



**HAL**  
open science

## Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie avec phase d'hydrolyse

Yessmine Daoud, N. Abdellatif, Jérôme Harmand

► **To cite this version:**

Yessmine Daoud, N. Abdellatif, Jérôme Harmand. Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie avec phase d'hydrolyse. TAMTAM 2015, May 2015, Tanger, Maroc. hal-01617968

**HAL Id: hal-01617968**

**<https://hal.science/hal-01617968>**

Submitted on 17 Oct 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Analyse mathématique d'un modèle de digestion anaérobie avec phase d'hydrolyse

Y. DAOUD <sup>(1)\*</sup>, N. ABDELLATIF <sup>(1,2)\*\*</sup>, J. HARMAND <sup>(3)\*\*\*</sup>

<sup>1</sup> Université Tunis El-Manar, ENIT, LAMSIN, BP 37,1002 Tunis, Tunisie

<sup>2</sup> Université de Manouba, Ecole nationale des sciences de l'informatique, Campus universitaire, 2010 Manouba, Tunisie

<sup>3</sup> INRA UR0050, Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement Avenue des Étangs, 11100 Narbonne, France  
et Modemic (Inra/Inria), UMR Mistea, 2 place Viala, 34060 Montpellier, France

\* daoud-yessmine@yahoo.fr

\*\* nahla.abdellatif@ensi.rnu.tn

\*\*\* jerome.harmand@supagro.inra.fr

**Résumé:** Récemment, Weedermann et coll., [1] ont proposé un modèle de la digestion anaérobie en trois étapes : l'acidogenèse, l'acétogenèse et la méthanogenèse. L'étude faite dans [1], combine et étend des résultats récents de Sari et Hajji,[2], et de Hess et Bernard,[3], qui peuvent être considérés comme deux sous-modèles du modèle considéré dans [1]. Or, il est établi que l'étape limitante de la digestion anaérobie est très souvent l'étape d'hydrolyse. Rajoutant cette phase au modèle de Weedermann, nous étudions ici un nouveau modèle en 4 étapes. Dans un premier temps, on analyse les modèles proposés, avec et sans inhibition et on détermine le nombre et la nature de leurs équilibres ainsi que leur propriétés de stabilité et leur région de stabilité. Ensuite, on s'intéresse aux taux de production de l'hydrogène et du méthane aux points d'équilibre. Pour chaque équilibre, le taux de biogaz produit est déterminé.

**Mots clés:** digestion anaérobie, chemostat, stabilité locale et globale, production de biogaz.

### 1 Analyse de modèles de la digestion anaérobie avec et sans inhibition

La digestion anaérobie (D.A.) est un processus naturel au cours duquel la matière organique est transformée en biogaz dans un milieu sans oxygène par l'action d'un écosystème microbien. Il est utilisé pour le traitement des eaux usées ou des déchets et présente l'avantage de produire du méthane et/ou de l'hydrogène. La digestion anaérobie est un processus en quatre étapes comprenant l'hydrolyse, l'acidogenèse, l'acétogenèse, et la méthanogenèse. Au cours de la première étape, les molécules organiques complexes ( $X_0$ ) sont décomposées en substrats simples ( $S$ ). Pendant l'acidogenèse, les bactéries acidogènes ( $X_S$ ) convertissent le substrat ( $S$ ) en acide acétique ( $A$ ), acides gras volatiles (ou AGV) ( $V$ ) et alcools, hydrogène ( $H$ ) et dioxyde de carbone. Ensuite, les AGV et les alcools sont utilisés par les bactéries acétogènes ( $X_V$ ) et convertis en acide acétique ( $A$ ) ainsi qu'en dioxyde de carbone et hydrogène ( $H$ ). Dans la phase finale, les méthanogènes acétoclastiques ( $X_A$ ) convertissent l'acide acétique ( $A$ ) en méthane et en dioxyde de carbone, tandis que les méthanogènes hydrogénéotrophes ( $X_H$ ) convertissent l'hydrogène ( $H$ ) et le dioxyde de carbone en méthane.

La digestion anaérobie est inhibée par un certain nombre de facteurs. Dans [1], deux d'entre eux sont intégrés: l'inhibition de la croissance des bactéries acétogènes par l'hydrogène et l'inhibition de la croissance des bactéries méthanogènes hydrogénéotrophes par l'acétate. Dans cette communication, nous considérons deux modèles distincts: un modèle sans inhibition et un modèle avec inhibition. Le modèle général s'écrit:

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = D(X_{0in} - X_0) - k_{hyd}X_0 \\ \frac{dS}{dt} = D(S_{in} - S) - \frac{1}{c_s}g_S(S)X_S + k_0k_{hyd}X_0 \\ \frac{dX_S}{dt} = (g_S(S) - D)X_S \\ \frac{dV}{dt} = -DV + \gamma_{sv}g_S(S)X_S - \frac{1}{c_v}g_V(V, H)X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D)X_V \\ \frac{dA}{dt} = -DA + \gamma_{sa}g_S(S)X_S + \gamma_{va}g_V(V, H)X_V - \frac{1}{c_a}g_A(A)X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D)X_A \\ \frac{dH}{dt} = -DH + \gamma_{sh}g_S(S)X_S + \gamma_{vh}g_V(V, H)X_V - \frac{1}{c_h}g_H(H, A)X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D)X_H. \end{cases} \quad (1)$$

où  $X_{0in}$  et  $S_{in}$  sont respectivement les concentrations de la matière organique et celle du substrat à l'entrée du chemostat,  $D$  est le taux de dilution.  $k_{hyd}$ ,  $k_0$ ,  $c_s$ ,  $c_v$ ,  $c_a$ ,  $c_h$ ,  $\gamma_{sv}$ ,  $\gamma_{sa}$ ,  $\gamma_{sh}$ ,  $\gamma_{va}$ ,  $\gamma_{vh}$  sont des paramètres de rendement tandis que  $g_V(V, H)$ ,  $g_H(H, A)$ ,  $g_S(S)$  et  $g_A(A)$  sont les fonctions de croissance microbienne. Pour  $l = S, V, A$  et  $H$ , la fonction  $g_l(l)$  est telle que:  $g_l(0) = 0$  et  $g'_l(l) > 0$ .

Nous prouvons que pour toutes valeurs initiales positives, les solutions du sys. (1) restent positives et bornées pour tout  $t \geq 0$ .

### 1.1 Analyse du modèle de la digestion anaérobie sans inhibition

Ici la fonction de croissance microbienne  $g_V(V, H)$  ne dépend pas de  $H$ . On note  $g_V(V) = g_V(V, 0)$ . De même, la fonction de croissance microbienne  $g_H(H, A)$  ne dépend pas de  $A$ , on note  $g_H(H) = g_H(H, 0)$ .

Sous ces conditions, le système (1) s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \frac{dX_0}{dt} = DX_{0in} - (D + k_{hyd})X_0 \\ \frac{dY}{dt} = F(Y, X_0). \end{cases} \quad (2)$$

avec  $Y = (S, X_S, V, X_V, A, X_A, H, X_H)$ . Une solution de (2) s'écrit  $E = (X_0, S, X_S, V, X_V, A, X_A, H, X_H)$ .

L'étude des équilibres du système (2) se déduit de celle du système étudié dans [1] en utilisant le théorème de Thième, voir [4]. Le système (1) possède neuf points d'équilibre, un équilibre de lessivage  $E_l = (X_0^*, S_{in}^*, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ , sept équilibres où l'extinction d'une ou plusieurs espèces a lieu et un équilibre de coexistence de toutes les espèces

$$E_* = (X_0^*, \lambda_S, X_S^*, \lambda_V, c_v(V^{(0)} - \lambda_V), \lambda_A, c_a(\bar{A} - \lambda_A), \lambda_H, c_h(\bar{H} - \lambda_H)),$$

$$\text{avec } X_0^* = \left(\frac{D}{D+k_{hyd}}\right)X_{0in}, S_{in}^* = \left(\frac{k_0 k_{hyd}}{D+k_{hyd}}\right)X_{0in} + S_{in}, X_S^* = c_s(S_{in}^* - \lambda_S), V^{(0)} = \gamma_{sv}X_S^*, A^{(0)} = \gamma_{sa}X_S^*, H^{(0)} = \gamma_{sh}X_S^*,$$

$$\bar{A} = A^{(0)} + \gamma_{va}c_v(V^{(0)} - \lambda_V) \text{ et } \bar{H} = H^{(0)} + \gamma_{vh}c_v(V^{(0)} - \lambda_V).$$

Pour déterminer les conditions d'existence des équilibres ainsi que celles de leur stabilité globale, notons pour  $l = S, V, A$  et  $H$ ,  $\lambda_l$  la valeur de  $l$  telle que:  $g_l(\lambda_l) = D$ , quand elle existe. Sinon,  $\lambda_l = +\infty$ .

Les résultats sont donnés dans le tableau suivant:

L'équilibre	Conditions d'existence	Conditions de stabilité globale
$E_l$	toujours	$S_{in}^* < \lambda_S$
$E_0$	$S_{in}^* > \lambda_S$	$A^{(0)} < \lambda_A, H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
$E_H$	$H^{(0)} > \lambda_H$	$A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
$E_A$	$A^{(0)} > \lambda_A$	$H^{(0)} < \lambda_H$ et $V^{(0)} < \lambda_V$
$E_{AH}$	$A^{(0)} > \lambda_A$ et $H^{(0)} > \lambda_H$	$V^{(0)} < \lambda_V$
$E_V$	$V^{(0)} > \lambda_V$	$\bar{A} < \lambda_A$ et $\bar{H} < \lambda_H$
$E_{VH}$	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\bar{H} > \lambda_H$	$\bar{A} < \lambda_A$
$E_{VA}$	$V^{(0)} > \lambda_V$ et $\bar{A} > \lambda_A$	$\bar{H} < \lambda_H$
$E_*$	$V^{(0)} > \lambda_V, \bar{A} > \lambda_A$ et $\bar{H} > \lambda_H$	Lorsqu'il existe

Le tableau ci-dessous décrit les régions de stabilité des différents équilibres selon les paramètres de contrôle  $D$  et  $S_{in}^*$ .

Condition	Région	$E_l$	$E_0$	$E_H$	$E_A$	$E_{AH}$	$E_V$	$E_{VH}$	$E_{VA}$	$E_*$
$S_{in}^* < \lambda_S$	$R_1$	$S$								
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} < \lambda_H,$ $A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$	$R_2$	$I$	$S$							
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} > \lambda_H,$ $A^{(0)} < \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$	$R_3$	$I$	$I$	$S$						
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} > \lambda_H,$ $A^{(0)} > \lambda_A$ et $V^{(0)} < \lambda_V$	$R_4$	$I$	$I$	$I$	$I$	$S$				
$S_{in}^* > \lambda_S, H^{(0)} > \lambda_H,$ $A^{(0)} > \lambda_A$ et $V^{(0)} > \lambda_V$	$R_5$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$I$	$S$

La lettre  $S$  (resp.  $I$ ) signifie que l'équilibre correspondant est stable (resp. instable). L'absence de lettre signifie que l'équilibre n'existe pas.

### 1.2 Analyse du modèle de la digestion anaérobie avec inhibition

Nous revenons au modèle (1), on peut remarquer que:

- Si  $X_S^* = 0$  alors  $V^*, X_V^*, A^*, X_A^*, H^*$  et  $X_H^*$  sont nuls.
- Si  $X_S^* > 0$  alors  $X_0^* = \left(\frac{D}{D+k_{hyd}}\right)X_{0in}, S^* = \lambda_S$  et  $X_S^* = c_s(S_{in}^* - \lambda_S)$ .

On peut alors découpler le modèle avec inhibition et se restreindre à étudier le modèle (3):

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = D(V^{(0)} - V) - \frac{1}{c_v} g_V(V, H) X_V \\ \frac{dX_V}{dt} = (g_V(V, H) - D) X_V \\ \frac{dA}{dt} = D(A^{(0)} - A) + \gamma_{va} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_a} g_A(A) X_A \\ \frac{dX_A}{dt} = (g_A(A) - D) X_A \\ \frac{dH}{dt} = D(H^{(0)} - H) + \gamma_{vh} g_V(V, H) X_V - \frac{1}{c_h} g_H(H, A) X_H \\ \frac{dX_H}{dt} = (g_H(H, A) - D) X_H. \end{cases} \quad (3)$$

L'étude des conditions d'existence ainsi que des conditions de stabilité locale, obtenues en utilisant le critère de Routh-Hurwitz, montre l'existence de douze équilibres dont deux équilibres sont strictement positifs, le premier étant stable dès qu'il existe alors que le second est toujours instable.

## 2 Taux de biogaz produit pour le modèle de D.A. sans inhibition

L'étude des modèles proposés inclut la recherche des conditions sous lesquelles on peut maximiser le taux de méthane et d'hydrogène en tenant compte de l'étape d'hydrolyse. En effet, le schéma réactionnel du modèle complet de la digestion anaérobie (en ajoutant l'étape d'hydrolyse) montre que le méthane provient, d'une part, de l'acide acétique provenant lui-même du substrat ou de l'AGV et que d'autre part, le méthane provient de l'hydrogène et du dioxyde de carbone, provenant du substrat ou de l'AGV.

À partir de l'analyse des équilibres du modèle, on détermine le taux de biogaz produit à l'équilibre lors de la digestion anaérobie et on détermine la voie qui produit le maximum de biogaz. L'étude est faite dans un premier temps pour le modèle sans inhibition.

Le taux de méthane produit à l'équilibre est donné par la formule suivante:

$$Q_{CH_4} = \alpha_1 g_A(A) X_A |_{A=A^*, X_A=X_A^*} + \alpha_2 g_H(H) X_H |_{H=H^*, X_H=X_H^*} \text{ où } \alpha_1 \text{ et } \alpha_2 \text{ sont deux constantes déterminées expérimentalement.}$$

Ce taux est déterminé pour chacun des équilibres. Une comparaison menée sur tous les équilibres montre que si  $V^{(0)} > \lambda_V$ , le méthane produit par le modèle sans inhibition est maximal pour l'équilibre strictement positif  $E_*$  et si  $V^{(0)} < \lambda_V$  alors le maximum du méthane est donné par l'équilibre  $E_{AH}$ . Donc, lorsque  $V^{(0)} > \lambda_V$ , le taux de méthane est maximal lorsque toutes les biomasses coexistent et lorsque  $V^{(0)} < \lambda_V$ , le méthane est maximal lors de lessivage des biomasses acétogènes.

De la même manière, le taux d'hydrogène produit est donné par la formule suivante:

$$Q_{H_2} = \alpha_3 g_S(S) X_S |_{S=S^*, X_S=X_S^*} + \alpha_4 g_V(V) X_V |_{V=V^*, X_V=X_V^*} \text{ où } \alpha_3 \text{ et } \alpha_4 \text{ sont deux constantes déterminées expérimentalement.}$$

Ce taux est comparé pour chacun des équilibres. On voit alors que si  $V^{(0)} > \lambda_V$  alors l'hydrogène produit par le modèle sans inhibition est maximal pour l'un des équilibres  $E_V$  ou  $E_{VA}$  et si  $V^{(0)} < \lambda_V$  alors le maximum de l'hydrogène est donné par  $E_0$  ou  $E_A$ . Donc, lorsque  $V^{(0)} > \lambda_V$ , le taux d'hydrogène est maximal lorsque les biomasses acidogènes et acétogènes coexistent et lorsque  $V^{(0)} < \lambda_V$ , l'hydrogène est maximal lors du lessivage des biomasses acétogènes.

La généralisation de ce travail au cas du modèle avec inhibition est en cours.

**Conclusion:** Dans ce travail, nous avons étudié un modèle à quatre étapes pour la digestion anaérobie avec dégradation enzymatique du substrat sous forme particulière. Nous avons établi les conditions d'existence et le comportement asymptotique local et global des points d'équilibre pour les deux modèles avec et sans inhibition. Nous avons déterminé le taux de méthane et d'hydrogène produits pour chaque équilibre, dans le cas sans inhibition.

**Remerciements:** Les auteurs remercient:

- le projet Euromed 3+3 TREASURE (<http://project.inria.fr/treasure>) et le projet UTIQUE qui ont financé cette recherche.
- Tewfik Sari (IRSTEA) pour les discussions fructueuses que nous avons eues à propos de ce travail.

## Références

- [1] M. WEEDERMANN, G. SEO AND G.S.K.WOLKOWICZ, (2013), Mathematical model of anaerobic digestion in a chemostat: effects of syntrophy and inhibition; *Journal of Biological Dynamics*, 7(1), pp 59-85.
- [2] T. SARI, M. EL HAJJI AND J. HARMAND, (2012), The mathematical analysis of a syntrophic relationship between two microbial species in a chemostat; *Math Biosci Eng.* 9, pp 627-645.
- [3] J. HESS AND O. BERNARD, (2008), Design and study of a risk management criterion for an instable wastewater treatment process; *J. Process Control* 18, pp 71-79.
- [4] HAL L. SMITH AND PAUL WALTMAN, The theory of the chemostat: Dynamics of microbial competition; *Cambridge University Press*, (1995).