



Quaternions, orientation et mouvement

Florian Monteghetti

► To cite this version:

Florian Monteghetti. Quaternions, orientation et mouvement. [Rapport de recherche] ISAE-SUPAERO. 2012. hal-01618257

HAL Id: hal-01618257

<https://hal.science/hal-01618257>

Submitted on 17 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Quaternions, orientation et mouvement

Monteghetti Florian

11 février 2012

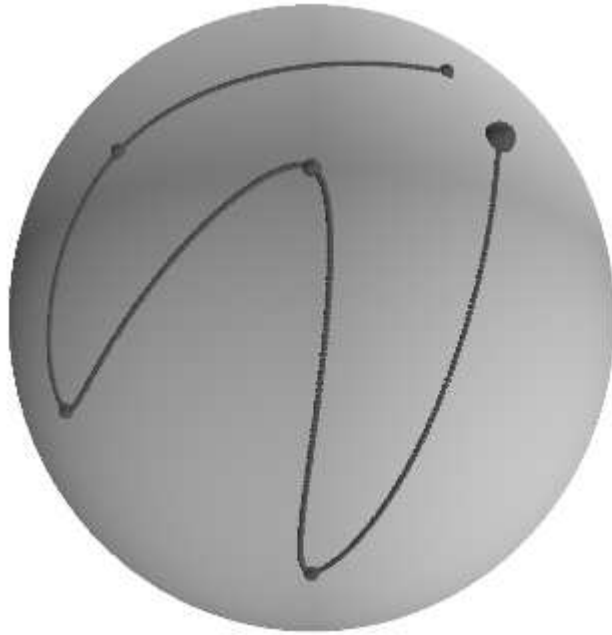


Table des matières

I	Présentation du sujet	4
II	Plan de l'exposé	4
1	Qu'est-ce qu'un quaternion ?	4
1.1	Construction et notations des quaternions.	5
1.1.1	Structure de corps sur \mathbb{H}	5
1.1.2	Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel sur \mathbb{H}	5
1.1.3	Structure euclidienne de \mathbb{H}	6
1.1.4	Notations matricielles d'un quaternion	6
1.1.5	Notations vectorielles	7
1.1.6	Notation exponentielle	7
1.1.7	Logarithme	9
1.2	Action de Conjugaison	9
1.2.1	Définition de l'action par conjugaison.	9
1.2.2	Lien pratique entre quaternion et rotation.	10
1.2.3	Démonstration.	10
1.3	Aspect topologique du lien entre quaternions et rotations.	11
1.3.1	Définitions	11
1.3.2	Ensembles en jeu	11
1.3.3	Revêtement de $SO(3)$	12
1.4	Une autre vision des Quaternions	13
2	Les méthodes d'orientation dans l'espace.	13
2.1	Lien orientation-rotation : Théorème d'Euler	13
2.2	Paramétrage de l'orientation d'une base par rapport à une base de référence.	14
2.2.1	Angles d'Euler (ou de Cardan, de Bryant)	14
2.2.2	Quaternion d'orientation	15
2.2.3	Utilisation directe des matrices	15
2.2.4	Relations matricielles ou quaternioniques pour passer d'un repère à un autre.	15
2.2.5	Lien Quaternion - Angles D'Euler	15
2.2.6	Avantages et désavantages de chaque méthode.	16
2.2.7	Les 3 méthode sur un exemple.	17
3	Utilisation des Quaternions pour résoudre le problème de l'attitude d'un satellite.	17
3.1	Mise en situation, notations.	18
3.2	Changements de bases	18
3.2.1	Changement de bases avec matrice de rotation.	18
3.2.2	Changement de bases avec le quaternion d'orientation	18
3.2.3	Quaternion d'orientation et changement de bases	18
3.2.4	Vecteur rotations et changement de bases	19
3.3	Lien entre le vecteur rotation d'un solide et son quaternion d'orientation.	19
3.3.1	Relation	19
3.3.2	Utilisation	20
3.3.3	Démonstration 1	21
3.3.4	Démonstration 2	21
3.4	Vérification sur un exemple simple.	23
3.5	Equations d'attitude d'un satellite.	24
3.5.1	Quaternion d'orientation	24
3.5.2	Théorème du moment dynamique	25
3.5.3	Nature des couples extérieures	25

4	Utilisation des Quaternions dans l'interpolation de rotations.	25
4.1	Principe général de l'interpolation de rotation, rôle des quaternions.	26
4.2	Aspect mathématique	26
4.3	Déroulement pratique d'une interpolation entre 2 rotations	26
4.3.1	Positions extrêmes	26
4.3.2	Evaluation de la performance d'une formule d'interpolation	26
4.3.3	Premier exemple simple	27
4.4	Les techniques inefficaces.	27
4.4.1	L'interpolation linéaire d'angles d'Euler.	27
4.4.2	L'interpolation linéaire de matrices orthogonales.	28
4.5	Interpolation par quaternion.	28
4.5.1	Test préliminaire	28
4.5.2	Interpolation linéaire	28
4.5.3	SLERP	28
4.6	Comparaison sur un exemple non-trivial	29
4.6.1	Position initiale	29
4.6.2	Position finale	29
4.6.3	Résultats	29
4.7	Interpolation entre plus de deux rotations	31
4.8	Animation d'un squelette («joints»)	31
III	Bibliographie	31
IV	Annexe A : Compléments mathématiques et physique.	32
V	Annexe B : Histoire de l'analyse vectorielle.	33
VI	Annexe C : Notions de base de topologie	35
VII	Annexe D : Le blocage de Cardan	38

Première partie

Présentation du sujet

Introduction et présentation générale du sujet Les Quaternions sont, de par leur place dans les structures algébriques, un ensemble assez célèbre. Néanmoins, malgré leur esthétique indéniable, et au grand dam de Hamilton, les Quaternions n'ont jamais été véritablement populaires. Au delà du rôle fondamental qu'ils ont joué dans la genèse de l'analyse vectorielle moderne, il y a une autre raison pour laquelle les quaternions devraient continuer à être étudiés : ils sont toujours utiles ! En effet, contrairement à ce que l'on pourrait croire, ils ne sont pas complètement tombés en désuétude, et ils ont aujourd'hui des applications très concrètes, en aéronautique/aérospatial, et dans le domaine de la 3D. L'objectif de ce TIPE n'est cependant pas de présenter les Quaternions comme solution ultime : ils seront comparés aux autres méthodes existantes dans l'optique de résoudre des problèmes concrets.

Les problèmes traités seront des problèmes liés à l'espace : l'orientation d'un corps et l'interpolation d'un mouvement connaissant deux positions extrêmes.

Problématique Quels peuvent être les apports de l'utilisation de nombres hypercomplexes tels les Quaternions dans le paramétrage et la résolution de problèmes Spatiaux ?¹

Démarche J'ai d'abord commencé par me documenter sur les Quaternions, pour me familiariser aussi bien avec leur calcul qu'avec leur histoire. Une fois le lien Quaternion-Rotation compris, j'ai cherché des applications concrètes avec un double souci :

- Apporter des solutions simples et naturelles aux problèmes posés : l'optique étant bien d'apporter une réponse à un problème, il ne s'agit pas d'utiliser les Quaternions « coûte-que-coûte », mais bien de les comparer avec les autres méthodes existantes.
- Respecter la rigueur mathématique, c'est à dire ne pas utiliser de méthode floue ou sans fondements.

Ce lien entre les quaternions et les rotations m'a mené à considérer deux problèmes concrets :

- La détermination de l'évolution de l'orientation d'un corps, qui répond par exemple, en aérospatial, à la problématique du calcul de l'attitude d'un satellite. Le résultat fondamental est le lien entre le vecteur rotation et le quaternion d'orientation d'un corps.
- L'interpolation des rotations, utile dans le domaine de la 3D, où l'on a besoin, connaissant les positions extrêmes d'un corps (généralement la position initiale et la position finale), de déterminer une « bonne » trajectoire liant ces deux positions, la définition de « bonne » étant le cœur du problème : les Quaternions vont y apporter des réponses.

Conclusion Les Quaternions apportent donc des solutions efficaces pour les deux problèmes évoqués. Néanmoins, il serait erroné de rejeter les méthodes matricielles qui ont l'avantage d'être mieux connues et donc souvent implémentées de façon quasi-systématique. Il ne faut également pas perdre de vue que le problème de l'orientation d'un corps prend place, en pratique, dans des problématiques plus larges, n'étant qu'un aspect d'un projet plus complexe² : le choix d'une méthode sera donc en pratique soumis à des contraintes techniques³, mais également, forcément, économiques.

Deuxième partie

Plan de l'exposé

1 Qu'est-ce qu'un quaternion ?

L'objectif de cette partie est de définir le corps des quaternions⁴ (qui peut être construit de plusieurs manières). La multiplication des quaternions est écrite en fonction du produit scalaire et du produit vectoriel tel que nous l'utilisons aujourd'hui. On présente l'action de conjugaison, primordiale pour les applications pratique.

¹Problèmes spatiaux au sens large : problèmes ayant lien avec l'espace.

²C'est à dire qui n'admet pas de solution unique.

³Quelles informations peut-on avoir sur le système ? On rentre ici dans le domaine des capteurs.

⁴Cette partie ne sera pas aussi détaillée à l'oral, seul les résultats essentiels seront présentés.

1.1 Construction et notations des quaternions.

Il existe de nombreuses façons de construire les quaternions, on part ici de la définition d'un quaternion comme quadruplet réel et l'on fait le lien avec les autres notations.

1.1.1 Structure de corps sur \mathbb{H}

Soient (a, b, c, d) et (a', b', c', d') deux éléments de \mathbb{R}^4 .

On définit l'addition et la multiplication sur \mathbb{R}^4 de la façon suivante :

$$(a, b, c, d) +_{\mathbb{R}^4} (a', b', c', d') = (a + a', b + b', c + c', d + d')$$

$$(a, b, c, d) \times_{\mathbb{R}^4} (a', b', c', d') = (aa' - bb' - cc' - dd', ab' + ba' + cd' - dc', ac' + ca' - bd' + db', da' + ad' + bc' - cb')$$

On vérifie qu'alors $(\mathbb{H} = \mathbb{R}^4, +_{\mathbb{R}^4}, \times_{\mathbb{R}^4})$ est un corps non-commutatif.⁵

Propriétés utiles Ces propriétés servent surtout pour le calcul dans \mathbb{H} .

- Les seuls éléments qui commutent avec tous les autres sont les réels⁶.

$$\forall (p, \lambda) \in (\mathbb{H} \setminus \mathbb{C}) \times \mathbb{C}, \quad p \times \lambda = \bar{\lambda} \times p$$

- $\forall q \in (\mathbb{H} \setminus \mathbb{R}) : \|q\|_2 = 1_{\mathbb{R}} \implies q^2 = -1_{\mathbb{H}}$ (propriété simple et fondamentale des quaternions purs unitaires)
- Quaternions orthogonaux :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{H}^2, \langle p, q \rangle = 0_{\mathbb{R}} \implies \exists \Psi \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}^* : p = q \times_{\mathbb{H}} \Psi$$

Si un des deux quaternions est nuls, on prend bien sur $\Psi = 0_{\mathbb{H}}$

Si $(p, q) \in (\mathbb{H}^*)^2$, on utilise la définition du produit scalaire (cf. section 1.1.3)

$$\begin{aligned} \langle p, q \rangle = 0_{\mathbb{R}} &\implies \bar{p} \times_{\mathbb{H}} q + \bar{q} \times_{\mathbb{H}} p = 0_{\mathbb{H}} \\ \bar{p} \times_{\mathbb{H}} q &= -\bar{q} \times_{\mathbb{H}} p \\ \overline{\bar{p} \times_{\mathbb{H}} q} &= -\bar{q} \times_{\mathbb{H}} p \\ \overline{\bar{q} \times_{\mathbb{H}} p} &= -\bar{q} \times_{\mathbb{H}} p \end{aligned}$$

Par conséquent, puisqu'opposé à son conjugué, $\bar{q} \times_{\mathbb{H}} p \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$, donc $\exists \Theta \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} : \bar{q} \times_{\mathbb{H}} p = \Theta$. En composant par $\frac{q}{\|q\|_2^2}$ à gauche, on obtient la propriété annoncée.

1.1.2 Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel sur \mathbb{H}

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} et la loi externe définie par : $\mathbb{K} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, (\alpha, q) \mapsto \alpha.q = \alpha \times_{\mathbb{H}} q$

Les critères du \mathbb{K} -espace vectoriel sont alors vérifiés de façon évidente, puisque :

- $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps commutatif
- $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}})$ est un groupe abélien
- Les 4 critères de la loi externe sont automatiquement vérifiés puisque $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}})$ est un corps et que la loi externe est la restriction du produit sur $\mathbb{H} \times \mathbb{H}$ à $\mathbb{K} \times \mathbb{H}$.

On a alors les bases suivantes selon le choix du corps de base :

- $((1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ est une base du \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \cdot)$, que l'on note usuellement, par analogie avec \mathbb{C} , $(1, i, j, k)$. On écrit alors⁷ :
- $((1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 0)) = (1, j)$ est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \cdot)$. On écrit⁸

⁵Un tel corps est parfois appelé *corps gauche*.

⁶On dit aussi que le *centre* de \mathbb{H} est \mathbb{R}

⁷On peut écrire indifféremment $b.i$ ou $i.b$ puisque \mathbb{R} est le centre de $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}})$.

⁸Ici, on ne peut pas écrire indifféremment $\lambda.i$ ou $i.\lambda$, du fait de la non-commutativité de \mathbb{H} . Il faut donc respecter l'ordre choisi pour la loi externe : $(\alpha, q) \mapsto \alpha.q = \alpha \times_{\mathbb{H}} q$ ou $(\alpha, q) \mapsto \alpha.q = q \times_{\mathbb{H}} \alpha$

$$\begin{aligned}
\forall (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, (a, b, c, d) &= (a, b, 0, 0) \times_{\mathbb{H}} (1, 0, 0, 0) +_{\mathbb{H}} (c, d, 0, 0) \times_{\mathbb{H}} (0, 0, 1, 0) \\
&= (a + b.i).1 + (c + d.i).j \\
&= \lambda.1 + \mu.j \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2
\end{aligned}$$

On peut manipuler les quaternions dans $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}})$ directement à partir de leur expression dans $(1, i, j, k)$ ou dans $(1, j)$ avec les relations :

$$\begin{cases} i \times_{\mathbb{H}} j = -j \times_{\mathbb{H}} i = k & j \times_{\mathbb{H}} k = -k \times_{\mathbb{H}} j = i & k \times_{\mathbb{H}} i = -i \times_{\mathbb{H}} k = j \\ i^2 = j^2 = k^2 = -1_{\mathbb{R}} \end{cases}$$

1.1.3 Structure euclidienne de \mathbb{H}

On se place dans la \mathbb{R} -algèbre $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \cdot, \times_{\mathbb{H}})$.

On muni sans surprise \mathbb{H} de la structure euclidienne canonique de \mathbb{R}^4 :

Conjugaison : Si $q = (a, b, c, d)$, son conjugué est $\bar{q} = (a, -b, -c, -d)$ On a les propriétés suivantes⁹¹⁰ :

$$\begin{aligned}
\forall (p, q) \in \mathbb{H}^2, \quad \overline{p \times q} &= \bar{q} \times \bar{p} \\
\forall q \in \mathbb{H}, \quad q \times \bar{q} &= \bar{q} \times q \\
\forall q \in \mathbb{H}^*, q^{-1} &= \frac{\bar{q}}{\|q\|_2^2} = \frac{a - b.i - c.j - d.k}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}
\end{aligned}$$

Produit scalaire : $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}, (q_1, q_2) \longmapsto \frac{1}{2}(\bar{q}_1 q_2 + \bar{q}_2 q_1) = \langle q_1, q_2 \rangle$

Norme euclidienne associée : $\mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{R}_+, q \mapsto \|q\|_2 = \sqrt{\langle q, q \rangle} = \sqrt{q \times \bar{q}}$

C'est également une norme d'algèbre car $\|q_1 \times q_2\|_2 = \|q_1\|_2 \times \|q_2\|_2$

\mathbb{H} étant un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, il est complet. Ainsi, $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}}, \cdot, \|\cdot\|)$ est une \mathbb{R} -algèbre de Banach.

1.1.4 Notations matricielles d'un quaternion

$$\forall q \in \mathbb{H}^*, \phi_q \begin{cases} \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ p \longmapsto q \times_{\mathbb{H}} p \end{cases} \text{ est une bijection de } \mathbb{H} \text{ dans lui-même.}$$

Puisque \mathbb{R} est le centre de $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}})$, ϕ_q est \mathbb{R} -linéaire, c'est un (auto)morphisme du \mathbb{R} -espace vectoriel $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \cdot)$.
 ϕ_q n'est cependant pas \mathbb{C} -linéaire car pour $(\lambda, p) \in \mathbb{C} \times \mathbb{H}$ et $q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{C}$,

$$\phi_q(\lambda.p) = q \times_{\mathbb{H}} (\lambda.p) = q \times_{\mathbb{H}} \lambda \times_{\mathbb{H}} p = \bar{\lambda} \times_{\mathbb{H}} q \times_{\mathbb{H}} p = \bar{\lambda} \times_{\mathbb{H}} \phi_q(p)$$

$$\psi : \begin{cases} (\mathbb{H}, +, \times, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{L}(\mathbb{H}), +, \circ, \cdot) \\ q \longmapsto \phi_q \end{cases} \text{ est un morphisme de } \mathbb{R}\text{-algèbre injectif}^{11}.$$

Par calcul, la matrice de ϕ_q dans la base $\mathcal{B} = (1, i, j, k)$ du \mathbb{R} -espace vectoriel \mathbb{H} est :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\phi_q) = \begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Puisque, de façon classique, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme d'algèbre de $(\mathcal{L}(\mathbb{H}), +, \circ, \cdot)$ dans $(\mathcal{M}_4(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$, $\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \circ \psi$ est un morphisme d'algèbre injectif de $(\mathbb{H}, +, \times, \cdot)$ dans $(\mathcal{M}_4(\mathbb{R}), +, \times, \cdot)$. On obtient ainsi la notation matricielle réelle d'un quaternion.

En vérifiant par calcul que :

⁹La conjugaison est un anti-automorphisme involutif de la \mathbb{R} -algèbre $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}}, \cdot)$

¹⁰ \mathbb{H}^* désigne l'ensemble des éléments inversibles (pour $\times_{\mathbb{H}}$, ils le sont tous pour $+_{\mathbb{H}}$). $(\mathbb{H}^*, \times_{\mathbb{H}})$ a une structure de groupe. Puisque $(\mathbb{H}, +_{\mathbb{H}}, \times_{\mathbb{H}})$ est un corps, on a l'égalité $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0_{\mathbb{H}}\}$.

¹¹ $q \times_{\mathbb{H}} p \longmapsto \phi_q \circ \phi_p$ et $1_{\mathbb{H}} \longmapsto id_{\mathcal{L}(\mathbb{H})}$ c'est donc bien un morphisme d'algèbre.

$$\left\{ \begin{array}{l} (\text{Im}(\mathcal{M}_{\mathcal{B}} \circ \psi), +, \times, \cdot) \longrightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{C}), +, \times, \cdot) \\ \left(\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} a+b \cdot i & -c+d \cdot i \\ c+d \cdot i & a-b \cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & -\bar{\mu} \\ \mu & \bar{\lambda} \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est un morphisme de \mathbb{R} -algèbre injectif, on obtient la notation matricielle complexe d'un quaternion.

Quelques propriétés de la notation matricielle réelle

- $\det(M_q) = \|q\|_2^4$
- $M_q^t M_q = \text{Diag}(\|q\|_2^2)$
- Si $q \in S^3$, $M(q) \in SO(4)$.

Quelques propriétés de la notation matricielle complexe

- $\det(M_q) = \|q\|_2^2$
- $M_q^* M_q = \text{Diag}(\|q\|_2^2)$
- Si $q \in S^3$, $M(q) \in SU(2)$, S^3 est isomorphe (en tant que groupe) à $SU(2)$

1.1.5 Notations vectorielles

On utilise dans la suite la \mathbb{R} -base $(1, i, j, k)$, qui est la plus pratique. Tout quaternion q s'écrit alors $q = a + b.i + c.j + d.k$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On distingue alors la partie *scalaire* a et la partie *vectorielle* (b, c, d) . Cette distinction est marquée dans les notations¹² suivantes, qui seront utilisées par la suite :

$$q = a + \vec{u} \quad \text{ou} \quad q = (a, \vec{u}) \quad \text{avec } \vec{u} \text{ vecteur de } \mathbb{R}^3$$

Le produit de deux quaternions s'écrit alors :

$$\forall (q, p) \in \mathbb{H}^2, \quad p \times_{\mathbb{H}} q = (a, \vec{u}) \times_{\mathbb{H}} (b, \vec{v}) = (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v})$$

Cette écriture, en plus de permettre de calculer rapidement un produit de quaternions, permet de «passer» le produit scalaire et le produit vectoriel dans \mathbb{H}^{13} :

$$\begin{aligned} \vec{u} &\longleftrightarrow u \leftarrow (0_{\mathbb{R}}, \vec{u}) \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &\longleftrightarrow -\frac{1}{2}(u \times_{\mathbb{H}} v + v \times_{\mathbb{H}} u) \\ \vec{u} \wedge \vec{v} &\longleftrightarrow \frac{1}{2}(u \times_{\mathbb{H}} v - v \times_{\mathbb{H}} u) \end{aligned}$$

1.1.6 Notation exponentielle

Puisque $(\mathbb{H}, +, \times, \cdot, \|\cdot\|)$ est une algèbre de Banach, on définit la fonction exponentielle :

$$\forall q \in \mathbb{H}, \quad \exp(q) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} q^n$$

Que l'on **note** e^q .

Citons quelques propriétés usuelles :

- Si p et q commutent, alors¹⁴ $e^{p+q} = e^p \times e^q$

¹²On identifie (i, j, k) et la base de \mathbb{R}^3 $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ce qui peut être discutable, voir à ce sujet «Polar and axial vectors versus quaternions».

¹³Ce sera utilisé par exemple lors de la démonstration du lien entre vecteur rotation et quaternion d'orientation.

¹⁴On a donc en particulier :

$$\forall (a, q, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{H} \times \mathbb{N}, \quad e^{a+q} = e^a \times e^q \quad e^{n \cdot q} = (e^q)^n$$

– Soit $u \in \mathcal{LC}(\mathbb{H})^{15}$, on a l'équivalence suivante, utile en pratique :

$$(\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = u(\varphi(t)) \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = x_0) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = e^{(t-t_0) \cdot u}(x_0)$$

Que l'on peut écrire matriciellement, si M est la matrice de l'endomorphisme continu u dans une base de \mathbb{H} :

$$(\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi'(t) = M \times \varphi(t) \quad \text{et} \quad \varphi(t_0) = X_0) \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = e^{(t-t_0) \cdot M} \times X_0$$

Formule d'Euler Généralisons la formule d'Euler aux quaternions.

Soit $\omega \in \mathcal{S} = \{q \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} \mid \|q\|_2 = 1_{\mathbb{R}}\}$. On a d'après une remarque précédente $\omega^2 = -1_{\mathbb{H}}$.

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, e^{t \cdot \omega} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \cdot (t \cdot \omega)^n \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \cdot (t \cdot \omega)^{2p} + \frac{1}{(2p+1)!} \cdot (t \cdot \omega)^{2p+1} \text{ par théorème de regroupement de termes sur les séries} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p)!} \cdot (t \cdot \omega)^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)!} \cdot (t \cdot \omega)^{2p+1} \text{ car les séries manipulées convergent absolument} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(\omega^2)^p}{(2p)!} t^{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\omega \cdot (\omega^2)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} \\ &= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p)!} t^{2p} + \omega \cdot \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{(2p+1)!} t^{2p+1} \\ &= \cos(t) + \omega \cdot \sin(t) \end{aligned}$$

Cas général En combinant les résultats obtenus ci-dessus, on obtient une autre expression¹⁶ de l'exponentielle d'un quaternion $q = (a, b, c, d) = a + b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k$:

$$\begin{aligned} e^{a+b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k} &= e^a \cdot e^{b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k} \text{ car } a \text{ commute avec } b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k \\ &= e^a \cdot e^{\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2} \cdot \frac{b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}} \text{ on se ramène à un quaternion pur unitaire} \\ &= e^a \cdot (\cos(\sqrt{b^2+c^2+d^2}) + \sin(\sqrt{b^2+c^2+d^2}) \cdot \frac{b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}) \end{aligned}$$

Cette expression étant lourde, on l'écrit souvent avec la notation vectorielle. Soit $q = a + \vec{u}$ un quaternion quelconque

$$\begin{aligned} e^q &= e^{a+\vec{u}} = e^a e^{\|\vec{u}\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}} \\ &= e^a \cdot \left(\cos(\|\vec{u}\|) + \sin(\|\vec{u}\|) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right) \\ &= e^a \cdot \left(\cos(\|\vec{u}\|), \sin(\|\vec{u}\|) \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right) \end{aligned}$$

¹⁵Ensemble des endomorphismes continus de \mathbb{H} .

¹⁶On note pour alléger $\frac{b \cdot i + c \cdot j + d \cdot k}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}$ la quantité :

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \cdot i + \frac{c}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \cdot j + \frac{d}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}} \cdot k$$

1.1.7 Logarithme

On définit également le logarithme sur \mathbb{H}^* , comme réciproque de l'exponentielle.

Soit $q \in \mathbb{H}^*$ un quaternion non-nul quelconque. On a $q = \|q\|_2 h$ avec h quaternion unitaire.

Posons $q = (a, b, c, d)$.

$$\begin{aligned} h &= \left(\frac{a}{\|q\|_2}, \frac{bi + cj + dk}{\|q\|_2} \right) \\ &= \left(\frac{a}{\|q\|_2}, \frac{\vec{u}}{\|q\|_2} \right) \\ &= \left(\frac{a}{\|q\|_2}, \frac{\|\vec{u}\|_2}{\|q\|_2} \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2} \right) \end{aligned}$$

Or, h étant unitaire, on a : $\left(\frac{a}{\|q\|_2}\right)^2 + \left(\frac{\|\vec{u}\|_2}{\|q\|_2}\right)^2 = 1_{\mathbb{R}}$, donc $\exists \theta \in]-\pi, \pi[$: $\frac{a}{\|q\|_2} = \cos \theta$ et $\frac{\|\vec{u}\|_2}{\|q\|_2} = \sin \theta$. Puisque $\sin \theta \geq 0_{\mathbb{R}}$, on a $\theta = \arccos\left(\frac{a}{\|q\|_2}\right)$. On peut donc réécrire :

$$h = \left(\cos \theta, \sin \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2} \right)$$

On reconnaît une forme exponentielle¹⁷ :

$$h = e^{\theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2}}$$

Définissons alors le logarithme népérien comme la réciproque de l'exponentielle :

$$\ln h = \left(0_{\mathbb{R}}, \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2} \right)$$

Puisque l'on connaît le logarithme réel, on peut en déduire le logarithme de tout quaternion non-nul $q = \|q\|_2 h$:

$$\ln q = \left(\ln(\|q\|_2), \theta \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|_2} \right)$$

De façon explicite :

$$\ln((a, b, c, d)) = \left(\ln(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}), \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}}\right) \frac{b\vec{i} + c\vec{j} + d\vec{k}}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \right)$$

1.2 Action de Conjugaison

On présente ici la propriété fondamentale des quaternions, sans laquelle leur intérêt pratique serait très fortement limité.

1.2.1 Définition de l'action par conjugaison.

On se place sur la \mathbb{R} -algèbre \mathbb{H} , muni de la base $\mathcal{B} = (1, i, j, k)$. On adopte la notation vectorielle $q = a + \vec{u}$

Soit $q \in \mathbb{H}^*$ un quaternion quelconque non-nul.

On définit la *conjugaison* par q :

$$\varphi_q : \begin{cases} \mathbb{H} & \longrightarrow \mathbb{H} \\ p & \longmapsto q \times_{\mathbb{H}} p \times_{\mathbb{H}} q^{-1} = q \times_{\mathbb{H}} p \times_{\mathbb{H}} \frac{\bar{q}}{\|q\|^2} \end{cases}$$

En notant $q = a + b.i + c.j + d.k$, la matrice de φ_q dans \mathcal{B} est :

¹⁷On vient en fait de montrer que tout quaternion unitaire peut s'écrire sous forme exponentielle.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_q) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2 \cdot (bc - ad) & 2 \cdot (ac + bd) \\ 0 & 2 \cdot (ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2 \cdot (cd - ab) \\ 0 & 2 \cdot (bd - ac) & 2 \cdot (ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Généralement, on prend $q \in \mathcal{S}^3 = \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\|_2 = 1_{\mathbb{R}}\} = \{(x_i)_{i \in 1..4} \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1_{\mathbb{R}}\}$, la 3-sphère¹⁸. On a alors évidemment :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2 \cdot (bc - ad) & 2 \cdot (ac + bd) \\ 0 & 2 \cdot (ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2 \cdot (cd - ab) \\ 0 & 2 \cdot (bd - ac) & 2 \cdot (ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

On continue généralement à simplifier, en utilisant $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1_{\mathbb{R}}$ pour les termes diagonaux :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(a^2 + b^2) - 1 & 2 \cdot (bc - ad) & 2 \cdot (ac + bd) \\ 0 & 2 \cdot (ad + bc) & 2(a^2 + c^2) - 1 & 2 \cdot (cd - ab) \\ 0 & 2 \cdot (bd - ac) & 2 \cdot (ab + cd) & 2(a^2 + d^2) - 1 \end{pmatrix}$$

$\forall q \in \mathbb{H}^*$, φ_q est un endomorphisme orthogonal de \mathbb{H} et de $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$: c'est ce dernier cas qui est le plus intéressant, car l'endomorphisme induit par φ_q sur \mathbb{R}^3 existe, et est une rotation de \mathbb{R}^3 . Mais laquelle ? C'est ce que le paragraphe suivant précise.

1.2.2 Lien pratique entre quaternion et rotation.

En pratique, on a l'équivalence suivante¹⁹ :

$$q = \lambda e^{\frac{\theta}{2} \vec{u}} \quad (\lambda \neq 0_{\mathbb{R}}, \|\vec{u}\|_2 = 1_{\mathbb{R}}) \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi_q \text{ est la rotation dans le sens direct d'angle } \theta \text{ et d'axe dirigé par le vecteur unitaire } \vec{u}$$

Plusieurs remarques :

- A toute une droite vectorielle dans \mathbb{H} correspond une seule rotation de $\mathcal{SO}(3)$, c'est un grand avantage pour les quaternions. En effet, si M est la matrice d'une rotation dans une base donnée, $\lambda.M$ n'est plus une matrice de rotation, mais la matrice de la composée d'une rotation et d'une homothétie vectorielle de rapport λ .
- Si l'on doit appliquer la rotation représentée par q_1 puis la rotation représentée par q_2 , la conjugaison associée est :

$$\varphi : \begin{cases} \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{H} \setminus \mathbb{R} \\ (0_{\mathbb{R}}, \vec{p}) & \longmapsto q_2 \times (q_1 \times (0_{\mathbb{R}}, \vec{p}) \times \overline{q_1}) \times \overline{q_2} = (q_2 \times q_1) \times (0_{\mathbb{R}}, \vec{p}) \times \overline{(q_2 \times q_1)} \end{cases}$$

et le quaternion associé à la rotation composée est donc $q_2 \times q_1$.

1.2.3 Démonstration.

Ce résultat peut se démontrer par calcul, en faisant apparaître l'expression vectorielle d'une rotation :

¹⁸($\mathcal{S}^3, \times_{\mathbb{H}}$) a une structure de groupe de Lie.

¹⁹Désormais, on considère φ_q comme un endomorphisme de $\mathbb{H} \setminus \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}
\varphi_q((0_{\mathbb{R}}, \vec{q})) &= e^{\frac{\theta}{2} \cdot \vec{u}} \times (0, \vec{q}) \times e^{-\frac{\theta}{2} \cdot \vec{u}} \\
&= e^{\frac{\theta}{2} \cdot \vec{u}} \times (0, \vec{q}) \times \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \right) \\
&= e^{\frac{\theta}{2} \cdot \vec{u}} \times \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \cdot \vec{q}, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} \wedge \vec{u} \right) \\
&= \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \right) \times \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \cdot \vec{q}, \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \wedge \vec{q} \right) \\
&= \left(\frac{\sin \theta}{2} \vec{u} \cdot \vec{q} - \frac{\sin \theta}{2} \vec{u} \cdot \vec{q} - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) [\vec{u}, \vec{u}, \vec{q}], \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} + \frac{\sin \theta}{2} \vec{u} \wedge \vec{q} \right. \\
&\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \wedge (\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \wedge \vec{q}) \right) \\
&= \left(0_{\mathbb{R}}, \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} + \frac{\sin \theta}{2} \vec{u} \wedge \vec{q} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} + \frac{\sin \theta}{2} \vec{u} \wedge \vec{q} \right. \\
&\quad \left. + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{q}) \right) \\
&= \left(0_{\mathbb{R}}, \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} + \sin \theta \vec{u} \wedge \vec{q} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{q}) \right)
\end{aligned}$$

Or, par formule du double produit vectoriel :

$$\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{q}) = -(\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{q} + (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} = -\vec{q} + (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u}$$

d'où :

$$\begin{aligned}
&= \left(0_{\mathbb{R}}, \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \vec{q} + \sin \theta \vec{u} \wedge \vec{q} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} + \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (-\vec{q} + (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u}) \right) \\
&= \left(0_{\mathbb{R}}, \left(\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right) \vec{q} + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} + \sin \theta \vec{u} \wedge \vec{q} \right) \\
&= \left(0_{\mathbb{R}}, \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \vec{q} + (1 - \cos \theta) (\vec{q} \cdot \vec{u}) \vec{u} + \sin \theta \vec{u} \wedge \vec{q} \right) \\
&= (0_{\mathbb{R}}, \cos \theta \vec{q} + (1 - \cos \theta) (\vec{u} \cdot \vec{q}) \vec{u} + \sin \theta \vec{u} \wedge \vec{q})
\end{aligned}$$

On retrouve bien l'expression d'une rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire \vec{u} (resp. $-\vec{u}$) et d'angle θ (resp. $-\theta$) dans le sens direct.

1.3 Aspect topologique du lien entre quaternions et rotations.

1.3.1 Définitions

Voir Annexe B.

1.3.2 Ensembles en jeu

La 3-sphère Par définition :

$$\begin{aligned}
S^3 &= \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^4 \mid x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1_{\mathbb{R}}\} \\
&= \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1_{\mathbb{R}}\} \\
&= \{q \in \mathbb{H} \mid \|q\|_2 = 1_{\mathbb{R}}\}
\end{aligned}$$

S^3 est une variété topologique de dimension 3, compacte et simplement connexe.

La multiplication des quaternions étant différentiable et même analytique, plus qu'un groupe, $(\mathcal{S}^3, \times_{\mathbb{H}})$ est un groupe de Lie réel.

Les notations matricielles des quaternions, en particulier unitaire, montre que $(\mathcal{S}^3, \times_{\mathbb{H}})$ est isomorphe²⁰ à $SU(2)$.

Groupe spécial unitaire d'ordre 2 C'est l'ensemble des matrices carrés d'ordre 2 unitaire et de déterminant 1. Elles sont de la forme :

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid (a, b) \in \mathbb{C}^2 \mid |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\}$$

Une matrice de $SU(2)$ est caractérisée par trois paramètres réels. C'est un \mathbb{R} -espace vectoriel dont une base usuelle est les matrices de Pauli :

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

On voit que les matrices de $SU(2)$ ont une trace nulle. On rajoute parfois $\sigma_0 = I_2$ de façon à ce que la forme matricielle de tout quaternion s'exprime dans la \mathbb{R} -base $(\sigma_i)_{i \in [0,3]}$

Groupe spécial orthogonal d'ordre 4

1.3.3 Revêtement de $SO(3)$

On peut démontrer le revêtement de $SO(3)$ par $SU(2)$ ou \mathcal{S}^3 , les résultats sont similaires. Soit

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{S}^3 & \rightarrow \mathcal{SO}(\mathbb{R}^3) \\ q & \mapsto \varphi_q \end{cases}$$

Φ est un morphisme de groupe de $(\mathcal{S}^3, \times_{\mathbb{H}})$ dans $(\mathcal{SO}(\mathbb{R}^3), \circ)$. Cherchons son noyau :

$$q \in \text{Ker}(\Phi) \iff \varphi_q = Id_{\mathbb{R}^3}$$

Puisque, par définition de l'action de conjugaison φ_q avec $q \in \mathcal{S}^3$, on a (avec la notation vectorielle «dangereuse») :

$$\varphi_q \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ u & \mapsto q \times \vec{u} \times \bar{q} \end{cases}$$

L'équivalence est $q \in \text{Ker}(\Phi) \iff q \times \vec{u} \times \bar{q} = \vec{u}$. Puisque q est unitaire, son conjugué est son inverse et on obtient $q \times \vec{u} = \vec{u} \times q$, q est donc inclus dans le centre de \mathbb{H} , donc $q \in \mathbb{R}$.

On a donc $q \times \vec{u} \times \bar{q} = q \times \vec{u} \times q = q^2 \times \vec{u}$, soit :

$$q \in \text{Ker}(\Phi) \iff \begin{cases} \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3 & q^2 \cdot \vec{u} = \vec{u} \\ q \neq 0_{\mathbb{R}} \end{cases} \iff q^2 = 1_{\mathbb{R}} \iff q = \pm 1_{\mathbb{R}}$$

Φ n'est donc pas une injection

Finalement :

- Φ est continu (preuve?)
- Φ est un homéomorphisme (preuve?)
- Φ est surjective

donc puisque \mathcal{S}^3 est simplement connexe, c'est un revêtement universel à deux feuillets (q et $-q$ désignent la même rotation) de $SO(\mathbb{R}^3)$)

²⁰C'est un isomorphisme de **groupe**, il n'est pas question ici d'espace vectoriel. \mathcal{S}^3 n'est pas un espace vectoriel.

1.4 Une autre vision des Quaternions

Lorsque l'on utilise la notation vectorielle, on remplace les quaternions purs i, j et k par $(0, \vec{i})$, $(0, \vec{j})$ et $(0, \vec{k})$. On ramène ainsi la manipulation des quaternions à celles des vecteurs de \mathbb{R}^3 . Mais il est possible de manipuler *simultanément* les quaternions purs et les vecteurs : il faut pour cela changer notre façon d'interpréter les quaternions.

Un quaternion peut être vu comme un opérateur sur certains vecteurs²¹. Lorsque l'on peut écrire $q = \frac{\vec{a}}{\vec{b}}$, on dit que q est l'opérateur qui transforme le vecteur \vec{b} en le vecteur \vec{a} . Ainsi, i, j et k sont les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le sens direct autour des 3 axes de base. On peut retrouver les règles de composition de i, j et k : par exemple, $i^2 = -1$. i transforme le vecteur \vec{j} en le vecteur \vec{k} et le vecteur \vec{k} en le vecteur $-\vec{j}$. Ainsi, i^2 transforme le vecteur \vec{j} en le vecteur $-\vec{j}$, et de même pour k : il s'agit de l'opérateur qui transforme tout vecteur du plan $\text{Vect}\{\vec{j}, \vec{k}\}$ en son opposé.

Pour transformer un vecteur \vec{a} en un vecteur \vec{b} , il faut faire deux opérations successives :

- Transformer la norme de \vec{a} pour qu'elle soit égale à la norme de \vec{b} .
- Changer l'orientation de \vec{a} pour qu'elle coïncide avec celle de \vec{b} .

Ainsi, on distingue deux types de quaternions :

- les *verseurs* (*versors*) qui ne changent que l'orientation des vecteurs auxquels ils s'appliquent. Par exemple, i, j et k sont des verseurs.
- les tenseurs (*tensors*) qui ne changent que la norme des vecteurs auxquels ils s'appliquent. 3 est ainsi un tenseur.

Cette approche des Quaternions ne se limite évidemment pas à ces quelques considérations élémentaires : *tous* les résultats sur les Quaternions peuvent être obtenus avec cette vision des choses, elle a été motrice dans la démarche d'Hamilton : c'est l'interprétation géométrique des nombres complexes qui a poussé à chercher leur généralisation à l'espace.

2 Les méthodes d'orientation dans l'espace.

On sait bien en mécanique que connaître l'orientation d'un solide indéformable c'est connaître l'orientation d'une base vectorielle²² qui lui est *liée* par rapport à une base vectorielle dite de référence. Ainsi, le problème peut être traité de façon purement théorique : on met en place des outils pour représenter l'orientation d'une base vectorielle par rapport à une autre. Avec l'énoncé du théorème d'Euler, on verra que la problématique deviendra : Avec quel objet mathématique peut-on décrire une rotation ?

2.1 Lien orientation-rotation : Théorème d'Euler

C'est un théorème désigné et formulé de nombreuses façons différentes selon les contextes²³ - voire qui n'est pas explicitement énoncé - du fait qu'il énonce un résultat qui est évident ; Donnons en quelques formulations, plus ou moins modernes.

Si on fait subir à une sphère différentes rotations d'axes concourants en son centre, il existe un diamètre dont la position à l'état final coïncide avec la position à l'état initial : c'est l'axe de la rotation équivalente faisant passer la sphère de sa position initiale à sa position finale.

En mécanique, à un instant donné, l'intersection de cet axe de rotation (dit *instantané*) avec le plan du mouvement est appelé le Centre Instantané de Rotation, ou pôle Eulérien²⁴.

On peut formuler ce théorème d'une façon plus moderne :

Deux bases orthonormées ayant même orientation se déduisent l'une de l'autre par une rotation.

Ce résultat est alors simple à démontrer avec les outils de l'algèbre linéaire :

Soient $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ deux bases de \mathbb{R}^3 ayant même orientation.

La matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est orthogonale²⁵, de déterminant 1²⁶ : c'est donc la matrice d'une rotation, qui, étant

²¹En notation vectorielle, pour $q = (a, \vec{u})$ un quaternion quelconque et \vec{v} un vecteur de \mathbb{R}^3 , $q \times \vec{v} = (a, \vec{u}) \times (0, \vec{v}) = (-\vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{v})$ montre que q n'agit comme une fonction de \mathbb{R}^3 que lorsque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Ainsi en est-il, par exemple, du quaternion i , qui agit comme une rotation sur les vecteurs du plan $\text{Vect}\{\vec{j}, \vec{k}\}$.

²²En mécanique, les bases vectorielles manipulées sont toujours orthonormées et de même orientation.

²³La dénomination théorème d'Euler est surtout anglo-saxonne.

²⁴Ce qui donne une autre dénomination de ce théorème.

²⁵Car la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est la matrice de l'identité de \mathbb{R}^3 relativement aux bases \mathcal{B} et \mathcal{B}' .

²⁶Car les deux bases ont même orientation.

semblable à $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, admet 1 pour valeur propre, le sous-espace propre associé étant de dimension 1 : il s'agit de l'ensemble des vecteurs dirigeant l'axe de rotation.

La simplicité de cette preuve est remarquable : la démonstration qui en était donnée par Euler était purement géométrique !

Par conséquent, connaître l'orientation d'une base vectorielle par rapport à une autre c'est connaître une rotation. Donc, puisque décrire l'orientation d'un solide indéformable c'est savoir décrire l'orientation de la base vectorielle liée au solide par rapport à une base de référence, on en conclut que **décrire l'orientation d'un solide indéformable c'est décrire une rotation**.

2.2 Paramétrage de l'orientation d'une base par rapport à une base de référence.

Il s'agit donc de donner des coordonnées aux rotations de \mathbb{R}^3 . Voyons les différentes méthodes.

Il existe trois grandes méthodes :

2.2.1 Angles d'Euler (ou de Cardan, de Bryant)

Description Chaque rotation (donc l'orientation d'un solide dans l'espace) est déterminée par un triplet (non-unique) d'angles.

Le i -ème angle représente l'angle de rotation autour du i -ème axe choisi. Il faut donc choisir trois axes (On tourne autour des axes de la base en mouvement ou dans la base fixe). Puisque l'on ne fait pas deux rotations successives autour du même axe, il y a $3 \times 2 \times 2 = 12$ possibilités. Puisque pour chaque combinaison, on peut choisir de tourner autour des axes fixes ou des axes mobiles, on a $2 \times 12 = 24$ possibilités.

Les angles d'Euler en axes fixes ne sont pas mesurables par une station gyroscopique embarquée, et, même dans le cas d'une interface utilisateur, ils ne sont pas d'un grand secours car il ne sont pas plus intuitifs que les angles d'Euler en axes mobiles : ce sont donc toujours les angles d'Euler en axes mobiles que l'on utilise, d'autant plus qu'ils sont directement mesurables par une station gyroscopique embarquée.

Conventions Différentes convention sont utilisées selon les domaines (Aéronautique, robotique, etc...) mais on en distingue deux principales familles :

Angles d'Euler Les deux axes extrêmes sont les mêmes, la singularité intervient donc lorsque le deuxième angle est nul.

Angles de Cardan Les trois axes sont différents, la singularité intervient lorsque le deuxième angle vaut $\frac{\pi}{2}$. C'est pour cela que l'on considère que les angles de Cardan sont mieux adaptés aux petits-angles.

Aspect matriciel Supposons que l'on choisisse la convention (z, x, z) et que l'on tourne dans la base mobile. Étant donné un triplet (α, β, γ) , la rotation recherchée r est la composée de trois rotations :

$$r = r(\gamma, (0z_2)) \circ r(\beta, (0x_1)) \circ r(\alpha, (0z_0))$$

On distingue 4 bases, $(\mathcal{B}_j)_{j=1..4}$ avec $\mathcal{B}_j = (\vec{i}_j, \vec{j}_j, \vec{k}_j)$. On passe d'une base à l'autre de la façon suivante :

$$\mathcal{B}_0 \xrightarrow{(\alpha, \vec{k}_0)} \mathcal{B}_1 \xrightarrow{(\beta, \vec{i}_1)} \mathcal{B}_2 \xrightarrow{(\gamma, \vec{k}_2)} \mathcal{B}_3$$

On calcule la matrice de passage de la base \mathcal{B}_0 à la base \mathcal{B}_3 - qui est également la matrice dans la base \mathcal{B}_0 de la rotation qui transforme la base \mathcal{B}_0 en la base \mathcal{B}_3 - en utilisant :

$$P(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_3) = P(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) \times P(\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) \times P(\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3)$$

$$P(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_3) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Singularité Le système d'angles est en singularité de représentation lorsque le deuxième angle est tel que les deux axes de rotations extrêmes sont alignés. Au-delà du problème du blocage de Cardan qui est spécifique à l'animation, lorsque l'on est en singularité, il y a deux conséquences :

- Dédurre des angles d'Euler à partir d'une matrice de rotation ne peut se faire sans ambiguïté.
- Les dérivées angulaires ne peuvent plus être calculées à partir du vecteur rotation (division par 0).

Ces singularités obligent à utiliser des algorithmes numériques à l'approche des angles critiques pour empêcher la perte d'un degré de liberté («erreur» d'arrondi volontaire), et conduisent à des comportements incohérents à l'approche des singularités («rotation parasites»). On essaie de choisir le système d'angle de façon à éviter ces singularités. (Si on travaille sur des petits angles, on privilégiera les angles de Cardan sur ceux d'Euler, car avec ces derniers la singularité apparaît lorsque le deuxième angle vaut $\frac{\pi}{2}$ et non 0), on peut également choisir d'utiliser en parallèle deux systèmes d'angles dont les singularités sont «éloignées».

Le blocage de Cardan («Gimbal Lock») Le blocage de Cardan n'a lieu que lorsque l'on tourne autour des axes mobiles²⁷. La source même de ce problème est la hiérarchie des axes de rotation, qui permet à la deuxième rotation (qui n'affecte pas la position du 1er axe de rotation, mais qui affecte la position du 3ème axe de rotation) d'aligner les deux axes extrêmes : à partir de cette configuration²⁸, seul deux degrés de liberté en rotation sont accessibles. Voir annexe D pour une illustration.

2.2.2 Quaternion d'orientation

On repère l'orientation du solide par son quaternion d'orientation, soit par un quadruplet de réels.

2.2.3 Utilisation directe des matrices

Connaissant l'axe de la rotation et l'angle, on en déduit la matrice associée. La forme générale de la matrice dans une base orthonormée \mathcal{B} de la rotation d'axe dirigé par le vecteur unitaire $\vec{u} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et d'angle θ est²⁹ :

$$\begin{bmatrix} \cos \theta + u_x^2 (1 - \cos \theta) & u_x u_y (1 - \cos \theta) - u_z \sin \theta & u_x u_z (1 - \cos \theta) + u_y \sin \theta \\ u_y u_x (1 - \cos \theta) + u_z \sin \theta & \cos \theta + u_y^2 (1 - \cos \theta) & u_y u_z (1 - \cos \theta) - u_x \sin \theta \\ u_z u_x (1 - \cos \theta) - u_y \sin \theta & u_z u_y (1 - \cos \theta) + u_x \sin \theta & \cos \theta + u_z^2 (1 - \cos \theta) \end{bmatrix}.$$

2.2.4 Relations matricielles ou quaternioniques pour passer d'un repère à un autre.

Voir section 3.2

2.2.5 Lien Quaternion - Angles D'Euler

Passer d'un triplet d'angles d'Euler au quaternion d'orientation correspondant n'est pas compliqué (il suffit de multiplier les trois quaternions correspondant aux 3 rotations), alors que passer du quaternion d'orientation au triplet d'angles d'Euler correspondant est plus délicat : une méthode systématique existe néanmoins. Le principe de cette méthode est relativement simple, elle applique le quaternion d'orientation sur des vecteurs «bien choisis» (comme le vecteur correspondant au 3ème axe de rotation par exemple), et en déduit les angles d'Euler.

Le besoin de revenir aux angles d'Euler se fait surtout sentir en mécanique, où l'on ne dispose de l'expression de certaines actions mécaniques qu'avec les angles d'Euler. Néanmoins, la plupart du temps, ce ne sont pas les angles qui interviennent directement mais leurs sinus ou cosinus : on peut alors exprimer ces forces directement en fonction du quaternion d'orientation en utilisant les deux expressions disponibles de $P(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1)$.

Soit $(a, b, c, d) \in S^3$ le quaternion d'orientation unitaire. En appelant la base de référence et la base liée au satellite, on a :

$$P(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\varphi_q) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2(a^2 + b^2) - 1 & 2 \cdot (bc - ad) & 2 \cdot (ac + bd) \\ 0 & 2 \cdot (ad + bc) & 2(a^2 + c^2) - 1 & 2 \cdot (cd - ab) \\ 0 & 2 \cdot (bd - ac) & 2 \cdot (ab + cd) & 2(a^2 + d^2) - 1 \end{pmatrix}$$

²⁷Si l'on tourne autour des axes fixes, à toute position de l'objet, les 3 degrés de liberté sont toujours accessibles (ie. on peut toujours tourner l'objet dans 3 directions différentes).

²⁸Le logiciel d'animation mémorise en effet les positions des 3 axes autour desquels on tourne.

²⁹Cette formule s'obtient aisément en calculant la matrice dans \mathcal{B} de l'action de conjugaison.

Or, en utilisant les angles d'Euler en convention zxz, angles (α, β, γ) , on a également :

$$P(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \beta & -\sin \beta \\ 0 & \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En identifiant, on obtient alors des relations entre les cosinus et sinus des angles et les coefficients du quaternions d'orientation. On peut ainsi, par exemple, exprimer le couple du au gradient de gravité uniquement en fonction des coefficients du quaternion d'orientation.

2.2.6 Avantages et désavantages de chaque méthode.

Avantage des Angles d'Euler

- Principalement le fait qu'ils soient les plus connus.
- Ils sont les plus économiques aux niveaux des paramètres : 3 angles pour 3 degré de liberté. Mais leur utilisation à l'aide de matrices l'est beaucoup moins, ce qui nuance cet argument.
- En axes mobiles, ils correspondent à des grandeurs physiques mesurables.

Désavantages des Angles d'Euler

- Ils ne sont pas intuitifs, connaissant l'axe et l'angle d'une rotation (ce qui est intuitif), la décomposer en angle d'Euler est loin d'être évidente.
- Les calculs sont coûteux car on a recours à des fonctions trigonométriques.
- Ils présentent des singularités, lorsque la rotation intermédiaire aligne les deux axes des rotations extrêmes, entraînant la perte d'un degré de liberté. La vitesse de rotation peut augmenter puisque deux axes tournent dans le même sens.
- Les erreurs numériques ne sont pas toujours du même ordre de grandeur : elles sont plus grandes au voisinage des singularités.
- Les angles d'Euler ne sont efficaces que dans une certaine plage d'angles, du fait de ces singularités.
- L'interpolation est difficile et non-efficace. La seule méthode est l'interpolation linéaire, qui n'est pas satisfaisante car les positions intermédiaires peuvent être fantaisistes, du fait que le mouvement est décomposé autour de 3 axes.

Avantages des matrices

- Dans le cadre de la 3D, toutes les transformations de l'espace peuvent être représentées par des matrices : elles sont donc, non seulement implémentées nativement dans toutes les bibliothèques 3D, mais souvent d'usage obligatoire. (Primitives ne prenant que des matrices comme arguments).
- Le calcul matriciel est souvent implémenté au niveau matériel, ce qui est rarement le cas pour les quaternions.
- Avec l'utilisation des matrices *homogènes*, on peut également gérer les translations.

Désavantages des matrices orthogonales

- Faire le lien entre la rotation et la matrice est très calculatoire, et absolument pas intuitif : une information simple (axe de rotation, angle) est «noyée» dans la matrice.
- Il y a redondance des informations (9 paramètres pour une rotation)
- Il y a nécessité de s'assurer que les matrices manipulées sont orthogonales, ce qui impose 6 contraintes (les vecteurs colonnes doivent former une famille orthonormée). En pratique, c'est un problème, car outre le fait qu'il soit coûteux de vérifier ces 6 conditions, il y peut y avoir instabilité numérique due aux erreurs d'arrondis. (Problème de projection sur $\mathcal{SO}(3)$, algorithme d'unitarisation) Dans une application graphique, une erreur d'arrondi peut causer une déformation des objets.
- Il est difficile de faire une interpolation entre deux matrices orthogonale qui donne des matrices orthogonales intermédiaires, car si M est une matrice orthogonale, λM n'en est plus une³⁰.

³⁰On peut formuler simplement ces contraintes en disant que $(\mathcal{SO}(3), \times_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})$ est un groupe, mais $(\mathcal{SO}(3), \cdot, +_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})})$ n'est pas un \mathbb{R} -espace vectoriel.

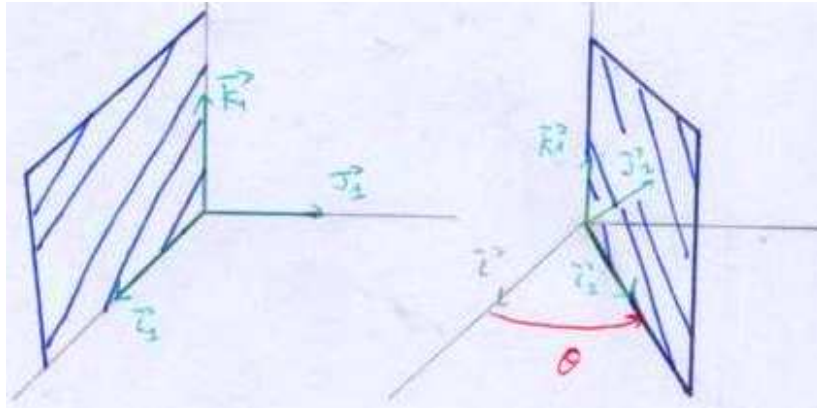
Avantages des Quaternions

- Même si l'ensemble des Quaternions peut paraître compliqué, le quaternion utilisé pour les rotations, $e^{\frac{\theta}{2}\vec{u}}$, est intuitif et facile à écrire initialement (à comparer à la forme de la matrice de la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par \vec{u} dans la base canonique de \mathbb{R}^3 , c'est à dire la matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de $\varphi_{e^{\frac{\theta}{2}\vec{u}}}$). Il est facile, à partir de la forme (a, b, c, d) , de remonter jusqu'à la matrice : le quaternion d'orientation ne se complique pas au cours du temps, l'information reste sous «forme canonique».
- Les Quaternions sont plus économiques, ils ne contiennent que 4 coordonnées, avec une seule contrainte de normalisation.
- Interpolation plus efficace.
- Les erreurs numériques sont toujours du même ordre de grandeur.
- Une droite vectorielle de \mathbb{H} représente une seule rotation, au contraire des matrices.

Désavantages des Quaternions

- Ils sont peu connus.
- Il faut utiliser une librairie qui traite les quaternions, car s'il faut repasser aux matrices en permanence, l'intérêt est minime.

2.2.7 Les 3 méthode sur un exemple.



Porte tournée d'un angle θ autour d'un axe dirigé par \vec{k} .

Angles d'Euler (zxz) $(\theta, 0, 0)$ puis matrice de rotation pour changer de coordonnées.

Matrice

$$M = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Changement de coordonnées : $(x)_0 = M(x)_1$ (égalité numérique, cf. section 3.2)

Quaternion d'orientation $q = e^{\frac{\theta}{2}\vec{k}} = (\cos \frac{\theta}{2}, \sin \frac{\theta}{2}\vec{k}) = (\cos \frac{\theta}{2}, 0, 0, \sin \frac{\theta}{2})$

Changement de coordonnées : $(0, (x)_0) = q \times (0, (x)_1) \times q^{-1}$ (égalité numérique, cf. section suivante changement de bases)

3 Utilisation des Quaternions pour résoudre le problème de l'attitude d'un satellite.

Étudier la trajectoire d'un solide indéformable c'est étudier le déplacement d'un repère qui lui est *lié*. Il y a deux sous-problèmes : l'étude de la translation du solide indéformable et l'étude de son orientation. L'étude de la trajectoire du solide se ramène à celle de son centre de gravité, et se fait de façon usuelle avec le théorème de la résultante cinétique. Connaître l'évolution de l'orientation dans le temps d'un solide est en revanche un problème plus original.

3.1 Mise en situation, notations.

$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est le repère galiléen de référence³¹.

$\mathcal{R}_1(O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ est un repère lié au solide indéformable³² Σ_1 .

$q(1/0) = e^{\frac{\theta(t)}{2} \vec{u}(t)}$ est le quaternion d'orientation du solide. (On met volontairement en évidence sa dépendance envers le temps, qui est double : l'axe et l'angle de la rotation).

$\vec{\omega}(1/\mathcal{R})$ est le vecteur rotation du solide Σ_1 dans son mouvement par rapport à \mathcal{R} , que l'on notera simplement dans la suite $\vec{\omega}$, du fait de l'absence d'ambiguïté.

3.2 Changements de bases

3.2.1 Changement de bases avec matrice de rotation.

Lorsque l'on stocke l'orientation de notre solide sous la forme d'un triplet d'angles d'Euler ou d'une matrice orthogonale, on se ramène toujours *in fine* aux matrices orthogonales pour changer de coordonnées. On calcule donc la matrice dans la base $\mathcal{B}(t)$ de la rotation transformant la base $\mathcal{B}(t)$ en la base $\mathcal{B}_1(t)$, qui est également la matrice de passage de la base $\mathcal{B}(t)$ à la base $\mathcal{B}_1(t)$, appelons la $P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1)$.

Si $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ représente les coordonnées d'un vecteur \vec{x} dans la base $\mathcal{B}(t)$ et $X_1 \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}_1(t)$, alors on a :

$$X = P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \times X_1 \quad X_1 = {}^t P(\mathcal{B}, \mathcal{B}_1) \times X$$

3.2.2 Changement de bases avec le quaternion d'orientation

A tout instant t , on passe de la base $\mathcal{B}(t) = (\vec{i}(t), \vec{j}(t), \vec{k}(t))$ à la base $\mathcal{B}_1(t) = (\vec{i}_1(t), \vec{j}_1(t), \vec{k}_1(t))$ par la rotation R d'axe dirigé par \vec{u} et d'angle θ . A cette rotation on associe le quaternion $q(1/0)$ comme expliqué plus haut.

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(R) = \begin{pmatrix} R(\vec{i}) = \vec{i}_1 & R(\vec{j}) = \vec{j}_1 & R(\vec{k}) = \vec{k}_1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice joue ainsi le rôle de matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}_1 , qui prend un vecteur exprimé dans \mathcal{B}_1 et l'exprime dans \mathcal{B} .

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . On note $(\vec{v})_0$ la matrice colonne numérique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ qui contient les coordonnées du vecteur \vec{v} dans la base \mathcal{B} , et $(\vec{v})_1$ pour les coordonnées dans \mathcal{B}_1 . On note de la même façon le quaternion correspondant : $((0, \vec{v}))_0$ ou $((0, \vec{v}))_1$.

On a les relations de changement de bases suivantes :

$$(\vec{v})_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(R) \times (\vec{v})_1 \quad \longleftrightarrow \quad ((0, \vec{v}))_0 = q(1/0) \times_{\mathbb{H}} ((0, \vec{v}))_1 \times_{\mathbb{H}} q(1/0)^{-1}$$

Les formules écrites dans ce document sont généralement des relations intrinsèques, comme par exemple $\vec{u} = \vec{R}(\vec{v})$, qui signifie que le vecteur \vec{v} a pour image \vec{u} par l'endomorphisme R . En pratique, pour exploiter cette relation, on utilise le produit matriciel, afin de traduire la relation $\vec{u} = \vec{R}(\vec{v})$ en une égalité de tableau numérique. Cette relation s'écrit en pratique : $(\vec{u})_0 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(R) \times (\vec{v})_0$ ou $(\vec{u})_1 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(R) \times (\vec{v})_1$.

3.2.3 Quaternion d'orientation et changement de bases

Le Quaternion d'orientation $q(1/0) = e^{\frac{\theta(t)}{2} \vec{u}(t)}$ à la même expression dans les bases \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 .³³ En effet, c'est seulement par le biais de sa partie vectorielle qu'il dépend de la base. Mais \vec{u} a les mêmes coordonnées dans les deux bases puisque l'on passe de l'une à l'autre par une rotation d'axe dirigé par \vec{u} .

On peut s'en convaincre en posant :

$$\vec{u} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j} + \gamma \vec{k}$$

On compose par la rotation d'angle θ et d'axe dirigé par \vec{u} :

³¹Parfois aussi appelé repère inertiel, ou repère absolu.

³²On dira dans la suite, par abus de langage, solide au lieu de solide indéformable. Le solide doit être indéformable pour que la notion de repère lié ait un sens.

³³Le quaternion d'orientation est un élément de \mathbb{R}^4 , mais on prend toujours pour base de la partie scalaire $(1_{\mathbb{R}})$, la base canonique de \mathbb{R} .

$$\begin{aligned}
R(\vec{u}) &= R(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}) \\
&= \alpha R(\vec{i}) + \beta R(\vec{j}) + \gamma R(\vec{k}) \\
&= \alpha\vec{i}_1 + \beta\vec{j}_1 + \gamma\vec{k}_1
\end{aligned}$$

\vec{u} a donc bien les mêmes coordonnées dans les deux bases, car $\vec{u} = R(\vec{u})$

\vec{u} et $\vec{\Omega}(1/0)$ ne sont pas colinéaires lorsque, si l'on arrête le mouvement en cours et que l'on fait tourner \mathcal{B}_1 autour de l'axe dirigé par $\vec{\Omega}(1/0)$, on ne peut pas faire coïncider \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 . En effet, par définition de \vec{u} , il faut tourner autour de l'axe dirigé par \vec{u} pour faire coïncider \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 . On a donc bien :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 &= \dot{\alpha}\vec{i} + \dot{\beta}\vec{j} + \dot{\gamma}\vec{k} \\
\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_0 &= \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_1 + \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{u}
\end{aligned}$$

Ainsi, il faut préciser dans quel repère on dérive \vec{u} , et donc $q(1/0)$.

3.2.4 Vecteur rotations et changement de bases

Puisque \vec{u} et $\vec{\Omega}(1/0)$ ne sont pas forcément colinéaires, $\vec{\Omega}(1/0)$ a des coordonnées différentes dans \mathcal{B} et \mathcal{B}_1 . On passe d'une base à l'autre par la formule de changement de base explicitée plus haut.

Par contre, la dérivée de $\vec{\Omega}(1/0)$ est la même dans les deux bases. (Application des formules de changement de base pour la dérivation)

Numériquement, on passe d'une base à l'autre avec :

$$\left(0, \vec{\Omega}(1/0)\right)_0 = q(1/0) \times_{\mathbb{H}} \left(0, \vec{\Omega}(1/0)\right)_1 \times_{\mathbb{H}} q(1/0)^{-1}$$

3.3 Lien entre le vecteur rotation d'un solide et son quaternion d'orientation.

3.3.1 Relation

On a la relation primordiale suivante :

$$\left(0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)}\right) = 2 \cdot \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times_{\mathbb{H}} \overline{q(1/0)(t)}$$

Ou de façon équivalente :

$$\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2} \cdot \left(0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)}\right) \times_{\mathbb{H}} q(1/0)(t)$$

Matriciellement, en exprimant tout dans la base \mathcal{B}_0 ou \mathcal{B}_1 , on écrit, en notant les matrices en majuscules :

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{1}{2} \cdot W(t) \times Q(t)$$

En posant $Q(t) = (a(t), b(t), c(t), d(t))$ et $\vec{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$, on obtient le système d'équation différentiel suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{da}{dt}(t) \\ \frac{db}{dt}(t) \\ \frac{dc}{dt}(t) \\ \frac{dd}{dt}(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\omega_x(t) & -\omega_y(t) & -\omega_z(t) \\ \omega_x(t) & 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_y(t) & \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ \omega_z(t) & -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix}$$

Connaissant $q(t=0)$ et $\vec{\omega}(t)$, qui est fournit par les capteurs, on en déduit $q(t)$, c'est à dire la loi d'évolution de l'attitude du corps.

On peut également obtenir ce système différentiel sans calcul matriciel, en explicitant le produit de quaternions :

$$(0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)}) \times (a, b, \overrightarrow{i} + c, \overrightarrow{j} + d, \overrightarrow{k}) = 2 \cdot \left(\frac{da}{dt}(t), \frac{db}{dt}(t), \overrightarrow{i} + \frac{dc}{dt}(t), \overrightarrow{j} + \frac{dd}{dt}(t), \overrightarrow{k} \right)$$

Qui donne, en utilisant la forme vectoriel du produit de quaternions :

$$\left[0.a - \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(t) \\ c(t) \\ a(t) \end{pmatrix}, a. \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b(t) \\ c(t) \\ d(t) \end{pmatrix} \right] = \left[\frac{da}{dt}(t), \begin{pmatrix} \frac{db}{dt}(t) \\ \frac{dc}{dt}(t) \\ \frac{dd}{dt}(t) \end{pmatrix} \right]$$

$$\left[0.a - \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b(t) \\ c(t) \\ a(t) \end{pmatrix}, a. \begin{pmatrix} \omega_x(t) \\ \omega_y(t) \\ \omega_z(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_y.d - c.\omega_z \\ \omega_z.b - d.\omega_x \\ \omega_x.c - b.\omega_y \end{pmatrix} \right] = \left[\frac{da}{dt}(t), \begin{pmatrix} \frac{db}{dt}(t) \\ \frac{dc}{dt}(t) \\ \frac{dd}{dt}(t) \end{pmatrix} \right]$$

Qui redonne bien le même système différentiel :

$$\begin{cases} 2 \cdot \frac{da}{dt}(t) = -b(t).\omega_x(t) - c(t).\omega_y(t) - d(t).\omega_z(t) \\ 2 \cdot \frac{db}{dt}(t) = a(t).\omega_x(t) + d(t).\omega_y(t) - c(t).\omega_z(t) \\ 2 \cdot \frac{dc}{dt}(t) = -d(t).\omega_x(t) + a(t).\omega_y(t) + b(t).\omega_z(t) \\ 2 \cdot \frac{dd}{dt}(t) = c(t).\omega_x(t) - b(t).\omega_y(t) + a(t).\omega_z(t) \end{cases}$$

Initialisation du quaternion d'orientation

$$q(1/0) = e^{\frac{\theta(t)}{2} \overrightarrow{u}(t)} = \left(\cos \frac{\theta(t)}{2}, \sin \frac{\theta(t)}{2} \overrightarrow{u} \right) = (a, b, \overrightarrow{i} + c, \overrightarrow{j} + d, \overrightarrow{k})$$

On a les relations :

$$a(t) = \cos \frac{\theta(t)}{2} \quad \sin \frac{\theta(t)}{2} = \sqrt{b^2 + c^2 + d^2} \quad \overrightarrow{u} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 + d^2}} \cdot (b, \overrightarrow{i} + c, \overrightarrow{j} + d, \overrightarrow{k})$$

3.3.2 Utilisation

Lorsque l'on utilise cette relation, on remplace q , ω et $\frac{dq}{dt}$ par une colonne numérique qui contient leur coordonnées dans une base. On exprime tout dans la base 1 ou tout dans la base 0. On peut néanmoins mixer les bases en utilisant la relation de changement de bases pour le vecteur rotation³⁴ :

$$\left(0, \overrightarrow{\omega}(1/0) \right)_0 = q(t) \times_{\mathbb{H}} \left(0, \overrightarrow{\omega}(1/0) \right)_1 \times_{\mathbb{H}} q(t)^{-1}$$

qui donne donc :

$$\left(0, \overrightarrow{\omega}(1/0) \right)_0 \times_{\mathbb{H}} q(t) = q(t) \times_{\mathbb{H}} \left(0, \overrightarrow{\omega}(1/0) \right)_1$$

Ainsi, on a les égalités numériques suivantes :

$$\left(\left(\frac{dq}{dt} \right)_0 \right)_0 = \frac{1}{2} \cdot (0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)})_0 \times_{\mathbb{H}} q(t) \quad \left(\left(\frac{dq}{dt} \right)_0 \right)_1 = \frac{1}{2} \cdot (0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)})_1 \times_{\mathbb{H}} q(t)$$

$$\left(\left(\frac{dq}{dt} \right)_0 \right)_0 = \frac{1}{2} \cdot q(t) \times_{\mathbb{H}} (0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)})_1 \quad \left(\left(\frac{dq}{dt} \right)_0 \right)_1 = \frac{1}{2} \cdot q(t)^{-1} \times_{\mathbb{H}} (0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)})_0 \times_{\mathbb{H}} q(t)^2$$

³⁴Le quaternion d'orientation $q(t)$ a les mêmes coordonnées dans les bases 0 et 1 ; on l'exprime donc dans une de ces deux bases dans ce qui suit. C'est ce qui explique l'abus de notation dans la suite, qui consiste à ne pas préciser dans quelle base on exprime $q(t)$.

3.3.3 Démonstration 1

Par définition du quaternion d'orientation $q(1/0)$, on a :

$$\left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) = q \times_{\mathbb{H}} \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}\right) \times_{\mathbb{H}} \bar{q}$$

$$\left(0_{\mathbb{R}}, \frac{di_1}{dt}\right) = \dot{q} \times_{\mathbb{H}} \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}\right) \times_{\mathbb{H}} \bar{q} + q \times \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}\right) \times_{\mathbb{H}} \dot{\bar{q}}$$

Or, en réutilisant la première relation, et du fait que $q^{-1} = \bar{q}$, $\left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}\right) \times_{\mathbb{H}} \bar{q} = \bar{q} \times \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right)$ et $q \times_{\mathbb{H}} \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}\right) = \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) \times_{\mathbb{H}} q$, on obtient :

$$\left(0_{\mathbb{R}}, \frac{di_1}{dt}\right) = \dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q} \times \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) + \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) \times_{\mathbb{H}} q \times_{\mathbb{H}} \dot{\bar{q}}$$

Or, $\|q\|_2 = 1_{\mathbb{R}}$ donne par dérivation $\langle q|\dot{q} \rangle = 0_{\mathbb{R}}$ soit par définition du produit scalaire : $q \times \dot{\bar{q}} = -\dot{q} \times \bar{q}$. On en déduit :

$$\left(0_{\mathbb{R}}, \frac{di_1}{dt}\right) = \dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q} \times \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) - \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) \times_{\mathbb{H}} \dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q}$$

Or, $q \times \dot{\bar{q}} = -\dot{q} \times \bar{q}$ donne³⁵ $\overline{q \times \dot{\bar{q}}} = \overline{-\dot{q} \times \bar{q}} = -\dot{q} \times \bar{q}$ soit $\overline{\dot{q} \times \bar{q}} = -\dot{q} \times \bar{q}$ et donc $\dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q} \in \mathbb{H} \setminus \mathbb{R}$. En se rappelant que le produit de deux quaternions purs s'exprime uniquement en fonction du produit vectoriel, on utilise avec profit la notation vectorielle :

$$\begin{aligned} \left(0_{\mathbb{R}}, \frac{di_1}{dt}\right) &= \dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q} \times \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) - \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) \times_{\mathbb{H}} \dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q} \\ &= \left(0_{\mathbb{R}}, \text{Pure}(\dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q})\right) \times \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) - \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1\right) \times \left(0_{\mathbb{R}}, \text{Pure}(\dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q})\right) \\ &= \left(0_{\mathbb{R}}, \text{Pure}(\dot{q} \times_{\mathbb{H}} q) \wedge \vec{i}_1\right) - \left(0_{\mathbb{R}}, \vec{i}_1 \wedge \text{Pure}(\dot{q} \times_{\mathbb{H}} q)\right) \\ &= \left(0_{\mathbb{R}}, 2.\text{Pure}(\dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q}) \wedge \vec{i}_1\right) \end{aligned}$$

On en déduit la relation annoncée, d'après la définition du vecteur rotation :

$$\left(0_{\mathbb{R}}, \vec{\omega}(t)\right) = 2.\dot{q} \times_{\mathbb{H}} \bar{q}$$

3.3.4 Démonstration 2

Cette démonstration est tirée de «Représentation des attitudes - ISAE», section 6.4.

On prend un quaternion d'orientation quelconque $q(1/0)$, qui n'est pas forcément unitaire. La clé est ici le lien qui existe entre la dérivée d'un vecteur et le vecteur rotation : en «passant» cette relation dans \mathbb{H} , et avec quelques manipulations, on obtient la relation voulue.

Soit \vec{v} un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 , fixe dans \mathcal{B} , c'est à dire tel que ses composantes dans la base \mathcal{B} sont indépendantes du temps.³⁶ Son image par la rotation R , représentée par le quaternion $q(1/0)$, est notée \vec{w} . Puisque R est un automorphisme de \mathbb{R}^3 , \vec{w} est lui aussi un vecteur quelconque de \mathbb{R}^3 . Les composantes de \vec{w} sont également fixes dans \mathcal{B}_1 :

³⁵On utilise le fait que la conjugaison soit involutive, à la manière de ce que l'on fait en algèbre de Boole.

³⁶C'est ce que traduit $\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_0 = \vec{0}$.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_1 &= \left(\frac{d\vec{R}(\vec{v})}{dt}\right)_1 \\
&= \left(\frac{d\vec{R}(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k})}{dt}\right)_1 \\
&= \alpha\left(\frac{d\vec{R}(\vec{i})}{dt}\right)_1 + \beta\left(\frac{d\vec{R}(\vec{j})}{dt}\right)_1 + \gamma\left(\frac{d\vec{R}(\vec{k})}{dt}\right)_1 \\
&= \alpha\left(\frac{d\vec{i}_1}{dt}\right)_1 + \beta\left(\frac{d\vec{j}_1}{dt}\right)_1 + \gamma\left(\frac{d\vec{k}_1}{dt}\right)_1 \\
&= \vec{0}
\end{aligned}$$

Par définition de \vec{w} , on a donc :

$$\vec{w} = \vec{R}(\vec{v}) \longleftrightarrow w = q(1/0) \times_{\mathbb{H}} v \times_{\mathbb{H}} q(1/0)^{-1}$$

On dispose également d'une relation vectorielle faisant intervenir le vecteur rotation :

$$\left(\frac{d\vec{w}}{dt}\right)_0 = \vec{\Omega}(1/0) \wedge \vec{w} \longleftrightarrow \left(\frac{dw}{dt}\right)_0 = \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0))$$

En combinant les deux égalités obtenues dans \mathbb{H} , on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dq(1/0) \times v \times q(1/0)^{-1}}{dt}\right)_0 &= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0)) \\
\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times v \times q(1/0)^{-1} + q(1/0) \times v \times \left(\frac{dq(1/0)^{-1}}{dt}\right)_0 &= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0))
\end{aligned}$$

Or, la dérivation d'une relation du type $q \times q^{-1} = 1_{\mathbb{H}}$ donne $\dot{q} \times q^{-1} + q \times \dot{q}^{-1} = 0_{\mathbb{H}}$, soit $\dot{q}^{-1} = -q^{-1} \times \dot{q} \times q^{-1}$. On obtient donc :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times v \times q(1/0)^{-1} + q(1/0) \times v \times \left(-q(1/0)^{-1} \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1}\right) &= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0)) \\
\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times v \times q(1/0)^{-1} - \left(q(1/0) \times v \times q(1/0)^{-1}\right) \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} &= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0)) \\
\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} \times w - w \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} &= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0))
\end{aligned}$$

On regroupe pour faire «apparaître un produit vectoriel» :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0)) - \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} \times w + w \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} \\
&= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0) - 2\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} \times w + 2w \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}(\Omega(1/0) \times w - w \times \Omega(1/0) - 2\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} \times w + 2w \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1}) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\Omega(1/0) \times w - 2\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1} \times w\right) - \left(w \times \Omega(1/0) - 2w \times \left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\left(\Omega(1/0) - 2\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1}\right) \times w - w \times \left(\Omega(1/0) - 2\left(\frac{dq(1/0)}{dt}\right)_0 \times q(1/0)^{-1}\right)\right)
\end{aligned}$$

Cela signifie donc, que :

$$\forall \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \quad \overrightarrow{Pure} \left(\Omega(1/0) - 2 \left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1} \right) \wedge \vec{w} = \vec{0}$$

On a donc :

$$\overrightarrow{Pure} \left(\Omega(1/0) - 2 \left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1} \right) = \vec{0}$$

Pour poursuivre, on distingue deux cas suivant la nature de $q(1/0)$.

Cas 1 $q(1/0)$ n'est pas forcément unitaire. Dans ce cas, on peut simplement écrire que $\Omega(1/0) - 2 \left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1} \in \mathbb{R}$.

Cas 2 Si $q(1/0)$ est unitaire, $q(1/0)^{-1} = \overline{q(1/0)}$, ce qui permet de réécrire la relation obtenue par dérivation de $q \times q^{-1} = 1_{\mathbb{H}}$. On avait obtenu $\dot{q} \times q^{-1} + q \times \dot{q}^{-1} = 0_{\mathbb{H}}$, soit $\dot{q} \times q^{-1} = -q \times \dot{q}^{-1}$. Qui devient ici : $\dot{q} \times \bar{q} = -q \times \bar{\dot{q}}$. En utilisation le fait que la conjugaison soit involutive, on obtient : $\dot{q} \times \bar{q} = -\bar{\dot{q}} \times \bar{q}$.

Ainsi, $\dot{q} \times \bar{q}$ est l'opposé de son conjugué, donc c'est un quaternion pur. On a donc alors :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{Pure} \left(\Omega(1/0) - 2 \left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1} \right) &= \vec{0} \\ \overrightarrow{Pure} \left(\Omega(1/0) \right) - 2 \overrightarrow{Pure} \left(\left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1} \right) &= \vec{0} \\ \Omega(1/0) - 2 \left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1} &= 0_{\mathbb{H}} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la relation voulue :

$$\Omega(1/0) = 2 \left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0 \times q(1/0)^{-1}$$

Numériquement, on choisit \mathcal{B} ou \mathcal{B}_1 pour $\Omega(1/0)$ et $\left(\frac{dq(1/0)}{dt} \right)_0$. La formule de changement de bases permet alors d'obtenir plusieurs égalités numériques selon la base choisie.

3.4 Vérification sur un exemple simple.

On prend pour vecteur rotation $\vec{\omega} = 1. \vec{j}$. On connaît donc ses coordonnées dans la base fixe.

Le quaternion d'orientation est : $q(1/0) = (a(t), b(t), c(t), d(t))$

Initialement le quaternion d'orientation vaut $1_{\mathbb{R}} = (1, 0, 0, 0) = (a(0), b(0), c(0), d(0))$

Numériquement, on doit résoudre³⁷ :

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{dq}{dt} \right)_0 \right)_0 &= \frac{1}{2} \cdot (0_{\mathbb{R}}, \overrightarrow{\omega(t)})_0 \times_{\mathbb{H}} q(t) \\ \begin{cases} 2. \frac{da}{dt}(t) &= -b(t) \cdot \omega_x(t) - c(t) \cdot \omega_y(t) - d(t) \cdot \omega_z(t) \\ 2. \frac{db}{dt}(t) &= a(t) \cdot \omega_x(t) + d(t) \cdot \omega_y(t) - c(t) \cdot \omega_z(t) \\ 2. \frac{dc}{dt}(t) &= -d(t) \cdot \omega_x(t) + a(t) \cdot \omega_y(t) + b(t) \cdot \omega_z(t) \\ 2. \frac{dd}{dt}(t) &= c(t) \cdot \omega_x(t) - b(t) \cdot \omega_y(t) + a(t) \cdot \omega_z(t) \end{cases} \end{aligned}$$

Puis on représente l'évolution du vecteur \vec{i}_1 lié au solide.

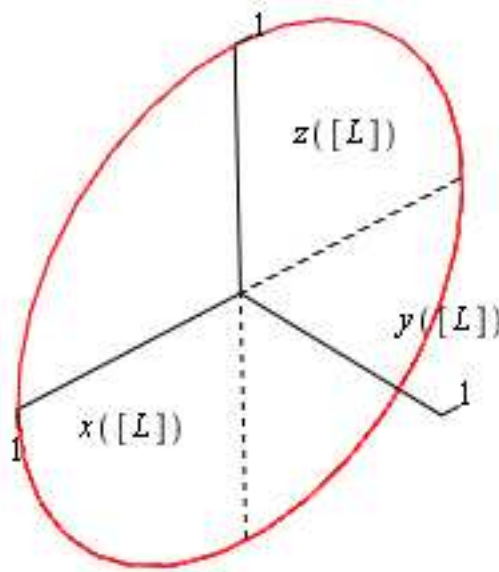
Saisie du système différentiel

³⁷Tout est exprimé dans la base fixe \mathcal{B}_0 .


```
> eqd := {2*D(a)(t)=-c(t), 2*D(b)(t)=d(t), 2*D(c)(t)=a(t), 2*D(d)(t)=-b(t)} :
c_init := {a(0)=1, b(1)=0, c(0)=0, d(0)=0} : # Les conditions initiales
fct := {a(t), b(t), c(t), d(t)} : # la fonction inconnue est le Quaternion d'orientation
Résolution et récupération des solutions sous formes de fonctions
> sol := dsolve(eqd union c_init, fct) :
af := unapply(subs(sol, a(t)), t) :
cf := unapply(subs(sol, c(t)), t) :
```

Représentation graphique de l'évolution du vecteur \vec{i}_1 lié au solide en rotation

```
> with(plots) : with(VectorCalculus) :
spacecurve([af(t)^2-cf(t)^2, 0, 2*af(t)*cf(t)], t=0..10, labels = [x([L]), y([L]), z([L])], view = [-1 ..
1, 0 .. 1, -1 .. 1], tickmarks = [[1], [1], [1]], axes = normal, scaling = constrained, color = red);
```



```
> combine([af(t)^2-cf(t)^2, 0, 2*af(t)*cf(t)]);
```

$$\begin{bmatrix} \cos(1.t) \\ 0 \\ -\sin(1.t) \end{bmatrix}$$

C'est bien le mouvement attendu.

3.5 Equations d'attitude d'un satellite.

$\mathcal{R}_0 = (0, \mathcal{B}_0)$ repère considéré inertielle pour l'étude (Référentiel géocentrique ou de Copernic).

$\mathcal{R}_1 = (G, \mathcal{B}_1)$ repère lié au satellite (ce n'est pas le repère barycentrique car les axes bougent avec le satellite)

$q(1/0)$ quaternion d'orientation du satellite. \bar{I} opérateur d'inertie.

$\vec{\omega}(1/0)$ est le vecteur rotation, de coordonnées $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ dans la base \mathcal{B}_1 .

Les axes du repère lié au satellite sont pris tels qu'ils soient les axes principaux d'inertie du satellite. La matrice de l'opérateur d'inertie dans la base \mathcal{B}_1 est alors diagonale $Diag(I_{Gx}, I_{Gy}, I_{Gz})$.

3.5.1 Quaternion d'orientation

On exprime le quaternion d'orientation ainsi que sa dérivé dans la base \mathcal{B}_0 . Le vecteur rotation est exprimé dans la base \mathcal{B}_1 . On a l'égalité numérique :

$$\begin{aligned} (\dot{a}, \dot{b}, \dot{c}, \dot{d}) &= \frac{1}{2}(a, b, c, d) \times_{\mathbb{H}} (0, \omega_x, \omega_y, \omega_z) \\ &= \frac{1}{2}(-(b\omega_x + d\omega_z + c\omega_y), a\omega_x - d\omega_y + c\omega_z, d\omega_x + a\omega_y - b\omega_z, b\omega_y + a\omega_z - c\omega_x) \end{aligned}$$

On a donc le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} 2.\frac{da}{dt}(t) = -b(t).\omega_x(t) - c(t).\omega_y(t) - d(t).\omega_z(t) \\ 2.\frac{db}{dt}(t) = a(t).\omega_x(t) - d(t).\omega_y(t) + c(t).\omega_z(t) \\ 2.\frac{dc}{dt}(t) = d(t).\omega_x(t) + a(t).\omega_y(t) - b(t).\omega_z(t) \\ 2.\frac{dd}{dt}(t) = -c(t).\omega_x(t) + b(t).\omega_y(t) + a(t).\omega_z(t) \end{cases}$$

3.5.2 Théorème du moment dynamique

On note $\vec{\sigma}(G, 1/0)$ le moment cinétique du satellite pris au centre de masse de ce dernier. D'après la forme de la matrice d'inertie dans la base \mathcal{B}_1 , on a : $\vec{\sigma}(G, 1/0) = I_{Gx}\omega_x\vec{i}_1 + I_{Gy}\omega_y\vec{j}_1 + I_{Gz}\omega_z\vec{k}_1$.

Le théorème du moment cinétique donne :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{\sigma}(1/0)}{dt} \right)_0 &= \vec{\Gamma} \\ \left(\frac{d\vec{\sigma}(1/0)}{dt} \right)_1 + \omega(1/0) \wedge \vec{\sigma}(1/0) &= \vec{\Gamma} \end{aligned}$$

Dans la base \mathcal{B}_1 , on a :

$$\begin{pmatrix} I_{Gx}\dot{\omega}_x \\ I_{Gy}\dot{\omega}_y \\ I_{Gz}\dot{\omega}_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} I_{Gx}\omega_x \\ I_{Gy}\omega_y \\ I_{Gz}\omega_z \end{pmatrix} = \vec{\Gamma}$$

On obtient donc le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} I_{Gx}\dot{\omega}_x + (I_{Gz} - I_{Gy})\omega_y\omega_z = \vec{\Gamma} \cdot \vec{i}_1 \\ I_{Gy}\dot{\omega}_y + (I_{Gx} - I_{Gz})\omega_x\omega_z = \vec{\Gamma} \cdot \vec{j}_1 \\ I_{Gy}\dot{\omega}_y + (I_{Gy} - I_{Gx})\omega_x\omega_y = \vec{\Gamma} \cdot \vec{k}_1 \end{cases}$$

3.5.3 Nature des couples extérieures

- Les roues à réaction interviennent-elles dans le théorème du moment cinétique ?
- On distingue couple de commande et couple extérieur.
- Les sources de couples sont dans l'ordre décroissant (même si cela dépend de l'altitude de l'orbite) :
 - La gravité (Gradient de gravité)
 - Frottement atmosphérique³⁸ (surtout sensible aux basses altitudes)
 - La pression du rayonnement solaire
 - Champ magnétique

4 Utilisation des Quaternions dans l'interpolation de rotations.

Cette application des Quaternions en infographie est de loin la plus courante. On a vu que connaître l'orientation d'un solide dans l'espace est équivalent à connaître la rotation qui transforme la base de référence en la base liée au solide³⁹ : connaître la position d'un objet c'est donc connaître une rotation et un vecteur repérant la position d'un point du solide.

Connaissant deux (ou plus) états d'un corps, le problème de l'interpolation se décompose en deux parties :

- Interpoler les positions, en se fixant un point sur le corps. J'ai obtenu de bon résultat en utilisant les courbes de Bézier sur les composantes.
- Interpoler les orientations, qui est un problème plus délicat. Avec le lien orientation-rotation, il s'agit en fait de tracer un chemin dans $\mathcal{SO}(3)$, reliant les deux rotations extrêmes. On comparera les différents moyens de le faire : les quaternions s'avéreront être les plus efficaces.

³⁸Parfois appelée *drag atmosphérique*, venant du nom anglais *drag*, qui signifie dans ce contexte résistance, trainée.

³⁹Cette base est choisie arbitrairement, mais une fois choisie, on s'y tient.

4.1 Principe général de l'interpolation de rotation, rôle des quaternions.

La problématique de l'interpolation est la suivante : on connaît les positions extrêmes de l'objet, c'est à dire les rotations extrêmes, et on souhaite trouver des rotations intermédiaires pour passer de la rotation initiale à la rotation finale. On cherche donc une formule, contenant un pas variable, permettant de calculer ces rotations intermédiaires : à chaque fois qu'une rotation intermédiaire est calculée, on l'applique sur l'objet et on affiche la position finale, en répétant le processus un nombre *suffisant* de fois, on crée l'illusion d'un mouvement reliant les deux positions extrêmes. Une formule d'interpolation est de bonne qualité si elle donne un résultat satisfaisant : une des difficultés est d'établir des critères précis pour comparer des formules.

On peut distinguer deux types d'interpolation, sur des critères pratiques :

- L'interpolation entre deux rotations. C'est un problème complètement résolu de façon satisfaisante par SLERP.
- L'interpolation entre $n \geq 3$ rotations. C'est un problème beaucoup plus délicat qui n'est pas résolu de façon absolue et définitive. Plusieurs techniques coexistent, avec chacune leurs avantages et leurs inconvénients. Les méthodes les plus simples s'appuient sur des considérations analogues aux courbes de BÉZIER (SQUAD), d'autres sur des considérations plus évoluées (SPRING).

Et puisqu'une rotation peut être représentée⁴⁰ par un quaternion, connaître la position d'un objet c'est connaître un quaternion⁴¹ qui représente la rotation qui transforme la base de référence en la base liée au solide. Si l'orientation du solide est repérée par la rotation d'angle θ et d'axe \vec{u} , on choisit en principe comme quaternion d'orientation le quaternion : $e^{\frac{\theta}{2}\vec{u}} = \left(\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\vec{u}\right) = \left(\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\vec{u} \cdot \vec{i}, \sin(\frac{\theta}{2})\vec{u} \cdot \vec{j}, \sin(\frac{\theta}{2})\vec{u} \cdot \vec{k}\right)$ On a ainsi ramené un problème assez abstrait, celui de relier des rotations, à un problème «géométrique», celui de relier des quaternions. (cf. 4.2 pour plus de détails)

4.2 Aspect mathématique

Il s'agit de relier deux éléments de $\mathcal{SO}(3)$ de la meilleure façon possible (c'est à dire celle qui donnera un mouvement naturel à l'objet, sans brusque accélération). Le problème réside dans cette notion de «meilleur chemin». Pour relier deux éléments de $\mathcal{SO}(3)$, il faut être capable de repérer ces éléments, de leur affecter des coordonnées : c'est le problème du paramétrage des rotations traité plus haut. On verra que les angles d'Euler ainsi que l'utilisation directe des matrices de rotation ne sont pas pratiques pour interpoler deux rotations : ce sont donc les quaternions qui fournissent la méthode la plus efficace.

On a vu que S^3 et $SU(2)$ sont des revêtements universels à double feuillet de $\mathcal{SO}(3)$, c'est sur S^3 , l'ensemble des quaternions unitaires, que l'on travaillera. Pour relier des éléments de $\mathcal{SO}(3)$, on reliera donc des éléments dans S^3 .⁴² Il s'agit donc de définir une fonction $I \subset \mathbb{R} \rightarrow S^3$.

4.3 Déroulement pratique d'une interpolation entre 2 rotations

4.3.1 Positions extrêmes

On dispose des deux orientations extrêmes de notre objet, sous formes d'angles d'Euler, de Matrices ou de quaternions d'orientation : notons les, indifféremment de leur forme⁴³ α_0 et α_1 On calcule les orientations intermédiaires via une fonction d'interpolation γ :

$$\forall h \in [0, 1], \quad \gamma(\alpha_0, \alpha_1, h) \text{ avec } \gamma(\alpha_0, \alpha_1, 0) = \alpha_0 \text{ et } \gamma(\alpha_0, \alpha_1, 1) = \alpha_1$$

Une fois $\gamma(\alpha_0, \alpha_1, h)$ calculé, on calcule la matrice de la rotation associée $R(h)$ ⁴⁴.

4.3.2 Evaluation de la performance d'une formule d'interpolation

On affiche la position donnée par cette rotation. On répète ce procédé plusieurs fois. On prend en pratique un pas, $\delta = \frac{1}{n}$, et on calcule $n - 2$ quaternions intermédiaires⁴⁵ : $(q_{k\delta})_{k \in [1, n-1]}$

⁴⁰de façon efficace et fonctionnelle.

⁴¹Comme cela a déjà été montré dans la partie mathématique, si φ_q représente une rotation, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_{\lambda q}$ représente la même rotation. Si on impose à q d'être un quaternion unitaire, il n'y a plus que 2 possibilités : q et $-q$.

⁴²Le fait que ce revêtement soit à double feuillet, c'est à dire que q et $-q$ représentent la même rotation, oblige à quelques petits test préliminaire pour s'assurer que l'on parcourt bien le chemin le plus court, mais rien de rédhibitoire.

⁴³ α_0 et α_1 peuvent donc être des triplets de réels (Angles d'Euler), des matrices ou des quaternions.

⁴⁴Lorsque l'on manipule des quaternions, si le produit de quaternion existe dans les outils utilisés, on peut évidemment calculer directement $\varphi_q(\vec{v})$, où \vec{v} est un vecteur à déplacer, et donc ne pas recourir aux matrices..

⁴⁵ $q_{0 \times n} = q_1$ et $q_{n \times n} = q_2$ sont déjà connus, puisque ce sont les positions extrêmes.

On se fixe un point M sur l'objet, dont les coordonnées dans un des deux repères sont connues à l'instant initial, on s'intéresse à deux grandeurs :

1. On trace $\overrightarrow{OM}(h) = R(h)(\overrightarrow{OM}(0))$ dans l'espace, c'est la trajectoire que le point M suivra.
2. La vitesse d'interpolation constatée lors de l'animation est $\frac{d\|\overrightarrow{OM}\|}{dt} = \frac{d\|\overrightarrow{OM}\|}{dh} \frac{dh}{dt}$. Le logiciel d'animation contrôle $\frac{dh}{dt}$, on cherche en théorie à ce que $\frac{d\|\overrightarrow{OM}\|}{dh}$ soit «contrôlable, prévisible», l'idéal étant qu'il soit constant. On trace alors la grandeur $\frac{d\|\overrightarrow{OM}\|}{dh}$ en fonction du paramètre d'interpolation h .

4.3.3 Premier exemple simple

On prend un exemple où l'expression optimale de la fonction d'interpolation γ est intuitive.

- Ouverture d'une porte. Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et d'axe \vec{k} , on peut directement écrire la matrice des rotations intermédiaires.

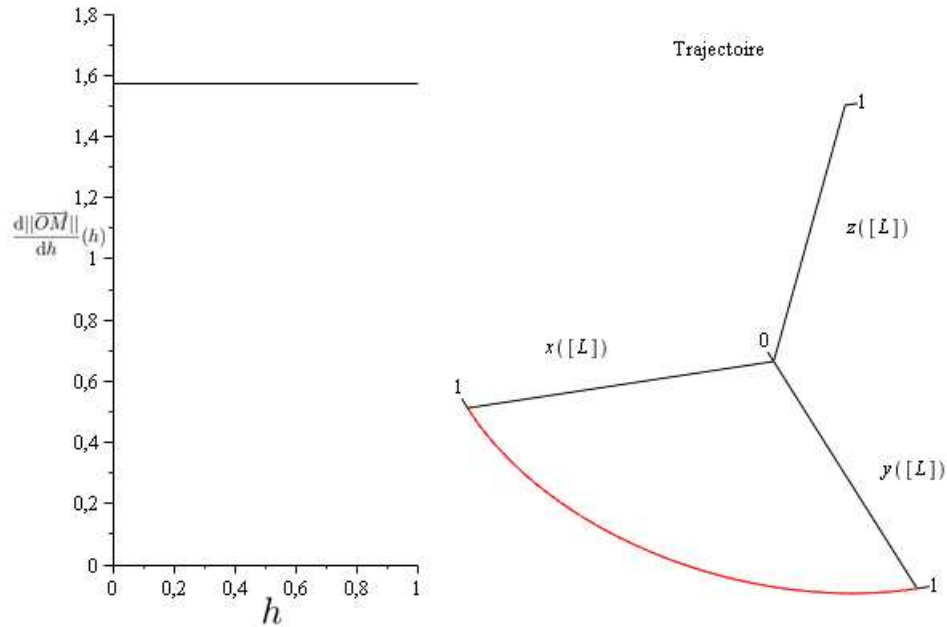
$$\forall h \in [0, 1], \quad R(h) = \begin{pmatrix} \cos(h\frac{\pi}{2}) & -\sin(h\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(h\frac{\pi}{2}) & \cos(h\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On trace les deux quantités indiquées à la section précédente avec MAPLE, on suit le point M vérifiant à $t = 0s$ $\overrightarrow{OM} = \vec{i}$:

$$R := h \rightarrow \begin{pmatrix} \cos(h\frac{\pi}{2}) & -\sin(h\frac{\pi}{2}) & 0 \\ \sin(h\frac{\pi}{2}) & \cos(h\frac{\pi}{2}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M := h \rightarrow R(h) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

```
> with(LinearAlgebra); with(VectorCalculus); with(plots);
> spacecurve(M(h), h = 0 .. 1, labels = [x([L]), y([L]), z([L])], title = "Trajectoire", color = red,
scaling = constrained, view = [0 .. 1, 0 .. 1, 0 .. 1], tickmarks = [[0, 1], [1], [1]], axes = normal);

> plot(Norm(diff(M(h), h)), h = 0 .. 1, view = [0 .. 1, 0 .. 1.8], color = black, scaling = constrained)
```



La trajectoire intuitive est bien la trajectoire optimale ici.

4.4 Les techniques inefficaces.

4.4.1 L'interpolation linéaire d'angles d'Euler.

On définit $\gamma(h) = (1 - h)e_1 + he_2$ pour $h \in [0, 1]$.

Lorsque e_1 et e_2 sont des triplets d'angles d'Euler, on a les problèmes suivants :

- Comportement potentiellement chaotique, pas de moyen de contrôler la qualité de la trajectoire⁴⁶. La présence éventuelle de singularités ne fait que renforcer ce constat.

4.4.2 L'interpolation linéaire de matrices orthogonales.

Lorsque $e1$ et $e2$ sont des matrices de rotations⁴⁷, on a les problèmes suivants :

- La matrice $\gamma(h)$ n'est *a priori* pas unitaire, donc elle peut représenter une homothétie ou même une transformation quelconque qui déformera l'objet lorsqu'on le transformera avec cette matrice⁴⁸
- Rendre la matrice unitaire est possible à l'aide d'algorithme d'*unitarisation*, mais c'est extrêmement coûteux en temp de calcul, et n'assure rien ici puisque les matrices $\gamma(h)$ peuvent être loin d'être orthogonales, on se retrouverait donc avec des rotations fantaisistes.

4.5 Interpolation par quaternion.

Les orientations extrêmes de l'objet sont représentées par les deux quaternions d'orientations q_0 et q_1 .

4.5.1 Test préliminaire

Quelque soit la méthode d'interpolation que l'on va employer, il faut toujours s'assurer que les quaternions q_0 et q_1 font entre eux un angle aigu, c'est à dire qu'il faut s'assurer que le produit scalaire de q_0 par q_1 est positif. Dans le cas contraire, on peut remplacer q_1 par $-q_1$ ou q_0 par $-q_0$. On rajoute donc avant toute chose l'étape :

$$\text{Si } q_0 \cdot q_1 < 0 \quad q_1 \longleftarrow -q_1$$

4.5.2 Interpolation linéaire

La formule de l'interpolation linéaire est classique : $\forall h \in [0, 1], \quad \gamma(h) = (1 - h)q_0 + hq_1$

Si l'on utilise pour matrice de φ_q :

$$\mathcal{M}_B(\varphi_q) = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2 \cdot (bc - ad) & 2 \cdot (ac + bd) \\ 0 & 2 \cdot (ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2 \cdot (cd - ab) \\ 0 & 2 \cdot (bd - ac) & 2 \cdot (ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

et non :

$$\mathcal{M}_B(\varphi_q) = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2 + b^2 - c^2 - d^2 & 2 \cdot (bc - ad) & 2 \cdot (ac + bd) \\ 0 & 2 \cdot (ad + bc) & a^2 - b^2 + c^2 - d^2 & 2 \cdot (cd - ab) \\ 0 & 2 \cdot (bd - ac) & 2 \cdot (ab + cd) & a^2 - b^2 - c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

Il n'y a aucune différence entre le fait de normer le quaternion intermédiaire ou non. Lorsque l'on utilise la deuxième avec des quaternions intermédiaires non normés, les positions extrêmes sont bien les mêmes (les quaternions extrêmes sont eux normés), mais la trajectoire et le profil de $\frac{d||OM||}{dh}$ diffèrent.

4.5.3 SLERP

C'est la méthode ultime pour l'interpolation entre deux rotations. Elle peut se formuler de deux façons différentes :
Puisque $q_0 \cdot q_1 = ||q_0|| ||q_1|| \cos \theta > 0$, on a $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$|\theta| \leftarrow \arccos \left(\frac{q_0 \cdot q_1}{||q_0|| ||q_1||} \right)$$

$$\forall h \in [0, 1], \quad \gamma(h) = \frac{1}{\sin(|\theta|)} [\sin((1 - h)|\theta|)q_0 + \sin(h|\theta|)q_1]$$

⁴⁶Ce sera le cas avec les quaternions où l'on pourra tester un produit scalaire pour s'assurer que c'est bien la courte trajectoire qui sera empruntée.

⁴⁷Tout est exprimé dans la base du repère de référence.

⁴⁸Penser à l'effet de la matrice d'un projecteur, ou d'une matrice diagonale sur l'objet.

En fait, si $\theta < 0$, la formule reste la même par imparité du sinus, donc on peut se contenter d'écrire θ .
Une autre formulation de SLERP est :

$$\forall h \in [0, 1], \quad \gamma(h) = q_0 \times (q_0^{-1} \times q_1)^h = q_0 \times \exp(h \ln(q_0^{-1} \times q_1))$$

Lorsque q_0 et q_1 sont unitaires, on peut les noter : $q_0 = e^{\frac{\theta}{2}\vec{u}} = (\cos(\frac{\theta}{2}), \sin(\frac{\theta}{2})\vec{u})$ et $q_1 = e^{\frac{\psi}{2}\vec{v}} = (\cos(\frac{\psi}{2}), \sin(\frac{\psi}{2})\vec{v})$

$$\forall h \in [0, 1], \quad \gamma(h) = e^{\frac{\theta}{2}\vec{u}} \times (e^{-\frac{\theta}{2}\vec{u}} \times e^{\frac{\psi}{2}\vec{v}})^h$$

Si le quaternion de départ est 1 (correspond à la rotation nulle), la relation est simplement :

$$\forall h \in [0, 1], \quad \gamma(t) = e^{\frac{h\psi}{2}\vec{v}} = \left(\cos\left(\frac{h\psi}{2}\right), \sin\left(\frac{h\psi}{2}\right)\vec{v} \right)$$

- Normalisé tout le long.
- Géodésique sur S^3 (si les deux quaternions extrêmes sont sur S^3)
- $\frac{d||\vec{OM}||}{dh}$ est toujours une constante pour la deuxième formulation, seulement lorsque $||q_0|| = ||q_1||$ pour la première.

4.6 Comparaison sur un exemple non-trivial

4.6.1 Position initiale

La base mobile coïncide avec la base considérée fixe. L'orientation du système est donc caractérisée initialement par :

- (0, 0, 0) en convention ZXY (On tourne autour des axes du repère mobile)
- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- $q_0 = (1, 0, 0, 0)$

4.6.2 Position finale

On la définit en angle d'Euler en faisant en sorte de choisir une bonne amplitude pour les angles, et en passant une singularité, mettant en évidence l'innéficacité des angles d'Euler en interpolation (linéaire, mais il n'y a pas d'autres méthodes).

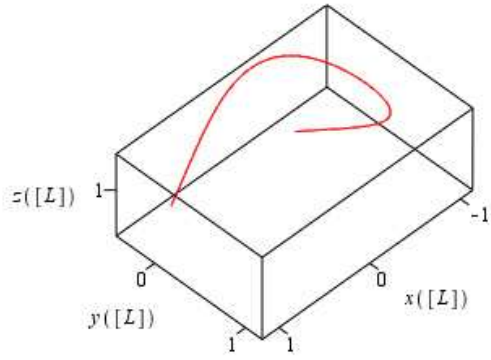
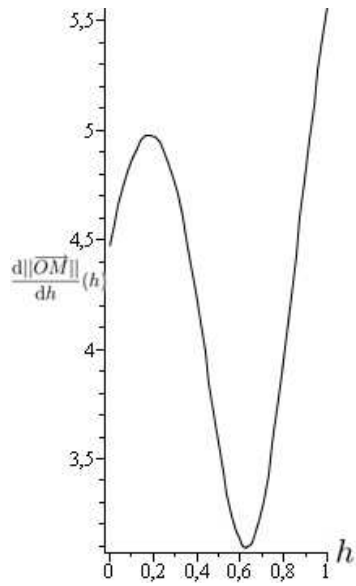
On choisit une position finale caractérisée par :

- $(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{2\pi}{3})$
- $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ (obtenu par calcul en multipliant trois matrices de rotations obtenues d'après les angles d'Euler)
- $q_1 = e^{\frac{\pi}{3}\vec{j}} \times_{\mathbb{H}} e^{\frac{\pi}{2}\vec{i}} \times_{\mathbb{H}} e^{\frac{\pi}{4}\vec{k}}$ (idem que pour les matrices)

4.6.3 Résultats

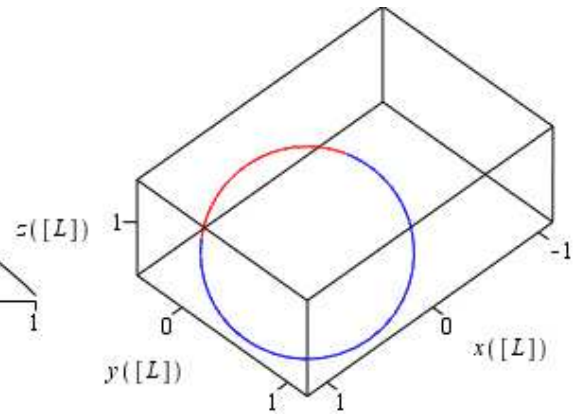
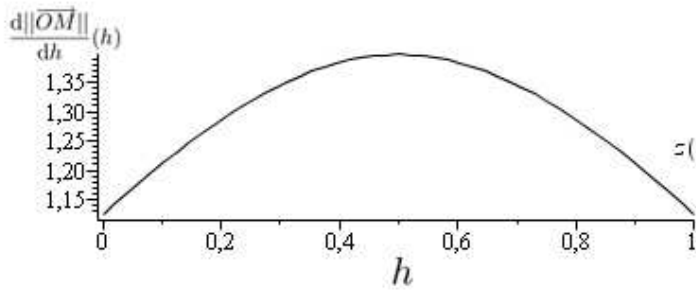
Interpolation linéaire avec Angles d'Euler

$$\forall h \in [0, 1] \quad \gamma(h) = (1 - h)(0, 0, 0) + h\left(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{2\pi}{3}\right)$$



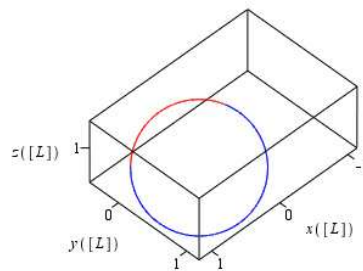
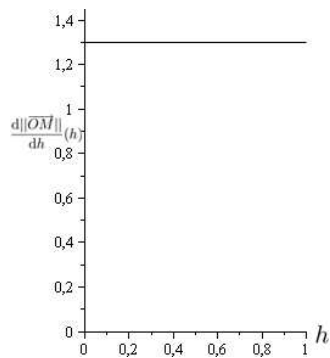
Interpolation linéaire avec Quaternion

$$\forall h \in [0, 1] \quad \gamma(h) = (1 - h)q_0 + hq_1 \quad \textcolor{red}{q_1} \leftarrow -q_1 \quad \textcolor{blue}{q_1} \leftarrow q_1$$



Interpolation SLERP

$$\forall h \in [0, 1] \quad \gamma(h) = q_0(q_0^{-1}q_1)^h = q_0 \exp(h \ln(q_0^{-1}q_1)) \quad \textcolor{red}{q_1} \leftarrow -q_1 \quad \textcolor{blue}{q_1} \leftarrow q_1$$



4.7 Interpolation entre plus de deux rotations

Une technique analogue aux courbes de Bézier est SQUAD. La diversité des méthodes reposent sur la diversité des critères permettant de définir une bonne courbe d'interpolation. La technique SPRING impose à la courbe d'être de classe C^4 et de minimiser la courbure : cette condition impose une équation différentielle que la courbe souhaitée doit vérifier. Impossible à réaliser avec MAPLE, calculs trop lourds.

4.8 Animation d'un squelette («joints»)

Il y a une hiérarchie : à chaque élément i du squelette on associe une rotation, qui transforme la base vectorielle lié à l'élément parent $i - 1$ en la base vectorielle lié à l'élément i . Ainsi, pour obtenir la position finale d'un élément, il faut d'abord appliquer les rotations associées à ses parents (exemple : mouvement du bras qui entraîne avec lui l'avant bras et la main, puis mouvement du bras qui entraîne avec lui la main, et enfin mouvement de la main seule.) L'orientation du squelette à un instant donné est repéré par l'ensemble de ces rotations, appelé *vecteur d'état*.

On distingue alors deux types de méthodes :

La cinématique directe On définit directement le vecteur d'état et on en déduit les positions correspondantes. C'est ce qui a été fait dans les exemples (simples). C'est une méthode difficilement applicable sur un squelette par exemple.

La cinématique inverse «inverse kinematics» La cinématique inverse est la méthode au coeur de l'animation : on ne définit que des positions dans l'espace (Par exemple position des pieds) et on cherche à trouver les vecteurs d'état (Forme de la jambe entière) qui correspondent à ces positions, l'objectif étant de retenir le plus crédible.

Troisième partie

Bibliographie

Aspect historique

- Des grandeurs aux espaces vectoriels. La linéarité comme fil conducteur - 4eme Partie - Chap 14 - Henri BAREIL
- A History of Vector Analysis - Michael J. CROWE
- The Forgotten Quaternions - Ryan J. WISNESKY
- Publications originales du 19ème siècle : HEAVISIDE, TAIT, GIBBS, MAXWELL.

Aspects mathématiques

Quaternions en tant que tels

- Cours Quaternions : Université PMC (Agrégation externe), ENS, INRIA
- De l'anti-symétrie au centre du corps des quaternions - N.LYGEROS
- Quaternions et Rotations - Université de Rennes
- Introduction to Quaternions- Jason HANSON
- «Quaterman», une bibliothèque MAPLE de calculs sur l'algèbre des Quaternions - INRIA
- Polar and axial vectors versus quaternions - C.CELESTINO SILVAA and R. de ANDRADE MARTINS

Étude des définitions et des théorèmes fondamentaux de topologie différentielle

- WIKIPEDIA

Aspects pratiques

Mécanique du solide

- Quaternions - Définitions et Applications aux rotations dans l'espace - Jean Claude RADIX
- Représentation des attitudes - ISAE - Michel LLIBRE
- Commande d'attitude d'un satellite par l'algèbre des Quaternions et l'équation d'Hamilton - Beroual LOUARDI
- The Quaternions with an application to Rigid Body Dynamics - University of New Mexico - A. COUTSIAS & L. ROMERO
- Système de Contrôle d'attitude et d'orbite - Univ. de la Méditerranée - Robert GUIZIOU

Interpolation

- Quaternions, Interpolation and Animation - Department of Computer Science University of Copenhagen - E.B DAM, M. KOCH, M. LILLHOLM

- Practical Parameterization of Rotations Using the Exponential Map - Carnegie Mellon University - F. Sebastian GRASSIA
- Rotations and Interpolations - Instituto Nacional De Matematica Pura e Aplicada - A. SCHULZ L. VELHO
- Rotation Representations and Performance Issues - David EBERLY
- Projet Quaternions - Université de Technologie de Belfort-Montbéliard - Béatrice FREY et Cyril CRASSIN

Quatrième partie

Annexe A : Compléments mathématiques et physique.

Énonce des résultats ou rappelle des notions auxquelles il a été fait allusion dans ce dossier.

Espace vectoriel sur un corps \mathbb{K}

- $(E, +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel si :
- $(E, +)$ est un groupe abélien.
 - $(\mathbb{K}, +_{\mathbb{K}}, \times_{\mathbb{K}})$ est un corps (unitaire) commutatif.
 - La loi externe, noté « \cdot » vérifie : $\forall(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall(x, y) \in E^2$,
 1. $(\alpha +_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
 2. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
 3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \times_{\mathbb{K}} \beta) \cdot x$
 4. $1_{\mathbb{K}} \cdot x = x$

Théorème de Frobenius

On peut énoncer le théorème de Frobenius de la façon suivante :

A un isomorphisme près, il n'y a que trois \mathbb{R} -algèbres de dimension finie qui sont des corps, à savoir \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{H} .

Orientation d'un espace euclidien

Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases d'un espace euclidien, on dit que \mathcal{B} et \mathcal{B}' ont même orientation si $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') > 0_{\mathbb{R}}$. La relation $\mathcal{B} \mathcal{R} \mathcal{C} \iff \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{C}) > 0$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble des bases. Si \mathcal{B} et \mathcal{B}' sont deux bases orthonormée d'un espace euclidien ayant même orientation, on a : $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}'}$.

Action de groupe

Soit $(G, *)$ un groupe, d'élément neutre noté e , et E un ensemble.

On dit que G agit sur E s'il existe une application $\psi : (G, E) \longrightarrow E$ vérifiant les propriétés suivantes pour $(g, g') \in G^2$ et $x \in E$:

- $\psi(g, x) \in E$
- $\psi(e, x) = x$
- $\psi(g', \psi(g, x)) = \psi(g' * g, x)$

Par exemple, le groupe des Quaternions unitaires agit sur l'ensemble des quaternions purs par l'action de *conjugaison* présentée dans ce dossier. Une action de conjugaison est du type $(g, x) \mapsto g * x * g^{-1}$.

Vecteur rotation d'un solide indéformable

Soit Σ un solide indéformable en dont on étudie le mouvement dans un référentiel $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$. Le vecteur rotation du solide Σ en mouvement dans le référentiel \mathcal{R} , noté $\vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R})$, est le vecteur qui vérifie :

$$\text{Pour tout vecteur } \vec{u} \text{ lié au solide } \Sigma, \quad \left(\frac{d\vec{u}}{dt} \right)_{\mathcal{B}} = \vec{\Omega}(\Sigma/\mathcal{R}) \wedge \vec{u}$$

Cinquième partie

Annexe B : Histoire de l'analyse vectorielle.

Cette partie ne sera pas développée durant l'exposé, elle me semble néanmoins importante dans l'étude des quaternions ; Il s'agit d'un résumé, s'appuyant sur les écrits originaux, de l'influence qu'ils ont eu dans la mise au point du calcul vectoriel.

La genèse du calcul vectoriel a lieu durant le 19-ème siècle, et, alors que l'interprétation géométrique des nombres complexes a pris plus de deux siècles, elle sera rapide, s'étalant essentiellement de 1843 à 1881. Ceci peut s'expliquer par le besoin des physiciens de l'époque : nous sommes en plein développement de l'électromagnétisme.

Jérôme Cardan est un des premiers, dans son *Ars Magna*, à mettre en évidence l'impossibilité de résoudre certains systèmes sans introduire de quantité comme $\sqrt{-5} (= i\sqrt{5})$. Il cite le système

$$\begin{cases} 10 & = x + y \\ x \times y & = 30 \end{cases}$$

L'interprétation géométrique des nombres complexes sera faite par divers auteurs, dans des publications souvent simultanées : Wessel (1799), Argand (1806), Buée (1806), Warren (1828), Mourey (1828). Mais la plupart de ces publications restent confidentielles et c'est Gauss qui clôt le sujet en publiant ses travaux en 1831 (travaux qu'il avait en réalité terminés dès 1799). Le traitement de la géométrie du plan par les nombres complexes étant désormais répandu et accepté, de nombreux mathématiciens chercheront à généraliser ces nombres à l'espace.

Les deux principaux pionniers dans ce domaine apparaissent comme étant l'irlandais Sir W. R. Hamilton (1805-1865) et l'allemand H. G. Grassmann (1809-1877).

Hamilton Depuis 1830, Hamilton, physicien et mathématicien très réputé, cherche à créer un corps sur les triplets⁴⁹ ; Il ne réussira à l'obtenir que sur des quadruplets⁵⁰, et en acceptant d'abandonner la commutativité, ce qui est une première : il invente ainsi les quaternions en 1843. Fasciné par sa découverte, Hamilton finira sa vie à étudier les quaternions, et écrira pas moins de 109 papiers et deux immenses livres sur le sujet *Lectures on Quaternions* (1854), *Elements of Quaternions* (1866, posthume) d'ailleurs perçu comme ésotérique par bon nombre de ses contemporains, aussi bien dans le fond que dans la forme. En 1846, il introduit la distinction entre les *scalaires* et les *vecteurs*, qui correspondent respectivement aux quaternions scalaires et vectoriels. Cette distinction sera dès lors incontournable, et les quaternions ne seront que très rarement utilisés en tant que tel : on utilisera soit leur partie scalaire, soit leur partie vectorielle. Il est remarquable de noter qu'Hamilton est le premier à introduire l'opérateur que l'on nomme aujourd'hui nabla :

$$\nabla = \frac{d}{dx}i + \frac{d}{dy}j + \frac{d}{dz}k$$

Grassmann Grassmann n'a pas eu une grande influence sur la genèse de l'analyse vectorielle - ses travaux étant largement méconnus et incompris au 18ème - mais il fut un précurseur exceptionnel. Ses publications en 1840 et 1844 sont à ce titre remarquables : il y formalise les espaces vectoriels, le produit extérieur, le produit scalaire, les algèbres extérieures... Mais le style de Grassmann le rend incompréhensible pour ses lecteurs, et il ne lui sera rendu justice qu'un siècle plus tard. Hamilton félicite Grassmann pour ses théories dans son *Lectures on Quaternions* (1853) mais assure qu'elles n'ont rien à voir avec les quaternions.

Les Quaternions vont principalement donner naissance à l'analyse vectorielle, et tomberont dans un relatif oubli par la suite. (Au delà de leur intérêt mathématique qui fut de mettre en évidence une loi non-commutative).

⁴⁹Échange entre Hamilton et son fils : "Well, Papa, can you multiply triplets?" "No, I can only add and subtract them."

⁵⁰Cela est traduit mathématiquement par le théorème de Frobenius

Le développement de l'analyse vectorielle

Rappelons l'expression du produit de deux quaternions mettant en évidence les vecteurs, et les opérations associées :

$$\forall (q, p) \in \mathbb{H}^2, \quad p \times q = (a, \vec{u}) \times (b, \vec{v}) = (ab - \vec{u} \cdot \vec{v}, a\vec{v} + b\vec{u} + \vec{u} \wedge \vec{v})$$

Un lecteur moderne voit alors facilement que la partie scalaire du produit de deux quaternions purs ($a = b = 0$) est l'opposé du produit scalaire (ce signe moins, difficilement interprétable physiquement, aura un rôle dans l'abandon des quaternions), et sa partie vectorielle est le produit vectoriel.

Hamilton a ouvert la voie en distinguant les scalaires et les vecteurs, il s'agit maintenant de définir et d'utiliser les produits scalaires et vectoriels.

L'écossais P.G.Tait (1831–1901), le plus fervent défenseur des Quaternions, manipule ces deux produits très tôt, dans son *Elementary Treatise of Quaternions* (1873). Il introduit les notations suivantes, pour α et β deux vecteurs :

$$S\alpha\beta = S\beta\alpha \quad V\alpha\beta = -V\beta\alpha$$

il manipule dès lors implicitement l'opposé du produit scalaire et le produit vectoriel, mais se refuse à définir ces opérations en dehors du produit des quaternions. Tait donne de nombreuses applications des quaternions à la mécanique et aux problèmes physiques concrets (il écrira plus de 70 papiers sur le sujet), et sa prose plus facile à rendu accessible les quaternions. La meilleure illustration en est donnée par J. C. Maxwell (1831–1879), ami d'enfance de Tait, qui va utiliser les Quaternions, en plus des coordonnées cartésiennes, pour exprimer certains résultats, dans son *Treatise on electricity and magnetism* (1871). Il reprend les notations de Tait, qui sont représentées ici avec leur équivalent moderne :

$$U = xi + yj + zk \longleftrightarrow \vec{U} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Par calcul :

$$\begin{aligned} \nabla \times_{\mathbb{H}} U &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k \right) \times_{\mathbb{H}} (xi + yj + zk) \\ &= - \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) k \end{aligned}$$

Force dérivant d'un potentiel :

$$\mathfrak{F} = -\nabla \longleftrightarrow \vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

Opérateur d'analyse vectoriel : Maxwell propose d'appeler $S\nabla \times U$ *convergence* (c'est l'opposé de notre divergence) et $V\nabla \times U$ *curl* (c'est le même que notre rotationnel)

$$\begin{aligned} S\nabla \times U &= - \left(\frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z} \right) \longleftrightarrow \nabla \cdot \vec{U} = \text{div} \vec{U} \\ V\nabla \times U &= \left(\frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right) k \longleftrightarrow \nabla \wedge \vec{U} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \end{aligned}$$

L'opérateur de Laplace est également défini :

$$\nabla^2 = - \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \longleftrightarrow \nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Il formule également ce qui est aujourd'hui connu sous le nom de Théorème de Stokes et D'Ostrogradsky (On remarque la lourdeur des notations, qui prête facilement à confusion sur les quantités manipulées : scalaires ou vecteurs ?) :

$$\begin{aligned} \iiint S \nabla U dv &= \iint S \cdot U nds \longleftrightarrow \iiint \text{div} \vec{U} dv = \oint \vec{U} \cdot \vec{ds} \\ \iint S U dl &= \iint S \cdot \nabla U nds \longleftrightarrow \oint \vec{U} \cdot \vec{dl} = \iint \overrightarrow{\text{rot}} \vec{U} \cdot \vec{ds} \end{aligned}$$

L'électromagnétisme, et en grande partie Maxwell, va populariser l'utilisation des vecteurs en physique. Mais le formalisme des quaternions va vite être perçu comme un obstacle (Quel sens donner au produit de deux Quaternions ? Au signe - devant la partie scalaire d'un produit de vecteur ?), c'est alors que l'américain J.W. Gibbs (1839-1903) et l'anglais Heaviside (1850-1925) vont mettre, indépendamment au point l'analyse vectoriel moderne, en extrayant du produit de quaternions purs le produit scalaire (en enlevant le -) et le produit vectoriel. *Vector Analysis* (1901) présentant le système de Gibbs et le chapitre 3 d' *Electromagnetic theory* (1893) d'Heaviside utilisent exactement les mêmes notations que celles qui sont utilisées actuellement.

Ce qui unit les démarches de Gibbs et d'Heaviside est ce scepticisme envers l'utilisation directe des Quaternions :

«[...] where Quaternion notations are considerably used, I became convinced that to master those subjects, it was necessary for me to commence by mastering those methods. At the same time I saw, that although the methods were called quaternionic, the idea of the quaternion was quite foreign to the subject. I saw that there were two important functions (or products) called the vector part & the scalar part of the product, but that the union of the two to form what was called the (whole) product did not advance the theory as an instrument of geometric investigation.» (J.W Gibbs, lettre à V.Schlegel, 1888)

Heaviside, auto-didacte et physicien de génie, avait une sainte horreur de la complexité des Quaternions, et l'exprime très clairement au chapitre 3 de son *Electromagnetic Theory* (1893)

«But I came later to see that, so far as the vector analysis I required was concerned, the quaternion was not only not required, but was a positive evil of no inconsiderable magnitude; and that by its avoidance the establishment of vector analysis was made quite simple and its working also simplified, and that it could be conveniently harmonised with ordinary Cartesian work.»

«Clearly, then, the quaternionic is an undesirable way of beginning the subject, and impedes the diffusion of vectorial analysis in a way which is as vexatious and brain-wasting as it is unnecessary.»

Si les systèmes de Gibbs et de Heaviside se sont finalement imposés, la fin du 19ème siècle a été marquée par une lutte entre les partisans des différentes méthodes (Hamilton, Gibbs-Heaviside et Grassmann), donnant lieu à des correspondances passionnées, qui demanderait de nombreuses pages pour être couvertes exhaustivement.

Par exemple, P.Tait, à propos du système de Gibbs :

«Even Prof. Willard Gibbs must be ranked as one of the retarders of quaternionic progress, in virtue of his pamphlet on Vector Analysis, a sort of hermaphrodite monster, compounded of the notations of Hamilton and Grassmann.»

Sixième partie

Annexe C : Notions de base de topologie

Définition d'un espace topologique par les ouverts

Un espace topologique est un couple (E, T) , où E est un ensemble et T un ensemble de parties de E que l'on définit comme les ouverts de (E, T) , vérifiant les propriétés suivantes :

- L'ensemble vide et E appartiennent à T .
- Toute réunion d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille (finie ou infinie, dénombrable ou indénombrable) d'éléments de T , alors $\bigcup_{i \in I} O_i \in T$.
- Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert, c'est-à-dire si O_1, \dots, O_n sont des éléments de T ($n > 0$), alors $O_1 \cap \dots \cap O_n \in T$.

L'ensemble T , qui est un ensemble de parties de E , est alors appelé une topologie sur E .

Il est d'usage de rappeler la présence de la partie vide à la propriété 1; c'est toutefois en toute rigueur superflu, puisqu'on peut l'obtenir en appliquant la propriété 2 à la réunion indexée par l'ensemble vide.

Remarques :

Un fermé d'une topologie est défini comme le complémentaire d'un ouvert. Par conséquent, la famille des fermés contient E et l'ensemble vide.

Il résulte de la théorie élémentaire des ensembles que toute intersection de fermés est un fermé et que toute réunion finie de fermés est un fermé.

Pour un point a de E , on appelle alors voisinage de a pour cette topologie n'importe quelle partie de E qui inclut un ouvert qui contient a .

Les ouverts de la topologie sont alors les sous-ensembles de E voisinages de chacun de leurs points.
À l'inverse, les voisinages d'un point sont les sous-ensembles de E incluant un ouvert contenant ce point.

Espace topologique séparé

Un espace topologique est dit *séparé* si deux points distincts quelconques admettent toujours des voisinages disjoints.

Topologies particulières

Deux topologies sur E ont des noms particuliers : la topologie *grossière* ($T = \{\emptyset, E\}$, deux points ne peuvent jamais être séparés) et la topologie *discrète* ($T = \{\mathcal{P}(E)\}$, tous les points peuvent être séparés)

Base d'une topologie

La base d'une topologie est un ensemble d'ouverts tel que tout ouvert de la topologie soit l'union d'éléments de cet ensemble.

Espace métrique

Un espace métrique est un couple (E, d) où E est un ensemble non-vide et d une *distance*.

Les critères de la distance sont :

- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y)$ existe et $d(x, y) \in \mathbb{R}_+$
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- $\forall (x, y) \in E^2, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparation) ;
- $\forall (x, y, z) \in E^3, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).

Notions métriques

Les notions de boule, de borné (c'est-à-dire inclus dans une boule), de suite de Cauchy, de continuité uniforme, etc. ne sont pas des notions topologiques mais métriques, susceptibles de varier selon la distance choisie.

Topologie induite par une distance d On appelle ouvert de E , tout ensemble U tel que pour tout x de U , il existe une boule ouverte de centre x , de rayon non nul, et incluse dans U : $U \subset E$ ouvert de $E \iff \forall x \in U, \exists r > 0, B(x, r) \subset U$.

L'ensemble de ces ouverts constitue alors une topologie sur E , dite « topologie induite par la distance » d . Un espace topologique est dit *métrisable* s'il existe une distance induisant sa topologie ; cette distance n'est jamais unique. Dans cette topologie, les voisinages d'un point sont tous les sous-ensembles contenant une boule ouverte centrée sur ce point.

Variété topologique On dit que V est une variété topologique si :

- V est un espace topologique séparé, à base dénombrable.
- il existe un entier naturel n tel que tout point $x \in V$ admet un voisinage homéomorphe à un ouvert de l'espace vectoriel topologique \mathbb{R}^n (ou \mathbb{C}^n dans le cas complexe)

$\forall x \in M$, il existe un voisinage ouvert U_x et un homéomorphisme $\varphi_x : U_x \longrightarrow \varphi_x(U_x) \subset \mathbb{R}^n$.

D'après le théorème de l'invariance du domaine, l'entier naturel n tel que V soit localement homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n est unique ; on l'appelle dimension de la variété topologique V .

Certains auteurs généralisent la définition de variété topologique en permettant que la dimension puisse varier d'un point à l'autre, et alors une variété topologique telle que définie plus haut est dite pure. Si la variété topologique est connexe, alors elle est nécessairement pure.

On dit alors que (U_x, φ_x) est une carte locale de M .

Une famille de cartes $(U_i, \varphi_i)_i$ qui recouvre (entièrement) M constitue un atlas de la variété M .

Un tel atlas est dit de classe C^k , $1 \leq k \leq +\infty$ si : pour tous les indices i, j tels que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, l'application de changement de cartes

$$\varphi_i \circ \varphi_j^{-1} : \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j)$$

est un difféomorphisme de classe C^k .

Exemple Dans le cas du cercle, les cartes (U_i, φ_i) sont des applications de deux variables, qui à un point du cercle associe la coordonnée qui suffit pour décrire la position du point sur la partie du cercle considéré (U_i) . Une application du type $x \rightarrow \sqrt{1-x^2}$ est une application de changement de cartes, permettant de passer du système de coordonnées x choisi pour la première carte au système de coordonnées y choisi pour la seconde.

Variété différentielle (ou différentiable) Deux atlas de classe C^k sur une même variété topologique M sont dits compatibles lorsque leur réunion est encore un atlas de classe C^k . La relation de compatibilité ainsi introduite est une relation d'équivalence pour les atlas.

Les classes d'équivalence définissent la structure de variété différentielle : une variété différentielle (ou variété différentiable) de classe C^k est une variété topologique munie d'une famille d'atlas de classe C^k tous compatibles avec un atlas donné. Une variété lisse est une variété différentielle de classe C^∞ .

Dans chaque classe d'équivalence existe un représentant privilégié, l'atlas maximal, obtenu en considérant toutes les cartes compatibles avec l'atlas initial.

Revêtement d'un espace topologique par un autre

Un revêtement d'un espace topologique B par un espace topologique E est une application continue et surjective $p : E \rightarrow B$ telle que tout point $b \in B$ admette un voisinage ouvert U tel que l'image réciproque de U par p soit une union disjointe d'ouverts de E , chacun homéomorphe à U par p . Chacun de ces ouverts disjoints est appelé *feuille*. (Ils ont donc une définition locale) On dit que E est un revêtement de B défini par p .

Propriété des revêtements

Un revêtement universel d'un espace B est un revêtement galoisien E tel que tout revêtement soit isomorphe à un revêtement associé à E (non nécessairement connexe). C'est-à-dire que pour tout revêtement D de B , il existe un morphisme de E sur D .

Deux revêtements universels sont isomorphes et tout revêtement d'un revêtement universel est trivial.

Théorème — Un revêtement simplement connexe E est un revêtement universel.

En particulier tout graphe, toute variété topologique admet un revêtement simplement connexe.

Connexité

Un objet est dit connexe s'il est fait d'un seul « morceau », dans le cas contraire, chacun des morceaux est une composante connexe de l'objet étudié.

Soit un espace topologique E . Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :

- E n'est pas la réunion de deux ouverts non vides disjoints
- E n'est pas la réunion de deux fermés non vides disjoints
- Il n'existe pas dans E de sous-ensemble à la fois ouvert et fermé distinct du vide et de E
- Toute application continue de E dans un ensemble à deux éléments muni de la topologie discrète est constante.

Dans le cas où ces conditions sont remplies on dit que l'espace E est connexe.

Une partie X d'un espace topologique E est dite connexe si elle est un espace connexe lorsqu'elle est munie de la topologie induite.

Résultats

L'image continue d'un connexe est un connexe : Plus précisément si E est un espace connexe, F un espace topologique et $f : E \rightarrow F$ une application continue, alors $f(E)$ est une partie connexe de F .

Les connexes de \mathbb{R} sont exactement les intervalles.

Connexité par arcs

C'est un cas particulier de la connexité : connexité par arcs implique connexité, mais la réciproque est fausse (Les contre exemple font appel à la notion de limite)

Un espace topologique E est dit connexe par arcs si et seulement si tout couple de points de E est relié par un chemin.

Une partie A de E est dite connexe par arcs si et seulement si tout couple de points de A est relié par un chemin restant dans A .

Résultat

La connexité par arcs, comme la connexité, est conservée par les applications continues. Si E et F sont deux espaces topologiques, et si $f : E \rightarrow F$ est une application continue, alors pour toute partie connexe par arcs X de E , l'image $f(X)$ est elle aussi connexe par arcs.

Chemin

Si E est un espace topologique et si x et y sont deux points de E , on appelle arc (ou chemin) d'origine x et d'extrémité y toute application continue $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

On dit que x et y sont reliés si et seulement s'il existe un chemin d'origine x et d'extrémité y .

La relation « x est relié à y » est une relation d'équivalence sur E .

Lacet

Un lacet sur E est un chemin sur E dont l'origine et l'extrémité sont confondues.

De façon équivalente :

Un lacet sur X est une application continue de S^1 vers X (où S^1 désigne le cercle unité $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$).

Chemin homotopes

Deux chemins sont dits homotopes lorsqu'il est possible de « passer continument » d'un chemin à l'autre.

Connexité simple

C'est un cas particulier de la connexité par arcs : là où un espace connexe par arcs est simplement « d'un seul tenant », un espace simplement connexe est de plus sans « trou » ni « poignée ».

On formalise cela en disant que tout lacet tracé dans un espace simplement connexe doit pouvoir être réduit continûment (c'est-à-dire par homotopie) à un point.

Convexité

Un ensemble C est dit convexe lorsque, pour tout x et y de C , le segment $[x, y]$ est tout entier contenu dans C , i.e. :

$$\forall x, y \in C, \quad \forall t \in [0, 1], \quad tx + (1 - t)y \in C$$

Groupe de Lie

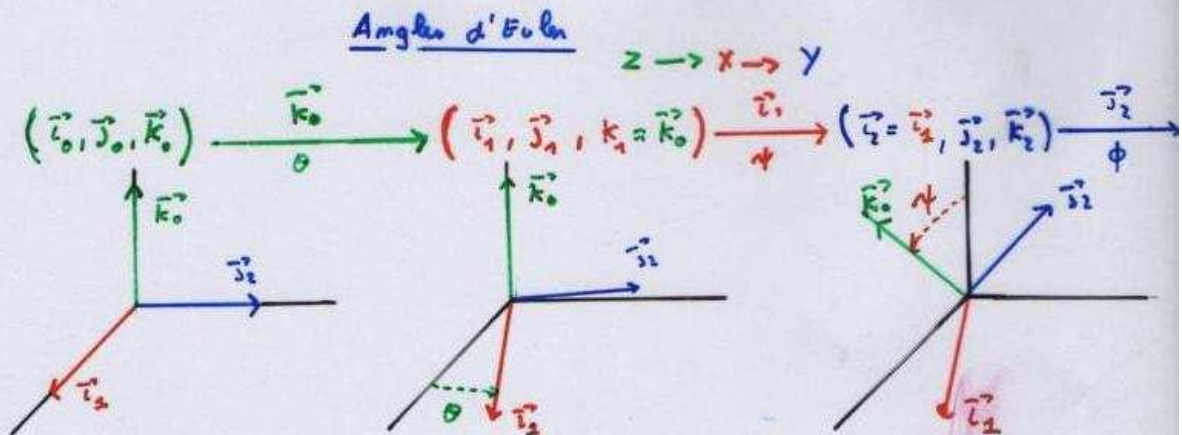
$(G, *)$ est un groupe de Lie si :

- $(G, *)$ est un groupe.
- G est une variété différentielle
- Les deux applications :

$$\psi : G \rightarrow G, x \mapsto x^{-1} \quad \varphi : (G \times G) \rightarrow G, (x, y) \mapsto x * y$$

sont des applications différentiables.

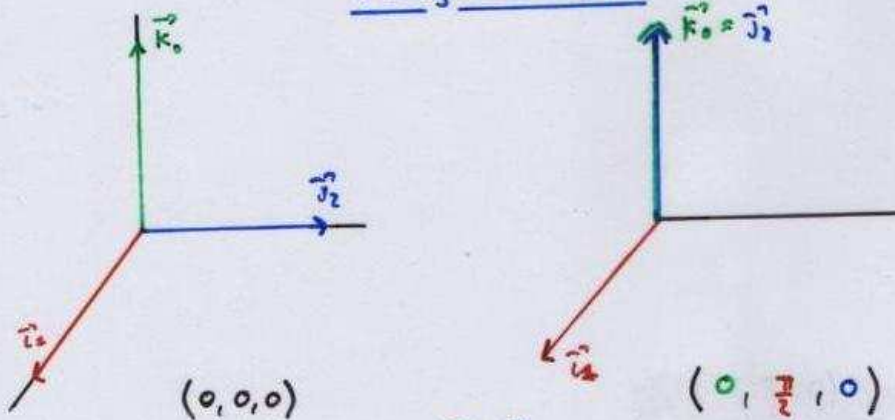
Annexe D : Le blocage de Cardan



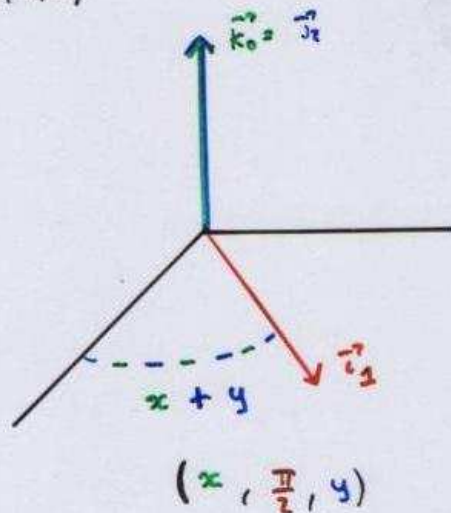
Hierarchie

{ Tourner autour de \vec{k}_0 déplace \vec{i}_1 et \vec{j}_2
 " " \vec{i}_1 " \vec{j}_2
 " " \vec{j}_2 "

Blocage de Cardan



$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

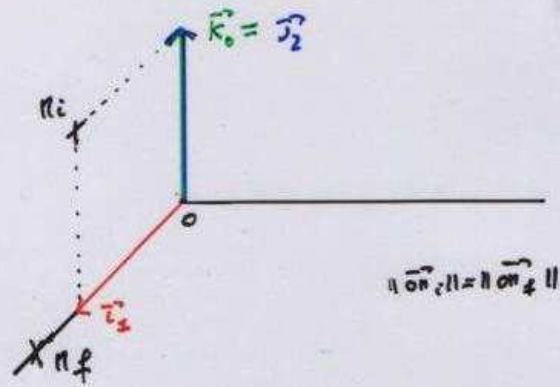


Plus que 2
rotations
possibles

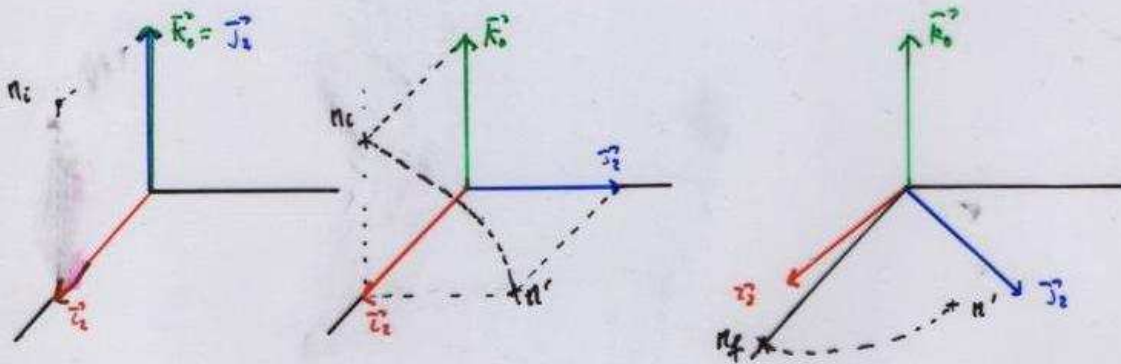
Conséquences sur l'interpolation d'un mouvement (point à l'extrémité d'une barre) : On ne peut directement tourner autour de l'axe y , donc on doit d'abord tourner autour de \vec{i}_1 puis autour de \vec{k}_0 , ce qui génère une trajectoire qui n'est pas idéale (La trajectoire idéale laisse le point M évoluer dans le plan $(O, \vec{i}_0, \vec{j}_0)$).

Interpolation et blocage de Cardan

Position initiale: n_i
 finale: n_f



2 étapes



Trajectoires suivies

