



HAL
open science

La suite de Syracuse, un monde de conjectures

Luc-Olivier Pochon, Alain Favre

► **To cite this version:**

Luc-Olivier Pochon, Alain Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. 2020. hal-01593181v2

HAL Id: hal-01593181

<https://hal.science/hal-01593181v2>

Preprint submitted on 19 Oct 2020 (v2), last revised 22 Apr 2021 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La suite de Syracuse, un monde de conjectures*

Luc-Olivier Pochon[†] Alain Favre[‡]

version octobre 2020

Résumé : *Quel est l'état des travaux concernant la suite de Syracuse ? C'est la question que nous nous sommes posée à propos de ce problème qui constituait une curiosité à l'époque de nos études de mathématiques. A notre grand étonnement, durant quelques dizaines d'années, des travaux de tous niveaux avaient été régulièrement publiés et des conjectures, plus ou moins apparentées, avaient proliféré.*

Cet article résume une partie de ces conjectures. Il relève aussi les démonstrations et les approches plus ou moins naïves que le problème a suscitées.

Mots-clés : *suite de Syracuse, généralisation du problème $3x+1$, analyse d'erreurs*

La suite de Collatz et la conjecture principale

Position du problème

On considère la suite de nombres construite à partir d'une origine $m \in \mathbb{N}$ par application répétée de la fonction :

$$C(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ 3m + 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La conjecture principale (conjecture de Collatz) dit que pour toute valeur initiale m il existe n tel que $C^{(n)}(m) = 1$ (l'application répétée n fois de C aboutit à 1).

Les fonctions T et N sont aussi souvent utilisées pour construire des sous-suites de la suite originale. T est donnée par :

$$T(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (3m + 1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quant à N , elle n'est définie que pour les nombres impairs. Elle est donnée par la formule :

$$N(m) = \frac{3m + 1}{2^p}$$

*Cet article reprend la version de 2017 (hal-01593181) revue et corrigée avec un complément rassemblant de nouvelles références.

[†]luc.pochon@gmail.com

[‡]alainfa@bluewin.ch

où p est tel que $N(m)$ soit impair. Avec $\nu(n)$ valant la puissance de 2 dans la décomposition de n en facteur premier, on a $\nu(3m+1) = p$. On note $[n]$ le nombre impair déduit à partir de n par division par une puissance de 2 judicieuse.

Avec ces notations : $N(m) = [3m+1]$ et $3m+1 = [3m+1] \times 2^{\nu(3m+1)}$.

Par la suite on désignera par « suite de Collatz » chacune des trois suites obtenues par ces formules de récurrence en précisant C , T ou N lorsque cela s'avère nécessaire (par exemple : N -suite de Collatz).

Exemples

Suite C d'origine 7 : (7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1)

Suite T d'origine 7 : (7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1)

Suite N d'origine 7 : (7, 11, 17, 13, 5, 1)

La trajectoire (infinie) liée à une application A d'origine m est notée $\tau_A(m)$. Avec cette notation : $\tau_N(7) = (7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, 1, \dots)$.

On note de façon triviale que les trajectoires ne comportent, à l'exception éventuelle des premiers termes (du premier terme pour N), aucun multiple de 3.

Généralisations

La fonction T_d avec $d \geq 1$ premier avec 6 a été proposée par Lagarias (1990, [1], [2]) :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (3m+d)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Crandall (1978, [3]) généralise la fonction¹ N par $N_{q,r}$ définie et à valeurs dans $2\mathbb{N}+1$ par :

$$N_{q,r}(m) = \frac{qm+r}{2^{\nu(qm+r)}}$$

Au lieu de se restreindre aux ensembles \mathbb{N} ou $2\mathbb{N}+1$, certaines de ces fonctions sont étendues aux ensembles \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{Z}_2 (entiers 2-adiques), voire \mathbb{R} ou \mathbb{Q}_p (nombres p -adiques).

But et plan de l'article

Nous avons croisé la suite de Syracuse lors de nos études de mathématiques. Arrivés à la retraite, nous avons eu la curiosité d'examiner l'état des lieux. Pour nous rafraîchir la mémoire, nous avons tout d'abord effectué quelques calculs sans aucune prétention. En effet, nous savons que la question est difficile dans la mesure où elle a été examinée sous toutes les coutures par de bons mathématiciens. Puis nous avons rassemblé de la

1. Petite anecdote : Sans encore connaître le travail de Crandall, au début de notre « quête », nous avons tout de suite repéré l'intérêt de cette fonction que nous avons appelée N du fait que nous avons l'habitude de travailler à La Neuveville, domicile de l'un des auteurs, ou à Neuchâtel !

bibliographie sur le sujet (avec Internet, les recherches bibliographiques, pour le moins superficielles, sont vite menées).

A notre grand étonnement, nous avons constaté que le problème était le sujet de nombreux travaux de tous niveaux et que des conjectures plus ou moins apparentées avaient fleuri durant plusieurs dizaines d'années.

Si le but premier de cet article était donc de résumer une partie de ces conjectures, d'où son titre, nous avons été entraînés à élargir notre examen aux travaux menés par des amateurs, plus ou moins éclairés, parfois mathématiciens, parfois non, qui se sont intéressés au problème. On peut faire un parallèle entre certains de ces travaux et ceux concernant la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle. Ils donnent une idée des représentations de la recherche en mathématiques dans un public élargi. Celles-ci peuvent renvoyer à des conceptions naïves « honnêtes » ou à des positions plus déconnectées de l'habitus mathématique, voire relever de « pseudo-mathématiques »².

Pour sélectionner les articles nous avons tout d'abord repris quelques classiques parus jusqu'au milieu des années quatre-vingt-dix, notamment les bibliographies de J. Lagarias. Puis nous nous sommes fiés aux moteurs de recherche pour recueillir la littérature grise parue dès le tournant du siècle, logée généralement dans les archives ouvertes arXiv et Hal, mais parfois directement sur les sites d'universités ou personnels des auteurs.

Nous avons également pris en compte les informations diffusées sur des forums « grand public » attirés que nous étions par l'étrangeté du discours mathématique traité à la mode « réseau social » (cet aspect mériterait une étude spécifique).

Finalement, avec les mot-clés "Syracuse" et "Collatz" nous nous sommes inscrits à Google Scholar. De façon inattendue, nous recevons régulièrement de nouvelles références.

Après quelques généralités, dont un brin d'histoire qui se contente principalement de donner des références de documents facilement disponibles, quelques approches simples, celles qui nous sont venues à l'esprit, sont présentées.

Puis une brève section, « Le suivi de Lagarias », propose une classification des approches du problème. La section suivante, « Quelques résultats marquants », expose quelques-unes des approches les plus souvent rencontrées; un résumé des conjectures en fournit ensuite une vision synthétique.

Avant la conclusion, la section « Le monde de Syracuse » passe en revue et classe l'ensemble des productions recueillies concernant le problème de Syracuse. Ce recueil fait l'objet d'un complément.

Généralités

Un brin d'histoire

L'histoire du problème de Syracuse (sous diverses appellations : conjecture de Collatz, problème $3x+1$, etc.) fait l'objet de nombreuses présentations (Lagarias, 1985 [4], 2010b [5]; Delahaye, 1998 [6]; Wirsching, 1998, [7], wikipédia³). Nous en résumons l'essentiel.

2. <http://en.wikipedia.org/wiki/Pseudomathematics>

3. https://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse

L'origine du problème généralement associé à Collatz est assez confuse. Comme sa transmission doit beaucoup à la tradition orale, il est difficile de bien suivre sa trace. Dans les années 1930, Lothar Collatz, alors étudiant, s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers qu'il représentait au moyen de graphes et d'hypergraphes. C'est alors qu'il serait « tombé » sur la suite qu'il présenta ensuite à des collègues. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse qui le diffusa en Amérique à l'université de Syracuse (d'où le nom de « suite de Syracuse »). Entre temps, le mathématicien polonais Stanislas Ulam le répandait dans le Laboratoire national de Los Alamos. Dans les années 1960, le problème est repris par le mathématicien Shizuo Kakutani qui le diffuse dans l'université Yale et dans celle de Chicago.

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

La conjecture est aussi associée à un prix Erdős qui prime sa solution à 500 dollars⁴.

L'avis des experts et l'acharnement des amateurs

La conjecture de Syracuse constitue un des énoncés mathématiques les plus simples à formuler. On la trouve mentionnée dans des ouvrages de l'école obligatoire (Jaquet & Calame, 1991, [9]; Pochon, 1993, [10]). C'est aussi un excellent sujet de travail de diplôme de niveau intermédiaire (par exemple celui de Nils Svensson, [11]) tant le nombre de pistes qu'il permet d'explorer est vaste.

Et pourtant, des mathématiciens chevronnés doutent de la simplicité du problème. Erdős estimait que « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes » (cité par Lagarias, 1985, [4])⁵. Dans son blog ([12]) Terence Tao (médaille Fields 2006) qualifie l'opiniâtreté actuelle de certains à la démontrer de *mathematical disease* (expression reprise de Richard Lipton, prix Knuth 2014). Il rappelle quelques questions ouvertes qui sont équivalentes à la conjecture de Collatz. Par ailleurs Guy (2010, [13]) cite cette conjecture dans la liste des problèmes à ne pas tenter de résoudre (bien que certains aient été résolus!).

Malgré tout, ces dernières années, de nombreux mathématiciens chevronnés ont attaqué le problème dans leur domaine de spécialité.

Par ailleurs, de nombreux amateurs, plus ou moins talentueux, s'acharnent sur ce problème à l'image du titre d'un article de Delahaye (2012, [14]) : *J'aimerais tant prouver Syracuse*, publié sous d'autres titres à plusieurs reprises (Delahaye, 1998, [6]; 2007, [15]).

Il est amusant de relever que l'on trouvait au même moment sur Internet une démonstration sophistiquée de la conjecture et une « démonstration » du fait qu'elle était non démontrable.

4. Mais un problème plus fondamental (qui vaut actuellement 5000 dollars) est sans doute la conjecture d'Erdős sur les progressions arithmétiques : « Si la série des inverses d'une séquence de nombres entiers diverge, alors la séquence contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire ». Si cette assertion est vraie, elle résout plusieurs problèmes ouverts en théorie des nombres. Mais une de ses conséquences : la suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitrairement longues, a été démontrée de façon indépendante en 2004 par Green & Tao (2008, [8]).

5. Voir l'annexe 1 pour le contexte dans lequel Erdős émet cette opinion.

Le premier de ces deux articles (Opfer, 2011, [16]) se base sur une équivalence de la conjecture avec la propriété du noyau d'une fonctionnelle en analyse complexe (équivalence elle-même ardue à établir, et certainement valide, due à Berg & Meinardus). L'auteur, vraisemblablement un spécialiste en analyse complexe, publiait peu après un errata qui invalidait la démonstration.

Le deuxième article (Feinstein, 2011, [17]) est moins « professionnel » et s'appuie sur une argumentation douteuse (voir la section consacrée au monde de Syracuse) elle-même reprise d'un bref article lui-même obscure. Il faut toutefois mentionner qu'en 1972, John Conway (1972, [18]) a établi l'indécidabilité algorithmique pour une famille de problèmes qui généralisent de manière naturelle le problème de Syracuse.

On trouve également des articles de jeunes amateurs, par exemple Dianopoulos (2012, [19], 2013, [20]) qui précise avoir 15 ans, qui se lancent dans la démonstration, trompés par la simplicité de l'énoncé, . Ils commencent par redécouvrir des propriétés relativement simples des nombres (par exemple $2^{k+1} + 2^k$ et $2^{2k} - 1$ sont divisibles par 3). Ces projets sont souvent abandonnés.

Variante de la conjecture

La conjecture peut être formulée de diverses façons ou décomposée en plusieurs conjectures plus faibles. Ultérieurement, on mentionnera des conjectures généralisant celle de Collatz ou des conjectures équivalentes dans différents domaines.

Forme faible de la conjecture (nontrivial cycles conjecture) : s'il existe m tel que $C^{(k)}(m) = m$ pour $k > 1$ alors $m = 1, 2$ ou 4 .

Conjecture de non divergence ((no) divergent trajectories conjecture) : Toutes les suites de Collatz sont bornées.

Cette dernière conjecture est équivalente au fait que toute trajectoire se termine par un cycle.

Conjecture du temps d'arrêt fini : Toute trajectoire finit par repasser au-dessous de son point de départ.

Cette conjecture est équivalente à la conjecture primitive en utilisant un raisonnement par récurrence.

Une expression de la conjecture fait intervenir le semi-groupes de fonctions affines : Soit $(f_i)_{i=1,\dots,k}$ une famille de fonctions affines. Avec la composition, cette famille engendre un semi-groupe S . Etant donné un ensemble de nombres A , on désigne par $\langle S : A \rangle$, orbite de S , l'ensemble des images de A par les fonctions de S .

$\langle S : A \rangle$ peut aussi simplement être défini comme l'ensemble généré par les formules de récurrences $(f_i)_{i=1,\dots,k}$.

Conjecture des prédécesseurs : Soit S le semi-groupe engendré par les fonctions affines $\{x \mapsto 2x; x \mapsto (2x - 1)/3\}$. Alors l'orbite $\langle S : \{4\} \rangle$ contient tous les nombres entiers positifs supérieurs à 2.

Quelques bricolages

En tant qu'amateurs, il est possible de s'approprier le problème en procédant à divers essais qui, mis à part certains développements techniques, mènent rapidement et de façon étonnante à quelques limites explorées par les professionnels.

Quelques propriétés

Une propriété intéressante de T : $T^{(k)}(a2^k - 1) = a3^k - 1$

Démonstration par récurrence : l'égalité est vérifiée pour $k = 0$ et $k = 1$. Elle reste à vérifier pour $k + 1$ admettant qu'elle est vérifiée pour k :

$$T^{(k+1)}(a2^{k+1} - 1) = T^{(k)}((3a2^{k+1} - 3 + 1)/2) = T^{(k)}((3a)2^k - 1) = (3a)3^k - 1 = a3^{k+1} - 1$$

QED

Remarque : En cours de démonstration on constate que $T^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ est impair et donc $T^{(i)}(a2^k - 1) = N^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ et :

Une propriété intéressante de N : $N^{(k)}(a2^k - 1) = [a3^k - 1]$

Ces propriétés incitent à partitionner l'ensemble des nombres impairs de la façon suivante (Andaloro, 1998, [21]) :

- $S_1 = \{2^{2n-1}(4k+1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$,
- $S_2 = \{2^{2n}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- $S_3 = \{2^{2n-1}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- $S_4 = \{2^{2n}(4k+1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$

On voit facilement que c'est une partition de $2\mathbb{N} + 1$. En effet tout nombre impair peut s'écrire sous la forme $p \times i - 1$ où p est une puissance de 2 et i un nombre impair. Puis on prend comme critère de partition la parité de l'exposant et la classe de reste de $i \pmod{4}$.

Propriété d'invariance de N par la transformation $4m+1$: Pour tout nombre m impair, $N(4m+1) = N(m)$

Démonstration : $N(4m+1) = [12m+4] = [3m+1] = N(m)$

QED

Calcul de $N(m)$ selon une partition $\pmod{16}$, m impair

En calculant quelques valeurs de $N(m)$, on constate une certaine régularité dans la suite des valeurs. 16 semble jouer un rôle dans cet aspect périodique.

En partitionnant les nombres impairs en 4 classes : $\{m : m \equiv 3 \pmod{4}\}$; $\{m : m \equiv 1 \pmod{8}\}$; $\{m : m \equiv 13 \pmod{16}\}$; $\{m : m \equiv 5 \pmod{16}\}$ on a :

- $N(3+4n) = [3(3+4n)+1] = [10+12n] = 5+6n$
- $N(1+8n) = [3(1+8n)+1] = [4+24n] = 1+6n$
- $N(13+16n) = [3(13+16n)+1] = [40+48n] = 5+6n$

Sur ces 3 classes N est une application linéaire. Par contre, le comportement de N sur la 4e classe semble plus « chaotique ».

$$- N(5 + 16n) = [16 + 48n] = [1 + 3n]$$

Pour estimer cette dernière valeur, il faut tenir compte de la parité de n . Lorsque n est pair, $N(5 + 16n) = [16 + 48n] = 1 + 3n$. Lorsque qu'il est impair de la forme $n = 2n' + 1$, il faut alors tenir compte de la parité de n' , etc. Cette dernière classe serait à partitionner pour obtenir des comportements réguliers de N . Cette ramification « fractale » rend compte de la difficulté à maîtriser la suite de Collatz : lorsque l'on croit avoir atteint le but, il reste toujours un nouvel ensemble à examiner.

L'annexe 2 propose le calcul pour les 16 classes et les graphiques qui mettent en évidence à la fois l'aspect linéaire et apparemment « chaotique » de N .

On note toutefois que pour $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ on a : $N(m) = (3m + 1)/4$ et que des relations semblables apparaissent dans les autres cas. Cela donne l'idée de considérer les familles F_s qui font l'objet de la section suivante.

Partition des nombres impairs $(2\mathbb{N} + 1)$ selon N : les familles F_s

Pour m impair, on a la relation $C(m) = 3m + 1 = 2^{\nu(3m+1)}N(m)$. On peut classer les nombres impairs m en fonction des valeurs de $s = \nu(3m + 1)$. Les famille seront notées F_s .

Construction des ensembles F_s

$m' = N(m)$ impair peut se mettre sous la forme $m' = 2n + 1$ donc $3m + 1 = 2^{s+1}n + 2^s$. Il en découle :

$$3m = 2^{s+1}n + 2^s - 1 \text{ et } (-1)^{s+1}n + (-1)^s - 1 \equiv 0 \pmod{3}.$$

s pair

$$-n + 0 \equiv 0 \pmod{3}; n = 3k; 3m = 2^{s+1}3k + 2^s - 1; m = \frac{2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k$$

et

$$N(m) = N\left(\frac{2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k\right) = \frac{2^s - 1 + 3 \times 2^{s+1}k + 1}{2^s} = \frac{2^s + 3 \times 2^{s+1}k}{2^s} = 1 + 6k$$

Exemples :

- $s = 2; m = 1 + 8k; F_2 = \{1, 9, 17, 25, \dots\}$
- $s = 4; m = 5 + 32k; F_4 = \{5, 37, 69, \dots\}$
- $s = 6; m = 21 + 128k; F_6 = \{21, 149, \dots\}$

s impair

$$n + 1 \equiv 0 \pmod{3}; n = 2 + 3k; 3m = 2^{s+1}(3k + 2) + 2^s - 1; m = \frac{5 \times 2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k$$

et

$$N(m) = \frac{5 \times 2^s - 1 + 3 \times 2^{s+1}k + 1}{2^s} = 5 + 6k$$

Exemples :

- $s = 1; m = 3 + 4k; F_1 = \{3, 7, 11, 15, \dots\}$
- $s = 3; m = 13 + 16k; F_3 = \{13, 29, 45, \dots\}$
- $s = 5; m = 53 + 64k; F_5 = \{53, 117, 181, \dots\}$

Remarque : La suite des nombre de $F_1 \pmod{8}$ est $(3, 7, 3, 7, \dots)$, l'ensemble $F_2 \pmod{8}$ se réduit à $\{1\}$ et $F_s \pmod{8} = \{5\}$ sinon.

Conséquences

1. Cette partition des nombres impairs complète le bricolage précédent. N est linéaire sur chacun de des ensembles F_s . Par définition (et cela se contrôle facilement) $N(m) = (3m + 1)/2^s$ pour $m \in F_s$.
2. La « densité » de F_s dans $2\mathbb{N} + 1$ vaut $1/2^s$.
3. s pair : pour $m \in F_s$ on a $N(m) \equiv 1 \pmod{6}$.
4. s impair : pour $m \in F_s$ on a $N(m) \equiv 5 \pmod{6}$.
5. $F_{s+2} = 4F_s + 1$
6. Par la propriété d'invariance par $4m + 1$ avec $P : x \mapsto (x - 1)/4$ et $m \notin F_1 \cup F_2$ on a $N(m) = N(P(m))$.
7. Par répétitions du raisonnement précédent, on montre que $F_1 \cup F_2$ est suffisant⁶. Toutefois ces deux ensembles représentent les trois quarts des nombres impairs. Seuls les nombres congrus à $5 \pmod{8}$ ne sont pas contenus dans ces ensembles. Toutefois, on peut montrer qu'il existe des ensembles suffisants de densité arbitrairement petite (voir page 27).

L'annexe 3 propose une présentation utile des ensembles F_s .

L'annexe 4 montre la relation entre les ensembles F_s et S_i .

L'annexe 5 prolonge cette partition aux ensembles $F_{i,j}$ dont les éléments sont ceux de F_i dont l'image par N est dans F_j .

L'annexe 5a propose un examen des problèmes $x + d$ (d impair) et $3x + 3$.

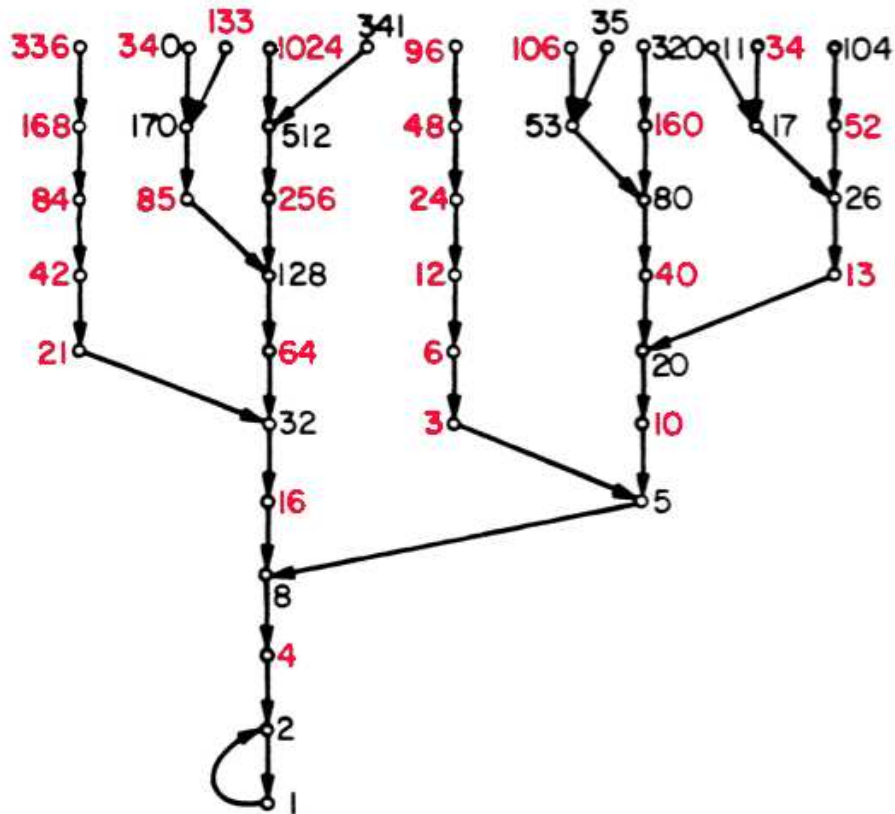
6. Pour un système dynamique obtenu par itération d'une fonction $f : X \rightarrow X$, $S \subset X$ est dit suffisant si la trajectoire de tout $m \in X$ rencontre la trajectoire d'un élément de S

Les prédécesseurs selon T

La situation : partant de 1, on considère les nombres obtenus en utilisant la multiplication par 2 et la fonction $T_1(x) = (2x - 1)/3$. Une branche est notamment constituée des puissances de 2 (figure 1). Les nombres $x \not\equiv 2 \pmod{3}$ n'ont qu'un seul prédécesseur. Ce sont notamment les multiples de 3 et les puissances de 2 paires ($2^{2n} \equiv (-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{3}$). Les nombres $x \equiv 2 \pmod{3}$, ont 2 prédécesseurs : $2x$ et $(2x - 1)/3$.

La figure 1 (reprise en partie de [4]) donne quelques prédécesseurs de 1 (selon la fonction T). Les colonnes de nombres correspondent (de bas en haut) à la multiplication par 2. Les traits obliques correspondent à T_1 . Les nombres en rouge ne possèdent que leur double comme prédécesseur.

Cette construction peut aussi aboutir à des représentations graphiques spectaculaires (figure 7 de l'Annexe 6).



peut toutefois étudier systématiquement les fonctions affines H_{k_1, k_2, \dots, k_n} données par $H_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x) = N_{k_n}(N_{k_{n-1}}(\dots N_{k_1}(x)\dots))$, d'abord sur \mathbb{R} , puis restreintes à \mathbb{Q} , sans restriction sur la suite d'entiers (k_1, k_2, \dots, k_n) autre que $k_i > 0$.

$H(x) = H_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x) = px + h$ est une fonction affine de pente $p = a^n/2^s$ où n est le nombre d'itérations et s la somme des k_i (dérivée d'une fonction composée!) et de hauteur à l'origine (valeur en 0)

$$h = b \frac{a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+\dots+k_{n-1}}}{2^s}.$$

En regroupant :

Proposition (formule pour H) :

$$H_{k_1, \dots, k_n}(x) = \frac{a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+\dots+k_{n-1}})}{2^s} \quad (1)$$

avec $s = \sum k_i$

Propriété : $H_{k_1, k_2, \dots, k_n, l_1, l_2, \dots, l_m} = H_{l_1, l_2, \dots, l_m} \circ H_{k_1, k_2, \dots, k_n}$

Définition : Une suite d'entiers (k_1, k_2, \dots, k_n) est admissible pour $x \in 2\mathbb{N} + 1$ si toutes les valeurs $H_{k_1, k_2, \dots, k_i}(x)$ pour $0 < i \leq n$ sont entières impaires.

Annnonce de résultat : On verra ultérieurement qu'il suffit que, pour x impair, $H_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x)$ soit entier (impair) pour que la suite (k_1, k_2, \dots, k_n) soit admissible.

Recherche de cycles (cas général)

Tout cycle de Collatz est lié à un point de bouclage $x_0 \in \mathbb{Q}$ de H . C'est un zéro de la fonction affine $H(x) - x$. Sa hauteur à l'origine est la même que précédemment. Sa pente vaut $a^n/2^s - 1$ où n est le nombre d'itérations. Donc :

$$y = H(x) - x = \frac{a^n - 2^s}{2^s} x + h \quad (2)$$

avec $s = \sum k_i$

En posant $y = 0$; on trouve la valeur de x_0 :

Proposition : Le point de bouclage de la suite⁷ $ax + b$ est donné par :

$$x_0 = \frac{b}{2^s - a^n} (a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+\dots+k_{n-1}})$$

Cas particulier $3x + 1$:

$$x_0 = \frac{1}{2^s - 3^n} (3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+\dots+k_{n-1}}) \quad (3)$$

7. Pour simplifier l'écriture, on écrira « suite $ax + b$ » au lieu de « suite générée par la relation de récurrence $ax + b$ »

Note : Certains auteurs nomment les nombres de la forme du dénominateur : nombres de Collatz. Pour un tel nombre, l'ensemble des nombres possibles au numérateur forment la couronne de Collatz.

Corollaire 1 : La conjecture de Syracuse faible est équivalente, puisqu'il s'agit d'un point de bouclage, à : « il n'existe pas de suites (k_1, k_2, \dots, k_n) telles que $2^s - 3^n$ divise $3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+\dots+k_{n-1}}$ autres que (2) ou (1,2) ».

Note : Si une telle suite existe, elle est forcément admissible par le résultat annoncé ci-dessus.

Cette relation semble résoudre le problème de la conjecture. Il « suffirait » de montrer que ce point de bouclage ne peut être que 1, 2 ou 4. Or il se trouve que les nombres entiers de la forme ci-dessus constituent l'objet d'un problème non résolu de divisibilité faisant intervenir les puissance de 2 et de 3.

Corollaire 2 : Pour chaque suite (k_1, k_2, \dots, k_n) il n'y a qu'un seul cycle (rationnel) ; le cycle de longueur n est le même pour toutes les permutations circulaires des k_i .

Démonstration : La première proposition découle de la formule. Par ailleurs, par construction N décale les valeurs de k , ce que confirme un simple calcul :

$$N(x_0) = \frac{1}{2^s - a^n} (a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_2} + a^{n-3}2^{k_2+k_3} + \dots + 2^{s-k_1}), \text{ valeur construite sur la suite } (k_2, k_3, \dots, k_n, k_1) .$$

QED

Corollaire 3 : Pour chaque valeur de s , il y a autant de cycles que de décompositions additives de s aux permutations circulaires près⁸.

Corollaire 4 : Les cycles liés à $ax + b$ sont des cycles de $ax + 1$ amplifiés par b . Les cycles de $ax + b$ fournissent des cycles de $ax + be$ (en les amplifiant par e).

Note : Par construction les trajectoires des H sont constituées de nombres rationnels. Parmi ceux-ci on distingue les cycles entiers (i.e. formés d'entiers).

Note : Les cycles entiers de $ax + b$ sont dits primitifs⁹ si les valeurs du cycle n'ont pas de diviseur commun. En particulier les cycles rationnels $ax + 1$ avec un dénominateur commun minimum b deviennent des cycles primitifs de $ax + b$ par amplification par b .

Exemple : (19, 31, 49) est un N -cycle primitif pour $3x + 5$; il correspond au cycle rationnel (19/5, 31/5, 49/5) de $3x + 1$.

Proposition : Le cycle (x_0, \dots, x_{n-1}) de $qx + r$ est primitif si et seulement si x_0 est premier avec r .

Démonstration :

1. x_0 et r ont un diviseur commun d . A voir (x_0, \dots, x_{n-1}) non primitif. En effet :

x_0/d génère un cycle entier pour $qx + r/d$ et donc en remontant sur la suite $qx + r$, le cycle (x_0, \dots, x_{n-1}) est multiple de d donc non primitif. Ou bien $x_1 = (qx_0 + r)/2^s$ et donc d divise x_1 et ainsi de suite.

8. A propos de la partition d'un entier voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Partition_d'un_entier.

9. Lagarias (1990, [1]) définit cette notion dans le cas de l'application T_b ($a = 3$)

2. (x_0, \dots, x_{n-1}) non primitif de facteur commun d . A voir x_0 et r ont un facteur commun supérieur à 1. En effet, par définition $x_1 = (qx_0 + r)/2^s$; comme d divise x_1 et x_0 , il divise r .

QED

Exemples :

- $3x - 1$ possède le cycle entier (17, 25, ...); le cycle correspondant de $3x + 1$ est : (-17, -25, -37, -55, -41, -61, -91). Dans ce cas $(k_i) = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 4)$
- $5x + 1$ possède le cycle primitif (17, 43, 27); le cycle correspondant de $5x + 3$ est : (51, 129, 81); $(k_i) = (1, 3, 3)$ (non primitif)
- $3x + 1$ a un cycle initié par 31/101; le cycle correspondant de $3x + 3$ est initié par 93/101; le cycle correspondant de $3x + 101$ est (31, 97, 49); $(k_i) = (1, 3, 3)$

Corollaire 5 : Avec $n = n_1 \times n_2$ si la suite (k_i) se répète tous les n_1 . Le cycle de longueur n se décompose en n_2 sous-cycles de longueur n_1 .

Démonstration : Par le corollaire 2, un cycle lié à $(k_1, k_2, \dots, k_{n_1})$ existe (de longueur n_1). Sa répétition en n_2 exemplaires est un cycle de longueur n qui est unique.

Exemple pour respirer :

Pour $(k_i) = (1, 2, 1)$, on a : $n = 3$, $s = 4$ et $x_0 = \frac{3^2+3 \cdot 2+2^3}{2^4-3^3} = \frac{-23}{11}$. Le cycle est (-23, -29, -19, -23)/11.

En prenant $(k_i) = (1, 2, 1, 1, 2, 1)$ on a $n = 6$, $s = 8$.

Puis $x_0 = \frac{3^5+3^4 \cdot 2+3^3 \cdot 3^3+3^2 \cdot 2^4+3 \cdot 2^5+2^3}{2^8-3^6} = \frac{-989}{473}$

Par simplification par 43, cette dernière valeur est bien identique à la précédente $\frac{-23}{11}$.

Corollaire 6 : Si $k_i = 1, i = 1, \dots, n$ les cycles sont de longueur 1 de valeur $x_0 = -1/(a - 2)$ (point fixe). Lorsque tous les k_i sont égaux, les cycles se réduisent aussi en des points fixes.

Exemple : $3x + 1, n = 1$: le cycle est constitué d'un point fixe que l'on trouve en résolvant $(3x + 1)/2^k = x$ et donc $x = 1/(2^k - 3)$ (table 1).

k	Point fixe
1	-1
2	1
3	1/5

TABLE 1 – Points fixes pour quelques valeurs de k

Heuristique dans la recherche de cycles

Pour trouver un point de bouclage positif, il faut que la pente de H_{k_1, k_2, \dots, k_n} soit négative. Donc $a^n/2^s < 1$ ou encore $n \log a < s \log 2$, et donc :

$$s > n \frac{\log a}{\log 2} \text{ ou } \frac{s}{n} > \frac{\log a}{\log 2} \quad (4)$$

Cela permet de limiter les valeurs de s . Pour espérer trouver un point fixe, il faut que la suite reste bornée et donc que 2^s soit au moins du même ordre de grandeur que a^n . Par contre, si la pente est positive, on trouve un cycle négatif (de nombres négatifs).

Le tableau 2 donne quelques exemples pour la suite $5x + 1$; $a = 5$; $n = 3$ et donc $s > 3 \log 5 / \log 2 \approx 6.97$ et donc $s = 7$ est le minimum possible.

Avec ces valeurs : $x_0 = (25 + 5 \times 2_1^k + 2^{k_1+k_2})/3$

n	s	(k_i)	Cycle
3	7	1,1,5	13, 33, 83, 13, ...
3	7	1,2,4	43/3, 109/3, 137/3, 43/3, ...
3	7	1,3,3	17, 43, 27, 17, ...
3	7	2,1,4	53/3, 67/3, 169/3, 53/3, ...
3	7	2,2,3	61/3, 77/3, 97/3, 61/3, ...
3	7	2,3,2	77/3, ...

TABLE 2 – Cycles pour quelques valeurs de n , s et (k_i)

On vérifie bien que, conformément au corollaire 2, les cycles liés à (2,2,3) et (2,3,2) sont les mêmes alors que les cycles liés à (1,2,4) et (2,1,4) sont différents. D'autres exemples figurent en annexe 7 (tableau 4, page 71).

H_{k_1, k_2, \dots, k_n} sur $2\mathbb{N} + 1$

Proposition : Si pour x entier impair $H_{k_1, k_2, \dots, k_n}(x) \in \mathbb{N}$ ($n > 1$), alors toutes les valeurs intermédiaires $H_{k_1, k_2, \dots, k_i}(x)$ sont entières et impaires pour $0 < i < n$.

Autrement dit : si x est un entier impair et $H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x)$ pour $j < n$ n'est pas un nombre entier impair alors les nombres suivants de la suite $H_{k_1, k_2, \dots, k_i}(x)$ pour $n > i \geq j$ ne sont pas entiers impairs. Pour cela, il suffit de montrer que $H_{k_1, k_2, \dots, k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

Démonstration : Selon 1 page 10 $H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x) = a/2^k$ avec a impair et $k > 1$ ou $H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x) = b$ avec b pair.

Cas 1 : $H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x) = a/2^k$ (a impair) à voir que $H_{k_1, k_2, \dots, k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

$H_{k_1, k_2, \dots, k_{j+1}}(x) = N_{k_{j+1}}(H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x)) = (3a/2^k + 1)/2^{k_{j+1}} = (3a + 2^k)/2^{k+k_{j+1}}$. Si cette valeur est entière cela implique que a est pair. En contradiction avec l'hypothèse d'imparité de a .

Cas 2 : $H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x) = b$ (b pair) à voir que $H_{k_1, k_2, \dots, k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

$H_{k_1, k_2, \dots, k_{j+1}}(x) = N_{k_{j+1}}(H_{k_1, k_2, \dots, k_j}(x)) = (3b + 1)/2^{k_{j+1}}$ n'est pas entier.
QED

Corollaire : Si x_0 , point de bouclage, est entier, le cycle complet est entier.

Corollaire : Un cycle est soit entier soit tous ses éléments sont non entiers (rationnels).

Remarque : n et s sont respectivement le nombre de valeurs impaires et le nombre de valeurs paires des $n + s$ premières valeurs de la suite originale de Collatz. De l'inégalité 4 (page 13) (obtenue différemment) Eliahou (2011c) en tire une valeur minimum pour la longueur d'un cycle non trivial (voir page 17). A noter que cette inégalité valable pour les suites initiées par un nombre impair, se prolonge à toutes les suites en utilisant le même raisonnement sur la fonction $H'_{k_0}(H_{k_1, \dots, k_n}(x))$ où $H'_{k_0}(x) = x/2^{k_0}$.

Remarque : La propriété intéressante $T^{(k)}(a2^k - 1) = a3^k - 1$ entraîne directement que la suite $(T^{(i)}(a2^k - 1))_{i=0, k}$ est formée de nombres entiers (et impairs pour $i < k$) pour $a \geq 0$ entier.

Le suivi de Lagarias

Lagarias (2009, 2011, 2012, [22], [23], [24]) entretient une bibliographie commentée, souvent mise à jour, des principales contributions attachées à la conjecture de Collatz. Il est lui-même l'auteur de plusieurs résultats. L'intérêt épistémologique de ce travail est de constater que chacun traduit le problème dans sa sphère d'intérêt ou de sa spécialité. La recherche d'une solution conduit souvent à proposer de nouvelles conjectures. En s'inspirant de Lagarias (2010a, [25]) voici une liste des approches rencontrées.

Informatique (programmation) : Les astuces mises au point pour établir des records dans la vérification de la conjecture pour des nombres de plus en plus grand nécessitent de développer certains outils théoriques. Par ailleurs, des développements théoriques peuvent s'appuyer sur ces records.

Arsac (1987, [29]) étudie la complexité des calculs nécessaires et montre qu'elle peut être réduite en utilisant des propriétés de la suite.

Dans cette catégorie, il faut aussi insérer les représentations graphiques de la suite. Une des plus spectaculaires est due Jason Davies¹⁰ qui montre les orbites de tous les nombres dont la longueur de la trajectoire est inférieure ou égale à dix-huit¹¹.

Théorie des nombres : Le problème de Syracuse est notamment lié à des équations diophantiennes mêlant des puissances de 2 et de 3. Par ailleurs, Eliahou (2011c, [30]) utilise les suites de Farey pour démontrer un résultat sur la longueur des cycles éventuels non triviaux.

Systèmes dynamiques et théorie ergodique : Par son expression, la suite de Syracuse s'apparente à un système dynamique discret. Elle entre dans ce champ théorique classique lorsque le domaine de définition de la relation de récurrence est étendu à un espace

10. <http://www.jasondavies.com/collatz-graph/>

11. La génération du graphe est basée sur le code Python par @TerrorBite. Le schéma de l'arbre en présentation radiale est repris d'un exemple fournit avec la remarquable bibliothèque D3.js de Mike Bostock (<http://bost.ocks.org/mike/>).

mesurable plus riche, par exemple \mathbb{R} (Chamberland, 1996, [31], [32]; Lygeros et Rozier, 2014, [33]) ou, de façon très naturelle, \mathbb{Z}_2 , l'ensemble des entiers 2-adiques. Dans ce dernier cas, on montre que l'extension de T satisfait l'hypothèse d'ergodicité.

Logique mathématique et théorie du calcul (theory of computation) : la question se pose de la décidabilité de la conjecture. Conway (1972, [18]) a démontré que des problèmes du type de celui de Collatz sont formellement indécidables. Kurtz and Simon (2007, [34]) ont également montré qu'une généralisation naturelle du problème de Collatz est indécidable. Malheureusement, cette preuve ne peut pas être appliquée au problème de Collatz. Par ailleurs, la conjecture peut se reformuler en un problème de réécriture de chaînes de caractères (Sinyor, 2010, [35]).

Une approche se situe entre ce thème et celui de la programmation. Elle met en oeuvre FRACSTRAN (voir annexe 8). Ce « langage » figure dans la recension de Lagarias (2010, [36]) par le fait qu'il étend le formalisme utilisé par Conway dans son article de 1972 consacré au problème $3x + 1$. Monks (2002, [37]) propose un programme FRACSTRAN qui génère la suite de Syracuse et reporte la conjecture de Collatz en une conjecture sur le programme FRACSTRAN.

Ce programme est donné par : $(\frac{1}{11}, \frac{136}{15}, \frac{5}{17}, \frac{4}{5}, \frac{26}{21}, \frac{7}{13}, \frac{1}{7}, \frac{33}{4}, \frac{5}{2}, 7)$

Appliqué à 2^n , il génère une suite qui contient dans l'ordre les termes 2^b , où b parcourt les termes de la suite T de Syracuse de premier terme n et seulement ceux-là.

Probabilités et processus stochastiques : Slakmon & Macot (après 2003, [38]) appliquent la théorie et les méthodes des cheminements aléatoires et de la théorie des jeux pour placer les suites de Syracuse dans un modèle probabiliste. Ils démontrent la « random conjecture »¹². Carletti & Fanelli (2016, [39], 2017, [40]) considèrent l'itération de $S = C^{(3)}$ et établissent un processus de Markov sur les classes des nombres $(\text{mod } 8)$. Cela leur permet de montrer que les suites définies par S sont presque partout (selon une mesure qu'ils définissent) non divergentes.

Analyse complexe : L'article de Opfer (2011, [16]) déjà cité est un exemple recensé dans cette catégorie. Chamberland (2003, [41]) en se référant aux mêmes travaux que Opfer, étudie la fonction analytique dont les coefficients sont les itérations de $T_{q,r}(m)$

Analyse p-adique : Les nombres 2-adiques apparaissent de façon accessoire dans l'étude des systèmes dynamiques et une connexion à la théorie ergodique. Ils sont aussi le support d'une généralisation de la conjecture proposée par Fleckinger & Abdoukarim (2015, [42]).

Analyse d'erreurs : Une partie des articles s'attachent à montrer les erreurs dans les démonstrations proposées. Ainsi Haynberg (2009, [43], [44]), par exemple, s'attaque, mais de façon naïve, à une démonstration élaborée par Schorer (2009) revue par la suite par l'auteur sans grand succès (Schorer, 2014a, [45], 2014b, [46]).

Epistémologie et philosophie des sciences : Bendegem (2005, [47]) mène une suite de travaux pour « capturer » le travail des mathématiciens qui ne se résume évidemment pas à l'écriture de démonstrations. Le problème $3x + 1$ est pris comme étude de cas en se basant sur les bibliographies annotées de Lagarias et d'autres sources.

Le roman de Antoine Billot (2008, [48]) qui présente l'affrontement entre deux mathématiciens à propos de la suite de Syracuse peut également intégrer cette rubrique.

12. Voir à ce propos l'analyse dans la section « Le monde de Syracuse » page 35

D'autres auteurs ont aussi établi des répertoires de méthodes. Chamberland (2010, [26]) propose un survol du sujet entre théorie des nombres et systèmes dynamiques. Son article est assorti d'une importante bibliographie (pas toujours référencée dans le texte). Outre la référence classique de Lagarias, il cite également l'ouvrage de Wirsching (1998, [7]) comme catalogue de résultats et de pistes d'attaque.

Dans un autre article (Chamberland, 2015, [27]) il répertorie les travaux qui étendent T à des ensembles plus grands (\mathbb{Z} , les nombres rationnels à dénominateur impair, \mathbb{Z}_2 , les entiers de Gauss, $\mathbb{Z}_2[i]$, \mathbb{R} , \mathbb{C}).

Belaga et Mignotte (2015, [28]) établissent également une classification des travaux en considérant les aspects algorithmiques. Ils distinguent ceux liés à la théorie des nombres ou aux processus stochastiques.

Quelques résultats marquants

Les records, les recherches sur la longueur maximum des cycles, les recherches sur le temps d'arrêt, l'extension aux nombres 2-adiques sont des classiques du domaine.

Les records

Une course aux records est engagée de la plus grande valeur vérifiant la conjecture. Le record de 2009 tenu par T. Oliveira e Silva est de $5 \times 2^{60} \approx 5.8 \times 10^{18}$ (Oliveira, 2010, [49]).

Dans une suite de tests systématiques, outre les nombres pairs, il est inutile de traiter les nombres de la forme $m = 4n + 1$ puisque leur trajectoire passe toujours « sous » m (voir l'annexe 2). Ce qui élimine 50% des nombres impairs.

Dans l'annexe 2, on constate aussi que la trajectoire des nombres de la forme $m = 16n + 3$ passe également sous m . Les programmes de E. Roosendaal ([50]) (ancien recordman) et de T. Oliveira e Silva utilisent cette idée mêlée à d'autres astuces arithmétiques et de programmation.

Une heuristique

En partant d'un nombre impair, on calcule la probabilité de retrouver un nombre impair (c'est la fonction originale C qui est utilisée). Si la fonction est suffisamment « mélangeuse » (mixing), l'image du nombre a une chance sur deux d'être impaire, une chance sur quatre d'être le double d'un nombre impair, une chance sur huit d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Ces probabilités se retrouvent à chaque étape. Ainsi, calculer la croissance moyenne de la suite revient à la multiplication par $3/2$ une fois sur deux, la multiplication par $3/4$, une fois sur quatre, etc.

En utilisant les identités : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^n = 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n = 2$ on trouve la croissance moyenne :

$$(3/2)^{1/2}(3/4)^{1/4}(3/8)^{1/8} = \frac{3^{1/2+1/4+\dots}}{(1/2)^{1/2}(1/4)^{1/4}(1/8)^{1/8}\dots} = \frac{3}{4}$$

Ainsi, il n'y aurait pas de suite divergente. Cet argument heuristique est parfois exploité pour suggérer que toute orbite finirait par passer au-dessous de son point de départ et donc, par un raisonnement par récurrence, mener à la conclusion que les trajectoires aboutissent finalement à 1. Ce prolongement ne prend pas en compte le fait que des trajectoires peuvent être finies, auquel cas l'argument de croissance moyenne n'est plus applicable. L'argument n'élimine pas les cycles autres que (1, 4, 2, 1).

A noter aussi que $3x - 1$ satisfait la même heuristique et possède le cycle (5, 14, 7, 20, 10, 5).

Cette même heuristique paraît plus intéressante pour conforter la conjecture liée au problème $ax + 1$ avec $a > 3$. Celle-ci affirme qu'il existe des valeurs initiales m pour lesquelles les trajectoires sont non bornées. Le cas $7x + 1$ est en particulier cité par Crandall (1978, [3]).

Longueur des cycles

Eliahou (2011c, [30])¹³ a obtenu une borne minimale pour la longueur d'un cycle. Etant donné un C-cycle il sépare les valeurs en p nombres pairs b_1, b_2, \dots, b_p et q nombres impairs c_1, \dots, c_q avec $p + q = n$ longueur du cycle.

En appliquant l'opérateur C à tous les nombres du cycle, on retombe sur les mêmes nombres. Il s'ensuit une relation :

$$b_1 \times \dots \times b_p \times c_1 \times \dots \times c_q = \left(\frac{b_1}{2}\right) \times \dots \times \left(\frac{b_p}{2}\right) \times (c_1 + 1) \times \dots \times (3c_q + 1)$$

On en tire :

$$2^p = \left(3 + \frac{1}{c_1}\right) \times \dots \times \left(3 + \frac{1}{c_q}\right)$$

La relation permet de déduire directement l'inexistence de cycle de longueur 5 ou 8,

Pour le cas général, on pose m la valeur minimum atteinte par le cycle (m est forcément impair). De la relation précédente on tire : $3^q < 2^p < (3 + 1/m)^q$ et en prenant le logarithme : $q \log 3 < p \log 2 < q \log(3 + 1/m)$ puis (voir aussi 4, page 13) :

$$\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q} < \frac{\log(3 + 1/m)}{\log 2}$$

En utilisant le record établi par Tomás Oliveira e Silva (Oliveira e Silva, 2010), on peut écrire :

$$\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q} < \frac{\log(3 + 2 \times 10^{-19})}{\log 2}$$

13. Eliahou (2011a, 2011b, [51], [52]) analysent des cas particuliers et introduisent la méthode utilisée dans le cas général.

En utilisant les résultats liés aux paires de Farey on peut montrer que p et q doivent être grands et estimer leur grandeur. On obtient pour leur somme : $n > 17'026'679'261$.

C'est remarquablement ingénieux ; chaque nouveaux record permet d'augmenter la longueur minimum des éventuels cycles non triviaux (voir aussi Ghosh, 2009, [53] ; Sinisalo, 2003, [54]).

Vecteur de parité et fonction Q_k

Définitions : Le vecteur de parité $v_k(m) = (x_i(m))_{0 \leq i < k}$ de m est donné par : $x_i(m)$ valant 0 ou 1 selon la parité de $T^{(i)}(m)$ (noté aussi $\overline{T^{(i)}(m)}$) ;

$$v(m) = \lim_{k \rightarrow \infty} v_k(m) ;$$

$$d(m, a, b) = \sum_{a \leq i < b} x_i(m) ; d(m, b) = d(m, 0, b)$$

$$\text{Exemple : } v_6(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$$

Selon Lagarias, l'idée de Terras est d'exprimer m comme fonction de v .

$$\text{Définition : } Q_k(m) = \sum_{i=0, k-1} x_i(m) 2^i$$

Q_k est une application de \mathbb{N} dans $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$

A noter que le vecteur de parité de longueur k de m n'est rien d'autre que le développement binaire de $Q_k(m)$ écrit dans l'ordre inverse.

$Q_k(m)$ globalise le vecteur de parité et il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des v_k et les valeurs de Q_k . C'est une technique classique de remplacer des suites binaires par les nombres dont elles sont le développement en base deux.

$$\text{Exemple : } v_6(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1) ; Q_6(17) = 37 \text{ s'écrit en format binaire : } 100101.$$

A noter que les auteurs découpent souvent leur travail en de nombreuses petites étapes (lemmes) et introduisent de nombreuses notations dont il est difficile d'apprécier l'apport conceptuel. Elles font souvent perdre le fil du raisonnement. Voici quelques propriétés de T et Q_k quasiment immédiates, exposées sans notation additionnelle.

Propriétés utiles :

$$U1 : T(m + 2a) = ta + T(m) \text{ avec } t = 1 \text{ ou } t = 3 \text{ selon la parité de } m$$

$$U2 : T(m + 4a) = t_1 2a + T(m) ; T^{(2)}(m + 4a) = t_1 t_2 a + T^{(2)}(m) \text{ avec } t_1 = 1 \text{ ou } t_1 = 3 \text{ selon la parité de } m \text{ et avec } t_2 = 1 \text{ ou } t_2 = 3 \text{ selon la parité de } T(m)$$

$$U3.1 : \text{Pour } i \leq k, m \text{ impair : } T^{(i)}(m + 2^k \times a) = 2^{k-i} 3^{d(m,i)} a + T^{(i)}(m)$$

$$U3.2 : \text{Pour } i < k : T^{(i)}(m + 2^k \times a) \equiv T^{(i)}(m) \pmod{2}$$

$$U3.3 : T^{(k)}(m + 2^k \times a) \equiv a + T^{(k)}(m) \pmod{2}$$

$$U4 : Q_k(m + 2^k \times a) = Q_k(m) ; Q_k \text{ est } 2^k \text{-périodique}$$

$$U5 : Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k(m) + \bar{a} 2^{k-1}$$

$$U6 : Q_k^{(n)}(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k^{(n)}(m) + \bar{a} 2^{k-1} \text{ avec } \bar{a} \text{ valant } 0 \text{ ou } 1 \text{ selon la parité de } a$$

$$U7.1 : Q_k(m) = Q_{k-1}(m) + \overline{T^{(k-1)}(m)} \times 2^{k-1}$$

$$U7.2 : Q_k^{(2)}(m) = Q_{k-1}^{(2)}(m) + \overline{(T^{(k-1)}(Q_{k-1}(m)))} + \overline{T^{(k-1)}(m)} \times 2^{k-1}$$

$$\text{U7.3 : } Q_k^{(4)}(m) = Q_{k-1}^{(4)}(m) + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(3)}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(2)}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(n)} \times 2^{k-1}$$

$$\text{U7.4 : } Q_k^{(2^i)}(m) = Q_{k-1}^{(2^i)}(m) + 2^{k-1} \sum_{i=0, 2^{i-1}} \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(i)}(m))} = Q_{k-1}^{(2^i)}(m) + 2^{k-1} \times A$$

U8 : Q_k conserve la parité et on a : $T(Q_k(m)) = Q_{k-1}(T(m))$ pour m pair ; $T(Q_k(m)) = 2 + 3Q_{k-1}(T(m))$ pour m impair

Démonstrations :

U1, U2 : par calcul direct.

U3.1 : généralisation par récurrence.

U3.2, U3.3 : passage (mod 2).

U4 : de la définition de Q_k et de U3.2.

U5 : En utilisant la définition, U3.1 et la définition :

$$- Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = \sum_{i=0, k-2} \overline{T^{(i)}(m + 2^{k-1} \times a)2^i} + \overline{T^{(k-1)}(m + 2^{k-1} \times a)2^{k-1}}$$

$$- Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = \sum_{i=0, k-2} \overline{T^{(i)}(m)2^i} + \overline{(a + T^{(k-1)}(m))2^{k-1}}$$

$$- Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k(m) + \bar{a}2k - 1$$

U6 : utilisation de U5 de façon répétée.

U7.1 : par définition.

U7.2 : par utilisation de U7.1.

U7.3 : par utilisation de U7.2 et $Q_k^{(4)}(m) = Q_k^{(2)}(Q_k^{(2)}(m))$.

U7.4 : généralisation.

$$\text{U8 : de } Q_k(m) = \sum_{i=0, k-1} \overline{T^{(i)}(m)2^i} = \bar{m} + 2 \sum_{i=0, k-2} \overline{T^{(i+1)}(m)2^i} = \bar{m} + 2Q_{k-1}(T(m)).$$

On en tire les relations : $Q_k(m) \equiv m \pmod{2}$; $T(Q_k(m)) = Q_{k-1}(T(m))$ pour m pair ; $T(Q_k(m)) = 2 + 3Q_{k-1}(T(m))$ pour m impair.

QED

Développement de la relation U3.1 :

La relation U3.1 (avec $m = -1$) généralise la *propriété intéressante*. Elle confirme que tous les $T^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ sont impairs. Et donc :

$$T^{(i)}(a2^k - 1) = N^{(i)}(a2^k - 1) = 2^{k-i}3^i a - 1 \text{ pour } i < k \text{ et } N^{(k)}(a2^k - 1) = [3^k a - 1].$$

Cette relation permet de calculer facilement certaines itérations de N des éléments des ensembles S_i .

Pour $m = 2^{2n-1}(4k+1) - 1 \in S_1$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-1-i}3^i(4k+1) - 1$ pour $i < 2n-1$ et $N^{(2n-1)}(m) = [3^{2n-1}(4k+1) - 1]$. Comme $3^{2n-1}(4k+1) - 1 \equiv 2 \pmod{4}$, $N^{(2n-1)}(m) = (3^{2n-1}(4k+1) - 1)/2$

Pour $m = 2^{2n}(4k+3) - 1 \in S_2$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-i}3^i(4k+3) - 1$ pour $i < 2n$ et $N^{(2n)}(m) = [3^{2n}(4k+3) - 1]$. Comme $3^{2n}(4k+3) - 1 \equiv 2 \pmod{4}$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n}(4k+3) - 1)/2$

Pour $m = 2^{2n-1}(4k+3) - 1 \in S_3$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-1-i}3^i(4k+3) - 1$ pour $i < 2n-1$ et $N^{(2n-1)}(m) = [3^{2n-1}(4k+3) - 1]$. Comme $3^{2n-1}(4k+3) - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $N^{(2n-1)}(m) = (3^{2n-1}(4k+3) - 1)/2^j$ avec $j \geq 2$.

Pour $m = 2^{2n}(4k+1) - 1 \in S_4$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-i}3^i(4k+1) - 1$ pour $i < 2n$ et $N^{(2n)}(m) = [3^{2n}(4k+1) - 1]$. Comme $3^{2n}(4k+1) - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n}(4k+1) - 1)/2^j$ avec $j \geq 2$.

Lemme de réécriture : Soient m et n deux entiers positifs. On a les équivalences :

1. $Q_k(m) = Q_k(n)$
2. $v_k(m) = v_k(n)$

Démonstration : par définition (rappel : $v_k(n)$ est le développement binaire renversé de $Q_k(n)$)

QED

Les fonctions Q_k permettent de « condenser » les suites $(T^{(i)})_{0 \leq i < k} \pmod{2}$.

Lemme de périodicité : Soient m et n deux entiers positifs. Si $n \equiv m \pmod{2^k}$ alors $Q_k(m) = Q_k(n)$ (et donc $v_k(m) = v_k(n)$).

Démonstration : il s'agit de la propriété U4.

QED

En d'autres termes :

Pour $m = a \times 2^k + b$ les k premières composantes de $v(m)$ ne dépendent que de b (i.e. $v_k(m) = v_k(b)$ pour tout a) ou encore Q_k est 2^k -périodique.

Exemple : Les vecteurs $v_5(a \times 2^5 + 17)$ et $v_5(17)$ sont égaux pour tout a .

Lemme de surjectivité : $w = (w_i)_{0 \leq i < k}$ élément de $\{0, 1\}^k$ est vecteur de parité de longueur k . C'est-à-dire il existe n tel que $v_k(n) = w$. Q_k est donc surjective.

Démonstration (par induction sur k) :

Vrai pour $k = 1$; on a w_0 valant 0 ou 1, il suffit de prendre n pair ou impair.

On suppose la propriété vraie pour les suites de parité de longueur k et soit une suite de longueur $k + 1$: $w = (w_i)_{0 \leq i < k+1}$

Par hypothèse d'induction il existe n tel que $v_k(n) = (w_i)_{0 \leq i < k}$.

On prend alors $m_1 = 2k + 1 + n$ et $m_2 = 2k + 1 + 2^k + n$.

On a : $v_k(m_1) = v_k(m_2) = (w_i)_{0 \leq i < k}$ par U4.

De plus : $T^{(k)}(m_1) = 2 \times 3^s + T^{(k)}(n)$; $T^{(k)}(m_2) = (2 + 1) \times 3^s + T^{(k)}(n)$

Ces deux nombres sont de parité opposée. On prend m_1 ou m_2 selon que w_{k+1} est 0 ou 1.

QED

Q_k est une application 2^k -périodique surjective de \mathbb{N} sur $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$

$\overline{Q_k}$ restriction de Q_k est une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \dots, 2^k - 1\}$.

Lemme de l'ordre : L'ordre de $\overline{Q_k}$ est une puissance de 2 (divise 2^k)

Démonstration : On démontre par récurrence que $Q_k^{(2^k)}(n) \equiv n \pmod{2^k}$

Pour $k = 1$ et $k = 2$ $\overline{Q_k}$ est l'identité.

- $\overline{v_2}(0) = (0, 0)$; $Q_2(0) = 0$

- $\overline{v_2}(1) = (1, \overline{T(1)}) = (1, 0)$; $Q_2(1) = 1$
- $\overline{v_2}(2) = (1, \overline{T(2)}) = (0, 1)$; $Q_2(2) = 2$
- $\overline{v_2}(3) = (1, \overline{T(3)}) = (1, 1)$; $Q_2(3) = 3$

Hypothèse de récurrence (hr) : $Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) \equiv n \pmod{2^{k-1}}$

On prendra : $Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) = n + \alpha 2^{k-1}$

- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(Q_k^{(2^{k-1})}(n))$
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) + 2^{k-1} \times A)$ par U7.4
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(n + \alpha \times 2^{k-1} + 2^{k-1} \times A)$ par hr
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(n + (\alpha + A)2^{k-1}) = Q_k^{(2^{k-1})}(n) + (\alpha + A)2^{k-1}$ par U6
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) + 2 \times (\alpha + A)2^{k-1}$ par U/.4 et hr
- $Q_k^{(2^k)}(n) \equiv Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) \equiv n \pmod{2^k}$

QED

Quelques fonctions Q_k

- $\overline{Q_1} = Id$
- $\overline{Q_2} = Id$
- $\overline{Q_3} = (1\ 5)$ d'ordre 2
- $\overline{Q_4} = (1\ 5)(2\ 10)(9\ 13)$ d'ordre 2
- $\overline{Q_5} = (1\ 21)(2\ 10)(4\ 20)(5\ 17)(7\ 23)(9\ 29\ 25\ 13)(18\ 26)$ d'ordre 4

Recherche sur le « temps d'arrêt »

Plusieurs travaux se sont concentrés (et se concentrent encore) sur le moment où une suite de Collatz passe au-dessous de son point de départ.

Préparation

Chaque 1 dans la suite $v_k(n) = (x_i(n))_{0 \leq i < k}$ représente l'opération $x \mapsto (3x + 1)/2$ et chaque 0 la division par 2. On en tire :

$$T(n) = \frac{3^{x_0(n)}n + x_0(n)}{2}$$

puis :

$$T^{(2)}(n) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)}n}{2^2} + \frac{3^{x_1(n)}x_0(n)}{2^2} + \frac{x_1(n)}{2}$$

et finalement :

$$T^{(k)}(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n) \tag{5}$$

avec :

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{d(n,k)}}{2^k}; \rho_k(n) = \sum_{i=0}^{k-1} x_i(n) \frac{3^{d(n,i+1,k)}}{2^{k-i}}$$

Il ne s'agit de rien d'autre qu'une réécriture de la formule 1 de la page 10.

Propriétés : λ_k et ρ_k sont 2^k -périodiques.

On définit aussi $c_k(n) = \ln \lambda_k(n) = d(n, k) \ln 3 - k \ln 2$

Propriété : $T^{(k)}(n) \geq \lambda_k(n)n$

Donc $\lambda_k(n) < 1$ est une condition nécessaire pour que $T^{(k)}(n) < n$

Définition : Le *temps d'arrêt* de m (*stopping time*) noté $\sigma(m)$ vaut $\min_k(T^{(k)}(m) < m)$

Définition : Le *temps de convergence* (*coefficient stopping time* – CST) de m noté $\omega(n)$ est la valeur de k minimum telle que $\lambda_k(n) < 1$ (ou $c_k(n) < 0$).

Propriété : $\omega(n) \leq \sigma(n)$

Exemple : $T(17) = 26$, $T^{(2)}(17) = 13$ donc $\sigma(17) = 2$; $\lambda_1(17) = 3/2$, $\lambda_2(17) = 3/4$ donc $\omega(17) = 2$

Si l'on pouvait démontrer que le temps d'arrêt est fini pour tout nombre, une démonstration par induction complète permettrait de conclure.

Le théorème de Terras

Le théorème de Terras affirme que presque tous les nombres ont un *temps d'arrêt* fini. Le résultat n'est pas vraiment étonnant. En effet, lors d'une approche naïve qui élimine par tranches des valeurs de m qui satisfont la conjecture, on constate bien que l'ensemble restant est de plus en plus restreint (bien qu'infini).

Théorème A (Terras)¹⁴ : La densité de l'ensemble $S_k = \{m \in \mathbb{N} : \sigma(m) \leq k\}$ dans \mathbb{N} tend vers une limite finie $F(k)$. Plus précisément :

$$F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{m : m \leq x \text{ et } \sigma(m) \leq k\}$$

De plus, $F(k) \rightarrow 1$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Ainsi presque tous les entiers ont un *temps d'arrêt* fini.

Ce théorème ne permet pas de conclure sur l'induction évoquée. Il ne permet pas non plus d'exclure l'existence de cycles autres que le trivial.

Ce théorème dans une formulation différente a été démontré indépendamment par C. Everett (cité par Crandall, 1978, [3])¹⁵.

Le résultat obtenu par Carletti & Fanelli (2016, [39]) va dans le même sens. Ces auteurs considèrent l'itération de $S = C^{(3)}$ et établissent un processus de Markov sur les classes des nombres $(\text{mod } 8)$. Cela leur permet de montrer que les suites définies par S sont presque partout (selon une mesure qu'ils définissent) non divergentes.

La démonstration du théorème de Terras proposée par Eric Roosendaal¹⁶ est une version simplifiée de la démonstration originale. Toutefois un lemme pêche par une utilisation

14. la nomenclature des théorèmes est reprise de Lagarias

15. Un résultat de Slakmon & Macot (2003, [38], 2006, [55]) semble nettement plus fort. Toutefois, ce résultat dépend d'une hypothèse simplificatrice hasardeuse.

16. <http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html>

abusive de la notion de limite bien que les exemples soient assez convainquant. Une autre formulation devrait permettre certainement de palier ce défaut. D'autres « raccourcis » sur des passages à la limite rendent la démonstration approximative.

La démonstration rapportée par Lagarias (1985, [4])¹⁷ est plus complète. En voici les grandes lignes.

On considère :

- un vecteur $v_k = (v_i)_{i=0, k-1}$ de $\{0, 1\}^k$
- l'ensemble $S(v_k)$ des nombres m ayant v_k comme vecteur de parité. Cet ensemble n'est pas vide par le lemme de surjectivité
- $n_0(v_k)$ élément minimum de $S(v_k)$

A noter que : $S(v_k) = \{n_0(v_k) + n2^k; n \in \mathbb{N}\}$; $n_0(v) = \overline{Q_k}^{-1}(m)(\sum_{i=0, k-1} v_i 2^i)$.

Définition : Un vecteur $v = (v_i)_{i=0, k-1}$ de $\{0, 1\}^k$ est admissible si :

1. $(v_0 + \dots + v_{k-1}) \ln 3 < k \ln 2$
2. $(v_0 + \dots + v_i) \ln 3 > (i + 1) \ln 2$ avec $0 \leq i < k - 1$ (c'est la valeur de k minimum qui rend $\lambda_k(m) < 1$)

En particulier si v est admissible : $(v_0 + \dots + v_{k-2}) \ln 3 > (k-1) \ln 2$ et donc $v_0 + \dots + v_{k-1} = \lfloor k\theta \rfloor$ avec $\theta = \ln 2 / \ln 3 \approx 0.63093$.

Théorème C (Terras)¹⁸ :

- (a) L'ensemble des entiers m tels que $\omega(m) = k$ est l'ensemble des entiers pour lesquels il existe un vecteur admissible v avec $n_0(v) \equiv m \pmod{2^k}$.
- (b) Soit $m = n_0(v)$ pour v de longueur k . Si v est admissible, alors tout nombre suffisamment grand congruent à $m \pmod{2^k}$ possède k comme temps d'arrêt $\sigma(m)$. Si v n'est pas admissible, alors il existe seulement un nombre fini d'entiers congruents à $m \pmod{2^k}$ qui ont k comme temps d'arrêt.

Démonstration :

Le point (a) est directement lié à la définition de vecteur admissible. Le point (b) demande un peu plus de travail. Le lecteur est prié de se référer à l'article de Lagarias.

Ce théorème implique que l'ensemble $I_k = \{m : \omega(m) = k\}$ est la réunion de progressions arithmétiques de raison 2^k . Donc I_k possède une densité asymptotique :

$$d(I_k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{m : m \leq x \text{ et } \omega(m) = k\}$$

avec $d(I_k) = \frac{1}{2^k} \#\{v_k(\text{admissible})\}$

Le théorème implique aussi que S_k diffère de I_k d'un nombre fini d'éléments. Sa densité asymptotique est donc la même. Cela démontre la première partie du théorème de Terras. La densité asymptotique de l'ensemble des entiers dont le *temps d'arrêt* vaut au plus k est égale à :

17. <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/paper.html>

18. Dans la présentation de Lagarias le théorème B rassemble des résultats concernant la fonction Q_k et le vecteur de parité.

$$F(k) = \sum \frac{1}{2^{\text{length}(v)}}$$

La somme étant prise sur tous les vecteurs v admissibles avec $\text{length}(v) \leq k$.

Cette formule permet de démontrer la deuxième partie du théorème de Terras et même un peu plus :

Théorème D : Pour tout $k \geq 1$,

$$1 - F(k) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \#\{m : m \leq x \text{ et } \sigma(m) > k\} \leq 2^{-\eta k}$$

où $\eta = 1 - H(\theta) \approx 0.05004$ avec $H(x) = -x \log_2 x - (1 - x) \log_2(1 - x)$ est la fonction d'entropie et $\theta = 1/(\log_2 3)$

Ce théorème ne peut pas être amélioré de façon significative.

Graphe de Collatz et ensembles des prédécesseurs

Chamberland (2010, [26]) fait état, parmi d'autres choses, des recherches sur l'ensemble des prédécesseurs d'un nombre a :

$$P(a) = \{m \in \mathbb{N} : T^{(k)}(m) = a \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}$$

On filtre cet ensemble par les ensembles constitués des nombres de $P(a)$ inférieurs à une valeur x . Le cardinal de ces ensembles sera noté $Z_a(x)$. En particulier :

$$Z_1(x) = \#\{m \in \mathbb{N} : m < x \text{ et } T^{(k)}(m) = 1 \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}$$

Le calcul de la grandeur de Z_a a été initiée par Crandall (1978, [3]) qui montre qu'il existe une constante c telle que $Z_1(x) > x^c$ pour x suffisamment grand.

Les travaux menés depuis ont permis de trouver des valeurs de c de plus en plus grandes (l'idéal étant 1). $c = 0.81$ a été obtenu par Applegate & Lagarias (1995, [56]) en utilisant une approche de programmation non-linéaire due à Krasikov. Cette méthode a encore permis d'affiner la valeur à $c = 0.84$ (Krasikov & Lagarias, 2002, [57]).

Extension de la suite à \mathbb{Z}_2

L'étude du comportement de systèmes dynamiques (itérations de fonction) conservant une mesure est appelée théorie ergodique. Le problème $3x + 1$ peut entrer dans ce formalisme dans la mesure où la fonction T se prolonge naturellement en une fonction sur les nombres 2-adiques¹⁹ \mathbb{Z}_2 :

$$T(\alpha) = \begin{cases} \alpha/2 & \text{si } \alpha \equiv 0 \pmod{2} \\ (3\alpha + 1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

19. Voir l'annexe 9 pour une brève introduction aux nombres 2-adiques.

Elle conserve la mesure de Haar μ_2 définie sur cet ensemble avec $\mu_2(\mathbb{Z}_2) = 1$.

On peut de plus montrer que cette fonction satisfait la condition d'ergodicité en montrant qu'elle est suffisamment « mélangeuse » (« strongly mixing »). C'est-à-dire que si $T^{-1}(E) = E$ alors $\mu_2(E) = 0$ ou $\mu_2(E) = 1$ avec $E \subset \mathbb{Z}_2$ ou encore que $T(\mathbb{Z}_2)$ et \mathbb{Z}_2 ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle.

Pointwise Ergodic Theorem : Avec X espace mesurable, T et f fonction sur X , T ergodique et f mesurable, alors pour presque tout $x \in X$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{(i)}(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \quad (6)$$

Ce théorème est un corollaire du théorème de Birkhoff qui égalise presque partout la moyenne sur le temps et celle sur l'espace.

Cette relation devient dans notre cas : pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{(i)}(\alpha)) = \int_{\mathbb{Z}_2} f d\mu \quad (7)$$

Corollaire : Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2}; i < n\} = 1/2$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \#\{T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2^k}; T^{(i)}(\alpha) \not\equiv 0 \pmod{2^{k+1}}; i < n\} = 1/2^{k+1}$ avec $k \geq 1$.

Démonstration :

Dans le premier cas, on prend f la fonction caractéristique de la boule $B_{1/2}(0)$ dont la mesure vaut : $\mu_2(B_{1/2}(0)) = 1/2$.

Dans l'autres cas, on prend pour f la fonction caractéristique de la couronne $B_{1/2^k}(0) - B_{1/2^{k+1}}(0)$. On a : $\mu_2(B_{1/2^k}(0) - B_{1/2^{k+1}}(0)) = \mu_2(B_{1/2^k}(0)) - \mu_2(B_{1/2^{k+1}}(0)) = 1/2^k - 1/2^{k+1} = 1/2^{k+1}$.

QED

Autrement dit la densité des valeurs de $T^{(i)}(\alpha) \equiv 1 \pmod{2}$ (impair) vaut $1/2$ et la densité des valeurs de $T^{(i)}(\alpha)$ telles que $T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2^k}$ et $T^{(i)}(\alpha) \not\equiv 0 \pmod{2^{k+1}}$ vaut $1/2^{k+1}$. Ou encore pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ la suite $(T^{(i)}(\alpha))$ est uniformément distribuée $\pmod{2k}$ pour tout $k \geq 1$

Cela formalise l'heuristique décrite précédemment prolongée à la fonction T .

Malheureusement le bébé est parti avec l'eau du bain. Le théorème n'indique rien sur le comportement de T sur \mathbb{Z} puisque cet ensemble est de μ_2 -mesure nulle.

En fait, toutes les trajectoires $(T^{(i)}(m))$, $m \in \mathbb{Z}$ pourraient n'avoir jamais la propriété énoncée dans le théorème. En effet, si la trajectoire est k -périodique elle ne peut pas être distribuée uniformément. Et si elle est divergente elle ne peut même pas être distribuée uniformément $\pmod{2}$.

Connecter le problème $3x + 1$ à la théorie ergodique est-elle une voie à suivre? Pour cela il faudrait obtenir une version de la relation 6 dans le cadre d'une théorie ergodique « discrète ». Auquel la conjecture de Collatz serait démontrée pour presque tout $m \in \mathbb{Z}$.

Prolongement des fonctions Q_k à \mathbb{Z}_2

Une autre connexion aux entiers 2-adiques peut donner davantage d'informations sur le problème. Il s'agit de la prolongation de la famille des fonctions Q_k .

On définit $Q_\infty : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2$ par :

$$Q_\infty(\alpha) = \sum_{i=0, \infty} x_i(\alpha) 2^i \text{ avec } x_i(\alpha) = T^{(i)}(\alpha) \pmod{2}$$

Cette fonction encode le comportement de toutes les itérations d'un nombre. C'est l'avantage de Q_∞ sur les fonctions Q_k .

$$\text{Quelques valeurs : } Q_\infty(1) = \sum_{i=0, \infty} 2^{2i} = -1/3; \quad Q_\infty(2) = -2/3; \quad Q_\infty(3) = -20/3$$

Lagarias explicite les propriétés Q_∞ observées par plusieurs mathématiciens dont Terras et Pomerance qui découlent des propriétés des fonctions Q_k :

Théorème : L'application Q_∞ est bijective, continue et préserve la mesure 2-adique.

Par ailleurs, une nouvelle formulation de la conjecture en terme de la fonction Q_∞ est :

Proposition (Lagarias, 1985, [4]) : La conjecture de Collatz est équivalente à : $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z}$ (de fait $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$).

Démonstration :

Si la conjecture de Collatz est vérifiée alors la suite des $T^{(k)}(m)$ est finalement composée de l'alternance de 0 et 1. Le développement de Hensel $(1, 1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ représente la fraction $1/3$ et $(1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ représente la fraction $-1/3$

Par ailleurs, il faut montrer que si la suite des $T^{(k)}(m) \pmod{2}$ est composée finalement de 1 et de 0 en alternance, alors $m = 1$ ou $m = 2$.

On peut se restreindre à $m \in 2\mathbb{N} + 1$.

On choisit la première valeur $T^{(k)}(m)$ telle que $T^{(k)}(m) \equiv 1 \pmod{2}$ et par la suite 0 et 1 s'alternent. A montrer que ce n'est possible que si $m = 1$. Pour cela, on examine les cas possibles selon la partition de $2\mathbb{N} + 1$ par les ensembles S_i .

1. m ne peut pas être dans $S_2 \cup S_4$: En effet, par la remarque de la propriété intéressante, $T^{(k+1)}(m)$ est impair.

2. $m \in S_3$: $m = 2^{2n-1}(4k+3) - 1$ par la remarque de la propriété intéressante $n = 1$ et donc $m = 8k + 5 = 2^p i + 5$ où i est un nombre impair et $p \geq 3$.

$T(2^p i + 5) = 3 \times 2^{p-1} i + 8$; $T^{(2)}(2^p i + 5) = 3 \times 2^{p-2} i + 4$. On trouve deux nombres pairs successifs. m ne peut pas être dans S_3 .

3. $m \in S_1$: $m = 2^{2n-1}(4k+1) - 1$ par la remarque de la propriété intéressante $n = 1$ et donc $m = 8k + 1 = 2^p i + 1$ où i est un nombre impair et $p \geq 3$.

$T(2^p i + 1) = 3 \times 2^{p-1} i + 2$ (pair); $T^{(2)}(2^p i + 1) = 3 \times 2^{p-2} i + 1$ (impair); $T^{(3)}(2^p i + 1) = 9 \times 2^{p-3} i + 2$

3.1 Si p est pair on aboutit à $3^q \times 2i + 2$ et $3^q \times i + 1$, deux nombres pairs qui se suivent sauf si $i = 0$.

3.2 Si p est impair on aboutit à $3^q \times 2i + 1$ et $3^{q+1} \times i + 2$, deux nombres impairs qui se suivent sauf si $i = 0$.

QED

Le comportement de sous-itérations est lui-même intéressant.

Soit \mathbb{Q}' l'ensemble des fractions dont le dénominateur est impair. Il est contenu dans \mathbb{Z}_2 . Il consiste exactement en les entiers 2-adiques dont la suite des 2-digits est finie ou périodique.

Proposition (Lagarias, 1985, [4]) : La conjecture des cycles finis est équivalente à : il existe un entier impair M tel que : $Q_\infty(\mathbb{Z}) \subset (1/M)\mathbb{Z}$

En fait on peut prendre $M = \prod(2^l - 1)$ où le produit est pris sur tous les entiers l pour lesquels il existe un cycle minimal de longueur l .

Conjecture de périodicité (Lagarias, 1985, [4]) : $Q_\infty(\mathbb{Q}') = \mathbb{Q}'$

Exemple : $Q_\infty(10) = -26/3$; $Q_\infty(-26/3) = -54$; $Q_\infty(-54) = -82/7$; $Q_\infty(-82/7) = ?/15$

On peut voir que si m possède une trajectoire divergente alors la suite $(x_0(m), x_1(m), \dots)$ ne peut pas être périodique. Si cette conjecture s'avère être vraie, alors il en va de même pour la conjecture des trajectoires (non) divergentes.

Ensembles suffisants

Définition : S est suffisant si pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $s \in S$ tel que la trajectoire de m selon T coupe celle de s . C'est-à-dire qu'il existe k et l tel que $T^{(k)}(m) = T^{(l)}(s)$.

A noter qu'à partir de cette valeur commune, les trajectoires sont identiques.

Proposition : $F_1 \cup F_2$ est un ensemble suffisant.

Démonstration :

Par itération de l'opération $P : x \rightarrow (x - 1)/4$ $m \notin F_1 \cup F_2$ impair va sur un élément m' de F_1 ou F_2 . Puis on a $N(m) = N(m')$.

QED

Avec la même démonstration on a :

Proposition : $F_s \cup F_{s+1}$ est un ensemble suffisant.

Il existe donc des ensembles suffisants de densité aussi faible que l'on veut. Toutefois, cela reporte le problème de \mathbb{N} sur un autre ensemble infini.

Proposition : F_{2^s} est un ensemble suffisant pour tout $s \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration : Il suffit de voir que pour tout élément de F_1 , il existe un élément de F_2 tel que les deux trajectoires se rencontrent.

On considère successivement les ensembles $F_1 \cap S_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

1. $x \in F_1 \cap S_1$

$x = 2^{2n-1}(4k + 1) - 1$ avec $n \geq 2$

$N^{(2n-2)}(x) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(8k + 2) - 1) = 3^{2n-2}(8k + 2) - 1 \equiv 1 \pmod{8}$ et donc $N^{(2n-2)}(x) \in F_2$.

2. $x \in S_2 \subset F_1$

$x = 2^{2n}(4k + 3) - 1$ avec $n \geq 1$

$N^{(2n-1)}(x) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(8k+6) - 1) = 3^{2n-1}(8k+6) - 1 \equiv 1 \pmod{8}$ et donc $N^{(2n-1)}(x) \in F_2$.

3. $x \in F_1 \cap S_3$

$$x = 2^{2n-1}(4k+3) - 1, n \geq 2$$

$$N^{(2n-2)}(x) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(8k+6) - 1) = 3^{2n-2}(8k+6) - 1$$

Par ailleurs on prend $y = (x-1)/2 = 2^{2n-2}(4k+3) - 1 \in S_2$

$$N^{(2n-2)}(y) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(4k+3) - 1) = [3^{2n-2}(4k+3) - 1] = (3^{2n-2}(4k+3) - 1)/2$$

puisque $3^{2n-2}(4k+3) - 1 \equiv 2 \pmod{4}$

On a : $4N^{(2n-2)}(y) + 1 = N^{(2n-2)}(x)$ et donc $N^{(2n-1)}(y) = N^{(2n-1)}(x)$

4.1. $x \in S_4 \subset F_1, x = 2^{2n}(4k+1) - 1, n = 1$

$$x = 3 + 16k, y = (x-1)/2 = 1 + 8k \in F_2$$

$$N^{(2)}(x) = N^{(2)}(y) = [2 + 9k]$$

4.2. $x \in S_4 \subset F_1, x = 2^{2n}(4k+1) - 1, n \geq 2$

$$N^{(2n-1)}(x) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(8k+2) - 1) = 3^{2n-1}(8k+2) - 1$$

On considère $y = (x-1)/2 = 2^{2n-1}(4k+1) - 1 \in F_1 \cap S_1$

$$N^{(2n-1)}(y) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(4k+1) - 1) = [3^{2n-1}(4k+1) - 1] = (3^{2n-1}(4k+3) - 1)/2$$

On a : $4N^{(2n-1)}(y) + 1 = N^{(2n-1)}(x)$ et donc $N^{(2n)}(y) = N^{(2n)}(x)$

QED

Andaloro (1998, [21]) indique que Korec & Znam ont démontré que les progressions arithmétiques $(a \pmod{p^n})$ constituent des ensembles suffisants si $(a, p) = 1$ et 2 est une racine primitive $\pmod{p^2}$ ²⁰. Il montre lui-même que $1 + 16\mathbb{N}$ est suffisant et conjecture que $1 + 2^n\mathbb{N}$ est suffisant pour tout n .

Théorème (Monks, 2006, [58]) : $a + b\mathbb{N}$ est suffisant pour tout a et b de \mathbb{N} .

Autrement dit l'ensemble formé des éléments de n'importe quelle suite arithmétique est suffisant.

Corollaire : Tout suite arithmétique est suffisante pour les sous-conjectures « nontrivial cycles » et « (no) divergent orbits ».

Remarque : La découverte d'ensembles suffisants de densité aussi faible que l'on veut, intéressante en soi, ne semble pas simplifier le problème. Celui-ci est reporté sur le nouvel ensemble.

Extension aux nombres réels ou p-adiques

La fonction proposée par Chamberland (2006, [31], [32]) est la suivante :

$$f(x) = x + \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4} \cos(\pi x)$$

20. C'est-à-dire tout inversible de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ est une puissance de 2 $\pmod{p^2}$

Il montre en particulier que les intervalles $I_1 = [0, \mu_1]$ et $I_2 = [\mu_1, \mu_3]$ sont invariants par f , où $\mu_1 \approx 0.277$ et $\mu_3 \approx 2.445$ sont des points fixes répulsifs.

Par contre $I_3 = [\mu_3, \infty[$ n'est pas invariant et l'auteur considère l'ensemble (escape set) $E_f = \{x \in I_3 : \sup \omega(x) < \mu_3\}$ où $\omega(x)$ est l'ensemble limite de la trajectoire de x .

$R_f = \{x \in I_3 : \inf \omega(x) \geq \mu_3\}$ est l'ensemble des résidus (residue set). Dans cet ensemble, on distingue S_f (stable set) bassin d'attraction de toutes les trajectoires périodiques de f dans I_3 et son complémentaire U_f (unstable set) dont on distingue $U_f^\infty = \{x \in R_f : \limsup_{k \rightarrow \infty} f^{(k)}(x) = \infty\}$

Fleckinger et Abdoukarim (2015, [42]) ont étudié une généralisation de la conjecture de Collatz dans \mathbb{Q}_p extension p-adique de \mathbb{Q} . Pour $u \in \mathbb{Z}_p$:

$$g_{p,q}(u) = \begin{cases} u/p & \text{si } p|m \\ (qu + \epsilon_0(-qu))/p & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec la fonction $\epsilon_0 : \mathbb{Z}_p \mapsto \{0, 1, \dots, p-1\}$ donnée par $\epsilon_0(u) \equiv u \pmod{p}$. C'est-à-dire ϵ_0 donne le premier coefficient du développement de Hensel. Donc le premier coefficient de $qu + \epsilon_0(-qu)$ est nul. Ce nombre est donc divisible par p dans \mathbb{Z}_p .

Ils définissent également un « équivalent » de la fonction Q_∞ .

$$\Phi_{p,q}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_0(-qu_n) p^n$$

où $u_n = g_{p,q}^n(u)$. C'est une isométrie de \mathbb{Z}_p . Elle se prolonge à \mathbb{Q}_p par :

$$\Phi_{p,q}(p^{-n}u) = p^{-n} \Phi_{p,q}(u)$$

avec $u \in \mathbb{Z}_p$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les applications de Conway (Conway map)

Un cadre général et naturel de la généralisation du problème de Syracuse a été proposé par Conway en 1972. Ces applications de Conway, connues sous diverses appellations, sont détaillées par Belaga & Mignotte (2006, [59], 2015, Belaga [28]).

Définition (Conway M_p, R_p -map) : Soient $p \geq 2 \in \mathbb{N}$ et deux ensembles de nombres entiers $M_p = \{m_0, m_1, \dots, m_{p-1}\}$ et $R_p = \{r_0, m_1, \dots, r_{p-1}\}$ tels que :

m_i est premier avec p et $r_i \equiv im_i \pmod{p}$ pour $i = 1, \dots, p$.

(1) La Conway (M_p, R_p) -map $T = T_{M_p, R_p} : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ est donnée par :

$$T(m) = \frac{m_i m - r_i}{p} \text{ pour } m \equiv i \pmod{p}$$

(2) La Conway M_p -map multiplicative correspond à la Conway (M_p, R_p) -map où $r_i = 0$ pour tout i .

$\mu(T) = m_0 \times \dots \times m_{p-1}$ est l'indice de contraction-expansion (conex-index) de T .

Exemple : $T_d = T_{M_2, R_2}$ avec $M_2 = \{1, 3\}$ et $R_2 = \{0, -d\}$.

Résumé des conjectures

Les conjectures foisonnent. En faire un recensement est le but premier de cet article. En plus de la conjecture de base, originale, avec des versions plus ou moins fortes ou faibles, on trouve de nombreuses variantes ou des formulations équivalentes dans divers domaines mathématiques.

Les variations peuvent concerner la relation de récurrence utilisée, le domaine de définition et la conclusion. Cette dernière peut affirmer l'existence d'un seul cycle trivial, ou alors de plusieurs cycles (en nombre fini ou non) ou encore l'existence ou non de suites divergentes. La formulation peut aussi varier en fonction de la version C , T ou N de la relation utilisée. Les conjectures concernant l'existence de plusieurs cycles ou de non convergence peuvent être qualifiées de « anti-syracuse ».

Par ailleurs, on peut montrer que la conjecture est équivalente à des conjectures exprimées ou reformulées dans des domaines divers.

Les conjectures de base

Conjecture de Collatz : La suite obtenue par itération de C aboutit au cycle $(1, 4, 2)$ quel que soit la valeur initiale.

Nontrivial cycles conjecture (forme faible de la conjecture de Collatz) : S'il existe m tel que $C^{(k)}(m) = m$ pour $k > 1$ alors $m = 1, 2$ ou 4 .

Est équivalente à :

Collatz Cycle Conjecture²¹ : La suite (1) est le seul cycle de N -Collatz avec des termes positifs.

Conjecture de (non) divergence ((no) divergent trajectories conjecture) : Toute les trajectoires $(C^{(k)}(m))_{k=0,\infty}$ sont bornées.

Cette conjecture implique que toutes les trajectoires aboutissent à un cycle.

Conjecture du temps d'arrêt fini : Toute trajectoire finit par repasser au-dessous de son origine.

Cette conjecture permet de démontrer la conjecture de Collatz par induction complète.

Conjecture en forme de semi-groupe affine : Soit S le semi-groupe affine engendré par $\{x \mapsto 2x; x \mapsto (2x - 1)/3\}$. L'orbite $\langle S : \{4\} \rangle$ contient tous les nombres entiers positifs supérieurs à 2.

Coefficient stopping time conjecture : Pour tout $m \geq 2$, le « stopping time » $\sigma(m)$ est égal au « coefficient stopping time » $\omega(m)$.

Extensions à \mathbb{Z}

On trouve ici des conjectures qui étendent les valeurs à \mathbb{Z} .

21. En prenant la formulation de Kaneda (2014, [60]) et en utilisant notre convention pour noter la suite de Collatz considérée.

Conjecture des cycles finis (Lagarias) : Il y a seulement un nombre fini de cycles distincts pour la fonction T itérée sur \mathbb{Z} .

Cette conjecture a été précisée :

Generalized Collatz Cycle Conjecture (Kaneda, 2014, [60]) : Les suites (1), (-1), (-5, -7), et (-17, -25, -37, -55, -41, -61, -91) sont les seuls cycles de N -Collatz.

Nous notons que :

$$T(-m) = \begin{cases} -m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (-qm + 1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

et comme $(-qm + 1)/2 = -(qm - 1)/2$, chercher les cycles sur les nombres négatifs revient à chercher ceux sur $qx - 1$ puis de prendre les nombres opposés²².

Ainsi donc l'étude des cycles liés à $qx + 1$ sur \mathbb{Z} se ramène celle des cycles $qx \pm 1$ sur \mathbb{N}

Par ailleurs, on sait que les cycles de $qx + d$ sont les cycles de $qx + 1$ amplifié par d . Le seul intérêt de l'étude de $qx + d$ est de mettre en évidence des cycles primitifs c'est-à-dire ne provenant pas de cycles de $qx + 1$.

Généralisations de la formule de récurrence

Des études ont proposé des relations de récurrence plus générales.

Oliveira (2010, [49]) expose la généralisation de la fonction C suivante (vraisemblablement due à Kakutani) :

$$C_{K,D}(m) = \begin{cases} m/d_D(m) & \text{si } d_D(m) > 1 \\ Km + 1 & \text{si } d_D(m) = 1 \end{cases}$$

Où $K \in \mathbb{N}, K > 1$, D est un ensemble de nombres entiers supérieurs à 1 et $d_D(m)$ vaut 1 si m n'est pas divisible par aucun des éléments de D et vaut le premier tel élément sinon.

$C_{3,\{2\}}$ est la fonction de Collatz.

Conjecture $5x + 1$ de Kakutani : La suite générée par itération de $C_{5,\{2,3\}}$ à partir de toute valeur entière positive atteint 1.

Conjecture $7x + 1$ de Kakutani : La suite générée par itération de $C_{7,\{2,3,5\}}$ à partir de toute valeur entière positive atteint 1.

A comparer avec l'anti-conjecture de Crandall citée par Delahaye concernant $5x + 1$.

Allouche (1979, [61])²³ étudie la généralisation du problème de Syracuse proposée par Hasse.

$$g(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 \pmod{d} \\ (nm - nm \% d)/d & \text{sinon} \end{cases}$$

22. (-7, -10, -5) est un cycle de $3x + 1$ et l'opposés de (7, 10, 5), cycle de $3x - 1$.

23. Avec une nouvelle allusion dans Allouche (2017, [62]).

Avec $n \geq 1$, $d \geq 2$ premiers entre eux. $nm \% d$ indique le reste de la division de nm par d .

Conjecture : Si $n < d/(d-1)$ il existe un nombre fini de cycles F sous g tel que pour tout m la trajectoire de $\tau_g(m)$ est finalement un élément de F . En particulier $\{m : \exists k, g^{(k)}(m) \geq m\}$ est fini.

Conjecture de Matthews-Watts, 1985 : Soit T_{M_p, R_p} une application de Conway

(i) Si T satisfait la condition de contraction $\mu(T) < p^p$, alors toutes les trajectoires τ_T sont finalement cycliques. En particulier, il existe au moins un cycle.

(ii) Si T satisfait la condition d'expansion $\mu(T) > p^p$, alors presque toutes les trajectoires τ_T sont divergentes. En particulier, il y a au moins une trajectoire divergente.

(iii) Le nombre de cycles est fini.

(iv) Si la trajectoire $\tau_T(m)$ est divergente, alors les valeurs itérées sont uniformément distribuées $(\text{mod } p^q)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

C'est la conjecture qui chapeaute largement toutes les généralisations classiques de la conjecture de Collatz.

Conjectures concernant $3x + d$

Il existe de multiples conjectures concernant les T_d -suites. Elles ne diffèrent parfois que par la formulation.

Pour la fonction T_d , il existe toujours le cycle « trivial » $(d, (3d+d)/2 = 2d)$ qui n'est pas primitif. La conjecture suivante affirme l'existence de cycles primitifs.

Primitive Cycles Existence Conjecture (Lagarias (1990, [1])) : Pour tout d nombre entier positif premier avec 6 il existe au moins un cycle primitif pour T_d .

La conjecture suivante limite toutefois le nombre de cycles primitifs.

Finite Primitive Cycles Conjecture (Lagarias (1990, [1])) : Pour tout d nombre entier positif premier avec 6 il existe un nombre fini de cycles primitifs pour T_d .

Conjecture P (Lagarias (1990, [1])) : Tout nombre positif $n_0 \equiv \pm 1 \pmod{6}$ est dans un cycle primitif d'une infinité de T_d avec $d \equiv \pm 1 \pmod{6}$.

Dhiraj ([2]) démontre un théorème concernant une condition suffisante pour l'existence d'un cycle primitif (voir aussi l'annexe 7).

Belaga & Mignotte (2006, [63]) calculent tous les cycles primitifs pour 6667 valeurs de d comprises entre 1 et 19999 et corroborent la conjecture de Lagarias. Ces calculs corroborent également des conjectures plus fines (Belaga & Mignotte (2000, [64]) énoncée en alourdissant l'appareillage symbolique. Notamment (avec D l'ensemble des nombres naturels premiers avec 6) :

Recurrence Threshold Conjecture : Pour tout $d \in D$, il existe un entier R tel que toute trajectoire passe dans l'intervalle $1 \leq m \leq R$ une infinité de fois. La valeur minimale de R est dénotée R_d et est appelée « T_d -recurrence threshold » (seuil de récurrence pour T_d).

Collapse Threshold Conjecture : Pour tout $d \in D$, il existe un entier L tel que toute trajectoire se trouve finalement dans l'intervalle $1 \leq m \leq L$. La valeur minimale de L est dénotée L_d et est appelée « T_d -collapse threshold » (seuil de collapse pour T_d).

Termination Set, or Attractor Conjecture : Pour tout $d \in D$, il existe un ensemble fini U de nombres naturels tel que toute trajectoire se trouve finalement dans U . L'intersection de tels ensembles U est notée U_d et est appelée « T_d -termination set » ou « T_d -attractor ».

Des conjectures concernent également des valeurs pour le périégée d'un cycle (valeur minimale, forcément impair d'un cycle). Certaines ont été démontrées (Belaga, 2003, [65], 2007, [66]).

$3n - 1$ conjecture (Vasantha et ali, 2016, [67]) : Les cycles sont ceux initiés par 1, 5 et 17.

$3n \pm p$ conjecture (Vasantha et ali, 2017, [68]) : Toutes les suites basées sur $3n \pm p$ avec p nombre premier entrent dans un cycle et il n'y a qu'un nombre fini de cycles différents.

Ces conjectures sont émises dans un autre « club », sans références aux conjectures plus anciennes de Lagarias qu'elles particularisent.

La conjecture sur les cycles finis de Lagarias est étendue aux valeur de d négatives dans l'ensemble \mathbb{Z}^{24} , sans inclure la clause de primitivité.

$(3x + d)$ -Cycle Conjecture (Kaneda, 2014, [60]) : Pour tout $d \in \mathbb{Z}$ avec $d \equiv 1 \pmod{6}$ ou $d \equiv -1 \pmod{6}$, le nombre de $(3x + d)$ -cycles est fini.

Conjectures concernant $qx + r$

Conjecture de Crandall (1978, [3]) à propos du $qx + r$ problème : Avec $(q, r) \neq (3, 1)$, q et r impair, il existe m impair tel que $N_{q,r}^{(k)}(m) = 1$ ne possède pas de solution.

Cette conjecture est trivialement prouvée pour $r > 1$ en prenant comme valeur d'origine $m \equiv 0 \pmod{r}$.

Pour $q = 5$ les origines $m = 13$ ou $m = 17$ conduisent à des cycles ne contenant pas 1 (par contre l'origine $m = 3$ conduit au N -cycle $(3, 1)$).

Si $q = 181$, $m = 27$ génère une suite sans la valeur 1. Et pour $q = 1093$ cela est vérifié pour $m \neq (2^{364p} - 1)/1093$.

La conjecture de Crandall est souvent citée en se limitant au cas $r = 1$.

Conjecture de Crandall simplifiée : Pour le problème $qx + 1$ avec $q > 3$ impair, il existe des valeurs initiales m dont les trajectoires ne contiennent pas 1.

Rappel : Les conjectures de ce genre sont parfois qualifiées de conjectures anti-Syracuse. Franco & Pomerance (1995, [69]) ont montré que cette conjecture est « presque vraie ». L'adaptation de l'argument heuristique suggère d'ailleurs :

24. A noter qu'un cycle ne peut contenir à la fois des nombres positifs et négatifs.

Conjecture des « vols infinis » (évoquée par Delahaye) : Pour la suite générée par la relation $qx + 1$ avec q supérieur à 3, il existe des vols infinis (c'est-à-dire qu'il existe une ou plusieurs valeurs initiales telles que la suite ne soit pas bornée).

Pour $5x + 1$ l'origine $m = 7$ semble conduire à un vol infini. Cette conjecture est à comparer à celle émise par Kakutani pour la suite $5x + 1$

Nous conjecturons qu'il en va de même avec $m = 11$.

Généralisations de la formule de récurrence à \mathbb{R} , \mathbb{Z}_2 ou \mathbb{Q}_p

Chamberland (1996, [31]) propose une interpolation f de T à \mathbb{R}^+ . Avec les notations de la page 28 on a :

Conjecture : f n'admet aucun cycle attractif sur l'intervalle $[\mu_3, \infty[$. ($\mu_3 \approx 2.445$)

Conjecture : $\mathbb{N} \cap R_f = \emptyset$

Elle est équivalente à la conjecture principale.

Stable set conjecture : $S_f = \emptyset$

Elle étend la *nontrivial cycle conjecture*

Divergent trajectories conjecture : $\mathbb{N} \cap U_f^\infty = \emptyset$

Unstable set conjecture : U_f est de mesure (Lebesgue) nulle.

Une conjecture de Lygeros et Rozier (2014, [33]) affine le lien entre les conjectures concernant le système dynamique proposé par Chamberland et les conjectures de Syracuse (cycles non-triviaux et trajectoires divergentes).

Conjecture de Collatz généralisée (Fleckinger et Abdoukarim, 2015, [42]) :
 $\Phi_{p,q}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Autres conjectures

Weak $3x + 1$ Conjecture : Le semi-groupe multiplicatif S généré par l'ensemble des nombres rationnels $n/T(n)$ contient tous les nombres entiers positifs.

Cette conjecture n'a pas été mentionnée précédemment. Elle est formulée par Farkas (2005, [70]) qui démontre que la conjecture de Collatz l'implique. Le semi-groupe S est aussi généré par 2 et les nombres $\frac{2n+1}{3n+1}$ avec $n \geq 0$.

J. Lagarias (2006, [71]) étudie le semi-groupe S^{-1} et finalement la conjecture est démontrée par Applegate et Lagarias (2006, [72]) : Le semi-groupe S est constitué de l'ensemble de tous les nombres rationnels positifs a/b avec b non multiples de 3. En particulier, il contient tous les entiers positifs.

Conjecture sur l'image de Q_∞ : $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z}$ (de fait $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$)

Si la conjecture de Collatz est vraie, le développement $Q_\infty(m)$ pour tout m se termine par la répétition de 1 et 0. Cela correspond à l'expression du nombre $1/3$.

Conjecture des Cycles finis : il existe un entier impair M tel que : $Q_\infty(\mathbb{Z}) \subset (1/M)\mathbb{Z}$

Random conjecture : Une suite aléatoire de Syracuse devient presque sûrement plus petite qu'une borne B fixée .

Cette conjecture est citée pour mémoire. Elle est « démontrée » par Slakmon et Macot (2003, [38], 2006, [55]) mais correspond de fait à l'heuristique développée précédemment page 16 (voir aussi la section Le monde de Syracuse page 35).

Conjecture du noyau d'une fonctionnelle : La conjecture de Collatz est vraie si et seulement si $K = \Delta_2$ avec K le noyau de deux fonctionnelles sur les fonctions holomorphes et Δ_2 l'ensemble généré par $\phi_0(z) = 1$ et $\phi_1(z) = z/(1 - z)$

Cette conjecture semble déconnectée de la conjecture originale. Toutefois, dans la tentative d'expression de la fonctionnelle, les relations génératrices de la suite de Collatz réapparaissent.

Divisibility problem involving powers of 2 and 3 : Il n'existe pas de suite croissante $0 = a_1 < a_2 < \dots < a_{n+1}$ telle que $2^{a_{n+1}} - 3^n$ soit un diviseur propre de $3^{n-1}2^{a_1} + 3^{n-2}2^{a_2} + \dots + 2^{a_n}$.

C'est une nouvelle formulation de la conjecture faible. Cette conjecture semble la seule totalement déconnectée de la conjecture faible originale.

« Le monde de Syracuse »

Après avoir passé en revue, du point de vue mathématique, divers travaux liés à la conjecture de Syracuse, cette section va porter un regard plus socio-cognitif sur la production de « résultats tout venant » concernant la suite de Syracuse.

On peut classer les travaux consultés en quelques catégories créées à partir de trois critères : démonstration d'une propriété associée ou « démonstration » de la conjecture (auquel cas il s'agit d'une analyse d'erreur) ; production naïve ou savante ; avec erreur (ou maladresse) ou apparemment correcte.

Dans cette classification, on distingue différents répertoires : celui des productions savantes, de mathématiciens respectant les usages et formes des textes mathématiques et celui des travaux d'un public plus élargi mais assez disparate qui comprend des mathématiciens débutants, de scientifiques ou d'ingénieurs moins rompus à l'écriture de textes mathématiques et d'amateurs plus ou moins éclairés.

Cela mettra en évidence les représentations naïves que peut revêtir une question mathématique²⁵.

Le niveau des amateurs peut être caractérisé par cette remarque de l'un d'eux « *les mathématiciens qui se réfèrent au problème comme le '3x+1 problem' n'ont pas eu le*

25. Une étude des productions plus ou moins naïves concernant la trisection de l'angle, la quadrature du cercle ou alors récemment du dernier théorème de Fermat mériterait d'être faite s'il elle ne l'a pas déjà été. Mais les traces laissées par de tels travaux dans l'ère pré-Internet sont ténues. Un des auteurs, comme assistant du président de la Société suisse des mathématiciens, a eu l'occasion de relire plusieurs de ces travaux proposés à la Société. Ils étaient rapidement jugés de peu d'intérêt mathématique, ce qui n'est pas faux. Toutefois, leur apport du point de vue socio-cognitif, voire de l'éducation mathématique, mériterait d'être approfondi.

lavage de cerveau par FORTRAN (comme je l'ai été) qui fait croire que seul n , et pas x , représente un entier »²⁶

Productions naïves

Les travaux faisant partie de cette catégorie sont effectués par des personnes peu au courant des formes élémentaires du raisonnement mathématique et/ou de sa présentation. Le média Internet favorise certainement la communication dans un mode décomplexé, voire parfois arrogant. L'annexe 10 présente quelques exemples recueillis sur des forums. La tentative de Dianopoulos (2012, [19], 2013, [20]) déjà citée en constitue un autre exemple.

De nombreux sites personnels, tel que celui de O. Pirson ([74]) présentent des références (parmi d'autres) au problème de Syracuse, voire des éléments de calcul.

« Démonstration » de la conjecture

Il n'existe évidemment pas de démonstration correcte de la conjecture et cette section est finalement consacrée à une analyse d'erreurs, dont la pratique, en dehors du monde scolaire et de la recherche en didactique, est peu fréquente.

On peut imaginer que les articles « savants » présentant des erreurs sont rares ou alors retirés rapidement de la circulation.

Le travail de Opfer [16] en particulier part d'une équivalence originale et non triviale de la conjecture (établie par Berg & Meinardus) avec une propriété de fonctionnelles de fonctions analytiques. Il recèle une erreur repérée par l'auteur. Le problème revient à démontrer que l'ensemble constitué à partir du noyau de deux fonctionnelles linéaires sur les fonctions holomorphes définies sur \mathbb{C} est l'ensemble Δ_2 généré par $\phi_0(z) = 1$ et $\phi_1(z) = z/(1 - z)$.

Cette conjecture semble déconnectée de la conjecture originale. Toutefois, dans la tentative d'expression de la fonctionnelle, les relations génératrices de la suite de Collatz réapparaissent.

Les autres travaux de cette catégorie pourraient être qualifiés de savamment naïfs dans la mesure où les auteurs ne semblent pas se méfier de la difficulté du problème. Les travaux respectent les formes mathématiques courantes mais ignorent en général la littérature consacrée au sujet.

Il n'est pas facile de repérer l'erreur fatale dans un article. Ainsi, nous nous sommes permis d'abandonner la relecture dès que nous avons repéré 3 ou 4 « naïvetés » ou micro-erreurs.

Le travail de Slakmon & Macot (ultérieur à 2003, [38], révisé en 2006 [55]) est déroutant. Par son titre *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences*, il semble décrire

26. « Mathematicians who refer to the problem as the $3x + 1$ problem were never brainwashed by FORTRAN (as I was) into the belief that n , not x , stands for an integer » [73]

un résultat plus fort que celui obtenu par le théorème de Terras. Lagarias (2012, [24])²⁷ précise, en suivant l'introduction de l'article, que celui-ci montre que la *random Syracuse conjecture* est vraie dans le sens qu'une suite de Syracuse aléatoire devient presque sûrement inférieure à une valeur $B \geq 1$ spécifiée à l'avance. Dans le texte lui-même il est mentionné qu'une hypothèse auxiliaire est faite, celle de l'équiprobabilité d'obtenir des valeurs paires et impaires à chaque pas. De plus, pour augmenter la confusion, le *presque toutes* disparaît de façon mystérieuse et un article de Z. Mazur du Carrefour des opinions du 27 mai 2010²⁸ félicite les auteurs d'avoir résolu ce problème. « Votre gloire rejaillit un peu sur nous tous » est-il dit.

Notre conclusion est que ce résultat est finalement équivalent à l'heuristique présentée à la page 16.

Conrow prétend démontrer la conjecture à travers de longs développements disponibles sur le web ([73]) et un article de résumé (Conrow, 2007, [75]).

Il travaille sur la N -suite de Collatz des nombres impairs et utilise de façon intensive l'arbre des prédécesseurs. Il repère notamment les arêtes s (le prédécesseur est plus petit, par ex. 5 - 3), b (le prédécesseur plus grand, par ex. 7 - 9) et e où les nombres sont reliés par la relation $4n+1$ (par ex. 3 - 13 ou 9 - 37) entre les nombres ayant le même descendant.

Sous le titre *Has anyone read Ken Conrow's Collatz Conjecture website?* le blogueur Mensanator²⁹ décortique le travail de Conrow. En résumé, Conrow décompose le graphe de Collatz en segment de "header" les nombres de la forme $5 \pmod{8}$. En rassemblant ces "headers", il construit le graphe APT Abstract Predecessor Tree (APT) et montre que la densité de ce graphe est 1. Le fait que le graphe considéré n'est pas connexe est une faille dans la démonstration. Le contre-exemple $3x+7$ vient à l'appui de cette remarque.

Ghosh³⁰ (2009, [76], [53]) démontre qu'il n'y a pas d'autres cycles que le cycle trivial. Il procède par induction sur la longueur du cycle. Il démontre astucieusement en utilisant la formule 3 de la page 10 que la valeur minimum du cycle est majorée par une constante $\kappa(m)$ qui dépend de la longueur m du cycle. Puis il procède par récurrence sur la longueur du cycle et utilise l'affirmation que cette valeur minimum est supérieur à $\kappa(m-1)$. C'est une sorte de réciproque certainement erronée qui invalide le reste de la démonstration.

Nous avons déjà cité le travail de Feinstein (2012, [17]) qui démontre la non-démonstrabilité de la conjecture. Il montre que toute preuve de la conjecture doit avoir un nombre infini de lignes; donc aucune preuve formelle n'est possible. Il se base de façon suspecte sur un raisonnement de Freeman Dyson³¹ qui paraît lui-même suspect. L'argument suivant donné à propos d'un de ses exemples est notamment imparable « It cannot be proved because there is no deep mathematical reason why it has to be true ».

Conrow³² analyse le travail de Feinstein et prétend que son propre travail sur la représentation des trajectoires montre « naïvement » que la preuve de ce dernier n'est pas

27. L'article paraît aussi cité dans la bibliographie de Chamberland (2010), mais n'est pas référencé dans le corps du texte.

28. Un problème mathématique d'envergure mondiale enfin résolu! <http://www.lecarrefourdesopinions.ca/?p=3035>

29. <https://www.physicsforums.com/threads/has-anyone-read-ken-conrows-collatz-conjecture-website.335859/>

30. Elève de Feinstein.

31. https://www.edge.org/q2005/q05_9.html

32. <http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/cafEinst.html>

correcte³³. Par contre, rappelons qu'il estime lui-même avoir démontré le théorème³⁴.

Schorer (2014, [45], [46]) associe à chaque suite de nombres naturels $A = (a_2, \dots, a_i)$ ce qu'il appelle les tuple-set T_A . Un tuple est constitué des fragments de N -suites de Syracuse suivants :

- les singletons (x) tels que $\nu(3x + 1) \neq a_2$
- les paires $(x, N(x))$ telles que $\nu(3x + 1) = a_2$ et $\nu(3N(x) + 1) \neq a_3$
- etc.
- les suites $(x, N(x), \dots, N^{(i-1)}(x))$ telles que $\nu(3N^{(j-2)}(x) + 1) = a_j$ pour $j < i$ et $\nu(3N^{(i-2)}(x) + 1) \neq a_i$

Exemple : Avec $A = (1, 1, 2)$, les tuples (1) , $(3, 5)$, $(15, 23, 35)$ sont des éléments de T_A .

Ensuite l'auteur définit un indice lié à l'ensemble A avec un vocabulaire et des énoncés (Lemme 1.0) qui font penser à une distance entre tuples. Schorer construit ensuite deux ensembles de tuples, l'un sous l'hypothèse de l'existence de contre-exemples à la conjecture et l'autre sous l'hypothèse de l'inexistence de contre-exemple. En se basant sur la fonction distance, il montre que les deux ensembles sont égaux. Il en déduit (nous simplifions son argumentation) que soit le sous-ensemble des non contre-exemples soit celui des contre-exemples est vide.

Haynberg (2009, [43]) apporte une critique à une première version (Schorer, 2009, [77]) qui n'est plus accessible. Cette critique reste valable pour les corrections apportées par Schorer dans les versions actuellement disponibles qui contiennent de plus des considérations de type logique, notamment une section intitulée « Common Misconceptions About the Nature of Comparison of Mutually-Exclusive Cases » pour justifier son raisonnement.

Toutefois, Schorer conscient des lacunes formelles de son travail est à la recherche d'aide pour formaliser son travail et partager ainsi l'honneur de la découverte.

Berkouk (2015, [78])³⁵ commence par démontrer que l'élément minimum d'un cycle est impair et que le cycle trivial est le seul cycle de longueur 3. En utilisant l'inégalité 4 page 13 entre le nombre de termes pairs et le nombre de termes impairs, il déduit (en oubliant qu'il peut y avoir de nombreuses fractions rationnelles inférieures à $\log 2 / \log 3$) qu'il n'existe aucun cycle de longueur supérieure à 3.

En décomposant les nombres impairs sous diverses formes (par exemple sous la forme $2^p x - 1$) il montre ensuite en plusieurs étapes que la suite décroît. Ce qui élimine les suites divergentes. Ce qui est vrai pour les nombres de la forme $4x + 1$. Il montre que les suites d'origine un nombre de la forme $4x + 3$ aboutissent à un nombre de la forme $4x + 1$. Dans sa démonstration par récurrence, il utilise la formule sans tenir compte de la parité des résultats intermédiaires.

Farid Baleh (Baleh, 2017, [80]) démontre que le cycle trivial est unique. Partant de l'hypothèse de l'existence d'un cycle, l'auteur exprime de façon correcte les éléments de la suite en fonction de leur position dans le cycle. Puis il utilise de façon incomplète l'unicité d'une valeur limite (en oubliant qu'il faut évidemment que cette valeur existe)

33. Il évoque également et analyse des références qu'il juge douteuses !

34. <http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/cafproof.html>

35. <http://vixra.org/abs/1507.0200>

pour conclure que le cycle est le cycle trivial³⁶.

L'article de N. Karl-Augustt Alahassa (2017, [81]) expose également une prétendue démonstration de la conjecture. Cet article est d'un abord ardu dans la mesure où plusieurs notions classiques sont longuement redéfinies. Par exemple, dans une première partie, l'auteur introduit la notion un peu ambiguë de "cantus" sans se référer à la décomposition d'un nombre en base deux qui lui sert de base.

Par ailleurs, l'auteur est enclin à démontrer de nombreuses trivialités ($3p + 1$ pair ssi p est impair, il n'existe pas de n_0 tel que $g(n_0)(1) < 1$) où g est la fonction C -Collatz, etc.

Une formule « intéressante » est toutefois proposée : $C^{2n+1}(q2^n + 2^{n-1} + \dots + 2 + 1) = 3^n q/2 + 3^{n-1} + \dots + 1$ avec q pair qui se montre facilement par induction complète.

Cette première partie ne semble pas utile dans la suite où l'auteur utilise l'arbre (graphe) de Syracuse et « démontre » qu'il est égal à un arbre généré depuis 1 à l'aide des fonctions $2x$ et $(x - 1)/3$. Implicitement (et plusieurs contacts avec l'auteur l'ont explicité) pour lui ce graphe contient tous les nombres naturels. Vraisemblablement la charge cognitive nécessaire à la démonstration de différents résultats (triviaux comme la connexité du graphe) lui a permis de se donner l'illusion que tous les nombres étaient atteints.

Après plusieurs échanges avec l'auteur³⁷, on peut conclure que sa démonstration vise à prouver que chaque trajectoire passe au-dessous de son origine. L'algorithme que l'auteur donne pour trouver cette valeur ne fonctionne pas correctement et donne des valeurs non entières.

Démonstration de propriétés associées ; productions savantes ou naïves correctes

Les articles recensés par Lagarias et ceux publiés dans des revues à comité de lecture relèvent de cette catégorie dans le répertoire savant. Mais il peut aussi y avoir des pages sur Internet relevant de cette catégorie, par exemple une des rubriques du blog de Tao.

Les autres productions ont été trouvées dans des archive ouvertes (arXiv ou Hal), sur des blogs ou forums ou encore sur des sites personnels, par exemple celui de O. Rozier ([82]), mais parfois dans des revues.

C'est dans cette catégorie que l'on peut placer les démonstrations d'équivalence de la conjecture dont les références ont été données dans la section qui leur est consacrée.

Relevons encore les articles consacrés à des calculs de bornes (Belaga, 2003, [65] ; Belaga, 2007, [66]).

Le travail de Simonetto (2016, [83]) : « Conjecture de Syracuse : avancées inédites » représente une forme naïve plus élaborée que celles mentionnées dans la sous-section des

36. L'auteur contacté nous écrit : « J'ai en fait commis une erreur grossière car la suite x_n/a_n est équivalente à u_{r_n} lorsque n tend vers l'infini, r_n étant compris entre 0 et $T - 1$. J'ai donc fait une confusion avec l'unicité d'une limite quand elle existe...

Par conséquent, ma démonstration n'est pas valable, et je continue à travailler sur cette conjecture de Collatz, comme vous je suppose (pour ma part, je le fait en amateur, étant ingénieur dans le domaine de la R&D en télécoms). »

37. Malgré ces échanges nous n'avons pas pu le faire douter de son raisonnement.

« Productions naïves ». Il propose un document de plus de 300 pages disponible sur Amazon³⁸ qui mêle des éléments didactiques (qu'est-ce qu'une conjecture ?), épistémologiques (pourquoi chercher ?), allégoriques (Pommade magique, trou noir, bourse!) et calculatoires. Sur ce dernier aspect de multiples variantes sont présentées et diverses conjectures sont proposées pour les suites construites à partir des relations $u_n/2 \pm 1$, $(3u_n \pm 1)/2$ et $(3u_n \pm 3)/2$ (36 combinaisons possibles) et des suite « complémentaire » construites à partir de $3w_n/2$ et $(w_m \pm 1)/2$.

Outre les conjectures des questions émergent, par exemple : le calcul de probabilités peut-il renseigner notre problème ?

Il est à noter qu'aucune référence ou renvoi n'est fait à la riche bibliographie fournie. L'auteur³⁹ précise d'ailleurs que l'ouvrage a été rédigé (en une année) sans l'aide d'aucun autre auteur.

Lors de notre travail de lecture nous nous sommes parfois trouvés confrontés à des difficultés de compréhension face à des raccourcis et/ou maladroites parfois récupérables.

Un exemple repris de la version simplifiée du théorème de Terras publiée par Eric Roosendaal que nous avons déjà mentionnée est particulièrement intéressant. Il révèle une difficulté liée à la remarque que nous avons faite à propos de l'heuristique. Il s'agit du lemme :

Lemme 4⁴⁰ : $T^{(k)}(n) \approx \lambda_k(n)n$ c'est-à-dire $\lim_{T^{(k)}(n) \rightarrow \infty} \frac{T^{(k)}(n) - \lambda_k(n)n}{T^{(k)}(n)} = 0$

Ce lemme utilise, sans hypothèse *ab absurdo* ni autre précaution, une limite lorsque la valeur de $T^{(k)}(n)$ tend vers l'infini alors que k est la variable libre. Sans compter que l'on n'aimerait justement pas que cette valeur tende vers l'infini.

Conclusion

Le point de départ de notre travail était le constat de la prolifération des conjectures liées au problème de Syracuse.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous nous sommes intéressés à faire un état du microcosme « s'agitant » autour de la suite de Collatz. Notre méthode a été de consulter les moteurs de recherche et de suivre quelques références bibliographiques. Dans la bibliographie, on verra que la plupart des articles « historiques » ont été mis à disposition librement sur Internet.

38. Egalement diffusé sur Internet : <https://mathsyracuse.wordpress.com/>

39. Il précise n'être pas mathématicien, mais diplômé de grandes écoles d'ingénieurs et que ses fonctions en entreprise l'ont éloigné des sciences et de leurs « sens aigu de l'analyse et des méthodes ».

40. La démonstration utilise la relation 5 page 21 sous la forme :

$$\frac{T^{(k)}(n) - \lambda_k(n)n}{T^{(k)}(n)} = \frac{\rho_k(n)}{T^{(k)}(n)} = \frac{\rho_k(n)}{\lambda_k(n)n + \rho_k(n)}$$

Il faut mentionner que les exemples sont toutefois assez convaincants.

- $n = 17$; $(17, 26, 13, 20, 10, 5)$; $T^{(5)}(17) = 5$; $v_5(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$
- $\lambda_5(17) \times 17 = (3^2 \times 17)/2^5 = 4.78$; (erreur : 4,4%)
- $n = 123$; $(123, 185, 278, 139, 209, 314)$; $T^{(5)}(123) = 314$; $v_5(123) = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$
- $\lambda_5(123) \times 123 = (3^4 \times 123)/2^5 = 311.34$; (erreur : 0,8%)

La plupart des travaux plus récents ont été consultés sur des sites ou blogs personnels ou les archives ouvertes arXiv et Hal.

En cours de travail, nous avons trouvé plusieurs tentatives de démonstrations de la conjecture. Il nous a paru intéressant d'en garder trace. Nous avons étendu notre propos initial en examinant, bien que parfois superficiellement, tous les travaux se référant au problème de Syracuse : ceux affirmant la démonstration de la conjecture (il va sans dire que nous tenons le problème comme non résolu), les tentatives avortées et encore les développements d'amateurs qui se placent en dehors des courants initiés par les mathématiciens professionnels.

Remarques concernant les publics

L'ensemble des articles donne l'impression que chez les mathématiciens professionnels « confirmés » un espoir de démontrer la conjecture subsistait encore dans les années quatre-vingt-dix. Il restait encore des extensions et des généralisations d'où pouvait provenir la délivrance. Puis, chez le même public, la conjecture semble être devenue petit à petit une sorte de terrain de jeu. Des résultats d'une assez grande technicité apparaissent pour étendre le domaine de définition du processus, de la fonction de récurrence ou pour démontrer différentes propriétés annexes à la conjecture originale (estimation de maxima, par exemple). Ceci sans que l'apport à la démonstration de la conjecture ne soit évident, ni annoncé explicitement. C'est une occasion de faire des mathématiques sans forcément s'intéresser à la nature profonde du problème.

Parmi les auteurs qui persistent et proposent des démonstrations plusieurs proviennent étonnamment du monde universitaire, ce sont aussi bien des étudiants que des membres du corps enseignant. Il est intéressant de noter l'effort fait par certains pour analyser et décortiquer le travail d'autres, et cela même pour des travaux encore immatures et difficilement compréhensibles. Des collaborations s'instaurent dans toutes les strates de culture mathématique.

Nous avons pensé à énoncer une conjecture qui finalement est vraisemblablement à réfuter :

Conjecture : La croyance dans la possibilité de démontrer la conjecture de Syracuse est inversement proportionnel à la culture mathématique de l'auteur.

Certains amateurs, ils aboutissent sans trop de mal à plusieurs formules butoirs classiques (par exemple la formule 3 page 10). C'est souvent en voulant forcer ce barrage que les erreurs sont commises. L'aspect « fractal » du processus de recherche des nombres qui vérifient la conjectures - ce qu'illustrent les graphes des prédécesseurs - incite également à imaginer une sorte de limite à l'infini embrassant tous les nombres.

On notera la différence de style entre les auteurs de culture francophone et ceux de culture anglo-saxonne. A la différence des seconds, les premiers introduisent de nombreuses notations et définitions (nombres de Collatz, couronne de Collatz, etc.). Ils recourent à un vocabulaire imagé : temps de vol (pour temps d'arrêt - stopping time), distance de vol, temps de vol en altitude, etc. Il n'est pas certain que cela permette de mieux traiter le problème.

Remarques concernant les erreurs à éviter

L'examen de la suite de Syracuse demande quelques précautions. On note quelques difficultés récurrentes, notamment, le « presque partout » est d'une utilisation délicate avec des risques de confusion entre l'ensemble de départ \mathbb{N} et l'ensemble des points de la trajectoire, un germe étant donné d'avance.

Ensuite, il s'agit de bien distinguer les deux conjectures : celle concernant l'absence de suites divergentes et celle concernant l'impossibilité de cycles non-triviaux. Les raisonnements qui se basent sur des moyennes ou des limites liées à des suites infinies, et mêmes divergentes, peuvent parfois oublier l'existence possible de cycles non triviaux.

On note que plusieurs auteurs travaillant sur les prédécesseurs (et notamment l'arbre lié à cette relation), finissent par « démontrer » que l'ensemble des prédécesseurs de 1 est l'ensemble des naturels. Qu'est-ce qui rend cette erreur si commune ? Dans ce processus constructif, il apparaît que l'ensemble des nombres qui restent à tester s'éclaircit au fur et à mesure du travail. Cette perception induit certainement les erreurs commises par la suite.

Par ailleurs, on note qu'un réflexe simple est souvent oublié. Celui de se pas se lancer dans des développements qui ne permettent pas de distinguer le cas $3x + 1$ d'autres cas, par exemple $5x + 1$.

Remarques à propos des reformulations

La conjecture de Syracuse est à plusieurs reprises reformulée dans un autre domaine. Toutefois, la plupart du temps, il est difficile de déconnecter la nouvelle conjecture des propriétés de la suite de Syracuse originale. Comme le notait déjà Lagarias (1985, [4]) : quelles propriétés intéressantes possèdent la fonction Q_∞ ? Possède-t-elle une caractérisation autre que la définition récursive liée à la suite de Syracuse ?

Les deux cas relativement déconnectés de la conjecture originale rencontrés sont ceux de la formule 3 page 10 (qui reste une question ouverte) et l'utilisation de la théorie ergodique avec \mathbb{Z}_2 qui conduit à une impasse. De ce point de vue, le recours au noyau d'une fonctionnelle dans les fonctions analytiques constitue peut-être un autre exemple.

Chacun ramène le problème dans sa spécialité : théorie des nombres, nombres p-adiques, théorie des fonctions analytiques, etc. Les tentatives de résolution de ce nouveau problème se confrontent aux difficultés du problème initial formulées dans un nouveau langage.

Dans quel recoin mathématique peuvent se cacher les contraintes fortes qui relient des nombres d'une suite de Syracuse ? Entre analyse, arithmétique et logique, le cas semble encore assez loin d'être tranché.

En guise de postface : le deuxième problème de Collatz ⁴¹

Soit la fonction g donnée par :

41. Selon Bagarras cité par Lagarias (1985, [4]) ce serait le problème original de Collatz datant de 1932.

$$g(m) = \begin{cases} \frac{2}{3}m & \text{si } m \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{4}{3}m - \frac{1}{3} & \text{si } m \equiv 1 \pmod{3} \\ \frac{4}{3}m + \frac{1}{3} & \text{si } m \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

C'est une application de Conway avec $M_3 = \{2, 4, 4\}$ et $R_3 = \{0, 1, -1\}$

Cette fonction génère une permutation P des nombres naturels :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \dots \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6 \dots \end{pmatrix}$$

ou sous forme de cycles : $P = (2\ 3)(4\ 5\ 7\ 9\ 6)(8\ \dots)$

Conjecture : le cycle de 8 est infini.

Complément

Nous rassemblons ici quelques articles dont les références nous ont été principalement transmises par Google Scholar ou le site Researchgate.

Encore des démonstrations de la conjecture ou de sa négation

M. Orus-Lacort (2018, [84]) propose de démontrer la conjecture par induction mathématique. Dans son argumentation pour le passage du cas m au cas $m+1$, l'auteur utilise un passage à la limite qui met en oeuvre la formule itérée (1). Les deux raisonnements sont évidemment incompatibles.

D. Jenber (2018, [85]) établit des « preuves » de la conjecture de Collatz pour quelques familles de nombres qui sont de fait réunis par la relation $4n+1$. De façon astucieuse, chaque famille est construite par une relation de récurrence utilisant un nombre de la précédente. Par exemple la première famille est $(1, 5, 9, \dots)$, la deuxième utilise 5 dans sa construction $(3, 13 = (2 \times 5 + 3), \dots)$ la troisième $(17, 69 = (17 + 4 \times 13, \dots))$, etc. Puis, par une argumentation difficile à suivre la conjecture est établie par induction complète.

M. Sghiar (2018, [87]) utilise le prolongement de la fonction C par une fonction réelle. Il peut en utilisant cette fonction démontrer (Théorème de Sghiar-Syracure) que 1 appartient à l'orbite de n'importe quelle valeur entière. Son idée est de calculer la somme des valeurs d'une partie de l'orbite d'un germe x par une intégrale. On laisse le lecteur suivre le raisonnement de l'auteur.

J.W. Porras (2018, [89], [90]) propose une démonstration de la conjecture en commettant une erreur assez commune de travail à reculons (par exemple Alahassa, 2017, [81]). En montrant que chaque nombre possède une famille de prédécesseurs, il en déduit que l'ensemble des nombres est atteint.

W. Ren (2019, [88]) démontre (!) que la conjecture est équivalente à la conjecture que nous avons appelée *Conjecture du temps d'arrêt fini*. Il montre que la propriété est valable pour des familles de nombres. Il ne reste plus qu'à ...!

M. Berkouk (2019, [79]) dans une nouvelle contribution établit la formule des cycles donnée page 17) et se propose de démontrer l'équivalence de l'égalité $\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q}$ et la « convergence » de la suite vers 1. L'auteur oublie que l'établissement de l'égalité présuppose déjà l'existence de cycles.

T. Hamot (2019, [91]) démontre que l'alternance de deux types de motifs (série de divisions par 2 et opération $(3x + 1)/2$ appelée motif « m d » (montée-descente) ne peut se faire indéfiniment. Par la suite, dans l'échange que nous avons eu avec lui, il se tourne vers l'arbre des prédécesseurs.

M. C. Bennassar (2019, [92]) propose un tableau de nombres qui démontre visuellement la conjecture.

L'article de V. Padilla (2019, [93]) est une révision d'articles précédents. L'auteur suit une idée semblable à celle de Hamot et obtient sa démonstration au bout de 156 pages de calculs très techniques.

F. Galetto (2019, [94], [95], [96], [97], [98]) nous gratifie de toute une série de démonstrations de la conjecture. Dans la plus récente, l'auteur pense, en appliquant le principe SPQR (Semper Paratus ad Qualitatem et Rationem) (!) (Galetto, 2017, [99]), qu'une certaine méthode probabiliste est capable de mener à une démonstration de la conjecture qu'il a déjà démontrée dans les articles précédents.

L. Laurore (2019, [100]) veut démontrer que toute suite de Syracuse finit par passer au dessous de son point de départ. En introduisant la notion de « suites confluentes » il montre que toute suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme $4m + 3$ finit par croiser une suite de Syracuse commençant par un nombre de la forme $4m + 1$. Dans son raisonnement bien mené l'auteur oublie que si la suite passe au-dessous de son point de départ, ce n'est pas forcément le cas pour le point de départ de la suite $4m + 3$.

S. Zou (2019, [101]), dans un bref article de 4 pages, décompose \mathbb{N} en deux ensembles B et H. Les nombres de B satisfont la conjecture, les autres non. Puis l'auteur montre que H est vide. L'article étant écrit en chinois, les détails sont laissés aux lecteurs intéressés.

M.M. Ahmed (2019,[102]) démontre que la conjecture est fautive en s'appuyant sur le fait qu'une infinité de suites se terminent de façon identique. End of story dit-il.

R. Deloin (2019, [103]) décompose $\text{set}N$ en une suite d'intervalles $[2^n, 2^{n+1} - 1]$. Il note ensuite que l'opération $3n + 1$ provoque un saut en avant de 1 ou 2 intervalles et que la division par 2 un recul possible de 1 intervalle. Il prétend pouvoir agencer les sauts de manière à atteindre le premier intervalle [1].

Z. B. Batang (2019, [145]) montre pourquoi la conjecture doit être vraie à partir de l'étude de l'arborescence construite sur la suite inverse de Collatz. Dans l'argumentation une confusion apparaît due au fait que la notation du quotient d'une division euclidienne par 3 se réfère au reste (0, 1 ou 2) et non au dividende.

W. Ren (2019, [148]) nomme dynamique réduite l'étude des suites de Syracuse de l'origine à la première valeur inférieure. Il montre avec force calculs que la dynamique réduite conduit à la dynamique originale.

J. Olloh (2019, [146]) en différenciant diverses classes de nombres pairs et impairs estime qu'une preuve de la conjectures est imminente.

D'autres conjectures

W.B. Vasantha Kandasamy et collègues (2016, [104]) émettent une conjecture dans l'ensemble des nombres neutrosophiques. Sans entrer dans le monde des objets neutrosophiques, on retient que la suite est étudiée sur les nombres du type $a + bI$ avec a et b dans \mathbb{Z} et I un élément formel avec la règle $I^2 = I$. La conjecture est que la suite de Syracuse dans cet ensemble « converge » vers un des 55 nombres cités dans l'article.

P. Castañeda (2019 [105]) étudie la dynamique de l'itération d'une fonction basée sur le code binaire des nombres et propose la conjecture de Collatz binaire.

Productions assez savantes sur des propriétés associées

Les articles anciens

Ce sont des articles qui explorent une voie que nous avons manquée dans première recension. Ils examinent la structure des cycles. Plusieurs de ces résultats ont perdu de l'intérêt vu le résultat d'Eliahou relatif à la longueur des éventuels cycles.

R. P. Steiner (1978,[106]), en utilisant T , considère les cycles (1-cycle) constitués d'une phase ascendante (donc des nombres impairs) suivis d'une phase descendante (de nombres pairs) (appelés des circuits). Il démontre que le seul cycle de ce type est $(1, 2)$.

R. P. Steiner (1981,[107]) détermine les circuits qui sont des cycles pour les suites $qx + 1$ avec $q = 5$ et $q = 7$.

B.G. Seifert (1984, [108]) donne quelques informations à propos des cycles liés aux problèmes $3x \pm 1$ (les suites sont restreintes aux nombres impairs). A propos du problème $3x - 1$ il formule a conjecture suivante : toute suite se termine par un des 3 cycles $(1, 1, 1, \dots)$, $(5, 7, 5, \dots)$ ou $(17, 25, 37, 55, 41, 61, 91, 17, \dots)$ ⁴². Nous avons trouvé cette conjecture dans l'article de Kaneda (2014, [60]) (*Generalized Collatz Cycle Conjecture*). Elle n'est pas non plus citée dans les bibliographies commentées de Lagarias qui pourtant référencent l'article de Seifert.

T. Brox (2000, [109]) considère les cycles Γ de la fonction que nous avons désignée par N (et lui par T_1) appelés cycle de Collatz. $\delta(\Gamma)$ désigne le nombre d'éléments de $x \in \Gamma$ avec $\nu(x) > 2$. Il montre que $\delta(\Gamma) < 2 \log |\Gamma|$ où $|\Gamma|$ est la longueur du cycle.

Ce théorème généralise le théorème de R. P. Steiner (1978,[106]).

T. Mimuro (2001,[110]) examine quelques cycles de la suite de Syracuse sur les nombres rationnels.

F. Luca (2005, [111]) améliore des résultats de Steiner et Mimuro concernant la structure des cycles non-triviaux.

John L. Simons (2004, [112]; 2007, [113]) démontre l'inexistence de 2-cycles, c'est-à-dire de cycles constitués de deux répétitions d'une phase ascendante suivi d'une phase descendante.

A. Caraianni (2010, [114]) étend l'étude du semi-groupe $3x+1$ (page 34) à des semi-groupes de $qx + 1$ pour quelques valeurs premières de q .

42. Notés négativement, ce sont des cycle du problème $3x + 1$

Les articles nouveaux

Ce sont des articles parus à l'époque de notre travail.

Y. N. Aliyev (2017, [115], [116]) étudie la suite de Collatz en notation de base trois et prouve certains résultats sur la distribution des digits pour des suites formées de répétitions des opérations S et T respectivement $(3x + 1)/2$, $x/2$. Certains nombres spéciaux semblent donner tous les schémas de distribution des digits.

M. Winkler (2017, [117], [118]) présente une théorie du problème du *stopping time* avec notamment une référence à l'algorithme générant les germes x avec *stopping time* fini.

J.-J. Daudin (2017, [119]) propose une version de la représentation de Wirsching-Goodwin des entiers connectés à 1 dans le problème $3x + 1$ par des mathématiques élémentaires.

Y. Yu et D. Pei (2017, [120]) annoncent un résultat qui confirme la conjecture proposée par Terras en 1976 (voir 80-13 dans biblio du livre!). L'article sera retiré avec un commentaire : *We can not prove Lemma 1 in Sect 2.4, and Terras did not prove it either, we misunderstood Terras's result here. Thus our proof about Theorem 2 is wrong.*

O. Rozier (2018, [121]) étudie la dynamique de la suite $3x + 1$ dans les nombres 2-adiques.

A. Rukhin 2018, [122]) propose également une variété de démonstrations algébriques du théorème de Steiner sur les 1-cycles.

G.M. Georgiou (2018, [123]) associe de façon univoque à une suite de Syracuse une suite binaire qui, via une représentation graphique, permet des comparaisons qualitatives.

W. Ren et collègues (2018, [124]) proposent de nouveaux algorithmes pour vérifier la conjecture pour de très grands nombres et suggèrent d'utiliser la conjecture de Collatz comme « preuve de travail » dans la technologie *blockchain*.

O. Rozier (2019, [125]) propose une nouvelle formule pour la transformée inverse de la prise du vecteur de parité et poursuit l'étude de la dynamique de $3x + 1$ sur \mathbb{Z}_2 .

E. Tezcan(2019, [126]) présente des variations sur la fonction itérée 1 (page 10) et la fonction inverse $R(n) = \frac{2^x-1}{3}$ avec x convenable.

V. Martin Chabrera (2019,[127]) remarque une analogie entre la formule 3 (page 10) utilisée dans la version faible de la conjecture et la formule donnant les nombre de triangles dans les différentes étapes de la construction de la fractale de Sierpinski. Passer par les fractales algébriques⁴³ permet de reformuler la conjecture faible dans une version algébrique et une version géométrique.

T. Tao (2019, [128]) semble atteint de la maladie mathématique qu'il décrit par ailleurs [12]. Il prolonge un résultat de Korec (1994, [129])⁴⁴ par le résultat : pour toute fonction $f : \mathbb{N} + 1 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \infty$, le minimum de l'orbite de m est inférieure ou égale à $f(m)$ pour presque tout m (dans le sens de la densité logarithmique).

B. Bairrington et A. Okano (2019,[130]) lie l'histoire du problème au développement de l'algorithme de Cosper qui projette des séquences binaires sur des ensembles de nombres.

43. Une fractale algébrique est une série formelle de $\mathbb{C}[[X]]$ que l'on peut mettre sous la forme $P(X)P(X^m)P(X^{2m})\dots$ P en est le polynôme générateur et m l'ordre.

44. Le minimum de l'orbite de m est inférieure ou égale à m^Θ avec $\Theta > \log 3 / \log 4$ pour presque tout m

Cet algorithme semble correspondre à la recherche des nombres correspondant à un vecteur de parité.

Y. N. Aliyev (2019, [131]) poursuit son étude de certaines suites en ajoutant une opération supplémentaire à S et T : V (soit $((3x + 2)/2)$).

N. Lygeros et O. Rozier (2020, [132]) reprennent l'étude d'un prolongement analytique sur les réels. Une généralisation à une classe de fonctions réelles dépendant de quatre paramètres est proposée de manière à englober de nombreuses variantes du problème $3x + 1$.

Productions plus ou moins élémentaires vraisemblablement correctes de propriétés associées

W. Poulain (2017, [133]) propose quelques calculs liés à la formule itérée (1) (avec généralisation à $kn + 1$) et à la formule des prédécesseurs.

D. Barina (2018, [134]) étudie la suite donnée par :

$$f(m) = \begin{cases} 7m + 1 & \text{si } m \equiv 1 \pmod{4} \\ 7m - 1 & \text{si } m \equiv 3 \pmod{4} \\ m/2 & \text{si } m \equiv 0 \pmod{2} \end{cases}$$

La conjecture est la même que pour la suite de Syracuse avec le même argument heuristique.

M. Chouar ([135]) introduit la suite de Syracuse dans son site consacré aux nombres de de la forme $6n \pm 1$. Il considère la conjecture de Syracuse inversée, c'est-à-dire la recherche des prédécesseurs de nombres, en particulier 1. Il note que l'on *peut toujours continuer*. Croit-il avoir démontré la conjecture ?

StyxSwimmer ([136]) utilise la bibliothèque D3 pour poursuivre le travail de Jason Davies (annexe 6). Il réalise de véritables de galaxies comprenant jusqu'à 100000 termes de la suite de Collatz.

G. Tyshko (2019, [137]) procède à une véritable botanique des nombres dont il ne ressort pas clairement s'il prétend démontrer ou non que tous les nombres sont dans l'arbre canonique.

L'éditeur du livre de précise *This book is at first glance a proof of the well-known conjecture of Lothar Collatz on the Syracuse sequence. However, in fact, this book is about finding consistency and regularity in the world around us.*

S. Chen et collègues (2019, [140]) construisent une fonction \mathfrak{Z} avec $\mathfrak{Z}(n) = \sum f(a_i)$ où les a_i sont les composante de n exprimé en base k (la référence aux nombres k -adique n'est pas appropriée) et f définie selon le reste \pmod{p} de son argument. Avec quelques hypothèses supplémentaires, il est montré que la suite construite avec \mathfrak{Z} termine sur le cycle 1, 2. Le lien avec la suite de Collatz est tenu. Il tient simplement dans la définition de f .

F. Pan et J. P. Draayer (2019, [141]) proposent une version de la suite de Collatz dans l'ensemble des polynômes à coefficients dans le corps à deux éléments. Ils montrent que

le degré des polynômes finissent par décroître en moyenne. Ce qui permet de montrer la conjecture dans cet espace. Ce résultat est considéré comme une preuve faible de la conjecture de Collatz.

M. Peral Manzo (2019, [142]) étudie les classes mod 9 des nombres de Collatz (les origines des suites se terminant par 1).

L. Sternberg (2019, [143]) démontre quelques propriétés de la suite inverse de Collatz.

L. Sternberg (2019, [144]) définit une pseudo suite de Collatz et en démontre la convergence.

Productions plus ou moins élémentaires plutôt douteuses de propriétés associées

A. Nikolaychuk (2018, [86]) définit divers opérateurs pour construire des suites et introduit une fonction *delta* index. Une certaine confusion semble régner entre la notion d'index et celle de longueur de suite. Il n'est pas clairement perceptible si l'auteur prétend démontrer la conjecture de Collatz où seulement d'indiquer une voie à suivre.

M.A. Idowu (2015, [147]) propose une « nouvelle mathématique » basé sur le système de nombres de Collatz.

J.M. Ashfaque (2019, [149]) en une note de deux pages propose de s'intéresser à la suite $n + d$ et chercher les valeurs de d qui conduisent à des suites entières (!) menant à 1.

Evocation de la conjecture

R. Cuculière et J.-P. Guichard (1984, [138]) ont édité une brochure à but didactique dont un chapitre, celui des problèmes, évoque la suite de Syracuse.

B. Bajorska-Harapinska et ali (2017, [139]) font référence au problème de Collatz comme un exemple de problème traitant d'orbites liées à des transformations sur les nombres entiers.

Références

- [1] J. LAGARIAS, *The set of rational cycles for the $3x + 1$ problem*. *Acta Arithmetica*, 56 (1):33–53, 1990. aa5614.pdf.
- [2] H. DHIRAJ, *Results on the $3x + 1$ and $3x + d$ conjectures*. Dhiraj.pdf.
- [3] R.E. CRANDALL, *On the $3x + 1$ Problem*. *Mathematics of Computation*, 144(32): octobre 1978, 1281–1292, octobre 1978. S0025-5718-1978-0480321-3.pdf; utilise la fonction N .
- [4] J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ problem and its generalizations*. *American Mathematical Monthly*, 92(1):3 – 23, 1985. <http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/>, Lagarias3-23.pdf.

- [5] J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem : An Overview*. In J. LAGARIAS, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, chapitre Introduction, pages 3–30. Providence : American Mathematical Society, 2010. mbk-78-prev.pdf.
- [6] J.-P. DELAHAYE, *La conjecture de Syracuse*. *Pour la Science*, 247:100–105, mai 1998. 053.pdf.
- [7] G. WIRSCHING, *The Dynamical System Generated by the $3n + 1$ Function*. Lecture Notes in Math. 1681. Springer-Verlag, 1998. MR1612686 (99g :11027).
- [8] B.J. GREEN et T. TAO, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*. *Annals of Mathematics*, 167 (2008):481–547, 2008. arXiv :math.NT/0404188.
- [9] J.-A. CALAME et F. JAQUET, *Mathématique 8ème CS*. DIP, Neuchâtel, 1991. Atelier page 10.
- [10] L.-O. POCHON, *La suite de Syracuse*. *Bulletin de la SENS*, 14, 1993.
- [11] N. SVENSSON, *Theme and Variations on the $3N + 1$ Problem*. Bachelor_Thesis.pdf.
- [12] T. TAO, *The Collatz conjecture, Littlewood-Offord theory, and powers of 2 and 3*. <http://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/>, 2011. consulté : mars 2014 - blogTTao.pdf.
- [13] R.K. GUY, *Don't try to solve these problems*. In J. LAGARIAS, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, pages 231–240. Providence : American Mathematical Society, 2010. reprinted early paper 1983.
- [14] J.-P. DELAHAYE, *J'aimerais tant prouver Syracuse*. *Pour la Science*, dossier 74:98–103, janvier-mars 2012.
- [15] J.-P. DELAHAYE et C. LASOU, *La conjecture de Syracuse*. Licence s.t-a., Université des Sciences et Technologies de Lille, 2007. syracuse.pdf.
- [16] G. OPFER, *An Analytic approach to the Collatz $3N + 1$ Problem*, 2011. hbam2011-09.pdf, consulté : septembre 2012.
- [17] C. A. FEINSTEIN, *The Collatz $3n + 1$ Conjecture is Unprovable*. arXiv :math/0312309v19, 2012.
- [18] J. H. CONWAY, *Unpredictable iterations*. In *Proceedings of the Number Theory Conference*, page 49–52, 1972.
- [19] C.T. DIANOPOULOS, *The Collatz Conjecture Proof*, 2012. collatz-libre.pdf.
- [20] C.T. DIANOPOULOS et K. KULKARNI, *Collatz Conjecture Proof*, 2013. collatz_proof-libre.pdf.
- [21] P. ANDALORO, *On total stopping times under $3x+1$ iteration*. Rapport technique, Kent State University, 1998. andaloro.pdf.
- [22] J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem : An Annotated Bibliography II (2000-2009)*. arXiv :math/0608208v5, 2011.
- [23] J. LAGARIAS, *The $3x+1$ Problem : An Annotated Bibliography (1963–1999) (Sorted by Author)*. arXiv :math/0309224v13, 2011. Lag-0309224v13.pdf.
- [24] J. LAGARIAS, *The $3x + 1$ Problem : An Annotated Bibliography II (2000-2009)*. arXiv :math/0608208v6, 2012. Lag-0608208v6.pdf.

- [25] J. LAGARIAS, *Preface*. In J. LAGARIAS, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x + 1$ Problem*, chapitre Preface, pages ix–xiv3–30. Providence : American Mathematical Society, 2010. mbk-78-prev.pdf.
- [26] M. CHAMBERLAND, *A $3x + 1$ survey : Number theory and dynamical systems*. In J. LAGARIAS, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, pages 189–207. Providence : American Mathematical Society, 2010.
- [27] M. CHAMBERLAND, *An Update on the $3x + 1$ Problem*. Rapport technique, Department of Mathematics and Computer Science, Grinnell College, 2015. 3x_survey_eng.pdf.
- [28] E. BELAGA et M. MIGNOTTE, *Walking Cautiously Into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number Theoretically, Randomly*. Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, report 2000-18, 2015. documentation/syracuse/dmAG0117-1.pdf.
- [29] J. ARSAC, *Algorithmes pour vérifier la conjecture de Syracuse*. *Informatique théorique et applications*, 21:3–9, 1987. http://www.numdam.org/item?id=ITA_1987_21_1_3_0.
- [30] S. ELIAHOU, *Le problème $3n + 1$: y a-t-il des cycles non triviaux ? (III)*. <http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des.html>, 2011.
- [31] M. CHAMBERLAND, *A Continuous Extension of the $3x + 1$ Problem to the Real Line*. Rapport technique, Dpt of Mathematics and Statistics, McMaster University, Ontario, Canada, 1996. 3x_1996.pdf.
- [32] M. CHAMBERLAND, *A Continuous Extension of the $3x + 1$ Problem to the Real Line*. *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996):495–509, 1996.
- [33] N. LYGEROS et O. ROZIER, *Dynamique du problème $3x + 1$ sur la droite réelle*. arXiv :1402.1979, 2014. 1402.1979.pdf.
- [34] A.A. KURTZ et J. SIMON, *The Undecidability of the Generalized Collatz Problem*. Rapport technique, Department of Computer Science The University of Chicago, 2006. 10.1.1.84.6811-pdf incomplet.
- [35] J. SINYOR, *The $3x + 1$ Problem as a String Rewriting System*. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2010(Article ID 458563), 2010. 458563.pdf.
- [36] J. H. CONWAY, *FRACTRAN : A simple universal programming language for arithmetic*. In J. LAGARIAS, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, pages 249–264. Providence : AMS, 2010. reprinted early paper 1987.
- [37] K.G. MONKS, *$3x+1$ Minus the +*. *Discrete Math. and Theoretical Computer Science*, 5 (2002):47–54, 2002. dm050103.pdf, ken_0.pdf, (usage de FRACTRAN).
- [38] A. SLAKMON et L. MACOT, *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences*. Rapport technique, Départements de mathématiques et de physique, Collège de Bois-de-Boulogne, Montréal, 2003. AlmostConvergenceSyracuseSeq.pdf.
- [39] T. CARLETTI et D. FANELLI, *Quantifying the degree of average contraction of Collatz orbits*. Rapport technique, Department of Mathematics and Namur Center for Complex Systems, University of Namur ; Dipartimento di Fisica e Astronomia, University of Florence, 2016. arXiv :math/1612.07820.pdf).

- [40] T. CARLETTI et D. FANELLI, *Quantifying the degree of average contraction of Collatz orbits*. *Boll Unione Mat Ital*, <https://doi.org/10.1007/s40574-017-0145-x>, 2017. 10.1007-s40574-017-0145-x.pdf.
- [41] M. CHAMBERLAND, *Averaging Structure in the $3x + 1$ Problem*. Rapport technique, Department of Mathematics and Computer Science, Grinnell College, 2003. average_3x+1.pdf.
- [42] F. FLECKINGER et I. ABDOULKARIM, *Sur la conjecture de Collatz*. Rapport technique, Université de Franche-Comté, 2015. arXiv :math/1607.02370.pdf.
- [43] R. HAYNBERG, *State of the Collatz-Conjecture*. Rapport technique, Dept. of Mathematics University College Cork, 2009. collatzproof.pdf; 10.1.1.622.8570.pdf.
- [44] R. HAYNBERG, *State of the $3x+1$ problem*. <http://rolf.haynberg.de/?p=429>, 2009.
- [45] P. SCHORER, *Are We Near a Solution to the $3x + 1$ Problem? A Discussion of Several Possible Strategies*. Rapport technique, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, 2014. schorer.pdf.
- [46] P. SCHORER, *A Solution to the $3x + 1$ Problem*. Rapport technique, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, 2014. solutionsubmit2.pdf.
- [47] J.P. BENDEGEM (VAN), *The Collatz conjecture. A Case Study in Mathematical Problem Solving. Logic and Logical Philosophy*, 14 (2005):7–23, 2005. jpvb.pdf.
- [48] A. BILLOT, *La conjecture de Syracuse*. Gallimard, 2008.
- [49] T. Oliveira e SILVA, *Empirical verification verification of the $3x+1$ problem and related conjectures*. In J. LAGARIAS, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, pages 189–207. Providence : American Mathematical Society, 2010.
- [50] E. ROOSENDAAL, *On the $3x+1$ Problem*. URL : <http://www.ericr.nl/wondrous/>.
- [51] S. ELIAHOU, *Le problème $3n+1$: élémentaire mais redoutable (I)*. <http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-elementaire-mais.htm>, 2011.
- [52] S. ELIAHOU, *Le problème $3n + 1$: cycles de longueur 5 (II)*. <http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-cycles-de.html>, 2011.
- [53] R. GHOSH, *New lower bounds for the size of a non-trivial loop in the Collatz $3x+1$ and generalized $px+q$ problem*, 2009. LoopCollatz_01.pdf.
- [54] M.K. SINISALO, *On the minimal cycle lengths of the Collatz sequences*. Preprint, june 2003, Department of Mathematical Sciences University of Oulu (Finland), 2003. Sinisalo_collatz.pdf).
- [55] A. SLAKMON et L. MACOT, *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences*. *Statistics and Probability Letters*, 15 (2006):1625–1630, 2006.
- [56] D. APPLGATE et J.C. LAGARIAS, *Density Bounds for the $3x + 1$ Problem II. Krasikov Inequalities*. *Math. Comp.*, 64 (1995):427–438, 1995.
- [57] I. KRASIKOV et J.C. LAGARIAS, *Bounds for the $3x + 1$ Problem using Difference Inequalities*. arXiv :math.NT0205002v1, 2002.
- [58] K.M. MONKS, *The sufficiency of arithmetic progressions for the $3x+1$ conjecture*. In *Proceedings of the American mathematical society*, volume 134, pages 2861–2872, 2006. S0002-9939-06-08567-4.pdf , SufficiencyRev4.pdf, ken_1.pdf.

- [59] E. BELAGA, *Walking Cautiously into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number Theoretically, Randomly.* a8_BelagaMathInfo06Presentation060920.ppt, 2006. September 18-22, 2006.
- [60] M. KANEDA, *Two remarks on the Collatz cycle conjecture.* <https://arxiv.org/abs/1010.6206v3>. 1010.6206.pdf.
- [61] J.-P. ALLOUCHE, *Sur la conjecture de Syracuse-Kakutani-Collatz. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux, 1978-79, 1979.* Exposé 9, résumé dans [23].
- [62] J.-P. ALLOUCHE, *Two exercises of Comtet and two identities of Ruehr.* Rapport technique, CNRS, Inst. Math. Jussieu-PRG, UPMC, 2017. 1707.05751.pdf.
- [63] E. BELAGA et M. MIGNOTTE, *The Collatz Problem and Its Generalizations : Experimental Data. Table 1. Primitive Cycles of $(3n + d)$ -mappings.* Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, report 2000-18, 2006. documentation/syracuse/06015.pdf.
- [64] E. BELAGA et M. MIGNOTTE, *Cyclic Structure of Dynamical Systems Associated with $3x + d$ Extensions of Collatz Problem.* Rapport technique, Université de Strasbourg, report 2000-18, 2000. documentation/syracuse/00018.pdf, (consulté : septembre 2012).
- [65] E.G. BELAGA, *Effective Polynomial Upper Bounds to Perigees and Numbers of $(3x + d)$ -Cycles of a Given Oddlength.* *Acta Arithmetica*, 106.2:197–206, 2003. aa106-2-09.pdf.
- [66] E. BELAGA, *Effective Polynomial Upper Bounds to Perigees and Numbers of $(3x + d)$ -Cycles of a Given Oddlength.* Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, 2007. documentation/syracuse/00028.pdf.
- [67] W.B VASANTHA KANDASAMY, I. KANDASAMY et F. SMARANDACHE, *A New $3n + 1$ Conjecture Akin to Collatz Conjecture.* Rapport technique, VIT University, 2016. ANew3NConjectureCollatz.pdf.
- [68] W.B VASANTHA KANDASAMY, I. KANDASAMY et F. SMARANDACHE, *The $3n + p$ Conjecture : A Generalization of Collatz Conjecture.* *Journal of Ultra Scientist of Physical Sciences*, 29(2):83–88, 2017. Collatz Conjecture-paper774-170206140527.pdf.
- [69] Z. FRANCO et C. POMERANCE, *On a Conjecture of Crandall Concerning the $qx + 1$ Problem.* *Mathematics of Computation*, 64(211):1333–1336, 1995. paper101.pdf.
- [70] H.M. FARKAS, *Variants of the $3N + 1$ problem and multiplicative semigroups.* *In Geometry, Spectral Theory, Groups and Dynamics : Proceedings in Memory of Robert Brooks, Contemporary Math., Volume 387*, pages 121–127. Amer. Math. Soc., 2005.
- [71] J. LAGARIAS, *Wild and Wooley numbers.* *Amer. Math. Monthly*, 113 (2006)(2):97–108, 2006. lagarias97.pdf.
- [72] D. APPLGATE et J.C. LAGARIAS, *The $3x + 1$ semigroup.* *Journal of Number Theory*, 117 (2006):146–159, 2006. 1-s2.0-S0022314X05001459-main.pdf, math0411140.pdf.
- [73] K. CONROW, *Collatz $3n + 1$ problem.* <http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/>.

- [74] O. PIRSON, *Démonstration de la suite de L. Collatz*. <http://www.opimedia.be/3nP1/>, consulté 2016.
- [75] K. CONROW, *The Structure of the Collatz Trajectories with an Inductive/Constructive Proof of the conjecture*. Rapport technique, Kansas State University, 2007. colstruc.pdf.
- [76] R. GHOSH, *Non-trivial loops do not exist in the Collatz problem*. 10.1.1.312.6615.pdf, 2009.
- [77] P. SCHORER, *A Solution to the $3x + 1$ Problem*. <http://www.occampress.com/#3x+1>, 2009. papier retiré.
- [78] M. BERKOUK, *Démonstration de la suite de L. Collatz*. <http://vixra.org/abs/1507.0200>, 2015. 1507.0200v2.pdf.
- [79] M. BERKOUK, *Démonstration de la suite de L. Collatz*. <http://vixra.org/abs/1507.0200v4>, 2019. 1507.0200v4.pdf.
- [80] F. BALEH, *Collatz conjecture The trivial cycle is unique (because a Collatz sequence that becomes periodic converges)*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01484740>, 2017. Collatz_Trivial_cycle uniqueness_V2.pdf.
- [81] N. K.-A. ALAHASSA, *Arithmétique cantus, graphe de Syracuse, et preuve de la conjecture de Collatz*. Rapport technique, Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, 2017. documentation/syracuse/syracuse2.pdf).
- [82] O. ROZIER, *Le problème de Syracuse étendu*. URL : <http://www.probleme-syracuse.fr>.
- [83] R. SIMONETTO, *Conjecture de Syracuse : avancées inédites*. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01419948v1>, 2016.
- [84] M. ORUS-LACORT, *Analyzing whether Mathematical induction method could be used in Collatz conjecture*, 2018. CC.pdf.
- [85] D. JENBER, *Collatz Problem*. Rapport technique, College of Natural and Social Sciences Mathematics Division Addis Ababa Science and Technology University, 2018. 1811.08500.pdf.
- [86] A. NIKOLAYCHUK, *Supplement to The Collatz Conjecture*. *Journal Of Advances in Mathematics*, 15 (2018):8120–8132, 2018. 7876-Article Text-16244-2-10-20181208.pdf.
- [87] M. SGHIAR, *L'attraction des nombres par la force Syracusienne*. Rapport technique, Département de mathématiques, université de Bourgogne, 2018. LaconjecturedeSyracuse.pdf.
- [88] W. REN, *A New Approach on Proving Collatz Conjecture*. *Hindawi Journal of Mathematics*, 2019, 2019. NewApproachProvingCollatzConjecture.pdf.
- [89] J.W. PORRAS FERREIRA, *Solución a la Conjetura de Collatz*. Rapport technique, Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Naval de Cadetes “Almirante Padilla”, Isla Manzanillo, Cartagena de Indias, 2018. SolucionalaConjeturadeCollatz.pdf.
- [90] J.W. PORRAS FERREIRA, *Solution to Collatz's Conjecture*. Rapport technique, Centro de Investigaciones Científicas, Escuela Naval de Cadetes “Almirante Padilla”, Isla Manzanillo, Cartagena de Indias, 2018. SolutionCollatzsConjecture.pdf.

- [91] T. HAMOT, *La conjecture de Syracuse*. Rapport technique, 2019. Conjecture de Collatz.pdf et annexes.
- [92] M. C. BENASSAR, *The Collatz Conjecture, Order and harmony in the sequence numbers*. Rapport technique, 2019. Bennassar.pdf.
- [93] V. PADILLA, *$3x+1$ Problem, Rev-14*. Rapport technique, 2019. arXiv :1910.05622.
- [94] F. GALETTO, *Syracuse_Collatz Conjecture : Comparison of two Markov approaches towards the proof*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02274552.
- [95] F. GALETTO, *Proof of the Syracuse_Collatz Conjecture*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02048821.
- [96] F. GALETTO, *Proof of Syracuse_Collatz Conjecture by Flow Graphs*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02288698.
- [97] F. GALETTO, *Collatz Conjecture, new proof by merging into three SuperStates*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02316263.
- [98] F. GALETTO, *Collatz-Syracuse Conjecture, proof by Reliability Integral Theory*. Rapport technique, Politecnico di Torino, 2019. hal-02334855.
- [99] F. GALETTO, *The SPQR («Semper Paratus ad Qualitatem et Rationem») Principle in Action. Engineering and Applied Sciences*, 2017.
- [100] L. LAURORE, *Eléments de démonstration des conjectures de Collatz et de Kakutani*. hal-02336166, 2019.
- [101] S. ZOU, *Proof of Collatz Conjecture. Pure Mathematics*, 9(3):414–416, 2019. ProofCollatzConjecture.pdf.
- [102] M.M. AHMED, *The Collatz Conjecture is blatantly false*. Rapport technique, Punjiri Web and Mobile Technologies, 2019. collatzconvergence.pdf.
- [103] R. DELOIN, *Proof of Collatz conjecture*. Rapport technique, Université de Sherbrooke, 2019. Collatz-v21engamsart.pdf.
- [104] W.B VASANTHA KANDASAMY, I. KANDASAMY et F. SMARANDACHE, *Modified Collatz conjecture or $(3a + 1) + (3b + 1)I$ Conjecture for Neutrosophic Numbers $\mathbb{Z} \cup I$. Neutrosophic Sets and Systems*, 14 (2016):44–46, 2016. ModifiedCollatzConjecture.pdf.
- [105] P. CASTAÑEDA, *A dynamical approach towards Collatz conjecture*. Rapport technique, Department of Mathematics, ITAM, Mexico, 2019. castaneda.pdf).
- [106] R.P. STEINER, *A Theorem on the Syracuse Problem. In Proc. 7th Manitoba Conf. on Numerical Mathematics and Computing*, page 553–559, 1978.
- [107] R.P. STEINER, *On the $QX + 1$ Problem, Q Odd. The Fibonacci Quarterly*, 19:285–288, 1981. 19-3.pdf, steiner.pdf, 10.1.1.388.4222.pdf.
- [108] B. G. SEIFERT, *On the arithmetic of cycles for the Collatz-Hasse ('Syracuse') conjectures. Discrete Mathematics*, 68 (1988), 1984. 1-s2.0-0012365X88901215-main.pdf.
- [109] T. BROX, *Collatz cycles with few descents. ACTA ARITHMETICA*, XCII.2 (2000): 181–188, 2000. aa9229.pdf).

- [110] T. MIMURO, *On certain simple cycles of the Collatz Conjecture*. *SUT Journal of Mathematics*, 2 (2001):79–89, 2001. 01-Mimuro.pdf.
- [111] F. LUCA, *On the non-trivial cycles in Collatz’s problem*. *SUT Journal of Mathematics*, 41(1):31–41, 2005. 25fb5c28718ab66d3de0167260b779071490.pdf.
- [112] J.L. SIMONS, *On the Nonexistence of 2-Cycles for the $3x+1$ Problem*. *Mathematics of Computation*, 74, 2004. S0025-5718-04-01728-4.pdf.
- [113] J.L. SIMONS, *A simple (inductive) proof for the non-existence of 2-cycles of the $3x + 1$ problem*. *Journal of Number Theory*, 123 (2007), 2007. 1-s2.0-S0022314X06001223-main.pdf.
- [114] A. CARAIANI, *Multiplicative semigroups related to the $3x + 1$ problem*. Rapport technique, 2010. semigroups.pdf).
- [115] Y.N. ALIYEV et V. A. SULEYMANOV, *Construction of periods for $3x+1$ problem : Use of division algorithm by 2 in 3-base number system for construction of 3-adic numbers as periods of Collatz sequence*. In *2013 7th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT)*, 2013. MSW_A4_formatAliyev.pdf.
- [116] Y.N. ALIYEV, *Construction of periods for $3x+1$ problem : Use of division algorithm by 2 in 3-base number system for construction of 3-adic numbers as periods of Collatz sequence*. In *10th International Conference on Application of Information and Communication Technologies (AICT 2016)*, 2017. Conference Location : Baku, Azerbaijan.
- [117] M. WINKLER, *The algorithmic structure of the finite stopping time behavior of the $3x + 1$ function*. Rapport technique, Fakultät für Mathematik Ruhr-Universität Bochum, Germany, 2017. 1709.03385.pdf.
- [118] M. WINKLER, *The Recursive Stopping Time Structure of the $3x + 1$ Function*. Rapport technique, Fakultät für Mathematik Ruhr-Universität Bochum, Germany, 2017. 1709.03385_latest_update.pdf.
- [119] J.J. DAUDIN, *A simple proof of the Wirsching-Goodwin representation of integers connected to 1 in the $3x + 1$ problem*. hal-01664084, 2017. principal.pdf.
- [120] Y. YU et D. PEI, *On the Glide of $3x+1$ Problem*. Rapport technique, Institute of Information Engineering, Chinese Academy of Sciences, 2017. <https://arxiv.org/abs/1710.01525v2>.
- [121] O. ROZIER, *Parity sequences of the $3x+1$ map on the 2-adic integers and Euclidean embedding*. Rapport technique, Institut de Physique du Globe de Paris, France, 2018. 1805.00133.pdf.
- [122] A. RUKHIN, *A dual-radix approach to Steiner’s 1-cycle theorem*. Rapport technique, The Johns Hopkins University, 2018. 1805.10496.pdf.
- [123] G.M. GEORGIYOU, *Encoding and Visualization in the Collatz Conjecture*, 2018. 1811.00384.pdf.
- [124] W. REN, S. LI, R. XIAO et W. BI, *Collatz Conjecture for $2^{100000} - 1$ Is True - Algorithms for Verifying Extremely Large Numbers*. In *2018 IEEE SmartWorld*, 2018. Conference location : Guangzhou, China.

- [125] O. ROZIER, *Parity Sequences of the $3X + 1$ Map on the 2-adic Integers and Euclidian Embedding*. *INTEGERS*, 19 (2019):25 pages, 2019. Parity.pdf.
- [126] E. TEZCAN, *On Collatz conjecture*, 2019. arXiv :1902.07312v1 ; 1902.07312.pdf.
- [127] V. MARTIN HABRERA, *An algebraic fractal approach to Collatz Conjecture*. Bachelor thesis, Facultat de Matemàtiques i Estadística, Universitat Politècnica de Catalunya, 2019. memoria.pdf.
- [128] T. TAO, *Almost all Orbits of the Collatz Map Attain Almost Bounded Values*, 2019. arXiv :1909.03562v1.
- [129] I. KOREC, *A density estimate for the $3x + 1$ problem*. *Math. Slovaca*, 44(1):85–89, 1994.
- [130] B. BAIRRINGTON et A. OKANO, *New Experimental Investigations for the $3x + 1$ Problem : The Binary Projection of the Collatz Map*. *Rose-Hulman Undergraduate Mathematics Journal*, 20:article 4, 2019. NewExperimentalInvestigations.pdf.
- [131] Y.N. ALIYEV, *Another Generalization of $3x + 1$ Problem : Existence of periodicity in the construction of numbers in periodic version of generalized Collatz' problem and its computational aspects*. In *Conference : Application of Information and Communication Technologies 2019*, 2019. aict2019.pdf.
- [132] N. LYGEROS et O. ROZIER, *Paramétrisation du problème $3x + 1$ sur la droite réelle : diagramme de phase, renormalisation et intervalles errants*. hal-02412727, 2020. param-v2.pdf.
- [133] W. POULAIN, *Suite impaire symbolique de Collatz étendue à $kn + 1$* , 2017. probKnPlus1.pdf.
- [134] D. BARINA, *$7x + 1$: Close Relative of Collatz Problem*. Rapport technique, Faculty of Information Technology, Brno University of Technology, 2018. 1807.00908.pdf.
- [135] M. CHOUAR, *Conjecture de Syracuse et $6n + -1$* . <https://sites.google.com/site/loquiquedespremiers/regles-desdeplacements-des-entiers-par-rapport-au-nombres-premiers/conjecture-de-syracuse-et-6n--1>.
- [136] STYXSWIMMER, *Graphing the Collatz Conjecture*. <http://swimmingthestyx.com/?p=447>.
- [137] G. TYSHKO, *Proof of the Collatz conjecture*. Collection Amazon, 2019. <https://www.amazon.fr/Proof-Collatz-conjecture-Georgiy-Tyshko/dp/1090639279>.
- [138] R. CUCULIÈRE et J.-P. GUICHARD, *Arithmétique au fil des âges*. IREM de Poitiers, 1984. <http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IPO84001.htm>.
- [139] B. BAJORSKA-HARAPINSKA, M. PLESZCZYNSKI, M. RÓZANSKI, M. SZEEDA et R. WITULA, *Generalizations of Kaprekar's transformations and Kaprekar-style transformations*. In R. WITULA, B. BAJORSKA-HARAPINSKA, E. HETMANIÖK, D. SLOTA et T. TRAWINSKI, éditeurs, *elected Problems on Experimental Mathematics*, pages 233–258. Wydawnictwo Politechniki Slaskiej, Gliwice, 2017. mono_spem_str_233-258.pdf).
- [140] S. CHEN, Q.Y. SUN et Y. ZHU, *The Periodicity to a Kind of Generalized Collatz Problem*. Rapport technique, Hangzhou Normal University, 2019. <https://arxiv.org/abs/1903.03365v3>.

- [141] F. PAN et J.P. DRAAYER, *A polynomial approach to the Collatz conjecture*. Rapport technique, 2019. arXiv :1905.08462v1, PolynomialApproach.pdf.
- [142] M. Peral MANZO, *iPinball Collatz!* Rapport technique, National Pedagogic University (Mexico), 2019. collatzMODULOS.pdf, de Researchgate.
- [143] L. STERNBERG, *Predictable trajectories of the hailstone sequence generated by the Collatz iteration and proof of a converging Pseudo-Collatz algorithm*. Rapport technique, Department of Biology, University of Miami, 2019. PredictableTrajectories.pdf, de Researchgate.
- [144] L. STERNBERG, *Odd numbers generated from reduced Collatz iterations are produced by a unique set of reverse iterations*. Rapport technique, Department of Biology, University of Miami, 2019. Injective2.pdf, de Researchgate.
- [145] Z.B. BATANG, *Integer patterns in Collatz sequences*. Rapport technique, King Abdullah University of Science and Technology, Thuwal (Saudi Arabia), 2019. arXiv :1907.07088v2.
- [146] J. OLLOH, *On the fundamentals of Collatz conjecture (Revised)*. Article in SSRN electronic journal · february 2019, Kaduna State University, Nigeria, 2019. newcollatzSSRN-id3302210-1.pdf.
- [147] M. A. IDOWU, *Collatz Problem*. Rapport technique, Abertay University, 2015. ArXiv :1503.04661v2.
- [148] W. REN, *Reduced Collatz Dynamics Data Reveals Properties for the Future Proof of Collatz Conjecture*. *Data*, 4, 89, 2019. ReducedCollatzDynamicsDataReveals-Properties.pdf.
- [149] J.M. ASHFAQUE, *A Variant of the Collatz Conjecture*. Rapport technique, Max Planck Institute for Software Systems, 2019. VariantofCollatz.pdf.

Annexes

Annexe 1 : A propos de la difficulté du problème

Guy (2010, [13]) et Tao (2011, [12]) montrent la difficulté du problème en le reliant à d'autres questions non résolues.

Mais une autre filière (Lagarias, 2015) montre pourquoi Erdős jugeait le problème difficile. Les travaux sur les carrés latins auto-orthogonaux SOLS⁴⁵ (c'est-à-dire dont la juxtaposition d'un carré et de sa transposée est un carré gréco-latin) avait montré l'intérêt de l'étude des orbites générées par des familles finies de fonctions affines (de plusieurs variables) R à coefficients entiers positifs. Cela revient aussi à étudier les semi-groupes (voire groupes) générées par de telles familles.

Klarner & Rado étudient la question suivante : étant donné un ensemble d'entiers $A = \{a_i\}$ quelles sont les caractéristiques du petit ensemble $T = \langle R : A \rangle \subset \mathbb{N}$ engendré à partir de A par itération des fonctions de R ?

Pour les fonctions à deux variables ou plus, ils notent que très souvent T contient une progression arithmétique. Il est donc de densité non nulle. Avec une seule variable cela semble plus compliqué.

Etude de cas : $R = \{f_1 : x \mapsto 2x + 1; f_2 : x \mapsto 3x + 1\}$ engendre le semi-groupe de Klarner-Rado.

Question : l'orbite $\langle R : \{1\} \rangle = \{1, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 19, 21, 22, 27, 28, 31, 39, 40, 43, \dots\}$ contient-elle une progression arithmétique infinie ?

Dès 1934, Rado et Erdős collaborent. Ils signeront ensemble dix-huit articles et publieront le théorème d'Erdős-Rado⁴⁶ généralisation du théorème de Ramsey et le théorème de Erdős-Ko-Rao⁴⁷. Erdős répondra non à la question ci-dessus en montrant que l'orbite est de densité nulle.

*Théorème (Erdős, 1972)*⁴⁸ : Soient A ensemble non-vide d'entiers, $I \subset \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in I$. Soit σ un nombre réel positif tel que $\alpha = \sum_{i \in I} 1/m_i^\sigma < 1$. Alors si $T = \langle \{m_i x + n_i\} : A \rangle$ on a pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$|T \cap [1, t]| \leq \frac{1}{1 - \alpha} \sum_{a \in [1, t] \cap A} \left(\frac{t}{a}\right)^\sigma$$

Corollaire : Si de plus $\sigma < 1$ et l'ensemble A est soit fini soit la série $\sum_{a \in A} a^{-\sigma}$ est convergente, alors T est de densité nulle et il n'est ni une réunion finie de progressions arithmétiques infinies (per-set) ni presque per-set.

Cas particulier : $T = \langle \{2x + 1, 3x + 1\} : \{1\} \rangle$ est de densité 0 et ne contient donc pas de progression arithmétique infinie.

45. Théorème (Brayton, Coppersmith, Hoffman, 1974) : Il existe des SOLS de tout ordre sauf 2, 3 et 6.

46. https://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Rado_theorem

47. https://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d'Erd%C5%91s-Ko-Rado

48. Dans la version Théorème 8 dans Klarner & Rado (1974).

Annexe 2 : Calcul de $N(m)$ selon $m \pmod{16}$, m impair

$$m \equiv 1 \pmod{4}$$

$$\text{De façon globale : } m = 1 + 4n : N(m) = [3 + 12n + 1] = [1 + 3n]$$

- $m \equiv 1, 9 \pmod{16} : m = 1 + 8n : N(m) = [3 + 24n + 1] = 1 + 6n$
- $m \equiv 5 \pmod{16} : m = 5 + 16n : N(m) = [15 + 48n + 1] = [1 + 3n]$
- $m \equiv 13 \pmod{16} : m = 13 + 16n : N(m) = [39 + 48n + 1] = 5 + 6n$

Après une itération, tous les valeurs se trouvent être inférieures à la valeur de départ.

$$m \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{De façon globale : } m = 3 + 4n : N(m) = [9 + 12n + 1] = 5 + 6n$$

- $m \equiv 3 \pmod{16} : m = 3 + 16n; N(m) = 5 + 24n; N(24n + 5) = 2 + 9n$
- $m \equiv 7 \pmod{16} : m = 7 + 16n; N(m) = 11 + 24n; N(24n + 11) = [11 + 19n]$
- $m \equiv 11 \pmod{16} : m = 11 + 16n; N(m) = 17 + 24n; N(24n + 17) = 13 + 18n$
- $m \equiv 15 \pmod{16} : m = 15 + 16n; N(m) = 23 + 24n; N(24n + 23) = 35 + 36n$

Avec deux itérations, seul le cas $3 + 16n$ se trouve forcément être inférieur à la valeur de départ.

Pour 7 classes sur 8 (7 valeurs de l'offset), la valeur de $N(m)$ peut être calculée précisément. Pour la valeur 5 de l'offset, la valeur de $N(m)$ dépend de la divisibilité de $1 + 3n$ par une puissance de 2.

Ces 8 classes peuvent se réunir en 4 classes :

- $m \equiv 3, 7, 11, 15 \pmod{16}$ ou $m \equiv 3 \pmod{4} : N(3+4n) = [3(3+4n)+1] = [10+12n] = 5 + 6n$
- $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ ou $m \equiv 1 \pmod{8} : N(1+8n) = [3(1+8n)+1] = [4+24n] = 1+6n$
- $m \equiv 13 \pmod{16} : N(13 + 16n) = [3(13 + 16n) + 1] = [40 + 48n] = 5 + 6n$
- $m \equiv 5 \pmod{16} : N(5 + 16n) = [16 + 48n] = [1 + 3n]$

Sur les 3 premières classes N est une application linéaire représentée en respectivement rouge, bleu et vert sur le graphe de la figure 2 . Par contre, le comportement de N sur la 4e classe est plus « chaotique » (en noir sur la figure). Cette dernière classe peut être partitionnée pour obtenir des comportements « réguliers » de N et ceci à l'infini, processus que l'on rencontre fréquemment dans ce problème.

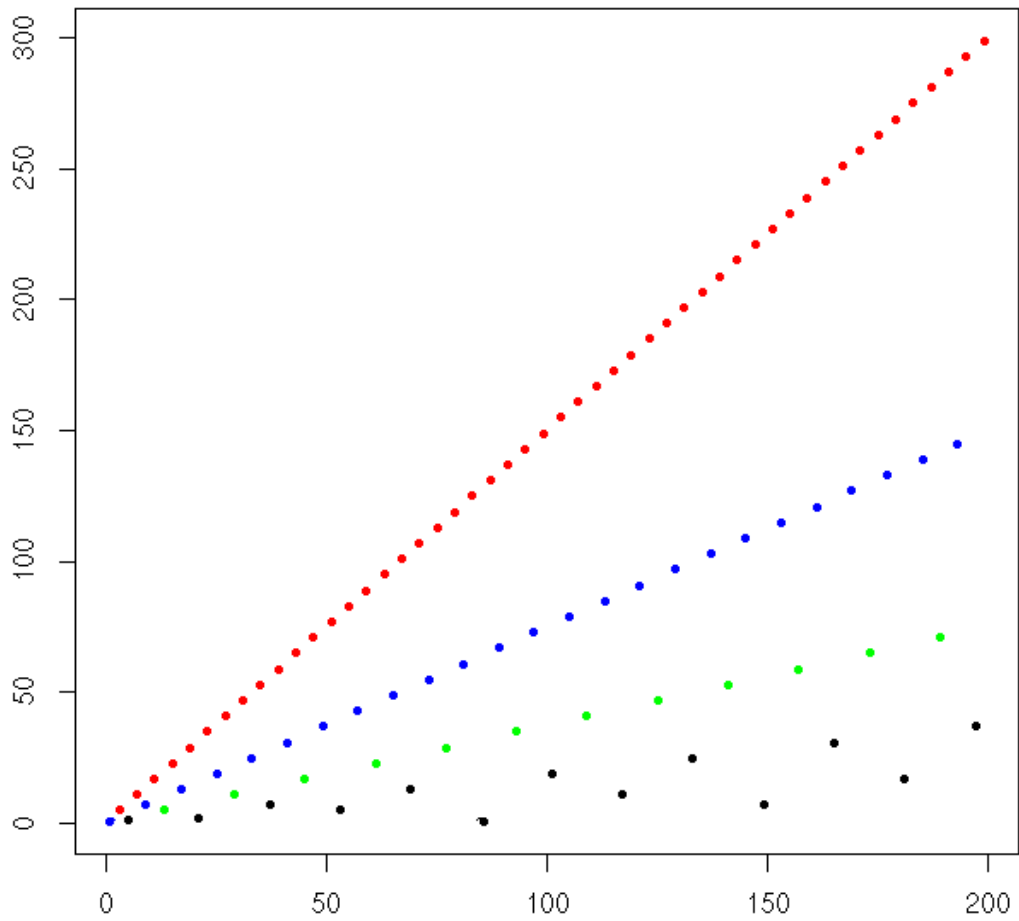


FIGURE 2 – Représentation graphique de N

On note que pour $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ on a : $N(m) = (3m + 1)/4$. Des expressions semblables apparaissent dans les autres cas.

Annexe 3 : Les ensembles F_s et la répartition des prédécesseurs directs

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		5		21		85		341		1365
3												
5	3		13		53		213		853		3413	
7		9		37		149		597		2389		9557
9												
11	7		29		117		469		1877		7509	
13		17		69		277		1109		4437		17749
15												
17	11		45		181		725		2901		11605	
19		25		101		405		1621		6485		25941
21												
23	15		61		245		981		3925		15701	
25		33		133		533		2133		8533		34133
27												
29	19		77		309		1237		4949		19797	
31		41		165		661		2645		10581		42325
33												
35	23		93		373		1493		5973		23893	
37		49		197		789		3157		12629		50517
39												

FIGURE 3 – Les prédécesseurs directs, selon N , des nombres impairs

Dans la figure 3 la colonne s contiennent les éléments de F_s . Par la fonction N les éléments d'une ligne sont les prédécesseurs directs du label tout à gauche.

En prenant les valeurs $(\text{mod } 8)$ on obtient une représentation graphique parlante (figure 4) d'un résultat déjà évoqué qui montre visuellement que la densité de F_1 (1e colonne) dans les nombres impairs est de $1/2$, celle de F_2 (2e colonne) est de $1/4$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		5		5		5		5		5
3												
5	3		5		5		5		5		5	
7		1		5		5		5		5		5
9												
11	7		5		5		5		5		5	
13		1		5		5		5		5		5
15												
17	3		5		5		5		5		5	
19		1		5		5		5		5		5
21												
23	7		5		5		5		5		5	
25		1		5		5		5		5		5
27												
29	3		5		5		5		5		5	
31		1		5		5		5		5		5
33												
35	7		5		5		5		5		5	
37		1		5		5		5		5		5
39												

FIGURE 4 – Les valeurs $(\text{mod } 8)$ des ensembles F_s

Annexe 4 : Relation entre les partitions F_s et S_i

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		5		21		85		341		1365
3												
5	3		13		53		213		853		3413	
7		9		37		149		597		2389		9557
9												
11	7		29		117		469		1877		7509	
13		17		69		277		1109		4437		17749
15												
17	11		45		181		725		2901		11605	
19		25		101		405		1621		6485		25941
21												
23	15		61		245		981		3925		15701	
25		33		133		533		2133		8533		34133
27												
29	19		77		309		1237		4949		19797	
31		41		165		661		2645		10581		42325
33												
35	23		93		373		1493		5973		23893	
37		49		197		789		3157		12629		50517
39												

FIGURE 5 – Répartition de $2N + 1$ selon les ensemble F_s et S_i

Dans la figure 3 la colonne s contiennent les éléments de F_s . Par la fonction N les éléments d'une ligne ont pour image la valeur du label tout à gauche.

Les éléments des ensembles S_i sont représentés par des couleurs :

- $S_1 = \{2^{2n-1}(4k + 1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en bleu
- $S_2 = \{2^{2n}(4k + 3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en vert
- $S_3 = \{2^{2n-1}(4k + 3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en rouge
- $S_4 = \{2^{2n}(4k + 1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en jaune

On voit sur la figure (ce qui se montre d'ailleurs aisément) que :

$F_2 \subset S_1$, $F_i \subset S_3$ pour $i > 2$, $F_1 \cap S_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, 3, 4$

Par ailleurs :

- $F_1 \cap S_1 = \{2^{2n-1}(4k+1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $S_2 \subset F_1$
- $F_1 \cap S_3 = \{2^{2n-1}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $S_4 \subset F_1$

Annexe 5 : Partition des nombres impairs $(2\mathbb{N} + 1)$ selon N : les familles F_{ij}

F_s est l'ensemble m des nombres impairs tels que $N(m) = 2^s m'$ où m' est impair. On a :

s pair : $F_s = \left\{ \frac{2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N} \right\}$

Exemples :

– $s = 2$; $F_2 = \{1, 9, 17, 25, \dots\}$

– $s = 4$; $F_4 = \{5, 37, 69, \dots\}$

– $s = 6$; $F_6 = \{21, 149, \dots\}$

$$N\left(\frac{2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k\right) = 1 + 6k$$

s impair : $F_s = \left\{ 2^s + \frac{2^{s+1} - 1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{5 \times 2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N} \right\}$

Exemples :

– $s = 1$; $F_1 = \{3, 7, 11, 15, \dots\}$

– $s = 3$; $F_3 = \{13, 29, 42, \dots\}$

– $s = 5$; $F_5 = \{53, 117, 181, \dots\}$

$$N\left(\frac{5 \times 2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k\right) = 5 + 6k$$

Par définition $N(m) = (3m + 1)/2^s$ pour $m \in F_s$.

Notation générale : $F_s = \{t_s + km_s, k \in \mathbb{N}\}$

Proposition :

1. $m_s = 2^{s+1}$
2. pour s impair $t_s = (5 \times 2^s - 1)/3$; pour s pair $t_s = (2^{s+1} - 1)/3$
3. pour s impair : $t_s = t_{s-1} + 3 \times 2^{s-1}$; pour s pair : $t_s = t_{s-1} - 2^{s-1}$
4. $t_{2s+1} = 10t_{2s} + 3$

Démonstration du point 4) :

$$10t_{2s} + 3 = 10 \frac{2^{2s} - 1}{3} + 3 = \frac{10 \times 2^{2s} - 10 + 9}{3} = \frac{5 \times 2^{2s+1} - 1}{3} = t_{2s+1}$$

QED

On peut continuer le procédé et chercher $F_{i,j}$ les éléments de F_i dont l'image par N est dans F_j . Par exemple : $F_{2,5}$: éléments m de F_2 dont $N(m)$ est dans F_5 .

Les éléments de F_2 sont de la forme $m = 1 + 8k$. $N(1 + 8k) = 1 + 6k$ doit appartenir à F_5 ; donc : $1 + 6k \equiv 53 \pmod{64}$. En développant :

$$3k = 26 + 32k'; k' \equiv 2 \pmod{3}; k' = 2 + 3k''; 3k = 26 + 32(2 + 3k''); k = 30 + 32k''$$

Finalement : $m = 1 + 8k = 1 + 8(30 + 32k'') = 241 + 256k''$ et $F_{2,5} = \{m : m \equiv 241 \pmod{28}\}$

De manière générale : $F_{i,j} = \{m : m = t_{i,j} + km_{i,j} \text{ avec } k \in \mathbb{N}\}$

Avec : $m_{i,j} = 2^{i+j+1}$

Proposition (formules pour calculer les t_{ij}) :

Formules pour $t_{1,j}$ et $t_{2,j}$:

j pair :

$$t_{1,j} \equiv 3 + \frac{8}{9}(2^{j-2} - 2^{j+3} + 2^{2j-1} - 4) \pmod{2^{j+2}}$$

$j \equiv 0 \pmod{6}$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} + 2^j + 2^{j+1} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 2 \pmod{6}$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 4 \pmod{6}$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} + 2^{j-1} + 2^j - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

j impair :

$$t_{1,j} \equiv 3 + \frac{4}{9}(2^{j-1} + 2^{j+1} + 2^{j+2} + 2^{2j} - 8) \pmod{2^{j+2}}$$

$j \equiv 3 \pmod{6}$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j+1} + 2^{j-1} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 1 \pmod{6}$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j-1} + 2^j + 2^{j+2} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 5 \pmod{6}$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j-1} + 2^{j+3} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

Récurrance de ligne : $t_{i+2,j} = 4t_{i,j} + 1$

Démonstration : Le calcul suit la méthode utilisée pour le calcul de $F_{2,5}$. Exemple de calcul pour j pair et $j \equiv 2 \pmod{3}$ ($j \equiv 2 \pmod{6}$)

$$t_{2,j} = 1 + 8k; N(t_{2,j}) = 1 + 6k \in F_j; 1 + 6k = (2^s - 1)/3 + k'2^{s+1}$$

$j \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow (2^s - 1)/3 \equiv 1 \pmod{3}$ et donc

$$1 \equiv 1 - k' \pmod{3}; k' \equiv 0 \pmod{3}$$

$$1 + 6k = (2^s - 1)/3 + 3k''2^{s+1}$$

$$6k = (2^s - 4)/3 + 3k''2^{s+1}$$

$$2k = (2^s - 4)/9 + k''2^{s+1}$$

$$t_{2,j} = 1 + (16/9)(2^{s-2} - 1) + k''2^{s+3}$$

La formule de récurrence découle de la propriété d'invariance de N par $4m + 1$.

QED

	$F_{.1}$	$F_{.2}$	$F_{.3}$	$F_{.4}$	$F_{.5}$	$F_{.6}$	$F_{.7}$	$F_{.8}$	$F_{.9}$	$F_{.10}$	T
F_1	7	11	19	3	35	99	483	739	1251	227	3 (4)
F_2	9	1	17	49	241	369	625	113	1137	3185	1 (8)
F_3	29	45	77	13	141	397	1933	2957	5005	909	13 (16)
F_4	37	5	69	197	965	1477	2501	453	4549	12741	5 (32)
F_5	117	181	309	53	565	1589	7733	11829	20021	3637	53 (64)
F_6	149	21	277	789	3861	5909	10005	1813	18197	50965	21 (128)
F_7	469	725	1237	213	2261	6357	30933	47317	80085	14549	213
F_8	597	85	1109	3157	15445	23637	40021	7253	72789	203861	85
F_9	1877	2901	4949	853	9045	25429	123733	189269	320341	58197	853
F_{10}	2389	341	4437	12629	61781	94549	160085	29013	291157	815445	341
F_{11}	7509	11605	19797	3413	36181	101717	494933	757077	1281365	232789	3413
F_{12}	9557	1365	17749	50517	247125	378197	640341	116053	1164629	3261781	1365
F_{13}	30037	46421	79189	13653	144725	406869	1979733	3028309	5125461	931157	13653

TABLE 3 – Table des $t_{i,j}$ (offset)

Les ensembles F_s comme les ensembles $F_{i,j}$ fournissent une partition des nombres entiers impairs en progressions arithmétiques infinies de raison les puissances de 2.

Annexe 5a : Suites basées sur $x + d$ d impair et $3x + 3$

Suites basées sur la fonction de récurrence $x + d$ avec d impair

La fonction est définie de façon habituelle par :

$$S = S_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (m + d)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition : (i) $S(d) = d$; (ii) $S(m) < d$ si $m < d$; (iii) $S(m) < m$ si $m > d$

Démonstration :

(i) $S(d) = (d + d)/2 = d$

(ii) $S(m) = (m + d)/2 < 2d/2 = d$ si $m < d$

(iii) $m > d \Rightarrow 2m > m + d \Rightarrow S(m) \leq (m + d)/2 < m$

QED

Conséquence : La suite $(S_d^{(k)}(m))$ est bornée par $\max(d, m)$. Toutes les trajectoires aboutissent donc sur un cycle.

Exemple : $x + 57$

La trajectoire de 1 est un cycle :

(1, 29, 43, 50, 25, 41, 49, 53, 55, 56, 28, 14, 7, 32, 16, 8, 4, 2, 1, ...)

La trajectoire de 3 se termine par le cycle sur 5 :

(3, 30, 15, 36, 18, 9, 33, 45, 46, 23, 40, 20, 10, 5, ...)

La trajectoire de 5 est un cycle :

(5 31 44 22 11 34 17 37 47 52 26 13 35 46 23 40 20 10 5)

Cet exemple montre aussi l'insuffisance de l'heuristique développée à la page 16.

Suites basées sur la fonction de récurrence $3x + 3$

$$N(m) = \frac{3m + 3}{2^{\nu(3m+3)}}$$

Cette suite est intéressante, proche de $3x + 1$ (vraisemblablement convergente vers 3 pour toute valeur de départ) mais avec des paramètres (figure 6) plus aisément maîtrisables. Toutes les valeurs de la suite, à l'exception du germe, sont évidemment des multiples de 3 (le tableau des prédécesseurs équivalent à celui de l'annexe 3, n'a des lignes que face aux multiples de 3, seuls les multiples de 3 ont des prédécesseurs).

Le tableau de la figure 6 répartit l'ensemble des germes, d'une part en les ensembles $F_s = \{m : \nu(m) = s\}$ (les colonnes) et d'autre part en les ensembles S_i (à ne pas les confondre avec ceux de l'annexe 4). Tous les germe de S_m génèrent la même suite (représentée tout à droite du tableau).

Le tableau est engendré par $s_{0,0} = 1$ et les deux relations de récurrences :

n / m	0	1	2	3	4	5	...	m		
0	1	3	7	15	31	63	...	$s_{0,m}$	S_0	3, 3, ...
1	5	11	23	47	95	191	...	$s_{1,m}$	S_1	9, 15, ...
2	9	19	39	79	159	319	...	$s_{2,m}$	S_2	15, 3, ...
3	13	27	55	111	223	447	...	$s_{3,m}$	S_3	21, 33, ...
4	17	35	71	143	287	575	...	$s_{4,m}$	S_4	27, 21, ...
5	17+4	35+8	71+16	143+32	287+64	575+128	...	$s_{5,m}$	S_5	33, 51, ...
...
n	$4n+1$	$+2(2n+1)$	$+2^2(2n+1)$	$+2^3(2n+1)$	$+2^4(2n+1)$	$+2^5(2n+1)$...	$s_{n,m}$	S_n	$[3(4n+2)]$
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	...	F_{m+1}		

FIGURE 6 – Découpages de $2N + 1$ selon $3x + 3$

- $s_{n,m} = s_{n-1,m} + 2^{m+2}$
- $s_{n,m} = s_{n,m-1} + 2^m(2n + 1)$

Mais il est facile d'obtenir une expression simple pour $s_{n,m}$:

$$s_{n,m} = 4n + 1 + 2(2n + 1) + 2^2(2n + 1) + \dots + 2^m(2n + 1) = 4n + 1 + 2(2n + 1)(2^m - 1)$$

Finalement : $s_{n,m} = 2^{m+1}(2n + 1) - 1$

Par ailleurs,

$$N^{(q)}(x) = \frac{3^q x + 3^q + 3^{q-1} 2^{k_1} + 3^{q-2} 2^{k_1+k_2} + \dots + 2^{k_1+\dots+k_{q-1}}}{2^s}$$

avec $k_i = \nu(N^{(i-1)}(m))$ et $s = k_1 + \dots + k_q$

Pour démontrer, par récurrence, la conjecture $3x + 3$, il « suffirait » de montrer que pour tout n il existe $q, (k_i)_{i=1,\dots,q}, m$ et $n' < n$ tels que :

$$N^{(q)}(4n + 1) = s_{n',m}$$

Exemple : La suite de $13 = 4 \cdot 3 + 1$ aboutit sur un élément $s_{n',m} \in S_{n'}$ avec $n' < 3$

Dans ce cas, $n = 3$, la solution est : $q = 4, n' = 2, m = 2$ et $(k_i) = (1, 1, 1, 2)$ ($s = 5$).

En effet : $T^{(4)}(13) = 39 = s_{2,2}$.

Annexe 7 : Quelques cycles pour $3x + 13$

n	s	(k_i)	Cycle
5	8	1,1,1,1,4	211 323 491 743 1121 211
5	8	1,1,1,3,2	259 395 599 905 341 259
5	8	1,1,1,2,3	227 347 527 797 601 227
5	8	1,1,2,2,2	283 431 653 493 373 283
5	8	1,2,1,2,2	319 485 367 557 421 319

TABLE 4 – Quelques cycles entiers et primitifs pour $3x + 13$

Le théorème de Dhiraj ([2]) permet de trouver les 3 premiers. Les 4 autres sont trouvés facilement en utilisant la formule donnant un point de retour.

Si $n \leq s$ entiers tels que $2^s - a^n = b$ (ou diviseur de b) alors toutes les suites (k_i) de longueur n et de somme s donnent lieu à un cycle entier de $ax + b$. Deux suites de (k_i) différentes à une permutation circulaire près donnent des cycles différents. Ces cycles sont primitifs puisque 13 premier ne divise pas les éléments du cycle (si c'était le cas on aurait un cycle non trivial pour $3x + 1$).

Sinon le cycle est entier ou rationnel selon que $b \times num / (2^s - a^n)$ est entier ou non. num étant un nombre entier (somme de produit de puissances de 2 et de puissances de a).

Quelques outils en R ou Prolog⁴⁹ ont été créés pour générer des suites de Collatz ou de calculer quelques invariants.

Exemples :

Le commande R 'SyrNd(283,13,10)' calcule 10 valeurs successives de la suite N -Collatz générée par $3x + 13$ et les exposants (k_i) de la puissance de 2 utilisée comme dividende à chaque étape.

Résultat :

[[1]] [1] 283 431 653 493 373 283 431 653 493 373

[[2]] [1] 0 1 1 2 2 2 1 1 2 2

La commande R 'pt.retour(3,13,c(1,1,2,2,2))' donne comme résultat : 283 13, valeurs à partir desquelles un point de retour pour $3x + 13$ et (k_i) peut être calculé : $x_0 = 13 * 283 / 13 = 283$

En SWI-Prolog la commande 'syracuseQR(S,Q,R,N,Len)' calcule 'Len' termes de la suite $Qx + R$ de type 'S' d'origine 'N'.

49. disponibles chez les auteurs.

Annexe 8 : FRACTRAN

Principe

Un programme FRACTRAN peut être vu comme le fonctionnement d'une machine à registre dont les mémoires sont constituées des exposants des nombres premiers en lesquels se décomposent l'état courant n .

Cette technique reprend l'idée utilisée par Gödel où un nombre naturel n peut encoder un nombre arbitraire de nombres naturels variables. La valeur de chaque variable est l'exposant d'un nombre premier apparaissant dans la décomposition de n en facteurs premiers. Par exemple, l'entier $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ représente l'état de 3 variables v_2 , v_3 et v_5 valant respectivement 2, 1 et 1. Toutes les autres variables potentielles (v_7 , v_{11} , etc.) ont 0 pour valeur.

Un programme FRACTRAN est une liste ordonnée de fractions irréductibles (on peut aussi utiliser un programme constitué de plusieurs lignes voir Conway, 1972 [36]). Chaque fraction représente une instruction de test et de modification des valeurs des variables. Appliquer un programme à une entrée n c'est rechercher la première fraction de la liste telle que son dénominateur divise n . Le produit de n par la fraction constitue le nouveau nombre (entier) auquel on applique le même processus. Si aucune fraction ne convient, le programme s'arrête.

Par exemple $f_1 = \frac{21}{20} = \frac{3 \times 7}{2^2 \times 5^1}$ teste si v_2 et v_5 sont supérieures ou égales respectivement à 2 et 1 auquel cas la division est effectuée (ce qui revient à une soustraction au niveau des exposants, c'est-à-dire des valeurs des variables) puis il y a multiplication par 3 et 7 ce qui revient à ajouter 1 aux variables v_3 et v_7 . Par exemple :

$$60 \times f_1 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times \frac{3 \times 7}{2^2 \times 5^1} = 3^2 \times 7^1$$

Ainsi les seules instructions de FRACTRAN sont :

- les tests conjugués avec des décréments
- les incréments

Il n'y a pas de test indépendamment de décréments. Il n'est pas possible, par exemple, de tester directement si une variable est nulle ou pas.

Exemple

Exemple de programme : $(\frac{3}{10}, \frac{4}{3})$

Si on applique ce programme à 14, la procédure s'arrête immédiatement. Si on l'applique à 15 on obtient successivement 20, puis 6, puis 8 et la procédure s'arrête.

Le programme d'addition : $(\frac{2}{3})$ en partant de $2^a \times 3^b$ on obtient 2^{a+b} .

FRACTRAN et vector game

Un *vector game* est donné par une liste finie de vecteurs entiers (le programme), tous de la même dimension. Le jeu part d'un vecteur x de composantes entières positives. On

additionne à x le premier vecteur de la liste qui préserve la « positivité » de toutes les composantes.

Le processus se répète autant de fois que possible.

Exemple : En partant de $x = (a,b)$ le programme contenant une seule instruction $(1,-1)$ on abouti à $(a+b, 0)$.

On voit facilement en numérotant les composants des vecteurs par la suite des nombres premiers qu'on passe facilement d'un *vector game* à un programme FRACTRAN et vice-versa.

Annexe 9 : Les nombres p-adiques

Les nombres 2-adiques

Il y a plusieurs façons de définir les nombres 2-adiques. On peut par exemple considérer \mathbb{Q} avec la distance donnée par la norme $|2^k(n/m)| = 2^{-k}$ où n et m sont deux entiers impairs. Exemple : $|8| = 1/8$, $|3/20| = 4$. Cette distance est ultramétrique.

Le corps des nombres 2-adiques \mathbb{Q}_2 est le complété de Cauchy de \mathbb{Q} avec la norme 2-adique. \mathbb{Z}_2 est l'ensemble des nombres de norme inférieure à 1 (boule unité compact de \mathbb{Q}_2). Il n'est pas difficile de vérifier que tout élément de \mathbb{Z}_2 peut être représenté par une série (développement de Hensel) :

$\alpha = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \dots$ avec les a_i , 2-digits de α valant 0 ou 1. On peut écrire simplement (a_0, a_1, \dots) .

Pour un élément de \mathbb{Q}_2 , la série comprend un nombre fini de puissances négatives de 2.

L'addition et la multiplication de \mathbb{Q} s'étendent aux nombres 2-adiques et s'exécutent en étendant de façon naturelle l'addition et la multiplication des sommes finies (qui correspondent à $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_2$) aux sommes infinies.

Exemples :

Développement de Hensel de 3 : $3 = 1 + 2$ ou $(1, 1, 0, 0, 0, \dots)$

Développement de Hensel de -1 : $\sum_{i \geq 0} 2^i$ ou $(1, 1, 1, \dots)$

Développement de Hensel de 1/3 : $1 + \sum_{i \geq 0} 2^{2i+1}$

Développement de Hensel de -1/3 : $\sum_{i \geq 0} 2^{2i+1}$

On peut vérifier que $3 \times 1/3 = 1$:

$(1, 1, 0, 0, 0, \dots) \times (1, 1, 0, 1, \dots) = (1, 1, 0, 1, \dots) + (0, 1, 1, 0, 1, \dots) = (1, 0, 0, 0, \dots)$ QED

Une base d'ouverts autour de α est donnée par les disques $B_k(\alpha) = \{\beta : |\beta - \alpha| \leq 2^{-k}\} = \{\beta : \beta \equiv \alpha \pmod{2^k}\}$ ($\beta \equiv \alpha \pmod{2^k}$ signifie que les 2-digits de α et β sont égaux jusqu'au k-1 nième).

Une mesure de Haar (invariante pour l'addition) est définie par $\mu_2(B_k(\alpha)) = 2^{-k}$. En particulier $\mu_2(\mathbb{Z}_2) = 1$.

Les nombres p-adiques

Il se définissent de la même manière en utilisant p nombre premier.

Dans \mathbb{Q}_p : $-1 = \sum_{i=0}^{\infty} (p-1)p^i$.

L'ensemble des fractions de \mathbb{Q} dont le dénominateur est premier avec p est contenu dans \mathbb{Z}_p .

Annexe 10 : Discussion sur le Net

On trouve dans plusieurs forums des discussions relatives à la suite de Syracuse. Ce sujet mériterait une étude spéciale liée aux représentations des mathématiques chez le *grand-public*. Voici quelques extraits assez significatifs.

Une annonce de « démonstration »⁵⁰

Himlaya : Bonjour. J'écris sur ce forum parce que je pense, après bien du mal, avoir réussi à démontrer la conjecture de Syracuse (je possède une licence mathématiques). Cependant je ne peut pas m'empêcher de penser que je me suis peut-être trompé quelque part. Qui plus est je ne sais pas comment m'y prendre pour publier ma démonstration avec confiance. Quelqu'un pourrait-il me renseigner?... Merci d'avance pour vos réponses. (31.01.09)

Modo Ferox : Point culminant de la chaîne de l'Himalaya...Il y a déjà eu Titus (à qui je n'ai toujours pas répondu) qui pensait avoir démontré cette conjecture : as-tu lu cette discussion : <http://www.bibmath.net/forums/viewtopic.php?id=2232> ?

Qu'entends-tu par (...) publier ma démonstration avec confiance ? Que crains-tu ?

* Qu'on ne te prenne pas au sérieux ? Là, détrompe-toi, même si tu dois être bien conscient qu'a priori, on est dans le doute, lequel doute est salutaire en maths. As-tu déjà soumis ta démo à quelqu'un pour qu'il la lise avec un oeil différent de celui de Chimène ?

* Qu'on te vole ta découverte s'il s'avère que tu mérites la médaille FIELDS ? Dans ce cas, faire un double de ta démo, la déposer devant huissier chez un notaire qui cachètera l'enveloppe...

Sinon, vas-y lance-toi... A te lire (31.01.09)

(La démonstration a été publiée mais n'est plus disponible)

Une autre annonce de « démonstration »⁵¹

Alkat : Voici ma demonstration cfr. piece jointe et si vous avez quelque pour commenter mais poliment. Pour trouver ce fichier veuillez consulter hal.archives-ouvertes.fr

Deedee81 : Salut,

C'est particulièrement court. Ou ce sera vite démonté (*) ou alors c'est sacrément génial.

(*) je n'ai malheureusement plus le temps aujourd'hui et je parie une choucroute que ce sera fait par quelqu'un d'autre avant demain :)

EDIT en matière de politesse : bienvenue sur Futura, et n'oublie pas toi-même de dire bonjour!!!! (voir point 2 de la charte du Forum).

Pelkin : Bonjour,

50. <http://www.bibmath.net/forums/viewtopic.php?id=2384>

51. <http://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/682244-preuve-de-conjecture-de-syracuse.html>

Tu parles, cela foire déjà à la deuxième ligne avant même que la démonstration ne démarre, déjà pas foutu d'écrire correctement la conjecture.

gg0 : Bonjour Alkat,

Une démonstration est faite pour convaincre. Donc elle doit être compréhensible par ceux auxquels elle s'adresse. A qui est adressée cette démonstration ? Autrement dit, qui sait de quoi tu parles au début avec tes droites "qui ne contiennent que des nombres premiers" ?

Car pour le commun des mortels, et même pour le mathématicien de base, une droite contient des points, pas des nombres. Même premiers.

Donc, pour que tu sois compris, il va falloir commencer par définir les objets dont tu parles. Employer des mots du vocabulaire mathématique n'est pas faire des mathématiques.

Dernière chose : "par généralisation ..." (fin de la "démonstration") est un moyen classique de ne rien prouver. Soit on sait généraliser, et on le prouve par un raisonnement et/ou un calcul, soit on n'a rien fait.

Mais comme ce qui précède est incompréhensible (pourquoi les triangles sont semblables ? Ce n'est pas vrai sur le dessin. Quel rapport avec la suite de Syracuse ? etc.), ce n'est même pas grave : Il n'y a aucune démonstration.

Désolé !

Mediat : Bonjour,

Tout a été dit, soit alkat publie une nouvelle version convaincante, prenant en compte les différentes remarques faites jusqu'ici, soit ce fil sera fermé et vite oublié.

Médiat, pour la modération.

Alkat : Merci pour la lucidite, la cathete du plus petit triangle est 1,5 et les coordonnees sont parties faisantes du cote du triangle, dans ma graduation 0 n'existe pas cfr dessin, #univers la cotes sont proportionnels avec pour incertitude $k+$ ou $-$ epsilon avec epsilon etant dans l'intervalle ferme de 0 et 1 et les 3 proprietes restantes de la similitude des triangles sont respectees

gg0 : Tu racontes n'importe quoi !

On a tous vu que tes axes commencent à 1. Les côtés de triangles semblables sont proportionnels, ce n'est pas le cas quand ces côtés mesurent 4-1 et 2-1 pour l'un et 26-1 et 17-1 pour l'autre. Tu peux baratiner tant que tu veux, ça ne prouve pas quoi que ce soit. Les preuves mathématiques sont vérifiables, on y exclut donc toute explication non mathématique. Toi, tu n'as encore donné aucune explication mathématique.

Ne t'étonnes pas si ce sujet est fermé : Tu n'as rien fait pour être pris au sérieux. Sur certains forums mathématiques, tu aurais été blessé depuis longtemps par les réactions des gens sérieux. Ta demande " commenter mais poliment" montre que tu crains les réactions des autres. Mais pas assez pour essayer d'être sérieux toi-même.

Médiat : Ite missa est !

Si alkat se conforme à ma demande du message #12, il peut m'envoyer un Message privé, si cela en vaut la peine je rouvrirai ce fil avec joie.

Médiat pour la modération

Devenez célèbre avec la conjecture de Syracuse ! ⁵²

Belane : La conjecture de Syracuse est un problème mathématique dont l'énoncé est enfantin. Pourtant, personne n'a jamais pu confirmer ou infirmer cet énoncé.

La résolution de la conjecture de Poincaré par Grégory Perelman lui avait valu la médaille Fields et les 10 000 euros qui vont avec, qu'il avait d'ailleurs refusés en bloc. Alors, on ne sait jamais : tentez votre chance avec la conjecture de Syracuse !

(suit l'énoncé de la conjecture de Syracuse)

Conjecture de Syracuse démontrée ? ⁵³

Voici un échange bon enfant entre deux internautes qui semblent se connaître (ne serait-ce que de façon virtuelle). Des messages intermédiaires ont été supprimés.

babsgueye : Salut.

Je donne ici les grandes lignes de ma démonstration de la conjecture de Syracuse.

La suite de Syracuse d'un entier positif est définie de la manière suivante : on part de cet entier plus grand que zéro, s'il est pair, on le divise par deux ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun dépend de son précédent.

La conjecture de Syracuse dit que quelque soit l'entier n , la suite de Syracuse de n atteint 1 à partir d'un certain rang et qu'après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2,...) se répète indéfiniment en cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

En fait j'ai montré que de n'importe quelle suite de Syracuse, on peut extraire une sous-suite décroissante. Cette sous-suite de nombres positifs étant minorée par 1, va donc l'atteindre et par définition de Syracuse, décrit le cycle trivial.

Pour n pair : la suite extraite est $(U_{3k+1})_k$.

Pour n impair : la suite extraite est $(U_{3k+2})_k$.

Qu'en pensez-vous ?

GaBuZoMeu : Que c'est faux, bien sûr.

babsgueye : T'es trop @GBZM. C'est la réponse que j'attendais de toi. Mais vérifie un peu.

GaBuZoMeu : Ta première affirmation (pour n pair) entraîne la deuxième (pour n impair) : en effet, dans une "suite de Syracuse", tout nombre impair est immédiatement suivi par un nombre pair.

Pour montrer que tes affirmations sont fausses, il suffit de montrer que la deuxième est fausse.

Tu n'as pas précisé si tu numérotés la suite à partir de 0 ou de 1. Peu importe, je vais donner un contre-exemple qui marche pour les deux cas.

Tu affirmes que la sous-suite $U_2, U_5, U_8, U_{11}, \dots$ est décroissante.

52. <http://www.yabiladi.com/forum/devenez-celebre-avec-conjecture-syracuse-1-4763161.html>

53. <http://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php?43,1181897,1182461>

Considérons la suite de Syracuse 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, ...

Elle commence bien par un nombre impair.

Supposons que tu commences à numéroté à partir de 0 : $U_0=15$ et $U_2=23 < U_5=106$.
Pas très décroissant.

Supposons que tu commences à numéroté à partir de 1 : $U_1=15$ et $U_5=35 < U_8=160$.
Pas très décroissant.

J'ai donc prouvé ma première déclaration : "C'est faux, bien sûr".

babsgueye : Pour cette fois t'as effectivement raison @GBZM! J'ai laissé tomber les dénominateurs dans mes calculs. Merci. ça me semblait quand même trop facile pour résister tout ce temps!

Je vais quand même te dire sur ce fil que j'ai démontré La Conjecture de Legendre avec la fameuse diophantienne $2kk' + k + k'$.

GaBuZoMeu : N'importe quoi, comme d'habitude ...

babsgueye : ha ha...! Je fais mon apprentissage à Latex..pour bien te le sortir. Tu trouvera) redire je m'y attend.

Dom : Heu, juste une question, puis-je raconter n'importe quoi dans ce fil de discussion ?

ev : Voilà une de tes conjectures qui pourrait bien se vérifier.

e.v.

[Aucune conjecture n'ayant été montrée, je ferme ce fil. -JLT]