m et β : cf. (9) et (16). Ainsi, l'expression (4) tenant compte, *a priori*, uniquement de la taille des défauts paraît, *a posteriori*, suffisante.

Enfin, cette corrélation peut être utilisée pour obtenir des renseignements sur la distribution des défauts dans un matériau à comportement fragile à partir de l'analyse d'un ensemble d'essais macroscopiques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] W. WEIBULL, *J. Appl. Mec.*, 18, [3], 1951, p. 293-297.
- [2] S. B. BATDORF, In *Fracture mechanics of ceramics*, 3, 1977, p. 1-30.
- [3] Q. S. NGUYEN, *J. Méc. Th. Appl.*, 3, [1], 1984, p. 41-61.
- [4] A. De S. JAYATILAKA et K. TRUSTRUM, *J. Mat. Science*, 12, 1977, p. 1426-1430.
- [5] J. J. MARIGO, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 292, série II, 1981, p. 1309-1312.
- [6] J. LEMAITRE et J. L. CHABOCHE, In *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, 1985, p. 343-444.