



Quelques éléments de calcul des équilibres de Nash

Annie Hofstetter, Mathieu Desole, Mabel Tidball

► To cite this version:

Annie Hofstetter, Mathieu Desole, Mabel Tidball. Quelques éléments de calcul des équilibres de Nash. 2013. hal-01594319

HAL Id: hal-01594319

<https://hal.science/hal-01594319>

Preprint submitted on 26 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



L A M E T A

Laboratoire Montpelliérain
d'Economie Théorique et Appliquée

— U M R —
Unité Mixte de Recherche

ETUDES et SYNTHES

« Quelques éléments de calcul des
équilibres de Nash. »

Annie HOFSTETTER
Mathieu DESOLE
Mabel TIDBALL

ES n°2013-03

Unité de Formation et de Recherche d'Economie
Avenue Raymond DUGRAND C.S. 79606
34960 MONTPELLIER Cedex 2

E-mail : lameta@lameta.univ-montp1.fr
web : www.lameta.univ-montp1.fr

Quelques éléments de calcul des équilibres de Nash

Annie Hofstetter*, Mathieu Désolé†, Mabel Tidball*

Avril 2013

Résumé

Le calcul des équilibres de Nash est évident pour les chercheurs en économie mais beaucoup moins pour les ingénieurs ou les étudiants. Dans le cas d'un problème traité lors d'expériences en laboratoire, l'analyse proposait de le redéfinir sous la forme d'un jeu classiquement étudié en théorie des jeux. Avant cela, il s'agissait de bien comprendre quel type de jeu était donné et comment effectuer les calculs des équilibres. Le document propose donc une synthèse de quelques cas de jeux classiques et la façon de calculer les équilibres de Nash à l'aide des outils informatiques proposés par Maple.

*INRA, UMR1135 Lameta, F-34000 Montpellier, France

†SupAgro, UMR1135 Lameta, F-34000 Montpellier, France.

Nous remercions Nicolas Quérou pour ses explications et son travail de relecture de ce document.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Jeu en stratégie pure	3
2.1	2 joueurs avec chacun 2 actions : matrice carrée 2x2	4
2.2	Exemple avec deux équilibres	5
2.3	Exemple avec deux équilibres ou jeu de coordination	6
2.4	Notion de stratégie dominante	7
2.5	Notion de jeux à somme nulle	7
2.6	2 joueurs avec chacun 3 actions : matrice carrée 3x3	8
2.7	2 joueurs avec 3 actions pour l'un et 2 actions pour l'autre : matrice 3x2	9
3	Jeu en stratégie mixte	10
4	Généralisation du problème dans l'exemple d'Alice et Bob	11
4.1	Première partie : principe de résolution pour Alice	11
4.2	Seconde partie : principe de résolution pour Bob	13
4.3	Troisième partie	14
4.3.1	Croisée des meilleures réponses	14
4.3.2	Conclusion	15
5	Traitement informatique avec Maple	15
5.1	Procédures	15
5.2	Utilisation du package <i>matrixgames</i>	15
6	Conclusion	16
A	Jeux non coopératifs	17
A.1	Matrices de quelques jeux 2x2	17
A.2	Cas simple 2x2	17
A.2.1	<i>Initialisation des matrices</i>	17
A.2.2	<i>1ère étape : calcul meilleure réaction de l'un sachant l'action de l'autre</i>	17
A.2.3	<i>2nde étape construction des fonctions de meilleure réaction éventail : à chaque action de l'un on associe le jeu de l'autre</i>	20
A.2.4	<i>3ème étape consolidation : vérification de la déviance de(s) l'équilibre(s)</i>	21
A.3	2x2 stratégie mixte avec équations linéaires	21
A.4	2x2 stratégie mixte Lagrangien	22
A.4.1	<i>Lagrangien et Conditions de Premier Ordre</i>	22
A.4.2	<i>Pour J1</i>	22
A.4.3	<i>Pour J2</i>	23
A.4.4	<i>Croisée des meilleures réactions</i>	24
B	Vérification avec le module <i>matrixgames</i>	25

1 Introduction

Le travail de thèse de Mathieu Désolé a pour objet l'évaluation de l'influence du contexte d'un jeu de rôles sur les comportements des joueurs. Un jeu de rôles simulant une problématique de gestion de l'eau dans le contexte sud-africain, a été le point de départ pour la construction d'un protocole de jeu simplifié. Ce nouveau protocole expérimental s'appuie dans sa construction sur un modèle de théorie des jeux coopératifs ; cependant, par souci de simplification, les joueurs ont plutôt été mis face à une situation de coordination renvoyant à la théorie des jeux non coopératifs. Les résultats obtenus en laboratoire doivent donc être confortés par la théorie des jeux non coopératifs.

La matrice « coopérative » correspond à un jeu à trois joueurs ayant chacun la possibilité de choisir parmi sept cartes la répartition des gains de leur coalition. Les trois joueurs doivent se coordonner à l'unanimité sur l'une de ces cartes pour que l'accord soit scellé ; dans le cas contraire, on applique le statu quo : les joueurs repartent avec leurs gains initiaux.

Les sept cartes renvoient chacune à des critères de répartition particuliers. On peut notamment citer la carte de répartition équitable (« on coupe la poire en trois ») ou encore des cartes qui accordent presque tout à l'un des joueurs tandis que les deux autres obtiennent seulement une « miette » chacun. La question est alors de savoir dans quelle mesure les joueurs choisiront l'une ou l'autre des sept cartes qui leur sont proposées, en s'appuyant sur les outils de la théorie des jeux non coopératifs.

Pour tenter de mettre en œuvre ce cas complexe (3 joueurs asymétriques face à 7 alternatives), nous abordons dans cette note des cas simples dans le but ultime de créer une application de calcul automatique. L'idée est de bien comprendre chaque cas simple pour ensuite recomposer la situation qui nous intéresse et analyser les différentes situations de jeu.

Dans un premier temps, nous étudierons le cas de jeux non coopératifs en stratégie pure, pour lesquels nous décomposerons le calcul d'un équilibre de Nash. Ensuite nous analyserons un cas en stratégie mixte à l'aide des équations linéaires, puis grâce au Lagrangien qui nous permet de généraliser le calcul. Enfin nous donnerons quelques exemples de calcul à l'aide de Maple.

2 Jeu en stratégie pure

Un jeu en stratégie pure est un jeu pour lequel les probabilités de jouer une action sont de 0 ou 1 pour chaque joueur. Ce qui signifie que chaque joueur joue une action parmi celles qui lui sont proposées.

Dans cette première partie, pour chaque exemple traité, nous ferons le calcul en trois étapes :

- analyse de la meilleure réaction de chaque joueur dans le cas où l'action des autres joueurs est fixée ;
- analyse des fonctions de meilleure réaction : trouver l'intersection des fonctions de meilleure réaction pour déterminer l'équilibre ;
- vérification de la stabilité de l'équilibre, en vérifiant pour chaque combinaison que les autres ne sont pas des équilibres de Nash, en d'autres termes cela consiste à vérifier s'il existe une déviation profitable.

Pour fixer les idées dans le cas de deux joueurs et deux stratégies chacun, un équilibre de Nash est une paire composée de la stratégie du joueur 1 comme étant la meilleure réponse à une stratégie du joueur 2, et d'une stratégie pour le joueur 2 comme étant la meilleure réponse à une stratégie du joueur 1.

2.1 2 joueurs avec chacun 2 actions : matrice carrée 2x2

On traite ici l'exemple classique du dilemme du prisonnier, le jeu ne dure qu'un seul tour et les joueurs doivent choisir leur stratégie simultanément. En général, la matrice est symétrique.

Énoncé : deux suspects, complices d'un délit, sont arrêtés par la police, mais faute de preuves, ils vont tous les deux en prison. Toutefois ils peuvent bénéficier d'une remise de peine selon qu'ils dénoncent ou pas leur compère. Les remises de peine sont indiquées dans la matrice en nombre d'années de liberté (nombre négatif) : s'ils se taisent tous les deux, ils ne feront chacun que 6 mois de prison ; s'ils se dénoncent mutuellement, ils feront chacun 5 ans de prison ; si l'un se tait et l'autre le dénonce, il fera 10 ans de prison tandis que l'autre sera libéré.

		joueur 2	
		se tait (T)	dénonce (D)
joueur 1	se tait (T)	$(-1/2, -1/2)$	$(-10, 0)$
	dénonce (D)	$(0, -10)$	$(-5, -5)$

Première étape : meilleure réaction de l'un par rapport au jeu de l'autre qui est connu

Considérons le joueur 1 et cherchons sa meilleure réaction selon le choix du joueur 2. Si le joueur 2 se tait et si le joueur 1 se tait, ce dernier fait 6 mois de prison, s'il dénonce l'autre il est libéré ; il a donc intérêt à dénoncer. Si le joueur 2 dénonce le joueur 1, le joueur 1 a le choix entre se taire auquel cas il fait 10 ans de prison, et dénoncer l'autre auquel cas il fait 5 ans de prison. Si l'on considère un joueur rationnel, il préférera faire 5 ans plutôt que 10 ans de prison, en d'autres termes, il préférera donc dénoncer plutôt que se taire.

Résumé

Joueur 2 = se tait	meilleure réaction du joueur 1 = dénonce	(D,T)
Joueur 2 = dénonce	meilleure réaction du joueur 1 = dénonce	(D,D)
Joueur 1 = se tait	meilleure réaction du joueur 2 = dénonce	(T,D)
Joueur 1 = dénonce	meilleure réaction du joueur 2 = dénonce	(D,D)

Seconde étape : éventail des actions

À chaque action de l'un, on associe la réaction de l'autre :

Hypothèse : le joueur 1 choisit de se taire. Réaction : le joueur 2 dénonce (T,D)

Hypothèse : le joueur 1 choisit de dénoncer. Réaction : le joueur 2 dénonce (D,D)

Hypothèse : le joueur 2 choisit de se taire. Réaction : le joueur 1 dénonce (D,T)

Hypothèse : le joueur 2 choisit de dénoncer. Réaction : le joueur 1 dénonce (D,D)

À l'équilibre de Nash, tous les joueurs jouent leur meilleure réponse compte tenu des stratégies des autres joueurs. En croisant les deux séries d'hypothèses précédentes, on cherche quelle stratégie optimale correspond à l'intersection des fonctions de meilleure réponse. Il peut y avoir plusieurs équilibres. L'équilibre est ici (Dénonce, Dénonce).

Troisième étape : vérification

Un équilibre de Nash est une situation telle qu'aucun joueur n'a intérêt à dévier unilatéralement de sa stratégie. La vérification de la stabilité de l'équilibre consiste donc à regarder s'il existe des incitations unilatérales à dévier de la stratégie optimale ainsi repérée. L'équilibre est (D,D). Si le joueur 1 joue Dénonce, le joueur 2 n'a pas intérêt à dévier pour se taire car il passerait de 5 à 10 ans de prison. De même, si le joueur 2 joue Dénonce, le joueur 1 n'a pas intérêt à dévier pour se taire car celui-ci passerait lui aussi de 5 à 10 ans de prison. L'équilibre (Dénonce, Dénonce) représente donc l'état dans lequel il n'y a pas d'incitation à devier pour l'un et l'autre des joueurs.

2.2 Exemple avec deux équilibres

Dans le cas du jeu suivant, on peut remarquer que la matrice est symétrique.

		joueur 2	
		gauche	droite
joueur 1	haut	(3,3)	(1,4)
	bas	(4,1)	(0,0)

Résumé des meilleures réactions

Joueur 2 = gauche	meilleure réaction du joueur 1 = bas	(B,G)
Joueur 2 = droite	meilleure réaction du joueur 1 = haut	(H,D)
Joueur 1 = haut	meilleure réaction du joueur 2 = droite	(H,D)
Joueur 1 = bas	meilleure réaction du joueur 2 = gauche	(B,G)

Éventail des actions

Hypothèse : le joueur 1 choisit haut. Réaction : le joueur 2 choisit droite (H,D)

Hypothèse : le joueur 1 choisit bas. Réaction : le joueur 2 choisit gauche (B,G)

Hypothèse : le joueur 2 choisit gauche. Réaction : le joueur 1 choisit bas (B,G)

Hypothèse : le joueur 2 choisit droite. Réaction : le joueur 1 choisit haut (H,D)

En croisant les deux séries d'hypothèses précédentes, on trouve deux équilibres : (H,D) et (B,G).

Vérification de la déviance

Pour l'équilibre (H,D), le joueur 1 joue haut. Le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer gauche plutôt que droite sinon il recevrait 3 au lieu de 4. Le joueur 2 joue droite, si le joueur 1 jouait bas alors il recevrait 0 au lieu de 1.

Pour l'équilibre (B,G), le joueur 1 joue bas. Le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer droite plutôt que gauche sinon il recevrait 0 au lieu de 1. Le joueur 2 joue gauche, si le joueur 1 jouait haut alors il recevrait 3 au lieu de 4.

2.3 Exemple avec deux équilibres ou jeu de coordination

Les deux joueurs veulent voir ensemble un film. L'un préfère Max Pécas, l'autre préfère James Bond.

		joueur 2	
		Pécas (P)	Bond (B)
joueur 1	Pécas (P)	(2,1)	(0,0)
	Bond (B)	(0,0)	(1,2)

Résumé des meilleures réactions

Joueur 2 = Pécas	meilleure réaction du joueur 1 = Pécas	(P,P)
Joueur 2 = Bond	meilleure réaction du joueur 1 = Bond	(B,B)
Joueur 1 = Pécas	meilleure réaction du joueur 2 = Pécas	(P,P)
Joueur 1 = Bond	meilleure réaction du joueur 2 = Bond	(B,B)

Éventail des actions

Hypothèse : le joueur 1 choisit Pécas. Réaction : le joueur 2 choisit Pécas (P,P)

Hypothèse : le joueur 1 choisit Bond. Réaction : le joueur 2 choisit Bond (B,B)

Hypothèse : le joueur 2 choisit Pécas. Réaction : le joueur 1 choisit Pécas (P,P)

Hypothèse : le joueur 2 choisit Bond. Réaction : le joueur 1 choisit Bond (B,B)

En croisant les deux séries d'hypothèses précédentes, on trouve deux équilibres : (P,P) et (B,B).

Vérification de la déviance

Pour l'équilibre (P,P), le joueur 1 joue Pécas. Le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer Bond plutôt que Pécas sinon il recevrait 0 au lieu de 1. Le joueur 2 joue Pécas, si le joueur 1 jouait Bond alors il recevrait 0 au lieu de 2.

Pour l'équilibre (B,B), le joueur 1 joue Bond. Le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer Pécas plutôt que Bond sinon il recevrait 0 au lieu de 2. Le joueur 2 joue Bond, si le joueur 1 jouait Pécas alors il recevrait 0 au lieu de 1.

On comprend la notion de coordination comme une convergence de la stratégie de chaque joueur vers le même choix quel que soit le film choisi.

2.4 Notion de stratégie dominante

exemple haut/bas et gauche/droite

		joueur 2	
		gauche	droite
joueur 1	haut	(4,0)	(5,1)
	bas	(8,3)	(3,4)

Résumé des meilleures réactions

Joueur 2 = gauche	meilleure réaction du joueur 1 = bas	(B,G)
Joueur 2 = droite	meilleure réaction du joueur 1 = haut	(H,D)
Joueur 1 = haut	meilleure réaction du joueur 2 = droite	(H,D)
Joueur 1 = bas	meilleure réaction du joueur 2 = droite	(B,D)

On constate ici que quel que soit le choix du joueur 1 la réaction du joueur 2 sera la même. La réponse droite du joueur 2 est appelée stratégie dominante.

Éventail des actions

Hypothèse : le joueur 1 choisit haut. Réaction : le joueur 2 choisit droite (H,D)

Hypothèse : le joueur 1 choisit bas. Réaction : le joueur 2 choisit droite (B,D)

Hypothèse : le joueur 2 choisit gauche. Réaction : le joueur 1 choisit bas (B,G)

Hypothèse : le joueur 2 choisit bas. Réaction : le joueur 1 choisit haut (H,D)

En croisant les deux séries d'hypothèses précédentes, on trouve l'équilibre (H,D).

Vérification de la déviance

Pour l'équilibre (H,D), le joueur 1 joue haut. Le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer gauche plutôt que droite sinon il recevrait 0 au lieu de 1. Le joueur 2 joue droite, si le joueur 1 jouait bas alors il recevrait 3 au lieu de 5.

2.5 Notion de jeux à somme nulle

Un jeu à somme nulle est un jeu où la somme de gains de tous les joueurs est égale à zéro. Soit l'exemple d'Alice et Bob où l'un gagne ce que l'autre perd

selon leur choix de prendre le bus ou de marcher.

		Bob	
		bus (B)	marcher (M)
Alice	bus (B)	(3,-3)	(6,-6)
	marcher (M)	(5,-5)	(4,-4)

Résumé des meilleures réactions

Bob = bus	meilleure réaction d'Alice = marcher	(M,B)
Bob = marcher	meilleure réaction d'Alice = bus	(B,M)
Alice = bus	meilleure réaction de Bob = bus	(B,B)
Alice = marcher	meilleure réaction de Bob = marcher	(M,M)

Éventail des actions

Hypothèse : Alice choisit le bus. Réaction : Bob choisit le bus (B,B)

Hypothèse : Alice choisit de marcher. Réaction : Bob choisit de marcher (M,M)

Hypothèse : Bob choisit le bus. Réaction : Alice choisit de marcher (M,B)

Hypothèse : Bob choisit de marcher. Réaction : Alice choisit le bus (B,M)

Il n'y a pas d'équilibre. Question : la notion d'équilibre est-elle compatible avec un jeu à somme nulle ?

2.6 2 joueurs avec chacun 3 actions : matrice carrée 3x3

exemple avec aucun équilibre : le jeu pierre/ciseaux/feuille est également un jeu à somme nulle. On parle également de conflit pur.

		joueur 2		
		pierre (P)	ciseaux (C)	feuille (F)
joueur 1	pierre (P)	(0,0)	(1,-1)	(-1,1)
	ciseaux (C)	(-1,1)	(0,0)	(1,-1)
	feuille (F)	(1,-1)	(-1,1)	(0,0)

Résumé des meilleures réactions

Joueur 2 = pierre	meilleure réaction du joueur 1 = feuille	(F,P)
Joueur 2 = ciseaux	meilleure réaction du joueur 1 = pierre	(P,C)
Joueur 2 = feuille	meilleure réaction du joueur 1 = ciseaux	(C,F)
Joueur 1 = pierre	meilleure réaction du joueur 2 = feuille	(P,F)
Joueur 1 = ciseaux	meilleure réaction du joueur 2 = pierre	(C,P)
Joueur 1 = feuille	meilleure réaction du joueur 2 = ciseaux	(F,C)

Éventail des actions

Hypothèse : le joueur 1 choisit pierre. Réaction : le joueur 2 choisit feuille (P,F)

Hypothèse : le joueur 1 choisit ciseaux. Réaction : le joueur 2 choisit pierre (C,P)

Hypothèse : le joueur 1 choisit feuille. Réaction : le joueur 2 choisit ciseaux (F,C)

Hypothèse : le joueur 2 choisit pierre. Réaction : le joueur 1 choisit feuille (F,P)

Hypothèse : le joueur 2 choisit ciseaux. Réaction : le joueur 1 choisit pierre (P,C)

Hypothèse : le joueur 2 choisit feuille. Réaction : le joueur 1 choisit ciseaux (C,F)

Dans ce jeu il n'y a pas d'équilibre.

2.7 2 joueurs avec 3 actions pour l'un et 2 actions pour l'autre : matrice 3x2

		joueur 2	
		B1	B2
joueur 1	A1	(3,3)	(3,2)
	A2	(2,2)	(5,6)
	A3	(0,3)	(6,1)

Résumé des meilleures réactions

Joueur 2 = B1	meilleure réaction du joueur 1 = A1	(A1,B1)
Joueur 2 = B2	meilleure réaction du joueur 1 = A3	(A3,B2)
Joueur 1 = A1	meilleure réaction du joueur 2 = B1	(A1,B1)
Joueur 1 = A2	meilleure réaction du joueur 2 = B2	(A2,B2)
Joueur 1 = A3	meilleure réaction du joueur 2 = B1	(A3,B1)

Éventail des actions

Hypothèse : le joueur 1 choisit A1. Réaction : le joueur 2 choisit B1 (A1,B1)

Hypothèse : le joueur 1 choisit A2. Réaction : le joueur 2 choisit B2 (A2,B2)

Hypothèse : le joueur 1 choisit A3. Réaction : le joueur 2 choisit B1 (A3,B1)

Hypothèse : le joueur 2 choisit B1. Réaction : le joueur 1 choisit A1 (A1,B1)

Hypothèse : le joueur 2 choisit B2. Réaction : le joueur 1 choisit A3 (A3,B2)

En croisant les deux séries d'hypothèses précédentes, l'équilibre est (A1,B1).

Vérification de la déviance

Le joueur 1 joue A1. Le joueur 2 n'a pas intérêt à jouer B2 car il recevrait 2 au lieu de 3. Le joueur 2 joue B1. Le joueur 1 n'a pas intérêt à jouer A2 ou A3 car il recevrait moins (2 ou 0 au lieu de 3).

3 Jeu en stratégie mixte

Un jeu en stratégie mixte est un jeu où une des stratégies consiste à tirer aléatoirement entre plusieurs des stratégies selon des probabilités fixées. La base d'un jeu en stratégie mixte ne repose plus sur des actions comme en stratégie pure, telles que je prends le bus ou je ne le prends pas, mais sur la probabilité de faire une action ou non, c'est à dire décider de la probabilité p de prendre le bus ou $1-p$ de ne pas le prendre pour l'un des joueurs et q et $1-q$ pour l'autre joueur. Une hypothèse est de supposer que les stratégies sont indépendantes.

Dans l'exemple des deux joueurs qui ont le choix de prendre le bus ou de marcher, nous avons vu qu'il n'y avait pas d'équilibre en stratégie pure. Trouver l'équilibre de Nash consiste à trouver les stratégies mixtes de chaque joueur offrant à l'un les meilleurs gains possibles, sachant que l'autre a aussi choisi les stratégies mixtes lui offrant également le meilleur gain possible. Alice peut choisir le bus avec une probabilité de p ou de marcher avec une probabilité de $1 - p$. Simultanément Bob peut choisir le bus avec une probabilité de q ou de marcher avec une probabilité de $1 - q$.

Alice peut calculer son gain espéré si elle choisit le bus comme la somme de son gain lorsque Bob prend le bus multiplié par la probabilité que Bob prenne le bus et de son gain lorsque Bob choisit de marcher multiplié par la probabilité que Bob choisisse de marcher. Soit $3q + 6(1 - q)$.

De la même façon, Alice peut calculer son gain espéré si elle choisit de marcher comme la somme de son gain lorsque Bob prend le bus multiplié par la probabilité que Bob prenne le bus et de son gain lorsque Bob choisit de marcher multiplié par la probabilité que Bob choisisse de marcher. Soit $5q + 4(1 - q)$.

Parallèlement, Bob peut calculer son gain espéré s'il choisit le bus comme la somme de son gain lorsqu'Alice prend le bus multiplié par la probabilité qu'Alice prenne le bus et de son gain lorsqu'Alice choisit de marcher multiplié par la probabilité qu'Alice choisisse de marcher. Soit $-3p - 5(1 - p)$.

De la même façon, Bob peut calculer son gain espéré s'il choisit de marcher comme la somme de son gain lorsqu'Alice prend le bus multiplié par la probabilité qu'Alice prenne le bus et de son gain lorsqu'Alice choisit de marcher multiplié par la probabilité qu'Alice choisisse de marcher. Soit $-6p - 4(1 - p)$.

Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut que les gains attendus pour chacun de leurs choix soient égaux.

$$\begin{aligned} 3q + 6(1 - q) &= 5q + 4(1 - q) \\ -3p - 5(1 - p) &= -6p - 4(1 - p) \end{aligned}$$

En résolvant la première équation en q on trouve que la probabilité optimale pour Bob de choisir le bus est de $q = \frac{1}{2}$.

En résolvant la seconde équation en p on trouve que la probabilité optimale pour Alice de choisir le bus est de $p = \frac{1}{4}$.

4 Généralisation du problème dans l'exemple d'Alice et Bob

Dans les jeux en stratégie pure ou en stratégie mixte, la stratégie est donc un jeu de probabilités dont celles en stratégie pure sont un cas très particulier. Dans tous les cas le but est de choisir la stratégie de l'un des joueurs en considérant que celle de l'autre joueur est fixée, et telle que son gain sera le plus haut. Les gains sont égaux, c'est à dire que chacun des joueurs est indifférent au choix des autres joueurs. Cette généralisation représente un concept plus large ; s'il existe des équilibres en stratégie pure, ils apparaîtront. Dans le cas de la stratégie pure, le gain est déterminé, dans un cas plus général, le gain est espéré. Le problème n'est plus en choix discret, il convient de le poser en termes d'optimisation. Au choix $(q, 1-q)$ du joueur 2 fixé, le joueur 1 choisit sa stratégie $(p, 1-p)$ telle que son gain devra être maximal. Il sera posé en trois temps :

- obtenir les meilleures réactions de chacun à la stratégie de l'autre ;
- bien poser le problème de maximisation et résoudre les conditions de premier ordre ;
- croiser les meilleures réactions.

Dans un premier temps il est raisonnable de voir s'il existe des équilibres de Nash en stratégie pure, puis en stratégie mixte selon ce que l'on souhaite faire.

Reprenons l'exemple d'Alice et Bob qui peuvent chacun prendre le bus ou marcher :

		Bob	
		bus (B)	marcher (M)
Alice	bus (B)	(3,-3)	(6,-6)
	marcher (M)	(5,-5)	(4,-4)

4.1 Première partie : principe de résolution pour Alice

Sachant que la stratégie de Bob est donnée, Alice doit choisir sa stratégie $(p, 1-p)$ telle que son payoff soit maximisé :

$$EU_{((p, 1-p)/(q, 1-q))} = p[3q + 6(1 - q)] + (1 - p)[5q + 4(1 - q)]$$

soit

$$\max_{p \in [0, 1]} p[3q + 6(1 - q)] + (1 - p)[5q + 4(1 - q)]$$

On calcule la meilleure réponse d'Alice à la stratégie $(q, 1-q)$ de Bob :

$$\begin{aligned}
BR_{A(q, 1-q)} &= p(3q + 6(1 - q)) + (1 - q)(5q + 4(1 - q)) \\
&= p(3q + 6(1 - q) - 5q - 4(1 - q)) + 5q + 4(1 - q) \\
&= p(-2q + 2(1 - q)) + 5q + 4(1 - q) \\
&= p(-4q + 2) + 5q + 4(1 - q)
\end{aligned}$$

La stratégie $(p, 1-p)$ d'Alice doit lui apporter le maximum d'utilité en terme espéré. Soit :

$$\max_{p \in [0, 1]} p(-4q + 2) + 5q + 4(1 - q)$$

Le p étant contraint, il faut utiliser les paramètres de Lagrange après avoir transformé les contraintes en équations de positivité. $p \in [0, 1] \Rightarrow p \geq 0$ et $p \leq 1$ c'est à dire $p \geq 0$ et $1 - p \geq 0$.

D'où le Lagrangien :

$$L = p(-4q + 2) + 5q + 4(1 - q) + \lambda p + \mu(1 - p)$$

avec $\lambda p = 0, \lambda \geq 0$ et $\mu(1 - p) = 0, \mu \geq 0$

La condition de premier ordre est la suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial p} = (-4q + 2) + \lambda - \mu$$

La meilleure réponse d'Alice, p , est telle que cette condition est satisfaite, soit $(-4q + 2) + \lambda - \mu = 0$. La condition ne dépend plus de p . On sait également que $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$ et que les conditions sont vérifiées.

1. Si $\lambda > 0$,
 $p^* = 0, \mu = 0 \Rightarrow \lambda = 4q - 2 > 0$ soit : $q > \frac{1}{2}$
Conclusion 1 : $BR_{A(q, 1-q)} = (0, 1)$ possible uniquement si la stratégie de Bob est $q > \frac{1}{2}$.
2. Si $\mu > 0$,
 $\mu(1 - p) = 0 \Rightarrow p^* = 1, \lambda = 0$
 $\Rightarrow -4q + 2 - \mu = 0$
 $\Rightarrow \mu = -4q + 2 > 0$
soit : $2 > 4q \Rightarrow q < \frac{1}{2}$
Conclusion 2 : $BR_{A(q, 1-q)} = (1, 0)$ possible uniquement si la stratégie de Bob est $q < \frac{1}{2}$.
3. Si $p^* \in]0, 1[$
 $\lambda p = 0 \Rightarrow \lambda = 0$
 $p^* \neq 1 \Rightarrow \mu = 0$
 $CPO = 0 \Rightarrow -4q + 2 = 0$
 $q = \frac{1}{2}$
Conclusion 3 : $BR_{A(q, 1-q)} = (p, 1 - p), p \in]0, 1[$ possible uniquement si la stratégie de Bob est $q = \frac{1}{2}$.

4. Conclusion générale pour Alice

$$BR_{A(q, 1-q)} = \begin{cases} (0, 1) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1 - p), & \text{avec } p \in]0, 1[\text{ si } q = \frac{1}{2} \\ (1, 0) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

4.2 Seconde partie : principe de résolution pour Bob

De façon symétrique au raisonnement qui vient d'être tenu pour Alice, on fait l'hypothèse pour Bob que la stratégie d'Alice (p,1-p) est donnée. Pour Bob, son utilité espérée est la suivante :

$$EU_{((p,1-p)/(q,1-q))} = q[-3p + (-5)(1-p)] + (1-q)[-6p + (-4)(1-p)]$$

Pour obtenir la meilleure réponse, il faut résoudre

$$\max_{q \in [0,1]} EU_{((p,1-p)/(q,1-q))}$$

On calcule la meilleure réponse de Bob à la stratégie (p,1-p) d'Alice :

$$\begin{aligned} BR_{B(p,1-p)} &= q[-3p - 5(1-p)] + (1-q)[-6p - 4(1-p)] \\ &= q(-3p - 5 + 5p + 6p + 4(1-p)) - 6p - 4(1-p) \\ &= q(4p - 1) - 6p - 4(1-p) \end{aligned}$$

La stratégie (q,1-q) de Bob doit lui apporter le maximum d'utilité en terme espéré. Soit :

$$\max_{q \in [0,1]} q(4p - 1) - 6p - 4(1-p)$$

avec $q \geq 0$ et $q \leq 1 \implies 1 - q \geq 0$

On a le Lagrangien :

$$L = q(4p - 1) - 6p - 4(1-p) + \lambda q + \mu(1-q)$$

avec $\lambda q = 0, \lambda \geq 0$ et $\mu(1-q) = 0, \mu \geq 0$

La condition de premier ordre est la suivante :

$$\frac{\partial L}{\partial p} = 4p - 1 + \lambda - \mu$$

La meilleure réponse de Bob, q, est telle que cette condition est satisfaite, soit $4p - 1 + \lambda - \mu = 0$.

1. Si $\lambda > 0$,
 $q^* = 0, \mu = 0$
 $4p - 1 + \lambda = 0$
 $\implies \lambda = 1 - 4p > 0$ soit : $p < \frac{1}{4}$
Conclusion 1 : $BR_{B(p,1-p)} = (0, 1)$ possible uniquement si la stratégie d'Alice est $p < \frac{1}{4}$.
2. Si $\mu > 0$,
 $\mu(1-q) = 0 \implies q^* = 1, \lambda = 0$
 $\implies 4p - 1 - \mu = 0$
 $\implies \mu = 4p - 1 > 0$
soit : $p > \frac{1}{4}$
Conclusion 2 : $BR_{B(p,1-p)} = (1, 0)$ possible uniquement si la stratégie d'Alice est $p > \frac{1}{4}$.

3. Si $q^* \in]0, 1[$
 $\lambda q = 0 \implies \lambda = 0$
 $q^* \neq 1 \implies \mu = 0$
 $CPO = 0 \implies 4p - 1 = 0$
 $p = \frac{1}{4}$
Conclusion 3 : $BR_{B(p, 1-p)} = (q, 1 - q), q \in]0, 1[$ possible uniquement si la stratégie d'Alice est $p = \frac{1}{4}$.
4. Conclusion générale pour Bob
$$BR_{B(p, 1-p)} = \begin{cases} (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{4} \\ (q, 1 - q), & \text{avec } q \in]0, 1[\text{ si } p = \frac{1}{4} \\ (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

4.3 Troisième partie

On récapitule l'éventail des meilleures réponses pour chacun des joueurs :

$$BR_{A(q, 1-q)} = \begin{cases} (0, 1) & \text{si } q > \frac{1}{2} \\ (p, 1 - p), & \text{avec } p \in]0, 1[\text{ si } q = \frac{1}{2} \\ (1, 0) & \text{si } q < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$BR_{B(p, 1-p)} = \begin{cases} (0, 1) & \text{si } p < \frac{1}{4} \\ (q, 1 - q), & \text{avec } q \in]0, 1[\text{ si } p = \frac{1}{4} \\ (1, 0) & \text{si } p > \frac{1}{4} \end{cases}$$

Un équilibre de Nash en stratégie mixte est un ensemble de stratégies avec leurs probabilités associées p^* et q^* telles que :

$$((p^*, 1 - p^*), (q^*, 1 - q^*)) = (BR_{A(q^*, 1-q^*)}, BR_{B(p^*, 1-p^*)})$$

4.3.1 Croisée des meilleures réponses

Comme en stratégie pure, l'exercice consiste à croiser les meilleures réponses selon l'ensemble de l'éventail.

1. Point de vue d'Alice
 - Si Alice joue (0,1) ($p^* = 0$)
 $p < \frac{1}{4}$, on se trouve dans le cas où la meilleure réponse de Bob est (0,1) ($q^* = 0$). Or dans le cas où Alice joue (0,1), q doit être tel que $q^* > \frac{1}{2}$; ce qui est incompatible avec $q^* = 0$. Ce cas est donc impossible.
 - Si Alice joue (1,0) ($p^* = 1$)
 $p > \frac{1}{4}$, on se trouve dans le cas où la meilleure réponse de Bob est (1,0) ($q^* = 1$). Or dans le cas où Alice joue (1,0), q doit être tel que $q^* < \frac{1}{2}$; ce qui est incompatible avec $q^* = 1$. Ce cas est donc impossible.
 - Si Alice joue (p,1-p) avec $p \in]0, 1[$, alors $q = \frac{1}{2}$.
Si $q = \frac{1}{2}$, on est dans le cas où la meilleure réponse de Bob est (q,1-q) avec $q \in]0, 1[$ et $p = \frac{1}{4}$ qui est donc dans l'intervalle $p \in]0, 1[$, ce qui est désormais compatible.
 - Potentiellement on peut retenir le couple de stratégies

$$((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

2. Point de vue de Bob

- Si Bob joue (0,1) ($q^* = 0$)
 $q < \frac{1}{2}$, on se trouve dans le cas où la meilleure réponse d’Alice est (1,0) ($p^* = 1$). Or dans le cas où Bob joue (0,1), p doit être tel que $p^* < \frac{1}{4}$; ce qui est incompatible avec $p^* = 1$. Ce cas est donc impossible.
- Si Bob joue (1,0) ($q^* = 1$)
 $q > \frac{1}{2}$, on se trouve dans le cas où la meilleure réponse d’Alice est (0,1) ($p^* = 0$). Or dans le cas où Bob joue (1,0), p doit être tel que $p^* > \frac{1}{4}$; ce qui est incompatible avec $p^* = 0$. Ce cas est donc impossible.
- Si Bob joue ($q, 1-q$) avec $q \in]0, 1[$, alors $p = \frac{1}{4}$.
Si $p = \frac{1}{4}$, on est dans le cas où la meilleure réponse d’Alice est ($p, 1-p$) avec $p \in]0, 1[$ et $q = \frac{1}{2}$ qui est donc dans l’intervalle $q \in]0, 1[$, ce qui est désormais compatible.
- Potentiellement on peut retenir le couple de stratégies

$$((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

4.3.2 Conclusion

- L’analyse précédente permet de vérifier qu’il n’y a pas d’équilibre de Nash en stratégie pure du type ((1,0),(1,0)) par exemple où Alice et Bob souhaiteraient tous les deux prendre le bus.
- Dans notre exemple, nous avons retenu le même couple de stratégies du point de vue d’Alice et du point de vue de Bob, l’équilibre de Nash en stratégie mixte est donc :

$$((p^*, 1 - p^*), (q^*, 1 - q^*)) = ((\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}))$$

5 Traitement informatique avec Maple

5.1 Procédures

Dans un premier temps, nous avons établi les procédures en suivant les étapes de la résolution pas à pas. Les lignes de code figurent en annexe A. Les différents cas sont rappelés en stratégie pure tout d’abord, puis en stratégie mixte avec la résolution d’équations linéaires, et enfin avec la définition des différents cas lors du calcul avec la méthode du Lagrangien.

5.2 Utilisation du package *matrixgames*

Le module *matrixgames* est disponible auprès de Maplesoft et s’utilise comme une librairie personnelle. En annexe B, nous fournissons un exemple de vérification de l’existence de l’équilibre de Nash dans le cas de Bob et Alice ainsi que dans le cas issu de la thèse de Mathieu Désolé. La commande *isnash* permet de vérifier l’existence de l’équilibre qu’il soit en stratégie pure ou en stratégie mixte; par contre cela nécessite de donner exactement les probabilités associées à chaque action qui auront été calculées au préalable. Dans le second exemple, la commande *payoff* permet d’afficher le graphique de l’ensemble des gains de chaque joueur. Nous pouvons aisément repérer que l’abscisse représente les gains du joueur 1 qui vont de 75 à 117, l’ordonnée représente les gains du joueur 2 de

200 à 250. Comme il s'agit d'une commande issue d'une librairie complémentaire, le résultat constitue une aide à l'interprétation d'un problème économique particulier.

6 Conclusion

Ce travail doit se poursuivre par la finalisation de l'application de traitement informatique sur Maple. Il a cependant le mérite de constituer une ébauche de catalogue d'exemples de quelques équilibres de Nash, que l'on trouve partiellement dans les manuels et les cours de théorie des jeux. Bien que ce document ne soit pas exhaustif, il peut facilement s'adresser à des étudiants ou à des ingénieurs, par son caractère systématique qu'il propose pour décomposer les étapes de calcul.

Références

- [1] M. Désolé. *Théorie des jeux, jeux de rôles, expérimentation pour la gestion de l'eau : étude expérimentale des effets de contexte sur les résultats d'un jeu de rôles*. PhD thesis, Montpellier SupAgro, France, 2011.
- [2] D. Fudenberg and J. Tirole. *Game theory*. The MIT Press, 1991.
- [3] Maplesoft. The essential tool for mathematics and modeling. Technical report, Waterloo Maple Inc, 2011.
- [4] Maplesoft. Programming guide. Technical report, Waterloo Maple Inc, 2011.

A Jeux non coopératifs

Cas de Bob et Alice qui peuvent soit prendre le bus soit marcher : nous avons vu qu'il n'y a pas d'équilibre de Nash en stratégie pure

Le même cas est traité tout au long des différents calculs

A.1 Matrices de quelques jeux 2x2

```
> dim := 2;
                                     dim := 2
> # dilemme du prisonnier
> j1 := Matrix(dim, [-1/2, -10, 0, -5]);
> j2 := Matrix(dim, [-1/2, 0, -10, -5]);
```

A.2 Cas simple 2x2

A.2.1 Initialisation des matrices

```
> dim := 2;
                                     dim := 2
> j1 := Matrix(dim, [3, 6, 5, 4]);
> j2 := Matrix(dim, [-3, -6, -5, -4]);
```

$$j2 := \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$

A.2.2 1ère étape : calcul meilleure réaction de l'un sachant l'action de l'autre

```
> recupMR := {};
```

$$recupMR := \{\}$$

```

> recupj2 := {} ;
> for j to dim do
>   action1j2 := j2[1 .. dim, j] ;
>   recupgainj1 := [] ;
>   for i to dim do
>     reactionj1 := j1[i, 1 .. dim] ;
>     print(reactionj1) ;
>     gainj1 := reactionj1[j] ;
>     print(gainj1) ;
>     recupgainj1 := [op(recupgainj1), gainj1] ;
>   end do ;
>   print(recupgainj1) ;
>   bestreactionj1 := max(recupgainj1) ;
>   member(bestreactionj1, j1, 'pos') ;
>   position := pos ;
>   recupj2 := op(recupj2), [position[[1]], j] ;
>   recupMR := op(recupMR), [position[[1]], j] ;
> end do ;

```

```

      recupj2 := {}
      action1j2 :=  $\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \end{bmatrix}$ 
      recupgainj1 := []
       $\begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$ 
      3
       $\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$ 
      5
      [3,5]
      bestreactionj1 := 5
      true
      position := 2, 1
      recupj2 := {[2,1]}
      recupMR := {[2,1]}
      action1j2 :=  $\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$ 
      recupgainj1 := []
       $\begin{bmatrix} 3 & 6 \end{bmatrix}$ 
      6
       $\begin{bmatrix} 5 & 4 \end{bmatrix}$ 
      4
      [6,4]
      bestreactionj1 := 6

```

```

                                true
                                position := 1, 2
                                recupj2 := {[1,2],[2,1]}
                                recupMR := {[1,2],[2,1]}
> recupj1 := {} ;
> for i to dim do
>   action1j1 := j1[i, 1 .. dim] ;
>   recupgainj2 := [] ;
>   for j to dim do
>     reactionj2 := j2[1 .. dim, j] ;
>     print(reactionj2) ;
>     gainj2 := reactionj2[i] ;
>     print(gainj2) ;
>     recupgainj2 := [op(recupgainj2), gainj2]
>   end do ;
>   print(recupgainj2) ;
>   bestreactionj2 := max(recupgainj2) ;
>   member(bestreactionj2, j2, 'pos') ;
>   position := pos ;
>   recupj1 := op(recupj1), [i, position[[2]]] ;
>   recupMR := op(recupMR), [i, position[[2]]]
> end do ;

```

```

                                recupj1 := {}
                                action1j1 := [ 3  6 ]
                                recupgainj2 := []
                                [ -3 ]
                                [ -5 ]
                                -3
                                [ -6 ]
                                [ -4 ]
                                -6
                                [-3,-6]
                                bestreactionj2 := -3
                                true
                                position := 1, 1
                                recupj1 := {[1,1]}
                                recupMR := {[1,1],[1,2],[2,1]}
                                action1j1 := [ 5  4 ]
                                recupgainj2 := []

```

$$\begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$[-5, -4]$$

```

bestreactionj2 := -4
true
position := 2, 2
recupj1 := {[1, 1], [2, 2]}
recupMR := {[1, 1], [1, 2], [2, 1], [2, 2]}

```

A.2.3 2nde étape construction des fonctions de meilleure réaction éventail : à chaque action de l'un on associe le jeu de l'autre

```

> recupj2 ;
> recupj1 ;

{[1, 2], [2, 1]}
{[1, 1], [2, 2]}
> nash := 'intersect'(recupj1, recupj2) ;
nash := {}

```

A.2.4 3ème étape consolidation : vérification de la déviance de(s) l'équilibre(s)

```

> if nash = {} then
>     print('no*equilibrium') ;
> else
>     print(nash) ;
>     nbeq := nops(nash) ;
>     for i to nbeq do
>         print(nash[i]) ;
>         verifjeuj1 := nash[i][1] ;
>         verifjeuj2 := nash[i][2] ;
>         deviance := 0 ;
>         gaineqj1 := j1[verifjeuj1, verifjeuj2] ;
>         print(gaineqj1) ;
>         for j to dim do
>             gaineqdevj1 := j1[j, verifjeuj2] ;
>             if gaineqdevj1 > gaineqj1 then
>                 deviance := deviance+1 ;
>             end if ;
>         end do ;
>         gaineqj2 := j2[verifjeuj1, verifjeuj2] ;
>         print(gaineqj2) ;
>         print(deviance) ;
>         for j to dim do
>             gaineqdevj2 := j2[verifjeuj1, j] ;
>             if gaineqdevj2 > gaineqj2 then
>                 deviance := deviance+1 ;
>             end if ;
>         end do ;
>         if deviance = 0 then
>             print("PAS de deviance pour cet equilibre");
>         else
>             print("deviance pour cet equilibre") ;
>         end if ;
>     end do ;
> end if;

```

no equilibrium

A.3 2x2 stratégie mixte avec équations linéaires

```

> dim := 2;
>
> dim := 2
> j1 := Matrix(dim, [3, 6, 5, 4]) :
> j2 := Matrix(dim, [-3, -6, -5, -4]) :

```

```

> eq1 := j1[1, 1]*q+j1[1, 2]*(1-q) ;
> eq2 := j1[2, 1]*q+j1[2, 2]*(1-q) ;
> eq3 := j2[1, 1]*p+j2[2, 1]*(1-p) ;
> eq4 := j2[1, 2]*p+j2[2, 2]*(1-p) ;
      eq1 := -3 q + 6
      eq2 := q + 4
      eq3 := 2 p - 5
      eq4 := -2 p - 4
> eq12 := eq1-eq2 ;
> eq34 := eq3-eq4 ;
      eq12 := -4 q + 2
      eq34 := 4 p - 1
> psolve := solve(eq34, p) ;
> 1-psolve ;
> qsolve := solve(eq12, q) ;
> 1-qsolve ;
      psolve := 1/4
      3/4
      qsolve := 1/2
      1/2

```

A.4 2x2 stratégie mixte Lagrangien

A.4.1 Lagrangien et Conditions de Premier Ordre

```

> eq11 := expand(p*(j1[1, 1]*q+j1[1, 2]*(1-q))+(1-p)*(j1[2, 1]*q+j1[2, 2]*(1-q))) ;
> eq21 := expand(q*(j2[1, 1]*p+j2[2, 1]*(1-p))+(1-q)*(j2[1, 2]*p+j2[2, 2]*(1-p))) ;
      eq11 := -4 p q + 2 p + q + 4
      eq21 := 4 p q - q - 2 p - 4
> L1 := eq11+λ1*p+μ1*(1-p) ;
> L2 := eq21+λ2*q+μ2*(1-q) ;
      L1 := -4 p q + 2 p + q + 4 + λ1 p + μ1 (1 - p)
      L2 := 4 p q - q - 2 p - 4 + λ2 q + μ2 (1 - q)
> dL1 := diff(L1, p) ;
> dL2 := diff(L2, q) ;
      dL1 := -4 q + 2 + λ1 - μ1
      dL2 := 4 p - 1 + λ2 - μ2

```

A.4.2 Pour J1

```

> p1λ1 := solve(λ1*p,p) ;
> μ1solve := solve(subs(p=p1λ1,μ1*(1-p)),μ1) ;
> λ1solve := solve(subs(μ1=μ1solve,dL1),λ1) ;
> qsolve := LinearUnivariate(λ1solve > 0,q)
      p1λ1 := 0

```

```

       $\mu 1_{\text{solve}} := 0$ 
       $\lambda 1_{\text{solve}} := 4q - 2$ 
       $q_{\text{solve}} := \{1/2 < q\}$ 
>  $p1\mu 1 := \text{solve}(\mu 1*(1-p), p)$  ;
>  $\lambda 1_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(p = p1\mu 1, \lambda 1*p), \lambda 1)$  ;
>  $\mu 1_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(\lambda 1 = \lambda 1_{\text{solve}}, dL1), \mu 1)$  ;
>  $q_{\text{solve}} := \text{LinearUnivariate}(\mu 1_{\text{solve}} > 0, q)$  ;

       $p1\mu 1 := 1$ 
       $\lambda 1_{\text{solve}} := 0$ 
       $\mu 1_{\text{solve}} := -4q + 2$ 
       $q_{\text{solve}} := \{q < 1/2\}$ 
>  $\lambda 1_{\text{solve}} := \text{solve}(\lambda 1*p, \lambda 1)$  ;
>  $\mu 1_{\text{solve}} := \text{solve}(\mu 1*(1-p), \mu 1)$  ;
>  $q_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(\lambda 1 = \lambda 1_{\text{solve}}, \mu 1 = \mu 1_{\text{solve}}, dL1), q)$  ;

       $\lambda 1_{\text{solve}} := 0$ 
       $\mu 1_{\text{solve}} := 0$ 
       $q_{\text{solve}} := 1/2$ 

```

A.4.3 Pour J2

```

>  $q1\lambda 2 := \text{solve}(\lambda 2*q, q)$  ;
>  $\mu 2_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(q = q1*\lambda 2, \mu 2*(1-q)), \mu 2)$  ;
>  $\lambda 2_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(\mu 2 = \mu 2_{\text{solve}}, dL2), \lambda 2)$  ;
>  $p_{\text{solve}} := \text{LinearUnivariate}(\lambda 2_{\text{solve}} > 0, p)$  ;

       $q1\lambda 2 := 0$ 
       $\mu 2_{\text{solve}} := 0$ 
       $\lambda 2_{\text{solve}} := -4p + 1$ 
       $p_{\text{solve}} := \{p < 1/4\}$ 
>  $q1\mu 2 := \text{solve}(\mu 2*(1-q), q)$  ;
>  $\lambda 2_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(q = q1*\mu 2, \lambda 2*q), \lambda 2)$  ;
>  $\mu 2_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(\lambda 2 = \lambda 2_{\text{solve}}, dL2), \mu 2)$  ;
>  $p_{\text{solve}} := \text{LinearUnivariate}(\mu 2_{\text{solve}} > 0, p)$  ;

       $q1\mu 2 := 1$ 
       $\lambda 2_{\text{solve}} := 0$ 
       $\mu 2_{\text{solve}} := 4p - 1$ 
       $p_{\text{solve}} := \{1/4 < p\}$ 
>  $\lambda 2_{\text{solve}} := \text{solve}(\lambda 2*q, \lambda 2)$  ;
>  $\mu 2_{\text{solve}} := \text{solve}(\mu 2*(1-q), \mu 2)$  ;
>  $p_{\text{solve}} := \text{solve}(\text{subs}(\lambda 2 = \lambda 2_{\text{solve}}, \mu 2 = \mu 2_{\text{solve}}, dL2), p)$  ;

       $\lambda 2_{\text{solve}} := 0$ 
       $\mu 2_{\text{solve}} := 0$ 
       $p_{\text{solve}} := 1/4$ 

```

A.4.4 *Croisée des meilleures réactions*

```
> brj1 := piecewise(qsolve1[1], 0, qsolve3, [p, 1-p], qsolve2[1],
1);
```

$$brj1 := \begin{cases} 0 & 1/2 < q \\ [p, 1-p] & q = 1/2 \\ 1 & q < 1/2 \end{cases}$$

```
> brj2 := piecewise(psolve1[1], 0, psolve3, [q, 1-q], psolve2[1],
1);
```

$$brj2 := \begin{cases} 0 & p < 1/4 \\ [q, 1-q] & p = 1/4 \\ 1 & 1/4 < p \end{cases}$$

B Vérification avec le module *matrixgames*

```

> restart ;
> libname := "/home/annie/test/nash/mylib", libname;
> with(matrixgames) :
> # exemple d'Alice et Bob
> p := [1/4, 3/4];
> q := [1/2, 1/2];
> M1 := matrix([[3, 6], [5, 4]]);
> M2 := matrix([[-3, -6], [-5, -4]]);
> isnash(M1, M2, p, q);


$$p := [1/4, 3/4]$$


$$q := [1/2, 1/2]$$


$$M1 := \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$


$$M2 := \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ -5 & -4 \end{bmatrix}$$


$$true$$


> # exemple de Mathieu
> p := [50/91, 1-50/91] ;
> q := [25/67, 1-25/67] ;
> M1 := matrix([[117, 75], [75, 100]]) ;
> M2 := matrix([[241, 200], [200, 250]]) ;
> isnash(M1, M2, p, q);


$$p := [\frac{50}{91}, \frac{41}{91}]$$


$$q := [\frac{25}{67}, \frac{42}{67}]$$


$$M1 := \begin{bmatrix} 117 & 75 \\ 75 & 100 \end{bmatrix}$$


$$M2 := \begin{bmatrix} 241 & 200 \\ 200 & 250 \end{bmatrix}$$


$$true$$


> G1 := payoff(M1, M2, color = yellow);

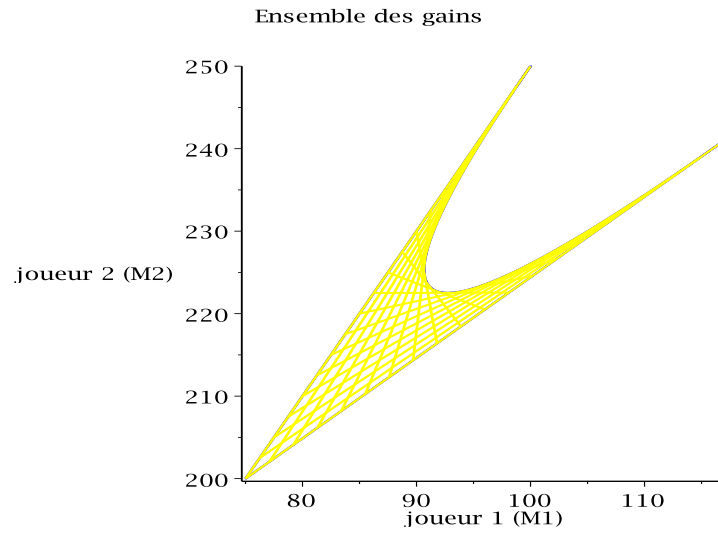
$$G1 := PLOT('...')$$

> G2 := payoff2(M1, M2, color = blue);

$$G2 := PLOT('...')$$

> plots[display](G1, G2);

```



Etudes et Synthèses

- ES 2007 - 01 : Sophie THOYER, Sandra SAÏD
Mesures agri-environnementales : quels mécanismes d'allocation ?
- ES 2007 - 02 : Robert KAST
Incertitude et environnement : évaluations économiques
- ES 2007 - 03_ : Charles FIGUIERES, Hervé GUYOMARD, Gilles ROTILLON
Le développement durable : Que peut nous apprendre l'analyse économique ?
- ES 2008 - 01 : Selin OZYURT
« Les investissements directs étrangers entraînent-ils des effets de débordement vers les pays en développement ? »
- ES 2008 - 02 : Pr Graciela CHICHILNISKY
« Le paradoxe des marchés verts »
- ES 2009 - 01 : Philippe JOURDON
« De la crise financière vers la guerre mondiale, ou de la crise mondiale vers la guerre financière ? Une analyse par les cycles longs. »
- ES 2009 - 02 : Annie HOFSTETTER, Robert LIFRAN
« Couplage simple entre système d'information géographique et modèle multi-agents pour simuler l'impact des politiques publiques sur les dynamiques du paysage »
- ES 2010 - 01 : Selin ÖZYURT
« China's Economic Outlook after 30 Years of Reform »
- ES 2010 - 02 : Elodie BRAHIC (CEMAGREF Bordeaux)
« Which instruments to preserve forest biodiversity? »
- ES 2010 - 03 : Ahmed ENNASRI
« Incitations Managériales et Concurrence : Synthèse de la littérature »
- ES 2012 - 01 : Marianne LEFEBVRE, Sophie THOYER
« Risque sécheresse et gestion de l'eau agricole en Australie »

- ES 2012 - 02 : Marianne LEFEBVRE, Sophie THOYER
« Risque sécheresse et gestion de l'eau agricole en France »
- ES 2012 - 03 : Charles FIGUIERES, Jean-Michel SALLES
« Donner un prix à la nature, c'est rendre visible l'invisible ou penser l'impensable ? »
- ES 2013 - 01 : Pauline MORNET, Stéphane MUSSARD, Françoise SEYTE, Michel TERRAZA
« La décomposition de l'indicateur de Gini en sous-groupes de 1967 à nos jours : Une revue de la littérature revisitée et complétée »
- ES 2013 - 02 : Jean-Michel SALLES
« La modélisation économique peut-elle aider à préserver la biodiversité ? »
- ES 2013 - 03 : Annie HOFSTETTER, Mathieu DESOLE, Mabel TIDBALL
« Quelques éléments de calcul des équilibres de Nash. »

Contact :

Stéphane MUSSARD : mussard@lameta.univ-montp1.fr

