HAL open science

Résolution des équations de shallow water par la méthode de Galerkin non linéaire

Bernard Di Martino, Pierre Orenga

To cite this version:

Bernard Di Martino, Pierre Orenga. Résolution des équations de shallow water par la méthode de Galerkin non linéaire. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 1998, RAIRO-Modélisation mathématique et analyse numérique, 32 (4), pp.451-477. hal-01593551

HAL Id: hal-01593551

https://hal.science/hal-01593551v1

Submitted on 26 Feb 2021

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAIRO
MODÉLISATION MATHÉMATIQUE
ET ANALYSE NUMÉRIQUE

BERNARD DI MARTINO
PIERRE ORENGA

Résolution des équations de shallow water par la méthode de Galerkin non linéaire

RAIRO — Modélisation mathématique et analyse numérique, tome 32, n° 4 (1998), p. 451-477.

<http://www.numdam.org/item?id=M2AN_1998__32_4_451_0>

© SMAI, EDP Sciences, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO — Modélisation mathématique et analyse numérique » (http://www.esaim-m2an.org/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/legal.php). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

MATHEMATICAL MODELLING AND NUMERICAL ANALYSIS
MODELISATION MATHEMATIQUE ET ANALYSE NUMERIQUE

(Vol 32, n° 4, 1998, p 451 à 477)

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS DE SHALLOW WATER PAR LA MÉTHODE DE GALERKIN NON LINÉAIRE (*)

Bernard di MARTINO, Pierre ORENGA (1)

Résumé — *Ce travail a pour objectif l'application aux fluides géophysiques de la méthode de Galerkin non linéaire développée par M Marion et R Temam dans le cadre des équations de Navier-Stokes Nous nous intéressons en particulier aux équations de shallow water qui permettent une représentation de la circulation océanique bidimensionnelle*

Dans le cas des fluides géophysiques, le nombre de Rossby, qui représente le rapport entre les termes non linéaires d'advection et la force de Coriolis est faible. La force de Coriolis a alors une influence prédominante sur l'écoulement Elle n'apporte pas d'énergie à l'écoulement mais redistribue l'énergie existante sur une plus large bande spectrale L'énergie fournie aux petits modes peut être importante Nous proposons d'appliquer au terme de Coriolis une décomposition multi-niveaux similaire à celle appliquée aux termes non linéaires d'advection

Nous allons également appliquer cette méthode à l'équation de conservation de la masse qui est une équation hyperbolique non linéaire du premier ordre

Ce travail nous a permis l'obtention de résultats de simulation satisfaisants à moindre coût et une meilleure prise en compte de la force de Coriolis, comparativement aux résultats obtenus par la méthode de Galerkin classique © Elsevier, Paris

Abstract — *The purpose of this work is the application to geophysical flow of the non-linear Galerkin method proposed by M Marion and R Temam in the case of the Navier-Stokes equations We consider the two dimensional circulation flow given by the shallow water equations*

In the geophysical flow case, the Rossby number, given by the ratio between the non-linear advective terms and the Coriolis term, is very small The effects of the Coriolis term prevail over the non-linear terms, but do not give energy to the flow They re-allocate the energy in a larger spectral band The energy provided to little modes can be significant We propose to apply the multiscale method in the same way to the Coriolis term

We also use the non-linear Galerkin method to solve the first order hyperbolic non-linear mass equation

This simulation gives satisfactory results which are a combination of a significant gain of CPU and a better Coriolis term representation compared to the classical Galerkin method [13, 15] © Elsevier, Paris

1. INTRODUCTION

Nous présentons une adaptation de la méthode de Galerkin non linéaire [10] aux équations de shallow water. Cette méthode de résolution utilise une décomposition de l'écoulement en plusieurs niveaux de raffinement, sur lesquels un traitement numérique adapté est mis en place.

Notons que les résultats d'existence de solution ont été obtenues en appliquant la méthode de Galerkin à l'équation de conservation de la quantité de mouvement et la méthode des caractéristiques pour l'équation de conservation de la masse afin que cette dernière soit vérifiée exactement (le couplage entre les deux équations de conservation étant résolus par un point fixe). Néanmoins les résultats numériques obtenus par la méthode de Galerkin classique sur l'équation de conservation de la masse montrent, dans les cas qui nous intéressent (écoulements des fluides géophysiques), que l'on obtient une bonne approximation. D'autre part, cette méthode, grâce à la base spéciale utilisée [14], est très économique en temps (comparée par exemple aux méthodes de différences finies (Liège) ou des caractéristiques (travaux en cours). Les coûts de calcul, généralement élevés lors de la recherche d'une représentation détaillée de l'écoulement, peuvent être sensiblement réduits avec peu de perte de qualité sur les résultats.

(*) Manuscrit reçu le 11 septembre 1996
(1) Centre de Mathématique et de Calcul Scientifique, Université de Corse, Quartier Grossetti, 20250 Corti, URA CNRS 2053

Si nous avons pu démontrer la convergence de la méthode de Galerkin non linéaire lorsque celle-ci est uniquement appliqué à l'équation de conservation de la quantité de mouvement, l'équation de continuité étant résolue exactement, il est plus difficile de démontrer ce résultat lorsque l'on applique la méthode de Galerkin non linéaire à l'équation de conservation de la masse (un travail est en préparation sur ce sujet).

Les premières applications numériques de la méthode de Galerkin non linéaire ont été réalisées dans le cadre de la résolution des équations de Navier-Stokes [3, 6]. Nous présentons ici l'étude dans le cas des équations de shallow water en formulation hauteur-vitesse qui présentent deux termes supplémentaires par rapport aux équations de Navier-Stokes.

Le premier de ces termes est la force de Coriolis dont on montrera l'effet « répartiteur » d'énergie entre les modes propres de l'écoulement. On s'attachera à montrer la similitude entre l'action de cette force et celle des termes non linéaires présents dans l'équation de Navier-Stokes. Un traitement numérique approprié à ce terme sera alors déduit sur la base de résultats numériques.

La seconde modification d'importance par rapport aux équations de Navier-Stokes réside dans la présence d'un couplage vitesse-élévation dans l'équation de conservation de la masse. Ce couplage est, à l'instar des termes d'advection pour l'équation de la vitesse, très pénalisant lors de la résolution numérique par une méthode spectrale. Cette équation présente de plus la particularité d'être hyperbolique, ce qui induit une contrainte supplémentaire sur le pas de temps. Nous mettrons en évidence la nécessité d'appliquer la décomposition de Galerkin non linéaire à l'inconnue représentant la hauteur d'eau afin de ne pas introduire de déstabilisation numérique. Un traitement numérique adapté à cette double décomposition sera alors introduit.

Dans une première étape nous rappelons les résultats obtenus par la méthode de Galerkin classique sur une base spéciale dont nous détaillons les propriétés.

Puis nous donnons les justifications physiques ayant conduit à l'élaboration de la méthode de Galerkin non linéaire pour les équations de Navier-Stokes (cascade de Kolmogorov). L'existence d'un parallèle avec les propriétés des fluides géophysiques (cascade de Kolmogorov-Ozmidov) va fournir une justification à l'extension de la méthode aux équations de shallow water.

Dans une troisième partie, nous étudions les implications numériques engendrées par la décomposition de Galerkin non linéaire. Nous proposons diverses options de simplification des équations en nous basant sur les propriétés mises en évidence dans la partie précédente.

Nous illustrons ensuite différentes options par une simulation numérique, le choix de telle ou telle option se faisant naturellement en fonction du surcoût du calcul et de la perte de précision. On s'est attaché en particulier à étudier la paramétrisation des différentes constantes introduites au moment de la décomposition.

2. LES ÉQUATIONS DE SHALLOW WATER

2.1. Notations

Dans ce qui suit, Ω représente un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ de frontière γ de classe $\mathscr{C}^{1,1}$ ou γ un polygone convexe, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}^2$ et $\alpha(\mathbf{u}) = (-u_2, u_1)$; p et q sont des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad \operatorname{Rot} q = \left(\frac{\partial q}{\partial x_2} ; - \frac{\partial q}{\partial x_1} \right) \tag{2.1}$$

2.2. Formulation des équations de shallow water

Les écoulements océaniques peuvent être représentés à l'aide d'un modèle hydrodynamique tridimensionnel. Ce modèle s'établit à partir des lois de conservation des différentes variables d'état (quantité de mouvement, masse, température et salinité) représentatives de l'écoulement. Il est possible d'appliquer à ce modèle l'hypothèse

de Boussinesq qui permet de négliger les variations de densité du fluide, à l'exception de celles rencontrées dans le gradient de pression. Enfin, il est courant d'appliquer à ce système l'approximation hydrostatique qui permet d'éliminer l'équation de la vitesse verticale au profit d'une équation d'équilibre hydrostatique [11].

Malgré ces simplifications, ce modèle présente néanmoins de nombreuses difficultés lors de la résolution numérique, en particulier pour la représentation des phénomènes de stratification qui nécessite une bonne paramétrisation de la diffusion verticale. Nous lui préférons ici un modèle simplifié résultant de l'intégration de ce modèle tridimensionnel sur la hauteur d'eau, plus connu sous le nom de modèle de shallow water. Ce modèle utilise une hypothèse d'homogénéité verticale du fluide qui peut s'interpréter soit par une faible profondeur du domaine et un brassage suffisamment efficace de la part des vents et des contraintes de dissipation au fond, soit par l'hypothèse d'une couche homogène en mouvement sur une couche au repos de densité différente. Même s'il ne peut reproduire toute la complexité d'un modèle tridimensionnel, l'étude de ce modèle permet d'obtenir des renseignements intéressants sur la nature de l'écoulement.

Le système est composé d'une équation de conservation de la quantité de mouvement et d'une équation de conservation de la masse qui s'expriment de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \,.\, \nabla)\, \mathbf{u} + \omega\alpha(\mathbf{u}) - A\, \Delta\mathbf{u} + g\, \nabla h = f \quad \text{dans } Q \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}h) = 0 \quad \text{dans } Q\,. \tag{2.3}$$

Où $Q = \Omega \times]0, 1[$, $\mathbf{u}$ représente la vitesse moyenne du fluide dans le plan horizontal et h la hauteur de la couche du fluide. ω est la composante de la force de Coriolis dans le plan normal à $\mathbf{u}$. Enfin, f représente la contribution des forces extérieures (vent) sur l'écoulement. Cette force est déterminée par continuité des champs de contraintes à la surface du fluide.

Les conditions aux limites associées aux écoulements géophysiques sont généralement des conditions d'imperméabilité au bord et des conditions de dissipation au bord. Ces deux conditions peuvent s'exprimer de la façon suivante [13] :

$$\mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \gamma \tag{2.4}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \gamma\,. \tag{2.5}$$

2.3. Base spéciale utilisée

Nous rappelons ici quelques résultats concernant la base spéciale utilisée pour la résolution des équations de shallow water [14, 16].

Soit le problème (P1) suivant :

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \gamma \end{array}\right.$$

Nous définissons les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathscr{V} = \{\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^2 / \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega), \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)\,;\, \boldsymbol{\varphi} \,.\, n = 0 \text{ sur } \gamma\} \tag{2.6}$$

$$H_0(\operatorname{div} 0, \operatorname{rot} 0) = \{\mathbf{u} \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \gamma\} \tag{2.7}$$

$\mathscr{V}$ est muni de la norme :

$$\|\boldsymbol{\varphi}\|_{\mathscr{V}} = \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L2} + \|\operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}\|_{L2} + \|\operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}\|_{L2} \tag{2.8}$$

On a le résultat suivant :

THÉORÈME 1 :

— *Si* (λ, p) *est solution du problème scalaire*

$$(P2) - \Delta p = \lambda p \quad dans \quad \Omega, \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \; sur \; \gamma \; ;$$

alors $(\lambda, \operatorname{grad} p)$ *est solution de (P1).*

— *Si* (μ, q) *est solution du problème scalaire*

$$(PS) - \Delta q = \lambda q \; dans \; \Omega, \; q = 0 \; sur \; \gamma \; ;$$

alors $(\mu, \operatorname{Rot} q)$ *est solution de (P1).*

— *Si* Ω *est simplement connexe, alors* 0 *n'est pas valeur propre de (P1), sinon l'espace propre associé à* 0 *est l'espace de dimension finie* $H_0(\operatorname{div} 0, \operatorname{rot} 0)$.

— *L'ensemble des* $\operatorname{grad} p$ *où* p *est solution de (P2) et des* $\operatorname{Rot} q$ *où* q *est solution de (P3) est total dans* $L^2(\Omega)^2 \backslash H_0(\operatorname{div} 0, \operatorname{rot} 0)$ *et dans* $\mathscr{V} \backslash H_0(\operatorname{div} 0, \operatorname{rot} 0)$.

— *Si* Ω *est régulier, on a* $\mathscr{V} = \{\boldsymbol{\varphi} \in H^1(\Omega)^2, \boldsymbol{\varphi} \cdot \mathbf{n} = 0\}$ *et les solutions de (P1) sont très régulières.*

Nous avons choisi d'utiliser la base de $L^2(\Omega)$ et de $H^1(\Omega)$ composée par les fonctions solutions de (P2) pour décomposer l'élévation h. Cette base a l'avantage d'être disponible puisque déjà déterminée pour la vitesse. Nous verrons par la suite que ce choix permet également de simplifier la résolution numérique.

La détermination numérique de la base spéciale se réalise dans le cas général par l'utilisation d'un programme d'éléments finis en utilisant un élément de type hermite. La résolution de (P2) et (P3) nous permet ainsi l'accession directe aux $\operatorname{grad} p$ et $\operatorname{Rot} q$ sans avoir recours à un algorithme de dérivation numérique.

Enfin, pour simplifier la présentation, nous nous limitons aux équations sur un domaine fermé simplement connexe. Cette restriction est réalisée afin d'alléger les notations rapidement alourdies par la présence de frontière en mer ouverte ou d'îles. Notons à titre d'information que les problèmes d'îles ou de mer ouverte n'apportent pas de grosses difficultés supplémentaires et ont déjà été résolus aussi bien du point de vue théorique que numérique.

2.4. Formulation faible et approximation par la méthode de Galerkin classique

On suppose la solution du problème régulière. On note $(\,.\,,.\,)$ le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$ et dans $L^2(\Omega)^2$.

La formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\right) - \frac{1}{2}(\mathbf{u}^2, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) + (\operatorname{rot} \mathbf{u}\alpha(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi}) + (\omega\alpha(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi})$$

$$- A(\operatorname{rot} \mathrm{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}) - A(\operatorname{div} \mathbf{u}, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) - g(h, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi}) = (f, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in \mathscr{V} \cap H^3(\Omega)^2 \tag{2.9}$$

$$\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \psi\right) - (\mathbf{u}h, \nabla\psi) = 0, \quad \forall \psi \in H^1(\Omega) \, . \tag{2.10}$$

On cherche une approximation $\mathbf{u}_n$ de $\mathbf{u}$ et h_m de h sous les formes suivantes :

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \boldsymbol{\varphi}_i = \sum_{i=1}^{np} a_i \frac{\nabla p_i}{\sqrt{\lambda_{pi}}} + \sum_{i=1}^{nq} b_i \frac{\operatorname{Rot} q_i}{\sqrt{\lambda_{qi}}} \tag{2.11}$$

$$h_m = \sum_{i=1}^{m} Z_i \psi_i = \sum_{i=1}^{m} Z_i p_i \tag{2.12}$$

Où les grad p_i et les Rot q_i forment une base orthogonale de L^2 et de $\mathscr{V}$ et sont solutions de (P1). Les p_i et les q_i, solutions respectives de (P2) et (P3) sont normées dans $L^2(\Omega)$. Notons que la base spéciale pour la vitesse est composée de deux familles de fonctions. Ces fonctions sont classées par ordre de valeur propre croissante. Nous utiliserons de façon générale la notation $\boldsymbol{\varphi}$ pour représenter indifféremment un représentant de ces deux familles. Cependant, le rôle des deux familles de fonctions n'est pas tout à fait identique et il sera parfois intéressant de les différencier.

Nous indiquons quelques propriétés intéressantes de la base spéciale qui seront utilisées lors de la résolution numérique des équations de shallow water :

$$\operatorname{rot} \mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{nq} \lambda_{qi}\, q_i \tag{2.13}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_n = -\sum_{i=1}^{np} \lambda_{pi}\, p_i \tag{2.14}$$

$$(\omega\alpha(\mathbf{u}_n)) = \sum_{i=1}^{np} a_i \frac{\operatorname{Rot} p_i}{\sqrt{\lambda_{pi}}} - \sum_{i=1}^{nq} b_i \frac{\operatorname{grad} q_i}{\sqrt{\lambda_{qi}}} \tag{2.15}$$

Remarquons que les propriétés de la base spéciale permettent l'obtention d'une expression simplifiée pour la représentation des termes de diffusion et du gradient de pression dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

Nous sommes amenés à résoudre un système d'équations différentielles à coefficients constants se présentant sous la forme suivante :

$$\dot{X}_i = F_i - A\lambda_i X_i - g\tilde{\lambda}_i Z_i - \omega \sum_{j=1}^{n} X_j\, \Theta_{i,j} - \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} X_j X_k\, \Xi_{i,j,k} \tag{2.16}$$

$$\dot{Z}_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} X_j Z_k\, Y_{i,j,k} \tag{2.17}$$

où les X_i et Z_i représentent les projections de $\mathbf{u}$ et h sur leur base respective, $\Theta_{i,j}$, $\Xi_{i,j,k}$ et $Y_{i,j,k}$ sont des intégrales de produits de fonctions de base (indépendante en temps). λ_i est la valeur propre associée à la fonction propre $\boldsymbol{\varphi}_i$, $\tilde{\lambda}_i$ vaut λ_i si $\boldsymbol{\varphi}_i$ est un grad, 0 si $\boldsymbol{\varphi}_i$ est un Rot.

Les résultats numériques obtenus par l'utilisation de la méthode de Galerkin sont comparables à ceux provenant de logiciels basés sur des algorithmes du type différences finies. Les coûts de calcul, lors de la résolution par Galerkin sont en grande partie dus à l'évaluation des coefficients constants du système, représentés par $\Theta_{i,j}$, $\Xi_{i,j,k}$ et $Y_{i,j,k}$. Ceux-ci ne sont évalués qu'une seule fois pour un domaine donné, indépendamment des différents paramètres et des forces extérieures qui peuvent évoluer d'une simulation à l'autre. Les coûts de simulation sont ainsi fortement diminués par rapport à la résolution par un logiciel de type différences finies (rapport de 1 à 20).

Des simulations réalisées à partir d'une solution analytique ont mis en évidence certains phénomènes (que nous détaillons ci-après) qui nous ont conduits à adapter la méthode de Galerkin non linéaire à ces équations.

La connaissance de la solution exacte permet d'évaluer exactement la contribution de la force de Coriolis, du terme non linéaire d'advection et du terme div $(\mathbf{u}h)$. Mais les trois opérateurs correspondants n'ont pas la propriété de permuter avec l'opérateur projection. Ainsi, par exemple, la composante de la force de Coriolis prise en compte lors de la résolution du système (2.9) par la méthode de Galerkin est $P_n(\omega\alpha(\mathbf{u}_n))$ qui est sensiblement différente de celle qui serait nécessaire de prendre en compte : $P_n(\omega\alpha(\mathbf{u}))$. Des constatations identiques peuvent être faites pour les termes non linéaires. Le seul moyen pour limiter cette erreur consiste à obtenir des informations sur la différence entre $\mathbf{u}_n$ et $\mathbf{u}$. Mais une simple augmentation du nombre de fonction de base conduit rapidement à des coûts de calcul dissuasifs.

La méthode de Galerkin non linéaire va permettre une estimation de la projection de la vitesse sur un plus grand nombre de fonctions de la base avec un surcoût de calcul modéré.

3. MOTIVATION DE LA DÉCOMPOSITION MULTI-NIVEAUX

Une question qui vient naturellement à l'esprit, lors de l'utilisation de la méthode de Galerkin, est la détermination de la dimension de l'espace approché où l'on cherche la solution. Celle-ci est généralement un compromis entre la qualité et le coût du résultat.

3.1. Énergie cinétique et énergie potentielle

Nous rappelons les expressions de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle par rapport à une décomposition spectrale.

- L'énergie cinétique $Ec(\mathbf{u})$ est définie par :

$$Ec(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{u}\|_{L2}^2 = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2\right) \tag{3.1}$$

Outre l'importance que cette notion a au niveau de l'interprétation des écoulements, elle a la particularité d'être aisément accessible lors d'une résolution par la méthode de Galerkin en utilisant une base orthonormée. En effet, l'énergie cinétique associée à un mode propre du fluide représenté par $(X_i \boldsymbol{\varphi}_i)$ est donnée par $\frac{1}{2} X_i^2$. Ainsi, pour la totalité de l'écoulement, nous obtenons :

$$Ec(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 \tag{3.2}$$

- La notion d'énergie potentielle est associée à l'élévation de la surface. Celle-ci s'exprime de la façon suivante [8] :

$$Ep = \rho g \int_\Omega \left[\int_0^{\eta_x} z\, dz\right] dx \tag{3.3}$$

où η_x représente la variation du niveau du fluide par rapport au niveau de référence au point x et ρ la densité, supposée constante, du fluide.

Si l'on utilise les propriétés de la base choisie pour l'élévation, nous obtenons une expression simple de l'énergie potentielle totale de l'écoulement :

$$Ep = \frac{\rho g}{2} \sum_{i=1}^{\infty} Z_i^2 \tag{3.4}$$

3.2. Théorie de Kolmogorov

Un des résultats fondamentaux de l'étude de la mécanique des fluides est la théorie de la cascade énergétique de Kolmogorov [7]. Cette cascade traduit une décroissance de l'énergie cinétique associée à chaque tourbillon en fonction de la dimension caractéristique de celui-ci. On peut décomposer cette cascade en trois zones distinctes :

— La zone d'injection située dans les plus basses fréquences. Le fluide subit dans cette zone une excitation directe de la part des forces extérieures (par exemple le vent en surface). Les structures représentées par ces modes ont une dimension proche de la dimension caractéristique du domaine d'étude. Elles contiennent la plus grande partie de l'énergie et de l'entrophie associée à l'écoulement et il est important d'avoir sur ces structures la plus grande précision possible.

— La zone de transfert, située au-delà de la zone d'injection. Les valeurs propres associées à ces modes sont plus grandes que celles des modes situés dans la zone d'injection. Les structures qu'ils représentent sont plus petites. Ces modes ne subissent pas directement l'influence des forces extérieures mais sont excités par les interactions entre modes. Ces interactions ont bien sûr pour origine les termes non linéaires présents dans l'équation de Navier-Stokes. Mais, dans le cas des équations de shallow water, elles sont accentuées par l'action de la force de Coriolis et la forme particulière de l'équation de conservation de la masse. Le spectre d'énergie présente dans cette zone une décroissance exponentielle (généralement estimée en $\kappa^{-5/3}$, si κ est la fréquence associée au mode). Cette zone s'étend jusqu'à une valeur critique κ_d appelée échelle de dissipation de Kolmogorov.

— La zone de dissipation visqueuse représente la partie supérieure du spectre. Cette zone s'étend au-delà de la fréquence κ_d. Les modes situés dans cette partie du spectre représentent des structures de très petites tailles qui sont considérablement freinées par les contraintes de dissipations visqueuses.

Nous avons introduit la valeur κ_d qui représente l'échelle de dissipation de Kolmogorov. Cette valeur peut être évaluée, à l'aide de formules empiriques, à partir des caractéristiques physiques de l'écoulement, en particulier de la viscosité associée au fluide. Plus cette viscosité est faible, plus la valeur de κ_d est élevée.

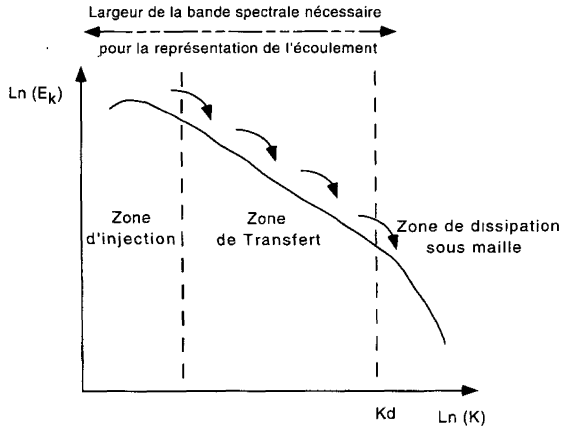

Figure 1. — Cascade d'énergie de Kolmogorov.

En toute rigueur, la théorie de Kolmogorov et la valeur de l'échelle de dissipation sont liées à la viscosité moléculaire du fluide. Or, dans le cas où les dimensions caractéristiques du domaine d'étude sont supérieures à quelques mètres, il est nécessaire d'ajouter un terme de dissipation « sous-maille » modélisant la dissipation d'énergie ayant lieu aux échelles inférieures aux pas d'espace utilisés pour la discrétisation. Ozmidov [12] a montré que dans le cas des fluides géophysiques, en choisissant judicieusement la fenêtre spectrale d'observation, il est possible de mettre en évidence la présence d'une cascade d'énergie cinétique similaire à celle proposée par Kolmogorov.

La présence de la cascade de Kolmogorov a permis à R. Temam d'étayer les hypothèses justifiant l'utilisation de la méthode de Galerkin non linéaire pour les équations de Navier-Stokes. Dans le cas des équations de shallow water, la présence d'une cascade similaire a motivé l'application d'un traitement de même nature.

4. MÉTHODE DE GALERKIN NON LINÉAIRE

Nous allons rappeler le principe de la méthode de Galerkin non linéaire développée par M. Marion et R. Temam et étudier son influence sur les différents opérateurs intervenant dans l'équation de shallow water. Les termes concernés sont les suivants :

— Le terme non linéaire d'advection, coûteux en temps et pour lequel la méthode de Galerkin non linéaire a été initialement développée par M. Marion et R. Temam dans le cadre de la résolution des équations de Navier-Stokes.

— Le terme de Coriolis dont on montrera l'influence dans la répartition d'énergie et qui fera l'objet d'une étude particulière.

— Le terme de gradient de l'élévation, couplant les équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. Ce terme prend une forme particulière lors de sa projection sur la base spéciale.

— Le terme non linéaire intervenant dans l'équation de conservation de la masse, pour lequel a été développée une décomposition de la hauteur similaire à celle de la vitesse.

4.1. Le principe

La méthode de Galerkin non linéaire développée par M. Marion et R. Temam tire sa justification de la présence d'une cascade énergétique au sein de l'écoulement. Cette cascade justifie l'influence moindre des plus petites structures qui n'apportent qu'une faible contribution à l'écoulement. Cependant, ces structures peuvent, sur de longues périodes d'évolution, modifier le comportement des plus grandes. M. Marion et R. Temam ont proposé une décomposition de la vitesse en une composante représentant les plus grands tourbillons ($\mathbf{u}_{n_1}$), donc la plus grande partie de l'énergie cinétique, et une composante représentant les plus petits tourbillons ($\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}$), beaucoup moins énergétique. Ils proposent alors une méthode d'estimation simplifiée pour les petites structures dont une évaluation par la méthode de Galerkin classique serait très coûteuse sans nécessairement apporter un meilleur résultat du fait de l'imprécision des schémas d'intégrations numériques.

4.2. Décomposition de la vitesse

Dans une première étape, en vue de rappeler les principes de base de la méthode de Galerkin non linéaire, nous avons appliqué celle-ci uniquement au terme d'advection présent dans le problème de shallow water. Nous montrons plus loin l'application de cette méthode lors de la prise en compte également de l'équation de conservation de la masse et de $\omega\alpha(\mathbf{u})$.

On pose

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} X_i(t)\, \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})}_{\mathbf{u}_{n_1}(\mathbf{x}, t)} + \underbrace{\sum_{i=n_1+1}^{n} \tilde{X}_i(t)\, \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x})}_{\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(\mathbf{x}, t)} \tag{4.1}$$

Nous définissons aussi les opérateurs projections suivants :

— $\mathbf{P}_{n_1}$ la projection L^2 sur les n_1 premières fonctions propres de la vitesse.

— $\mathbf{Q}_{n_1}$ la projection L^2 sur les $n - n_1$ fonctions propres suivantes de la vitesse.

— $\mathbf{Ph}_m$ la projection L^2 sur les m premières fonctions propres p_i formant une base de $H^1(\Omega)$.

Par définition, nous avons $\mathbf{P}_{n_1}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \mathbf{u}_{n_1}(\mathbf{x}, t)$ et $\mathbf{Q}_{n_1}(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(\mathbf{x}, t)$.

Nous conservons, pour le moment, la décomposition résultant de la méthode de Galerkin usuelle pour l'inconnue représentant l'élévation de la hauteur du fluide :

$$h_m(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{m} Z_i\, p_i \tag{4.2}$$

Nous notons $B(\mathbf{u}, \mathbf{u})$ le terme non linéaire d'advection dans l'équation de la vitesse.

Les équations de shallow water peuvent alors s'exprimer sur les différentes bases définies précédemment de la façon suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{n_1}}{\partial t} + \mathbf{P}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})) + \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}))$$

$$+ \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1})) - A\,\Delta\mathbf{u}_{n_1} + g\mathbf{P}_{n_1}(\nabla h_m) = \mathbf{P}_{n_1}(\mathbf{f}) \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}}{\partial t} + \mathbf{Q}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})) + \mathbf{Q}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}))$$

$$+ \mathbf{Q}_{n_1}(\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1})) - A\,\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{n_1} + g\mathbf{Q}_{n_1}(\nabla h_m) = \mathbf{Q}_{n_1}(\mathbf{f}) \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial h_m}{\partial t} + \mathbf{P}\mathbf{h}_m(\operatorname{div}((\mathbf{u}_{n_1} + \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})\, h_m)) = 0 \tag{4.5}$$

Notons qu'a priori, rien n'indique l'existence de relation entre la dimension de l'espace lié à la vitesse et celle de l'espace lié à l'élévation de la hauteur d'eau.

L'intérêt d'une telle décomposition réside principalement dans la possibilité d'effectuer un découplage de l'évolution en temps des petites et des grandes structures de l'écoulement. Les plus petites structures sont représentées par des termes de l'ordre de la précision du schéma d'intégration numérique. Leur calcul à chaque itération est très coûteux et entaché d'erreur. Parallèlement, localement en temps, seules les grandes structures suffisent pour bien représenter l'écoulement. Mais un calcul rigoureux de l'évolution de ces dernières ne peut être conduit sans la prise en compte de l'influence des plus petites structures.

La décomposition opérée précédemment a pour but de permettre une intégration en temps aussi précise que possible pour les équations des plus grandes composantes de l'écoulement en réalisant une hypothèse d'état quasi stationnaire pour les plus petites composantes. Une mise à jour de ces petites composantes sera réalisée périodiquement par l'utilisation d'un système d'équation simplifié.

Nous avons introduit une « fréquence de coupure » $n1$ dont on donnera une formulation après l'étude de l'influence de la décomposition sur les différents termes.

4.3. Les termes non linéaires d'advection

L'application de la méthode de Galerkin non linéaire aux termes non linéaires d'advection a déjà été traitée par de nombreux auteurs [2, 3, 6, 10, 17]. Nous en rappelons simplement les principaux résultats en utilisant la décomposition suivante :

$$B(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = B(\mathbf{u}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_1}) + \underbrace{B(\mathbf{u}_{n_1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}) + B(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_1})}_{B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})} + B(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}) \tag{4.6}$$

La première composante, $B(\mathbf{u}_{n_1}, \mathbf{u}_{n_1})$ représente les interactions entre grandes structures. La dernière composante $B(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})$ représente les interactions entre petites structures. Les deux autres composantes rassemblées sous le symbole $B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})$ représentent les interactions non linéaires entre les grandes et les petites structures.

Les expressions retenues pour le calcul des termes non linéaires sont les suivantes :

$$TNL = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{P}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(\theta), \mathbf{u}_{n_1}(\theta)) + B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}(\theta), \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(\theta)))\, d\theta \tag{4.7}$$

$$\widetilde{TNL} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(\theta), \mathbf{u}_{n_1}(\theta)))\, d\theta \tag{4.8}$$

où TNL est la composante du terme d'advection intervenant dans l'évolution des plus grandes structures de la vitesse et $\widetilde{TNL}$ celle intervenant dans les plus petites structures de la vitesse.

Soit Δt le pas de discrétisation en temps. Nous définissons un intervalle de temps de largeur $\Delta T_b = Ntb \times \Delta t$ à l'intérieur duquel l'influence de la composante $\tilde{\mathbf{u}}$ est considérée comme quasi-statique. Durant ce même intervalle de temps, l'évolution de $B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}, \tilde{\mathbf{u}}_{n_1})$ peut aussi être supposée négligeable [2].

Si l'on note t_j l'instant de la dernière estimation de $\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}$, l'intégration de TNL entre t et $t + \Delta t$ s'obtient à l'aide de l'expression ci-dessous :

$$TNL = \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(t + \Delta t), \mathbf{u}_{n_1}(t + \Delta t))) + \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j), \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))) \tag{4.9}$$

A l'instant $t_j + \Delta T_b$, les plus grandes structures ayant été évaluées à partir de l'expression précédente, la mise à jour des plus petites structures s'effectue par :

$$\widetilde{TNL} = \Delta T_b\, \mathbf{Q}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(t_j), \mathbf{u}_{n_1}(t_j))) \tag{4.10}$$

4.4. La force de Coriolis

La force de Coriolis joue un rôle important dans l'étude des écoulements des fluides géophysiques. Ce rôle est d'autant plus prédominant que les dimensions du domaine sont grandes. Il est donc nécessaire de bien représenter l'influence de cette force sur l'écoulement, en particulier lors de sa projection sur la base spéciale.

Nous allons, dans une première étape, montrer l'effet répartiteur d'énergie engendré par la présence de cette force. Cet effet va avoir pour conséquence une augmentation des transferts aux travers de la cascade énergétique. Il va conduire à une augmentation conséquente du nombre de modes nécessaires pour la représentation de l'écoulement. Même en l'absence des termes non linéaires d'advection, la présence de la force de Coriolis est à l'origine d'une cascade énergétique et peut justifier à elle seule l'application de la méthode de décomposition multi-niveau.

Il est possible de mettre en évidence l'effet distributeur de la force de Coriolis en utilisant les propriétés mathématiques de l'opérateur α. Cet opérateur associe à un vecteur $\mathbf{v} = (v1, v2)$ le vecteur $\alpha(\mathbf{v}) = (-v2, v1)$ qui lui est orthogonal au sens $\mathbb{R}^2$. Cet opérateur a la propriété de ne pas commuter avec l'opérateur projection. Propriété qui conduit à répartir l'influence de la force de Coriolis engendrée par un mode propre sur les autres modes propres. Dans le cas de la base spéciale utilisée pour la vitesse, l'opérateur α à la propriété de transformer les fonctions de bases $\operatorname{grad} p_i$ en des fonctions $\operatorname{Rot} p_i$. Ces fonctions ne sont plus orthogonales à aucune des deux familles de fonctions composant la base. On a un résultat du même type pour les $\operatorname{rot} q_i$.

La mise en évidence de ce phénomène dans le cadre d'une simulation numérique est effectuée dans la dernière partie de ce document.

Nous allons maintenant étudier comment l'action de la décomposition de Galerkin non linéaire va s'effectuer sur la force de Coriolis. Nous avons l'apparition de deux composantes pour cette force, $\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1})$ correspond à l'influence des plus grandes structures et $\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1})$ à celle des plus petites structures.

Une analyse des ordres de grandeur associés à chacune de ces deux expressions fait clairement apparaître la prédominance de la composante engendrée par les plus grandes structures. Cette dominance nous conduit à négliger la composante engendrée par les plus petites structures. Cependant, pour les mêmes raisons qui nous poussent à conserver l'influence des termes de couplage non linéaires, il est impensable du point de vue modélisation de négliger la composante engendrée par les plus petites structures sur l'évolution des plus grandes.

Les options retenues pour la prise en compte de la force de Coriolis sur les différentes structures sont les suivantes :

$$FC = \int_t^{t+\Delta t} [\mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(\theta))) + \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(\theta)))]\, d\theta \tag{4.11}$$

$$\widetilde{FC} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{Q}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(\theta)))\, d\theta \tag{4.12}$$

Où FC représente la contribution de la force de Coriolis sur les plus grandes structures et $\widetilde{FC}$ représente la contribution de la même force dans l'évolution des plus petites structures.

L'intégration du premier de ces termes s'exprime de la façon suivante :

$$FC = \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(t+\Delta t))) + \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))) \tag{4.13}$$

La partie de l'intégrale incluant le terme $\mathbf{u}_{n_1}$ est évaluée au moyen d'un schéma implicite. La seconde partie est évaluée à partir de la valeur de $\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}$ calculée lors de la dernière itération sur la totalité des modes.

Le terme $\widetilde{FC}$ est évalué à l'instant $t_j + \Delta T_b$ par l'expression :

$$\widetilde{FC} = \Delta T_b\, \mathbf{Q}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(t_j))) \tag{4.14}$$

La valeur de $\mathbf{u}_{n_1}$ étant précédemment calculée au temps t_j, l'évaluation de ce terme ne pose aucune difficulté.

Nous justifierons, dans la dernière partie de ce document, à l'aide d'exemples numériques, les motivations de ces choix.

4.5. Le gradient de l'élévation

L'élévation du fluide est représentée sur une base de $L^2(\Omega)$ générée par les fonctions p_ι solutions de (P2). Ce choix permet une écriture simplifiée du terme ∇h apparaissant dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Mais ce choix impose aussi une relation entre le nombre de fonctions p_ι utilisées pour représenter l'élévation et le nombre de fonction grad p_ι intervenant dans la représentation de la vitesse.

Les différents tests numériques ont en effet montré que le nombre de fonctions de base utilisés pour représenter l'élévation devait être identique au nombre de fonction du type grad p utilisées pour représenter la vitesse du fluide.

Cette condition nous conduit à appliquer à l'élévation h une décomposition du même type que celle appliquée à la vitesse du fluide. Cette décomposition est la suivante :

$$h_m(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\sum_{\iota=1}^{m_1} Z_\iota p_\iota}_{h_{m_1}} + \underbrace{\sum_{\iota=m_1+1}^{m} \tilde{Z}_\iota p_\iota}_{\tilde{h}_{m_1}} \tag{4.15}$$

La valeur de m, (resp. m_1) est reliée à la valeur de n (resp. n_1) apparaissant dans la formule (4.1). Cette relation associe à m (resp. m_1) le nombre de fonctions de la famille des $\{\text{grad}\, p_\iota\}$ contenues dans les n (resp. n_1) premières fonctions de la base spéciale utilisée pour la vitesse.

Nous venons de donner une des raisons qui nous ont conduit à proposer une décomposition du type Galerkin non linéaire pour l'inconnue représentant l'élévation. Cette décomposition n'est pas, contrairement à celle de la vitesse, basée sur une propriété physique de l'écoulement. Elle est induite par des considérations numériques. Nous allons maintenant étudier les conséquences d'une telle décomposition dans chacune des équations du système.

Dans le cas du traitement du terme représentant le gradient de l'élévation, l'application de cette décomposition n'apporte pas de conséquence particulière. En effet, seules les plus grandes composantes de l'élévation ont une influence sur les grandes structures de la vitesse.

Finalement, on résout l'équation de conservation de la quantité de mouvement de la façon suivante :

• Entre les instants t_j et $t_j + \Delta T_b$, les termes contenant les plus petites structures sont supposés constants et on résout :

$$\frac{\partial \mathbf{u}_{n_1}}{\partial t} + \mathbf{P}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(t), \mathbf{u}_{n_1}(t))) + \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(t))) + \mathbf{P}_{n_1}(g\,\nabla h_{m_1}(t)) - A\,\Delta\mathbf{u}_{n_1}(t)$$

$$= \mathbf{P}_{n_1}(f(t)) - \mathbf{P}_{n_1}(B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j), \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))) - \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))) \tag{4.16}$$

• Au temps $t_j + \Delta T_b$, les plus petites structures sont évaluées à partir de l'expression linéarisée et simplifiée suivante :

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}}{\partial t} + \mathbf{Q}_{n_1}(g\,\nabla \tilde{h}_{m_1}(t))\,\Delta\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t)$$

$$= \mathbf{Q}_{n_1}(f(t)) - \mathbf{Q}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(t), \mathbf{u}_{n_1}(t))) - \mathbf{Q}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(t))) \tag{4.17}$$

4.6. Équation de conservation de la masse

L'application de la double décomposition de Galerkin non linéaire fait apparaître plusieurs termes dans cette équation. Le premier de ces termes, div $(\mathbf{u}_{n_1} h_{m_1})$ représente les interactions entre les plus grandes structures de la vitesse et les plus grandes composantes de l'élévation. Le second de ces termes, div$(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1} \tilde{h}_{m_1})$, représente le couplage entre les plus petites structures de la vitesse et les plus petites composantes de l'élévation. Les deux termes restants représentent les couplages entre les grandes et petites composantes des deux inconnues.

Il est possible d'évaluer séparément l'influence de chacun de ces termes. Nous avons ainsi mis en évidence la prédominance des termes dans lesquels apparaissent les plus grandes structures de la vitesse.

Si l'on note DH la somme des termes intervenant dans l'équation de conservation de la masse projetée sur les plus grandes composantes de l'élévation et $\widetilde{DH}$ la même somme projetée sur les plus petites composantes, nous pouvons faire l'approximation suivante :

$$DH = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(\theta)\, h_{m_1}(\theta))) + \mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(\theta)\, \tilde{h}_{m_1}(\theta)))\, d\theta \tag{4.18}$$

Nous avons introduit l'opérateur projection $\mathbf{Ph}_{m_1}$ correspondant à la projection L^2 sur les m_1 premières fonctions p_i. De la même façon, nous définissons $\mathbf{Qh}_{m_1}$ la projection sur les $m - m_1$ fonctions p_i suivantes.

Pour l'étude des variations des plus petites structures de l'évolution, il est possible de négliger la composante représentant l'influence des plus petites structures. Nous écrivons alors :

$$\widetilde{DH} = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{Qh}_{m_1}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(\theta)\, h_{m_1}(\theta)))\, d\theta \tag{4.19}$$

L'évaluation de la composante h_{m_1} est réalisée à chaque pas de temps en utilisant la formule d'intégration suivante :

$$DH = \Delta t\, \mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(t + \Delta t)\, h_{m_1}(t + \Delta t)))$$

$$+ \Delta t\, \mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j)\, \tilde{h}_{m_1}(t_j))) \tag{4.20}$$

Cette intégration est réalisée par l'intermédiaire d'une méthode implicite pour la partie de l'intégrale comprenant les termes en h_{m_1}. Le reste de l'intégrale n'est évalué que lors de la mise à jour des petites structures.

La composante $\tilde{h}_{m_1}$ est quant à elle évaluée au même pas de temps que les plus petites structures de la vitesse par l'expression :

$$\widetilde{DH} = \Delta T_b \, \mathbf{Qh}_{m_1}(\operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j)\, h_{m_1}(t_j))) \tag{4.21}$$

L'équation de conservation de la masse se résout de la façon suivante :

- Entre les instants t_j et $t_j + \Delta T_b$, les plus grandes composantes s'obtiennent par l'application de la formule :

$$\frac{\partial h_{m_1}}{\partial t} + \mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div} \mathrm{u}_{n_1}(t)\, h_{m_1}(t)) = -\,\mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div} \mathbf{u}_{n_1}(t)\, \tilde{h}_{m_1}(t)) \tag{4.22}$$

- Au temps $t_j + \Delta T_b$; les plus petites composantes s'expriment à l'aide de la formule suivante :

$$\frac{\partial \tilde{h}_{m_1}}{\partial t} + \mathbf{Qh}_{m_1}(\operatorname{div} \mathbf{u}_{n_1}(t_j)\, h_{m_1}(t_j)) = 0 \tag{4.23}$$

4.7. Détermination des fréquences de coupure n_1 et m_1

Le paramètre n_1 apparaissant dans (4.1) représente la « fréquence » de séparation entre les grandes et les petites structures. Différentes méthodes de détermination de la valeur de ce paramètre peuvent être trouvée dans la littérature :

— Comparaison entre l'énergie contenue dans les petites structures et la précision du schéma d'intégration en temps [6].

— Comparaison des rapports d'énergie cinétique entre les petites et les grandes structures [3].

— Comparaison des rapports d'enstrophie entre petites et grandes structures [17].

— Comparaison des termes non linéaires de couplage [17].

Ces différentes formulations ont été étudiées pour l'application de la méthode de Galerkin non linéaire aux équations de Navier-Stokes. Elles ne prennent pas en compte la notion d'énergie potentielle du fluide qui est importante dans le cas des équations de shallow water. Nous avons développé une nouvelle méthode de détermination de la fréquence de coupure utilisant simultanément les propriétés de la cascade d'énergie cinétique et la décroissance de l'énergie potentielle.

Le premier critère détermine n_1 à partir des rapports d'énergie cinétique entre les petites et les grandes structures de la vitesse à l'aide de l'expression suivante :

$$n_1 = \min\left\{ \tilde{n} / \forall k > \tilde{n}, \frac{Ec(\tilde{\mathbf{u}}_k)}{Ec(\mathbf{u}_k)} \leqslant \varepsilon_u \right\}. \tag{4.24}$$

Le nombre n_1 est la somme des np_1 premières fonctions de la famille $\{\operatorname{grad} p\}$ et des nq_1 premières fonctions de la famille $\{\operatorname{Rot} q\}$.

Le second critère détermine m_1 à partir des rapports d'énergie potentielle entre les petites et les grandes composantes de l'élévation, en utilisant l'expression :

$$m_1 = \min\left\{ \tilde{m} / \forall k > \tilde{m}, \frac{Ep(\tilde{h}_k)}{Ep(h_k)} \leqslant \varepsilon_h \right\}. \tag{4.25}$$

Cependant, lors de l'application de ces deux critères, il est nécessaire de conserver la condition $np_1 = m_1$ et l'on doit utiliser pour cela la valeur maximale déterminée par les deux formules.

Par contre, il n'existe pas de relation directe entre nq_1 et m_1. Il est possible de conserver la valeur de nq_1 déduite de la formule (4.24). Alors, np_1 et nq_1 représentent des fréquences de coupures qui peuvent être différentes.

Cette formulation permet de s'assurer de la prise en compte d'un nombre suffisant de fonctions pour la représentation de l'élévation Dans la suite de ce document, par soucis de simplification, nous prendrons des valeurs identiques pour ε_u et $\varepsilon_h(\varepsilon_u = \varepsilon_h = \varepsilon)$

Cette paramétrisation de la fréquence de coupure permet un ajustement dynamique du paramètre n_1 qui peut ainsi s'adapter à l'évolution de l'écoulement

Nous présentons dans la dernière partie de ce document consacrée à l'étude de quelques cas numériques une série de tests réalisés pour le « calage » du paramètre ε en fonction d'une erreur acceptable sur la solution approchée

Un second paramètre intervient dans le traitement numérique Il s'agit du nombre Ntb de pas de temps au cours desquels les termes faisant intervenir les plus petites structures vont être supposés quasi statiques Idéalement, ce paramètre devrait s'adapter à l'évolution de l'écoulement Dans la pratique, le fait de faire évoluer n_1 et m_1 permet de conserver Ntb constant au cours du temps

5. ALGORITHME DE RÉSOLUTION

Nous indiquons dans cette partie la méthodologie générale de mise en œuvre de la méthode de Galerkin non linéaire adaptée aux équations de shallow water

On suppose connue la solution approchée représentée par $\{(\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t_j), h_m(\mathbf{x}, t_j))\}$ à l'instant t_j

On fixe la valeur du paramètre ε en fonction de la qualité des résultats désirés Cette valeur permet la détermination des « fréquences de coupure » séparant les spectres d'énergie cinétique et potentielle en deux domaines

On fixe également un pas de discrétisation du temps Δt, ainsi qu'une durée d'état quasi-statique ΔT_b au cours de laquelle les plus petites composantes de l'écoulement sont gelées

On rappelle que l'on a les relations

$$m_1 = np_1 \qquad n_1 = np_1 + nq_1 \tag{5 1}$$

Où m_1 est le nombre de modes permettant de représenter les plus grandes composantes de l'élévation, n_1 le nombre de modes permettant de représenter les plus grandes structures de la vitesse, np_1 et nq_1 sont les nombres de modes respectivement en grad p et en Rot q représentant les grandes structures de la vitesse

On commence par déterminer une première valeur n_1^0 à partir de la formule suivante

$$n_1^0 = \min \left\{ \tilde{n}/\forall k > \tilde{n}, \frac{Ec(\tilde{\mathbf{u}}_k)}{Ec(\mathbf{u}_k)} \leqslant \varepsilon \right\} \tag{5 2}$$

Nous en déduisons les valeurs de np_1^0 et nq_1^0

On détermine ensuite la valeur m_1^0 à partir de la formule

$$m_1^0 = \min \left\{ \tilde{m}/\forall k > \tilde{m}, \frac{Ep(\tilde{h}_k)}{Ep(h_k)} \leqslant \varepsilon \right\} \tag{5 3}$$

Puis on pose

$$m_1 = np_1 = \sup\,(m_1^0, np_1^0)$$

et on déduit enfin

$$n_1 = np_1 + nq_1^0 .$$

Méthode d'intégration temporelle

L'intégration en temps de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est réalisée à l'aide d'une méthode de quadrature qui permet l'intégration exacte du terme de diffusion. Ainsi l'erreur obtenue lors de l'intégration en temps des plus petites structures (dont le comportement est dominé par le terme de diffusion) est fortement diminuée. L'intégrale en temps de l'équation (2.16) s'écrit :

$$X_i(t + \Delta t) = e^{-A\lambda_i \Delta t} X_i(t) + \left(\frac{1 - e^{-A\lambda_i \Delta t}}{A\lambda_i}\right) \int_t^{t+\Delta t} G_i(\theta)\, d\theta \tag{5.4}$$

La fonction G_i représente toutes les composantes autres que la diffusion. Son intégrale est réalisée à partir d'un schéma d'intégration implicite d'Euler utilisant une méthode prédiction correction.

L'équation de conservation de la masse est également intégrée en utilisant une méthode de prédiction évaluation — prédiction correction basée sur le schéma d'Euler implicite.

Entre les instants t_j et $t_j + \Delta T_b$ l'influence des plus petites composantes est considérée comme constante. Il est donc nécessaire d'évaluer au temps t_j les différentes contributions de ces petites structures et de les stocker dans des tableaux.

Ces contributions sont les suivantes :

— $\mathbf{P}_{n_1}(B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j), \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j)))$ et $\mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))$ dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement.

— $\mathbf{Ph}_{m_1}(\operatorname{div} \mathbf{u}_{n_1} h_{m_1})$ dans l'équation de conservation de la masse.

Les plus grandes structures de la vitesse sont évaluées à chaque instant à partir de l'expression suivante :

$$X_i(t + \Delta t) = e^{-A\Lambda_i \Delta t} X_i(t) + \left(\frac{1 - e^{-A\Lambda_i \Delta t}}{A\Lambda_i}\right) [TNL + FC + \Delta t\, g\nabla h_{m_1}(t + \Delta t)] \tag{5.5}$$

Où TNL représente la contribution des termes non linéaires et FC représente l'influence de la force de Coriolis. Ces deux termes incluent aussi bien les contributions des grandes que des petites composantes et ont été détaillés précédemment.

Les grandes composantes de l'élévation sont évaluées par :

$$Z_i(t + \Delta t) = Z_i(t) - DH \tag{5.6}$$

Où DH représente l'intégration du terme non linéaire de couplage entre toutes les structures de l'élévation et les grandes structures de la vitesse.

Aux instants $t_j + \Delta T_b$, les petites structures seront mises à jour, après évaluation des grandes structures, à l'aide des expressions suivantes :

$$\tilde{Z}_i(t + \Delta T_b) = Z_i(t) - \Delta T_b \operatorname{div}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j + \Delta T_b)\, h_{m_1}(t_j + \Delta T_b)) \tag{5.7}$$

$$\tilde{X}_i(t_j + \Delta T_b) = e^{-A\Lambda_i \Delta T_b} X_i(t_j + \Delta T_b) + \left(\frac{1 - e^{-A\Lambda_i \Delta t}}{A\Lambda_i}\right) [\widetilde{TNL} + \widetilde{FC} + \Delta T_b\, g\nabla\tilde{h}_{m_1}(t + \Delta T_b)] \tag{5.8}$$

Méthodologie V-cycles

Nous avons ensuite adapté à la méthode de résolution un schéma de V-cycles qui permet une transition moins brusque entre les niveaux de résolution. Au lieu de passer directement du niveau de discrétisation n au niveau n_1, nous incluons plusieurs niveaux de raffinement intermédiaires $n_i(t)$. L'application de ce schéma complique

l'algorithme de résolution en contraignant à l'utilisation de tableaux de stockage supplémentaires (la conservation de l'égalité entre np_1 et m_1 ajoute encore à cette complexité). Néanmoins, il permet une meilleure prise en compte de l'influence des petites structures et le choix d'une période quasi-statique ΔT_b plus grande.

Dans ce schéma, au lieu de geler tous les modes supérieurs à n_1 pendant le temps ΔT_b, on écrit que la durée pendant laquelle un mode est gelé est une fonction croissante de sa fréquence. La période quasi-statique d'un mode est d'autant plus longue que sa fréquence est élevée.

Nous avons la schématisation suivante (*fig.* 2).

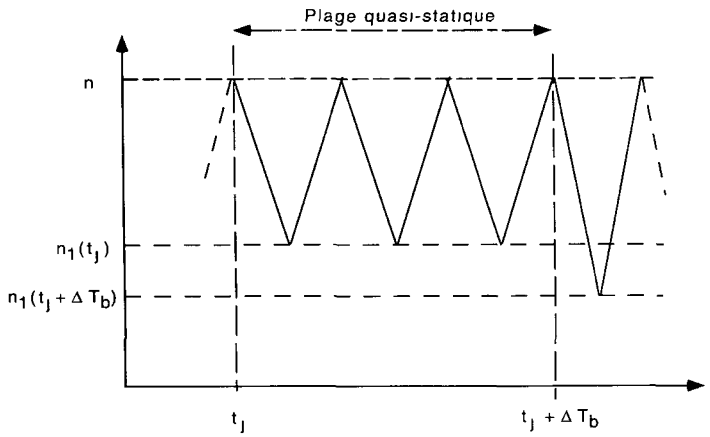

Figure 2. — Méthodologie V-Cycles.

Entre les instants t_j et $t_j + \Delta T_b$, les plus grandes structures, représentées par les modes propres d'indice inférieur à n_1, sont évaluées à partir des équations d'évolution complètes données pour les inconnues X_t (5.5) et Z_t (5.6). Les composantes de plus petites tailles sont évaluées à l'aide des équations d'évolutions simplifiées données pour $\tilde{X}_t$ (5.7) et $\tilde{Z}_t$ (5.8). Une partie de ces petites composantes, dont l'indice du mode propre est compris entre $n_1(t_j)$ et $n_t(t)$ est évaluée au temps t ; les modes ayant un indice supérieur sont gelés.

Les termes de couplage non linéaires, ainsi que la force de Coriolis engendrée par les petites structures, ayant une action sur les plus grandes composantes, sont considérés quasi-statiques durant toute la période $[t_j, t_j + \Delta T_b]$.

Il est nécessaire de déterminer une « largeur des paliers » intermédiaire et une « hauteur de palier » afin de faire coïncider un nombre entier de V-cycle à la largeur de la plage quasi-statique. Ces « largeurs » et « hauteurs » doivent être réajustées dans la plage de temps suivante ($[t_j + \Delta T_b, t_j + 2\,\Delta T_b]$).

6. APPLICATION NUMÉRIQUE

Cette dernière partie est consacrée à la mise en œuvre numérique de la méthode de Galerkin non linéaire dans le cadre de la résolution des équations de shallow water pour un problème concret [16]. L'objectif principal, dans le cas particulier de ce problème, est la détermination de la solution stationnaire des équations correspondant à un vent moyen. Cette solution est la solution asymptotique des équations de shallow water si les conditions initiales sont choisies dans le domaine d'attraction de la solution stationnaire. Nous montrons comment ces conditions initiales peuvent être obtenues à partir d'un système d'équations simplifié semblable au système d'équations de Navier-Stokes à l'origine de la méthode. Nous introduisons dans un second temps l'équation de conservation de la masse, puis nous superposons la force de Coriolis pour aboutir à la résolution du problème complet. Notons que la présence de la force de Coriolis contraint à l'utilisation d'un coefficient de dissipation A plus grand qu'en l'absence de cette force. Ce phénomène est attribué à la répartition d'énergie engendrée par cette force.

6.1. Caractéristique du calcul

Les équations que nous utilisons sont valables pour des domaines dont les dimensions peuvent s'étendre de quelques centaines de mètres jusqu'à plusieurs milliers de kilomètres. Nous avons choisi pour ces tests numériques un domaine dont l'échelle de longueur est celle de la Méditerranée occidentale (un millier de kilomètres). Pour un tel domaine, le nombre de Rossby est suffisamment faible pour assurer la prédominance de la force de Coriolis sur les termes non linéaires d'advection.

Afin de limiter les erreurs apparaissant lors des intégrations numériques, nous avons choisi un domaine de forme carrée permettant l'obtention analytique des fonctions de la base spéciale et des termes constants du système d'équations différentielles.

Le modèle utilisé est un modèle bi-couche dans lequel une couche en mouvement, de hauteur moyenne h_0 ($h_0 = 200$ mètres) glisse sur une couche au repos de profondeur infinie. Le coefficient de gravité réduite est $g = 2.10^{-2}$. Ces valeurs sont celles utilisées à l'Université de Liège dans le cadre de la résolution des équations de shallow water pour la Méditerranée occidentale [1].

Le fluide est mis en mouvement par l'action du vent. Celui-ci est représenté par une force f, constante en temps, qui a une représentation dans l'espace spectral sur un petit nombre de fonctions de la base spéciale.

Nous associons à l'écoulement un coefficient de « viscosité sous-maille » permettant une bonne représentation de l'écoulement par l'utilisation de 100 fonctions propres (cette dimension de l'espace de travail nécessite le stockage de près de deux millions de termes pour la résolution du système d'équations différentielles !).

6.2. Détermination des conditions initiales

La première étape nécessaire à la résolution des équations du problème traité est la détermination de conditions initiales suffisamment proches de la solution pour assurer la convergence vers la solution asymptotique. Cette solution initiale est obtenue en faisant l'hypothèse d'une hauteur d'eau constante (∇h nul) et d'un champ de vitesse à divergence nulle. Ces deux hypothèses nous conduisent à la résolution des équations suivantes.

$$\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \boldsymbol{\varphi}\right) + (\operatorname{rot} \mathbf{u}\alpha(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varphi}) - A(\operatorname{rot} \mathbf{u}, \operatorname{rot} \boldsymbol{\varphi}) = (f, \boldsymbol{\varphi}), \quad \forall \boldsymbol{\varphi} \in H_0(\operatorname{div} 0) . \tag{6.1}$$

Où on rappelle que $H_0(\operatorname{div} 0) = \{\boldsymbol{\varphi} \in L^2(\Omega)^2, \operatorname{div} \boldsymbol{\varphi} = 0, \boldsymbol{\varphi} \cdot n = 0 \text{ sur } \gamma\}$.

On associe à ce problème la condition initiale $\mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0$.

La base fonctionnelle sur laquelle va être recherchée la solution de ce problème est composée seulement des fonctions de la famille des Rot q_i puisque la solution est à divergence nulle. Nous avons :

$$\mathbf{u}_n = \sum_{i=1}^{nq} a_i(t) \operatorname{Rot} q_i \tag{6.2}$$

Ce premier problème nous a permis de tester la méthode et de vérifier sa bonne adaptation pour le traitement des termes non linéaires d'advection.

Nous pouvons vérifier la présence d'une cascade énergétique au sein de l'écoulement, du même type que celle décrite par Kolmogorov et Kraichnan (*fig.* 3) et qui apporte une justification à l'utilisation de la méthode de Galerkin non linéaire.

La détermination de la fréquence de coupure $n1$ ne fait intervenir ici que le rapport d'énergie cinétique entre les petites et les grandes structures, l'élévation, donc l'énergie potentielle, est supposée constante.

Nous avons représenté sur la figure (4) l'évolution de ce paramètre n_1 défini par la relation (4.24), pour différentes valeurs de ε (10^{-5}, 10^{-4} et 10^{-3}, de haut en bas). Ce paramètre évolue fortement dans les premiers instants puis tend à se stabiliser à l'approche de la solution asymptotique.

L'étude de l'évolution de ce paramètre nous permet d'obtenir une estimation du gain de temps qu'il est possible d'espérer par l'utilisation de la méthode de Galerkin non linéaire. Les termes les plus coûteux sont les termes non

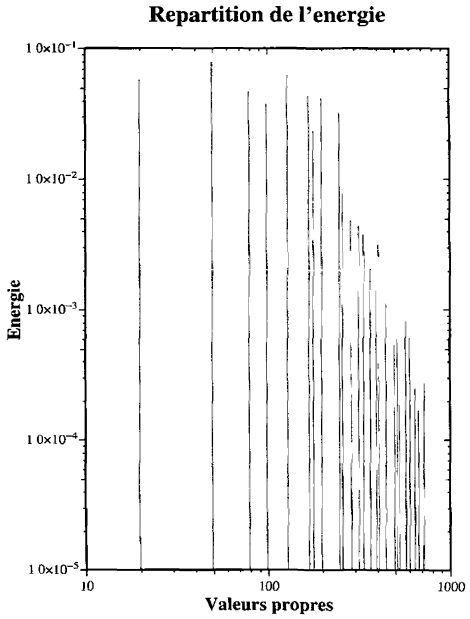

Figure 3. — Présence de la cascade énergétique.

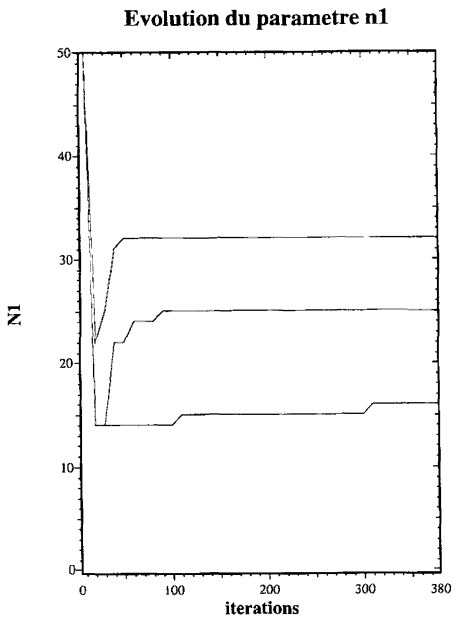

Figure 4. — Évolution du paramètre. n_1 pour diverses valeurs de ε.

linéaires ; leur coût peut s'exprimer en fonction du cube du nombre de mode. Une diminution de 10 % de cette quantité permet un gain de près de 27 % sur le temps de calcul. Dans le cas présent, du fait de la présence d'un coefficient de diffusion élevé, les gains de temps sont très importants [2].

Si l'on applique au champ de vitesse la décomposition de Galerkin non linéaire détaillée en (4.1), il devient possible de représenter l'influence relative de chacune des composantes apparaissant dans les termes non linéaires (4.6).

La figure (5) représente l'évolution de la norme L^2 de chacune des composantes non linéaires intervenant dans l'évolution des plus grandes structures (pour $\varepsilon = 10^{-4}$). On constate clairement que les interactions entre les plus petites structures ont une influence négligeable dans cette évolution. Par contre, l'expérience montre que les interactions entre les grandes et les petites structures, bien qu'elles puissent sembler négligeables en première approche, doivent être conservées. Elles traduisent l'influence que doivent nécessairement avoir les fréquences les plus élevées sur les plus basses.

La figure (6) représente l'influence des composantes non linéaires sur les plus petites structures. Ici encore, ce sont les interactions entre les plus grandes structures qui dominent. Les autres composantes ont une contribution négligeable et l'on peut considérer que les hautes fréquences ne sont que les « rejetons » des basses fréquences (elles ne perçoivent pas directement l'excitation extérieure).

Nous utilisons les résultats classiques de l'application de la méthode de Galerkin non linéaire sur les termes d'advection et retenons les méthodes d'intégrations suivantes :

- A chaque itération, les plus grandes structures sont mises à jour en utilisant :

$$TNL = \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(t+\Delta t), \mathbf{u}_{n_1}(t+\Delta t))) + \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(B_{int}(\mathbf{u}_{n_1}(t_j), \tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))) \tag{6.3}$$

(2) Il convient de modérer cette estimation en ajoutant les coûts de la mise à jour des plus petites structures qui s'expriment en fonction du carré du nombre de mode, ainsi des termes non linéaires contenant ces dernières.

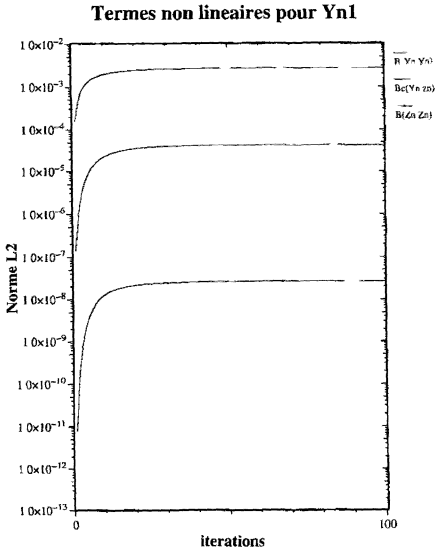

Figure 5. — Influence de la composante non linéaire sur les plus grandes structures.

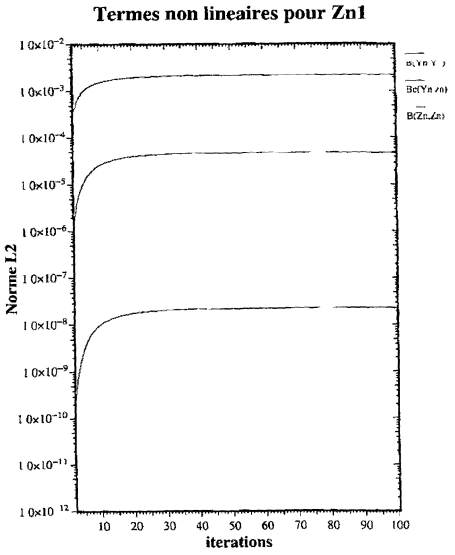

Figure 6. — Influence de la composante non linéaire sur les plus petites structures.

- Tous les *Ntb* itérations, les plus petites structures sont mises à jour à l'aide de l'équation simplifiée :

$$\widetilde{TLN} = \Delta T_b \, \mathbf{Q}_{n_1}(B(\mathbf{u}_{n_1}(t_j), \mathbf{u}_{n_1}(t_j))) \tag{6.4}$$

Aux mêmes itérations, nous évaluons l'influence des termes non linéaires de couplage dans l'évolution des plus grandes structures, qui sont eux aussi supposés quasi-statique.

Nous présentons dans le tableau suivant les résultats numériques d'une série de tests permettant de caler le paramètre ε utilisé pour la séparation des échelles.

	ε	Ec(**u**) ($\times 10^9$)	n_1 moyen
Galerkin usuelle	—	1,67195	50
Galerkin non linéaire	10^{-5}	1,67196	32
	10^{-4}	1,67205	25
	10^{-3}	1,67204	17

Nous constatons que le paramètre n_1 peut être choisi relativement grand sans avoir une perte importante de précision sur l'énergie cinétique. En fait, comme nous l'avons déjà rappelé, le coefficient de diffusion est élevé par rapport à l'échelle des structures que l'on souhaite observer et nous n'entendons pas nécessairement modéliser un phénomène turbulent. L'apport de la méthode de Galerkin non linéaire n'en reste pas moins intéressant et la résolution de ce problème présente un premier pas vers l'application de la décomposition multi-niveaux aux équations de shallow water.

6.3. Introduction du gradient de l'élévation

Dans cette seconde étape, nous allons étudier les avantages offerts par la méthode de Galerkin non linéaire lors de la résolution de l'équation de conservation de la masse. Pour cela, nous reprenons les équations de shallow water dans lesquelles nous allons négliger la composante représentant la force de Coriolis.

Nous sommes amenés à résoudre le problème suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \,.\, \nabla)\, \mathbf{u} - A\, \Delta \mathbf{u} + g\, \nabla h = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u} h) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u} \,.\, \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \gamma \\ \mathbf{u}(t = 0) = \mathbf{u}_0 \end{cases}$$

La résolution de ce problème conduit à l'obtention d'une cascade énergétique légèrement différente de la précédente (*fig.* 7). Cette différence provient de la prise en compte des modes propres du type grad p_i (qui représentent des puits et des sources) qui viennent se superposer aux modes propres du type Rot q_i (qui représentent des tourbillons).

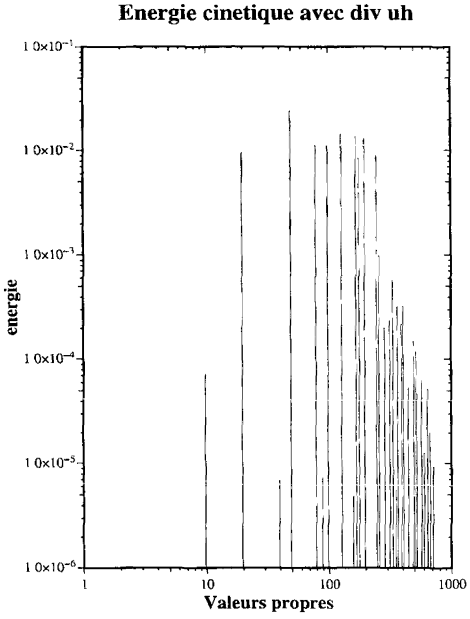

Figure 7. — Répartition de l'énergie cinétique.

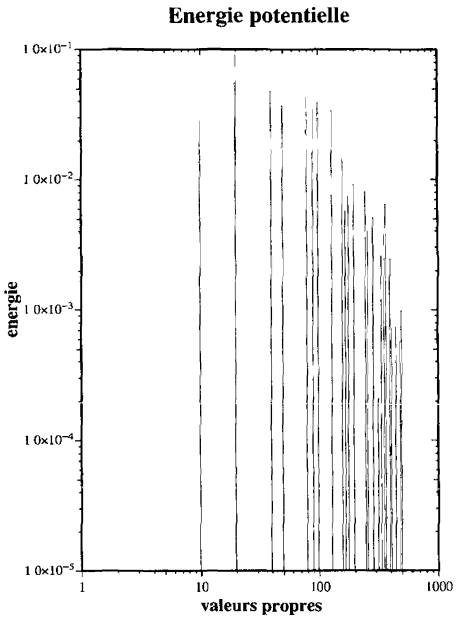

Figure 8. — Répartition de l'énergie potentielle.

Il est aussi possible de représenter le spectre d'énergie potentielle (*fig.* 8). Nous pouvons y observer la présence d'une décroissance rapide de l'énergie sans pour autant parler de cascade d'énergie potentielle.

Nous avons appliqué la décomposition de Galerkin non linéaires aux deux inconnues présentes dans ce système. Le calcul est effectué en utilisant les résultats de la première série d'expérience comme conditions initiales.

Nous avons représenté sur les figures (9) et (10) l'action respective des différents termes intervenant dans l'évolution des grandes et des petites composantes de l'élévation.

Dans les deux cas, le terme faisant intervenir les plus petites structures de la vitesse est faible devant celui contenant les plus grandes structures. La composante $\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}$ n'a ici qu'un rôle négligeable dans l'équation de conservation de la masse.

De plus, il est possible de vérifier la faible influence des plus petites composantes de l'élévation dans leur propre évolution. Ces composantes ne sont pratiquement fonctions que des couplages entre les grandes structures de la vitesse et les grandes structures de l'élévation.

Ces constatations ont abouti à l'élaboration d'une méthodologie de résolution utilisant les formulations suivantes pour le calcul de l'élévation.

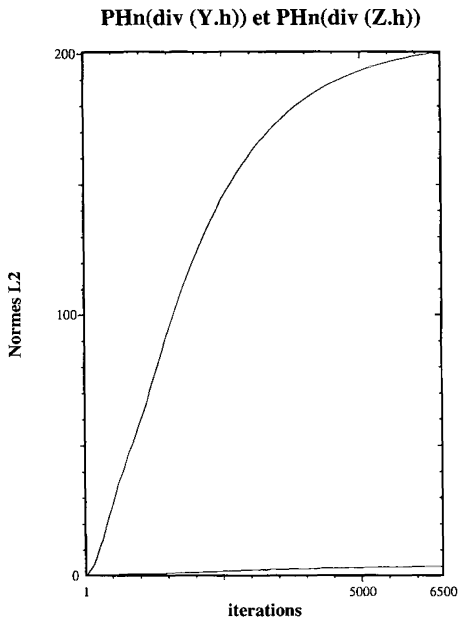

Figure 9. — Action sur les grandes composantes de l'élévation.

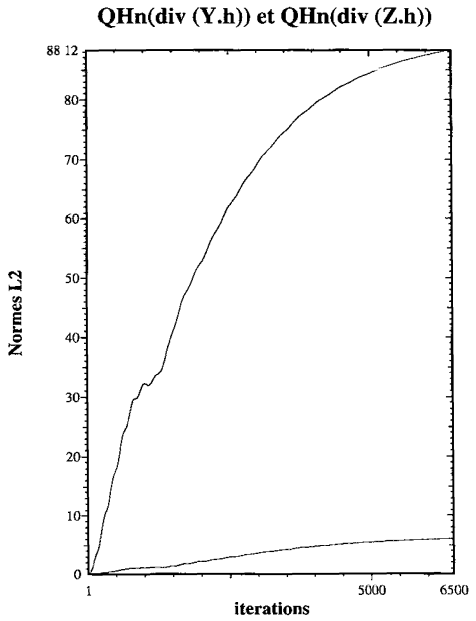

Figure 10. — Action sur les petites composantes de l'élévation.

— A chaque itération, les plus grandes composantes de l'élévation sont estimées en utilisant uniquement les termes div $(\mathbf{u}_{n_1} h_m)$. Les plus petites composantes sont supposées quasi-statiques.

$$DH = \Delta t\, \mathbf{Ph}_{m_1}(\text{div}\ (\mathbf{u}_{m_1}(t+\Delta t)\, h_{m_1}(t+\Delta t))) \tag{6.5}$$

$$+\ \Delta t\, \mathbf{Ph}_{m_1}(\text{div}\ (\mathbf{u}_{n_1}(t_j)\, \tilde{h}_{m_1}(t_j)))$$

— A chaque mise à jour des petites structures de la vitesse, les plus petites composantes de l'élévation sont mises à jour en utilisant l'expression suivante :

$$\widetilde{DH} = \Delta T_b\, \mathbf{Qh}_{m_1}(\text{div}\ (\mathbf{u}_{n_1}(t_j)\, h_{m_1}(t_j))) \tag{6.6}$$

La résolution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement est réalisée en utilisant les mêmes simplifications que lors de la détermination des conditions initiales, avec de plus la prise en compte du gradient de l'élévation.

Nous avons récapitulé dans le tableau ci-dessous les résultats numériques obtenus lors de l'utilisation du nouveau schéma. Dans un premier temps, nous avons utilisé la définition de n_1 n'utilisant pas le rapport d'énergie potentielle.

	ε	Ec(**u**) ($\times 10^9$)	n_1 moyen	Ep ($\times 10^{10}$)
Galerkin usuelle	—	1,67227	100	2,38586
Galerkin non linéaire	10^{-5}	1,67230	82	2,38587
	10^{-4}	1,67281	75	2,47158
	10^{-3}	1,67457	63	2,82123

Ce tableau laisse apparaître une importante modification de l'énergie potentielle associée à l'écoulement, qui semble beaucoup plus sensible que l'énergie cinétique à une troncature trop sévère de la base.

Nous avons tracé sur la figure (11) le spectre d'énergie potentielle obtenu lors de la simulation avec une valeur de $\varepsilon = 10^{-3}$. Nous pouvons y constater une accumulation d'énergie potentielle dans les plus petites structures. Cette accumulation est attribuée à une coupure trop sévère dans les modes propres représentant l'élévation.

Cette constatation nous a conduit à introduire une nouvelle formulation de la fréquence de coupure permettant la prise en compte d'une décroissance dans le spectre d'énergie potentielle. Le critère (4.25) est plus sévère pour la détermination de m_1, donc de np_1 qui lui est lié. Il impose un réajustement de la valeur de np_1, mais pas nécessairement de la valeur de nq_1.

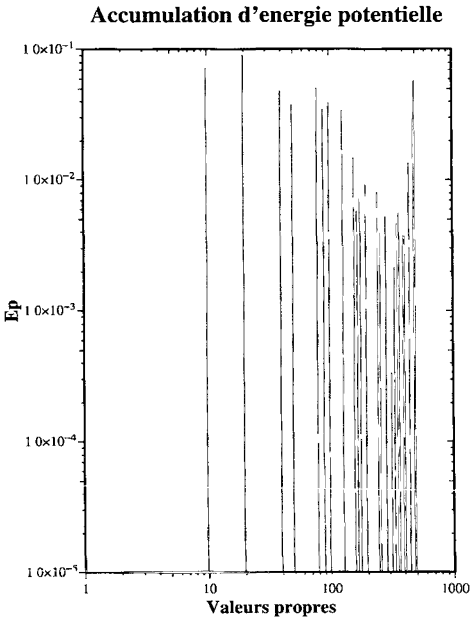

Figure 11. — Mise en évidence de l'accumulation d'énergie potentielle.

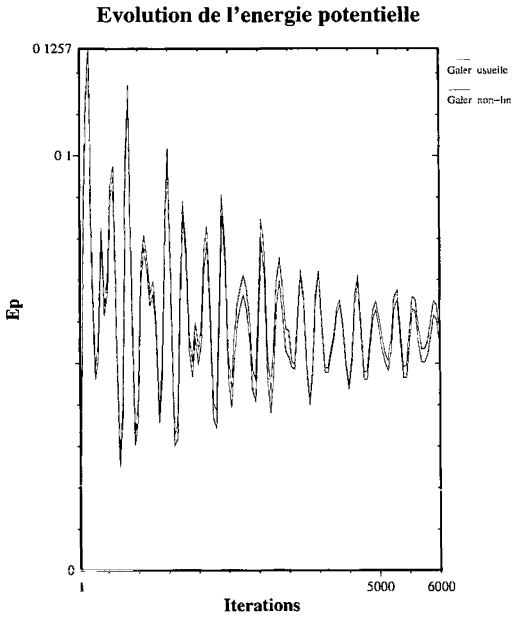

Figure 12. — Comparaison des évolutions de l'énergie potentielle.

Les tests réalisés en utilisant ce nouveau critère ont montré une meilleure représentation de l'élévation de la hauteur d'eau. Cette amélioration s'effectue au prix d'une augmentation des coûts de calcul, mais celle-ci reste limitée du fait de la séparation des deux familles de fonctions. Nous indiquons sur le tableau suivant les résultats pour diverses valeurs du paramètre ε.

	ε	Ec(**u**) ($\times 10^9$)	n_1 moyen	Ep ($\times 10^{10}$)
Galerkin usuelle	—	1,67227	100	2,38586
Galerkin non linéaire	10^{-5}	1,67230	85	2,38587
	10^{-4}	1,67245	80	2,38593
	10^{-3}	1,67280	74	2,38612

Nous pouvons voir sur la figure (12) le suivi de l'évolution de l'énergie potentielle lors de l'utilisation simultanée des deux fréquences de coupures. L'évaluation de m_1 à partir de l'énergie potentielle permet une meilleure représentation de l'élévation qui évite les phénomènes d'accumulation dans les modes les plus élevés du spectre.

6.4. Modèle avec force de Coriolis

Il est évident que les termes non linéaires d'advection sont à l'origine d'un brassage énergétique entre les modes propres du fluide. Nous avons vu, dans la première série d'expériences numériques, consacrée à l'évaluation des conditions initiales, que ces termes répartissent l'énergie fournie par la force extérieure, sur une large plage spectrale. Il se produit un phénomène identique lors de l'application de la force de Coriolis.

Le nombre de Rossby, qui indique le rapport d'influence entre les termes non linéaires et la force de Coriolis, est faible dans le cas test que nous analysons. Les échanges énergétiques engendrés par la force de Coriolis sont beaucoup plus importants que le brassage généré par les termes non linéaires.

Afin de bien mettre en évidence ce phénomène, nous négligeons l'influence des termes non linéaires dans l'équation d'évolution de la quantité de mouvement. Nous identifions aussi la force extérieure à un seul mode propre du fluide, de la famille des grad p[3]. Le système d'équation devient :

$$\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \omega\alpha(\mathbf{u}) - A\,\Delta\mathbf{u} + g\,\nabla h = f & \text{sur } \Omega \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}h) = 0 & \text{sur } \Omega \\ \mathbf{u}\,.\,\mathbf{n} = \operatorname{rot}\mathbf{u} = 0 & \text{sur } \gamma \\ \mathbf{u}(t=0) = \mathbf{u}_0 & \end{array}\right.$$

Le fait d'identifier f à un mode propre permet, grâce aux propriétés d'orthogonalité de la base, de n'introduire qu'un seul second membre non nul dans le système d'équations différentielles.

Nous avons représenté sur la figure (13) la répartition de l'énergie cinétique à l'approche de la solution asymptotique. L'excitation d'un seul mode propre engendre une répartition de l'énergie cinétique sur une large plage spectrale.

Une analyse plus détaillée de la solution asymptotique montre la prédominance des modes de la famille des Rot q. Or, ces fonctions ne peuvent être directement influencées par le gradient de l'élévation. La seule origine possible à leur énergie est la présence de la force de Coriolis.

Nous avons représenté sur la figure (14) la répartition de l'énergie potentielle dans les mêmes conditions d'expérience. Nous y constatons également un étalement sur une large plage spectrale qui est une conséquence indirecte de l'action de la force de Coriolis.

Nous allons étudier l'influence de la décomposition de Galerkin non linéaire sur les écoulements influencés par la force de Coriolis. Cette force se décompose en une première partie engendrée par les plus grandes structures de la vitesse et une seconde engendrée par les plus petites structures. La force de Coriolis est normale et proportionnelle à la vitesse du fluide. Elle est caractérisée, comme la vitesse, par la présence d'une cascade énergétique. Nous avons utilisé cette propriété pour définir une méthodologie de résolution optimisée.

Nous avons représenté sur la figure (15) l'évolution des différentes composantes de la force de Coriolis intervenant sur l'écoulement. Les deux courbes supérieures correspondent à l'action de la force engendrée par les plus grandes structures, respectivement sur les grandes et les petites structures.

---

(3) Un résultat similaire peut être montré en utilisant un mode propre de la famille des Rot q

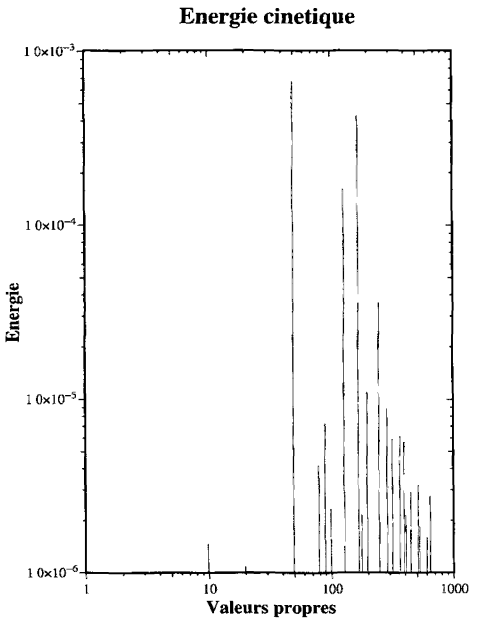

Figure 13. — Effet distributeur de la force de Coriolis sur l'énergie cinétique.

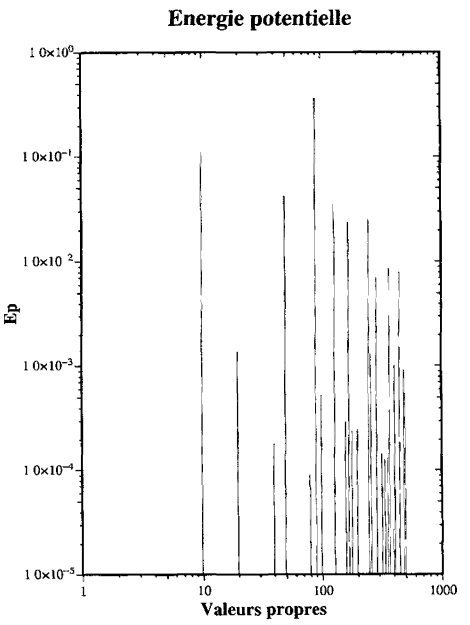

Figure 14. — Distribution de l'énergie potentielle.

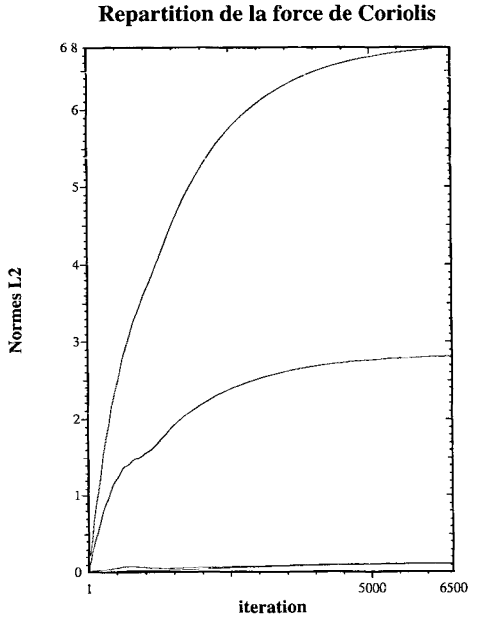

Figure 15. — Composantes de la force de Coriolis.

Mais, de la même façon qu'il était nécessaire de conserver l'action des termes de couplage non linéaires sur les grandes structures, nous constatons la nécessité de conserver l'influence de la force de Coriolis engendrée par les plus petites structures dans l'évolution des plus grandes. Cette influence permet le retour de l'information vers les plus grandes structures que l'on souhaite représenter avec le maximum de précision.

A cette fin, nous retenons la formulation suivante :

— A chaque itération, nous utilisons la formule suivante pour estimer l'évolution des plus grandes structures :

$$FC = \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(t+\Delta t))) + \Delta t\, \mathbf{P}_{n_1}(\omega\alpha(\tilde{\mathbf{u}}_{n_1}(t_j))) \tag{6.7}$$

— Toute les Ntb itérations, les plus petites structures sont mise à jour à l'aide de la formule suivante :

$$\widetilde{FC} = \Delta T_b\, \mathbf{Q}_{n_1}(\omega\alpha(\mathbf{u}_{n_1}(t_j))) \tag{6.8}$$

Nous conservons pour les autres termes les schémas d'intégration décrits précédemment.

L'action de la force de Coriolis a aussi pour conséquence une répartition de l'énergie sur une plage spectrale plus large et justifie l'utilisation d'un coefficient de viscosité A élevé.

Nous indiquons dans le tableau suivant les résultats de l'application de la méthode de Galerkin non linéaire pour la résolution des équations de shallow water complètes (incluant la force de Coriolis, le gradient de l'élévation et les termes non linéaires).

	ε	Ec($\mathbf{u}$) ($\times 10^9$)	n_1 moyen	Ep ($\times 10^{10}$)
Galerkin usuelle	—	0,91045	100	2,32733
Galerkin non linéaire	10^{-5}	0,91045	88	2,32785
	10^{-4}	0,91053	81	2,32813
	10^{-3}	0,91079	76	2,32852

Nous avons représenté sur la figure (16) la solution asymptotique pour la vitesse lors de la résolution en prenant en compte la totalité des structures. La plus grande partie de l'énergie du champ de vitesse est concentrée dans les grandes structures. Les plus petites composantes, dont la contribution est représentée sur la figure (17), ne représentent qu'une contribution négligeable à la vitesse (le rapport des deux contributions est de ε).

Solution asymptotique de la vitesse

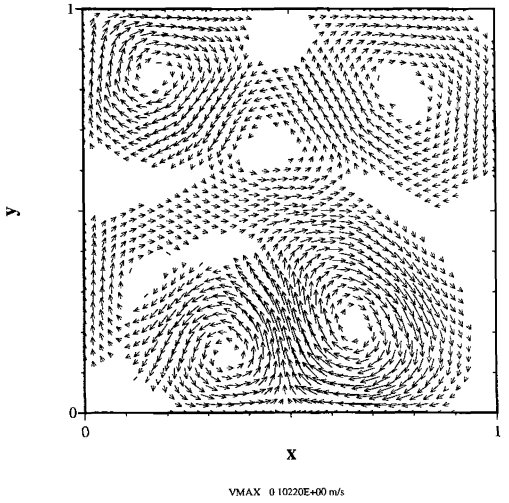

Figure 16. — Vitesse.

Contribution des petites composantes

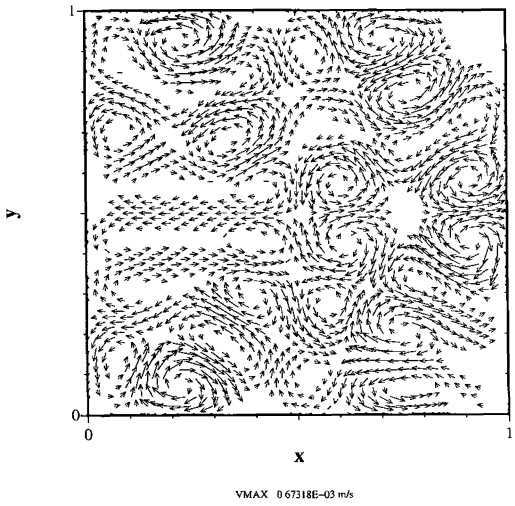

Figure 17. — Petites composantes.

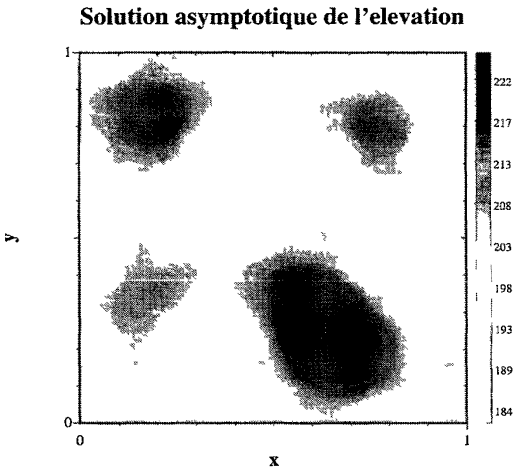

Figure 18. — Élévation.

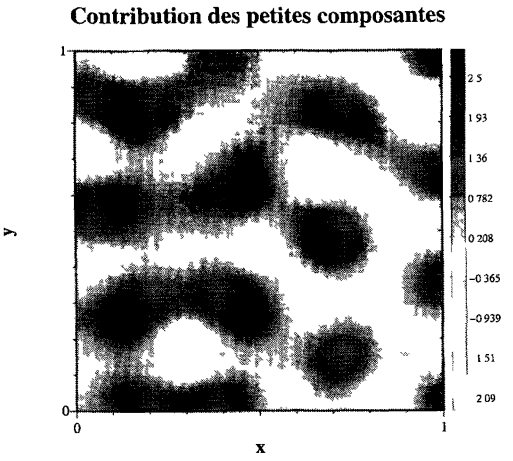

Figure 19. — Petites composantes.

Par contre, ces composantes influencent la phase transitoire de l'écoulement, en particulier par l'intermédiaire du terme de Coriolis, en se comportant comme une force extérieure supplémentaire agissant sur les grandes structures.

Nous avons représenté sur la figure ci-dessus (18) l'élévation de la couche de fluide à la solution asymptotique. Ici encore, la plus grande partie de l'énergie potentielle est concentrée dans les plus grandes composantes, les autres composantes ayant une influence moindre (*fig.* 19). Ces petites composantes de l'élévation sont générées par les couplages entre les grandes structures de la vitesse et les grandes composantes de l'élévation. Elles ont une influence lors de la phase transitoire.

Notons pour finir que la forme particulière de notre domaine permet une bonne représentation de l'écoulement à l'aide d'un nombre relativement faible de fonction de base. Dans le cas de domaine de forme plus « compliquée », les modes propres ont un comportement plus localisé et l'écoulement présente des structures de forme plus diverses. La résolution par Galerkin nécessite un plus grand nombre de fonction de base.

7. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Nous avons présenté les premiers résultats de l'application de la méthode de Galerkin non linéaire au traitement des équations de shallow water en formulation hauteur-vitesse. Cette méthode de résolution procure un gain de temps appréciable (par rapport à la méthode de Galerkin usuelle) qui a deux origines :

— La première de ces origines et la prise en compte d'une hypothèse quasi-statique pour les évolutions des plus petites composantes de la vitesse et de l'élévation. Ces composantes, bien qu'elles aient des temps de réponse plus courts que les grandes composantes, ont une amplitude de variation très faible. Leur influence sur le comportement global du système peut être considérée comme stationnaire durant un certain laps de temps.

— La seconde origine du gain de temps provient d'une simplification des équations d'évolution des plus petites composantes. Les résultats numériques des différentes simulations montrent en effet que la perte de précision engendrée par ces simplifications est très faible et que les petites composantes peuvent être observées comme étant directement et uniquement produites par les plus grandes composantes du système.

On étudie actuellement une adaptation de la méthode de Galerkin non linéaire pour la résolution d'un modèle hydrodynamique tridimensionnel dans lequel les couplages entre les différents modes horizontaux ont pour origine principale la force de Coriolis et les couplages entre les modes verticaux sont principalement générés par la présence du gradient de pression.

RÉFÉRENCES

[1] J. M. BECKERS, *Modélisation mathématique et numérique de la Méditerranée occidentale.* Mémoire d'ingénieur civil, ULG, 1988.

[2] A. DEBUSSCHE, T. DUBOIS and R. TEMAM. The nonlinear Galerkin method : A multiscale method applied to the simulation of homogeneous turbulent flow.

[3] T. DUBOIS, *Simulation numérique d'écoulements homogènes et non homogènes par des méthodes multi-résolution.* Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, janv. 1993.

[4] A. E. GILL. *Atmosphere - Ocean Dynamics,* volume 30 of *International geophysics series.* Academic press, 1982.

[5] A. HERTZOG and P. ORENGA, Existence et unicité d'un problème de mécanique des fluides intervenant en océanographie physique. *CRAS,* 313 :887-892, 1991.

[6] F. JAUBERTEAU, *Résolution numérique des équations de Navier-Stokes instationnaires par méthodes spectrales - Méthode de Galerkin non linéaire.* Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, déc. 1990.

[7] A. N. KOLMOGOROV, On degeneration of isotropic turbulence in incompressible viscous liquid. *Dolk. Akad. Nauk. SSSR,* 31 : 538-541, 1941.

[8] P. K. KUNDU, *Fluid Mechanics.* Academic press, inc, 1990.

[9] M. LESIEUR, *Turbulence in Fluids.* Fluid Mechanics and its Applications. Kluwer Academic publishers, second edition, 1990.

[10] M. MARION and R. TEMAM. Nonlinear Galerkin methods. *SIAM J. Numer. Anal.,* 26(5) : 1139-1157, oct. 1989.

[11] J. C. J. NIHOUL, *Modelling of Marine Systems.* Elsevier oceanography series. Elsevier Scientific Publishing Compagny, 1975.

[12] J. C. J. NIHOUL, *Modèles mathématiques et Dynamique de l'environnement.* Elsevier Publ., 1977.

[13] P. ORENGA, *Analyse de quelques problèmes d'océanographie physique.* Thèse d'habilitation, Université de Corse, Corte, 1992.

[14] P. ORENGA, Construction d'une base spéciale pour la résolution de quelques problèmes d'océanographie physique en dimension deux. *CRAS,* 314 : 587-590, 1992.

[15] P. ORENGA, Un théorème d'existence de solutions d'un problème de shallow water. *Arch. Rational Mach. Anal.,* 130 : 183-204, 1995.

[16] P. ORENGA and P. BISGAMBIGLIA, Résolution numérique d'un problème d'océanographie physique par la méthode de galerkin. *CRAS,* 313 : 627-630, 1991.

[17] F. PASCAL, *Méthode de Galerkin non linéaire en discrétisation par éléments finis et pseudo-spectrale. Application à la mécanique des fluides.* Thèse de Doctorat, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, janv. 1992.