



HAL
open science

Les relations de Milne–Barbier–Unsöld ?

Frédéric Paletou

► **To cite this version:**

| Frédéric Paletou. Les relations de Milne–Barbier–Unsöld ?. 2017. hal-01633633

HAL Id: hal-01633633

<https://hal.science/hal-01633633>

Preprint submitted on 14 Nov 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Les relations de Milne–Barbier–Unsöld ?

Frédéric Paletou*

Université Paul Sabatier, Observatoire Midi-Pyrénées, Cnrs, Cnes, Irap, F-31400 Toulouse, France

(Dated: November 11, 2017)

Cette revue vise à clarifier les origines des célèbres relations dites de Eddington–Barbier, incontournables dans le domaine du transfert de rayonnement astrophysique. Ces dernières relient, en effet, respectivement l’intensité spécifique et le flux émergents à la valeur de la fonction source à des profondeurs optiques spécifiques dans l’atmosphère considérée. Nous discuterons ici sur la méthode et les hypothèses formulées à l’origine et exposées dans la publication de l’astronome français Daniel Barbier (1943). Nous montrerons aussi le fait que ces mêmes relations apparaissent déjà dans la première publication de Milne (1921).

I. INTRODUCTION

La théorie du transfert de rayonnement est fondamentale en astrophysique. En effet, à part via l’exploration *in situ* de divers objets dans le système solaire, les détections, directes ou indirectes, des rayons cosmiques ou de neutrinos, ou encore l’essor récent et spectaculaire de la détection des ondes gravitationnelles depuis 2015, l’essentiel de ce que nous apprenons des objets célestes réside encore dans l’analyse, à distance, du rayonnement *photonique* que nous en recevons.

Un certain nombre de solutions analytiques ont été établies, sous certaines hypothèses simplificatrices, durant la première moitié du XX^{ème} siècle, avant l’avènement du “transfert numérique” dès les années soixante. Dans la lignée des travaux pionniers de Schuster (1905) et Schwarzschild (1906), d’importants résultats ont ainsi été établis, en particulier pour le cas des photosphères stellaires en équilibres thermodynamique et radiatif. Ils concernent, par exemple, la distribution de température pour un modèle d’atmosphère simplifié dite “grise”, ainsi que la loi d’assombrissement “centre–bord” associée, en ce qui concerne le rayonnement émergent. On pourrait aussi mentionner la loi en $\sqrt{\varepsilon}$ de la valeur de surface de la fonction source pour un problème simplifié de transfert radiatif *hors* équilibre thermodynamique local (voir e.g., Lambert et al. 2016).

Les fondements de la théorie du transfert de rayonnement peuvent être appris (ou revus) dans de nombreux cours, dispensés en général au niveau des masters d’astrophysique, et dans un certains nombres d’ouvrages qui font autorité. Nous recommanderions, par exemple, de se référer au cours en ligne de Rutten (2003) ou bien également à l’ouvrage très exhaustif de Hubeny & Mihalas (2014), récemment édité.

II. LES RELATIONS D’EDDINGTON–BARBIER

Les relations dites de “Eddington–Barbier” constituent l’un de ces résultats importants du “transfert analytique”, encore maintenant systématiquement présentées dans l’écrasante majorité des monographies et des cours d’astrophysique théorique de part le monde. Dans la

plupart des cas également, elle sont établies à partir de l’hypothèse que la fonction source est une fonction *linéaire* d’épaisseur optique, soit :

$$S(\tau) = a + b\tau, \quad (1)$$

où a et b sont des coefficients arbitraires.

Il est alors facile de calculer l’intensité spécifique *émergente*, pour une atmosphère semi–infinie “plan–parallèle”, à partir de la relation suivante :

$$I(\mu) = \int_0^\infty S(\tau)e^{-(\tau/\mu)} (d\tau/\mu). \quad (2)$$

Dans ce cas, l’intensité émergente est simplement :

$$I(\mu) = a + b\mu, \quad (3)$$

c’est-à-dire, la fonction source à la profondeur optique $\tau = \mu$:

$$I(\mu) = S(\tau = \mu). \quad (4)$$

Ceci signifie aussi, en d’autres termes, que pour une ligne de visée de cosinus directeur μ , l’intensité spécifique est égale à la valeur de la fonction source à une profondeur optique égale à 1 *le long de cette même ligne de visée*.

On peut aussi établir une deuxième relation, pour le *flux émergent*, défini comme :

$$\mathcal{F} = 2\pi \int_0^1 I(\mu)\mu d\mu. \quad (5)$$

Cette quantité est, en effet, plus pertinente quand on s’intéresse à des objets spatialement *non–résolus* comme la plupart des étoiles hormis le soleil. Il est alors facile de montrer que le flux émergent est, pour sa part, caractérisé par la valeur de la fonction source à une profondeur optique $\tau = 2/3$.

Les ouvrages les plus usités depuis un demi-siècle, tels que ceux de Athay (1972), Mihalas (1970, 1978), le très

populaire e -cours de Rutten (2003), et même le très récent Hubeny & Mihalas (2014) omettent, cependant, de citer quelque publication originale établissant ces relations classiques.

III. L'ARGUMENT DE BARBIER

La méthodologie à l'origine de l'établissement de ces relations se trouve dans un article de l'astronome français, Daniel Barbier, publié en 1943. Par ailleurs, Barbier (1943) n'explicite pas ici de relation pour l'intensité spécifique, mais uniquement pour le flux émergent.

La méthode de Barbier se base donc sur un développement en série de Taylor de la fonction source, de la forme :

$$S(\tau) = S(\tau_*) + (\tau - \tau_*)S'(\tau_*) + \frac{1}{2}(\tau - \tau_*)^2 S''(\tau_*) \quad (6)$$

que nous tronquons ici, arbitrairement, au second ordre. Dans cette expression S' et S'' désignent, respectivement, les dérivées première et seconde par rapport à τ de la fonction source.

Cette série est alors introduite dans l'Eq. (2), et des intégrations relativement aisées conduisent à l'expression suivante pour l'intensité spécifique émergente :

$$I(\mu) = S(\tau_*) + (\mu - \tau_*)S'(\tau_*) + (\mu^2 - \mu\tau_* + \frac{1}{2}\tau_*^2)S''(\tau_*). \quad (7)$$

Dans l'article original de 1943, Barbier ne donne *pas* d'expression pour l'intensité spécifique émergente, mais il travaille directement sur le flux émergent, une quantité indépendante du cosinus directeur μ donc. Cependant, nous pouvons reproduire aisément le même argument que lui, c'est à dire : “*choisir τ_* de manière à annuler le second terme du développement (...) et on peut vérifier, en outre, que cette valeur de τ_* est celle qui rend minimum le coefficient de la dérivée seconde*”. Il est alors évident que :

$$\tau_* = \mu. \quad (8)$$

Et dans ce cas, l'intensité spécifique émergente sera :

$$I(\mu) = S(\tau = \mu) + \frac{1}{2}\mu^2 S''(\tau = \mu). \quad (9)$$

Cette expression sera alors bien identique à $S(\tau = \mu)$, mais *si* – et c'est ici une hypothèse supplémentaire – l'on admettait que la fonction source n'est qu'une fonction linéaire de l'épaisseur optique, et donc que $S'' \equiv 0$.

IV. DISCUSSION

Barbier (1943) cite Eddington très précisément, en mentionnant la *p. 330* de son célèbre ouvrage *The internal constitution of stars* (1926). Dans ce chapitre précis, *The Outside of a Star*, Eddington discute du fait que la *température effective* d'une étoile devrait aussi être celle d'une couche spécifique de son atmosphère, situé à une profondeur optique $\tau \approx \mu$. On peut alors envisager que c'est cette réflexion qui incite Barbier à mettre en œuvre une méthode basée sur un développement en série de Taylor centré sur une valeur τ_* à déterminer.

Quelques années après cette contribution de Barbier, Unsöld (1948 ; 1949, en anglais) explicite les *deux* relations désormais classiques, aussi bien pour l'intensité spécifique que pour le flux. Dans son célèbre ouvrage *Physik der Sternatmosphären* de 1955, il fait aussi état de la contribution de Barbier à cet exercice. Cependant, il ne cite pas ce dernier correctement, pointant vers un autre article de Barbier paru en 1944 ! Par contre, on peut lire ses propos au-sujet de : “*a method of approximation, proposed by A.S. Eddington and better argued by D. Barbier is still very useful and interesting*”. Unsöld la baptise aussi la “*x = cos ϑ -Methode*” de Eddington et Barbier, où x désigne la profondeur optique τ , et $\mu = \cos \vartheta$.

L'ouvrage de Kourganoff (1952) cite correctement Barbier (1943) tout en détaillant sa contribution dans son chapitre §18.2: “*After giving Barbier's demonstration, which is known as the τ_* -method*”, qui est cependant immédiatement assorti du commentaire : “*we shall explain why it seems to us to be unsatisfactory*”. Mais nous avons retenu dans nos divers cours “modernes” ce que Kourganoff exprime très justement comme : “*Now Barbier's demonstration (or a direct calculation) shows that all of the Eddington-Barbier relations are rigorously true if the source function is a linear function of τ* ”. Puis, dans la discussion critique qui suit dans son §18, Kourganoff conclut par : “*The Eddington-Barbier relations, apart from the applications which have already been made by Barbier himself and by Unsöld, are extremely useful when one wants to represent the connexion between the source function and certain observable quantities like $I(0, \mu)$ and $\mathcal{F}(0)$* ”.

Avec le temps, les citations à Barbier (1943) disparaissent, bien que l'on puisse encore en trouver trace dans des ouvrages relativement récents, mais peu visibles car très spécifiques, comme ceux de Zirin (§6.10., 1988) et de Castor (§5.7., 2004). Il est, par contre, très surprenant que le très exhaustif *Stellar Atmospheres* de Mihalas (1970, 1978) ne cite *pas* la contribution originale. Cependant, dans le §2-2 de la deuxième édition de 1978, un exercice (2-5), directement inspiré par la méthode de Barbier (1943) est proposé aux lecteurs. Il est aussi très dommage que le nouvel ouvrage de référence de Hubeny & Mihalas (2014) ne propage plus du tout l'établissement de ces résultats importants.

For completeness we will now obtain briefly the corresponding first approximations. In this case the temperature distribution is taken to be

$$B(\tau) = a + 2b\tau \quad . \quad . \quad . \quad (35)$$

and the corresponding escaping radiation is given by

$$I(\theta) = a + 2b \cos \theta \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

The corresponding flux at the boundary is

$$2\pi \int_0^{\frac{1}{2}\pi} I(\theta) \sin \theta \cos \theta d\theta = \pi(a + \frac{2}{3}b) \quad . \quad . \quad (37)$$

which should be equal to πF or $\frac{3}{8}\pi b$; and by the condition of radiative equilibrium at the boundary the expression

FIG. 1. Dans cet extrait de l'article de Milne (1921), $B(\tau)$ signifie la fonction source et les Eqs. (36) and (37) sont effectivement les relations de Eddington–Barbier, respectivement pour l'intensité spécifique et pour le flux, publiées ici plus de vingt ans avant Barbier (1943) et Unsöld (1948, 1949).

V. LA CONTRIBUTION DE MILNE

Au cours de notre travail sur ces archives, nous sommes aussi revenus sur un article de V.V. Ivanov (1991) paru dans les actes de la conférence de Trieste, *Stellar Atmospheres: beyond classical models*.

Dans sa section *History of ART*, où “ART” signifie *Analytical Radiative Transfer* bien entendu, Ivanov écrit le commentaire intrigant suivant : “*The standard Eddington approximate form of the temperature distribution in a grey atmosphere,*

$$T^4 = (3/4)T_{\text{eff}}^4(\tau + 2/3), \quad (10)$$

belongs not to Eddington, but to Milne. In 1917, he introduced the approximation known today as the Eddington approximation.”

Il semble, cependant, que Milne n'ait pas publié de résultats astrophysiques avant 1921, d'après Tayler (1996) notamment. Ceci nous a alors conduit à relire attentivement les premières contributions de Milne dans le domaine du transfert de rayonnement et la physique des atmosphères stellaires. C'est ainsi que dans son premier article de 1921, *Radiative equilibrium in the outer layers of a star: the Temperature Distribution and the Law of Darkening* l'on retrouve bien les deux relations dites de Eddington–Barbier dans ses Eqs. (36) and (37), comme l'atteste aussi la Fig. (1) qui reproduit le passage en question.

Dans cet article, la méthode employée est différente de celle de Barbier (1943). Milne est lui directement inspiré par la méthode déjà employée par les pionniers, Schwarzschild et Jeans. Il utilise donc leur méthode de simplification des conditions aux limites, considérant une illumination constante sur chaque face, indépendante de la direction d'arrivée. Il utilise alors une *forme intégrale*

de la “distribution de température” pour une atmosphère semi-infinie, non éclairée à sa surface. Il montre d'abord qu'une fonction linéaire est une solution possible aux grandes profondeurs optiques ; d'ailleurs, même à cet étape de son article la première partie de son Eq. (24) contient déjà la relation de Eddington–Barbier sur l'intensité spécifique, si on adopte (abusivement donc) que... $\tau = 0$. Milne va cependant au-delà de cette forme simple de la fonction source et met en œuvre une méthode itérative qui le conduit à une seconde approximation de la forme :

$$S(\tau) = a + 2b\tau + \frac{1}{2}e^{-\tau}(b - a - b\tau) + \frac{1}{2}(a\tau + b\tau^2) \int_{\tau}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy. \quad (11)$$

Cette expression tend encore vers une fonction linéaire en τ aux grandes profondeurs optiques, mais maintenant l'exponentielle intégrale $E_1(\tau)$ apparaît, conformément à ce qui reste pour nous sous l'appellation de “équation de Schwarzschild–Milne” (e.g., Hubeny & Mihalas 2014). Cette expression est aussi plus précise dans la mesure où elle comporte la *singularité* en $dS/d\tau$ à la surface $\tau = 0$, assez largement oubliée elle aussi (voir p. ex. Chevallier et al. 2003 et les références incluses).

Les deux relations dites de Eddington–Barbier apparaissent alors dans Milne (1921) quand, “*for completeness*”, ce dernier revient sur sa première approximation, linéaire. Mais à cette étape, Milne ne fait *aucun* commentaire sur ses Eqs. (36) et (37) comme si ces résultats n'étaient qu'anecdotiques relativement au reste de son étude. Ceci peut expliquer pourquoi ces résultats, intermédiaires pour Milne, n'ont, semble-t-il, pas été cités ultérieurement. Ils ont aussi été certainement éclipsés par d'autres aspects de l'importante contribution de Milne au début des années 1920.

Par exemple, et en écho à la remarque de Ivanov (1991), dans son premier article de 1921, Milne établit aussi la loi d'assombrissement centre–bord suivante :

$$\frac{I(0, \mu)}{I(0, 1)} = \frac{3}{5}(\mu + 2/3), \quad (12)$$

qui améliore, notamment, les résultats précédents de Schwarzschild et Jeans. Et cette dernière est aussi parfaitement compatible avec ce que l'on désigne comme “approximation d'Eddington”, qui mène aussi à la constante $2/3$ apparaissant dans l'Eq. (10).

VI. CONCLUSION

Il semble que ce soit Unsöld (1948 ; 1949, en anglais) qui, pour la première fois, explicite et commente comme il se doit *les deux* relations classiques dites de “Eddington–Barbier” sur l'intensité spécifique et sur le flux, tout en donnant un crédit mérité à Barbier (1943). Cependant

ces deux relations apparaissent déjà dans Milne (1921), bien qu’elles ne soient mentionnées ni par Barbier, ni par Unsöld (et ni par qui que ce soit d’autre, à notre connaissance) plus de vingt ans après.

Compte tenu de ces éléments historiques, nous nous permettons alors de suggérer qu’en lieu et place de l’appellation traditionnelle de “relations de Eddington–Barbier” il serait plus *juste* d’adopter l’appellation de “relations de Milne–Barbier–Unsöld” pour ces résultats importants encore largement enseignés.

Enfin, il est intéressant de constater, à l’ère de la toute puissante bibliométrie, que malgré l’importance de sa contribution Barbier (1943) n’a été cité que quatre fois, selon l’*Astrophysics Data System* (adsabs.harvard.edu). C’est aussi le cas pour les articles de Unsöld (1948, et pire encore pour son article de 1949, pourtant écrit en anglais).

REMERCIEMENTS

Cette étude a été initiée suite à la question pertinente d’une étudiante du master d’astrophysique de l’Université Paul Sabatier de Toulouse, Alexandra Le Reste, durant un cours de septembre 2017. Nous remercions aussi le Prof. R. J. “Rob” Rutten (Utrecht, Pays-Bas) pour des échanges intéressants sur “la petite histoire du transfert de rayonnement”, ainsi que nos collègues Céline Reylé (Observatoire de Besançon, France) et Torsten Böhm (Cnrs-Cnes, IRAP, Toulouse, France) pour leur aide ponctuelle. *This research has made use of NASA’s Astrophysics Data System*, un formidable outil pour accéder facilement et (re-)étudier les contributions historiques de notre discipline.

-
- * frederic.paletou@univ-tlse3.fr
- ¹ Athay, R.G. 1972, *Radiation Transport in Spectral Lines*, D. Reidel, Dordrecht
 - ² Barbier, D. 1943, *Annales d’Astrophysique*, 6, 113
 - ³ Barbier, D. 1944, *Annales d’Astrophysique*, 7, 115
 - ⁴ Castor, J.I. 2004, *Radiation Hydrodynamics*, Cambridge University Press
 - ⁵ Chevallier, L., Paletou, F., Rutily, B. 2003, *A&A*, 411, 221
 - ⁶ Eddington, A.S. 1926, *The Internal Constitution of Stars*, Cambridge University Press
 - ⁷ Hubeny, I & Mihalas, D. 2014, *Theory of Stellar Atmospheres*, Princeton University Press
 - ⁸ Ivanov, V.V. 1991, In: *Stellar Atmosphere: Beyond Classical Models*, Dordrecht, D. Reidel Publishing Co.
 - ⁹ Kourganoff, V. 1952, *Basic Methods in Transfer Problems*, Clarendon Press, Oxford
 - ¹⁰ Lambert, J., Paletou, F., Josselin, E., Glorian, J.-M., 2016, *Eur. J. Phys*, 37, 015603
 - ¹¹ Mihalas, D. 1970, *Stellar Atmospheres*, San Francisco, Freeman
 - ¹² Mihalas, D. 1978, *Stellar Atmospheres* (2nd edition), San Francisco, Freeman
 - ¹³ Milne, E.A. 1921, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 81, 361
 - ¹⁴ Rutten, R.J. 2003, *Radiative Transfer in Stellar Atmospheres*, Lecture Notes, Utrecht University (see also: http://www.staff.science.uu.nl/~rutte101/Radiative_Transfer.html)
 - ¹⁵ Schuster, A. 1905, *Astrophys. J.*, 21, 1
 - ¹⁶ Schwarzschild, K. 1906, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse*, 41 (voir aussi : Menzel D.H., Milne E.A. 1966, *Selected papers on the transfer of radiation*, New-York, Dover)
 - ¹⁷ Tayler, R.J. 1996, *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society*, 37, 355
 - ¹⁸ Unsöld, A. 1948, *Annalen der Physik*, 438, 124
 - ¹⁹ Unsöld, A. 1949, *Memorie della Società Astronomica Italiana*, 20, 49 (en anglais)
 - ²⁰ Unsöld, A. 1955, *Physik der Sternatmosphären*, Springer
 - ²¹ Zirin, H. 1988, *Astrophysics of the Sun*, Cambridge University Press