



HAL
open science

Découplage des modes de rupture dans un matériau viscoélastique orthotrope : application au matériau bois

Rostand Moutou Pitti, Frédéric Dubois, Nicolas Sauvat, Christophe Petit

► To cite this version:

Rostand Moutou Pitti, Frédéric Dubois, Nicolas Sauvat, Christophe Petit. Découplage des modes de rupture dans un matériau viscoélastique orthotrope : application au matériau bois. XXIViemes Rencontres Universitaires de Génie Civil 2006, Oct 2007, La Rochelle, France. hal-01616913

HAL Id: hal-01616913

<https://hal.science/hal-01616913>

Submitted on 15 Oct 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Découplage des modes de rupture dans un matériau viscoélastique orthotrope : application au matériau bois

Rostand Moutou Pitti, Frédéric Dubois, Christophe Petit, Nicolas Sauvat

Laboratoire 3MSGC, Centre Universitaire d'Egletons, Université de Limoges,
Boulevard Jacques Derche, 19300 Egletons, France
Frederic.dubois@unilim.fr

RESUME. Ce travail présente le développement d'une intégrale invariante permettant le découplage des modes de rupture dans un milieu viscoélastique et orthotrope. Il repose sur la base de l'intégrale M développée initialement par Chen pour des matériaux élastiques isotropes. Le découplage de mode est basé sur l'emploi de champs mécaniques virtuels empruntés aux développements analytiques des champs singuliers proposés par Shi qui permettent d'isoler les différents modes de rupture ne calculant que la part de taux de restitution d'énergie en mode d'ouverture et de cisaillement (le travail est limité, pour des raisons applicatives, à des problèmes plans). La généralisation à un milieu viscoélastique utilise les fondements thermodynamiques développés par Dubois et Petit qui ont permis de définir un taux de restitution d'énergie en prenant en compte un découplage total de l'énergie libre restituable et l'énergie dissipée due à la viscosité du matériau. Le calcul, intégré dans un code aux éléments finis, nécessite son couplage à une formulation incrémentale du comportement viscoélastique. Le travail proposé permet finalement d'étudier les phases d'amorçage et de propagation de fissure en prenant en compte la présence éventuelle d'une pression sur les lèvres de la fissure causée, par exemple, par un champ de contraintes thermiques ou hydriques induit par des phases de séchage et/ou d'humidification du bois.

ABSTRACT. This paper presents the development of an invariant integral allowing the uncoupling of fracture modes in an orthotropic and viscoelastic media. It's based on the M -integral, initially developed by Chen for isotropic materials. The uncoupling method employs virtual mechanic fields induced by the singular analytic forms proposed by Sih which enables the isolation of fracture modes by calculating energy release rates for open and shear modes (this work is limited for plane configurations). The viscoelastic generalization uses a thermodynamic approach developed by Dubois and Petit by defining an energy release rate only taking into account a perfect uncoupling of free and viscous energies. This work is implemented in a finite element software and necessitates its integration with a viscoelastic incremental formulation. This work allows the study of the crack growth initiation and the crack propagation by taking into account crack lip pressure induced, for example, by thermal or hydric stress field during a dried or swelling process.

MOTS-CLÉS : mécanique de la rupture, intégrales invariantes, viscoélasticité, orthotropie, éléments finis.

KEYWORDS : fracture mechanic, non-dependence path integrals, viscoelasticity, Orthotropy, finite elements.

1. INTRODUCTION

Les éléments de structure en bois comme les poutres entaillées et les assemblages sont généralement sujets à une fissuration de cinétique complexe due principalement aux modes de sollicitation et au caractère orthotrope du matériau. Pour prédire les phases d'amorçage et de propagation de la fissure, de nombreux outils numériques ont été développés pour caractériser les champs mécaniques dans de tels matériaux. Parmi eux, les méthodes énergétiques sont basées sur l'emploi d'intégrales invariantes pour évaluer le taux de restitution d'énergie grâce à un bilan thermodynamique. Cependant, certains de ces outils sont limités mathématiquement à des modes simples de fissuration. Nous proposons donc une intégrale indépendante découplant les modes dans un matériau viscoélastique. Un bilan énergétique est présenté, dans un premier temps, permettant de considérer les différents termes énergétiques mis en jeu lors du processus de fissuration dans un milieu viscoélastique. Ensuite, le développement de l'intégrale M généralisée sera présenté en intégrant les compléments permettant de traiter le processus de propagation ainsi que la présence d'une pression sur les lèvres de la fissure, tout en gardant les propriétés d'indépendance de domaine

d'intégration. Enfin, une généralisation au comportement viscoélastique et une formulation de résolution du modèle viscoélastique par la méthode des éléments finis seront exposées.

2. APPROCHE THERMODYNAMIQUE

L'approche thermodynamique permet d'effectuer un découplage des différentes énergies dissipées, aussi bien en terme de dissipation mécanique que de dissipation dans le processus de fissuration. Dans un premier temps, considérons un milieu viscoélastique non fissuré. L'énergie apportée par le travail des efforts extérieurs notée W se décompose en une énergie libre restituable U_e et une énergie dissipée via les propriétés dissipatives du matériau W_{vis} telle que :

$$W = U_e + W_{vis} \quad (1)$$

L'énergie libre restituable est l'intégration, sur le volume V de l'élément considéré, de la densité d'énergie libre F d'Helmoltz définie par (Staverman et al., 1952):

$$F = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t [2 \cdot J_{ijkl}(t-\xi) - J_{ijkl}(2 \cdot t - \xi - \beta)] \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \xi} \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\xi d\tau \quad \text{avec } U_e = \int_V F \cdot dV \quad (2)$$

où J_{ijkl} désigne les composantes du tenseur de fluage orthotrope. σ_{ij} sont les composantes du tenseur des contraintes. Les déformations ε_{ij} sont d'ailleurs définies suivant l'intégrale de Boltzmann suivante :

$$\varepsilon_{ij}(t) = \int_0^t J_{ijkl}(t-\tau) \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

2.1. EQUILIBRE ENERGETIQUE

Si maintenant, nous considérons un corps viscoélastique dans un processus de fissuration, la variation d'équilibre énergétique (1) devient, durant une propagation de fissure da dans le temps dt :

$$dW = dU_e + dW_{vis} + dW_s \quad (4)$$

où dW_s représente la dissipation d'énergie dans le processus de fissuration. La principale difficulté, dans l'équilibre (4), réside au couplage de la propagation de fissure (variation de la surface de fissure a) avec le temps t . En supposant que les propriétés de dissipation de rupture sont intrinsèques au matériau et que la dissipation mécanique est découplée du processus de fissuration, nous admettons les restrictions suivantes (Dubois et al., 2005) :

$$dW_s = \frac{\partial W_s}{\partial a} \cdot da \quad \text{et} \quad dW_{vis} = \frac{\partial W_{vis}}{\partial t} \cdot dt \quad (5)$$

Finalement, l'équilibre (4) peut se découpler en deux équations distinctes aux dérivées partielles de temps et d'accroissement de fissure :

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial U_e}{\partial t} + \frac{\partial W_{vis}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial W}{\partial a} = \frac{\partial U_e}{\partial a} + \frac{\partial W_s}{\partial a} \quad (6)$$

2.2. CRITERE DE FISSURATION

Les critères de fissuration permettent de définir l'instant d'amorçage ainsi que la vitesse de propagation des fissures. L'équilibre thermodynamique étant basé sur une approche énergétique, il est évident que ces critères doivent reposer sur une terminologie énergétique. D'ailleurs l'équation (6) (terme de droite) fait intervenir le taux de restitution d'énergie G . Par analogie aux bilans énergétiques réalisés pour des milieux élastiques fissurés, le taux de restitution d'énergie représente l'énergie dissipée dans le processus de fissuration. Cette énergie dissipée est puisée dans l'énergie libre stockée temporairement au sein du matériau.

Les critères énergétiques employés dans une cinématique de mode mixte font intervenir une partition des modes de rupture en termes de $G_I(t)$ et $G_{II}(t)$ et de leur valeur critique, respectivement G_I^c et G_{II}^c (Valentin et al., 1982) :

$$f\left(\frac{G_I(t)}{G_I^c}, \frac{G_{II}(t)}{G_{II}^c}\right) = 1 : \text{propagation}, \quad f\left(\frac{G_I(t)}{G_I^c}, \frac{G_{II}(t)}{G_{II}^c}\right) < 1 : \text{fissuration stationnaire} \quad (7)$$

3. DECOUPLAGE DE MODES

Dans un contexte de chargement complexe générant des cinématiques de mode mixte, il est nécessaire d'effectuer un découplage des modes de rupture afin de déterminer explicitement la part de mode I ou de mode II dans le critère, équation (7). En élasticité, le taux de restitution d'énergie peut être calculé par l'intégrale curviligne J définie de la façon suivante (Rice, 1968) :

$$J = \int_{\Gamma_1} \left[F \cdot n_1 - \sigma_{ij} \cdot n_j \cdot \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] d\Gamma \quad (8)$$

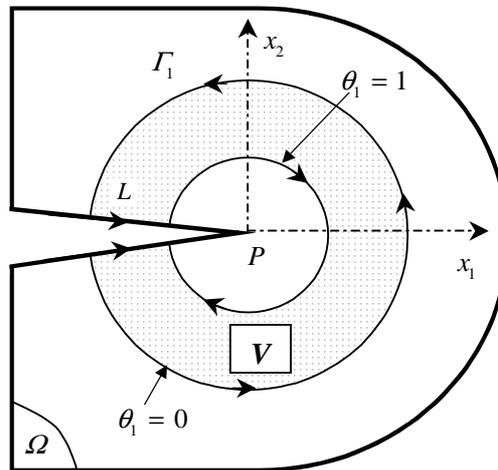


Figure 1 : Domaine d'intégration

Γ_1 est un contour englobant la fissure orienté par la normale \vec{n} de composante n_j (Figure 1). Il est supposé que la fissure est orientée dans la direction x_1 . Afin d'effectuer un découplage de mode, Chen a développé une intégrale similaire appelée M (Chen et al., 1977). La différence majeure consiste en la combinaison de champs singuliers réels indicés u et virtuels indicés v .

Ainsi, il propose la définition d'une forme bi-linéaire de la densité d'énergie libre suivante :

$$F(u, v) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(u) : \underline{\underline{\varepsilon}}(v) = \frac{1}{2} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(v) : \underline{\underline{\varepsilon}}(u) \quad (9)$$

$\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}$ représentent les tenseurs de contrainte et de déformation déduits des champs de déplacement réels et auxiliaires. A partir de la stationnarité du Lagrangien pour des champs de déplacements virtuels et réels dans des configurations Langrangienne-Eulérienne-Arbitraire (L.E.A) (Nother, 1918), la forme bilinéaire (9) nous permet d'étendre le théorème de Nother pour cette forme :

$$\begin{aligned} \delta L = & \int_{\partial V} \left(W^{\bullet} \cdot n_1 - \left(\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial u_{i,j}} \cdot u_{i,1} + \frac{\partial W^{\bullet}}{\partial v_{i,j}} \cdot v_{i,1} \right) \cdot n_j \right) dS \\ & + \int_V \left(\left(\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial u_{i,\alpha}} \cdot u_{i,1} \right)_{,\alpha} + \left(\frac{\partial W^{\bullet}}{\partial v_{i,\alpha}} \cdot v_{i,1} \right)_{,\alpha} - (W_{,1}^{\bullet}(u) + W_{,1}^{\bullet}(v)) \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

En considérant l'équilibre énergétique, l'intégrale M , au même titre que l'intégrale J , présente les caractéristiques d'invariance du domaine d'intégration. En posant en élasticité linéaire $\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^v$ et $\frac{\partial F}{\partial v_{i,j}} = \frac{1}{2} \sigma_{ij}^u$, M se définit par :

$$\begin{aligned} M = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (\sigma_{ij,1}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j dS \\ & + \frac{1}{2} \int_{A(\Gamma_1)} \left((\sigma_{ij}^v \cdot (u_{i,j})_{,1} + \sigma_{ij}^u \cdot (v_{i,j})_{,1}) - \left((\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j})_{,1} + (\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,j})_{,1} \right) \right) dV \quad (11) \\ & - \frac{1}{2} \int_L (\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,1} + \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,1}) \cdot n_j dS \end{aligned}$$

L'intégrale (11) est définie sur un contour curviligne. Pour des besoins d'implantation dans un code aux éléments finis, nous la transformeront en une intégrale de surface. Pour cela, utilisons un champ $\bar{\theta}$, continu, dérivable, unité sur le contour intérieur et nul à l'extérieur (Figure 1). On définit alors l'expression suivante :

$$\dot{p}_{j,k} = \frac{1}{2} (\sigma_{ij,k}^v \cdot u_i - \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k}) \quad (12)$$

Grâce à la relation (12), l'expression (11) se transforme, en utilisant le théorème de Gauss-Ostrogradski, en l'intégrale recherchée $M\theta$:

$$\begin{aligned} M\theta = & \frac{1}{2} \int_V (\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k} - \sigma_{ij,k}^v \cdot u_i) \cdot \theta_{k,j} dV \\ & + \frac{1}{2} \int_{A(\Gamma_1)} \left((\sigma_{ij}^v \cdot (u_{i,j})_{,k} + \sigma_{ij}^u \cdot (v_{i,j})_{,k}) - \left((\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,j})_{,k} + (\sigma_{ij}^u \cdot v_{i,j})_{,k} \right) \right) \cdot \theta_k dV \quad (13) \\ & - \frac{1}{2} \int_L (\sigma_{ij}^v \cdot u_{i,k} + \sigma_{ij}^u \cdot v_{i,k}) \cdot \theta_k \cdot n_j dS \end{aligned}$$

Le premier terme de l'intégrale permet un découplage de mode dans le cas d'une fissure stationnaire. Le second terme permet de garder l'indépendance du domaine d'intégration lors d'une propagation de fissure. Enfin, le dernier terme permet de prendre en compte une pression éventuelle sur les lèvres de la fissure.

Dans le cas d'un matériau orthotrope, nous proposons, comme champ virtuel v la forme singulière de Shi (Sih, 1974) :

$$\begin{aligned}
 v_1 &= 2 \cdot {}^v K_1 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(p_2 \cdot s_1 \cdot \rho_2^{0.5} - p_1 \cdot s_2 \cdot \rho_1^{0.5} \right) \right] \\
 &+ 2 \cdot {}^v K_2 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(p_2 \cdot \rho_2^{0.5} - p_1 \cdot \rho_1^{0.5} \right) \right] \\
 v_2 &= 2 \cdot {}^v K_1 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(q_2 \cdot s_1 \cdot \rho_2^{0.5} - q_1 \cdot s_2 \cdot \rho_1^{0.5} \right) \right] \\
 &+ 2 \cdot {}^v K_2 \cdot \sqrt{\frac{r}{2 \cdot \pi}} \cdot \Re \left[\frac{1}{s_1 - s_2} \cdot \left(q_2 \cdot \rho_2^{0.5} - q_1 \cdot \rho_1^{0.5} \right) \right]
 \end{aligned} \tag{14}$$

avec $\rho_j = \cos(\varphi) + i \cdot s_j \cdot \sin(\varphi)$, $j \in \{1; 2\}$, $p_i = S_{11} \cdot s_i^2 + S_{12}$ et $q_i = \frac{S_{22}}{s_i^k} + S_{12} \cdot s_i$

s_1 et s_2 sont les racines de l'équation caractéristique : $S_{11} \cdot s_i^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{33}) \cdot s_i^2 + S_{22} = 0$ où S_{ij} désigne les composantes du tenseur de rigidité à symétrie orthotrope.

4. INTERPRETATION PHYSIQUE

Pour des champs de déplacement réels u et auxiliaires v cinématiquement admissibles égaux, on a la relation (15) (Dubois et al., 2000) :

$$M(u, u) = J \tag{15}$$

En se référant à la définition du taux de restitution d'énergie G , nous proposons, grâce au principe de superposition, la relation suivante :

$$M(u, v) = C_1 \cdot \frac{{}^u K_I \cdot {}^v K_I}{8} + C_2 \cdot \frac{{}^u K_{II} \cdot {}^v K_{II}}{8} \tag{16}$$

C_1 et C_2 désignent respectivement les complaisances élastiques réduites en mode I et II (Valentin et al., 1982).

Le découplage complet s'obtient en effectuant deux calculs distincts de l'intégrale $M(u, v)$, afin d'exprimer les facteurs d'intensité de contrainte réels ${}^u K_I$ et ${}^u K_{II}$. Pour cela, on choisit des valeurs judicieuses pour les facteurs d'intensité de contrainte virtuels ${}^v K_I$ et ${}^v K_{II}$:

$${}^u K_I = \frac{8 \cdot M({}^v K_I = 1, {}^v K_{II} = 0)}{C_1} \quad \text{et} \quad {}^u K_{II} = \frac{8 \cdot M({}^v K_I = 0, {}^v K_{II} = 1)}{C_2} \tag{17}$$

5. GENERALISATION AU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

Pour un comportement viscoélastique linéaire, nous considérons un modèle de Kelvin Voigt généralisé composé de M modèles de Kelvin associés à un ressort en série qui traduit la réponse instantanée du comportement (Figure 2).

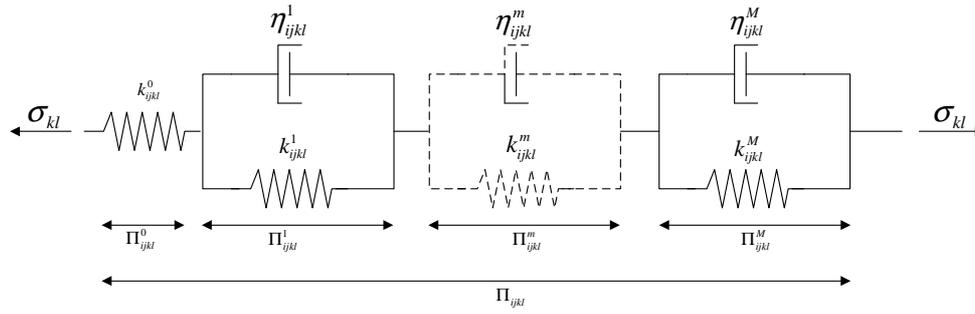


Figure 2 : Modèle de Kelvin Voigt généralisé

Dans ce cas, nous généralisons la relation (13) comme suit :

$$\begin{aligned}
 M_v^k(u, v) &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} (\sigma_{ij,l}^k(v) \cdot u_i^k - \sigma_{ij}^k(u) \cdot v_{i,l}^k) \cdot n_j dS \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{A(\Gamma_I)} \left((\sigma_{ij}^k(v) \cdot (u_{i,j}^k)_{,l} + \sigma_{ij}^k(u) \cdot (v_{i,j}^k)_{,l}) - \left((\sigma_{ij}^k(v) \cdot u_{i,j}^k)_{,l} + (\sigma_{ij}^k(u) \cdot v_{i,j}^k)_{,l} \right) \right) dV \quad (18) \\
 &- \frac{1}{2} \int_L (\sigma_{ij}^k(v) \cdot u_{i,l}^k + \sigma_{ij}^k(u) \cdot v_{i,l}^k) \cdot n_j dS,
 \end{aligned}$$

avec $k = (0, 1, \dots, M)$

$\sigma_{ij}^k(u)$ et $\sigma_{ij}^k(v)$ désignent respectivement les contraintes réelles et virtuelles dans le $k^{ième}$ ressort du modèle rhéologique ; $\sigma_{ij,l}^k(u)$ et $\sigma_{ij,l}^k(v)$ étant leurs gradients respectifs. u_i^k et v_i^k sont les déplacements réels et virtuels. En employant le cumul énergétique pour l'ensemble des composantes élastiques du modèles, nous obtenons (dubois et al., 2005):

$$M_v(u, v) = M_v^0(u, v) + \sum_{m=1}^M M_v^m(u, v) = \sum_k M_v^k(u, v) \quad (19)$$

Finalement, en rappelant l'expression (18), nous déduisons successivement les expressions suivantes:

$$M_v^k(u, v) = C_1^k \cdot \frac{u K_I^k \cdot v K_I^k}{8} + C_2^k \cdot \frac{u K_{II}^k \cdot v K_{II}^k}{8} \quad (20)$$

$$u K_I^k = \frac{8 \cdot M_v^k(u, v) (v K_I^k = 1, v K_{II}^k = 0)}{C_1^k} \quad (21)$$

$$u K_{II}^k = \frac{8 \cdot M_v^k(u, v) (v K_I^k = 0, v K_{II}^k = 1)}{C_2^k}$$

En combinant les relations (15), (20) et (21), l'expression du taux de restitution d'énergie G_v^k en viscoélasticité est donnée par :

$$G_v^k = {}^1G_v^k + {}^2G_v^k = C_1^k \frac{(u K_I^k)^2}{8} + C_2^k \frac{(u K_{II}^k)^2}{8} \quad (22)$$

${}^1G_v^k$ et ${}^2G_v^k$ désignent respectivement les taux de restitution d'énergie propre au $k^{ième}$ ressort du modèle rhéologique pour les deux modes de rupture.

Nous avons d'ailleurs :

$${}^1G_v = \sum_k {}^1G_v^k \text{ et } {}^2G_v = \sum_k {}^2G_v^k \text{ avec } k = (0, 1, \dots, M) \quad (23)$$

Les différents champs mécaniques réels sont issus d'une formulation incrémentale du comportement viscoélastique.

6. FORMULATION INCREMENTALE

La représentation rhéologique (Figure 2) est également employée dans le développement d'une formulation intégrale permettant de déterminer, pas à pas, les champs mécaniques issus du comportement viscoélastique. Le modèle repose sur la décomposition du tenseur des déformations suivante (Ghazlan et al., 1995) :

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{k,l} \Pi_{ijkl} \quad (24)$$

$$\text{avec } \Pi_{ijkl} = \Pi_{ijkl}^{(0)} + \sum_{m=1}^M \Pi_{ijkl}^{(m)}, \quad m = (1, \dots, M) \quad (25)$$

La forme correspondante du tenseur de fluage orthotrope est exprimée par :

$$J_{ijkl}(t) = \frac{1}{k_{ijkl}^0} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{k_{ijkl}^m} \cdot \left(1 - \exp^{-\lambda_{ijkl}^m t} \right) \text{ avec } \lambda_{ijkl}^m = \frac{k_{ijkl}^m}{\eta_{ijkl}^m} \quad (26)$$

Ces différentes expressions nous permettent de donner la forme indicielle de la formulation incrémentale tridimensionnelle :

$$\Delta \varepsilon_{ij}(t_n) = M_{ijkl} \cdot \Delta \sigma_{kl}(t_n) + \tilde{\varepsilon}_{ij}(t_{n-1}) \quad (27)$$

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \sum_{k,l} \tilde{\Pi}_{ijkl} \text{ et } \tilde{\Pi}_{ijkl} = \sum_{m=1}^M \tilde{\Pi}_{ijkl}^m(t_{n-1}) \quad (28)$$

$$\tilde{\Pi}_{ijkl}^m(t_{n-1}) = \left(\exp^{-\lambda_{ijkl}^m t} - 1 \right) \cdot \left[\frac{\sigma_{kl}(t_{n-1})}{k_{ijkl}^m} + \Pi_{ijkl}^m(t_{n-1}) \right] \quad (29)$$

M_{ijkl} représente les composantes de la matrice de souplesse viscoélastique :

$$M_{ijkl} = \frac{1}{k_{ijkl}^0} + \sum_{m=1}^M \frac{1}{k_{ijkl}^m} \cdot \left(1 - \frac{1 - \exp^{-\lambda_{ijkl}^m \cdot \Delta t_n}}{\lambda_{ijkl}^m \cdot \Delta t_n} \right) \text{ avec } \lambda_{ijkl}^m = \frac{k_{ijkl}^m}{\eta_{ijkl}^m} \quad (30)$$

Afin de résoudre la formulation incrémental (27), nous utilisons un algorithme éléments finis proposé par Ghazlan. Ainsi, on a les relations, en termes de contraintes et de déplacements, suivantes :

$$\{\sigma^p\}_{t_n} = [K_T^p]^{-1} \cdot \{\varepsilon^p\}_{t_n} \text{ avec } K_T^p = \int_{\Omega} B^T \cdot [M^p]^{-1} \cdot B \, d\Omega \quad (31)$$

K_T^T est la matrice tangente de rigidité viscoélastique apparente. B est la matrice Jacobienne reliant déplacements et déformations. Les déplacements, pour chaque éléments de Kelvin Voigt, sont donnés par la résolution du système suivant, $\{F^p\}_{t_{n-1}}$, représentant les forces nodales induites des contraintes passées

7. CONCLUSION

Ce travail présente le développement de l'intégrale invariante M qui assure, au même titre que J ou G, l'indépendance du domaine d'intégration au cours de l'amorçage et de la propagation de la fissure avec la prise en compte d'une pression causée par l'action d'un flux de chaleur ou hydrique sur les lèvres de la fissure. Une validation expérimentale doit à présent être réalisée dans des ambiances contrôlées. Ce travail est la base scientifique du développement de la mécanique de la rupture dans les matériaux composites (le matériaux bois dans notre cas) afin d'étudier l'évolution de leurs défauts sous les effets de l'environnement (température et humidité). Pour cela, il était nécessaire de développer un outil permettant d'effectuer un découplage thermodynamique des différentes sources de dissipation énergétiques et des modes de rupture afin de cibler la modélisation vis-à-vis des effets de l'environnement sur les propriétés viscoélastiques et de fissuration.

8. BIBLIOGRAPHIE

- Chen F.M.K. and Shield R.T., Conservation laws in elasticity of the J-integral type. *Journal of Applied Mechanics and Physics*, Vol. 28, pp.1-22, 1977.
- Dubois F., Petit C., Modelling of the crack growth initiation in viscoelastic media by the $G\theta_v$ - integral. *Engineering Fracture Mechanics*, Vol 72, pp. 2821-2836, 2005.
- Dubois F., Petit C., Découplage des modes de rupture dans le bois : approche numérique par l'intégrale $M\theta$, *Revue Française de Génie Civil*, pp. 247-257, 2000
- Ghazlan G., Caperaa S, Petit C., An Incremental formulation for the linear analysis of thin viscoelastic structures using generalized variables. *Int Journal of Numeric Methods Engineering*, Vol. 38, pp. 3315-33, 1995.
- Nother E., Invariante variations problem, *Trans. Theor. And Stat. Phys.*, Vol. 1, pp. 183-207, 1918
- Rice JR., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentrations by notches and cracks. *Journal of Applied Mechanics*, pp.379-85, 1968.
- Sih G.C., Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems. *International Journal of Fracture*, Vol. 10, pp. 305-321, 1974
- Staverman A. J., Schwarzl P., Thermodynamics of viscoelastic behavior, *proceeding academic science*, Vol 55, pp. 474-492, 1952.
- Valentin G. and Morlier P., A criterion of crack propagation in timber. *Matériaux et constructions*, Vol. 88, pp. 291-298, 1982.