



HAL
open science

Modélisation de la sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux composites à l'aide d'une approche aux dérivées fractionnaires

Alina Krasnobrizha, Patrick Rozycki, Pascal Cosson, Laurent Gornet

► To cite this version:

Alina Krasnobrizha, Patrick Rozycki, Pascal Cosson, Laurent Gornet. Modélisation de la sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux composites à l'aide d'une approche aux dérivées fractionnaires. Journées Nationales sur les Composites 2017, École des Ponts ParisTech (ENPC), Jun 2017, 77455 Champs-sur-Marne, France. hal-01621627

HAL Id: hal-01621627

<https://hal.science/hal-01621627>

Submitted on 23 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Modélisation de la sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux composites à l'aide d'une approche à dérivées fractionnaires

Modelling of the strain-rate sensibility of composite materials by a fractional derivative approach

Alina Krasnobrizha, Patrick Rozycki, Pascal Cosson, Laurent Gornet

Institut de recherche en Génie Civil et Mécanique (GeM) - UMR CNRS
Ecole Centrale de Nantes, 6183
1 rue de la Noë, BP 92101, 44321 Nantes Cedex 3
e-mail : alina.krasnobrizha@ec-nantes.fr, patrick.rozycki@ec-nantes.fr, laurent.gornet@ec-nantes.fr, pascal.cosson@ec-nantes.fr

Résumé

Dans ces travaux nous nous intéressons à la modélisation du comportement des matériaux composites soumis à des chargements dynamiques. La sensibilité des matériaux composites à la vitesse de déformation est présente dans certaines directions d'orthotropie. Ce fait est lié aux propriétés viscoélastiques de sa matrice. Afin de modéliser ce phénomène, un modèle de type Zener à dérivées fractionnaires est proposé pour un pli élémentaire en cisaillement. La théorie de dérivées fractionnaires est parfaitement adaptée à la modélisation des phénomènes à mémoire pour des matériaux hétérogènes comme les matériaux composites. Le modèle développé permet de représenter l'enveloppe de la courbe de chargement à différentes vitesses de déformation à partir des données en quasi-statique. Le modèle contient quatre paramètres qui sont faciles à identifier. La modélisation est validée pour les matériaux composites à matrices thermodurcissable et thermoplastique pour différentes gammes de vitesses de déformation. Cette approche est prometteuse car elle permet de remplacer potentiellement la campagne expérimentale d'identification qui est coûteuse en ressources et en temps.

Abstract

This paper is focused on modelling of composite's behaviour under dynamic loading. The strain-rate effect can be observed in some orthotropic directions due to the viscoelastic properties of polymer matrix. In order to model this phenomenon, a Zener model with fractional derivatives is developed for a single ply of composite laminate in shear direction. The fractional derivative approach is a good technique to model the viscoelastic behaviour for some heterogenic materials such as composite materials with a polymer matrix. The developed fractional model allows to represent envelopes of the loading curves for different strain-rates using the data of a quasi-static test. Fractional model involves a few parameters which are easily identified through an optimization procedure from the experimental data. The model is validated for thermoset and thermoplastic composite materials at different strain rates. The benefit of this approach is a simple numerical implementation and a low computational cost.

Mots Clés : Comportement, Dynamique, Dérivées fractionnaires

Keywords : Behaviour law, Dynamic, Fractional derivatives

1. Introduction

De nos jours, les matériaux composites sont utilisés dans différents domaines industriels notamment dans la construction automobile. Dans ce cas, les chargements dynamiques demeurent un des points essentiels qui doivent être maîtrisées par les industriels en vue de la certification des structures. Pour tous ces matériaux destinés à la réalisation de structures primaires supportant de grands efforts, la phase de validation doit inclure les simulations des essais mécaniques. Lors des travaux expérimentaux [1] et [2] on constate que le comportement des matériaux composites est fortement influencé par le changement de vitesse de déformation principalement dans la direction de cisaillement plan. Il est donc nécessaire de prendre en compte dans la modélisation du

comportement des matériaux composites les phénomènes visqueux relatifs au comportement mécanique de la matrice.

Depuis de nombreuses années, plusieurs modèles ont été développés et permettent de prendre en compte les déformations élastiques et inélastiques, les endommagements et la sensibilité à la vitesse de déformation [3], [4]. L'approche à base de dérivées fractionnaires permet de décrire des phénomènes visqueux, dépendant de l'histoire du matériau, comme les boucles d'hystérésis et l'effet de la vitesse pour les matériaux hétérogènes [5], [6]. Le travail [5] présente un modèle fractionnaire pour décrire la réponse des matériaux composites tissés therm durcissables sous un chargement cyclique. Ce modèle prend en compte les déformations irréversibles, l'endommagement et les boucles d'hystérésis mais pas le durcissement des matériaux composites. Récemment, un autre modèle fractionnaire a été développé : le modèle collaboratif [6]. Ce modèle se compose de deux sous-modèles. Le premier est un modèle élastoplastique endommageable [3] qui représente l'enveloppe de la courbe du chargement. Le deuxième sous-modèle contient les équations constitutives formulées en termes de dérivées fractionnaires pour décrire les boucles d'hystérésis pendant la décharge-recharge. Le modèle collaboratif a été validé pour les matériaux composites à fibres de carbone tissés à matrice therm durcissable et thermoplastique. Cette approche rend possible l'estimation précise de l'énergie dissipée à cause de l'endommagement, de la plasticité et de la viscoélasticité. De plus, les deux modèles [5], [6] sont capables de prédire les boucles d'hystérésis pour une gamme de vitesses de déformation faibles à partir d'un essai quasi-statique. Pour cette gamme de vitesses, les données expérimentales sont facilement disponibles et les résultats du calcul peuvent être facilement validés. Par contre pour les gammes de vitesses de déformation moyennes et hautes, l'accès aux données expérimentales est difficile à cause de la complexité des mesures et de leur coût élevé. Le modèle numérique peut simplifier considérablement la caractérisation des matériaux composites à différentes vitesses de déformation. Ce travail porte sur la description de nouvelles capacités de l'approche fractionnaire. Un nouveau modèle à dérivées fractionnaires est proposé afin de représenter la réponse des matériaux composites à différentes vitesses de déformation. Sur la base d'une campagne expérimentale qui concerne des essais de traction en dynamique, on discute de l'aptitude du modèle fractionnaire à prédire l'effet de la vitesse pour des gammes de vitesses allant de faible à moyen/haut. Le modèle proposé contient peu de paramètres, et ceux-ci sont faciles à identifier. Puisque que les dérivées fractionnaires prennent en compte l'influence des vitesses de déformation automatiquement, la méthode proposée est un outil efficace pour compléter la campagne expérimentale et caractériser les matériaux composites soumis à des chargements dynamiques.

2. Données expérimentales

Afin d'étudier le comportement dynamique des matériaux composites, des essais de traction suivant les bissectrices des fibres permettent d'étudier le comportement en cisaillement plan pour différentes vitesses de chargement. Un matériau composite à fibres de verre et à matrice époxy est soumis à cinq vitesses de sollicitations différentes : 5 mm/min, 500 mm/min, 0.2 m/s, 3 m/s et 4 m/s. Les essais aux vitesses sont réalisés sur la machine de traction/compression dynamique équipée d'un vérin hydraulique de marque Schenck. Ses capacités en charge sont de 50 kN en dynamique et de 69 kN en statique. Sa vitesse maximale avoisine les 10 m/s et la course utile de la tige du vérin est de 250 mm. Une centrale d'acquisition rapide ainsi qu'un logiciel d'exploitation du système d'acquisition gère les entrées/sorties lors de l'essai (effort, déformation longitudinales et transversales).

Les éprouvettes de composite à fibres de verre et à matrice époxy $[\pm 45]_s$ ont été découpées dans des plaques. Les dimensions des éprouvettes d'essais suivantes :

- Longueur totale : 130 mm ;
- Longueur utile : 30 mm ;
- Largeur : 14 mm ;
- Epaisseur de la stratification : 2.6 mm.

Afin de vérifier la répétitivité des essais, trois éprouvettes ont été testées pour chaque vitesse de sollicitation. Les courbes de traction dans la direction de cisaillement plan du composite thermodurcissable sont présentées sur la (Fig. 1).

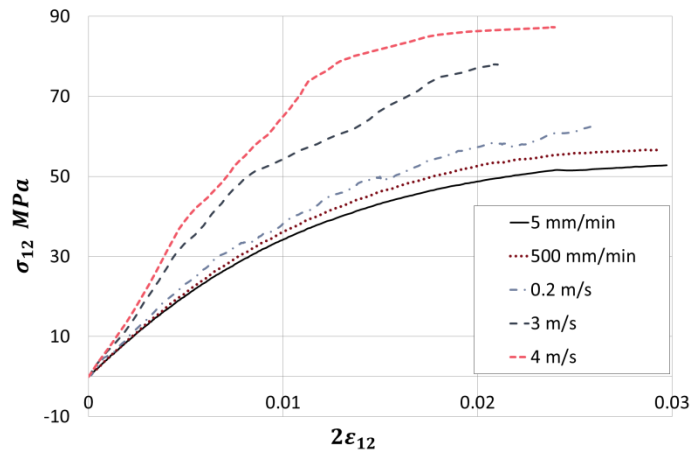


Figure 1. Données expérimentales de composite thermodurcissable à différentes vitesses de déformations

Une seconde campagne d’essais a été réalisée pour un composite tissée de fibres de verre et de matrice thermoplastique. Les moyens expérimentaux ainsi la géométrie des éprouvettes sont identiques à ceux utilisés pour la campagne réalisée sur le composite à matrice thermodurcissable. Trois vitesses de chargement différentes ont été utilisée : 5 mm/min, 0.2 mm/s et 200 mm/s. Les courbes de comportement pour des sollicitations dynamique de composite thermoplastique sont présentées sur la (Fig. 2).

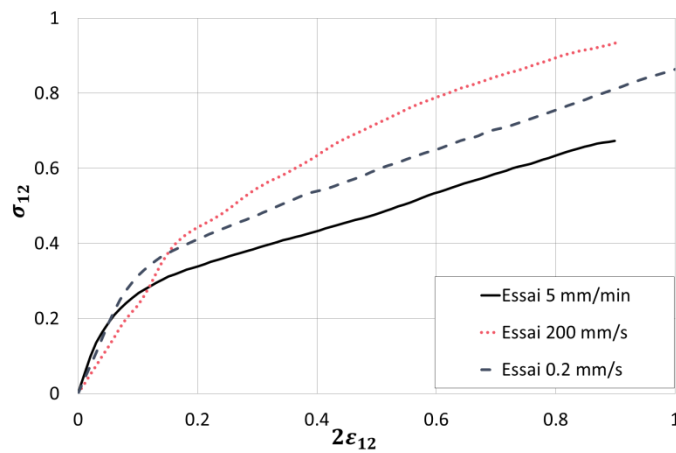


Figure 2. Données expérimentales de composite thermoplastique à différentes vitesses de déformations

L’étude des données expérimentales permet de constater une forte dépendance des paramètres du matériau en fonction de la vitesse de chargement appliquée. En particulier, le module de cisaillement apparent et la limite élastique sont très fortement influencés par la vitesse de déformation (Fig. 1 et 2). Il convient de préciser que l’ensemble des résultats est normalisé : les valeurs à une vitesse de déformation donnée sont divisées par leurs valeurs quasi-statiques. Puis, ces valeurs sont rapportées (sauf pour la vitesse de déformation) afin d’accéder à la fonction décrivant l’évolution :

$$\bar{X} = \frac{X_{courant}}{X_{référence}} \quad (\text{Eq. 1})$$

Les évolutions des paramètres sont illustrées sur les (Fig. 3 et 4) respectivement pour les composites à matrice thermodurcissable et thermoplastique. Cet effet est pris en compte dans la modélisation du comportement développée.

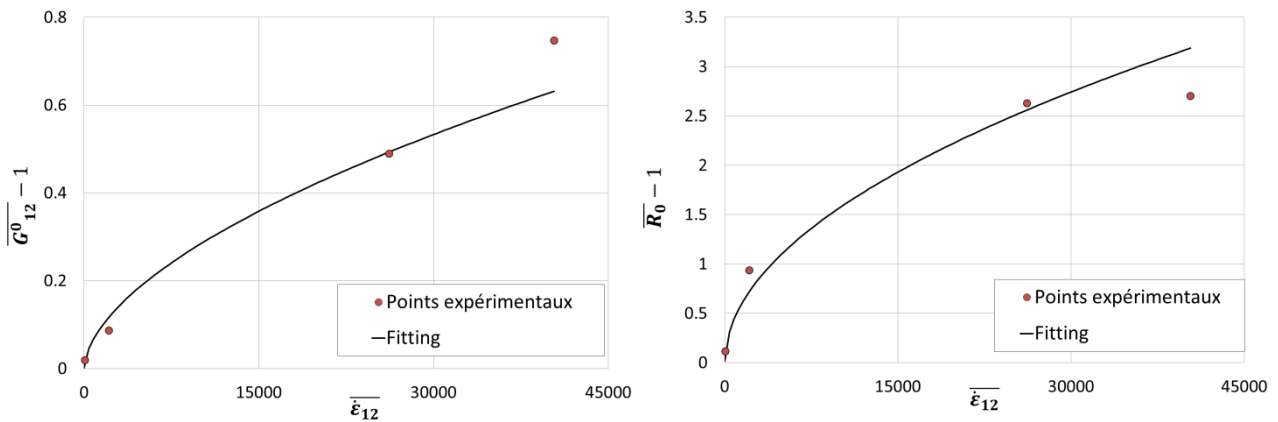


Figure 3. Evolutions du module d'Young et de la limite élastique en fonction de vitesses de déformations de composite thermodurcissable

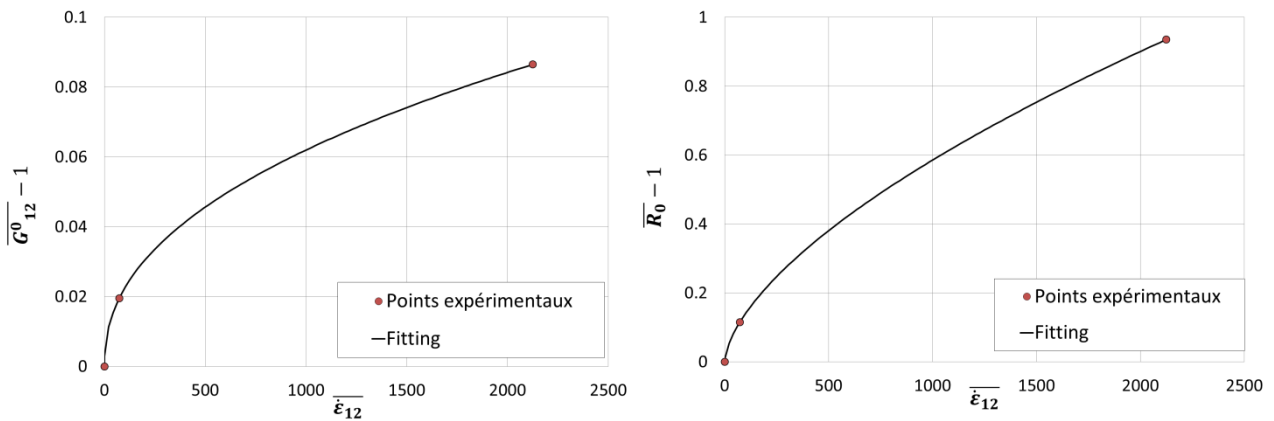


Figure 4. Evolutions du module d'Young et de la limite élastique en fonction de vitesses de déformations de composite thermoplastique

3. Modélisation théorique

L'effet de la vitesse de déformation observé dans le comportement mécanique du matériau composite est associé aux propriétés viscoélastiques de la matrice polymère. Afin de décrire le comportement viscoélastique, l'histoire du chargement doit être prise en compte dans la loi de comportement. Dans ces travaux, la théorie des dérivées fractionnaires est utilisée comme un outil mathématique adapté à la modélisation des effets viscoélastique du comportement.

3.1 Point sur le calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est un domaine des mathématiques qui a pour objet d'étendre les définitions des intégrales et des dérivées traditionnelles à des ordres non entiers. L'intégrale et la dérivée fractionnaires représentent respectivement la généralisation à des ordres non entiers de l'intégrale et de la dérivée, tout comme la fonction puissance à exposant réel correspond à la « prolongation » de la fonction puissance à exposant entier. Dans ce travail, une définition classique de la dérivée fractionnaire proposée par Riemann-Liouville [7] est utilisée :

$$(D_a^\alpha f)_{RL}(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{Eq. 2})$$

où $(D_a^\alpha f)_{RL}$ est la dérivée fractionnaire d'ordre α , et Γ est la fonction Gamma

3.2 Dérivées fractionnaires dans la théorie viscoélastique

L'équation viscoélastique est une des premières applications du calcul fractionnaire [8]. Cependant, la loi de comportement est formulée dans une forme intégrale qui permet de prendre en compte l'histoire du chargement du matériau contrairement à une équation sous une forme différentielle.

$$\sigma(t) = \frac{G}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{\dot{\varepsilon}(\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau = GD_0^\alpha \varepsilon(t) \quad (\text{Eq. 3})$$

où $D_0^\alpha f(t)$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann–Liouville (Eq. 2) et G est une constante de matériau.

De cette manière, la loi viscoélastique occupe une position intermédiaire entre le corps élastique ($\alpha = 0$) et un état visqueux anélastique ($\alpha = 1$) :

$$\begin{aligned} \alpha \rightarrow 0 &\Rightarrow \sigma(t) \rightarrow E\varepsilon(t) && \text{Loi de Hooke} \\ \alpha \rightarrow 1 &\Rightarrow \sigma(t) \rightarrow \nu \frac{d\varepsilon(t)}{dt} && \text{Loi de Newton} \end{aligned} \quad (\text{Eq. 4})$$

Dans le cadre unidimensionnel, la dérivée fractionnaire permet de construire des éléments rhéologiques. La dérivée fractionnaire dans la loi de comportement peut être interprétée comme un élément qui nommé *spring-pot* [9]. Cet élément correspond à une représentation asymptotique d'assemblage d'éléments élastiques (*spring*) et viscoélastiques traditionnels (*dash-pot*) connectés en série et en parallèle (Fig. 5) [10]. De cette façon, l'élément *spring-pot* permet de modéliser plusieurs types de comportements mécaniques en faisant varier l'ordre de dérivation α . Si $\alpha \rightarrow 0$, le comportement de l'élément fractionnaire tend vers la réponse élastique ; dans le cas où $\alpha \rightarrow 1$, la viscosité augmente.

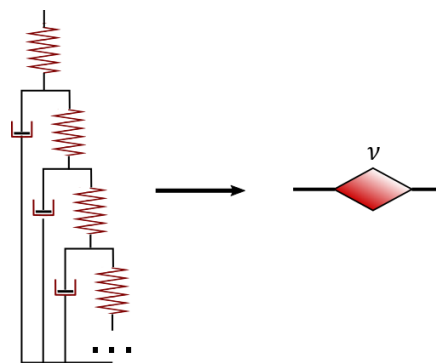


Figure 5. L'élément rhéologique fractionnaire « spring-pot »

3.3 Loi du comportement

Afin de décrire le comportement observé expérimentalement (Fig. 1 et 2), la loi de Zener fractionnaire est retenue. Ce modèle est un des éléments de base de notre modèle d'endommagement. Le schéma rhéologique de ce modèle est présenté sur la (Fig. 6).

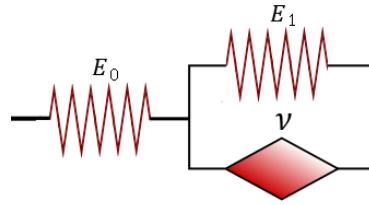


Figure 6. Modèle fractionnaire de Zener

L'équation du modèle de Zener fractionnaire en cisaillement plan sans endommagement est :

$$\sigma_{12}(t) + bD^\alpha \sigma_{12}(t) = E(2\varepsilon_{12}^t(t) + aD^\alpha 2\varepsilon_{12}^t(t)) \quad (\text{Eq. 5})$$

avec :

$$b = \frac{\nu}{E_0 + E_1}, \quad E = \frac{E_0 E_1}{E_0 + E_1}, \quad a = \frac{\nu}{E_1} \quad (\text{Eq. 6})$$

Le modèle de Zener fractionnaire permet de décrire le comportement viscoélastique d'un pli élémentaire des matériaux composites en prenant en compte la sensibilité à la vitesse de déformation. Dans la section suivante, l'implémentation du modèle de Zener dans un code numérique est présentée.

3.4 Implémentation du modèle dans un code numérique

Afin d'implémenter le modèle (Eq. 5) dans un code numérique, une discréditation des dérivées fractionnaires est nécessaire. Dans ces travaux, l'approximation des dérivées fractionnaires d'ordre α (Eq. 2) par l'algorithme *GI* [11] s'écrit :

$$D_0^\alpha f(t) \approx (D_0^\alpha f(t))_{G1} = \frac{1}{(\Delta t)^\alpha} \sum_{j=0}^{n-1} A_{j+1}^\alpha f(t - j\Delta t) \quad (\text{Eq. 7})$$

où A_{j+1}^α s'appelle le coefficient de Grunwald. Il est défini par la formule suivante :

$$A_{j+1}^\alpha = \frac{\Gamma(j - \alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(j + 1)} \quad (\text{Eq. 8})$$

Afin d'éviter l'utilisation explicite de la fonction Gamma, le coefficient de Grunwald (Eq. 8) peut être exprimé par la formule de récurrence :

$$A_{j+1}^\alpha = \frac{(j - \alpha - 1)}{j} A_j^\alpha \quad (\text{Eq. 9})$$

Sachant que $A_1^\alpha = 1$, et en tenant compte du fait que $0 < \alpha < 1$, la valeur absolue $\left| \frac{(j-\alpha-1)}{j} \right|$ est inférieure à 1, par conséquent on obtient :

$$|A_{j+1}^\alpha| < |A_j^\alpha| \quad (\text{Eq. 10})$$

La condition précédente signifie que la valeur du coefficient de Grunwald A_{j+1}^α décroît lorsque j augmente. Autrement dit, cette condition caractérise le principe de l'évanescence de la mémoire : à un instant donné, le passé lointain a moins d'influence que le passé récent. On retrouve ici le fait

que les dérivées fractionnaires sont des opérateurs héréditaires au sens où l'entend Volterra [12], à savoir qu'elles permettent de prendre en compte le passé en introduisant une atténuation de plus en plus forte pour des événements lointains.

En utilisant le schéma de discréditation (Eq. 7), la contrainte d'équation (Eq. 5) peut être exprimée de la manière suivante :

$$\sigma_{12i} = \frac{(E + E \cdot a \cdot (\Delta t)^{-\alpha}) 2\varepsilon_{12i}^t + (\Delta t)^{-\alpha} \sum_{j=1}^{i-1} A_{j+1}^\alpha [E \cdot a \cdot 2\varepsilon_{12i-j}^t - b \cdot \sigma_{12i-j}]}{1 + b(\Delta t)^{-\alpha}} \quad (\text{Eq. 11})$$

4. Identification des paramètres

L'objectif principal de ces travaux est de pouvoir reproduire les courbes à différentes vitesses de déformation à partir d'essais quasi-statiques comme dans l'essai illustré sur la (Fig. 1 et 2). Pour cela, une identification des paramètres du modèle (Eq. 5) est effectuée pour chaque vitesse de déformation. Nous précisons que le vecteur de déformation dans l'équation (Eq. 5) correspond aux déformations totales obtenues par un essai en quasi-statique. Les paramètres a , b , E et α sont définis par la résolution d'un problème d'optimisation non-linéaire sous contraintes. La contrainte principale est imposée sur les valeurs de l'ordre de la dérivation fractionnaire qui doit être tel que $0 < \alpha < 1$. La fonction « objectif » s'exprime sous la forme d'une fonction d'erreur (Eq.12) entre les contraintes expérimentales (σ_{12}^{exp}) et celles calculées par le modèle de Zener fractionnaire ($\sigma_{12}^{modèle}$) (Eq. 11).

$$\delta_i = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\sigma_{12}^{exp}(t_i) - \sigma_{12}^{modèle}(t_i))^2}}{N} \quad (\text{Eq.12})$$

L'évolution des paramètres du modèle de Zener fractionnaire (Eq. 5) en fonction de la vitesse de déformation est présentée dans le (Tab. 1). Le paramètre $E = 0.1 \text{ MPa}$ reste constant pour toutes les vitesses appliquées. Le sens physique des paramètres du modèle fractionnaire doit être étudié plus précisément, ce que nous réservons aux perspectives de ces travaux.

Vitesse de chargement	$\dot{\varepsilon}$	a	b	α
	1/s	1/s $^\alpha$	1/s $^\alpha$	-
5 mm/min	0.0028773	449362	10.69	0.9
500 mm/min	0.20739	3908	0.118	0.8
0.2 m/s	5.96E+00	219	0.0043	0.8
3 m/s	7.23E+01	2776	0.067	0.29
4 m/s	111	945	0.005	0.38

Tab. 1. Exemple de Tableau.

5. Résultats

Dans cette section une simulation de réponse du matériau composite carbone/époxy en cisaillement à des vitesses de chargement différentes (Fig. 1) est réalisée en utilisant le modèle Zener fractionnaire (Eq. 5) et les paramètres identifiés dans la section précédente. Les résultats de simulation démontrés sur la (Fig. 7) sont en bon accord avec les données expérimentales. Le modèle de Zener fractionnaire est capable de prédire l'évolution des courbes de chargement à des vitesses allant de 5 mm/min jusqu'à 4 m/s en utilisant le vecteur de déformation en quasi-statique et quatre paramètres du modèle.

La deuxième simulation est effectuée pour le composite thermoplastique tissé à fibres de verre. La procédure d'identification des paramètres est identique à celle des matériaux composites thermodurcissable. Les résultats de la simulation sont présentés sur la (Fig. 8). On peut remarquer que les résultats des simulations sont très proches des données expérimentales.

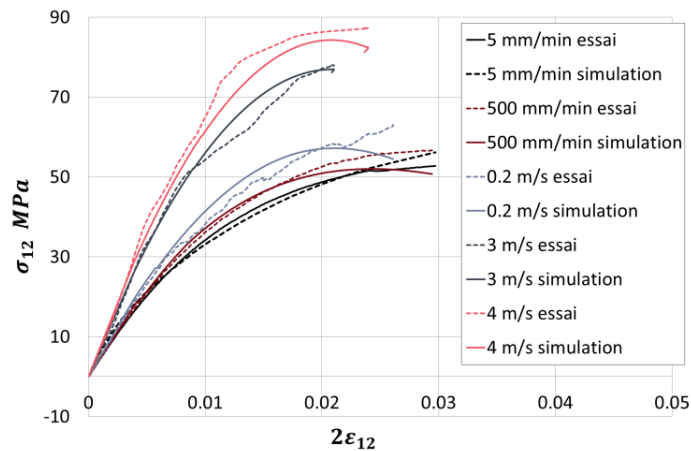


Figure 7. Simulation numérique de l'effet de vitesse de composite thermodurcissable

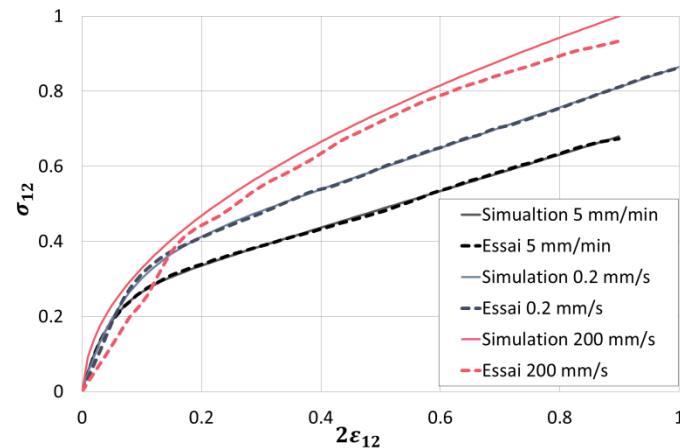


Figure 8. Simulation numérique de l'effet de vitesse de composite thermoplastique

6. Conclusion

Ces travaux concernent l'étude du comportement des matériaux composites à matrice polymère à différentes vitesses de déformations. Une modélisation simple du comportement des matériaux composites est proposée afin de simplifier la campagne expérimentale qui est coûteuse en temps et en matériel.

Un fort effet de la vitesse de déformation dans l'axe de l'éprouvette est observé sur le module apparent du matériau composite orienté à 45°. Ce module étant naturellement lié au module de cisaillement plan qui est influencé par le comportement mécanique de la matrice polymère. Afin de prendre en compte les propriétés visqueuses dans un modèle de comportement avec endommagement, un modèle de Zener fractionnaire est proposé pour décrire la viscoélasticité. La proposition d'un modèle de comportement possédant des dérivées fractionnaires permet de représenter les effets visqueux. En particulier le modèle fractionnaire proposé est parfaitement adapté pour décrire la sensibilité à la vitesse de déformation. Le modèle contient quatre paramètres qui sont faciles à identifier et qui peuvent être couplé naturellement à l'évolution d'un état d'endommagement. Le modèle de Zener fractionnaire permet de représenter les enveloppes des courbes de chargement à différentes vitesses de déformation à partir d'un essai quasi-statique. La plage de vitesse étudié est assez large et elle couvre des vitesses de la traverse de la machine de

traction allant de 5 mm/min jusqu'à 4 m/s. Le modèle a été validé pour des tissus composites à matrices thermodurcissable et thermoplastique.

En termes de perspectives, cette modélisation permet de décrire des essais coûteux et difficiles à réaliser. Associé à une campagne expérimentale d'identification réduite à peu d'essais, le modèle apporte un bénéfice économique important dans le cadre industriel. Il permettrait aussi d'être un outil à la conception de matériels adaptés à l'identification en dynamique.

Références

- [1] A. GILAT, R. K. GOLDBERG, « Experimental study of strain-rate-dependent behavior of carbon/epoxy composite ». *Composites Science and Technology*, Vol. 62 (110), pp. 1469-1476, 2002.
- [2] C.A. WEEKS, C.T. SUN, « Modeling non-linear rate-dependent behavior in fiber-reinforced composites ». *Composites Science and Technology*, Vol. 58 (3-4), pp. 603-611, 1998.
- [3] P. LADEVÈZE, E. LE DANTEC, « Damage modelling of the elementary ply for laminated composites ». *Composites Science and Technology*, Vol. 43, pp. 257-267, 1992.
- [4] A.F JOHNSON, A.K. PICKETT, P. ROZYCKI, « Computational methods for predicting impact damage in composite structures ». *Composites Science and Technology*, 61 (15), pp. 2183-2192, 2001.
- [5] M. MATEOS, L. GORNET, P. ROSYCKI, L. ARETXABALETA, « Hysteretic shear behavior of fiber-reinforced composite laminates ». *ECCM16 - 16th European Conference on Composite Materials, 23th-27th June, Sevilla, Spain, 2014.*
- [6] A. KRASNOBRIZHA, P. ROZYCKI, L. GORNET, P. COSSON, « Hysteresis behaviour modelling of woven composite using a collaborative elastoplastic damage model with fractional derivatives ». *Composite Structures*, Vol. 158, pp. 101-111, 2016.
- [7] S. G. SAMKO, A. A. KILBAS, O. I. MARICHEV, «Fractional Integrals and Derivatives: Theory and Applications». *Amsterdam: Gordon and Breach Science*, 1993.
- [8] P. G. NUTTING, «A new general law deformation». *Journal of the Franklin Institute*, 191, pp. 678-685, 1921.
- [9] R. KOELLER, «Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity». *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 51 (12), pp. 299-307, 1984.
- [10] R. MAGIN, «Fractional calculus in Bioengineering». *Connecticut : Begell House*, 2006.
- [11] K. OLDHAM, J. SPANIER, «The fractional calculus». *New York and London: Academic Press*, 1974.
- [12] V. VOLTERRA, «Theory of Functionals and of Integral and Integro-Differential Equations». *Mineola and New York : Courier Corporation*, 2005.