HAL open science

La fonction de coût restreint: caractérisation duale du déséquilibre factoriel

Hervé Guyomard, Dominique Vermersch

▶ To cite this version:

Hervé Guyomard, Dominique Vermersch. La fonction de coût restreint: caractérisation duale du déséquilibre factoriel. 1987. hal-01594150

HAL Id: hal-01594150
https://hal.science/hal-01594150v1

Preprint submitted on 26 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

INRA-ESR-REN H.G.

I.N.R.A. - RENNES
10 NOV 1987
ÉCONOMIE RURALE
BIBLIOTHÈQUE

Institut National de la Recherche Agronomique
Station d'Economie et Sociologie Rurales
de Rennes
65, rue de St-Brieuc
35042 RENNES CEDEX - FRANCE

LA FONCTION DE COUT RESTREINT : CARACTERISATION DUALE DU DESEQUILIBRE FACTORIEL

Hervé GUYOMARD, Dominique VERMERSCH

octobre 1987

document (partiel) de travail

objet d'une première diffusion afin de susciter commentaires et critiques

DOCUMENTATION ÉCONOMIE RURALE RENNES
* 0 1 4 6 9 0 *

INTRODUCTION

Les systèmes hicksiens (marshalliens) de demandes dérivées de facteurs de production reposent le plus souvent sur l'hypothèse néo-classique traditionnelle selon laquelle tous les facteurs (et produits) pris en compte sont en équilibre statique, justifiant ainsi la référence à une situation de long terme. Cette hypothèse de parfaite variabilité de tous les facteurs de production semble très restrictive en agriculture dans la mesure où l'activité agricole se caractérise par une faible mobilité du travail familial et une quasi-fixité du facteur terre que l'on peut associer aux rendements globaux décroissants (Mahé L.P. et Rainelli P., 1987). La rigidité du facteur travail familial est aujourd'hui renforcée par la volonté du maintien d'une population agricole relativement nombreuse, et l'existence d'un taux de chomage élevé dans les autres secteurs de l'économie. De même, la lenteur des mouvements de restructuration foncière, liée sans doute, au niveau élevé du prix de la terre, accroît la rigidité de ce dernier facteur (Boutitie et al., 1987).

L'objectif de cette étude est double. Il s'agit, en premier lieu, de présenter le cadre théorique du modèle d'équilibre statique de court terme dans une approche duale. L'inférence des différents niveaux de long terme, établie initialement par Lau (1976) est illustrée à partir de la fonction de coût restreint ; la seule connaissance de cette dernière et l'addition de nouvelles hypothèses de convexité par rapport au bien, facteur ou produit, supposé fixe à court terme permet de totalement caractériser les fonctions de demandes compensées de court terme et de long terme; non compensées de court terme et de long terme. Le théorème de

décomposition de Sakai (1974)est alors reformulé et illustré graphiquement dans le cas de trois facteurs ; le concept de prix dual permet de caractériser le déséquilibre factoriel ; enfin,une mesure des économies d'échelle dans le long terme est proposée comme illustration complémentaire du fait que la fonction de coût restreint, contient, sous de faibles hypothèses, l'information relative à la technologie de court et long terme utilisée.

La validité de l'hypothèse de fixité de certains facteurs de production pour l'agriculture française, sur séries agrégées 1959-1984, est ensuite vérifiée : ceci nécessite le choix d'une forme fonctionnelle pour représenter la fonction de coût restreint qui permet par ailleurs le calcul des différents paramètres d'intérêt : élasticités de substitution, prix duaux et quantités optimales des facteurs supposés fixes.

1. THEORIE DE LA DUALITE DANS UN CADRE D'EQUILIBRE STATIQUE DE COURT-TERME.

_ NOTATIONS ET FORMALISATION DE LA TECHNOLOGIE.

L'entreprise représentative dispose de M + N facteurs de production $(z_1,...,z_m,...,z_M, \quad x_1,...,x_n,...,x_N)$ qu'elle peut acheter au vecteur de prix P : $(p_z, \ p_x)$ afin de produire une quantité y du bien final qu'elle peut vendre au prix p_y. Les différents prix sont donnés et ne dépendent pas des décisions de l'entreprise (hypothèse price-taker). Les possibilités de production de la firme sont alors définies par la donnée d'un sous-ensemble $Y \subset \mathbb{R}^{M+N+1}$, qui contient tous les plans de production possibles et auquel on adjoint l'hypothèse supplémentaire :

(H1) Y est non vide, fermé et si $y \neq 0$, alors $x \neq 0$.

Y sous l'hypothèse H1 est dit régulier.

On définit également les deux sous-ensembles :

$$X\ (z,y) = \left[x\ ;\ (x,\ y,\ z) \in Y\right]$$

$$Y\ (x,z) = \left[y\ ;\ (x,\ y,\ z) \in Y\right]$$

Sous l'hypothèse d'un comportement rationnel, l'entreprise se limite aux plans de production techniquement efficaces, c'est-à-dire aux plans (x, y, z) tels que :

si $y \in Y\ (x,z)$ alors $\forall\ y' \in Y\ (x,\ z) \qquad y' \leq y$

On définit enfin la fonction de production f :

$$f\ (x,z) = \underset{y}{\text{Max}} \left[y\ ;\ y \in Y\ (x,\ z) \right].$$

La régularité de Y implique l'existence et la continuité à droite de la fonction f.

- ENVIRONNEMENT ECONOMIQUE ET HYPOTHESES DE COMPORTEMENT.

Selon que l'entreprise dispose des facteurs $(z_1,\ldots,z_M)$ en quantités fixées ou non ou qu'elle peut vendre une quantité limitée ou non de son produit y, quatre hypothèses de comportement peuvent être définies et formalisées :

$$P_1 \quad \underset{x}{\text{Min}} \left\{ p_x'\ x\ ;\ y = f\ (x,\ z) \right\}$$

$$P_2 \quad \underset{x,z}{\text{Min}} \left\{ p_x'\ x + p_z'\ z\ ;\ y = f\ (x,\ z) \right\}$$

$$P_3 \quad \underset{x}{\text{Max}} \left\{ p_y\ f(x,z) - p_x'\ x;\ (x,y,z) \in Y \right\}$$

$$P_4 \quad \underset{x,z}{\text{Max}} \left\{ p_y\ f\ (x,\ z) - p_x'\ x - p_z'\ z\ ;\ (x,y,z) \in Y \right\}$$

L'existence de solutions aux programmes P_1 et P_2 est assurée sous la seule hypothèse de régularité de Y. Il est nécessaire de supposer de plus la convexité de Y afin que les deux programmes P_3

et P_4 admettent également une solution. On associe alors à ces quatre programmes les fonctions d'objectif indirectes suivantes : CR (p_x, z, y) ; CT (p_x, p_z, y), πR (p_x, z, p_y) et πT (p_x, p_z, p_y).
En particulier, la fonction de coût restreint CR, définie dans un cadre d'équilibre compensé statique de court-terme, se rapporte à la situation suivante : les facteurs de production $(x_1 \quad x_N)$ s'ajustent à leur niveau désiré déterminé par la minimisation des coûts associés, les facteurs de production $(z_1 \quad z_M)$, fixes à court terme ou quasi fixes, s'ajustent uniquement dans le long terme à leur niveau optimal défini par la minimisation des coûts totaux.

DUALITÉ TECHNOLOGIE - COMPORTEMENT ÉCONOMIQUE DANS LE CADRE D'UN ÉQUILIBRE COMPENSÉ STATIQUE DE COURT TERME.

La connaissance de la fonction de coût restreint CR suffit à décrire de manière exhaustive la technologie de court terme utilisée : ce résultat repose sur la propriété de caractérisation de tout ensemble convexe par la seule donnée de sa fonction support (Guesnerie R. 1980).

La fonction CR (p_x, z, y) vérifie les propriétés de non-négativité, de non-décroissance, de continuité, de concavité et d'homogénéïté de degré un par rapport au vecteur de prix p_x ; de non décroissance par rapport à y (Varian H., 1984). Sous l'hypothèse additionnelle de convexité de l'ensemble $X(z,y)$ sur lequel s'effectue la minimisation correspondant au programme P_1, il existe une correspondance unique entre $X(z,y)$ et la fonction CR (p_x, z, y) ; relation qui se généralise à la fonction $f(x,z)$ si

celle-ci est non décroissante par rapport au vecteur des facteurs de production (Diewert E., 1982).

La convexité de $X(z,y)$ est équivalente à la quasi-concavité de $f(x,z)$: l'approche duale décrite ci-dessus permet donc l'existence de rendements d'échelle locaux croissants. De plus, si les contraintes de fixité sur z et y peuvent être relâchées, les fonctions de coût total CT, de profit restreint πR et de profit totale πT, peuvent également représenter de manière exhaustive la technologie, à la condition de vérification par Y de nouvelles hypothèses de convexité globale (Lau L.J., 1976). Enfin, sous l'hypothèse supplémentaire couramment admise de double différentiabilité, la fonction de coût restreint CR vérifie également les deux propriétés suivantes :

* Lemme de Shephard : par application directe du théorème de l'enveloppe, les dérivées partielles de la fonction CR par rapport aux prix p_x définissent les fonctions de demandes compensées ou hicksiennes de court terme des facteurs variables x_n

$$\partial CR(p_x,z,y) / \partial p_{x_n} = \bar{x}_n(p_x,z,y)$$

* Symétrie des matrices hessiennes

$$\partial^2 CR(.) / \partial p_{x_n} \partial p_{x_{n'}} = \partial^2 CR(.) / \partial p_{x_{n'}} \partial p_{x_n}$$

2. CARACTERISATION DES DIFFERENTS EQUILIBRES THEORIQUEMENT POSSIBLES A PARTIR DE LA SEULE CONNAISSANCE DE LA FONCTION DE COUT RESTREINT CR.

- CARACTÉRISATION DE L'ÉQUILIBRE COMPENSÉ DE LONG TERME À PARTIR DE LA FONCTION CR.

Au niveau d'utilisation donné des facteurs quasi-fixes, la fonction de coût total de court-terme CT^{CT} s'écrit simplement comme la somme de la fonction de coût restreint CR et des dépenses affectées aux inputs quasi-fixes :

$$CT^{CT}(p_x, p_z, z, y) = CR(p_x, z, y) + \sum_{m=1}^{M} p_{z_m} z_m$$

La fonction de coût total de long terme $CT(p_x, p_z, y)$ deux fois différentiable, positive, non décroissante, homogène de degré un, concave, continue par rapport à p_x et p_z ; non-décroissante par rapport à y ; peut se déduire de son équivalent de court terme CT^{CT} par minimisation de cette fonction par rapport aux facteurs z, les fonctions de demande des inputs toujours variables étant déterminées par la minimisation de la fonction de coût restreint CR (Kulatilaka N, 1985).

$$CT(p_x, p_z, y) = \min_{z} CT^{CT}(p_x, p_z, z, y)$$

Les conditions du premier ordre du programme de minimisation s'écrivent simplement :

$$\partial\, CT(.)/\, \partial z = \partial\, CT^{CT}\, (.)\, /\partial z$$

$$= \partial\, CR\, (.)\, /\partial z + z$$

$$= 0$$

A l'optimum compensé de long terme, la dérivée partielle de la fonction de coût restreint CR par rapport au niveau d'utilisation de tout facteur quasi fixe z_m ; m : 1, ..., M; est égale à l'opposé du prix observé de cet input p_{z_m}. En ce point d'équilibre, la fonction de coût total de long terme CT est la somme de la fonction de coût restreint évaluée en ce point et des coûts affectés aux inputs quasi fixes également évalués à l'optimum compensé :

$$CT\, (p_x,\, p_z,\, y) = CR\, (p_x,\, \bar{z}_h^h\, (p_x,\, p_z,\, y),\, y)$$

$$+ \sum_{m:1}^{M} p_{z_m}\, \bar{z}_m^h\, (p_x,\, p_z,\, y)$$

L'application directe du lemme de Shephard permet alors d'établir les relations suivantes, expression des conditions du premier ordre du programme P_2 :

$$* \ \partial CT\ (p_x, p_z, y)/\partial\ p_{x_n} = x_n^h(p_x, p_z, y) = \partial CR\ (p_x, \bar{z}^h\ (p_x, p_z, y), y)/\partial p_{x_n} \quad [a]$$

$$= \bar{x}_n\ (p_x,\ \bar{z}^h\ (p_x,\ p_z,\ y),\ y)$$

$$* \ \partial\ CT\ (p_x,\ p_z,\ y)/\ \partial\ p_{z_m} = \bar{z}_m^h\ (p_x, p_z, y) \qquad [b]$$

Les relations entre les matrices hessiennes, expression des conditions du second ordre, sont les suivantes :

$$* \ \partial^2 CT(.)/\partial\ p_x^2 = \partial^2\ CR\ (.)/\partial\ p_x^2 + \left[\partial\ \bar{z}^h/\partial\ p_x\right] . \left[\partial^2 CR(.)/\partial\ \bar{z}^h \partial\ p_x\right]$$

$$* \ \partial^2 CT(.)\ /\partial\ p_z\ \partial p_x = \left[\partial\ \bar{z}^h\ /\partial p_z\right]\ \left[\partial^2\ CR\ (.)\ /\partial\ \bar{z}^h\ \partial\ p_x\right]$$

$$* \ \partial^2 CT\ (.)\ /\ \partial\ p_z^2 = \partial\ \bar{z}^h/\ \partial\ p_z.$$

L'analyse précédente montre qu'il est possible de définir les fonctions de demandes compensées de long terme à partir de la seule connaissance de la fonction de coût restreint CR. En particulier, l'identité (a) montre qu'à l'optimum hicksien, les demandes compensées des facteurs toujours variables, contraintes $\bar{x}_n$ ou non $\bar{x}_n^h$ sont égales. La relation (b) représente la fonction de demande compensée de long terme de l'input supposé fixe à court

---

(1) On rappelle pour mémoire que :

$$\partial\ CR\ (p_x,\ z^h\ (p_x,\ \bar{p}_z,\ y)\ ,y)\ /\ \partial\ z^h + p_z = \bar{0} \qquad [c]$$

terme. Les relations entre matrices hessiennes impliquent simplement que la fonction de coût restreint CR est convexe par rapport au niveau optimal du facteur quasi fixe $\bar{z}^h$, pour un vecteur de prix (p_x, p_z) et un niveau de production donnés. En effet :

$\partial^2 CR^-(.) / \partial \bar{z}^{h2} = [\partial \bar{z}^h / \partial p_z]^{-1}$ (différenciation de (c) par rapport à p_z).

$= [\partial^2 CT(.) / \partial p_z^{\,2}]^{-1}$ (différenciation de (a) par rapport à p_z).

La concavité de la fonction de coût total CT par rapport au vecteur des prix, et donc en particulier par rapport à p_z, entraîne que la matrice $[\partial^2 CT(.) / \partial p_z^2]$ est semi définie négative, donc que la matrice $[\partial^2 CR(.) / \partial \bar{z}^{h2}]$ est semi définie positive et par suite la convexité de CR par rapport à $\bar{z}^h$.

- GÉNÉRALISATION

La démarche précédente se généralise à toute demande factorielle : la connaissance de la seule fonction de coût restreint CR permet théoriquement de caractériser les demandes factorielles, compensées de long terme $(\bar{x}_n^h)$, non compensées de court terme (x_n) et de long terme (x_n^m). Le tableau n°1 représente l'ensemble des situations possibles, en précisant pour chaque

équilibre théoriquement envisageable les caractéristiques des différentes demandes factorielles. Chaque fonction de demande d'un input n ou m peut s'écrire en fonction des paramètres de la fonction CR à la condition de la vérification par cette dernière de la propriété de convexité par rapport au bien, input quasi-fixe ou produit, supposé fixe à court terme.

En particulier le passage de l'équilibre statique de court terme (P 1) à son équivalent marshallien de long terme (P 4) peut se décomposer en deux étapes : dans une première phase, les facteurs considérés comme fixes à court terme s'ajustent à leur niveau désiré déterminé par la minimisation des coûts totaux ; dans une seconde phase, le produit et ces mêmes inputs quasi fixes s'ajustent à leur niveau optimal déterminé par la maximisation du profit total. Cette décomposition nécessite à chaque étape la vérification par la fonction de coût restreint d'une hypothèse de convexité respectivement par rapport à $\bar{z}^h$ et par rapport à z et à y. Plus généralement, toute fonction de demande non compensée de long terme peut s'écrire :

$$x_n^m (p_x, p_z, p_y)$$

$$= \bar{x}_n (p_x, \bar{z}^h (p_x, p_z, y^m (p_x, p_z, p_y)), y^m (p_x, p_z, p_y)) \qquad [1]$$

$$= \bar{x}_n (p_z, z^m (p_x, p_z, p_y), y (p_x, z^m (p_x, p_z, p_y), p_y)) \qquad [2]$$

$$= \bar{x}_n (p_x, z^m (p_x, p_z, p_y), y^m (p_x, p_z, p_y)) \qquad [3]$$

La traduction des relations précédentes de passage entre demandes factorielles permet alors de décomposer l'élasticité prix marshallienne de demande d'un facteur de production toujours variable $x_n^m (p_x, p_z, p_y)$

Tableau n°1. Caractéristiques des fonctions de demandes factorielles en fonction de la fixité à court terme des différents biens : inputs quasi fixes et produits.

inputs / produits	fixes	variables
	P1) minimisation des coûts variables	P2) minimisation des coûts totaux
fixe	F1) demande compensée de court terme $\bar{x}_n(p_x, z^\circ, y^\circ)$	F2) demande compensée de long terme $\bar{x}_n(p_x, \bar{z}^h(p_x, p_z, y^\circ), y^\circ)$ CNS : convexité de CR % $\bar{z}^h$
	P3) maximisation du profit variable	P4) maximisation du profit total
variable	F3) demande non compensée de court terme $\bar{x}_n(p_x, z^\circ, y(p_z, z^\circ, p_y))$ CNS : convexité de CR % y	F4) demande non compensée de long terme $\bar{x}_n(p_x, z^m(p_x, p_z, p_y), y^m(p_x, p_z, p_y))$ CNS : convexité de CR % y^m et z^m

remarques : les exposants h et m correspondent respectivement à une demande compensée (ou hicksienne) de long terme et à une demande (ou offre) non compensée (ou marschallienne de long terme. L'exposant O correspond au niveau initial du bien, input quasi-fixe ou produit, considéré.

$$\varepsilon^{m}_{nn'} = \partial \operatorname{Log} x^{m}_{n} / \partial \operatorname{Log} p_{x} \Big|_{p_{x_i}, p_z, p_y} \qquad i \neq n'$$

$$= \partial \operatorname{Log} \bar{x}_{n} [p_x, z^{m}(.), y^{m}(.)] / \operatorname{Log} p_{x_{n'}} \Big|_{p_{x_i}, p_z, p_y}$$

$$= \partial \operatorname{Log} \bar{x}_{n} / \partial \operatorname{Log} p_{x_{n'}} \Big|_{p_{x_i}, z, y} \qquad i \neq n' \Big\} A$$

$$+ \sum_{m=1}^{M} \partial \operatorname{Log} \bar{x}_{n} / \partial \operatorname{Log} \bar{z}^{h}_{m} \; \partial \operatorname{Log} \bar{z}^{h}_{m} / \partial \operatorname{Log} p_{x_{n'}} \Big|_{p_{x_i}, p_z, y} \qquad i \neq n' \Big\} B$$

$$\left.\begin{aligned} &+ \sum_{m=1}^{M} \sum_{l=1}^{L} \partial \operatorname{Log} \bar{x}_{n} / \partial \operatorname{Log} \bar{z}^{h}_{m} \cdot \partial \operatorname{Log} \bar{z}^{h}_{m} / \partial \operatorname{Log} y_{l} \\ &\qquad \partial \operatorname{Log} y^{m}_{l} / \partial \operatorname{Log} p_{x_{n'}} \Big|_{p_{x_i}, p_z, p_y} \qquad i \neq n' \\ &+ \sum_{l=1}^{L} \partial \operatorname{Log} \bar{x}_{n} / \partial \operatorname{Log} Y^{m}_{l} \cdot \partial \operatorname{Log} Y^{m}_{l} / \partial \operatorname{Log} p_{x_{n'}} \Big|_{p_{x_i}, p_z, p_y} \\ &\qquad i \neq n' \quad (4) \end{aligned}\right\rangle C$$

avec

A : élasticité prix croisée du facteur n par rapport au prix $p_{x_{n'}}$.

à niveau du produit et des inputs quasi fixes donnés : $\bar{\varepsilon}_{nn'}$

B : effet d'expansion lié à la variation des inputs quasi fixes jusqu'au niveau désiré déterminé par la minimisation des coûts totaux. La somme de ces deux premiers effets, A + B, est couramment appelée élasticité prix brute de demande du facteur n par rapport au prix $p_{x_{n'}}$: $\varepsilon^{m}_{nn'}$.

C : effet d'expansion lié à la variation du produit et des inputs quasi fixes jusqu'au niveau optimal défini par la maximisation du profit total. La somme de ces trois effets détermine l'élasticité prix nette de demande du facteur n par rapport au prix $p_{x_{n'}}$: $\varepsilon^{m}_{nn'}$.

- ILLUSTRATION GRAPHIQUE

Les trois effets A, B et C précédemment décrits peuvent être illustrés graphiquement à l'aide d'un modèle particulier : la technologie étudiée est représentée à court terme par une fonction de coût restreint faiblement séparable par rapport à la partition $\left[(x_1, x_2), z\right]$:

$$CR^{o}\ (p_{x_1}, p_{x_2}, z) = CR^{1}\ (Px, z)$$

avec Px sous fonction de coût unitaire définie par :

$$Px = (p_{x_1}\ x_1 + p_{x_2}\ x_2)\ /\ x = c\ (p_{x_1}, p_{x_2}) = C(x)/x)$$

A court terme, les deux inputs x_1 et x_2 sont variables, l'input z est fixe. A long terme, tous les facteurs sont variables. La situation d'équilibre initial correspond au point A^{o} sur la figure n°1 (rapport de prix p_{x_2} / p_{x_1}) et au point B^{o} sur la figure 2 (rapport de prix p_z/p_x). L'effet total d'une

diminution du prix de l'input 1 sur la demande de ce facteur (ε^m_{11}) et sur la demande du facteur croisé (ε^m_{21}) se décompose en trois effets selon la relation (4).

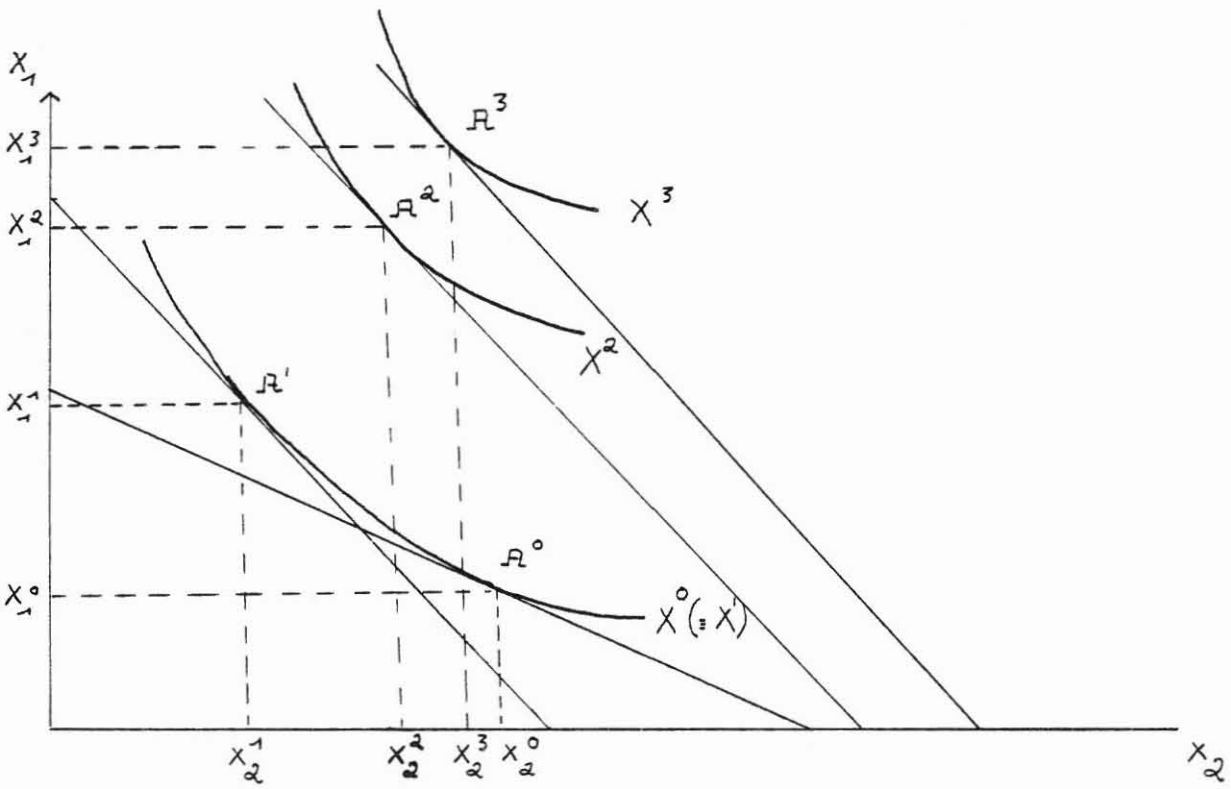
- Le passage de A^o en A^1 correspond aux effets substitution "stricto-sensu", c'est-à-dire le long de l'isoquante X^o : les niveaux d'emploi des deux facteurs toujours variables passent respectivement de x^o_1 à x^1_1 et de x^o_2 à x^1_2. Sur la figure n°2, ce premier effet ne se traduit pas par un déplacement de l'équilibre B ($B^o = B^1$). En effet, la fixité à court terme du facteur z entraîne la nullité de l'élasticité prix propre compensée de court terme de la demande de l'agrégat composite X. (Cette nullité de $\bar{\varepsilon}p_x p_x$ est la conséquence directe de la propriété d'homogénéité de degré o par rapport au prix de la fonction de demande $\bar{x}(p_x, z)$. Cependant la diminution du prix de l'input 1 entraîne la réduction du coût de l'agrégat composite x et donc du prix construit p_x. La droite d'isocoût initiale, correspondant au rapport p_z/p_x, est tangente à l'isoquante y^oen B. Le nouveau rapport de prix observés correspond à la droite B_1 B_2 sur la figure n°2. La nouvelle droite tangente en B^1 (= B^o) à l'isoquante y correspond au ratio du prix dual du facteur quasi fixe : p^{*1}_z et du prix p^1_x de l'agrégat X.

- A long terme, le facteur z est variable. La diminution du prix p_x, de p^o_x à p^1_x, entraîne alors un déplacement de l'équilibre B de X^1en B^2. Le niveau d'utilisation du facteur X passe de X^1 à X^2 (figure n°2), ce qui correspond à une nouvelle isoquante dans le nid (x_1, x_2) (figure n°1). Le passage de A^1 en A^2 correspond donc à un effet d'expansion lié à la possibilité de variation du facteur quasi fixe z. Dans cette étape, celui-ci s'ajuste à son niveau optimal compensé de long terme défini par la minimisation des coûts totaux. Les niveaux d'emploi des deux facteurs x_1 et x_2 passent , sous cet effet d'expansion, de

x_1^1 à x_1^2 ($\partial \bar{x}_1 / \partial \bar{z}^h$. $\partial \bar{z}^h / \partial p_{x_1}$ et de x_2^1 à x_2^2

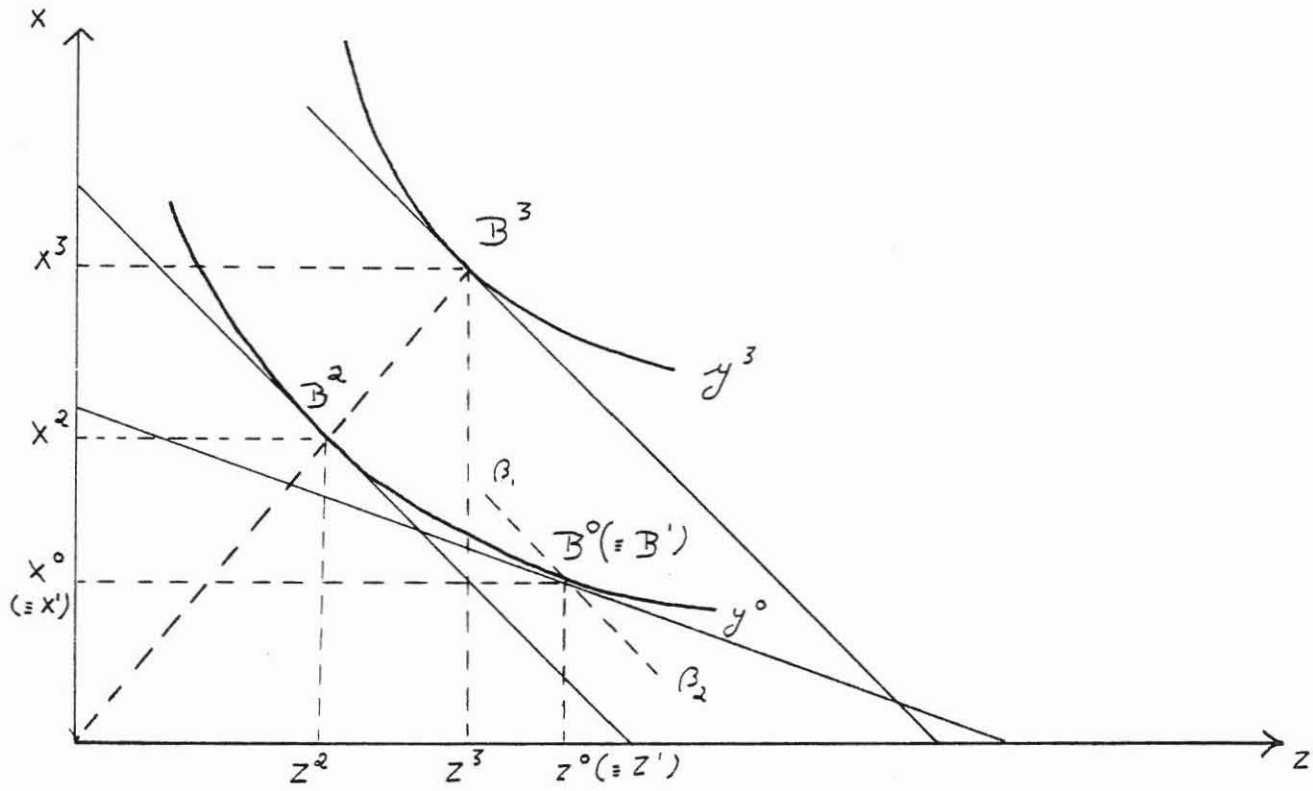
($\partial \bar{x}_2 / \partial \bar{z}^h$. $\partial \bar{z}^h / \partial p_{x_1}$).

Figure n°1. Equilibres au sein du nid (x_1, x_2)



- Le troisième effet est lié à la variation du produit y. A l'équilibre non compensé de long terme, l'output s'ajuste à son niveau optimal déterminé par la maximisation du profit total. L'équilibre marshallien correspondant se situe en B^3 sur la nouvelle isoquante y_z (figure n°2). Sur la figure n°1, le point d'équilibre final se situe en A^3 ; les niveaux d'utilisation des inputs x_1 et x_2 sont maintenant x_1^3 et x_2^3. Ce dernier effet est, dans le cas le plus général, la somme de deux effets : effet d'expansion stricto-sensu et effet indirect lié à la variation du niveau optimal d'utilisation du facteur quasi-fixe à la suite de la variation du produit.

Figure n°2. Equilibres au niveau agrégé (z, x)



3. QUELQUES ASPECTS SPECIFIQUES D'UNE TECHNOLOGIE AVEC FACTEURS FIXES.

La notion de prix dual est associée traditionnellement à la description d'un modèle d'équilibre de court terme : elle permet en particulier de caractériser, de manière duale donc, un éventuel déséquilibre factoriel. La prise en compte de la fixité de certains facteurs de production permet également de proposer différentes mesures des économies d'échelle, variables selon le sentier d'expansion sur lequel on se situe.

- CARACTÉRISATION DUALE DU DÉSÉQUILIBRE FACTORIEL

Sous l'hypothèse de différentiabilité de CR (p_x, z, y) par rapport à z, posons en tout point $z = (z_1, \ldots, z_M)$:

$$p^*_{z_m} = - \partial CR(.) / \partial z_m, \qquad m = 1, \ldots, M$$

Le vecteur p^*_z s'interprête comme le vecteur des prix duaux des facteurs quasi fixes. En effet, si p^*_z est le vecteur des prix observés, alors $z = (z_1, \ldots, z_M)$ représente le niveau optimal d'utilisation de ces facteurs, déterminé par la minimisation des coûts totaux (P2). De plus, $p^*_{z_m}$ s'interprête comme le gain marginal d'un relâchement de la contrainte de fixité de l'input correspondant d'une unité.

Une attention particulière peut être portée aux relations, qui existent entre d'une part les niveaux observés et optimaux des facteurs fixes ; d'autre part les prix observés et duaux de ces

mêmes facteurs. Le raisonnement porte pour simplifier au cas d'un seul facteur fixe z. La généralisation à M facteurs fixes est immédiate.

La fonction de coût total CT, non optimisée en z, s'écrit de manière simplifiée

$$CT^{CT}(z) = CR(z) + p_z.z$$

Les deux fonctions $CT^{CT}(.)$ et CR(.) ont en tout point z la même nature de convexité par rapport à ce facteur. En particulier, au minimum compensé de long terme, CT^{CT} et par conséquent CR sont convexes par rapport à $\bar{z}^h$. Enfin les prix dual et observé sont donnés par les relations suivantes :

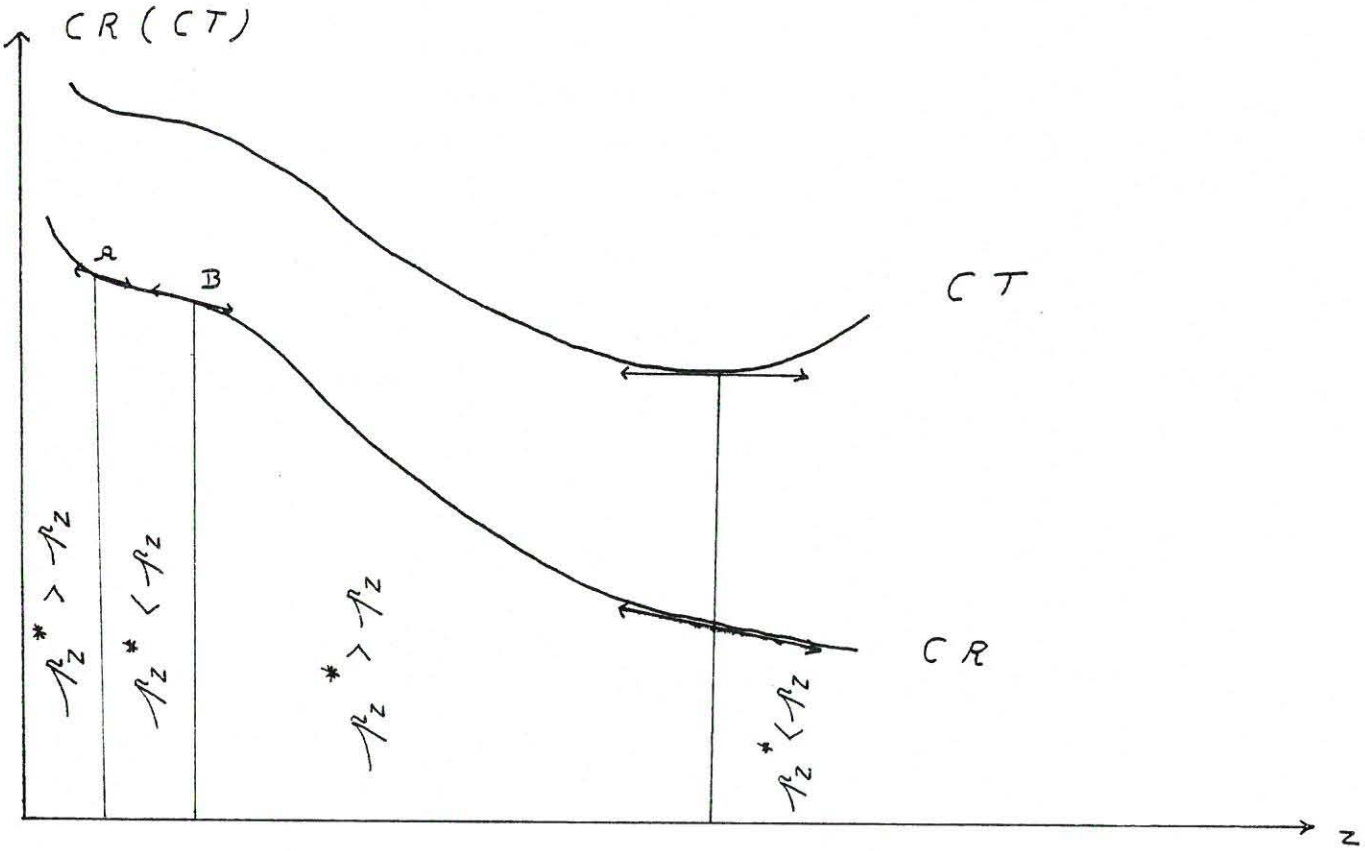
$$p_z^* = - [\ \partial CR / \partial z\ ] (z^o)$$

$$p_z = - [\ \partial CR / \partial z\ ] (\bar{z}^h).$$

Si le niveau compensé de long terme $\bar{z}^h$ est inférieur au niveau observé z^o, alors le prix dual p_z^* est, "dans le cas normal", également inférieur au prix observé p_z. En effet la fonction CR est convexe au voisinage de $\bar{z}^h$. Si on suppose de plus que cette fonction est convexe en z^o et plus précisément sur un domaine continu incluant les points z^o et $\bar{z}^h$; alors $\partial^2 CR/ \partial z^2$ est une quantité positive et $\partial CR/ \partial z$ est une fonction croissante de z sur cet ensemble. De manière similaire et sous les mêmes hypothèses si $\bar{z}^h > z^o$, alors $p_z^* > p_z^o$. Il se peut toutefois que les deux fonctions CT et CR soient localement concaves en z, en dehors d'un voisinage de $\bar{z}^h$; dans le cas par exemple d'une non

convexité locale de l'ensemble de production. Ainsi, sur la figure n°3 qui illustre les différentes situations possibles, si $z^o \in]z_B, z_A[$; alors $p_2^* < p_z$ bien que l'on ait $\bar{z}^h < z^o$. Dans une telle situation, le gain marginal entraîné par l'acquisition d'une unité supplémentaire du facteur fixe z est inférieur au prix d'acquisition de cette quantité : bien qu'il soit en deçà de l'optimum, le producteur subit une perte consécutive à l'accroissement marginal du facteur fixe.

Figure n°3. Relations d'ordre entre niveaux observé et compensé et prix observé et dual du facteur quasi fixe z.



- ECONOMIES D'ÉCHELLE : DIFFÉRENTES MESURES POSSIBLES

La mesure des économies d'échelle au sein d'un ensemble de production se fait classiquement le long du sentier d'expansion où les prix des facteurs sont fixes et le coût minimisé à chaque niveau de production (Hanoch, 1975). Avec les notations précédentes, considérons la fonction de production

$\ln y = f\,[\ln x_1, \ldots, \ln x_N, \ln z_1, \ldots, \ln z_M]$ duale, de la fonction de coût restreint CR (p_x, z, y).

Par différenciation totale, on a :

$$d \ln y = \sum_n f'_{x_n} \; d\ln x_n + \sum_m f'_{z_m} d\ln z_m \text{ avec } f'_{\mu_1} = \frac{\partial f}{\partial \ln \mu_1}$$

On définit alors les rendements d'échelle de court terme, ECH^{CT}, comme l'accroissement du produit, résultat d'un accroissement équi-proportionnel de tous les facteurs variables à court terme, c'est-à-dire :

$$ECH^{CT} = \partial \ln y \,/\, \partial \ln x_n = \sum_{n=1}^{N} f'_{x_n}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \partial \ln x_n = \partial \ln x_{n'} \; ; & n, n' : 1 \ldots N. \\ \partial \ln z_m = 0 \; ; & m : 1 \ldots M. \end{cases}$$

Or : $\partial \ln CR / \partial \ln y = (\partial \ln y / \partial \ln x_n)^{-1}$

Donc : $ECH^{CT} = (\partial \ln CR / \partial \ln y)^{-1}$

Caves, Christensen et Swanson (1981), puis plus tard Halvorsen et Smith (1986), proposent quant à eux une mesure différente des économies d'échelle, ECH^{O}, définie comme l'accroissement proportionnel du produit conséquence d'une augmentation équi-proportionnelle de l'ensemble des facteurs, variables ou fixes, c'est-à-dire :

$$ECH^{O} = \partial \ln y / \partial \ln x_n = \partial \ln y / \partial \ln z_m = \sum_{n=1}^{N} f'_{x_n} + \sum_{m=1}^{M} f'_{z_m}$$

$$\text{avec} \begin{cases} \partial \ln x_n = \partial \ln x_{n'} = \partial \ln z_m = \partial \ln z_{m'} \\ n, n' = 1 \ldots N \\ m, m' = 1 \ldots M \end{cases}$$

Or, dans ce cas ; $\partial \ln CR / \partial \ln z_m = - f'_{z_m} / \sum_{m:1}^{N} f'_{x_n}$

Donc : $ECH^{O} = (1 - \sum_{m} (\partial \ln CR / \partial \ln z_m)) / (\partial \ln CR / \partial \ln y)$.

Il est clair que cette dernière mesure n'est pas effectuée sur le sentier d'expansion global, relatif à l'ensemble des facteurs de production, puisque les inputs quasi fixes ne sont pas initialement à leur niveau optimal. Elle diffère donc le plus souvent d'une mesure des économies d'échelle de long terme :
$ECH^{LT} = (\partial \ln CT / \partial \ln y)^{-1}$

Il est cependant possible de montrer que les deux mesures ECH^{LT} et ECH^{o} coïncident dans le cas particulier où cette dernière grandeur est calculée au point optimal $\bar{z}^h$. En effet :

$$\partial \ln CT / \partial \ln y = (\partial CT / \partial y).(y/CT)$$

$$\text{or } CT(p_x, p_z, y) = CR(p_x, \bar{z}^h, y) + \sum_{m:1}^{M} p_{z_m} \bar{z}_m^h (p_x, p_z, y)$$

$$\text{d'où } \partial CT(.)/\partial y = \partial CR(p_x, \bar{z}^h, y) / \partial y$$

$$+ \sum_m (\partial CR / \partial \bar{z}_m^h) . \partial \bar{z}_m^h / \partial y$$

$$+ \sum_m p_{z_m} (\partial \bar{z}_m^h / \partial y)$$

$$\text{or } \partial CR / \partial \bar{z}_m^h = - p_{z_m}$$

$$\text{d'où finalement } \partial CT(.)/\partial y = \partial CR(p_x, \bar{z}^h, y) / \partial y$$

On a donc :

$$ECH^{LT} = (\partial \ln CT / \partial \ln y)^{-1}$$

$$= [y/CR - \sum_m \partial CR(p_x, \bar{z}^h, y)/\partial z]^{-1}/[\partial CR/\partial y]$$

$$= \left[[(y/CR).(\partial CR(.)/\partial y)]/[1 - \sum_m \partial \ln CR(.)/\partial \ln \bar{z}_m^h]\right]^{-1}$$

$$= ECH^{o} \text{ évalués au point } \bar{z}^h .$$

Le résultat précédent montre donc qu'une mesure des économies d'échelle de long terme est possible à partir de la seule

connaissance de la fonction de coût restreint (P1) et des prix des facteurs fixes. Cependant, et de manière générale, il est difficile de comparer entre elles les mesures alternatives des économies d'échelle : la relation d'ordre dépend en effet du caractère sous ou sub-optimal des quantités observées des facteurs fixes z_m^o, m = 1 ... M. On peut seulement affirmer que $ECH^{CT} \leq ECH^o$.

BIBLIOGRAPHIE

ARROW K. - J., INTRILIGATOR M.-D., 1982. "Handbook of mathematical economics" (volume 2). North-Holland Publishing Company, p. 381-1070.

BOUTITIE E, BUREAU J.C., LAUBIE A., MAGNIEN F., VERMERSCH D., 1987, "Application de la théorie de la dualité aux systèmes céréaliers : étude économétrique sur la base de données individuelles". ENSAE, SEA, Juin 1987, 46 p.

CAVES D.-W., CHRISTENSEN L.-R., SWANSON J.-A., 1981, "Productivity growth, scale economies and capacity utilization in U.S. Railroads, 1955-74". American Economic Review, vol. 71, p.994-1002.

DIEWERT W.-E., 1982, "Duality approaches to microeconomic theory", in Arrow, Intriligator, (ed.), chapitre 12.

GUESNERIE R., 1980, "Modèles de l'économie publique", CNRS.

HALVORSEN R., SMITH T.-R., 1986. "Substitution possibilities for unpriced natural resources : restricted cost functions for the canadian metal mining industry". Review of Economics and Statistics, Août 1986, p. 181-200.

HANOCH G., 1975, "The elasticity fo scale and the shape of average costs". American Economic Review, vol. 65, p. 492-97.

KULATILAKA N., 1985, "Tests on the validity of static equilibrium models". Journal of Econometrics, vol. 28, p. 253-268.

LAU L.-J., 1976, "A characterization of the normalized restricted profit function". Journal of Economic Theory, vol. 12, n°1, p.131-163.

MAHE L.P., RAINELLI P., 1987, "Impact des pratiques et des politiques agricoles sur l'environnement". Cahiers d'Economie et Sociologie Rurales, n°4, p.9-31.

SAKAI Y., 1974. "Substitution and expansion effects in production theory : the case of joint production". Journal of Economic Theory, vol. 9, p. 225-274.

VARIAN H.-R., 1984. "Microeconomic analysis" (2e édition). W.-W. Norton et Company, New-York, 348 p.