



**HAL**  
open science

**Extension d'un modèle d'endommagement anisotrope  
pour CMCs aux chargements multi-axiaux  
non-proportionnels**

Emmanuel Baranger

► **To cite this version:**

Emmanuel Baranger. Extension d'un modèle d'endommagement anisotrope pour CMCs aux chargements multi-axiaux non-proportionnels. Journées Nationales sur les Composites 2017, École des Ponts ParisTech (ENPC), Jun 2017, 77455 Champs-sur-Marne, France. hal-01621624

**HAL Id: hal-01621624**

**<https://hal.science/hal-01621624>**

Submitted on 23 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## **Extension d'un modèle d'endommagement anisotrope pour CMCs aux chargements multi-axiaux non-proportionnels**

### ***Extension of an anisotropic damage model for CMCs to non-proportional multi-axial loadings***

**Emmanuel Baranger<sup>1</sup>**

1 : LMT

ENS-Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay  
61 avenue du Président Wilson, F- 94235 Cachan Cedex  
e-mail : emmanuel.baranger@ens-paris-saclay.fr

### **Résumé**

Les composites à matrice céramique sont de bons candidats pour la fabrication de pièces pour moteurs aéronautiques ou dans le domaine du nucléaire. Concernant la famille des composites SiC/SiC, un réseau de fissures inter-torons peut se développer orthogonalement à la direction de chargement. Ce type de mécanisme a conduit au développement des modèles d'endommagement anisotrope dans la littérature avec l'introduction de variables tensorielles. Une des difficultés réside dans la prise en compte de la refermeture des fissures à travers l'utilisation de potentiels ayant de bonnes propriétés. Le présent papier porte sur l'amélioration du modèle de [1] pour la prise en compte des données expérimentales récemment obtenues par [2] sur des tubes SiC/SiC sous chargements de torsion alternée. Le modèle précédemment introduit est basé sur une histoire représentée par un scalaire ne permettant pas de décrire l'histoire anisotrope du chargement. Une variable scalaire représentant un endommagement actif comme la projection du tenseur d'endommagement sur la direction de chargement normalisée est donc introduite. Une autre évolution du modèle concernant la prise en compte du frottement dans les fissures en compression cisaillement est aussi abordée.

### **Abstract**

Ceramic matrix composites are good candidates for the manufacturing of aeronautical parts as well as nuclear ones. Regarding the SiC/SiC family of composites, an inter-yarn crack network and develop orthogonally to the loading direction. This kind of mechanism has lead to the development of the so-called anisotropic damage models in the litterature introducing tensorial variables. A difficulty resides in accounting for the crack closure effect and the definition of potentials with good properties. The present paper proposes an enhancement of the model from [1] to take into account new experimental obtained by [2] for SiC/SiC tubes under alternate torsion. The model already introduced is based on a history defined by a single scalar variable disabling the description of anisotropic histories. A new scalar variable modeling the active damage is introduced as the projection of the damage tensor over the normalized loading direction. Another evolution of the model aims at describing the friction occurring in crack lips while loaded in compression and shear.

**Mots Clés :** CMC, endommagement anisotrope, chargement non-proportionnel

**Keywords :** CMC, anisotropic damage, non-proportional loading

## 1. Liste des symboles

$\mathbb{C}_0$	Tenseur de souplesse initial
$\Delta\mathbb{C}, \Delta\mathbb{Z}, \Delta\mathbb{C}_m, \Delta\mathbb{Z}_m$	Tenseurs de souplesse endommagée
$\mathbb{C} = \mathbb{C}_0 + \Delta\mathbb{C}$	
$\mathbb{H} = \mathbb{C}^{\frac{1}{2}}$ and $\mathbb{H}_0 = \mathbb{C}_0^{\frac{1}{2}}$	
$\rho\Psi^{el}$	Potentiel, $\rho$ est la masse volumique
$\langle . \rangle_+, \langle . \rangle_-$	Parties positives et négatives classiques
$\sigma, \sigma_+, \sigma_-$	Contrainte, contrainte positive relativement à $\mathbb{H}$ contrainte négative relativement à $\mathbb{H}_0$
$\varepsilon$	Déformation
$\mathbb{Y}', \mathbb{Y}', \mathbb{Y}''$	Forces thermodynamiques
$\otimes$	Produit tensoriel
:	Produit contracté entre tenseurs d'ordre 2
::	Produit contracté entre tenseurs d'ordre 4
$(\cdot)_{sym}$	Partie symétrique
$\mathbb{I}$	Identité (ordre 4)
$\dot{a}$	Dérivée totale en temps de $a$
$a_i$	Quantité $a$ évaluée au pas de temps $t_i$

## 2. Introduction

Les composites à matrice céramique (CMCs) sont de bon candidats pour la fabrication de structures aéronautiques chaudes (moteurs) ou dans des applications nucléaires nécessitant de bonnes propriétés mécaniques à haute température ou sous irradiation. Dans le cas de matériaux SiC/SiC, en fonction de leur procédé de fabrication, des fissures orthogonales à la direction de chargement peuvent apparaître parmi d'autres réseaux de fissures [3]. La modélisation de ces réseaux de fissures a donné lieu aux modèles d'endommagement anisotropes [4, 5]. L'utilisation de variables d'endommagement pour décrire l'effet de fissures est généralement introduit par le concept de contrainte effective dans un premier temps pour des variables scalaires [6, 7]. Le problème devient plus ardu pour des variables tensorielles comme dans [8], il s'agit alors de préserver les bonnes symétries et des équivalences en déformation ou en énergie [9]. Le présent modèle [1] n'introduit pas dans un premier temps cette contrainte effective. Dans ce cadre, la prise en compte de la fermeture des fissures et donc de la restauration de la rigidité en compression est un problème majeur. Important pour les CMCs [10], ce problème est connu plus généralement dans le cadre des matériaux fragiles ([11] par exemple). La difficulté réside en l'obtention de relations contrainte/déformation continue, en d'autres mots, de potentiels convexes pour des chargements multi-axiaux non-proportionnels [12, 13, 14]. Ce problème est bien géré pour les variables d'endommagement scalaires discrétisant un espace de directions possibles de fissuration comme dans [15, 16]. Cela est nettement plus difficile dans le cas des modèles tensoriels comme [17, 10]. Ici, nous focaliserons sur le modèle de [1].

Les travaux expérimentaux récents développés au CEA [2, 18], et richement instrumentés, confirment les observations macroscopiques de l'ONERA [19] sur des essais de traction-torsion sur tubes SiC/SiC. Concernant les travaux de Bernachy-Barbé, le réseau de fissures principal est orienté par la direction du chargement. Cela conduit, en torsion alternée, à la formation de deux réseaux orthogonaux. Bien que reposant sur une cinématique d'endommagement très riche, le modèle initial de [1] n'est pas apte à représenter cela faute d'une histoire suffisamment riche. Dans ce papier, la méthode développée par [20] sera étendue au modèle de Ladevèze. Il semble que ce concept ait été développé précédemment par Chaboche en comparant les évolutions dans les articles [21, 22] mais pas explicité par les auteurs. L'identification de tels modèles n'est pas simple. Cela a été fait par le passé dans [23] sur la base d'essais macroscopiques et de considérations physiques. Les essais très riches de [2] sont une contribution importante dans ce sens.

Dans cet article, la version initiale du modèle développé par [1] et utilisé dans [24, 25] sera présentée. Dans un deuxième temps, ses limites seront présentées ainsi que l'origine de ces limites. Enfin deux évolutions du modèle seront proposées. La première permet de prendre en compte une histoire anisotrope [26] alors que la deuxième a pour but de prendre en compte les mécanismes de frottement lors de la remise en compression de fissures en cisaillement.

### 3. Modèle d'endommagement initial

Afin d'introduire une cinématique d'endommagement assez libre, différents auteurs ont choisi une description de cet endommagement par des tenseurs d'ordre 4 [27, 5]. Dans le cas du modèle de [1], l'idée est de laisser la cinématique complètement libre a priori puis de spécifier celle-ci grâce aux lois d'évolution. La seconde idée est de séparer les contributions correspondant aux différents réseaux de fissures comme dans [24, 28].

#### 3.1. Potentiel et variables d'état

Le potentiel élastique  $\rho\Psi^{el}$  est écrit en contrainte comme la somme de trois contributions : la première est active en tension uniquement, la deuxième en compression uniquement et la troisième est active tout le temps. Cela donne :

$$\rho\Psi^{el} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ : \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \Delta\mathbb{Z} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Eq. 1})$$

$\Delta\mathbb{C} = \mathbb{C} - \mathbb{C}_0$  et  $\Delta\mathbb{Z}$  sont les variables d'endommagement du modèle, par définition elles sont positives et ont les symétries d'un tenseur de souplesse. Leurs racines sont notées  $\mathbb{H}$  et  $\mathbb{H}_0$ .  $\boldsymbol{\sigma}_+$  et  $\boldsymbol{\sigma}_-$  sont les parties positives de la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  définies pour prendre en compte le contact unilatéral dans les fissures. Pour obtenir un potentiel convexe [29], deux décompositions sont utilisées :

$$\boldsymbol{\sigma}_+ = \mathbb{H}^{-1} : \langle \mathbb{H} : \boldsymbol{\sigma} \rangle_+ \quad (\text{Eq. 2})$$

$$\boldsymbol{\sigma}_- = \mathbb{H}_0^{-1} : \langle \mathbb{H}_0 : \boldsymbol{\sigma} \rangle_- \quad (\text{Eq. 3})$$

La relation contrainte déformation est donnée par (cf. annexe de [30] pour les éléments de calcul) :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{\partial \rho\Psi^{el}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- + \Delta\mathbb{Z} : \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Eq. 4})$$

Pour plus de simplicité et dans le cadre des caractérisation de [2], l'endommagement est ici réduit à une seule contribution (notée  $m$ ). Les variables d'endommagement associées sont notées :  $\Delta\mathbb{C}_m$  et  $\Delta\mathbb{Z}_m$  alors que dans [24] d'autres contributions sont ajoutées. D'où :

$$\Delta\mathbb{C} = \Delta\mathbb{C}_m \quad (\text{Eq. 5})$$

$$\Delta\mathbb{Z} = \Delta\mathbb{Z}_m \quad (\text{Eq. 6})$$

#### 3.2. Forces thermodynamiques

Les forces thermodynamiques associées sont aussi des tenseurs d'ordre 4 :

$$\mathbb{Y} = \frac{\partial \rho\Psi^{el}}{\partial \Delta\mathbb{Z}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \quad (\text{Eq. 7})$$

$$\mathbb{Y}' = \frac{\partial \rho\Psi^{el}}{\partial \Delta\mathbb{C}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \boldsymbol{\sigma}_+ \quad (\text{Eq. 8})$$

Une autre force est introduite pour gérer le cisaillement, en 2D :

$$\mathbb{Y}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+)_{sym} \otimes (\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_+)_{sym} \quad (\text{Eq. 9})$$

où  $\mathbf{R}_{\frac{\pi}{2}}$  est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{2}$  dans le plan.

### 3.3. Lois d'évolution

Pour construire les lois d'évolution, une force équivalente est introduite :

$$z_m(\mathbb{Y}') = \left( (1-a)Tr[\mathbb{Y}'^{m+1}] + aTr[\mathbb{Y}'^{n+1}] \right)^{\frac{1}{n+1}} \quad (\text{Eq. 10})$$

$$(\text{Eq. 11})$$

$a$  permet de passer d'un endommagement isotrope à un endommagement directionnel.  $n$  (impaire) permet de mettre l'accent sur la directionnalité du dommage.  $z_m$  est positif.

Le maximum de cette force sur le temps est défini par :

$$\bar{z}_m(t) = \sup_{\tau \leq t} z_m(\mathbb{A}(\tau)) \quad (\text{Eq. 12})$$

Les lois d'évolution sont :

$$\Delta \dot{\mathbb{C}}_m = \dot{\alpha}_m \frac{(1-a)\mathbb{Y}'^m + aTr[\mathbb{Y}']^n \mathbb{I}}{\bar{z}_m^n} \quad (\text{Eq. 13})$$

$$\Delta \dot{\mathbb{Z}}_m = \dot{\alpha}_m \frac{b\mathbb{Y}'^m}{\bar{z}_m^n} \quad (\text{Eq. 14})$$

$$\bar{z}_m(t) = \sup_{\tau \leq t} z_m(\mathbb{Y}'(\tau)) \quad (\text{Eq. 15})$$

$\alpha_m(\bar{z}_m)$  est une fonction scalaire croissante.

## 4. Limitation en torsion alternée

### 4.1. Comparaison expérimentale

La modèle précédent a été testé sur un chargement non-proportionnel i.e. un essai de torsion alterné sur tube  $[\pm 45]$ . Sur la Figure 1, la contrainte de cisaillement est tracée en fonction des déformation axiale, circonférentielle et de cisaillement. Sur cette figure, la relation entre déformation axiale et contrainte de cisaillement repose uniquement sur l'évolution de la souplesse dans les directions du renfort c.a.d sur l'évolution de  $\Delta \mathbb{C}$  projeté sur les directions  $+45^\circ$  et  $-45^\circ$ . Notons que l'endommagement n'évolue pas tant que la contrainte de cisaillement n'atteint pas la valeur absolue de 100 MPa et que la figure est symétrique. Deux réseaux de fissures sont créés.

La Figure 2 montre le résultat du modèle présenté. Cette figure n'est pas symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

### 4.2. Analyse de l'histoire du modèle

En fait,  $\bar{z}_m(t)$  étant un scalaire, l'histoire de l'endommagement se résume à une valeur et est donc isotropie même si la cinématique est très riche. Une autre façon est de remarquer que la loi d'écoulement peut s'écrire de manière équivalente à Eq. 13 sous la forme :

$$\Delta \dot{\mathbb{C}}_m = \dot{\gamma} \frac{\partial z_m}{\partial \mathbb{Y}'} \quad (\text{Eq. 16})$$

$\dot{\gamma}$  est un multiplicateur d'endommagement ; des conditions Kuhn-Tucker sont associées ( $\dot{\gamma} \geq 0, f \leq 0, \dot{\gamma}f = 0$ ). Le critère d'endommagement s'écrit :

$$f(d_{act}) = d_{act} - \beta_m(z_m) \quad (\text{Eq. 17})$$

Si  $d_{act} = Tr[\Delta \mathbb{C}_m]$  (histoire isotrope), le multiplicateur d'endommagement s'écrit :

$$\dot{\gamma} = \frac{\beta_m(z_m)}{Tr\left[\frac{\partial z_m}{\partial \mathbb{Y}'}\right]} = \dot{\alpha}_m \quad (\text{Eq. 18})$$

Cette expression ne dépend que de  $\mathbb{Y}'$ . Ce modèle est donc équivalent au précédent.

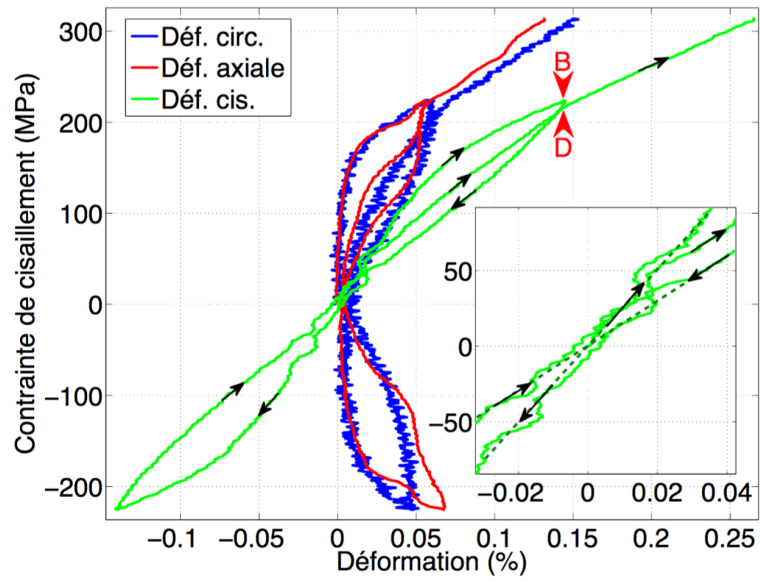


Fig. 1. Evolution de la contrainte de cisaillement en fonction des déformation sur un tube en torsion alternée [18].

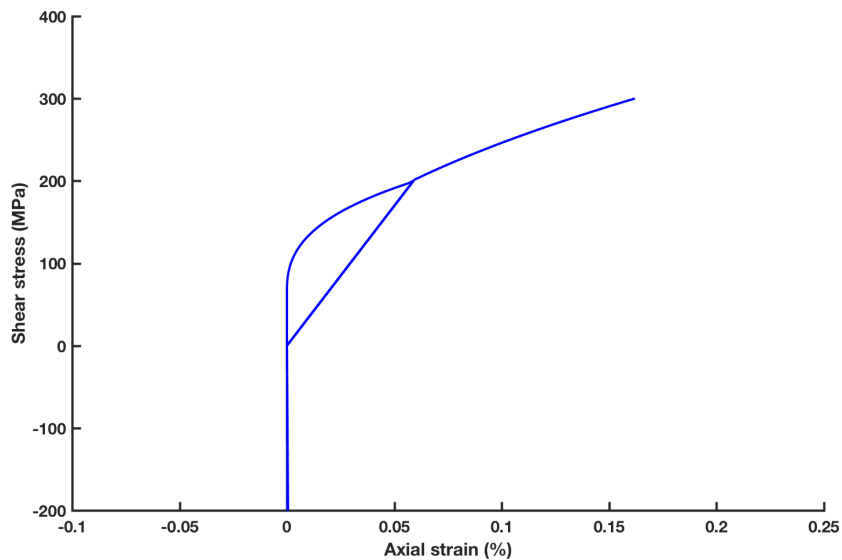


Fig. 2. Evolution simulée de la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation axiale en torsion alternée.

## 5. Modèle amélioré

Comme illustré ci-dessus, les équations d'évolution doivent être modifiées pour prendre en compte l'histoire anisotrope. [20] a proposé un cadre pour cela sur des tenseur d'endommagement d'ordre 2. Cette approche est suivie ici. Pour cela, on introduit la projection de l'endommagement sur la direction de chargement (normalisée) :

$$d_{act} = \Delta C_m :: \frac{\mathbb{Y}'}{z_m(\mathbb{Y}')} \quad (\text{Eq. 19})$$

Par la suite, on écrit les lois d'évolution au pas de temps  $t_{i+1}$  et on projette les endommagements.

$$d_{act,i+1} = \Delta C_{m,i+1} :: \frac{\mathbb{Y}'_{i+1}}{z_{m,i+1}} \quad (\text{Eq. 20})$$

$$d_{act,i+1}^* = \Delta C_{m,i} :: \frac{\mathbb{Y}'_{i+1}}{z_{m,i+1}} \quad (\text{Eq. 21})$$

La loi d'écoulement s'écrit :

$$(\Delta C_{m,i+1} - \Delta C_{m,i}) = \delta\gamma_{i+1} \left( \frac{\partial z_m}{\partial \mathbb{Y}'} \right)_{i+1} \quad (\text{Eq. 22})$$

La combinaison des trois dernières équations mène à :

$$d_{act,i+1} - d_{act,i+1}^* = (\Delta C_{m,i+1} - \Delta C_{m,i}) :: \frac{\mathbb{Y}'_{i+1}}{z_{m,i+1}} \quad (\text{Eq. 23})$$

$$= \delta\gamma_{i+1} \left( \frac{\partial z_m}{\partial \mathbb{Y}'} \right)_{i+1} :: \frac{\mathbb{Y}'_{i+1}}{z_{m,i+1}} \quad (\text{Eq. 24})$$

$$= \delta\gamma_{i+1} \quad (\text{Eq. 25})$$

Donc, si l'endommagement augmente c.a.d  $d_{act,i+1} - d_{act,i+1}^* > 0$ , alors  $\delta\gamma_{i+1} \geq 0$  et  $d_{act,i+1} = \beta_m(z_{m,i+1})$  et :

$$\Delta \dot{C}_{m,i+1} = \left( \beta_m(z_{m,i+1}) - d_{act,i+1}^* \right) \left( \frac{\partial z_m}{\partial \mathbb{Y}'} \right)_{i+1} \quad (\text{Eq. 26})$$

Pour un chargement de torsion alternée sur tube  $[\pm 45]$ , la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation axiale est tracée sur la Figure 3. Cette figure est désormais symétrique.

## 6. Prise en compte du frottement en compression cisaillement

[19] ont montré que lors de chargements de traction-compression-torsion, le frottement dans les fissures pouvait conduire à une reprise de rigidité en cisaillement. Le modèle précédent ne prenant en compte que le contact unilatéral, celui-ci n'est pas à même de décrire ce mécanisme associé à du frottement dans les lèvres de la fissure. Différents auteurs ont proposé des modélisations de ce mécanisme comme [11, 31]. Ici, on partira de l'approche de [32] pour construire le modèle.

### 6.1. Construction pour un pré-endommagement uniaxial

Supposons un état de chargement préliminaire décrit par  $\mathbf{V}_{nn} = \underline{n} \otimes \underline{n}$  tel que :

$$\boldsymbol{\sigma}_+ = \sigma_{nn} \mathbf{V}_{nn} \quad (\text{Eq. 27})$$

Celui-ci est associé à un endommagement préliminaire :

$$\Delta C_m = \alpha_1 \mathbf{V}_{nn} \otimes \mathbf{V}_{nn} \quad (\text{Eq. 28})$$

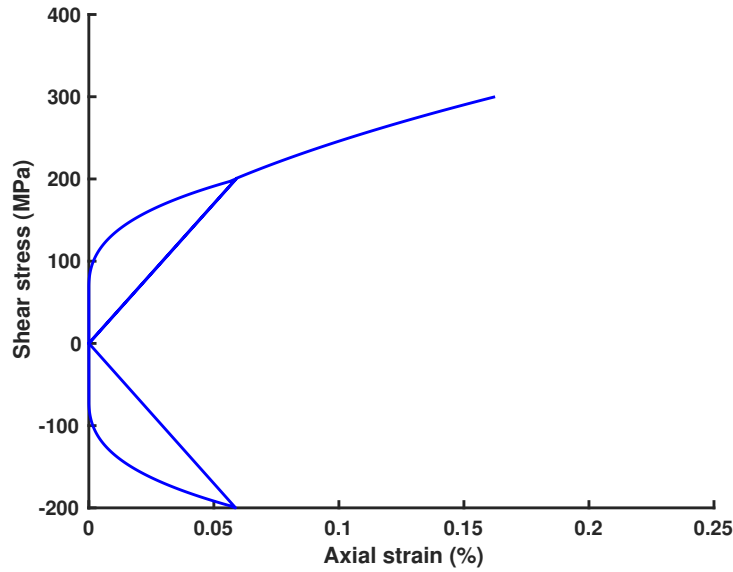


Fig. 3. Evolution simulée de la contrainte de cisaillement en fonction de la déformation axiale en torsion alternée pour le modèle amélioré.

Introduisons le vecteur orthogonal à  $\underline{n}$ , noté  $\underline{t}$ . On a aussi  $\mathbf{W}_{nt} = (\underline{t} \otimes \underline{n})_{sym}$  qui mène à :

$$\Delta \mathbf{Z}_m = \alpha_1 \mathbf{W}_{nt} \otimes \mathbf{W}_{nt} \quad (\text{Eq. 29})$$

Supposons désormais que cette étape préliminaire est suivie d'un chargement  $\sigma_+$  (différent). Les contraintes normale et tangentielle aux fissures s'écrivent :

$$\sigma_{nn} = \sigma : \mathbf{V}_{nn} \quad (\text{Eq. 30})$$

$$\sigma_{nt} = \sigma : \mathbf{W}_{nt} \quad (\text{Eq. 31})$$

Ou encore :

$$\sigma_{nn}^2 = \frac{\sigma : \Delta \mathbf{C}_m : \sigma}{\alpha_1} \quad (\text{Eq. 32})$$

$$\sigma_{nt}^2 = \frac{\sigma : \Delta \mathbf{Z}_m : \sigma}{\alpha_1} \quad (\text{Eq. 33})$$

A partir de ces données, il est possible de mettre en place un modèle de frottement de Coulomb au niveau des fissures sous forme d'un modèle de plasticité à écrouissage cinématique. Une variable d'écrouissage est introduite comme un tenseur d'ordre 2 (appelé  $\mathbf{R}$ ), notons :

$$r_{nt} = \mathbf{R} : \mathbf{W}_{nt} \quad (\text{Eq. 34})$$

Dans une fissure sous chargement de compression, les contraintes normale et tangentielle doivent satisfaire le modèle de frottement de Coulomb :

$$(\sigma_{nt} - r_{nt})^2 - c\sigma_{nn}^2 \leq 0 \quad \text{si } \sigma_{nn} \leq 0 \quad (\text{Eq. 35})$$

$c$  est le coefficient de frottement.  $\sigma_{nt} - r_{nt}$  représente la contrainte de cisaillement sur les lèvres de la fissure. On peut ré-écrire sous la forme plus macroscopique :

$$(\sigma - \mathbf{R}) : \Delta \mathbf{Z}_m : (\sigma - \mathbf{R}) - c\sigma : \Delta \mathbf{C}_m : \sigma \leq 0 \quad \text{si } \sigma_{nn} \leq 0 \quad (\text{Eq. 36})$$



En tension, la fissure est ouverte et donc :

$$\sigma_{nt} - r_{nt} = 0 = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) : \Delta\mathbf{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) \quad (\text{Eq. 37})$$

Combinons ces deux équations au sein d'une seule en introduisant  $\Delta\mathbb{H}_m = \Delta\mathbb{C}_m^{\frac{1}{2}}$  :

$$(\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) : \Delta\mathbf{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) - c < \Delta\mathbb{H}_m : \boldsymbol{\sigma} >_- : < \Delta\mathbb{H}_m : \boldsymbol{\sigma} >_- \leq 0 \quad (\text{Eq. 38})$$

## 6.2. Ecriture générale du modèle

La déformation totale est décomposée comme suit :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{el} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{plast} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{st} \quad (\text{Eq. 39})$$

*Potentiel et lois d'état*

La partie active en cisaillement est modifiée comme suit :

$$\rho\Psi = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ : \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_- : \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- + \frac{1}{2}\mathbf{R} : \mathbb{Z} : \mathbf{R} \quad (\text{Eq. 40})$$

Si  $\mathbb{Z} = \Delta\mathbf{Z}_m$ , les lois d'état s'écrivent :

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{el} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \mathbb{C} : \boldsymbol{\sigma}_+ + \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\sigma}_- \quad (\text{Eq. 41})$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\partial \rho\Psi}{\partial \mathbf{R}} = \Delta\mathbf{Z}_m : \mathbf{R} \quad (\text{Eq. 42})$$

$$\mathbb{Y} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_+ \otimes \boldsymbol{\sigma}_+ \quad (\text{Eq. 43})$$

$$\mathbb{Y}' = \frac{1}{2}\mathbf{R} \otimes \mathbf{R} \quad (\text{Eq. 44})$$

$$\mathbb{Y}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}. \boldsymbol{\sigma}_+})_{sym} \otimes (\mathbf{r}_{\frac{\pi}{2}. \boldsymbol{\sigma}_+})_{sym} \quad (\text{Eq. 45})$$

*Lois d'évolution*

Dans cette première version, les lois d'évolution ne sont pas modifiées. A l'avenir, il sera nécessaire de conduire des expériences pour valider cela.

*Critère de Coulomb et loi d'écoulement*

Le critère de Coulomb s'écrit :

$$f = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) : \Delta\mathbf{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) - c < \Delta\mathbb{H}_m : \boldsymbol{\sigma} >_- : < \Delta\mathbb{H}_m : \boldsymbol{\sigma} >_- \quad (\text{Eq. 46})$$

Si il n'y a pas de contrainte de compression alors l'écroutissage est égal à la contrainte appliquée dans le direction endommagée. La loi d'écoulement dérive de :

$$g = (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) : \Delta\mathbf{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) \quad (\text{Eq. 47})$$

Ceci donne :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{st} = \dot{\gamma}^{st} \frac{\partial g}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \dot{\gamma}^{st} \Delta\mathbf{Z}_m : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) \quad (\text{Eq. 48})$$

$$\dot{\boldsymbol{\alpha}} = -\dot{\gamma}^{st} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{R}} = \dot{\gamma}^{st} \frac{\Delta\mathbf{Z}_m}{8} : (\boldsymbol{\sigma} - \mathbf{R}) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{st} \quad (\text{Eq. 49})$$

## 7. Conclusion

Dans cet article, un modèle d'endommagement anisotrope a été amélioré afin de prendre en compte des chargements non-proportionnels. Pour cela, une histoire anisotrope a été introduite en projetant le tenseur d'endommagement sur la direction de chargement. Les résultats de ce modèle ont été comparés à des essais de torsion alternée sur tube SiC/SiC. S'agissant de la prise en compte du frottement dans les fissures en compression cisaillement, un modèle a été proposé. Celui-ci n'a pas été validé, faute de données expérimentales utilisables pour le moment.

## Références

- [1] P. Ladevèze, An anisotropic damage theory with unilateral effects : applications to laminates and to three-and four-dimensional composites, Elsevier, O. Allix and F. Hild edn., 2002.
- [2] F. Bernachy-Barbe, L. Gélébart, M. Bornert, J. Crépin, C. Sauder « Characterization of SiC/SiC composites damage mechanisms using Digital Image Correlation at the tow scale », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 68, pp. 101–109, 2015.
- [3] X. Aubard « Modélisation et identification du comportement mécanique des matériaux composites 2D-C/SiC. », Ph.D. thesis, Thèse de doctorat : Paris VI, 1992.
- [4] M. Kachanov « Effective elastic properties of cracked solids : critical review of some basic concepts », *Applied Mechanics Reviews* Vol. 45 n° 8, pp. 304–335, 1992.
- [5] J. Ju « Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics », *Journal of Engineering Mechanics* Vol. 116 n° 12, pp. 2764–2770, 1990.
- [6] L. Kachanov « Time of the rupture process under creep conditions », *Isv. Akad. Nauk. SSR. Otd Tekh. Nauk* Vol. 8, pp. 26–31, 1958.
- [7] Y. N. Rabotnov « Creep rupture », in : *Applied mechanics*, Springer, , pp. 342–349, 1969.
- [8] S. Murakami, N. Ohno « A continuum theory of creep and creep damage », in : *Creep in structures*, Springer, , pp. 422–444, 1981.
- [9] J. Cordebois, F. Sidoroff « Anisotropie élastique induite par endommagement », *Comportement mécanique des solides anisotropes* n° 295, pp. 761–774, 1979.
- [10] A. Gasser, P. Ladeveze, M. Poss « Damage mechanisms of a woven SiC/SiC composite : Modelling and identification », *Composites science and technology* Vol. 56 n° 7, pp. 779–784, 1996.
- [11] D. Halm, A. Dragon « An anisotropic model of damage and frictional sliding for brittle materials », *European Journal of Mechanics-A/Solids* Vol. 17 n° 3, pp. 439–460, 1998.
- [12] J.-L. Chaboche « Damage induced anisotropy : on the difficulties associated with the active/passive unilateral condition », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 1 n° 2, pp. 148–171, 1992.
- [13] I. Carol, K. Willam « Spurious energy dissipation/generation in stiffness recovery models for elastic degradation and damage », *International Journal of Solids and Structures* Vol. 33 n° 20, pp. 2939–2957, 1996.
- [14] A. Curnier, Q.-C. He, P. Zysset « Conewise linear elastic materials », *Journal of Elasticity* Vol. 37 n° 1, pp. 1–38, 1994.
- [15] L. Marcin, J.-F. Maire, N. Carrère, E. Martin « Development of a macroscopic damage model for woven ceramic matrix composites », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 20 n° 6, pp. 939–957, 2011.
- [16] F. Bernachy-Barbe, L. Gélébart, M. Bornert, J. Crépin, C. Sauder « Anisotropic damage behavior of SiC/SiC composite tubes : Multiaxial testing and damage characterization », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 76, pp. 281–288, 2015.
- [17] J. Chaboche, J. Maire « New progress in micromechanics-based CDM models and their application to CMCs », *Composites Science and Technology* Vol. 61 n° 15, pp. 2239–2246, 2001.
- [18] F. Bernachy-Barbé « Caractérisation des mécanismes d'endommagement et modélisation du comportement mécanique sous chargements multi-axiaux de tubes composites SiC/SiC », Ph.D. thesis, Paris, ENMP, 2014.
- [19] J. Maire, D. Pacou « Essais de traction-compression-torsion sur tubes composites céramique-céramique », in : *JNC 10 : comptes-rendus des dixièmes journées nationales sur les composites*, AMAC, Paris, , pp. 1225–1234, 1996.
- [20] R. Desmorat, M. Chambart, F. Gatuingt, D. Guilbaud « Delay-active damage versus non-local enhancement for anisotropic damage dynamics computations with alternated loading », *Engineering Fracture Mechanics* Vol. 77 n° 12, pp. 2294–2315, 2010.
- [21] J. Chaboche, P. Lesne, J. Maire, .-C. F. Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA) « Phenomenological damage mechanics of brittle materials with description of unilateral damage effects », *Fracture and Damage in Quasibrittle Structures* , pp. 75–84, 1994.
- [22] J. Maire, P. Lesne « A damage model for ceramic matrix composites », *Aerospace science and technology* Vol. 1 n° 4, pp. 259–266, 1997.

- [23] E. Baranger, C. Cluzel, P. Ladevèze, A. Mouret « Identification and validation of a multi-physic macro model for the lifetime prediction of self-healing ceramic matrix composites », in : ECCM 13, Stockholm, 2008.
- [24] C. Cluzel, E. Baranger, P. Ladevèze, A. Mouret « Mechanical behaviour and lifetime modelling of self-healing ceramic-matrix composites subjected to thermomechanical loading in air », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 40 n° 8, pp. 976–984, 2009.
- [25] M. Genet, L. Marcin, P. Ladeveze « On structural computations until fracture based on an anisotropic and unilateral damage theory », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 23 n° 4, pp. 483–506, 2014.
- [26] E. Baranger « Extension of a fourth-order damage theory to anisotropic history : Application to ceramic matrix composites under a multi-axial non-proportional loading », *International Journal of Damage Mechanics* .
- [27] J. Chaboche « Le concept de contrainte effective appliqué à l'élasticité et à la viscoplasticité en présence d'un endommagement anisotrope », in : *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids/Comportment Mécanique des Solides Anisotropes*, Springer, , pp. 737–760, 1982.
- [28] M. Genet, L. Marcin, E. Baranger, C. Cluzel, P. Ladevèze, A. Mouret « Computational prediction of the lifetime of self-healing CMC structures », *Composites Part A : Applied Science and Manufacturing* Vol. 43, pp. 294–303, 2012, ISSN 1359835X.
- [29] P. Ladevèze, E. Baranger, M. Genet, C. Cluzel, *Ceramic Matrix Composites : Materials, Modeling and Technology*, chap. *Damage and Lifetime Modeling for Structure Computations*, John Wiley & Sons, Inc., , pp. 465–519, n. P. Bansal and J. Lamon eds, ISBN : 978-1-118-23116-6, 712 pages, 2014.
- [30] E. Baranger « Building of a reduced constitutive law for ceramic matrix composites », *International Journal of Damage Mechanics* Vol. 22 n° 8, pp. 1222–1238, 2013.
- [31] J.-L. Chaboche, J.-F. Maire « A new micromechanics based CDM model and its application to CMC's », *Aerospace Science and Technology* Vol. 6 n° 2, pp. 131–145, 2002.
- [32] S. Andrieux, Y. Bamberger, J.-J. Marigo « Un modèle de matériau microfissuré pour les bétons et les roches », *Journal de mécanique théorique et appliquée* Vol. 5 n° 3, pp. 471–513, 1986.