Détection de signaux QPSK sur porteuse en utilisant les statistiques cycliques d'ordre 2

Nicolas Grollier, Sébastien Houcke

▶ **To cite this version:**

Nicolas Grollier, Sébastien Houcke. Détection de signaux QPSK sur porteuse en utilisant les statistiques cycliques d'ordre 2. GRETSI 2017 : 26ème colloque du Groupement de Recherche en Traitement du Signal et des Images, Sep 2017, Juan-Les-Pins, France. hal-01617238

HAL Id: hal-01617238
https://hal.science/hal-01617238

Submitted on 16 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Détection de signaux QPSK sur porteuse en utilisant les statistiques cycliques d'ordre 2

Nicolas GROLLIER, Sébastien HOUCKE,

Institut Mines-Telecom, IMT Atlantique, Lab-STICC, UMR CNRS 6285, Univ-Bretagne Loire, 29238 Brest, France
prénom.nom@imt-atlantique.fr

Résumé – Cet article propose une nouvelle méthode de détection de signaux de communication QPSK, modulés sur fréquence porteuse f_c. Il est connu qu'à l'ordre 2 les signaux QPSK n'ont pas de fréquence cyclique dépendante de leur fréquence porteuse. Nous proposons donc un nouveau critère basé sur les moments d'ordre 2 et les statistiques cycliques, qui exploite la vitesse de convergence de l'estimateur de la fonction d'autocorrélation cyclique pour les détecter. Nous démontrons que pour ces signaux, l'estimateur naturel ne converge pas vers 0 de la même façon si $\alpha = kf_c$ ou si α correspond à n'importe quelle autre fréquence non cyclique. Par la suite, nous proposons une statistique de test et en déduisons la fonction de répartition asymptotique des valeurs du critère permettant d'obtenir un seuil de détection. Enfin, les performances de cette méthode sont évaluées via la méthode de Monte Carlo (M.C.).

Abstract – This paper considers the problem of detecting a QPSK communication signal, modulated at carrier frequency f_c. The detection is based on the second order cyclostationarity theory. It is well known that at the order 2, for an on carrier QPSK signal, $\alpha = kf_c$ with $k \in \mathbb{N}$ and $k > 1$ is not a cyclic frequency. In this article, we propose a novel criterion based on second order cyclic-moments that exploits the convergence speed of the cyclic autocorrelation function estimator. We show that for a modulated QPSK signal the cyclic-correlation converges to zero but not in the same way if $\alpha = kf_c$ and α equals any other non cyclic-frequency. We develop a statistical test and derive the asymptotic probability density function of the criterion to propose a detection threshold. Simulation results are then presented and the system performance evaluated by Monte Carlo simulations.

1 Introduction

Ce travail a été réalisé dans le cadre du projet FITNESS, qui vise à développer un récepteur PMR (Professional Mobile Radio) de nouvelle génération compatible multi-standards. Cette compatibilité avec les standards actuels, exige de numériser une large bande de fréquence autour d'une fréquence intermédiaire. L'une des difficultés sera alors de détecter la présence d'un signal interférent QPSK dans la bande numérisée afin d'adapter les paramètres du récepteur. Cette détection doit être fonctionnelle à faible rapport signal sur bruit (RSB) et avec peu d'échantillons.

Définissions tout d'abord f_c, comme étant la fréquence porteuse du signal interférant après démodulation à fréquence intermédiaire. L'objectif de la méthode présentée dans cet article est de détecter la présence d'un signal QPSK modulé à la fréquence f_c dans du bruit. Pour cela, nous proposons un critère basé sur la théorie des statistiques cyclique et les moments d'ordre 2. Cette méthode pourrait aussi être utilisée pour la détection de spectre en radio cognitive, ou de l'identification aveugle en guerre électronique. Dans le contexte considéré, nous supposons inconnues la puissance du signal reçu et la puissance du bruit. Les seules informations connues *a-priori* sur le signal utile sont : sa fréquence porteuse et sa modulation (i.e. QPSK).

Dans [1], les auteurs présentent plusieurs techniques fiables permettant de détecter la présence d'un signal dans une bande donnée. Cependant, les méthodes de détection d'énergie, de détection de forme d'onde ou du filtre adapté sont inapplicables dans notre contexte, puisqu'il manque des informations nécessaires. La détection d'énergie requière de connaitre la puissance du bruit. La méthode du filtre adapté requière un motif connu et répétitif ou la connaissance du filtre d'émission. Les approches basées sur les statistiques cycliques sont par contre adaptées à notre contexte mais certains signaux restent difficiles à analyser.

C'est typiquement le cas de signaux PSK sur fréquence porteuse. Contrairement aux signaux BPSK, les signaux QPSK n'ont pas de fréquence cyclique multiple de f_c. Dans [2], la transformation $(.)^4$ est utlisée pour créer une composante continue à des fréquences cycliques spécifiques. Cette méthode présente de bonnes performances de détection et de classification, mais présente de moins bons résultats si le RSB est faible. Cette transformation crée une raie spectrale en $4f_c$, ce qui impose que la fréquence d'échantillonnage f_s soit supérieure à $8f_c$ pour éviter des phénomènes de repliement. Il s'agit donc d'une méthode coûteuse en temps de calcul, avec des contraintes fortes sur l'implémentation hardware. Une autre méthode avec des inconvénients similaires est proposée dans [3]. Elle consiste à utiliser le cumulant d'ordre 6 et produit des résultats intéressants. Toutefois, ces performances doivent être pondérées par le coût calculatoire élevé et un grand nombre de symboles requis

pour l'estimation ($\geqslant$1000). Une méthode utilisant les moments cycliques d'ordre 2 est développée dans [4] pour la classification de modulation. Les auteurs utilisent la propriété d'absence de fréquence cyclique en $2f_c$ pour classer les signaux QPSK. Cette technique ne peut donc fonctionner que pour la classification et non pour la détection.

Dans la suite de cet article nous décrivons le modèle de signal considéré et nous réalisons l'analyse de sa fonction d'autocorrélation cyclique. Dans la section II, nous décrivons notre critère, la statistique de test et une méthode pour calculer un seuil de détection. Dans une dernière partie, des simulations de M.C. sont réalisées pour estimer les performances du critère.

2 Formulation du problème

2.1 Modèle considéré

Définissons tout d'abord un modèle du signal en bande de base. Soient T la période symbole, $h(t)$ le filtre de mise en forme et a_k les symboles QPSK complexes.

$$s(t) = s_R(t) + js_I(t) = \sum_{k=1}^{N} a_k h(t - kT) \tag{1}$$

Soient $s_R(t)$ et $s_I(t)$, les parties réelles et imaginaires du signal transmis $s(t)$, supposées indépendantes et identiquement distribuées. Après la modulation sur fréquence porteuse f_c et le passage dans un canal à Bruit additif Blanc Gaussien Centré (BBGC), le signal reçu $x(t)$ s'exprime alors :

$$x(t) = x_R(t - \Delta_t) - x_I(t - \Delta_t) + n(t) \tag{2}$$

avec $x_R(t) = s_R(t)cos(2\pi f_c t)$, $x_I(t) = s_I(t)sin(2\pi f_c t)$ et $n(t)$ un BBGC centré et de variance σ_n^2. Par la suite, le délai de propagation Δ_t est négligé. Il est facile de démontrer que cette hypothèse n'a aucun impact sur la méthode proposée et n'induit pas de perte de généralité.

2.2 Statistiques cycliques

Dans cette partie, nous développons l'analyse cyclostationnaire des signaux exprimés en eq.(1) et eq.(2). La fonction d'autocorrélation d'un signal de communication est obtenue via la formule : $R_s(t,\tau) = E[s(t)s^*(t-\tau)]$. Ici $E[.]$ est l'opérateur espérance mathématique et $(.)^*$ représente le complexe conjugué. Dans le cas de signaux cyclostationnaires, cette fonction d'autocorrélation est périodique en *t*. Elle admet donc une décomposition en série de Fourier exprimée :

$$R_s(t,\tau) = \sum_{\alpha \in I_s} R_s^\alpha(\tau) e^{j2\pi\alpha t} \tag{3}$$

Soit $I_s = \{\frac{k}{T}, k \in \mathbb{Z}\}$ l'ensemble des fréquences cycliques de $s(t)$. La fonction d'autocorrélation cyclique, à la fréquence cyclique α, est définie théoriquement comme étant la transformée de Fourier de $R_s(t,\tau)$.

$$R_s^\alpha(\tau) = \lim_{T_\alpha \to \infty} \frac{1}{T_\alpha} \int_0^{T_\alpha} R_s(t,\tau) e^{-j2\pi\alpha t} dt \tag{4}$$

Il a été montré dans [5] que le signal $s(t)$ est considéré *cyclostationnaire* de fréquence cyclique multiples de $1/T$. Les coefficients $R_s^\alpha(\tau)$ sont les *fonctions d'autocorrélation cycliques* (CAF) de $s(t)$. En pratique, pour $k > 1$ l'amplitude des coefficients $R_s^\alpha(\tau)$ avec $\alpha = k/T$ diminue rapidement. C'est pourquoi on considère souvent $\alpha = 1/T$ comme l'unique fréquence cyclique. Dans le contexte envisagé, nous supposons connaitre l'ensemble des fréquences cycliques du signal à détecter.

Nous pouvons maintenant développer l'analyse du signal $x(t)$ définit en eq.(2). D'après l'eq.(4), on obtient facilement la relation suivante :

$$R_x^\alpha(\tau) = R_{x_R}^\alpha(\tau) + R_{x_I}^\alpha(\tau) \tag{5}$$

$R_x^\alpha(\tau)$ est donc la somme des CAF de $x_R(t)$ et de $x_I(t)$. La CAF de $x_R(t)$ est définie par :

$$R_{x_R}^\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}cos(2\pi f_c\tau) R_{s_R}^\alpha(\tau) & \text{si } \alpha = 0 \text{ ou } \pm\frac{1}{T}, \\ \frac{1}{4} e^{\pm j2\pi f_c\tau} R_{s_R}(\tau) & \text{si } \alpha = \pm 2f_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{6}$$

avec $I_{x_R} = \left\{\{\frac{k}{T}, 2kf_c\}, k \in \mathbb{Z}\right\}$. Puisque I_{x_R} contient des fréquences cycliques non multiples entre elles, le signal $x_R(t)$ est appelé *quasi-cyclostationaire* (voir [5] pour plus de détails).

De la même manière, on obtient la CAF de $x_I(t)$:

$$R_{x_I}^\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2}cos(2\pi f_c\tau) R_{s_I}^\alpha(\tau) & \text{si } \alpha = 0 \text{ ou } \pm\frac{1}{T}, \\ -\frac{1}{4} e^{\pm j2\pi f_c\tau} R_{s_I}(\tau) & \text{si } \alpha = \pm 2f_c, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \tag{7}$$

avec $I_{x_I} = I_{x_R}$. Il existe donc des fréquences cycliques multiples de f_c dans les expressions eq.(6) et eq.(7). En effet, pour un signal QPSK en bande de base, la projection de la constellation dans les plans complexe ou réel est similaire une modulation BPSK. C'est pourquoi $x_R(t)$ et $x_I(t)$ présentent des fréquences cycliques multiples de la fréquence porteuse.

En remarquant que $R_{s_R}^{\pm 2f_c}(\tau) = -R_{s_I}^{\pm 2f_c}(\tau)$, puis en remplaçant eq.(6) et eq.(7) dans l'expression eq.(5) on obtient l'expression suivante pour $\alpha \in I_x$:

$$R_x^\alpha(\tau) = \frac{1}{2}cos(\omega_c\tau) R_{s_R}^\alpha(\tau) + \frac{1}{2}cos(\omega_c\tau) R_{s_I}^\alpha(\tau) \tag{8}$$

Dans l'eq.(8), $x(t)$ est cyclostationnaire avec $I_x = \{\frac{k}{T_s}, k \in \mathbb{Z}\}$. Comme prévu par la théorie, $x(t)$ n'a pas de fréquence cyclique dépendante de f_c. Par définition, quelque soit $\alpha \notin I_x$, $R_x^\alpha(\tau) = 0$, ce qui est également vrai pour $\alpha = \pm 2f_c$:

$$R_x^{\pm 2f_c}(\tau) = R_{x_R}^{\pm 2f_c}(\tau) + R_{x_I}^{\pm 2f_c}(\tau) = 0 \tag{9}$$

Cependant, on note aussi que $R_{x_R}^{\pm 2f_c}(\tau) = -R_{x_I}^{\pm 2f_c}(\tau) \neq 0$. Il s'agit de la propriété que nous allons exploiter dans notre critère. En effet, il est logique que l'estimation de $\hat{R}_x^\alpha$ ne converge pas vers 0 de la même façon si $\alpha = \pm 2f_c$ ou si $\alpha \notin I_{x_R}$.

2.3 Critère de détection

L'expression théorique de la CAF est donnée par l'eq.(4). En pratique, nous ne disposons que d'une réalisation du signal considéré. C'est pourquoi l'opérateur Espérance est remplacé par un opérateur de moyenne temporelle définie comme

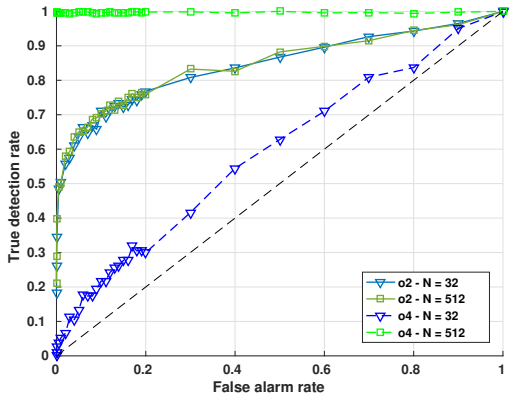

FIGURE 1 – Courbes ROC à RSB = 0dB, 2048 tirages de M.C. Evolution des performances suivant la durée d'observation

$< . >= \frac{1}{2N+1}\sum_{t=-N}^{N}(.)$. En réécrivant l'eq.(4) avec une moyenne temporelle on obtient :

$$\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l) = \frac{1}{N+1}\sum_{k=-N/2}^{N/2} x(k)x^*(k-l)e^{-j2\pi\alpha k} \qquad (10)$$

où la notation $\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)$ représente l'estimée de $R^{\alpha}_{x}(lT_s)$. Lorsque $N \to \infty$ l'eq.(10) converge vers la CAF théorique définie par l'eq.(4).

Par définition, pour $\alpha \notin I_x$, $\hat{R}^{\alpha}_{x}(l) \triangleq 0$ puisque α n'est pas une fréquence cyclique. La moyenne temporelle appliquée à l'eq.(9) tends vers 0 seulement si $N \to \infty$ puisque $\lim_{N\to\infty} \hat{R}^{\pm 2f_c}_{x_R}(l) = \lim_{N\to\infty} \hat{R}^{\pm 2f_c}_{x_I}(l) \neq 0$. Par conséquent, avec un nombre fini d'échantillons, le comportement de l'estimateur de la CAF est différent pour les $\alpha = \pm 2f_c$ et des autres valeurs de $\alpha \notin I_x$. Cette différence de comportement reste vraie, quelque soit l. Soit $\hat{J}_{L,N}(\alpha)$ le critère de détection définit ci-dessous :

$$\hat{J}_{L,N}(2f_c) = \frac{\hat{C}^{2f_c}_{N}(L)}{\hat{C}^{\beta}_{N}(L)} \qquad (11)$$

Avec L le nombre de retards considérés dans la CAF, $\beta \notin I_{x_R}$ et $|.|$ est l'opération module tel que :

$$\hat{C}^{\alpha}_{N}(L) = \frac{1}{L+1}\sum_{l=0}^{L} |\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)|^2 \qquad (12)$$

Ce critère peut être interprété comme un coefficient d'intercorrélation (voir [5]). Il s'agit en fait d'une comparaison de l'estimée de la CAF en deux α qui ne sont pas des fréquences cycliques. Ce critère peut indifféremment être utilisée pour détecter des modulations MPSK ou MQAM lorsque $L \geqslant 2$. Pour cela, la seule contrainte est de s'assurer que $s_R(t)$ et $s_I(t)$ soient indépendants.

3 Analyse théorique du critère

La densité de probabilité de $\hat{J}_{L,N}(\alpha)$ est plus facile à obtenir en l'absence de signal. Suivant une approche de Neyman-Pearson (voir [6]), un seuil Γ peut être obtenu à partir d'une *Probabilité de fausse alarme* $P_{fa} = P[\hat{J}_{L,N}(2f_c) \geqslant \Gamma|H_0]$ donnée. Le test proposé est défini ci-dessous :

$$H : \begin{cases} H_0 \to x(t) = n(t) \\ H_1 \to x(t) = \Re[s(t)e^{i2\pi f_c t}] + n(t) \end{cases} \qquad (13)$$

Ici, H_0 représente une absence de signal et H_1 sa présence.

Pour déterminer Γ, considérons l'hypothèse H_0, lorsque le nominateur et le dénominateur de l'eq.(11) tendent statistiquement vers la même valeur. Il a été démontré dans [7] que l'estimateur de la CAF est non biaisé et que l'erreur d'estimation est asymptotiquement Normale complexe. En réécrivant l'eq.(10) sous forme complexe on obtient :

$$\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l) = \Re[\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)] + \jmath\Im[\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)] \qquad (14)$$

où les parties réelles et imaginaires suivent asymptotiquement une loi Normale complexe pour chaque l.

L'expression de la puissance moyenne en eq.(12) est donc une somme de distributions normales non centrées et non réduites. Sous l'hypothèse H_0, le module de l'expression eq.(14) s'exprime :

$$|\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)|^2 = \Re[\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)]^2 + \Im[\hat{R}^{\alpha}_{x,N}(l)]^2 \qquad (15)$$

A partir des eq.(12) et eq.(15) on obtient :

$$(L+1)\hat{C}^{2f_c}_{N}(L) = \sum_{k=0}^{L}\Re[\hat{R}^{2f_c}_{x}(k)]^2 + \sum_{k=0}^{L}\Im[\hat{R}^{2f_c}_{x}(k)]^2 \qquad (16)$$

Les parties réelles et imaginaires sont indépendantes, de même moyenne et même variance.

Nous proposons maintenant de prouver que $\hat{J}_{L,N}(2f_c)$ suit une loi de Fisher doublement non centrée. D'après [8], l'eq.(16) est pratiquement similaire à une loi du chi-2 non centrée $\chi^2_{\nu}(\lambda)$ définie comme :

$$\chi^2_{\nu}(\lambda) = \sum_{i=0}^{\nu}\frac{X_i^2}{\sigma_i^2} \qquad (17)$$

où λ est le paramètre de non centralité, $\nu = 2(L+1)$ est le nombre de degrés de liberté et les X_i sont indépendants et $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, 1)$. Cependant, l'eq.(16) n'est pas une somme de loi normales réduites. Nous remarquons également que la loi de Fisher doublement non centrée s'exprime comme le ration de deux loi du chi-2 indépendantes. En utilisant l'eq.(17), $F''_{\nu_1,\nu_2}(\lambda,\delta)$ est exprimée comme :

$$F''_{\nu_1,\nu_2}(\lambda,\delta) = \Big(\sum_{l=0}^{\nu_1}\frac{X_l^2}{\sigma_l^2}\Big)/\Big(\sum_{k=0}^{\nu_2}\frac{X_k^2}{\sigma_k^2}\Big) \qquad (18)$$

Avec le critère présenté ci-dessus, $\sigma_l^2 = \sigma_k^2$ puisque l'exprèssion en eq.(12) est utilisée pour estimer $\hat{J}_{L,N}(2f_c)$. Nous avons donc démontré que $(L+1)\hat{J}_{L,N}(\alpha) \sim F''_{\nu_1,\nu_2}(\lambda,\delta)$. Les parametres de non centralité λ et δ tendent vers 0 asymptotiquement, et $\nu_1 = \nu_2 = 2(L+1)$. Puisque l'eq.(11) est un rapport de loi de moments similaires, il n'est pas nécessaire de déterminer λ et δ car leur rapport tend vers 1. Lorsque N est grand, $\hat{C}^{2f_c}_{N}(L)$ et $\hat{C}^{\varepsilon}_{N}(L)$ tendent vers 0. Les paramètres de non centralité deviennent donc $\lambda = \delta = 0$. Dans ce cas, l'eq.(18) suit

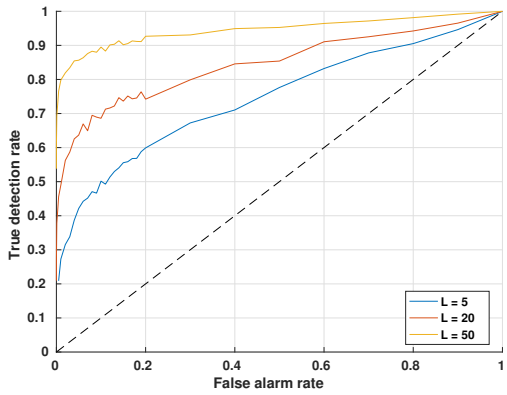

FIGURE 2 – Courbes ROC à RSB = 0dB, 2048 tirages de M.C, N = 64 symb. Probabilité de détection en fonction du nombre de retards utilisés dans l'estimation du critère

une loi de Fisher centrée $F_{\nu_1,\nu_2}(x)$. Cette approximation donne de bon résultats même avec N petit. Puisque $F_{\nu_1,\nu_2}(x)$ n'admet pas de fonction réciproque analytique, pour déterminer Γ il faut donc réaliser une approximation de $F^{-1}_{\nu_1,\nu_2}(x)$ avec une P_{fa} donnée. Nous proposons pour cela d'utiliser la méthode de Newton.

4 Simulations

Dans cette partie nous étudions les performances du critère proposé en section II. La fréquence d'échantillonnage est fixée à $f_s = 10f_c$. Ce choix de fréquence d'échantillonnage nous permet de réaliser une comparaison avec la méthode des moments d'ordre supérieurs. Comme présenté en introduction, pour l'application considérée f_c est la fréquence porteuse de l'interféreur après passage à fréquence intermédiaire. Nous considérons un filtre de mise en forme en racine de cosinus surélevé de bande passante $T = 2.5T_c$, de roll-off à 0.8 et d'étalement 6 symboles. Des simulations de M.C. sont réalisées pour déterminer la *probabilité de fausse alarme* (H_0) et la *puissance du test* (H_1).

Nous avons vu précédemment que le critère définit par l'eq. (11) semble indépendant de N. Pour vérifier cet hypothèse le RSB est fixé à 0dB. Le nombre maximum de retards L est fixé à 20. Les courbes ROC (Receiver Operating Characteristic) pour $N = 32$ et $N = 512$ sont présentés en fig.1. On pourra comparer les résultats obtenus avec la méthode des moments cycliques d'ordre quatre détaillée dans [2]. Il est clair que les résultats obtenus par cette méthode sont meilleurs que ceux obtenus via la méthode proposée dans cet article lorsque N = 512. Cependant, lorsque $N = 32$ les probabilités de détection diminuent fortement alors que celles de notre algorithme restent identiques. Il est donc possible de réduire significativement la complexité calculatoire sans diminuer les performances.

Nous souhaitons maintenant illustrer l'influence du paramètre L sur le critère de détection. Le RSB est fixé à 0dB, N est fixé à 64 symboles. Les courbes ROC pour différentes valeurs de L sont présentées en fig.2. $L = 5$ conduit à de mauvaises probabilités de détection, mais $L = 50$ présente un taux de 85% de détection pour une $P_{fa} = 5\%$. Il est toufefois nécessaire de réaliser un compromis entre performances et coût calculatoire.

5 Conclusion

Dans cet article nous avons proposé une nouvelle méthode pour détecter les signaux à modulation de phase sur porteuse, en utilisant les statistiques cycliques et les moments d'ordre 2. Plus particulièrement, cette méthode exploite la différence de comportement des estimateurs pour $\alpha = 2f_c$ et $\alpha \neq 2f_c$ n'appartenant pas à I_x. L'avantage principal de cette méthode réside dans le fait que de bonnes performances peuvent être obtenues même pour un faible nombre d'échantillons, permettant ainsi de détecter la prsence d'un interféreur très rapidement. Nous avons également discuté des avantages et inconvénients de cette méthode et montré ses limites. Une étude théorique du critère a également été proposée.

Références

[1] T. Yucek and H. Arslan. A survey of spectrum sensing algorithms for cognitive radio applications. *Commun. Surveys Tuts.*, 11(1) :116–130, January 2009.

[2] J. Reichert. Automatic classification of communication signals using higher order statistics. In *Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1992. ICASSP-92., 1992 IEEE International Conference on*, volume 5, pages 221–224 vol.5, Mar 1992.

[3] C. M. Spooner. On the utility of sixth-order cyclic cumulants for rf signal classification. In *Conference Record of Thirty-Fifth Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers (Cat.No.01CH37256)*, volume 1, pages 890–897 vol.1, Nov 2001.

[4] K. Kim, I. A. Akbar, K. K. Bae, J. S. Um, C. M. Spooner, and J. H. Reed. Cyclostationary approaches to signal detection and classification in cognitive radio. In *2007 2nd IEEE International Symposium on New Frontiers in Dynamic Spectrum Access Networks*, pages 212–215, April 2007.

[5] W. A. Gardner. Statistical spectral analysis, a non probabilistic theory. *Prentice-Hall*, 1988.

[6] S. M. Kay. Fundamentals of statistical signal processing : Detection theory. *Pearson Education*, 2, 1998.

[7] A. V. Dandawate and G. B. Giannakis. Statistical tests for presence of cyclostationarity. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 42(9) :2355–2369, Sep 1994.

[8] N.L. Johnson and S. Kotz. Distributions in statistics : continuous multivariate distributions. *Wiley series in probability and mathematical statistics : Applied probability and statistics*, 1972.