



HAL
open science

Mouvements périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel

Henri Cabannes

► **To cite this version:**

Henri Cabannes. Mouvements périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel. Journal de Mécanique, 1981, 20 (1), pp.41-58. hal-01620614

HAL Id: hal-01620614

<https://hal.science/hal-01620614>

Submitted on 22 Jan 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Mouvements périodiques d'une corde vibrante en présence d'un obstacle ponctuel

Henri CABANNES

RÉSUMÉ. — Une corde vibrante fixée à ses deux extrémités peut se déplacer dans un plan, en présence d'un obstacle ponctuel fixe placé au milieu du segment qui joint les extrémités. La corde est initialement au repos dans une position symétrique par rapport à la médiatrice du segment qui joint les extrémités, et son élongation (écart à la position d'équilibre) présente un minimum et deux maximums égaux. On démontre, lorsque les élongations correspondant à ces extrémums sont dans un rapport rationnel, que le mouvement, en présence de l'obstacle, est périodique et on calcule la période.

ABSTRACT. — A string fixed at both ends can oscillate in a plane in which there is a fixed point-obstacle placed in the middle of the line joining the ends A and B of the string. The string is initially at rest with a prescribed shape, symmetric with respect to the normal mid-plane of the segment AB, and the displacement (transverse departure from equilibrium) has a minimum and two equal maxima. We prove that, when the ratio of the displacements of these extrema is rational, the motion of the string is periodic and we compute the period.

1. Introduction

Si l'étude des mouvements des cordes vibrantes est un problème ancien déjà considéré par d'Alembert [1], il semble que L. Amerio et G. Prouse soient les premiers à avoir abordé l'étude des mouvements d'une corde qui vibre au-dessus d'un obstacle qu'elle peut heurter au cours du mouvement [2]. Leur premier travail dans lequel ils prouvent, lorsque l'obstacle est rectiligne, l'existence globale de la solution date de 1975. Depuis de nombreux travaux ont été publiés sur le sujet en France et en Italie. M. Schatzmann [3] et A. Bamberger [4] ont étudié les mouvements des

cordes qui vibrent au-dessus d'un obstacle concave; le cas d'un obstacle convexe est beaucoup plus difficile à étudier et l'étude reste à faire. C. Citrini [5] a étudié les mouvements de deux cordes vibrantes qui peuvent se heurter. C. Reder [6] a considéré le cas d'une corde fixée à ses deux extrémités A et B, et vibrant dans un plan au-dessus d'un obstacle ponctuel fixe placé au milieu du segment AB; elle a mis en évidence des mouvements périodiques. L'objet du travail qui suit est de mettre en évidence d'autres mouvements périodiques. Dans ces mouvements, la corde est initialement au repos dans une position symétrique par rapport à la médiatrice du segment AB, position telle que l'élongation possède un minimum sur cette médiatrice et deux maximums égaux. Chaque fois que le rapport des élongations correspondant à ces extrémums est rationnel, nous prouvons que le mouvement est périodique et nous calculons la période. Le résultat est établi dans le dernier paragraphe, tandis que dans les paragraphes précédents sont rappelés ou démontrés certains résultats préliminaires, nécessaires pour la démonstration finale.

2. Équations du problème

La corde au repos est située sur le segment AB de l'axe des x , les points A et B ayant pour abscisses $\pm 1/2$; elle peut osciller dans un plan $x - u$, au-dessus d'un obstacle ponctuel fixe placé à l'origine. La fonction $u(x, t)$ (écart à l'équilibre) satisfait les conditions suivantes :

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

$$(2) \quad u(0, t) \geq 0,$$

$$(3) \quad u(\pm 1/2, t) = 0,$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u(x, 0) = \alpha(x), \quad \alpha\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0, \quad \alpha(0) \geq 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \beta(x), \quad \beta\left(\pm \frac{1}{2}\right) = 0. \end{array} \right.$$

Le contact de la corde avec l'obstacle qui correspond aux valeurs nulles de la fonction $u(0, t) = h(t)$, ne peut avoir lieu que pendant des intervalles de temps pour lesquels la réaction R de l'obstacle sur la corde est positive ou

nulle. En l'absence de contact, un élément de corde de longueur dx , de masse ρdx est soumis à la force $T dx$ due à la tension T du fil et on a :

$$(5) \quad T dx = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (\rho = \text{densité linéique}).$$

Au moment du contact, le voisinage du milieu de la corde est soumis à cette tension et à la réaction R de l'obstacle; on a alors :

$$(6) \quad R + \limite_{s \rightarrow 0} \int_{-s}^s \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx = 0,$$

$$(7) \quad R = -\rho \frac{\partial u}{\partial x}(0^+, t) + \rho \frac{\partial u}{\partial x}(0^-, t).$$

Les intervalles de temps $C_n \leq t \leq D_n$ pendant lesquels le contact a lieu, sont appelés intervalles d'interaction et leurs limites sont les instants de collage (C_n) et de décollage (D_n). En dehors des intervalles d'interaction, la corde est animée d'une oscillation libre $u = w^{t_0}(x, t)$; l'indice t_0 signifie qu'il s'agit de l'oscillation libre qui correspond aux données (position et vitesse) à l'instant t_0 . L'oscillation libre $w^0(x, t)$ qui correspond aux données initiales (4) s'obtient en prolongeant les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sur tout l'axe réel par les relations :

$$(8) \quad \alpha(1-x) = -\alpha(x), \quad \alpha(x+2) = \alpha(x),$$

$$(9) \quad \beta(1-x) = -\beta(x), \quad \beta(x+2) = \beta(x),$$

et en introduisant les variables caractéristiques $\xi = x+t$, $\eta = x-t$, on obtient :

$$(10) \quad 2w^0(x, t) = \alpha(\xi) + \alpha(\eta) + B(\xi) - B(\eta),$$

avec :

$$(11) \quad B(x) = \int_0^x \beta(x) dx.$$

Le mouvement de la corde est périodique, de période 2, et le mouvement du milieu de la corde est déterminé par la fonction :

$$(12) \quad w^0(0, t) = f^0(t) = \frac{\alpha(t) + \alpha(-t)}{2} + \frac{B(t) - B(-t)}{2}.$$

Des formules (8)-(10) on déduit, quel que soit t :

$$(13) \quad f^0(t-1) = -f^0(t),$$

donc :

$$(14) \quad f^0(t+2) = f^0(t).$$

Si les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont impaires, $f^0(t)$ est identiquement nul et la présence de l'obstacle ne modifie pas le mouvement de la corde; ce mouvement est périodique de période 1.

Si les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(x)$ sont paires, la fonction $f^0(t)$ est paire, tandis que la fonction $B(x)$ est impaire. Pour étudier le mouvement, il est alors commode d'introduire à côté de la fonction $w^0(x, t)$ la fonction $v^0(x, t)$ telle que :

$$(15) \quad 2v^0(x, t) = \alpha(\eta) - \alpha(\xi) - B(\eta) - B(\xi).$$

Considérées comme fonctions de x , la fonction w^0 est paire, la fonction v^0 est impaire. Lorsque la valeur $\alpha(0)$ est strictement positive, le mouvement initial de la corde est l'oscillation libre et on a :

$$(16) \quad w^0(0, t) = f^0(t) = \alpha(t) + B(t).$$

L'oscillation libre a lieu, pour le milieu de la corde jusqu'à l'instant C_0 qui est la plus petite valeur positive du temps pour laquelle $f^0(t)$ s'annule en changeant de signe, pour le reste de la corde dans le domaine $t \leq C_0 + |x|$ du plan $x-t$; ce domaine est limité par les caractéristiques issues du point $(0, C_0)$ (fig. 2). Au-delà de ces caractéristiques, la fonction $u(x, t)$ doit être solution de l'équation des ondes, continue sur les caractéristiques, nulle pour $x=0$; on obtient :

$$(17) \quad u(x, t) = -v^0(x, t) \operatorname{sgn} x.$$

Après l'instant $t=C_0$ la corde est en contact avec l'obstacle et ce contact demeure aussi longtemps que la réaction R demeure positive :

$$(18) \quad R = 2\rho \frac{\partial v^0}{\partial x}(0, t) = -2\rho \frac{df^0(t)}{dt}.$$

Au moment du contact, la fonction $f^0(t)$ est décroissante et sa dérivée est négative, donc le contact cesse à l'instant D_0 en lequel cette dérivée devient positive. Après l'instant D_0 le mouvement est une nouvelle oscillation libre, dont les différentes valeurs sont indiquées sur la figure 2, (1).

(1) Sur la figure 2, on a écrit v et w à la place de v^0 et de w^0 .

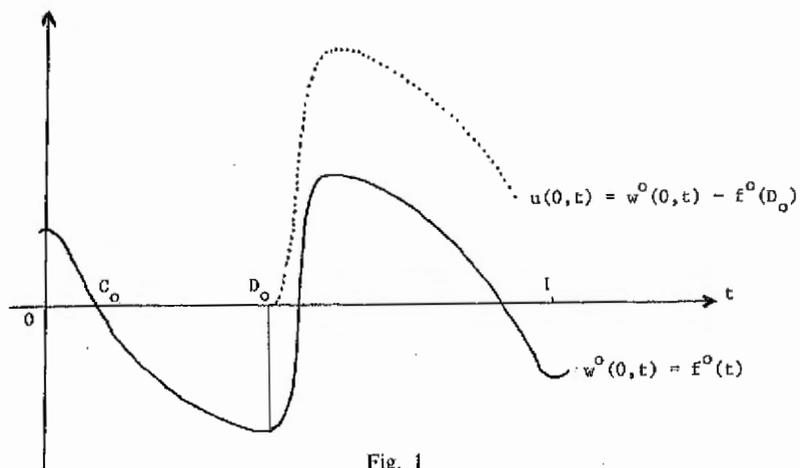


Fig. 1

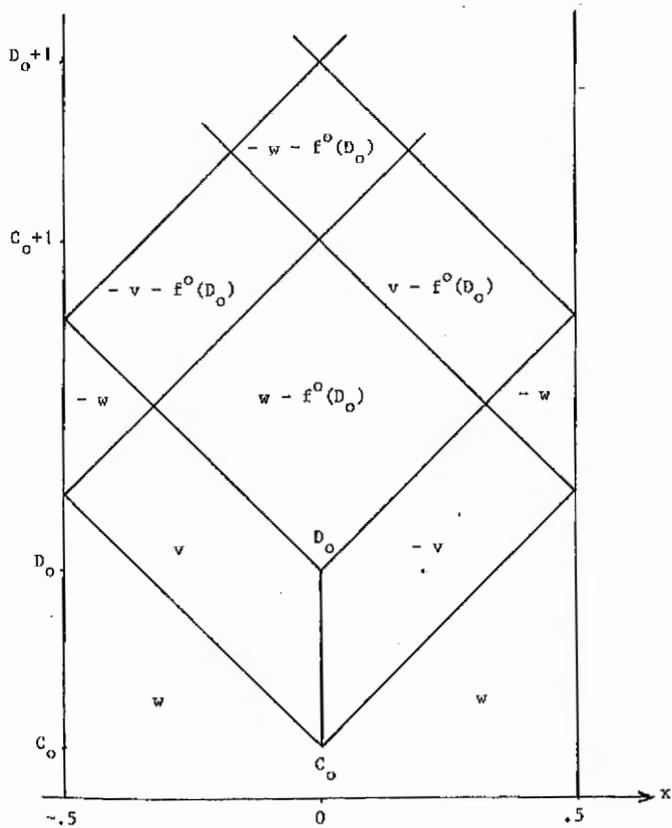


Fig. 2

Le mouvement du milieu de la corde dans cette oscillation libre est représenté sur la figure 1 en pointillé. En poursuivant le raisonnement, on peut déterminer le mouvement de la corde pour toutes les valeurs du temps.

Par opposition à l'oscillation libre, qui représente le mouvement de la corde en l'absence d'obstacle, nous appellerons « problème \mathcal{P} » le problème qui consiste à déterminer le mouvement de la corde en présence de l'obstacle. Le « problème \mathcal{P} » est défini par les équations (1) à (4). Nous indiquons certaines propriétés de la solution du problème \mathcal{P} , renvoyant à la thèse de C. Reder pour la démonstration.

THÉORÈME 1. — Si α_p et β_p sont deux données initiales paires, α_i et β_i deux données initiales impaires auxquelles correspondent respectivement les solutions u_p et u_i du problème \mathcal{P} , alors u_i est l'oscillation libre pour les données initiales α_i, β_i et $u_i + u_p$ est la solution du problème \mathcal{P} pour les données initiales $\alpha_i + \alpha_p, \beta_i + \beta_p$.

Ce premier théorème permet de simplifier la résolution du problème \mathcal{P} , en se limitant au cas des données initiales paires; la solution u_i est périodique de période 1. Une autre simplification peut être obtenue en effectuant un changement de variable. Une fonction $F(x)$, définie pour $-1/2 \leq x \leq 1/2$, et prolongée sur \mathbb{R} par la formule :

$$(19) \quad F(x+n) = F(x) + n \quad (n \text{ entier}),$$

définit un « changement de variable » si elle est impaire, continue et non décroissante. Naturellement on a $F(1/2) = 1/2$ et $F(-1/2) = -1/2$.

THÉORÈME 2. — Si $\tilde{u}(x, t)$ est la solution du problème \mathcal{P} pour les données initiales $\tilde{\alpha}(x), \tilde{\beta}(x)$, alors la solution du problème \mathcal{P} pour les données initiales :

$$(20) \quad \alpha(x) = \tilde{\alpha}(F(x)), \quad \beta(x) = \tilde{\beta}(F(x)) \cdot F'(x),$$

est :

$$(21) \quad u(x, t) = \tilde{u} \left[\frac{F(x+t) + F(x-t)}{2}, \frac{F(x+t) - F(x-t)}{2} \right].$$

On déduit des formules (19) et (21) que si N est un entier positif tel que $\tilde{u}(x, t)$ soit périodique en t de période N , alors $u(x, t)$ est périodique en t de période N .

THÉORÈME 3. — Les données initiales étant paires, pour que le mouvement de la corde soit périodique, il faut et il suffit que le mouvement du milieu de la corde soit périodique.

Pour démontrer ce résultat, nous considérons la solution libre après le décollage D_0 , telle qu'elle est exprimée sur la figure 2. Dans la région (R_1) , $D_0 \leq t \pm x \leq C_0 + 1$. On a :

$$(22) \quad w^{D_0}(x, t) = w^0(x, t) - f^0(D_0),$$

donc :

$$(23) \quad f^{D_0}(t) = w^{D_0}(0, t) = \alpha(t) + B(t) - f^0(D_0),$$

$$(24) \quad \begin{cases} f^{D_0}(x+t) = \alpha(x+t) + B(x+t) - f^0(D_0), \\ f^{D_0}(t-x) = \alpha(x-t) - B(x-t) - f^0(D_0), \end{cases}$$

$$(25) \quad w^{D_0}(x, t) = \frac{1}{2} \{ f^{D_0}(x+t) + f^{D_0}(t-x) \}.$$

Cette formule, encore valable dans la région $C_0 + 1 \leq t \pm x \leq D_0 + 1$, démontre le théorème.

3. Solutions périodiques

Nous allons étudier, dans cette section, les mouvements de la corde initialement au repos, dans la position :

$$(26) \quad u(x, 0) = \alpha(x) = \cos(2k+1)\pi x, \quad k \text{ entier } \geq 0.$$

THÉORÈME 4. — Avec les données initiales précédentes, la solution du problème \mathcal{P} est périodique, de période :

$$(27) \quad T = 1 + (2k+1) + \frac{1}{2k+1}.$$

La démonstration de ce théorème ⁽²⁾ peut être faite en introduisant la solution libre $w(x, t)$ et la solution associée $v(x, t)$; on a ici :

$$(28) \quad \begin{cases} w(x, t) = \cos(2k+1)\pi x \cdot \cos(2k+1)\pi t, \\ v(x, t) = \sin(2k+1)\pi x \cdot \sin(2k+1)\pi t. \end{cases}$$

Les raisonnements de la section précédente indiquent que le premier contact a lieu à l'instant $C_0 = \delta = 1/2(2k+1)$, le premier décollage à l'instant

⁽²⁾ C. Reder [5] en a donné une démonstration différente.

$D_0 = 2\delta$. On en déduit les expressions de la solution dans les diverses régions du plan $x-t$, limitées par les caractéristiques issues des points situés sur l'axe des temps et d'ordonnée :

$$\begin{cases} C_0 = \delta, \\ D_0 = 2\delta, \end{cases} \quad \begin{cases} E_n = n + \delta, & n = 1, 2, \dots, k, \\ C_n = n + 2\delta n, \\ D_n = n + 2\delta(n+1). \end{cases}$$

Sur la figure 3 sont indiquées les diverses régions du plan $x-t$, ainsi définies et pour chacune d'elle la valeur de la fonction $u(x, t)$; cette valeur s'exprime uniquement en fonction de v et w . On vérifie que les conditions de continuité sont remplies sur les caractéristiques frontières, ainsi que les conditions aux extrémités de la corde et les conditions sur l'obstacle. L'intervalle d'interaction $C_0 D_0$ a pour durée δ , les intervalles $C_n D_n$ ont pour durée 2δ ; les intervalles d'oscillation libre $D_{n-1} C_n$ ont pour durée 1. Le point E_{k+1} est le milieu du segment $D_k C_{k+1}$. Posant $E_{k+1} = T/2$, on a :

$$(29) \quad \begin{cases} u(x, T/2) = 1 + v \operatorname{sgn} x, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, T/2) = 0, \end{cases}$$

$$(30) \quad u(x, T) = u(x, T-t), \quad \text{pour } T/2 \leq t \leq T.$$

La solution est symétrique par rapport à la valeur $T/2$ et le mouvement est périodique de période $T = 2E_{k+1}$. Durant une période les intervalles d'interaction sont au nombre de $2k+2$, leur durée totale est 1. La réaction est une fonction continue du temps, sauf au début du premier contact et à la fin du dernier contact, où elle subit une discontinuité égale à $\pm 2\pi\rho(2k+1)$.

Ce résultat a des applications intéressantes; par exemple, une corde pincée, initialement au repos, vibre avec la période 3. Une corde pincée est une corde dont la position est constituée par deux segments de droite; la partie impaire vibre avec la période 1, et la partie paire peut par changement de variable être ramenée à $u(x, 0) = a \cos \pi x$, et le mouvement correspondant est périodique de période 3, période entière qui se conserve par changement de variable.

4. Mouvement du milieu de la corde

Les données initiales étant toujours supposées paires, il est possible de déterminer la fonction $h(t) = u(0, t)$ qui représente le mouvement du milieu de la corde sans qu'il soit nécessaire de connaître la fonction $u(x, t)$.

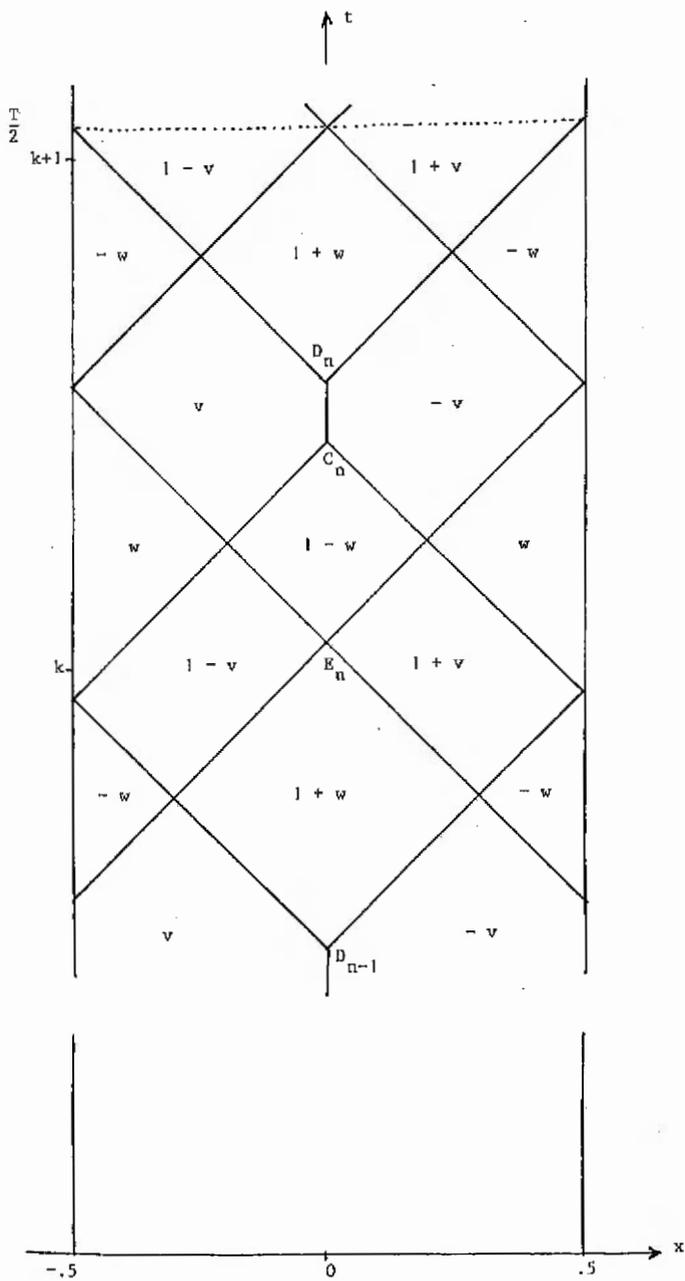


Fig. 3

Dans ce but à toute solution $u(x, t)$ du problème \mathcal{P} , et à tout instant positif t_0 , nous associons l'oscillation libre $w^{t_0}(x, t)$ qui correspond aux données suivantes :

$$(31) \quad w^{t_0}(x, t_0) = u(x, t_0), \quad \frac{\partial w^{t_0}}{\partial t}(x, t_0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t_0).$$

On pose ensuite :

$$(32) \quad f^{t_0}(t) = w^{t_0}(0, t).$$

Si t_1 est un instant postérieur à t_0 , et tel que pour $t_0 \leq t \leq t_1$ on ait $f^{t_0}(t) \geq 0$, alors $w^{t_1}(x, t) \equiv w^{t_0}(x, t)$ et en particulier $f^{t_1}(t) = f^{t_0}(t)$. Reprenant les résultats de la section 2 (fig. 2), on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME 5. — *Le début et la fin d'un intervalle d'interaction étant désignés par C_n et D_n , on a :*

$$(33) \quad \begin{cases} f^{D_n}(t) = f^{C_n}(t) - f^{C_n}(D_n), & \text{pour } D_n \leq t < C_n + 1, \\ f^{D_n}(t) = -f^{C_n}(t) - f^{C_n}(D_n), & \text{pour } C_n + 1 \leq t \leq D_n + 1. \end{cases}$$

La relation (13) permet alors de déterminer la fonction $f^{D_n}(t)$ pour toutes les valeurs du temps $t \geq D_n$.

Tant que $f^{D_n}(t)$ est positif le mouvement est une oscillation libre et on a :

$$(34) \quad u(x, t) = w^{D_n}(x, t), \quad h(t) = u(0, t) = f^{D_n}(t).$$

Lorsque $f^{D_n}(t)$ s'annule en devenant négatif il y a un nouveau contact, qui se termine lorsque df^{D_n}/dt s'annule en devenant positif; on retrouve alors une oscillation libre (fig. 2).

Il est intéressant d'appliquer les résultats qui précèdent au cas où la fonction $f^{D_n}(t)$, nulle pour $t = D_n$ et $t = D_n + 1$, possède dans l'intervalle $D_n \leq t \leq D_n + 1$, d'abord un maximum M_1 , puis un minimum m , enfin un second maximum M_2 (fig. 4 et 5). On suppose que les dérivées sont toutes égales en valeur absolue, cette valeur absolue est alors $k = 2(M_1 - m + M_2)$ et on a :

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} f^{D_n}(t) = k(t - D_n), \quad \text{pour } 0 \leq k(t - D_n) \leq M_1, \\ f^{D_n}(t) = -k(t - D_n) + 2M_1, \quad \text{pour } M_1 \leq k(t - D_n) \leq 2M_1 - m, \\ f^{D_n}(t) = k(t - D_n) - 2M_1 + 2m, \\ \text{pour } 2M_1 - m \leq k(t - D_n) \leq 2M_1 - 2m + M_2, \\ f^{D_n}(t) = -k(t - D_n) + 2M_1 - 2m + 2M_2, \\ \text{pour } 2M_1 - 2m + M_2 \leq k(t - D_n) \leq 2M_1 - 2m + 2M_2 = k. \end{array} \right.$$

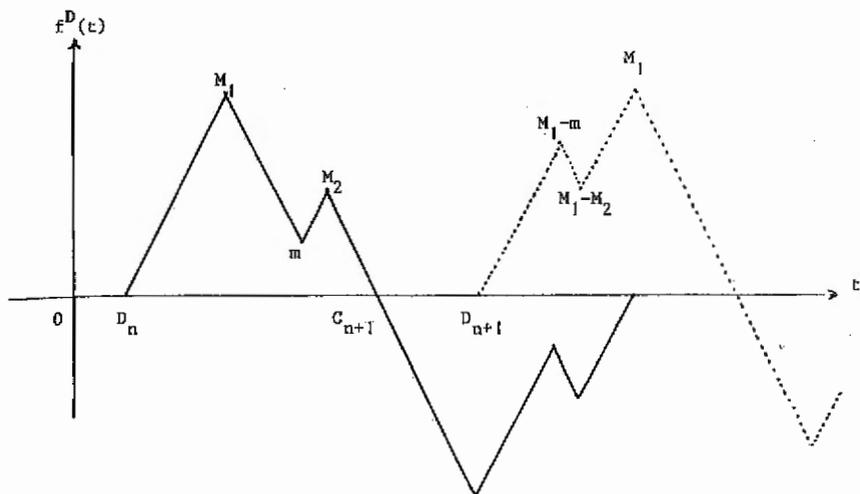


Fig. 4

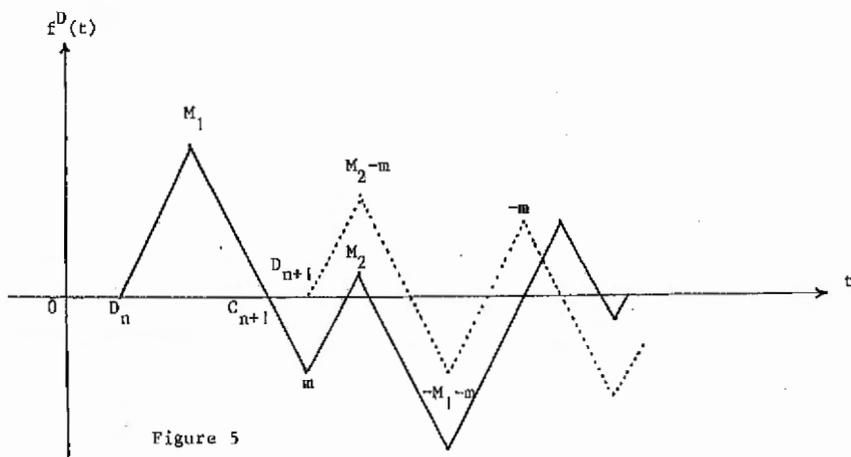


Figure 5

— $f_n^D(t)$

..... $f_{n+1}^D(t)$

La suite (M_1, m, M_2) sera appelée schéma de f^{D_n} . La fonction $f^{D_n}(t)$ correspond à une certaine oscillation libre $w^{D_n}(x, t)$; l'instant du premier contact après $t=D_n$ est :

$$(36) \quad \begin{cases} t=C_{n+1}=D_n+1, & \text{si } m \geq 0, \\ t=C_{n+1}=D_n+2 \frac{M_1}{k}, & \text{si } m < 0, \end{cases}$$

et l'instant du décollage correspond :

$$(37) \quad \begin{cases} t=D_{n+1}=C_{n+1}+\frac{M_1}{k}, & \text{si } m \geq 0, \\ t=D_{n+1}=C_{n+1}-\frac{m}{k}, & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

L'intervalle de temps qui sépare deux décollages consécutifs est :

$$(38) \quad \begin{cases} D_n D_{n+1} = 1 + \frac{M_1}{k}, & \text{si } m \geq 0, \\ D_n D_{n+1} = \frac{2M_1 - m}{k}, & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

Comme $f^{C_{n+1}} = f^{D_n}$ les formules (29) conduisent au résultat suivant :

THÉORÈME 6. — *Le schéma de f^{D_n} étant (M_1^n, m^n, M_2^n) , le schéma de $f^{D_{n+1}}$ est :*

$$(39) \quad \begin{cases} (M_1^n - m^n, M_1^n - M_2^n, M_1^n), & \text{si } m \geq 0, \\ (M_2^n - m^n, -M_1^n - m^n, -m^n), & \text{si } m < 0. \end{cases}$$

Toutes les fonctions $f^{D_n}(t)$ sont des fonctions affines de pente $\pm k$; donc si f^{D_n} et f^{D_0} ont le même schéma, les fonctions $f^{D_0}(t)$ et $f^{D_n}(t)$ sont égales, et le mouvement est périodique d'après le théorème 3.

5. Nouvelles solutions périodiques

Nous supposons dans cette section que la corde est initialement au repos dans une position $u(x, 0) = \alpha(x)$, fonction paire ayant un maximum M ($0 \leq M \leq 1$) pour $x=0$ et deux minimums égaux à -1 (fig. 6) ⁽³⁾. Lorsque $M=1$, on peut, par changement de variable, se remanier au cas $u(x, 0) = \cos 3\pi x$, ce qui prouve que le mouvement est périodique de période

⁽³⁾ Dans le résumé et dans l'introduction, l'élongation est prise en valeur absolue, ici en valeur algébrique.

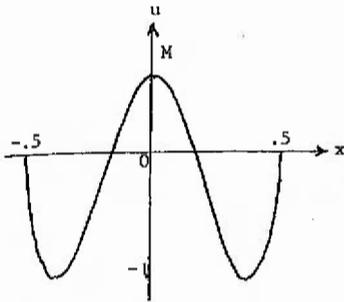


Fig. 6

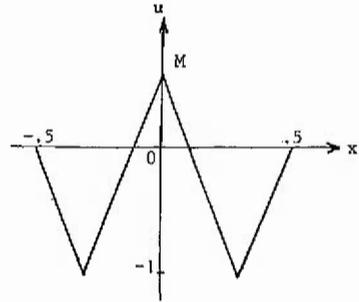


Fig. 7

13. Dans tous les cas on peut se ramener au cas où $u(x, 0)$ est une fonction affine par morceaux (fig. 7). On peut toujours choisir le changement de variable de façon que les minimums soient atteints pour :

$$(40) \quad x = \pm \delta = \pm \frac{M+1}{2(M+2)},$$

les quatre segments de droite ont alors pour pente $\pm k = \pm 2(M+2)$. Nous allons démontrer que lorsque M est rationnel : $M = p/q$ (p et q entiers), le mouvement est périodique de période :

$$(41) \quad T_{pq} = 12q^2 + 3pq - 2p^2.$$

Nous démontrons le résultat en utilisant les résultats de la section 2. Le premier contact a bien lieu à l'instant $C_0 = M/k$ et le premier décollage à l'instant $D_0 = (M+1)/k$. Le schéma de la fonction $f^{D_0}(t)$ est de la forme (M_1, m, M_2) avec $M_1 = 2$, $M_2 = 1$, $m = 1 - M$, les schémas successifs de f^{D_n} sont :

$$\begin{aligned} & f^{D_0}(2, 1-M, 1), \quad f^{D_1}(1+M, 1, 2), \\ & f^{D_2}(M, M-1, M+1), \quad f^{D_3}(2, 1-2M, 1-M), \\ & f^{D_4} \begin{cases} (1+2M, 1+M, 2), & \text{si } 1-2M \geq 0, \\ (M, 2M-3, 2M-1), & \text{si } 1-2M < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Les éléments M_1^n , m^n , M_2^n sont des fonctions de la forme $\lambda M + \mu$, λ et μ désignant des entiers; D'après le théorème 6, s'il en est ainsi pour f^{D_n} , il en est de même pour $f^{D_{n+1}}$.

Ces coefficients sont bornés par 2 en valeur absolue. Supposons en effet que l'on ait, ce qui est vérifié pour $n=0$:

$$(42) \quad M \leq M_1^n \leq 2, \quad \text{et} \quad 0 < M_2^n \leq 2.$$

On a toujours quel que soit n :

$$(43) \quad M_1^n + M_2^n - m^n = M + 2.$$

Deux cas sont possibles :

– ou bien $m^n \geq 0$, et :

$$M_1^{n+1} = M_1^n - m^n = 2 + M - M_2^n, \quad M_2^{n+1} = M_1^n,$$

– ou bien $m^n < 0$, et :

$$M_1^{n+1} = M_2^n - m^n = 2 + M - M_1^n, \quad M_2^{n+1} = -m^n = 2 + M - M_1^n - M_2^n,$$

dans les deux cas les formules (42) sont vérifiées pour $n+1$. Les coefficients M_1^n et M_2^n ne peuvent donc prendre qu'un nombre fini de valeurs dès que M est rationnel.

Comme la durée $D_n D_{n+1}$ est au plus égale à 2, on retombera au bout d'un temps fini sur un schéma f^{D_n} égal au schéma de f^{D_0} ; d'après les formules (31) on aura alors $f^{D_n}(t) = f^{D_0}(t)$, ce qui prouve la périodicité du mouvement de la corde.

Pour calculer la valeur de la période, nous considérons pour commencer le cas $p=1$, soit $M=1/q$. Le tableau suivant indique les schémas successifs des fonctions $f^{D_i}(t)$, ainsi que la durée des intervalles $D_i D_{i+1}$. La variable entière s varie de 0 à $q-2$ et la variable entière σ de q à $2q-2$.

i	M_i^i	m^i	M_2^i	$D_i D_{i+1}$
$3s$	2	$1 - (s+1)M > 0$	$1 - sM$	$\left. \begin{array}{l} 1 + (2/k) \\ 1 + [(s+1)M + 1]/k \\ [1 - (s-1)M]/k \end{array} \right\} 3$
$3s+1$	$1 + (s+1)M$	$1 + sM > 0$	2	
$3s+2$	M	$(s+1)M - 1 < 0$	$1 + (s+1)M$	
$3q-3$	2	0	M	$\left. \begin{array}{l} 1 + (2/k) \\ 1 + (2/k) \end{array} \right\}$
$3q-2$	2	$2 - M$	2	
$3q-1$	M	0	2	$\left. \begin{array}{l} 1 + (M/k) \\ [3 - (\sigma-1)M]/k \\ 1 + (2/k) \end{array} \right\} 3 + (M/k)$
3σ	M	$(\sigma+1)M - 3 < 0$	$(\sigma+1)M - 1$	
$3\sigma+1$	2	$3 - (\sigma+2)M > 0$	$3 - (\sigma+1)M$	
$3\sigma+2$	$(\sigma+2)M - 1$	$(\sigma+1)M - 1 > 0$	2	$\left. \begin{array}{l} 1 + [(\sigma+2)M - 1]/k \\ (2M+1)/k \end{array} \right\}$
$6q-3$	M	-1	1	
$6q-2$	2	$1 - M$	1	$1 + (2/k)$

On constate que $f^{D_0}(t)$ et $f^{D_0}(t)$ ont le même schéma pour $n=6q-2$; il en résulte que le mouvement est périodique de période $T=D_0 D_{6q-2}$.

Soit :

$$(44) \quad T = D_0 D_{6q-2} = 3(q-1) + 4 - \frac{M}{k} + \left(3 + \frac{M}{k}\right)(q-1) + \frac{2M+1}{k},$$

$$(45) \quad T = \frac{12q^2 + 3q - 2}{2q + 1}.$$

Dans le cas général $M = p/q$, p et q étant deux entiers premiers entre eux, il y a lieu de faire deux démonstrations suivant la parité du numérateur. Désignant par n un entier, nous posons :

$$(46) \quad E_n = \text{partie entière de } \frac{n}{M},$$

donc $E_p = q$. Nous désignons par :

- s_0 un indice qui varie de 0 à $E_1 - 2$;
- s_j ($j \geq 1$) un indice qui varie de E_{2j-1} à $E_{2j+1} - 2$.

On a :

$$(47) \quad \begin{cases} ME_n - n < 0, & \text{si } n \neq p, \\ ME_p - n = 0, & \text{si } n = p. \end{cases}$$

(i) Nous supposons d'abord que p est impair, et nous posons :

$$(48) \quad m = 3(E_p - 2) + 4 - \frac{p-1}{2} = 3q - 2 - \frac{p-1}{2},$$

l	M_1^l	m^l	M_2^l
0	2	$1 - M > 0$	1
1	$1 + M$	$1 > 0$	2
$3s_j + 2 - j$	M	$(1 + s_j)M - (2j + 1) < 0$	$(1 + s_j)M - (2j - 1)$
$3s_j + 3 - j$	2	$(2j + 1) - (2 + s_j)M > 0$	$(2j + 1) - (1 + s_j)M$
$3s_j + 4 - j$	$(s_j + 2)M + 1 - 2j$	$(1 + s_j)M - (2j - 1) > 0$	2
$3E_{2j+1} - 1 - j$	M	$E_{2j+1}M - (2j + 1) < 0$	$E_{2j+1}M - (2j - 1)$
$3E_{2j+1} - j$	2	$(2j + 1) - (1 + E_{2j+1})M < 0$	$(2j + 1) - E_{2j+1}M$
$3\sigma + 2 - ((p-1)/2)$	M	$(1 + \sigma)M - p < 0$	$(1 + \sigma)M + 2 - p$
$3\sigma + 3 - ((p-1)/2)$	2	$p - (\sigma + 2)M > 0$	$p - (1 + \sigma)M$
$3\sigma + 4 - ((p-1)/2)$	$(\sigma + 2)M + 2 - p$	$(1 + \sigma)M + 2 - p > 0$	2
$3(E_p - 2) + 2 - ((p-1)/2)$	M	$-M < 0$	$2 - M$
$3(E_p - 2) + 3 - ((p-1)/2)$	2	0	M
$3(E_p - 2) + 4 - ((p-1)/2)$	2	$2 - M > 0$	2

lorsque l'indice i varie de 0 à m , les schémas de f^{D_i} sont indiqués dans le tableau précédent, dans lequel les indices j , s_j , et σ varient dans les limites indiquées :

$$\begin{aligned} 0 \leq j \leq \frac{p-3}{2}, \quad 0 \leq s_0 \leq E_1, \\ E_{2j-1} \leq s_j \leq E_{2j+1} - 2, \quad \text{pour } j > 0, \\ E_{p-2} \leq \sigma \leq E_p - 3. \end{aligned}$$

Le schéma de f^{D_m} est $(2, 2-M, 2)$; ce schéma est symétrique, donc le temps correspondant au minimum $2-M$, est égal à la moitié de la période T :

$$(49) \quad T = 2 D_{m+1}.$$

Des formules (38), donnant la longueur des intervalles $D_i D_{i+1}$, on déduit :

$$(50) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_2 = 3, \\ D_\alpha D_{\alpha+3} = 3 + \frac{M}{k}, \quad \text{pour } \alpha = 3s_j + 2 - j, \\ D_\beta D_{\beta+2} = 1 + \frac{p}{k}, \quad \text{pour } \beta = 3E_{2j+1} - 1 - j, \\ D_{m-2} D_m = 1 + \frac{3M+2}{k}. \end{array} \right.$$

Les intervalles du type $D_\alpha D_{\alpha+3}$ sont au nombre de N_α , ceux du type $D_\beta D_{\beta+2}$ au nombre de N_β :

$$(51) \quad \left\{ \begin{array}{l} N_\alpha = (E_1 - 1) + (E_3 - 1 - E_1) + \dots + (E_p - 2 - E_{p-2}), \\ N_\alpha = q - 2 - \frac{p-1}{2}, \end{array} \right.$$

$$(52) \quad N_\beta = \frac{p-1}{2}.$$

On en déduit :

$$(53) \quad D_m = 3 + \left(3 + \frac{M}{k}\right) N_\alpha + \left(1 + \frac{M}{k}\right) N_\beta + 1 + \frac{3M+2}{k},$$

$$(54) \quad T = \frac{12q^2 + 3pq - 2p^2}{2q + p}.$$

(ii) Nous supposons ensuite que p est pair, et nous posons $m' = 3q - (p/2)$

Le tableau précédent est valable jusqu'à la ligne $i = 3 E_{2j+1} - j$, et cela quel que soit j . Comme on a :

$$(55) \quad E_{p-1} \leq q-1 \leq E_{p+1} - 2,$$

$s_j = q-1$ correspond à $j = p/2$. On déduit alors du tableau précédent que le schéma de $f^{D_{m+1}}$ est $(2, 1-M, 1)$ égal au schéma de f^{D_0} , ce qui prouve que la période T a pour valeur :

$$(56) \quad T = D_0 D_{m'};$$

les formules (50) sont encore valables, mais les nombres N_α et N_β des intervalles $D_\alpha D_{\alpha+3}$ et $D_\beta D_{\beta+2}$ sont ici :

$$(57) \quad \left\{ \begin{array}{l} N'_\alpha = (E_1 - 1) + (E_3 - 1 - E_1) + \dots + (E_{p-1} - 2 - E_{p-3}), \\ N'_\alpha = E_{p-1} - \frac{p}{2}, \end{array} \right.$$

$$(58) \quad N'_\beta = \frac{p}{2}.$$

Il y a en outre $q-1 - E_{p-1}$ intervalles du type $D_\alpha D_{\alpha+3}$ correspondant à $s_j > E_{p-1}$. On a enfin :

$$(59) \quad \left\{ \begin{array}{l} D_0 D_2 = 2 + \frac{M+3}{k}, \\ D_{m'-1} D_{m'} = 1 + \frac{M}{k}. \end{array} \right.$$

On déduit de toutes ces formules :

$$(60) \quad T = D_0 D_{m'} = \frac{1}{2} \frac{12q^2 + 3pq - 2p^2}{2q+p}.$$

Ainsi la période est donnée soit par la formule (54) soit par la formule (60) suivant la parité du numérateur p .

Lorsqu'on passe du cas de la figure 7 au cas de la figure 6, il y a conservation des périodes entières; la période est donc égale au numérateur $12q^2 + 3pq - 2p^2$. Par exemple pour $M = 1/2$, la période est $T = 52$. Lorsque le nombre M est irrationnel, le mouvement n'est pas périodique puisque le tableau de la page 21 étant toujours valable, on y constate que M_{2i} , pour $i \neq 0$, ne peut jamais être égale à 1, puisque j et s_j sont des entiers.

6. Conclusion

Les problèmes posés par l'acoustique musicale se présentent comme l'étude de cordes vibrantes en présence d'obstacles; les doigts par exemple constituent un obstacle dans le cas d'une guitare. Même si la modélisation utilisée ici est dérisoire par rapport à la complexité des problèmes réels, on ne peut en conclure qu'elle soit mauvaise ou inutile. Par ailleurs, les problèmes mathématiques introduits sont nombreux et intéressants; la recherche des mouvements périodiques et leur étude est loin d'être achevée, et l'article qui précède constitue un premier travail dans cette direction.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D'ALEMBERT J., *Opuscules mathématiques*, David, Paris, 1761.
- [2] AMERIO L. ET PROUSE G., *Study of the Motion of a String Vibrating Against an Obstacle* (*Rendiconti di Matematica*, vol. 8, 1975, pp. 563-585).
- [3] SCHATZMANN M., *An Hyperbolic Problem of Second Order with Unilateral Constraints: the Vibrating String with a Concave Obstacle*, Publ. Université Paris-VI, n° 78031.
- [4] BAMBERGER A., *Thèse de doctorat*, Université Paris-VI, 1979.
- [5] CITRINI C. et D'ACUNTO B., *Sur le choc de deux cordes* (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 209, série A, 1979, pp. 5-7).
- [6] REDER, C., *Étude qualitative d'un problème hyperbolique avec contrainte unilatérale* (*Thèse de 3° cycle*, Université de Bordeaux 1979).