



**HAL**  
open science

## Modèles théoriques et numériques pour la modélisation avancée de plaques composites

Thi Huyen Cham Le, Michele d'Ottavio, Philippe Vidal, Olivier Polit

► **To cite this version:**

Thi Huyen Cham Le, Michele d'Ottavio, Philippe Vidal, Olivier Polit. Modèles théoriques et numériques pour la modélisation avancée de plaques composites. Journées Nationales sur les Composites 2017, École des Ponts ParisTech (ENPC), Jun 2017, 77455 Champs-sur-Marne, France. hal-01623689

**HAL Id: hal-01623689**

**<https://hal.science/hal-01623689>**

Submitted on 25 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèles théoriques et numériques pour la modélisation avancée de plaques composites

## *Theoretical and numerical models for the advanced modeling of composite plates*

T.H.C. Le, M. D’Ottavio, P. Vidal, O. Polit

UPL, LEME, Univ Paris Nanterre  
50 rue de Sèvres, 92410 Ville d’Avray  
e-mail : { thihuyencham.le, michele.d\_ottavio, philippe.vidal, olivier.polit }@u-paris10.fr

### Résumé

Cet article présente deux nouveaux éléments finis quadrilatéraux à quatre et huit nœuds pour plaques composites à cinématique variable. Les modèles sont formulés dans le cadre de Formulation Unifiée de Carrera et comprennent des modèles formulés par l’approche en déplacements ou l’approche mixte partielle de Reissner. La principale nouveauté consiste en l’extension aux modèles à cinématique variable d’une approximation compatible pour le champ de déformation de cisaillement transverse, dénommée interpolation QC4 et CL8, pour éliminer la pathologie de verrouillage en cisaillement transverse : il est suffisant de modifier seulement les déformations de cisaillement transverse indépendantes de  $z$ . De nombreuses études numériques sont proposées qui démontrent les avantages par rapport aux approches isoparamétriques classiques : correction du verrouillage, absence de modes parasites et une majeure robustesse de l’EF distordu. Les nouveaux EF QC4 et CL8 présentent ainsi une excellente vitesse de convergence et donnent des valeurs précises de déplacements et contraintes pour toutes les plaques composites épaisses et minces.

### Abstract

This paper presents two new four- and eight-node quadrilateral finite element for composite plates with variable kinematics. Carrera Unified Formulation is used to express a large number of classical displacement-based models as well as partially mixed models based on Reissner’s Mixed Variational Theorem. The main novelty consists in the extension to variable kinematics plate elements of a field compatible approximation for the transverse shear strain field, referred to as QC4 and CL8 interpolation, which eliminates the shear locking pathology by constraining only the  $z$ -constant transverse shear strain terms. Extensive numerical studies are proposed that demonstrate the enhancements over classical isoparametric approaches : absence of spurious modes and of transverse shear locking and an enhanced robustness with respect to distorted element shapes. The new QC4 and CL8 variable kinematics plate elements display excellent convergence rates and yield accurate displacement and stresses for both, thick and thin composite plates.

**Mots Clés :** Élément fini plaque, Cinématique variable, Verrouillage en cisaillement transverse, Maillage distordu, Structure composite

**Keywords :** Plate finite element, Variable kinematics model, Shear locking, Mesh distortion, Composite structure

## 1. Introduction

De nombreuses structures composites peuvent être modélisées par des approches plaque ou coque compte tenu de leur épaisseur très inférieure aux dimensions de leur surface de référence. Les modèles classiques de plaque, tels que la CLT et FSDT, ne prennent pas en compte ou seulement partiellement les contraintes transverses, qui jouent pourtant un rôle considérable dans la réponse globale et locale des structures composites. Une très grande variété de modèles raffinés a donc été proposée afin de tenir compte des hétérogénéités au sein de l’empilement et de la déformabilité transverse de ces structures. La formulation unifiée de Carrera (CUF) permet d’implémenter dans un seul code de calcul une série de modèles de différentes richesses et précisions, qui sont choisis par l’utilisateur lors du lancement du calcul [1]. La CUF comprend notamment des modèles formulés en déplacements ainsi que des modèles mixtes comportant une approximation indépendante pour les déplacements et les contraintes transverses [2]. Ceci permet ainsi d’adapter le coût de calcul en fonction du type et précision de la réponse souhaitée. L’objectif de ce travail est d’implanter dans le code commercial ABAQUS des

éléments finis (EF) plaque robustes et sans pathologies numériques susceptibles d'en dégrader la précision, tout en gardant la flexibilité de modélisation offerte par la CUF.

Il est bien connu que les EF plaque isoparamétriques classiques incluant la déformation de cisaillement transverse souffrent du verrouillage et peuvent afficher une convergence plus lente en présence de maillages distordus. Le verrouillage en cisaillement transverse comporte une augmentation excessive de la rigidité de la plaque lorsque l'épaisseur diminue, de telle sorte que les résultats deviennent inutilisables. Différentes stratégies ont été ainsi développées afin de pallier à cet effet : l'utilisation d'un schéma d'intégration réduite, la construction d'une interpolation spécifique pour les déformations de cisaillement transverse (ANS) [3, 4], ou l'application d'une formulation mixte (EAS) [5]. Ces techniques ont été utilisées pour des modèles plaques/coques basés sur FSDT. Dans la littérature dédiée à la CUF, on trouve que la correction du verrouillage est introduite soit par intégration réduite [2, 6], soit par une approche MITC [7]. Pour les EF en déplacements, l'interpolation MITC est appliquée à tous les termes de cisaillement transverse, y compris ceux d'ordre supérieur. Elle est également adoptée pour les contraintes de cisaillement transverse dans les EF mixtes à 9 nœuds basés sur une cinématique FSDT [8].

Ce travail étend aux EF plaque d'ordre supérieur issus de la CUF une approche de type ANS basée sur le paradigme de la compatibilité des champs proposée dans [9]. L'extension est possible une fois que l'on a reconnu qu'il n'est nécessaire de corriger seulement la contribution à la déformation de cisaillement transverse qui est indépendante de l'épaisseur [10]. Deux nouveaux EF à 4 et à 8 nœuds sont ainsi formulés, implantés dans ABAQUS et évalués sur une série de tests numériques préconisée dans la littérature [11].

## 2. Modèles de plaque basés sur la Formulation Unifiée de Carrera (CUF)

On considère une plaque composite à  $N_L$  couches, définie dans un repère Cartésien  $(x_1, x_2, x_3 \equiv z)$  sur le volume  $V = \Omega \times \{-\frac{c}{2} \leq z \leq \frac{c}{2}\}$ , où  $\Omega$  est la surface de référence dans le plan  $(x_1, x_2)$ . La notation unifiée proposée par Carrera permet de formuler dans un seul code de calcul une série de modèles de plaque à cinématique variable en introduisant différentes hypothèses sur le comportement dans l'épaisseur de la structure [2]. Ces modèles raffinés de plaque sont définis par l'utilisateur en renseignant trois paramètres qui correspondent aux choix suivantes :

1. Approche en déplacements ou mixte : Les approximations sont introduites dans des formes variationnelles : le Principe des Déplacements Virtuels (PVD) est utilisé pour introduire les approximations pour les déplacement  $u_i$  ; le Théorème Variationnel Mixte de Reissner (RMVT) est utilisé pour introduire des approximations indépendantes pour les déplacements et les contraintes transverses. Ces dernières peuvent ainsi respecter exactement la continuité aux interfaces entre couches de matériaux différents.
2. Description couche équivalente ou couches discrètes : Les approximations pour les déplacements peuvent être introduites par l'approche couche équivalente (ESL) et l'approche couches discrètes (LW). Dans le premier cas, les variables sont définies pour l'ensemble de la plaque et leur nombre est donc indépendant du nombre de couches. Dans le deuxième cas, différentes variables sont introduites dans chaque couche et le nombre d'inconnues du modèle dépend du nombre de couches.
3. Ordre d'expansion des inconnues dans l'épaisseur : Toutes les variables sont développées suivant l'épaisseur par un polynôme dont l'ordre  $N$  est variable entre 1 et 4. Dans le cadre d'un modèle ESL, la discontinuité des déformations transverses aux interfaces bi-matériaux peut être introduite par la Fonction Zig-Zag de Murakami (MZZF) [12].

Fig. 1 illustre la nomenclature utilisée pour identifier les modèles issus de la CUF.

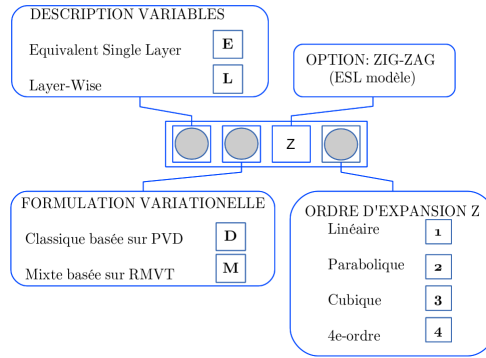


Fig. 1. Nomenclature des modèles CUF

## 2.1. Approximations dans l'épaisseur

Une fonction générique  $g(x_\alpha, z)$  (avec  $\alpha = 1, 2$ ) est utilisée pour désigner les déplacements  $u_i(x_\alpha, z)$  et les contraintes transverses  $\sigma_{i3} = \sigma_n(x_\alpha, z)$  (avec  $i = 1, 2, 3$ ). Le modèle plaque est construit en séparant le comportement dans le plan  $x_\alpha$  de celui dans l'épaisseur  $z$ . La CUF utilise la notation compacte suivante pour définir le comportement suivant l'épaisseur  $z$  :

$$g(x_\alpha, z) = F_\tau(z) \hat{g}_\tau(x_\alpha) \quad \text{avec } \tau = 0, 1, \dots, N \quad (\text{Eq. 1})$$

Différentes fonctions  $F_\tau(z)$  sont utilisées pour les modèles à couche équivalente et à couches discrètes. Pour un modèle ESL on utilise les polynômes de Taylor

$$F_\tau(z) = z^\tau \quad (\text{Eq. 2})$$

Afin d'assurer la discontinuité de la pente au niveau des interfaces, le terme d'ordre le plus élevé de l'expansion polynômiale,  $F_N(z)$ , peut être remplacé par la MZZF :

$$F_{ZZ}(z) = (-1)^k \zeta_k \quad \text{avec } \zeta_k = \frac{2}{z_t^{(k)} - z_b^{(k)}} \left( z - \frac{z_t^{(k)} + z_b^{(k)}}{2} \right) \quad (\text{Eq. 3})$$

où  $z_t^{(k)}$  et  $z_b^{(k)}$  sont respectivement les coordonnées de la face supérieure et inférieure de la couche  $k$ , et  $\zeta_k$  est la coordonnée locale adimensionnée définie entre  $-1$  (face inférieure) et  $1$  (face supérieure). Dans la description LW, on utilise une approximation par couche  $k$  avec l'expression suivante :

$$g^k(x_\alpha, z_k) = \frac{P_0(\zeta_k) + P_1(\zeta_k)}{2} \hat{g}_t^k(x_\alpha) + \frac{P_0(\zeta_k) - P_1(\zeta_k)}{2} \hat{g}_b^k(x_\alpha) + F_r(\zeta_k) \hat{g}_r^k(x_\alpha) \quad (\text{Eq. 4})$$

avec  $F_r(\zeta_k) = P_r(\zeta_k) - P_{r-2}(\zeta_k)$  et  $r = 2, 3, \dots, N$

où les  $F_\tau(z)$  sont définies à partir des polynômes de Legendre :

$$P_0(\zeta_k) = 1, \quad P_1(\zeta_k) = \zeta_k, \quad (\text{Eq. 5})$$

$$P_{n+1}(\zeta_k) = \frac{(2n+1)\zeta_k P_n(\zeta_k) - n P_{n-1}(\zeta_k)}{n+1} \quad \text{pour } n = 1, 2, \dots, N-1$$

## 2.2. Formes variationnelles

Les modèles en déplacements sont formulés à partir du Principe des Déplacements Virtuels (PVD) :

$$\int_{\Omega} \int_e (\delta \epsilon_{pG}^T \sigma_{pC} + \epsilon_{nG}^T \sigma_{nC}) dz d\Omega = \delta L_e \quad (\text{Eq. 6})$$

$L_e$  indique le travail des forces extérieures et le symbole  $\delta$  représente l'opérateur de variation virtuelle. Les champs de contraintes et de déformations sont décomposés selon les contributions dans le plan (indice  $p$ ) et transverses (indice  $n$ ) :

$$\begin{aligned} \epsilon_p &= \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{22} & \gamma_{12} \end{bmatrix}^T; \epsilon_n = \begin{bmatrix} \gamma_{13} & \gamma_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}^T; \\ \sigma_p &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T; \sigma_n = \begin{bmatrix} \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T \end{aligned} \quad (\text{Eq. 7})$$

Dans l'(Eq. 6), l'indice  $G$  indique que les déformations sont définies par les relations géométriques en fonction des déplacements et l'indice  $C$  signifie que les contraintes sont calculées par la loi de comportement :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{pC} \\ \sigma_{nC} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \tilde{C}_{pp} & \tilde{C}_{pn} \\ \tilde{C}_{pn}^T & \tilde{C}_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{pG} \\ \epsilon_{nG} \end{bmatrix}^k \quad (\text{Eq. 8})$$

Les coefficients  $\tilde{C}^k$  définissent la loi de Hooke généralisée pour un matériau anisotrope et prennent en compte l'orientation des axes principaux par rapport au repère de la structure.

Les modèles mixtes sont obtenus en introduisant des approximations indépendantes pour les champs de déplacements et de contraintes transverses à travers le RMVT [13] :

$$\int_{\Omega} \int_e \left( \delta \epsilon_{pG}^T \sigma_{pC} + \epsilon_{nG}^T \sigma_{nM} + \delta \sigma_{nM}^T (\epsilon_{nG} - \epsilon_{nC}) \right) dz d\Omega = \delta L_e \quad (\text{Eq. 9})$$

où l'indice  $M$  indique que les contraintes transverses sont approchées de manière indépendante. Une forme mixte de la loi de comportement doit ainsi être employée :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{pC} \\ \epsilon_{nC} \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} C_{pp} & C_{pn} \\ -C_{pn}^T & C_{nn} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \epsilon_{pG} \\ \sigma_{nM} \end{bmatrix}^k \quad (\text{Eq. 10})$$

### 3. Approximation éléments finis

La solution dans le plan  $\Omega$  de la plaque est approchée par la Méthode des Eléments Finis (MEF) en utilisant des éléments à quatre et à huit nœuds. Afin d'éviter le verrouillage en cisaillement transverse présent dans une approche isoparamétrique, nous proposons ici l'extension aux modèles à cinématique variable d'un schéma d'interpolation spécifique pour  $\gamma_{\alpha 3}(x_\alpha)$  proposé précédemment pour des modèles FSDT [9, 10]. Une interpolation isoparamétrique est utilisée pour les contraintes transverses dans les EF basés sur RMVT.

Dans tout modèle d'ordre supérieur, on peut exprimer la déformation de cisaillement transverse en une contribution indépendante de l'épaisseur (superscript  $0$ ) et une contribution qui varie le long de l'épaisseur (superscript  $h$ ) :

$$\gamma_{\alpha 3}(x_\alpha, z) = \gamma_{\alpha 3}^0(x_\alpha) + \gamma_{\alpha 3}^h(x_\alpha, z) \quad (\text{Eq. 11})$$

Pour les EF à quatre et à huit nœuds nous utilisons une approximation spécifique, notée respectivement QC4 et CL8, pour la partie constante  $\gamma_{\alpha 3}^0$  uniquement. La construction de ces nouvelles fonctions d'interpolation suit les étapes suivantes :

1. On exprime les déformations de cisaillement transverse dans le repère réduit  $(\xi, \eta)$  :

$$\begin{bmatrix} \gamma_{\xi}^0(\xi, \eta) \\ \gamma_{\eta}^0(\xi, \eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{(1)\xi} + w_{0,\xi} \\ v_{(1)\eta} + w_{0,\eta} \end{bmatrix} \quad (\text{Eq. 12})$$

où l'indice  $(1)$  identifie les termes linéaires des expansions données par (Eq. 2) (modèle ESL) ou (Eq. 4) (modèle LW).

2. Sur la base du paradigme de la compatibilité des champs, une interpolation quadratique (resp. cubique) du déplacement transverse est utilisée pour les EF à 4 (resp. 8) nœuds. Les degrés de liberté supplémentaires ainsi introduits sont ensuite éliminés en appliquant l'hypothèse de variation constante (resp. linéaire) sur le bords de l'EF.

3. Les déformations dans le repère réduit sont finalement exprimées par l'interpolation suivante :

$$\gamma_{\xi}^0(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{I_L} C_{\xi I}(\xi, \eta) \gamma_{\xi}^0(\xi_I, \eta_I)$$

$$\gamma_{\eta}^0(\xi, \eta) = \sum_{J=1}^{J_L} C_{\eta J}(\xi, \eta) \gamma_{\eta}^0(\xi_J, \eta_J)$$
(Eq. 13)

où les points  $I = 1, \dots, I_L$ ,  $J = 1, \dots, J_L$  sont les points spécifiques où les nouvelles fonctions d'interpolation  $C(\xi, \eta)$  sont évaluées.

4. Les déformations de cisaillement transverse sont finalement exprimées dans le repère physique ( $x_{\alpha}$ ) par la transformation tensorielle

$$\begin{bmatrix} \gamma_{13}^0 \\ \gamma_{23}^0 \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_{\xi}^0(\xi, \eta) \\ \gamma_{\eta}^0(\xi, \eta) \end{bmatrix}$$
(Eq. 14)

où  $\mathbf{J}^{-1}$  est l'inverse de la matrice jacobienne.

Tous les modèles plaque issus de la CUF et présentés ci-dessus ont été implémentés dans le code commercial ABAQUS sous la forme d'un User Element.

#### 4. Résultats numériques et discussions

La performance de ces EFs est démontrée à travers de tests standard préconisés dans la littérature [11]. Les calculs ont été effectués pour des plaques homogènes et stratifiés épaisses et minces. Les résultats numériques sont comparés avec la solution exacte 3D de Pagano et avec les EF isoparamétriques suivants :

- **ISO4** : EF isoparamétrique à 4 nœuds, intégration exacte  $2 \times 2$  points de Gauss (GP)
- **ISO8** : EF isoparamétrique à 8 nœuds, intégration exacte  $3 \times 3$  points de Gauss (GP)
- **ISO4-SI** : EF isoparamétrique à 4 nœuds, intégration réduite (1 GP pour la rigidité de cisaillement transverse)
- **ISO8-SI** : EF isoparamétrique à 8 nœuds, intégration réduite ( $2 \times 2$  GP pour la rigidité de cisaillement transverse)

##### 4.1. Valeurs propres de la matrice de rigidité

Les valeurs propres pour le modèle ED2 d'un EF épais ( $S = a/e = 10$ ) et mince ( $S = a/e = 10^3$ ) sont présentées dans Fig. 2 et Fig. 3. Les matrices de rigidité des EF QC4 et ISO4 affichent un rang correct avec 6 valeurs propres nulles correspondant aux 6 mouvements de corps rigide (3 translations et 3 rotations). En revanche, l'utilisation de l'intégration réduite conduit à l'apparition de 3 modes parasites qui peuvent rendre instable l'EF.

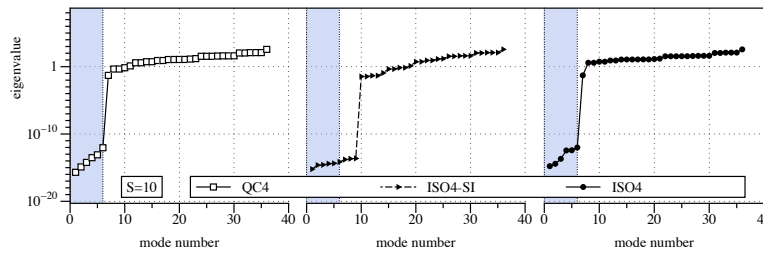


Fig. 2. Valeurs propres de la matrice de rigidité pour EF épais ( $S = a/e = 10$ ) - modèle ED2

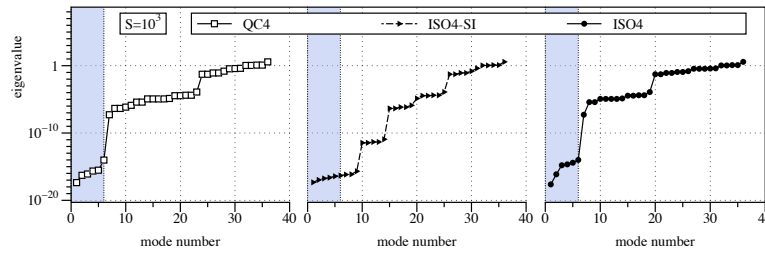


Fig. 3. Valeurs propres de la matrice de rigidité pour EF mince ( $S = a/e = 10$ ) - modèle ED2

Pour un EF QC4 avec un modèle EM2, on a 72 valeurs propres, dont 36 négatives correspondant aux degrés de liberté de contraintes transverses, 30 valeurs propres positives correspondant aux degrés de liberté de déplacements et 6 valeurs propres nulles correspondant aux 6 modes de corps rigide. Des résultats analogues sont obtenus pour l’EF à 8 nœuds.

#### 4.2. Test de verrouillage en cisaillement transverse

On considère une plaque isotrope carrée de côté  $a$  en appui simple et soumise à une pression uniforme  $q_0$  sur la surface supérieure. L’épaisseur de la plaque est définie par  $e = 10^{-n}$  avec  $n \in \{0, 4\}$ . Le matériau utilisé est caractérisé par  $E = 10.92$  et  $\nu = 0.3$ . On discrétise un quart de la plaque avec un maillage régulier  $N = 2, 4, 8, 16, 32$  comme illustré Fig. 4. Les modèles ED2 et EM2 sont utilisés pour cette analyse.

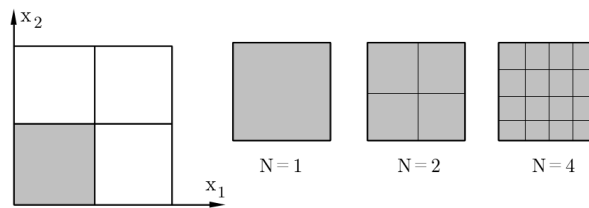


Fig. 4. Maillage régulier pour un quart de la plaque

La présence du verrouillage en cisaillement transverse peut être analysée selon deux manières différentes :

— Maillage fixé, élancement  $S = a/e$  variable :

Fig. 5 et Fig. 7 présentent l’erreur sur la flèche au centre de la plaque par rapport à la solution analytique de Kirchhoff (plaque mince). Fig. 5 montre que l’EF en déplacement ISO4 verrouille très fortement car l’erreur ne diminue pas lorsque l’élancement augmente. En revanche, les EF en déplacement QC4 et ISO4-SI ne présentent pas de verrouillage en cisaillement transverse. Fig. 7 ne montre aucun signe de verrouillage pour le modèle EM2.

— Test de convergence :

L’évolution de l’erreur relative sur la flèche par rapport à la solution de référence de Kirchhoff est représentée Fig. 6 et Fig. 8 en fonction de la densité du maillage pour différents élancements ( $S = 10, 10^2, 10^4$ ). On constate une convergence uniforme des EF QC4 et ISO4-SI. Le verrouillage de l’EF en déplacement ISO4 se manifeste en Fig. 6 par une dégradation de la vitesse de convergence pour un élancement croissant. La formulation mixte n’est pas affectée par ce phénomène.

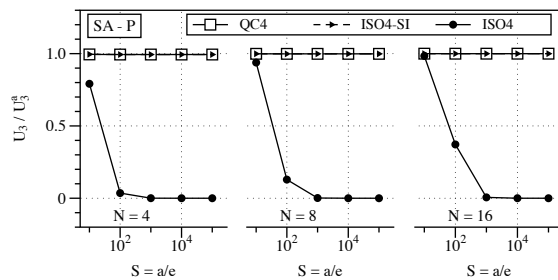


Fig. 5. Erreur sur la flèche par rapport à l'élancement - modèle ED2

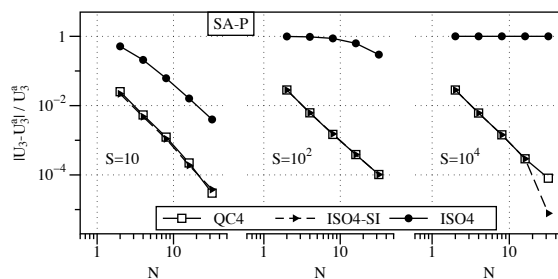


Fig. 6. Convergence de la flèche avec différents élancements - modèle ED2

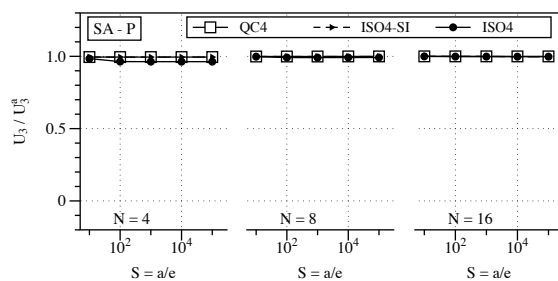


Fig. 7. Erreur sur la flèche par rapport à l'élancement - modèle EM2

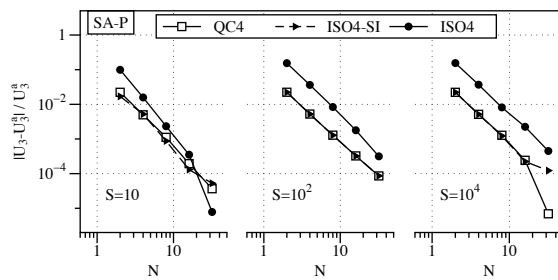


Fig. 8. Convergence de la flèche avec différents élancements - modèle EM2



### 4.3. Test de plaque circulaire

Afin d'évaluer la sensibilité des EF à la distorsion du maillage, on considère une plaque isotrope circulaire de rayon  $R = 5$  et d'épaisseur  $e = 0.1$ . La plaque est encadrée sur son pourtour et soumise à une pression uniforme. Le matériau est caractérisé par  $E = 1.7472 \cdot 10^7$  et  $\nu = 0.3$ . Pour des raisons de symétries, seulement un quart de la plaque est considéré et des maillages définis par  $N = 3, 12, 28, 60$  éléments sont utilisés, cf. Fig. 9. La solution de référence pour la flèche au centre de la plaque en  $z = 0$  est celle obtenue par la théorie de Kirchhoff.

L'erreur par rapport à la solution de référence est reportée Fig. 10 pour les EF QC4 et CL8 et un modèle ED2. On remarque le comportement très différent entre les EF linéaires (4 nœuds) et quadratiques (8 nœuds), dû à la différente capacité de représenter les bords courbes de la plaque. Le QC4 conduit à une erreur inférieure à 3% pour  $N \geq 30$ , tandis que l'ISO4-SI présente une erreur de 10%; l'ISO4 présente des erreurs inacceptables qui dépassent 90% pour tous les maillages. En revanche, tous les EF à 8 nœuds montrent une convergence uniforme vers la solution de référence; l'approximation CL8 affiche la plus grande vitesse de convergence et présente une erreur inférieure à 3% déjà avec le maillage  $N = 3$ .

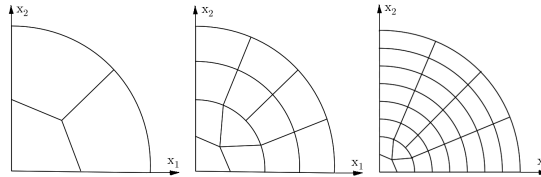


Fig. 9. Plaque circulaire et maillages

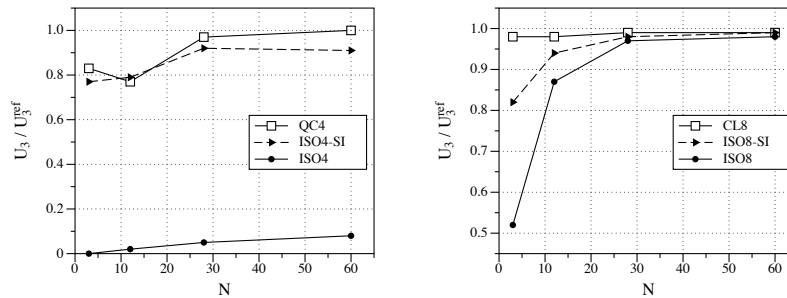


Fig. 10. Plaque circulaire : Convergence de la flèche pour les EF à 4 et 8 nœuds

### 4.4. Stratifié carré soumis à une pression bi-sinusoidale

On considère une plaque composite carrée de côté  $a$ , en appui simple sur son pourtour; différents élancements  $S = a/e = 4, 10, 100$  sont considérés. La plaque est soumise à une pression sur la surface supérieure, définie par

$$q_3(x_1, x_2, e/2) = q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \quad (\text{Eq. 15})$$

Le stratifié est composé de 3 couches ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) de même épaisseur  $e^{(k)} = e/3$ . Le matériau orthotrope est défini par :

$$E_T = 1, E_L = 25E_T, \nu_{LT} = \nu_{TT} = 0.25, G_{LT} = 0.5E_T, G_{TT} = 0.2E_T \quad (\text{Eq. 16})$$

Tab. 1 donne des valeurs de la réponse locale en termes de déplacements et contraintes pour une plaque semi-épaisse ( $S = 10$ ), obtenue avec un maillage  $N = 8$  avec les nouveaux EF QC4 et CL8 et différents

modèles. La comparaison avec la solution 3D de Pagano montre bien la hiérarchie des modèles CUF. Les résultats en déplacements et contraintes fournis par LD4 sont les plus précis. L'efficacité de la fonction Zig-Zag est aussi appréciée. Fig. 11 présente les distributions dans l'épaisseur du déplacement transverse ainsi que celles des contraintes de cisaillement transverse et normale transverse, obtenues avec le modèle ED4 et la solution exacte 3D.

| S  | Modèle      | $\bar{U}_1(-\frac{e}{2})$ | $\bar{U}_2(-\frac{e}{2})$ | $\bar{U}_3(0)$ | $\bar{\sigma}_{11}(\frac{e}{2})$ | $\bar{\sigma}_{22}(-\frac{e}{6})$ | $\bar{\sigma}_{12}(-\frac{e}{2})$ | $\bar{\sigma}_{13}(0)$ | $\bar{\sigma}_{23}(0)$ |
|----|-------------|---------------------------|---------------------------|----------------|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------|------------------------|
| 10 | <b>Ref.</b> | <b>0.0074</b>             | <b>0.0111</b>             | <b>0.7530</b>  | <b>0.5906</b>                    | <b>0.2882</b>                     | <b>0.0290</b>                     | <b>0.3573</b>          | <b>0.1228</b>          |
|    | ED2-QC4     | 0.0065                    | 0.0092                    | 0.6287         | 0.5135                           | 0.2427                            | 0.0244                            | 0.1370                 | 0.0749                 |
|    | ED2-CL8     | 0.0065                    | 0.0092                    | 0.6294         | 0.5187                           | 0.2446                            | 0.0246                            | 0.1378                 | 0.0753                 |
|    | EM4-QC4     | 0.0073                    | 0.0106                    | 0.7188         | 0.5803                           | 0.2731                            | 0.0280                            | 0.2837                 | 0.0992                 |
|    | EDZ4-QC4    | 0.0074                    | 0.0111                    | 0.7515         | 0.5870                           | 0.2861                            | 0.0288                            | 0.3598                 | 0.1025                 |
|    | EDZ4-CL8    | 0.0074                    | 0.0110                    | 0.7512         | 0.5918                           | 0.2882                            | 0.0290                            | 0.3626                 | 0.1034                 |
|    | LD2-QC4     | 0.0074                    | 0.0111                    | 0.7517         | 0.5865                           | 0.2865                            | 0.0288                            | 0.3543                 | 0.0978                 |
|    | LD2-CL8     | 0.0074                    | 0.0111                    | 0.7521         | 0.5922                           | 0.2888                            | 0.0290                            | 0.3566                 | 0.0980                 |
|    | LD4-QC4     | 0.0074                    | 0.0111                    | 0.7526         | 0.5872                           | 0.2870                            | 0.0288                            | 0.3560                 | 0.1226                 |
|    | LD4-CL8     | 0.0074                    | 0.0111                    | 0.7530         | 0.5927                           | 0.2892                            | 0.0291                            | 0.3574                 | 0.1222                 |

Tab. 1. Résultats non-dimensionnels pour un stratifié carré ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) en appui simple sous l'action d'une pression bi-sinusoidale ( $S = 10$ )

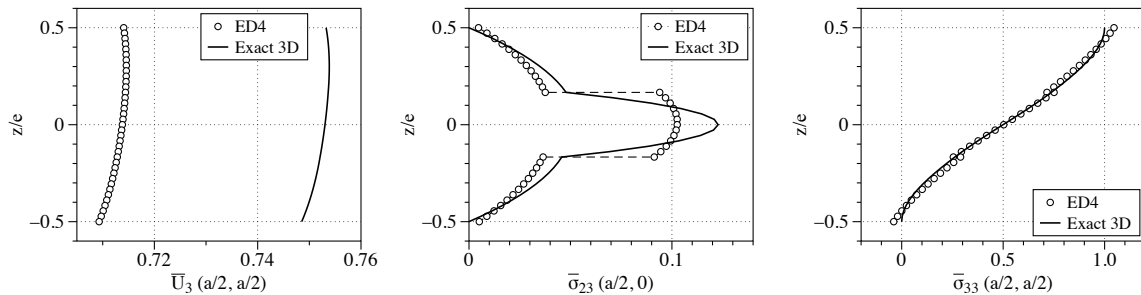


Fig. 11. Distribution de  $u_3$  (gauche),  $\sigma_{23}$  (centre),  $\sigma_{33}$  (droite) pour un stratifié carré ( $0^\circ/90^\circ/0^\circ$ ) en appui simple sous l'action d'une pression bi-sinusoidale ( $S = 10$ )

## 5. Conclusion

Deux nouveaux EF QC4 et CL8 basés sur les modèles à cinématique variable de plaque ont été présentés et évalués sur des tests numériques standards. Ces EF sont capables d'éliminer les pathologies numériques telles que le verrouillage en cisaillement transverse ainsi que les modes parasites. Les résultats obtenus montrent une bonne convergence même pour des maillages distordus. Les modèles plaque à cinématique variable formulés dans le cadre de la CUF offrent une certaine flexibilité dans le choix du coût du calcul par rapport à la précision désirée. Une analyse plus approfondie sur les propriétés des EF mixtes basés sur RMVT est en cours.

## Références

- [1] E. Carrera, M. Cinefra, M. Petrolo, E. Zappino, Finite Element Analysis of Structures through Unified Formulation, John Wiley & Sons, Ltd, ISBN 9781119941217, 2014.
- [2] E. Carrera, L. Demasi « Classical and advanced multilayered plate elements based upon PVD and RMVT. Part 1 : Derivation of finite element matrices. Part 2 : Numerical implementations », *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 55, pp. 191–231,253–291, 2002.

- [3] K. C. Park, E. Pramono, G. M. Stanley, H. A. Cabiness « The ANS shell elements : earlier developments and recent improvements », in : A. K. Noor, T. Belytschko, J. C. Simo (Eds.), *Analytical and Computational Models of Shells*, vol. 3 of *CED*, ASME, , pp. 217–239, 1989.
- [4] K. J. Bathe, E. N. Dvorkin « A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation », *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 21, pp. 367–383, 1985.
- [5] J. C. Simo, M. S. Rifai « A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes », *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 29, pp. 1595–1638, 1990.
- [6] M. D’Ottavio, D. Ballhause, T. Wallmersperger, B. Kröplin « Considerations on higher-order finite elements for multilayered plates based on a unified formulation », *Comput. Struct.* Vol. 84, pp. 1222–1235, 2006.
- [7] E. Carrera, M. Cinefra, P. Nali « MITC technique extended to variable kinematic multilayered plate elements », *Compos. Struct.* Vol. 92, pp. 1888–1895, 2010.
- [8] C. Chinosi, M. Cinefra, L. Della Croce, E. Carrera « Reissner’s mixed variational theorem toward MITC finite elements for multilayered plates », *Compos. Struct.* Vol. 99, pp. 443–452, 2013.
- [9] O. Polit, M. Touratier, P. Lory « A new eight-node quadrilateral shear-bending plate finite element », *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 37, pp. 387–411, 1994.
- [10] O. Polit, P. Vidal, M. D’Ottavio « Robust  $C^0$  high-order plate finite element for thin to very thick structures : mechanical and thermo-mechanical analysis », *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 90, pp. 429–451, 2012.
- [11] R. H. MacNeal, R. Harder « A proposed standard set of problems to test finite element accuracy », *Finite Elem. Anal. Des.* Vol. 1, pp. 3–20, 1985.
- [12] H. Murakami « Laminated composite plate theory with improved in-plane response », *J. Appl. Mech.* Vol. 53, pp. 661–666, 1986.
- [13] E. Reissner « On a Certain Mixed Variational Theorem and a Proposed Application », *Int. J. Numer. Meth. Eng.* Vol. 20, pp. 1366–1368, 1984.