HAL open science

La suite de Syracuse, un monde de conjectures

Luc-Olivier Pochon, Alain Favre

▶ **To cite this version:**

Luc-Olivier Pochon, Alain Favre. La suite de Syracuse, un monde de conjectures. 2017. hal-01593181v1

HAL Id: hal-01593181

https://hal.science/hal-01593181v1

Preprint submitted on 30 Sep 2017 (v1), last revised 22 Apr 2021 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

La suite de Syracuse, un monde de conjectures

Luc-Olivier Pochon[*], Alain Favre[†]

version 13 juillet 2017

Résumé *: Quel est l'état des travaux concernant la suite de Syracuse ? C'est la question que nous nous sommes posée à propos de ce problème qui constituait une curiosité à l'époque de nos études de mathématiques. A notre grand étonnement, durant quelques dizaines d'années, des travaux de tous niveaux avaient été régulièrement publiés et des conjectures, plus ou moins apparentées, avaient proliféré.*

Cet article résume une partie de ces conjectures. Il relève aussi les démonstrations et les approches plus ou moins naïves que le problème a suscitées.

Mots-clés *: suite de Syracuse, généralisation du problème 3x+1, analyse d'erreurs*

La suite de Collatz et la conjecture principale

Position du problème

On considère la suite de nombres construite à partir d'une origine $m \in \mathbb{N}$ par application répétée de la fonction :

$$C(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ 3m+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

La conjecture principale (conjecture de Collatz) dit que pour toute valeur initiale m il existe n tel que $C^{(n)}(m) = 1$ (l'application répétée n fois de C aboutit à 1).

Les fonctions T et N sont aussi souvent utilisées pour construire des sous-suites de la suite originale. T est donnée par :

$$T(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (3m+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quant à N, elle n'est définie que pour les nombres impairs. Elle est donnée par la formule :

$$N(m) = \frac{3m+1}{2^p}$$

où p est tel que $N(m)$ soit impair. Avec $\nu(n)$ valant la puissance de 2 dans la décomposition de n en facteur premier, on a $\nu(3m+1) = p$. On note $[n]$ le nombre impair déduit à partir de n par division par une puissance de 2 judicieuse.

[*]luc.pochon@gmail.com
[†]alainfa@bluewin.ch

Avec ces notations : $N(m) = [3m+1]$ et $3m+1 = [3m+1] \times 2^{\nu(3m+1)}$.

Par la suite on désignera par « suite de Collatz » chacune des trois suites obtenues par ces formules de récurrence en précisant C, T ou N lorsque cela s'avère nécessaire (par exemple : N-suite de Collatz).

Exemples

Suite C d'origine 7 : (7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1)

Suite T d'origine 7 : (7, 11, 17, 26, 13, 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1)

Suite N d'origine 7 : (7, 11, 17, 13, 5, 1)

La trajectoire (infinie) liée à une application A d'origine m est notée $\tau_A(m)$. Avec cette notation : $\tau_N(7) = (7, 11, 17, 13, 5, 1, 1, 1, \ldots)$.

Généralisations

La fonction T_d avec $d \geq 1$ premier avec 6 a été proposée par Lagarias (1990, [1], [2]) :

$$T_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (3m+d)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Crandall (1978, [3]) généralise la fonction[1] N par $N_{q,r}$ définie et à valeurs dans $2\mathbb{N}+1$ par :

$$N_{q,r}(m) = \frac{qm+r}{2^{\nu(qm+r)}}$$

Au lieu de se restreindre aux ensembles $\mathbb{N}$ ou $2\mathbb{N}+1$, certaines de ces fonctions sont étendues aux ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_2$ (entiers 2-adiques), voire $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}_p$ (nombres p-adiques).

But et plan de l'article

Nous avions croisé la suite de Syracuse lors de nos études de mathématiques. Arrivés à la retraite, nous avons eu la curiosité d'examiner l'état des lieux. Tout d'abord, pour nous rafraîchir la mémoire, nous avons effectué quelques calculs. Puis nous avons rassemblé de la bibliographie sur le sujet (avec Internet, les recherches bibliographiques, pour le moins superficielles, sont vite menées).

Il va sans dire que nous tenons la question pour difficile dans la mesure où elle a été examinée sous toutes les coutures par de bons mathématiciens.

Malgré cela, à notre grand étonnement, ce problème avait donné lieu à de nombreux travaux de tous niveaux et les conjectures plus ou moins apparentées avaient proliféré.

1. Petite anecdote : Sans encore connaître le travail de Crandall, au début de notre « quête », nous avons tout de suite repéré l'intérêt de cette fonction que nous avons appelée N du fait que nous avions l'habitude de travailler à La Neuveville, domicile de l'un des auteurs, ou à Neuchâtel !

Le but premier de cet article est donc de résumer une partie de ces conjectures, d'où son titre.

En cours de travail nous avons été amenés à élargir le coup d'oeil au microcosme constitué des amateurs, plus ou moins éclairés, parfois mathématiciens, parfois non, qui se sont intéressés au problème. On peut faire un parallèle entre certains de ces travaux et ceux concernant la quadrature du cercle et de la trisection de l'angle. Ils donnent une idée des représentations de la recherche en mathématiques dans un public élargi. Celles-ci peuvent renvoyer à des conceptions naïves « honnêtes » ou à des positions plus déconnectées de l'habitus mathématique, voire relever de « pseudo-mathématiques » [2].

Pour sélectionner les articles nous avons tout d'abord repris quelques classiques parus jusqu'au milieu des années quatre-vingt-dix, notamment les bibliographies de J. Lagarias. Puis nous nous sommes fiés aux moteurs de recherche pour recueillir la littérature grise parue dès le tournant du siècle, logée généralement dans les archives ouvertes arXiv et Hal, mais parfois directement sur les sites d'universités ou personnels des auteurs.

Nous avons également pris en compte les informations diffusées sur des forums « grand public » attirés que nous étions par l'étrangeté du discours mathématique traité à la mode « réseau social » (cet aspect mériterait une étude spécifique).

Finalement, avec les mot-clés "Syracuse" et "Collatz" nous nous sommes inscrits à Google Scholar. De façon inattendue, nous recevons régulièrement de nouvelles références.

Après quelques généralités, dont un brin d'histoire qui se contente principalement de donner des références de documents facilement disponibles, quelques approches simples, celles qui nous sont venues à l'esprit, sont présentées.

Puis une brève section, « Le suivi de Lagarias », propose une classification des approches du problème. La section suivante, « Quelques résultats marquants », expose quelques-unes des approches les plus souvent rencontrées ; un résumé des conjectures en fournit ensuite une vision synthétique.

Avant la conclusion, la section « Le monde de Syracuse » passe en revue et classifie l'ensemble des productions recueillies concernant le problème de Syracuse.

Généralités

Un brin d'histoire

L'histoire du problème de Syracuse (sous diverses appellation : conjecture de Collatz, problème $3x+1$, etc.) fait l'objet de nombreuses présentations (Lagarias, 1985 [4], 2010b [5] ; Delahaye, 1998 [6] ; Wirsching, 1998, [7], wikipédia [3]). Nous en résumons l'essentiel.

L'origine du problème généralement associé à Collatz est assez confuse. Comme sa transmission doit beaucoup à la tradition orale, il est difficile de bien suivre sa trace. Dans les années 1930, Lothar Collatz, alors étudiant, s'intéressait aux itérations dans les nombres entiers qu'il représentait au moyen de graphes et d'hypergraphes. C'est alors qu'il serait

2. `http://en.wikipedia.org/wiki/Pseudomathematics`
3. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse

« tombé » sur la suite qu'il présenta ensuite à des collègues. En 1952, lors d'une visite à Hambourg, Collatz expliqua son problème à Helmut Hasse qui le diffusa en Amérique à l'université de Syracuse (d'où le nom de « suite de Syracuse »). Entre temps, le mathématicien polonais Stanislas Ulam le répandait dans le Laboratoire national de Los Alamos. Dans les années 1960, le problème est repris par le mathématicien Shizuo Kakutani qui le diffuse dans l'université Yale et dans celle de Chicago.

Cette conjecture mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960, en pleine guerre froide, qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine.

La conjecture est aussi associée à un prix Erdös qui prime sa solution à 500 dollars [4].

L'avis des experts et l'acharnement des amateurs

La conjecture de Syracuse constitue un des énoncés mathématiques les plus simples à formuler. On la trouve mentionnée dans des ouvrages de l'école obligatoire (Jaquet & Calame, 1991, [9] ; Pochon, 1993, [10]). Et pourtant, des mathématiciens chevronnés doutent de la simplicité du problème. Erdös estimait que « les mathématiques ne sont pas encore prêtes pour de tels problèmes » (cité par Lagarias, 1985, [4]) [5]. Dans son blog [6] Terence Terry Tao (médaille Fields 2006) qualifie l'opiniâtreté actuelle de certains à la démontrer de *mathematical desease* (expression reprise de Richard Lipton, prix Knuth 2014). Il rappelle quelques questions ouvertes qui sont équivalentes à la conjecture de Collatz. Par ailleurs Guy (2010, [11]) cite cette conjecture dans la liste des problèmes à ne pas tenter de résoudre (bien que certains aient été résolus !).

Malgré tout, ces dernières années, nombreux sont les mathématiciens chevronnés à attaquer le problème dans leur domaine de spécialité.

Par ailleurs, de nombreux amateurs, plus ou moins talentueux, s'acharnent sur ce problème à l'image du titre d'un article de Delahaye (2012, [12]) : *J'aimerais tant prouver Syracuse*, publié sous d'autres titres à plusieurs reprises (Delahaye, 1998, [6] ; 2007, [13]).

Il est amusant de relever que l'on trouvait au même moment sur Internet une démonstration sophistiquée de la conjecture et une « démonstration » du fait qu'elle était non démontrable.

Le premier de ces deux articles (Opfer, 2011, [14]) se base sur une équivalence de la conjecture avec la propriété du noyau d'une fonctionnelle en analyse complexe (équivalence elle-même ardue à établir, et certainement valide, due à Berg & Meinardus). L'auteur, vraisemblablement un spécialiste en analyse complexe, publiait peu après un errata qui invalidait la démonstration.

4. Mais un problème plus fondamental (qui vaut actuellement 5000 dollars) est sans doute la conjecture d'Erdös sur les progressions arithmétiques : « Si la série des inverses d'une séquence de nombres entiers diverge, alors la séquence contient des progressions arithmétiques de longueur arbitraire ». Si cette assertion est vraie, elle résout plusieurs problèmes ouverts en la théorie des nombres. Mais une de ses conséquences : la suite des nombres premiers contient des suites arithmétiques arbitrairement longues, a été démontrée de façon indépendante en 2004 par Green & Tao (2008, [8]).

5. Voir l'annexe 1 pour le contexte dans lequel Erdös émet cette opinion.

6. http ://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/

Le deuxième article (Feinstein, 2011, [15]) est moins « professionnel » et s'appuie sur une argumentation douteuse (voir la section consacrée au monde de Syracuse) elle-même reprise d'un bref article lui-même obscure. Il faut toutefois mentionner qu'en 1972, John Conway (1972, [16]) a établi l'indécidabilité algorithmique pour une famille de problèmes qui généralisent de manière naturelle le problème de Syracuse.

On trouve également des articles de jeunes amateurs, par exemple Dianopoulos (2012, [17], 2013, [18]) qui précise avoir 15 ans, qui se lancent, trompés par la simplicité de l'énoncé, dans la démonstration. Ils commencent par redécouvrir des propriétés relativement simples des nombres (par exemple $2^{k+1} + 2^k$ et $2^{2k} - 1$ sont divisibles par 3). Ces projets sont souvent abandonnés.

Variantes de la conjecture

La conjecture peut être formulée de diverses façons ou décomposée en plusieurs conjectures plus faibles. Ultérieurement, on mentionnera des conjectures généralisant celle de Collatz ou des conjectures équivalentes dans différents domaines.

Forme faible de la conjecture (nontrivial cycles conjecture) : s'il existe m tel que $C^{(k)}(m) = m$ pour $k > 1$ alors $m = 1$, 2 ou 4.

Conjecture de non divergence ((no) divergent trajectories conjecture) : Toutes les suites de Collatz sont bornées.

Cette dernière conjecture est équivalente au fait que toute trajectoire se termine par un cycle.

Conjecture du temps d'arrêt fini : Toute trajectoire finit par repasser au-dessous de son point de départ.

Cette conjecture est équivalente à la conjecture primitive en utilisant un raisonnement par récurrence.

Une expression de la conjecture fait intervenir le semi-groupes de fonctions affines : Soit $(f_i)_{i=1,\ldots,k}$ une famille de fonctions affines. Avec la composition, cette famille engendre un semi-groupe S. Etant donné un ensemble de nombres A, on désigne par $\langle S : A \rangle$, orbite de S, l'ensemble des images de A par les fonctions de S.

$\langle S : A \rangle$ peut aussi simplement être défini comme l'ensemble généré par les formules de récurrences $(f_i)_{i=1,\ldots,k}$.

Conjecture des prédécesseurs : Soit S le semi-groupe engendré par les fonctions affines $\{x \mapsto 2x; x \mapsto (2x-1)/3\}$. Alors l'orbite $\langle S : \{4\} \rangle$ contient tous les nombres entiers positifs supérieurs à 2.

Quelques bricolages

En tant qu'amateurs, il est possible de s'approprier le problème en procédant à divers essais qui, mis à part certains développements techniques, mènent rapidement et de façon étonnante à quelques limites explorées par les professionnels.

Quelques propriétés

Une propriété intéressante de T : $T^{(k)}(a2^k - 1) = a3^k - 1$

Démonstration par récurrence : l'égalité est vérifiée pour $k = 0$ et $k = 1$. A vérifier pour $k + 1$ admettant qu'elle est vérifiée pour k :

$$T^{(k+1)}(a2^{k+1} - 1) = T^{(k)}((3a2^{k+1} - 3 + 1)/2) = T^{(k)}((3a)2^k - 1) = (3a)3^k - 1 = a3^{k+1} - 1$$

QED

Remarque : En cours de démonstration on constate que $T^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ est impair et donc $T^{(i)}(a2^k - 1) = N^{(i)}(a2^k - 1)$ pour $i < k$ et :

Une propriété intéressante de N : $N^{(k)}(a2^k - 1) = [a3^k - 1]$

Ces propriétés incitent à partitionner l'ensemble des nombres impairs de la façon suivante (Andaloro, 1998, [19]) :

- $S_1 = \{2^{2n-1}(4k + 1) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$,
- $S_2 = \{2^{2n}(4k + 3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- $S_3 = \{2^{2n-1}(4k + 3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$
- $S_4 = \{2^{2n}(4k + 1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$

On voit facilement que c'est une partition de $2\mathbb{N} + 1$. Elle est obtenue à partir d'une partition des nombres pairs puis en soustrayant 1. En effet, on peut écrire les nombres pairs sous la forme $p \times i$ où p est une puissance de 2 et i un nombre impair. Puis on prend comme critère de partition la parité de l'exposant et la classe de reste de i $\pmod 4$.

Propriété d'invariance de N ***par la transformation*** $4m+1$: Pour tout nombre m impair, $N(4m + 1) = N(m)$

Démonstration : $N(4m + 1) = [12m + 4] = [3m + 1] = N(m)$
QED

Calcul de $N(m)$ selon une partition $\pmod{16}$, m impair

En calculant quelques valeurs de $N(m)$, on constate une certaine régularité dans la suite des valeurs. 16 semble jouer un rôle dans cet aspect périodique.

En partitionnant les nombres impairs en 4 classes : $\{m \ : m \equiv 3 \pmod 4\}$; $\{m \ : m \equiv 1 \pmod 8\}$; $\{m \ : m \equiv 13 \pmod{16}\}$; $\{m \ : m \equiv 5 \pmod{16}\}$ on a :

- $N(3 + 4n) = [3(3 + 4n) + 1] = [10 + 12n] = 5 + 6n$
- $N(1 + 8n) = [3(1 + 8n) + 1] = [4 + 24n] = 1 + 6n$
- $N(13 + 16n) = [3(13 + 16n) + 1] = [40 + 48n] = 5 + 6n$

Sur ces 3 classes N est une application linéaire. Par contre, le comportement de N sur la 4e classe semble plus « chaotique ».

- $N(5 + 16n) = [16 + 48n] = [1 + 3n]$

Pour cette dernière valeur, il faut tenir compte de la parité de n. Lorsqu'il est pair, $N(5+16n) = [16+48n] = 1+3n$. Lorsque qu'il est impair, $n = 2n'+1$, il faut alors tenir compte de la parité de n', etc. Cette dernière classe serait à partitionner pour obtenir

des comportements réguliers de N. Cette ramification « fractale » dans l'étude de son comportement répond aux tentatives de la maîtrise de la suite de Collatz : lorsque l'on croit avoir atteint le but, il reste toujours un nouvel ensemble à examiner.

On constate que les multiples de 3 sont absents des images de N.

L'annexe 2 propose le calcul pour les 16 classes et les graphiques qui mettent en évidence à la fois l'aspect linéaire et apparemment « chaotique »de N.

On note toutefois que pour $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ on a : $N(m) = (3m+1)/4$ et que des relations semblables apparaissent dans les autres cas. Cela donne l'idée de considérer les familles F_s qui font l'objet de la section suivante.

Partition des nombres impairs $(2\mathbb{N}+1)$ selon N : les familles F_s

Pour m impair, on a la relation $C(m) = 3m+1 = 2^{\nu(3m+1)}N(m)$. On peut classer les nombres impairs m en fonction des valeurs de $s = \nu(3m+1)$. Les famille seront notées F_s.

Construction des ensembles F_s

$m' = N(m)$ impair peut se mettre sous la forme $m' = 2n+1$ donc $3m+1 = 2^{s+1}n + 2^s$. Il en découle :

$$3m = 2^{s+1}n + 2^s - 1 \text{ et } (-1)^{s+1}n + (-1)^s - 1 \equiv 0 \pmod 3.$$

s pair

$$-n + 0 \equiv 0 \pmod 3; n = 3k; 3m = 2^{s+1}3k + 2^s - 1; m = \frac{2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k$$

et

$$N(m) = N(\frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k) = \frac{2^s - 1 + 3 \times 2^{s+1}k + 1}{2^s} = \frac{2^s + 3 \times 2^{s+1}k}{2^s} = 1 + 6k$$

Exemples :

- $s = 2; m = 1 + 8k; F_2 = \{1, 9, 17, 25, ...\}$
- $s = 4; m = 5 + 32k; F_4 = \{5, 37, 69, ...\}$
- $s = 6; m = 21 + 128k; F_6 = \{21, 149, ...\}$

s impair

$$n + 1 \equiv 0 \pmod 3; n = 2 + 3k; 3m = 2^{s+1}(3k+2) + 2^s - 1; m = \frac{5 \times 2^s - 1}{3} + 2^{s+1}k$$

et

$$N(m) = \frac{5 \times 2^s - 1 + 3 \times 2^{s+1}k + 1}{2^s} = 5 + 6k$$

Exemples :

- $s = 1; m = 3 + 4k; F_1 = \{3, 7, 11, 15, ...\}$
- $s = 3; m = 13 + 16k; F_3 = \{13, 29, 45, ...\}$
- $s = 5; m = 53 + 64k; F_5 = \{53, 117, 181, ...\}$

Remarque : La suite des nombre de $F_1 \pmod 8$ est $(3, 7, 3, 7, \ldots)$, l'ensemble $F_2 \pmod 8$ se réduit à $\{1\}$ et $F_s \pmod 8 = \{5\}$ sinon.

Conséquences

1. Cette partition des nombres impairs complète le bricolage précédent. N est linéaire sur chacun de des ensembles F_s. Par définition (et cela se contrôle facilement) $N(m) = (3m + 1)/2^s$ pour $m \in F_s$.
2. La « densité » de F_s dans $2\mathbb{N} + 1$ vaut $1/2^s$.
3. s pair : pour $m \in F_s$ on a $N(m) \equiv 1 \pmod 6$.
4. s impair : pour $m \in F_s$ on a $N(m) \equiv 5 \pmod 6$.
5. $F_{s+2} = 4F_s + 1$
6. Par la propriété d'invariance par $4m + 1$ avec $P : x \mapsto (x - 1)/4$ et $m \notin F_1 \cup F_2$ on a $N(m) = N(P(m))$.
7. En répétant la conséquence précédente, on voit que $F_1 \cup F_2$ est suffisant [7]. Toutefois ces deux ensembles représentent les trois quarts des nombres impairs. Seuls les nombres congrus à $5 \pmod 8$ ne sont pas contenus dans ces ensembles. Mais on peut montrer qu'il existe des ensembles suffisants de densité arbitrairement petite (voir plus loin).

Remarque : Cela permet de constater à nouveau que les multiples de 3 ne sont pas dans l'image de N.

L'annexe 3 propose une présentation utile des ensembles F_s.

L'annexe 4 montre la relation entre les ensembles F_s et S_i.

L'annexe 5 prolonge cette partition aux ensembles $F_{i,j}$ dont les éléments sont ceux de F_i dont l'image par N est dans F_j.

L'annexe 5a propose un examen des problèmes $x + d$ (d impair) et $3x + 3$.

Les prédécesseurs

La situation : partant de 1, en utilisant de façon alternée la multiplication par 2 et la fonction $T_1(x) = (2x - 1)/3$, on considère les nombres obtenus. Ce travail donne lieu à des représentations graphiques spectaculaires (figure 7 de l'Annexe 6).

Pour commencer, partant de 1, une branche est constituée des puissances de 2 (figure 1). Les puissances de 2 paires sont des nombres terminaux (sans prédécesseur) ($2 \times 2^{2n} - 1 \equiv -1 \times 1 - 1 \neq 0 \pmod 3$). Il en va de même pour les multiples de 3.

7. Pour un système dynamique obtenu par itération d'une fonction $f : X \to X$, $S \subset X$ est dit suffisant si la trajectoire de tout $m \in X$ rencontre la trajectoire d'un élément de S

Par contre les puissances de 2 impairs de la forme 2^{2n+1} possèdent $(2^{2n+2}-1)/3$ comme prédécesseur ($2^{2n+2}-1 \equiv 1 \times 1 - 1 \equiv 0 \pmod 3$).

la figure 1 (reprise en partie de [4]) donne quelques prédécesseurs de 1 (selon la fonction T). Les colonnes de nombres correspondent (de bas en haut) à la multiplication par 2. Les traits obliques correspondent à T_1. Les nombres en rouge ne possèdent que leur double comme prédécesseur.

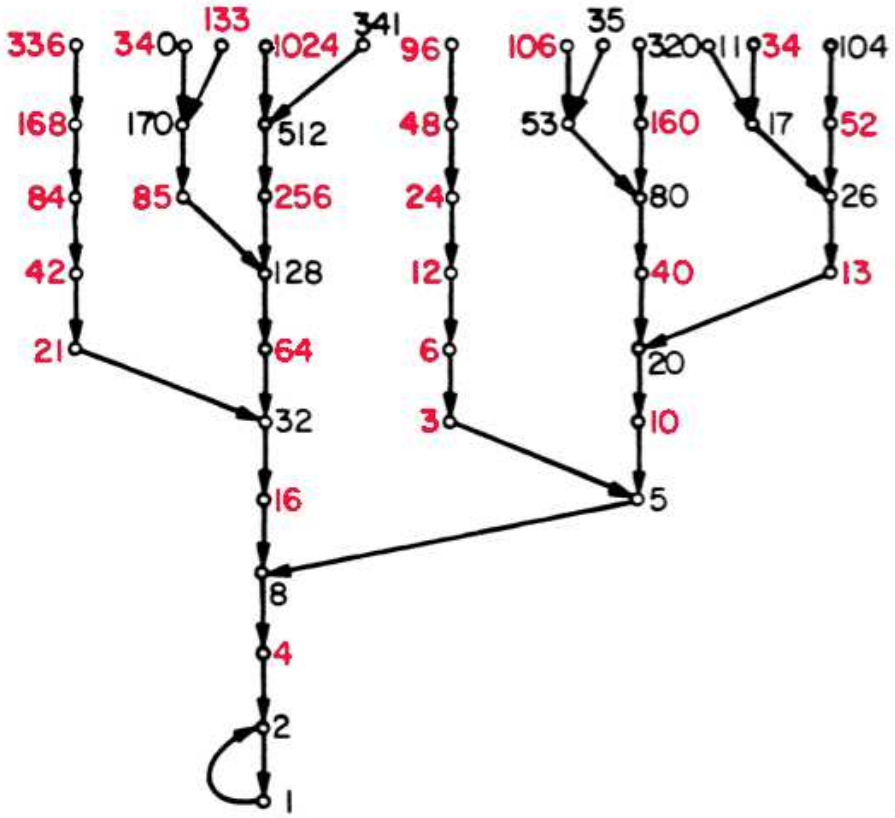

FIGURE 1 – Prédécesseurs de 1

L'annexe 3 représente les prédécesseurs directs, selon N, des nombres impairs répartis dans les ensembles F_s.

La fonction itérée sur $\mathbb{Q}$

Une sous-suite impaire de Collatz (N-Collatz) est donnée par les valeurs itérées de $N_k(x) = (ax+b)/2^k$ avec k judicieusement choisi en fonction de x. On peut toutefois étudier systématiquement les fonctions affines, d'abord sur $\mathbb{R}$, puis restreinte à $\mathbb{Q}$, $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ données par $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x) = N_{k_n}(N_{k_{n-1}}(\ldots N_{k_1}(x)\ldots))$ sans restriction sur la suite d'entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ autre que $k_i > 0$.

$H(x) = H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x) = px + h$ est une fonction affine de pente $p = a^n/2^s$ où n est le nombre d'itération et s la somme des k_i (dérivée d'une fonction composée !) et de hauteur

à l'origine (valeur en 0)

$$h = b\frac{a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}}}{2^s}.$$

En regroupant :

Proposition (formule pour H) :

$$H_{k_1,\ldots,k_n}(x) = \frac{a^n x + b(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}})}{2^s} \tag{1}$$

avec $s = \sum k_i$

Propriété : $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n,l_1,l_2,\ldots,l_m} = H_{l_1,l_2,\ldots,l_m} \circ H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$

Définition : Une suite d'entiers $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ est admissible pour $x \in 2\mathbb{N}+1$ si toutes les valeurs $H_{k_1,k_2,\ldots,k_i}(x)$ pour $0 < i \leq n$ sont entières impaires.

Annonce de résultat : On verra ultérieurement qu'il suffit que, pour x impair, $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x)$ soit entier (impair) pour que la suite $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ soit admissible.

Recherche de cycles (cas général)

Tout cycle de Collatz est lié à un point de bouclage $x_0 \in \mathbb{Q}$ de H . C'est un zéro de la fonction affine $H(x) - x$. Sa hauteur à l'origine est la même que précédemment. Sa pente vaut $a^n/2^s - 1$ où n est le nombre d'itérations. Donc :

$$y = H(x) - x = \frac{a^n - 2^s}{2^s}x + h \tag{2}$$

avec $s = \sum k_i$

En posant $y = 0$; on trouve la valeur de x_0 :

Proposition : Le point de bouclage de la suite[8] $ax + b$ est donné par :

$$x_0 = \frac{b}{2^s - a^n}(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_1} + a^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}})$$

Cas particulier $3x + 1$:

$$x_0 = \frac{1}{2^s - 3^n}(3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}}) \tag{3}$$

Note : Certains auteurs nomment les nombres de la forme du dénominateur : nombres de Collatz. Pour un tel nombre, l'ensemble des nombres possibles au numérateur forment la couronne de Collatz.

8. Pour simplifier l'écriture, on écrira « suite $ax + 1$ » au lieu de « suite générée par la relation de récurrence $ax + b$ »

Corollaire 1 : La conjecture de Syracuse faible est équivalente, puisqu'il s'agit d'un point de bouclage, à : « il n'existe pas de suites $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ telles que $2^s - 3^n$ divise $3^{n-1} + 3^{n-2}2^{k_1} + 3^{n-3}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{n-1}}$ autres que (2) ou (1,2) ».

Note : Si une telle suite existe, elle est forcément admissible par le résultat annoncé ci-dessus.

Cette relation semble résoudre le problème de la conjecture. Il « suffirait » de montrer que ce point de bouclage ne peut être que 1, 2 ou 4. Or il se trouve que les nombres entiers de la forme ci-dessus constituent l'objet d'un problème non résolu de divisibilité faisant intervenir les puissance de 2 et de 3.

Corollaire 2 : Pour chaque suite $(k_1, k_2, \ldots, k_n)$ il n'y a qu'un seul cycle (rationnel) ; le cycle de longueur n est le même pour toutes les permutations circulaires des k_i.

Démonstration : La première proposition découle de la formule. Par ailleurs, un simple calcul montre que N décale les valeurs de k :

$N(x_0) = \frac{1}{2^s - a^n}(a^{n-1} + a^{n-2}2^{k_2} + a^{n-3}2^{k_2+k_3} + \ldots + 2^{s-k_1})$, valeur construite sur la suite $(k_2, k_3, \ldots, k_n, k_1)$.
QED

Corollaire 3 : Pour chaque valeur de s, il y a autant de cycles que de décompositions additives de s aux permutations circulaires près [9].

Corollaire 4 : Les cycles liés à $ax + b$ sont des cycles de $ax + 1$ amplifiés par b. Les cycles de $ax + b$ fournissent des cycles de $ax + be$ (en les amplifiant par e).

Note : Par construction les trajectoires des H sont constituées de nombres rationnels. Parmi ceux-ci on distingue les cycles entiers (i.e. formés d'entiers).

Note : Les cycles entiers de $ax + b$ sont dits primitifs [10] si les valeurs du cycle n'ont pas de diviseur commun. En particulier les cycles rationnels $ax + 1$ avec un dénominateur commun minimum b deviennent des cycles primitifs de $ax + b$ par amplification par b.

Exemple, pour $3x+5$ on a le N-cycle primitif (19, 31, 49) ; il correspond au cycle rationnel (19/5, 31/5, 49/5) de $3x + 1$.

Proposition : Le cycle $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ de $qx + r$ est primitif si et seulement si x_0 est premier avec r.

Démonstration :

1. x_0 et r on un diviseur commun d. A voir $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ non primitif. En effet :

x_0/d génère un cycle entier pour $qx + r/d$ et donc en remontant sur la suite $qx + r$, le cycle $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ est multiple de d donc non primitif. Ou bien $x_1 = (qx_0 + r)/2^s$ et donc d divise x_1 et ainsi de suite.

2. $(x_0, \ldots, x_{n-1})$ non primitif de facteur commun d. A voir x_0 et r ont un facteur commun supérieur à 1. En effet, par définition $x_1 = (qx_0+r)/2^s$; comme d divise x_1 et x_0, il divise r.
QED

Exemples :

9. A propos de la partition d'un entier voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Partition_d'un_entier`.

10. Lagarias (1990, [1]) définit cette notion dans le cas de l'application T_b ($a = 3$)

- $3x-1$ possède le cycle entier (17, 25, ...) ; le cycle correspondant de $3x+1$ est : (-17, -25, -37, -55, -41, -61, -91). Dans ce cas $(k_i) = (1,1,1,2,1,1,4)$
- $5x+1$ possède le cycle primitif (17, 43, 27) ; le cycle correspondant de $5x+3$ est : (51, 129, 81) ; $(k_i) = (1,3,3)$ (non primitif)
- $3x+1$ a un cycle initié par 31/101 ; le cycle correspondant de $3x+3$ est initié par 93/101 ; le cycle correspondant de $3x+101$ est (31, 97, 49) ; $(k_i) = (1,3,3)$

Corollaire 5 : Avec $n = n_1 \times n_2$ si la suite (k_i) se répète tous les n_1. Le cycle de longueur n se décompose en n_2 sous-cycles de longueur n_1.

Démonstration : Par le corollaire 2, un cycle lié à $(k_1, k_2, \ldots, k_{n_1})$ existe (de longueur n_1). Sa répétition en n_2 exemplaires est un cycle de longueur n qui est unique.

Exemple pour respirer :

Pour $(k_i) = (1,2,1)$, on a : $n = 3$, $s = 4$ et $x_0 = \frac{3^2+3\cdot 2+2^3}{2^4-3^3} = \frac{-23}{11}$. Le cycle est (-23, -29, -19, -23)/11.

En prenant $(k_i) = (1,2,1,1,2,1)$ on a $n = 6$, $s = 8$.

Puis $x_0 = \frac{3^5+3^4\cdot 2+3^3\cdot 3^3+3^2\cdot 2^4+3\cdot 2^5+2^3}{2^8-3^6} = \frac{-989}{473}$

Par simplification par 43, cette dernière valeur est bien identique à la précédente $\frac{-23}{11}$.

Corollaire 6 : Si $k_i = 1, i = 1, \ldots, n$ les cycles sont de longueur 1 de valeur $x_0 = -1/(a-2)$ (point fixe). Lorsque tous les k_i sont égaux les cycles se réduisent aussi en des poins fixes.

Exemple : $3x+1$, $n = 1$: le cycle est constitué d'un point fixe que l'on trouve en résolvant $(3x+1)/2^k = x$ et donc $x = 1/(2^k-3)$ (table 1).

k	Point fixe
1	-1
2	1
3	1/5

TABLE 1 – Points fixes pour quelques valeurs de k

Heuristique dans la recherche de cycles

Pour trouver un point de bouclage positif, il faut que la pente de $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ soit négative. Donc $a^n/2^s < 1$ ou encore $n \log a < s \log 2$, et donc :

$$s > n\frac{\log a}{\log 2} \text{ ou } \frac{s}{n} > \frac{\log a}{\log 2} \tag{4}$$

Cela permet de limiter les valeurs de s. Pour espérer trouver un point fixe, il faut que la suite reste bornée et donc que 2^s soit au moins du même ordre de grandeur que a^n. Par contre, si la pente est positive, on trouve un cycle négatif (de nombres négatifs).

Le tableau 2 donne quelques exemples pour la suite $5x+1$; $a = 5$; $n = 3$ et donc $s > 3\log 5/\log 2 \approx 6.97$ et donc $s = 7$ est le minimum possible.

n	s	(k_i)	Cycle
3	7	1,1,5	13, 33, 83, 13, ...
3	7	1,2,4	43/3, 109/3, 137/3, 43/3, ...
3	7	1,3,3	17, 43, 27, 17, ...
3	7	2,1,4	53/3, 67/3, 169/3, 53/3, ...
3	7	2,2,3	61/3, 77/3, 97/3, 61/3, ...
3	7	2,3,2	77/3, ...

TABLE 2 – Cycles pour quelques valeurs de n, s et (k_i)

Avec ces valeur : $x_0 = (25 + 5 \times 2_1^k + 2^{k_1+k_2})/3$

On vérifie bien que, conformément au corollaire 2, les cycles liés à (2,2,3) et (2,3,2) sont les mêmes alors que les cycles liés à (1,2,4) et (2,1,4) sont différents. D'autres exemples en annexe 7 (tableau 4, page 61).

$H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ sur $2\mathbb{N}+1$

Proposition : Si pour x entier impair $H_{k_1,k_2,\ldots,k_n}(x) \in \mathbb{N}$ $(n > 1)$, alors toutes les valeurs intermédiaires $H_{k_1,k_2,\ldots,k_i}(x)$ sont entières et impaires pour $0 < i < n$.

Autrement dit : si x est un entier impair et $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x)$ pour $j < n$ n'est pas un nombre entier impair alors les nombres suivants de la suite $H_{k_1,k_2,\ldots,k_i}(x)$ pour $n > i \geq j$ ne sont pas entiers impairs. Pour cela, il suffit de montrer que $H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

Démonstration : Selon 1 page 10 $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = a/2^k$ avec a impair et $k > 1$ ou $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = b$ avec b pair.

Cas 1 : $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = a/2^k$ (a impair) à voir que $H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

$H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x) = N_{k_{j+1}}(H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x)) = (3a/2^k + 1)/2^{k_{j+1}} = (3a + 2^k)/2^{k+k_{j+1}}$. Si cette valeur est entière cela implique que a est pair. En contradiction avec l'hypothèse d'imparité de a.

Cas 2 : $H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x) = b$ (b pair) à voir que $H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x)$ n'est pas entier.

$H_{k_1,k_2,\ldots,k_{j+1}}(x) = N_{k_{j+1}}(H_{k_1,k_2,\ldots,k_j}(x)) = (3b + 1)/2^{k_{j+1}}$ n'est pas entier.
QED

Corollaire : Si x_0, point de bouclage, est entier, le cycle complet est entier.

Corollaire : Un cycle est soit entier soit tous ses éléments sont non entiers (rationnels).

Remarque : n et s sont respectivement le nombre de valeurs impaires et le nombre de valeurs paires des $n + s$ premières valeurs de la suite originale de Collatz. De l'inégalité 4 page 12 (obtenue différemment) Eliahou (2011c) en tire une valeur minimum pour la longueur d'un cycle non trivial (voir page 17). A noter que cette inégalité valable pour les suites initiées par un nombre impair, se prolonge à toutes les suites en utilisant le même raisonnement sur la fonction $H'_{k_0}(H_{k_1,\ldots,k_n}(x))$ où $H'_{k_0}(x) = x/2^{k_0}$.

Remarque : La propriété intéressante $T^{(k)}(a2^k - 1) = a3^k - 1$ entraîne directement que la suite $(T^{(i)}(a2^k - 1))_{i=0,k}$ est formée de nombres entiers (et impairs pour $i < k$) pour $a \geq 0$ entier.

Le suivi de Lagarias

Lagarias (2009, 2011, 2012, [20], [21], [22]) entretient une bibliographie commentée, souvent mise à jour, des principales contributions attachées à la conjecture de Collatz. Il est lui-même l'auteur de plusieurs résultats. L'intérêt épistémologique de ce travail est de constater que chacun traduit le problème dans sa sphère d'intérêt ou de spécialité. La recherche de solution conduit à de nouvelles conjectures. On fera en s'inspirant de Lagarias (2010a, [23]) une liste des approches rencontrées.

Chamberland (2010, [24]) propose également un survol du sujet entre théorie des nombres et systèmes dynamiques. Son article est assorti d'une importante bibliographie (pas toujours référencée dans le texte). Outre la référence classique de Lagarias, il cite également l'ouvrage de Wirsching (1998, [7]) comme catalogue de résultats et de pistes d'attaque.

Dans un autre article (Chamberland, 2015, [25]) il répertorie les travaux qui étendent T à des ensembles plus grands ($\mathbb{Z}$, les nombres rationnels à dénominateur impair, $\mathbb{Z}_2$, les entiers de Gauss, $\mathbb{Z}_2[i]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$).

Belaga et Mignotte (2015, [26]) établissent également une classification des travaux en considérant les aspects algorithmiques, ceux liés à la théorie des nombres ou encore aux processus stochastiques.

Informatique (programmation) : Les astuces mises au point pour établir des records dans la vérification de la conjecture pour des nombres de plus en plus grand nécessitent de développer certains outils théoriques. Par ailleurs, des développement théoriques peuvent s'appuyer sur ces records.

Arsac (1987, [27]) étudie la complexité des calculs nécessaires et montre qu'elle peut être réduite en utilisant des propriétés de la suite.

Dans cette catégorie, il faut aussi insérer les représentations graphiques de la suite. Une des plus spectaculaires est due Jason Davies [11] qui montre les orbites de tous les nombres dont la longueur de la trajectoire est inférieure ou égale à dix-huit [12] .

Théorie des nombres : Le problème de Syracuse est notamment lié à des équations diophantiennes mêlant des puissances de 2 et de 3. Par ailleurs, Eliahou (2011c, [28]) utilise les suites de Farey pour démontrer un résultat sur la longueur des cycles éventuels non triviaux.

Systèmes dynamiques et théorie ergodique : Par son expression, la suite de Syracuse s'apparente à un système dynamique discret. Elle entre dans ce champ théorique classique lorsque le domaine de définition de la relation de récurrence est étendu à un espace mesurable plus riche, par exemple $\mathbb{R}$ par Chamberland (1996, [29],[30]) travaux poursuivis par Lygeros et Rozier (2014, [31]) ou surtout de façon très naturelle $\mathbb{Z}_2$, l'ensemble des entiers 2-adiques. Dans ce dernier cas, on montre que l'extension de T satisfait l'hypothèse d'ergodicité.

Logique mathématique et théorie du calcul (theory of computation) : la question se pose de la décidabilité de la conjecture. Conway (1972, [16]) a démontré que des problèmes

11. http ://www.jasondavies.com/collatz-graph/

12. La génération du graphe est basée sur le code Python par @TerrorBite. Le schéma de l'arbre en présentation radiale est repris d'un exemple fournit avec la remarquable bibliothèque D3.js de Mike Bostock (http ://bost.ocks.org/mike/).

du type de celui de Collatz sont formellement indécidables. Kurtz and Simon (2007, [32]) ont également montré qu'une généralisation naturelle du problème de Collatz est indécidable. Malheureusement, cette preuve ne peut pas être appliquée au problème de Collatz. Par ailleurs, la conjecture peut se reformuler en un problème de réécriture de chaînes de caractères (Sinyor, 2010, [33]).

Une approche se situe entre ce thème et celui de la programmation. Elle met en oeuvre FRACTRAN (voir annexe 8). Ce « langage » figure dans la recension de Lagarias (2010, [34]) par le fait qu'il étend le formalisme utilisé par Conway dans son article de 1972 consacré au problème $3x + 1$. Monks (2002, [35]) propose un programme FRACTRAN qui génère la suite de Syracuse et reporte la conjecture de Collatz en une conjecture sur le programme FRACTRAN.

Ce programme est donné par : $(\frac{1}{11}, \frac{136}{15}, \frac{5}{17}, \frac{4}{5}, \frac{26}{21}, \frac{7}{13}, \frac{1}{7}, \frac{33}{4}, \frac{5}{2}, 7)$

appliqué à 2^n, génère une suite qui contient dans l'ordre les termes 2^b, où b parcourt les termes de la suite T de Syracuse de premier terme n et seulement ceux-là.

Probabilités et processus stochastiques : Slakmon & Macot (après 2003, [36]) appliquent la théorie et les méthodes des cheminements aléatoires et de la théorie des jeux pour placer les suites de Syracuse dans un modèle probabiliste. Ils démontrent la « random conjecture » [13]. Carletti & Fanelli (2016, [37]) considère l'itération de $S = C^{(3)}$ et établissent un processus de Markov sur les classes des nombres $\pmod 8$. Cela leur permet de montrer que les suites définies par S sont presque partout (selon une mesure qu'ils définissent) non divergentes.

Analyse complexe : L'article de Opfer (2011, [14]) déjà cité est un exemple recensé dans cette catégorie. Chamberland (2003, [38]) en se référant aux mêmes travaux que Opfer étudient la fonction analytique dont les coefficients sont les itérations de $T_{q,r}(m)$

Analyse p-adique : Les nombres 2-adiques apparaissent de façon accessoire dans l'étude des systèmes dynamiques et une connexion à la théorie ergodique. Ils ont aussi le support d'une généralisation de la conjecture proposée par Fleckinger & Abdoulkarim (2015, [39]).

Analyse d'erreurs : Une partie des articles s'attachent à montrer les erreurs dans les démonstrations proposée. Ainsi Haynberg (2009, [40], [41]), par exemple s'attaque, mais de façon naïve à une démonstration élaborée par Schorer (2009) revue par la suite par l'auteur sans grand succès (Schorer, 2014a, [42], 2014b, [43]).

Epistémologie et philosophie des sciences : Bendegem (2005, [44]) mène une suite de travaux pour « capturer » le travail des mathématiciens qui ne se résume évidemment pas à l'écriture de démonstrations. Le problème $3x + 1$ est pris comme étude de cas en se basant sur les bibliographies annotées de Lagarias et d'autres sources.

Le roman de Antoine Billot (2008, [45]) qui présente l'affrontement entre deux mathématiciens à propos de la suite de Syracuse peut également intégrer cette rubrique.

13. Voir à ce propos l'analyse dans la section « Le monde de Syracuse » page 34

Quelques résultats marquants

Les records, les recherches sur la longueur maximum des cycles, les recherches sur le temps d'arrêt, l'extension aux nombres 2-adiques sont des classiques du domaine.

Les records

Une course au record est engagée de la plus grande valeur vérifiant la conjecture. Le record de 2009 tenu par T. Oliveira e Silva est de $5 \times 2^{60} \approx 5.8 \times 10^{18}$ (Oliveira, 2010, [46]).

Dans une suite de tests systématiques, outre les nombres pairs, il est inutile de traiter les nombres de la forme $m = 4n + 1$ puisque leur trajectoire passe toujours sous m (voir l'annexe 2). Ce qui élimine 50% des nombres impairs.

Dans l'annexe 2, on constate aussi que la trajectoire des nombres de la forme $m = 16n+3$ passe également sous m. Les programmes de E. Roosendaal ([47]) (ancien recordman) et de T. Oliveira e Silva utilisent cette idée liée à d'autres astuces arithmétiques et de programmation.

Une heuristique

En partant d'un nombre impair, on calcule la probabilité de retrouver un nombre impair (c'est la fonction originale C qui est utilisée). Si la fonction est suffisamment « mélangeuse » (mixing), l'image du nombre a une chance sur deux d'être impaire, une chance sur quatre d'être le double d'un nombre impair, une chance sur huit d'être le quadruple d'un nombre impair, etc. Ces probabilités se retrouvent à chaque étape. Ainsi calculer la croissance moyenne de la suite revient à la multiplication par 3/2 une fois sur deux, la multiplication par 3/4, une fois sur quatre, etc.

En utilisant les identités : $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2n = 1$ et $\sum_{n=1}^{\infty} n/2^n = 2$ on trouve la croissance moyenne :

$$(3/2)^{1/2}(3/4)^{1/4}(3/8)^{1/8} = \frac{3^{1/2+1/4+\ldots}}{(1/2)^{1/2}(1/4)^{1/4}(1/8)^{1/8}\ldots} = \frac{3}{4}$$

Ainsi toute orbite finirait par repasser sous son point de départ. Ceci implique qu'il n'y a pas de suite divergente et que, par induction complète, tout suite finit par atteindre 1. Cet argument heuristique pourrait être poussé plus loin et mener à la conjecture que les trajectoires passent finalement à 1, valeur minimum possible. Ce prolongement ne prend pas en compte le fait que des trajectoires peuvent être finies, auquel cas l'argument de croissance moyenne n'est plus applicable. L'argument n'élimine pas les cycles autres que (1, 4, 2, 1).

Par exemple $3x - 1$ satisfait la même heuristique et possède le cycle (5, 14, 7, 20, 10, 5).

Cette même heuristique paraît plus intéressante pour conforter la conjecture que pour le problème $ax + 1$ avec $a > 3$, il existe des valeurs initiales m dont les trajectoires sont non bornées. Le cas $7x + 1$ est en particulier cité par Crandall (1978, [3]).

Longueur des cycles

Eliahou (2011c, [28]) [14] a obtenu une borne minimale pour la longueur d'un cycle. Pour un cycle il sépare les valeurs en p nombres paires $b_1, b_2, \ldots b_p$ et q nombres impairs $c_1, \ldots, c_q$ avec $p + q = n$ longueur du cycle.

On appliquant l'opérateur C à tous les nombres du cycle, on retombe sur les mêmes nombres. Il s'ensuit une relation :

$$b_1 \times \ldots \times b_p \times c_1 \times \ldots \times c_q = (\frac{b_1}{2}) \times \ldots \times (\frac{b_p}{2}) \times (c_1 + 1) \times \ldots \times (3c_q + 1)$$

On en tire :

$$2^p = (3 + \frac{1}{c_1}) \times \ldots \times (3 + \frac{1}{c_q})$$

Pour $n = 5$ et $n = 18$, la relation permet directement de déduire l'inexistence de cycle de cette longueur.

Pour le cas général, on pose m la valeur minimum sur le cycle (m est forcément impair). De la relation précédente on tire : $3^q < 2^p < (3 + 1/m)^q$ et en prenant le logarithme : $q \log 3 < p \log 2 < q \log(3 + 1/m)$ puis (voir aussi 4, page 12) :

$$\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q} < \frac{log(3 + 1/m)}{\log 2}$$

Comme on sait que suite au record établi par Tomás Oliveira e Silva (Oliveira e Silva, 2010), on en tire :

$$\frac{\log 3}{\log 2} < \frac{p}{q} < \frac{log(3 + 2 \times 10^{-19})}{\log 2}$$

En utilisant les résultats liés aux paires de Farey on peut montrer que p et q doivent être grands et estimer leur grandeur. On obtient pour leur somme : $n > 17'026'679'261$.

C'est remarquablement ingénieux. Et chaque nouveaux record sur les valeurs où la suite converge vers 1 augmente la longueur des éventuels cycles non triviaux au-delà. (voir aussi Ghosh (2009, [50]), Sinisalo, 2003 ([51])).

Vecteur de parité et fonction Q_k

Définition : Le vecteur de parité $v_k(m) = (x_i(m))_{0<=i<k}$ de m est donné par : $x_i(m)$ valant 0 ou 1 selon la parité de $T^{(i)}(m)$;

$v(m) = lim_{k\to\infty} v_k(n)$;

$d(m, a, b) = \sum_{a<=i<b} x_i(m)$; $d(m, b) = d(m, 0, b)$

Exemple : $v_6(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$

14. Eliahou (2011a, 2011b, [48], [49] analysent des cas particuliers et introduisent la méthode utilisée dans le cas général.

Selon Lagarias, l'idée de Terras est d'exprimer m comme fonction de v.

Définition : $Q_k(m) = \sum_{i=0,k-1} x_i(m)2^i$

Q_k est une application de $\mathbb{N}$ dans $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$

A noter que le vecteur de parité de longueur k de m n'est rien d'autre que le développement binaire de $Q_k(m)$ écrit dans l'ordre inverse.

$Q_k(m)$ globalise le vecteur de parité et il y a correspondance biunivoque entre l'ensemble des v_k et les valeurs de Q_k. C'est une technique classique de remplacer des suites binaires par des nombres dont la suite est le développement en base deux.

Exemple : $v_6(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$; $Q_6(17) = 37$ s'écrit en format binaire : 100101.

Une remarque générale est que souvent les auteurs découpent leur travail en de nombreuses petites étapes (lemme) en introduisant de nombreuses notations dont il est difficile d'apprécier l'apport conceptuel qui font souvent perdre le fil. Voici quelques propriétés de T et Q_k quasiment immédiate et qui peuvent s'exprimer sans notation additionnel (sauf exception de la puissance de 3 dans U3.1 et U3.2 mais dont la valeur a peu d'importance pour la suite).

Propriétés utiles :

U1 : $T(m + 2a) = ta + T(m)$ avec $t = 1$ ou $t = 3$ selon la parité de m

U2 : $T(m + 4a) = t_1 2a + T(m)$; $T^{(2)}(m + 4a) = t_1 t_2 a + T^{(2)}(m)$ avec $t_1 = 1$ ou $t_1 = 3$ selon la parité de m et avec $t_2 = 1$ ou $t_2 = 3$ selon la parité de $T(m)$

U3.1 : Pour $i <= k$, m impair : $T^{(i)}(m + 2^k \times a) = 2^{k-i} 3^{d(m,i)} a + T^{(i)}(m)$

U3.2 : Pour $i < k$: $T^{(i)}(m + 2^k \times a) \equiv T^{(i)}(m) \pmod 2$

U3.3 : $T^{(k)}(m + 2^k \times a) \equiv a + T^{(k)}(m) \pmod 2$

U4 : $Q_k(m + 2^k \times a) = Q_k(m)$; Q_k est 2^k - périodique

U5 : $Q_k(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k(m) + \bar{a} 2^{k-1}$

U6 : $Q_k^{(n)}(m + 2^{k-1} \times a) = Q_k^{(n)}(m) + \bar{a} 2^{k-1}$ avec $\bar{a}$ valant 0 ou 1 selon la parité de a

U7.1 : $Q_k(m) = Q_{k-1}(m) + \overline{T^{(k-1)}(m)} \times 2^{k-1}$

U7.2 : $Q_k^{(2)}(m) = Q_{k-1}^{(2)}(m) + (\overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(m)}) \times 2^{k-1}$

U7.3 : $Q_k^{(4)}(m) = Q_{k-1}^{(4)}(m) + (\overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(3)}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(2)}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}(m))} + \overline{T^{(k-1)}(n)}) \times 2^{k-1}$

U7.4 : $Q_k^{(2^i)}(m) = Q_{k-1}^{(2^i)}(m) + 2^{k-1} \sum_{i=0,2^i-1} \overline{T^{(k-1)}(Q_{k-1}^{(i)}(m))} = Q_{k-1}^{(2^i)}(m) + 2^{k-1} \times A$

U8 : Q_k conserve la parité et on a : $T(Q_k(m)) = Q_{k-1}(T(m))$ pour m pair ; $T(Q_k(m)) = 2 + 3Q_{k-1}(T(m))$ pour m impair

Démonstrations :

U1, U2 : par calcul direct.

U3.1 : généralisation par récurrence.

U3.2, U3.3 : passage $\pmod 2$.

U4 : de la définition de Q_k et de U3.2.

U5 : En utilisant la définition, U3.1 et la définition :

– $Q_k(m+2^{k-1}\times a) = \sum_{i=0,k-2}(\overline{T^{(i)}(m+2^{k-1}\times a)}2^i) + \overline{T^{(k-1)}(m+2^{k-1}\times a)}2^{k-1}$
– $Q_k(m+2^{k-1}\times a) = \sum_{i=0,k-2}(\overline{T^{(i)}(m)}2^i) + (\overline{a+T^{(k-1)}(m)})2^{k-1}$
– $Q_k(m+2^{k-1}\times a) = Q_k(m) + \bar{a}2k-1$
U6 : utilisation de U5 de façon répétée.

U7.1 : par définition.

U7.2 : par utilisation de U7.1.

U7.3 : par utilisation de U7.2 et $Q_k^{(4)}(m) = Q_k^{(2)}(Q_k^{(2)}(m))$.

U7.4 : généralisation.

U8 : de $Q_k(m) = \sum_{i=0,k-1}(\overline{T^{(i)}(m)}2^i) = \bar{m} + 2\sum_{i=0,k-2}(\overline{T^{(i+1)}(m)}2^i) = \bar{m} + 2Q_{k-1}(T(m))$.

On en tire les relations : $Q_k(m) \equiv m \pmod 2$; $T(Q_k(m)) = Q_{k-1}(T(m))$ pour m pair ; $T(Q_k(m)) = 2 + 3Q_{k-1}(T(m))$ pour m impair.
QED

Développement de la relation U3.1 :

La relation U3.1 (avec $m = -1$) généralise la *propriété intéressante*. Elle confirme que tous les $T^{(i)}(a2^k-1)$ pour $i < k$ sont impairs. Et donc :

$T^{(i)}(a2^k-1) = N^{(i)}(a2^k-1) = 2^{k-i}3^i a - 1$ pour $i < k$ et $N^{(k)}(a2^k-1) = [3^k a - 1]$.

Cette relation permet de calculer facilement certaines itérations de N des éléments des ensembles S_i.

Pour $m = 2^{2n-1}(4k+1)-1 \in S_1$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-1-i}3^i(4k+1)-1$ pour $i < 2n-1$ et $N^{(2n-1)}(m) = [3^{2n-1}(4k+1)-1]$. Comme $3^{2n-1}(4k+1)-1 \equiv 2 \pmod 4$, $N^{(2n-1)}(m) = (3^{2n-1}(4k+1)-1)/2$

Pour $m = 2^{2n}(4k+3)-1 \in S_2$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-i}3^i(4k+3)-1$ pour $i < 2n$ et $N^{(2n)}(m) = [3^{2n}(4k+3)-1]$. Comme $3^{2n}(4k+3)-1 \equiv 2 \pmod 4$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n}(4k+3)-1)/2$

Pour $m = 2^{2n-1}(4k+3)-1 \in S_3$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-1-i}3^i(4k+3)-1$ pour $i < 2n-1$ et $N^{(2n-1)}(m) = [3^{2n-1}(4k+3)-1]$. Comme $3^{2n-1}(4k+3)-1 \equiv 0 \pmod 4$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n-1}(4k+3)-1)/2^j$ avec $j \geq 2$.

Pour $m = 2^{2n}(4k+1)-1 \in S_4$: $N^{(i)}(m) = 2^{2n-i}3^i(4k+1)-1$ pour $i < 2n$ et $N^{(2n)}(m) = [3^{2n}(4k+1)-1]$. Comme $3^{2n}(4k+1)-1 \equiv 0 \pmod 4$, $N^{(2n)}(m) = (3^{2n}(4k+1)-1)/2^j$ avec $j \geq 2$.

Lemme de réécriture : Soient m et n deux entiers positifs. On a les équivalences :

1. $Q_k(m) = Q_k(n)$
2. $v_k(m) = v_k(n)$

Démonstration : par définition (rappel : $v_k(n)$ est le développement binaire renversé de $Q_k(n)$)
QED

Les fonctions Q_k permettent de « condenser » les suites $(T^{(i)})_{0\leq i<k} \pmod 2$.

Lemme de périodicité : Soient m et n deux entiers positifs. Si $n \equiv m \pmod{2^k}$ alors $Q_k(m) = Q_k(n)$ (et donc $v_k(m) = v_k(n)$).

Démonstration : il s'agit de la propriété U4.
QED

En d'autres termes :

Pour $m = a \times 2^k + b$ les k premières composantes de $v(m)$ ne dépendent que de b (i.e. $v_k(m) = v_k(b)$ pour tout a) ou encore Q_k est 2^k-périodique.

Exemple : Les vecteur $v_5(a \times 2^5 + 17) = v_5(17)$ pour tout a.

Lemme de surjectivité : $w = (w_i)_{0 \leq i < k}$ élément de $\{0,1\}^k$ est vecteur de parité de longueur k. C'est-à-dire il existe n tel que $v_k(n) = w$. Q_k est donc surjective.

Démonstration (par induction sur k) :

Vrai pour $k = 1$; on a w_0 valant 0 ou 1, il suffit de prendre n pair ou impair.

On suppose la propriété vraie pour les suites de parité de longueur k et soit une suite de longueur $k+1$: $w = (w_i)_{0<=i<k+1}$

Par hypothèse d'induction il existe n tel que $v_k(n) = (w_i)_{0 \leq i < k}$.

On prend alors $m_1 = 2k + 1 + n$ et $m_1 = 2k + 1 + 2^k + n$.

On a : $v_k(m_1) = v_k(m_2) = (w_i)_{0 \leq i < k}$ par U4.

De plus : $T^{(k)}(m_1) = 2 \times 3^s + T^{(k)}(n)$; $T^{(k)}(m_2) = (2+1) \times 3^s + T^{(k)}(n)$

Ces deux nombres sont de parité opposée. On prend m_1 ou m_2 selon que w_{k+1} est 0 ou 1.
QED

Q_k est une application 2^k-périodique surjective de $\mathbb{N}$ sur $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$

$\overline{Q_k}$ restriction de Q_k est une permutation de l'ensemble $\{0, 1, \ldots, 2^k - 1\}$.

Lemme de l'ordre : L'ordre de $\overline{Q_k}$ est une puissance de 2 (divise 2^k)

Démonstration : On démontre par récurrence que $Q_k^{(2^k)}(n) \equiv n \pmod{2^k}$

Pour $k = 1$ et $k = 2$ $\overline{Q_k}$ est l'identité.

- $\overline{v_2}(0) = (0, 0)$; $Q_2(0) = 0$
- $\overline{v_2}(1) = (1, \overline{T(1)}) = (1, 0)$; $Q_2(1) = 1$
- $\overline{v_2}(2) = (1, \overline{T(2)}) = (0, 1)$; $Q_2(2) = 2$
- $\overline{v_2}(3) = (1, \overline{T(3)}) = (1, 1)$; $Q_2(3) = 3$

Hypothèse de récurrence (hr) : $Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) \equiv n \pmod{2^{k-1}}$

On prendra : $Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) = n + \alpha 2^{k-1}$

- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(Q_k^{(2^{k-1})}(n))$
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) + 2^{k-1} \times A)$par U7.4
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(n + \alpha \times 2^{k-1} + 2^{k-1} \times A)$ par hr
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_k^{(2^{k-1})}(n + (\alpha + A)2^{k-1}) = Q_k^{(2^{k-1})}(n) + (\alpha + A)2^{k-1})$ par U6
- $Q_k^{(2^k)}(n) = Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) + 2 \times (\alpha + A)2^{k-1})$ par U/.4 et hr
- $Q_k^{(2^k)}(n) \equiv Q_{k-1}^{(2^{k-1})}(n) \equiv n \pmod{2^k}$

QED

Quelques fonctions Q_k

- $\overline{Q_1} = Id$
- $\overline{Q_2} = Id$
- $\overline{Q_3} = (1\ 5)$ d'ordre 2
- $\overline{Q_4} = (1\ 5)(2\ 10)(9\ 13)$ d'ordre 2
- $\overline{Q_5} = (1\ 21)(2\ 10)(4\ 20)(5\ 17)(7\ 23)(9\ 29\ 25\ 13)(18\ 26)$ d'ordre 4

Recherche sur le « temps d'arrêt »

Plusieurs travaux se sont concentrées (et se concentrent encore) sur la question de savoir quand un suite de Collatz passe au-dessous de son point de départ.

Préparation

Chaque 1 dans la suite $v_k(n) = (x_i(n))_{0 \leq i < k}$ représente l'opération $x \mapsto (3x+1)/2$ et chaque 0 la division par 2. On en tire :

$$T(n) = \frac{3^{x_0(n)}n + x_0(n)}{2}$$

puis :

$$T^{(2)}(n) = \frac{3^{x_0(n)+x_1(n)}n}{2^2} + \frac{3^{x_1(n)}x_0(n)}{2^2} + \frac{x_1(n)}{2}$$

et finalement :

$$T^{(k)}(n) = \lambda_k(n)n + \rho_k(n) \tag{5}$$

avec :

$$\lambda_k(n) = \frac{3^{d(n,k)}}{2^k}; \rho_k(n) = \sum_{i=0,k-1} x_i(n)\frac{3^{d(n,i+1),k}}{2^{k-i}}$$

Il ne s'agit de rien d'autre qu'une réécriture de la formule 1 de la page 10.

Propritétés : λ_k et ρ_k sont 2^k-périodiques.

On définit aussi $c_k(n) = \ln \lambda_k(n) = d(n,k)\ln 3 - k \ln 2$

Propriété : $T^{(k)}(n) \geq \lambda_k(n)n$

Donc $\lambda_k(n) < 1$ est une condition nécessaire pour que $T^{(k)}(n) < n$

Définition : Le *temps d'arrêt* de m (stopping time) noté $\sigma(m)$ vaut $\min_k(T^{(k)}(m) < m)$

Définition : Le *temps de convergence* (coefficient stopping time – CST) de m noté $\omega(n)$ est la valeur de k minimum telle que $\lambda_k(n) < 1$ (ou $c_k(n) < 0$).

Propriété : $\omega(n) \leq \sigma(n)$

Exemple : $T(17) = 26$, $T^{(2)}(17) = 13$ donc $\sigma(17) = 2$; $\lambda_1(17) = 3/2$, $\lambda_2(17) = 3/4$ donc $\omega(17) = 2$

Si l'on pouvait démontrer que le temps d'arrêt est fini pour tout nombre, une démonstration par induction complète permettrait de conclure.

Le théorème de Terras

Le théorème de Terras indique que presque tous les nombres on un « temps d'arrêt » fini. Le résultat n'est pas vraiment étonnant puisque dans des approches naïves on élimine par tranches des valeurs de n qui satisfont à la conjecture mais en laisse subsister un ensemble de plus en plus restreint bien qu'infini.

Théorème A (Terras) [15] : La densité de l'ensemble $S_k = \{m \in \mathbb{N} : \sigma(n) \leq k\}$ dans $\mathbb{N}$ tend vers une limite finie $F(k)$. C'est-à-dire :

$$F(k) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \#\{m : m \leq x \text{ et } \sigma(m) \leq k\}$$

De plus, $F(k) \to 1$ lorsque $k \to \infty$. Ainsi presque tous les entiers ont un temps d'arrêt fini.

Ce théorème ne permet pas de conclure sur l'induction évoquée. Il ne permet pas non plus d'exclure l'existence de cycles autres que le trivial.

Ce théorème dans une formulation différente a également été montré indépendamment par C. Everett (cité par Crandall, 1978, [3]) [16].

Le résultat obtenu par Carletti & Fanelli (2016, [37]) va dans le même sens. Ces auteurs considèrent l'itération de $S = C^{(3)}$ et établissent un processus de Markov sur les classes des nombres $\pmod 8$. Cela leur permet de montrer que les suites définies par S sont presque partout (selon une mesure qu'ils définissent) non divergentes.

La démonstration du théorème de Terras proposée par Eric Roosendaal [17] est une version simplifiée de la démonstration originale. Toutefois un lemme pêche par une utilisation abusive de la notion de limite bien que les exemples soient assez convainquant. Une autre formulation devrait permettre certainement de palier ce défaut. D'autres « raccourcis » sur des passages à la limite rendent la démonstration approximative.

La démonstration rapportée par Lagarias (1985, [4]) [18] est plus complète. En voici les grandes lignes.

On considère :

- un vecteur $v_k = (v_i)_{i=0,k-1}$ de $\{0,1\}^k$
- l'ensemble $S(v_k)$ des nombres m ayant v_k comme vecteur de parité. Cet ensemble n'est pas vide par le lemme de surjectivité
- $n_0(v_k)$ élément minimum de $S(v_k)$

A noter que : $S(v_k) = \{n_0(v_k) + n2^k; n \in \mathbb{N}\}$; $n_0(v) = \overline{Q_k}^{-1}(m)(\sum_{i=0,k-1} v_i 2^i)$.

Définition : Un vecteur $v = (v_i)_{i=0,k-1}$ de $\{0,1\}^k$ est admissible si :

1. $(v_0 + \ldots + v_{k-1}) \ln 3 < k \ln 2$

15. la nomenclature des théorèmes est reprise de Lagarias
16. Un résultat de Slakmon & Macot (2003, [36], 2006, [52]) semble nettement plus fort. Toutefois, ce résultat dépend d'une hypothèse simplificatrice hasardeuse.
17. `http://www.ericr.nl/wondrous/terras.html`
18. http ://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/paper/html/ paper.html

2. $(v_0 + \ldots + v_i)\ln 3 > (i+1)\ln 2$ avec $0 \leq i < k-1$ (c'est la valeur de k minimum qui rend $\lambda_k(m) < 1$

En particulier si v est admissible : $(v_0+\ldots+v_{k-2})\ln 3 > (k-1)\ln 2$ et donc $v_0+\ldots+v_{k-1} = \lfloor k\theta \rfloor$ avec $\theta = \ln 2/\ln 3 \approx 0.63093$.

Théorème C (Terras) [19] :

(a) L'ensemble des entiers m tels que $\omega(m) = k$ est l'ensemble des entiers pour lesquels il existe un vecteur admissible v avec $n_0(v) \equiv m \pmod{2^k}$.

(b) Soit $m = n_0(v)$ pour v de longueur k. Si v est admissible, alors tout nombre suffisamment grand congruent à $m \pmod{2^k}$ possède k comme temps d'arrêt $\sigma(m)$. Si v n'est pas admissible, il existe alors seulement un nombre fini d'entiers congruents à $m \pmod{2^k}$ qui ont k comme temps d'arrêt.

Démonstration :

Le point (a) est directement lié à la définition de vecteur admissible. Le point (b) demande un peu plus de travail. Le lecteur est prié de se référer à l'article de Lagarias.

Ce théorème implique que l'ensemble $I_k = \{m : \omega(m) = k\}$ est la réunion de progressions arithmétiques de raison 2^k. Donc I_k possède une densité asymptotique :

$$d(I_k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{m : m \leq x \text{ et } \omega(m) = k\}$$

avec $d(I_k) = \frac{1}{2^k}\#\{v_k(admissible)\}$

Le théorème implique aussi que S_k diffère de I_k d'un nombre fini d'éléments. Sa densité asymptotique est donc la même. Cela démontre la première partie du théorème de Terras que la densité asymptotique de l'ensemble des entiers dont le temps d'arrêt vaut au plus k vaut :

$$F(k) = \sum \frac{1}{2^{length(v)}}$$

La somme étant prise sur tous les vecteurs v admissible avec $length(v) \leq k$.

Cette formule permet de démontrer la deuxième partie du théorème de Terras et même un peu plus :

Théorème D : Pour tout $k \geq 1$,

$$1 - F(k) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\#\{m : m \leq x \text{ et } \sigma(m) > k\} <= 2^{-\eta k}$$

où $\eta = 1 - H(\theta) \approx 0.05004$ avec $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$ est la fonction d'entropie et $\theta = 1/(\log_2 3)$

Ce théorème ne peut pas être amélioré de façon importante.

19. Dans la présentation de Lagarias le théorème B rassemble des résultats concernant la fonction Q_k et le vecteur de parité.

Graphe de Collatz et ensembles des prédécesseurs

Chamberland (2010, [24]) fait état, parmi d'autres des recherches sur l'ensemble des prédécesseurs d'un nombre a :

$$P(a) = \{m \in \mathbb{N} : T^{(k)}(m) = a \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}$$

On filtre cet ensemble par les ensembles constitués des nombres de $P(a)$ inférieurs à une valeur x. Le cardinal de ces ensembles sera noté $Z_a(x)$. En particulier :

$$Z_1(x) = \#\{m \in \mathbb{N} : m < x \text{ et } T^{(k)}(m) = 1 \text{ pour un certain } k \in \mathbb{N}\}$$

Le calcul de la grandeur de Z_a a été initiée par Crandall (1978, [3]) qui montre qu'il existe une contante c telle que $Z_1(x) > x^c$ pour x suffisamment grand.

Les travaux menés depuis ont permis de trouver des valeurs de c de plus en plus grandes (l'idéal étant 1). $c = 0.81$ a été obtenu par Applegate & Lagarias (1995, [53]) en utilisant une approche de programmation non-linéaire due à Krasikov. Cette méthode a encore permis d'affiner la valeur à $c = 0.84$ (Krasikov & Lagarias, 2002, [54]).

Extension de la suite à $\mathbb{Z}_2$

L'étude du comportement de système dynamique (itération de fonction) conservant une mesure est appelée théorique ergodique. Le problème $3x + 1$ peut entrer dans ce formalisme dans la mesure où la fonction T se prolonge naturellement en une fonction sur les nombres 2-adiques[20] $\mathbb{Z}_2$:

$$T(\alpha) = \begin{cases} \alpha/2 & \text{si } \alpha \equiv 0 \pmod 2 \\ (3\alpha + 1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Elle conserve la mesure de Haar μ_2 définie sur cet ensemble avec $\mu_2(\mathbb{Z}_2) = 1$.

On peut de plus montrer que cette fonction satisfait la condition d'ergodicité en montrant quelle est suffisamment « mélangeuse » (« strongly mixing »). C'est-à-dire que si $T^{-1}(E) = E$ alors $\mu_2(E) = 0$ ou $\mu_2(E) = 1$ avec $E \subset \mathbb{Z}_2$ ou encore que $T(\mathbb{Z}_2)$ et $\mathbb{Z}_2$ ne diffèrent que d'un ensemble de mesure nulle.

Pointwise Ergodic Theorem : Avec X espace mesurable, T et f fonctions sur X, T ergodique et f mesurable, alors pour presque tout $x \in X$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{(i)}(x)) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f d\mu \tag{6}$$

Ce théorème est un corollaire du théorème de Birkhoff qui égalise presque partout la moyenne sur le temps et celle sur l'espace.

Cette relation devient dans notre cas : pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$

20. Voir l'annexe 9 pour une brève introduction aux nombres 2-adiques.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(T^{(i)}(\alpha)) = \int_{\mathbb{Z}_2} f d\mu \tag{7}$$

Corollaire : Pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$:
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod 2; i < n\} = 1/2$.
- $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\#\{T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2^k}; T^{(i)}(\alpha) \neq 0 \pmod{2^{k+1}}; i < n\} = 1/2^{k+1}$ avec $k \geq 1$.

Démonstration :

Dans le premier cas, on prend f la fonction caractéristique de la boule $B_{1/2}(0)$ dont la mesure vaut : $\mu_2(B_{1/2}(0)) = 1/2$.

Dans l'autres cas, on prend pour f la fonction caractéristique de la couronne $B_{1/2^k}(0) - B_{1/2^{k+1}}(0)$. On a : $\mu_2(B_{1/2^k}(0) - B_{1/2^{k+1}}(0)) = \mu_2(B_{1/2^k}(0)) - \mu_2(B_{1/2^{k+1}}(0)) = 1/2^k - 1/2k + 1 = 1/2^{k+1}$.
QED

Autrement dit la densité des valeur de $T^{(i)}(\alpha) \equiv 1 \pmod 2$ (impair) vaut 1/2 et la densité des valeur de $T^{(i)}(\alpha)$ telles que $T^{(i)}(\alpha) \equiv 0 \pmod{2^k}$ et $T^{(i)}(\alpha) \neq 0 \pmod{2^{k+1}}$ vaut $1/2^{k+1}$. Ou encore pour presque tout $\alpha \in \mathbb{Z}_2$ la suite $(T^{(i)}(\alpha))$ est uniformément distribuée $\pmod{2k}$ pour tout $k \geq 1$

Cela formalise l'heuristique décrite précédemment prolongée à la fonction T.

Malheureusement le bébé est parti avec l'eau du bain. Le théorème n'indique rien sur le comportement de T sur $\mathbb{Z}$ puisque cet ensemble est de μ_2-mesure nulle.

En fait, toutes les trajectoire $(T^{(i)}(m)), m \in \mathbb{Z}$ pourraient n'avoir jamais la propriété énoncée dans le théorème. En effet, si la trajectoire est périodique de période k elle ne peut pas être distribuée uniformément. Et si elle est divergente elle ne peut même pas être distribuée uniformément $\pmod 2$.

La connexion du problème $3x + 1$ à la théorie ergodique est-elle une voie à suivre ? Pour cela il faudrait obtenir une version de la relation 6 dans le cadre d'une théorie ergodique « discrète ». Auquel la conjecture de Collatz serait démontrée pour presque tout $m \in \mathbb{Z}$.

Prolongement des fonctions Q_k à $\mathbb{Z}_2$

Une autre connexion aux entiers 2-adiques peut donner plus d'informations sur le problème. Il s'agit de la prolongation de la famille de fonctions Q_k.

On définit $Q_\infty : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ par :

$Q_\infty(\alpha) = \sum_{i=0,\infty} x_i(\alpha)2^i$ avec $x_i(\alpha) = T^{(i)}(\alpha) \pmod 2$

Cette fonction encode le comportement de toutes les itérations d'un nombre. C'est l'avantage de Q_∞ sur les fonctions Q_k.

Quelques valeurs : $Q_\infty(1) = \sum_{i=0,\infty} 2^{2i} = -1/3$; $Q_\infty(2) = -2/3$; $Q_\infty(3) = -20/3$

Lagarias explicite les propriétés Q_∞ observées par plusieurs mathématiciens dont Terras et Pomerance et qui découle des propriétés des fonction Q_k :

Théorème : L'application Q_∞ est bijective, continue et préserve la mesure 2-adique.

Par ailleurs, une nouvelle formulation de la conjecture en terme de la fonction Q_∞ est :

Proposition (Lagarias, 1985, [4]) : La conjecture de Collatz est équivalente à : $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z}$ (de fait $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$).

Démonstration :

Si la conjecture de Collatz est vérifiée alors la suite des $T^{(k)}(m)$ est finalement composée de l'alternance de 0 et 1. Le développement de Hensel $(1, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ représente la fraction 1/3 et $(1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ représente la fraction -1/3

Par ailleurs, il faut montrer que si la suite des $T^{(k)}(m) \pmod 2$ alternent finalement des 1 et des 0 à alors $m = 1$ ou $m = 2$.

On peut se restreindre à $m \in 2\mathbb{N} + 1$.

On choisit la première valeur $T^{(k)}(m)$ telle $T^{(k)}(m) \equiv 1 \pmod 2$ et par la suite 0 et 1 s'alternent. A montrer que ce n'est possible que si $m = 1$. Pour cela, on examine les cas possibles selon la partition de $2\mathbb{N} + 1$ par les ensembles S_i.

1. m ne peut pas être dans $S_2 \cup S_4$: En effet, par la remarque de la propriété intéressante, $T^{(k+1)}(m)$ est impair.

2. $m \in S_3$: $m = 2^{2n-1}(4k + 3) - 1$ par la remarque de la propriété intéressante $n = 1$ et donc $m = 8k + 5 = 2^p i + 5$ où i est un nombre impair et $p \geq 3$.

$T(2^p i + 5) = 3 \times 2^{p-1} i + 8$; $T^{(2)}(2^p i + 5) = 3 \times 2^{p-2} i + 4$. On trouve deux nombres pairs successifs. m ne peut pas être dans S_3.

3. $m \in S_1$: $m = 2^{2n-1}(4k + 1) - 1$ par la remarque de la propriété intéressante $n = 1$ et donc $m = 8k + 1 = 2^p i + 1$ où i est un nombre impair et $p \geq 3$.

$T(2^p i + 1) = 3 \times 2^{p-1} i + 2$ (pair) ; $T^{(2)}(2^p i + 1) = 3 \times 2^{p-2} i + 1$ (impair) ; $T^{(3)}(2^p i + 1) = 9 \times 2^{p-3} i + 2$

3.1 Si p est pair on aboutit à $3^q \times 2i + 2$ et $3^q \times i + 1$, 2 nombres pairs qui se suivent sauf si $i = 0$.

3.2 Si p est impair on aboutit à $3^q \times 2i + 1$ et $3^{q+1} \times i + 2$, 2 nombres impairs qui se suivent sauf si $i = 0$.
QED

Le comportement de sous-itérations est lui-même intéressant.

Soit $\mathbb{Q}'$ l'ensemble des fractions dont le dénominateur est impair. Il est contenu dans $\mathbb{Z}_2$. Il consiste exactement en les entiers 2-adiques dont la suite des 2-digits est finie ou périodique.

Proposition (Lagarias, 1985, [4]) : La conjecture des cycles finis est équivalente à : il existe un entier impair M tel que : $Q_\infty(\mathbb{Z}) \subset (1/M)\mathbb{Z}$

En fait on peut prendre $M = \prod(2^l - 1)$ où le produit est pris sur tous les entiers l pour lesquels il existe un cycle minimal de longueur l.

Conjecture de périodicité (Lagarias, 1985, [4]) : $Q_\infty(\mathbb{Q}') = \mathbb{Q}'$

Exemple : $Q_\infty(10) = -26/3$; $Q_\infty(-26/3) = -54$; $Q_\infty(-54) = -82/7$; $Q_\infty(-82/7) = ?/15$

On peut voir que si m possède une trajectoire divergente alors la suite $(x_0(m), x_1(m), \ldots)$ ne peut pas être périodique. Si cette conjecture s'avère être vraie, alors il en va de même pour la conjecture des trajectoires (non) divergentes.

Ensembles suffisants

Définition : S est suffisant si pour tout $m \in \mathbb{N}$, il existe $s \in S$ tel que la trajectoire de m selon T coupe celle de s. C'est-à-dire qu'il existe k et l tel que $T^{(k)}(m) = T^{(l)}(s)$.

A noter qu'à partir de cette valeur commune, les trajectoires sont identiques.

Proposition : $F_1 \cup F_2$ est un ensemble suffisant.

Démonstration :

Par itération de l'opération $P : x \to (x-1)/4$ $m \notin F_1 \cup F_2$ impair va sur un élément m' de F_1 ou F_2. Puis on a $N(m) = N(m')$.
QED

Avec la même démonstration on a :

Proposition : $F_s \cup F_{s+1}$ est un ensemble suffisant.

Il existe donc des ensembles suffisants de densité aussi faible que l'on veut. Toutefois, cela reporte le problème de $\mathbb{N}$ sur un autre ensemble infini.

Proposition : F_{2s} est un ensemble suffisant pour tout $s \in \mathbb{N}_0$.

Démonstration : Il suffit de voir que pour tout élément de F_1, il existe un élément de F_2 tel que les deux trajectoires se rencontrent.

On considère successivement les ensembles $F_1 \cap S_i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$.

1. $x \in F_1 \cap S_1$

$x = 2^{2n-1}(4k+1) - 1$ avec $n \geq 2$

$N^{(2n-2)}(x) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(8k+2) - 1) = 3^{2n-2}(8k+2) - 1 \equiv 1 \pmod 8$ et donc $N^{(2n-2)}(x) \in F_2$.

2. $x \in S_2 \subset F_1$

$x = 2^{2n}(4k+3) - 1$ avec $n \geq 1$

$N^{(2n-1)}(x) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(8k+6) - 1) = 3^{2n-1}(8k+6) - 1 \equiv 1 \pmod 8$ et donc $N^{(2n-1)}(x) \in F_2$.

3. $x \in F_1 \cap S_3$

$x = 2^{2n-1}(4k+3) - 1, n \geq 2$

$N^{(2n-2)}(x) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(8k+6) - 1) = 3^{2n-2}(8k+6) - 1$

Par ailleurs on prend $y = (x-1)/2 = 2^{2n-2}(4k+3) - 1 \in S_2$

$N^{(2n-2)}(y) = N^{(2n-2)}(2^{2n-2}(4k+3) - 1) = [3^{2n-2}(4k+3) - 1] = (3^{2n-2}(4k+3) - 1)/2$ puisque $3^{2n-2}(4k+3) - 1 \equiv 2 \pmod 4$

On a : $4N^{(2n-2)}(y) + 1 = N^{(2n-2)}(x)$ et donc $N^{(2n-1)}(y) = N^{(2n-1)}(x)$

4.1. $x \in S_4 \subset F_1$**,** $x = 2^{2n}(4k+1) - 1, n = 1$

$x = 3 + 16k$, $y = (x-1)/2 = 1 + 8k \in F_2$

$N^{(2)}(x) = N^{(2)}(y) = [2 + 9k]$

4.2. $x \in S_4 \subset F_1$**,** $x = 2^{2n}(4k+1) - 1, n \geq 2$

$N^{(2n-1)}(x) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(8k+2) - 1) = 3^{2n-1}(8k+2) - 1$

On considère $y = (x-1)/2 = 2^{2n-1}(4k+1) - 1 \in F_1 \cap S_1$

$N^{(2n-1)}(y) = N^{(2n-1)}(2^{2n-1}(4k+1) - 1) = [3^{2n-1}(4k+1) - 1] = (3^{2n-1}(4k+3) - 1)/2$

On a : $4N^{(2n-1)}(y) + 1 = N^{(2n-1)}(x)$ et donc $N^{(2n)}(y) = N^{(2n)}(x)$
QED

Andaloro (1998, [19]) indique que Korec & Znam ont démontré que les progressions arithmétiques $(a \pmod{p^n}$ constituent des ensembles suffisants si $(a, p) = 1$ et 2 est une racine primitive $\pmod{p^2}$ [21]. Il montre lui-même que que $1 + 16\mathbb{N}$ est suffisant et conjecture que $1 + 2^n\mathbb{N}$ est suffisant pour tout n.

Théorème (Monks, 2006, [55]) : $a + b\mathbb{N}$ est suffisant pour tout a et b de $\mathbb{N}$.

Autrement dit l'ensemble formé des éléments de n'importe quelle suite arithmétique est suffisant.

Corollaire : Tout suite arithmétique est suffisante pour les sous-conjectures « nontrivial cyles » et « (no) divergent orbits ».

Remarque : La découverte d'ensembles suffisants de densité aussi faible que l'on veut, intéressante en soi, ne semble pas simplifier le problème. Celui-ci est reporté sur le nouvel ensemble.

Extension aux nombres réels ou p-adiques

La fonction proposée par Chamberland (2006, [29], [30]) est la suivante :

$$f(x) = x + \frac{1}{4} - \frac{2x+1}{4} cos(\pi x)$$

Les auteurs montrent en particulier que les intervalles $I_1 = [0, \mu_1]$ et $I_2 = [\mu_1, \mu_3]$ sont invariants par f , où $\mu_1 \approx 0.277$ et $\mu_3 \approx 2.445$ sont des points fixes répulsifs.

Par contre $I_3 = [\mu_3, \infty[$ n'est pas invariant et l'auteur considère l'ensemble (escape set) $E_f = \{x \in I_3 : sup\omega(x) < \mu_3\}$ où $\omega(x)$ est l'ensemble limite de la trajectoire de x.

$R_f = \{x \in I_3 : inf\omega(x) \geq \mu_3\}$ est l'ensemble des résidus (residue set). Dans cet ensemble on distingue S_f (stable set) bassin d'attraction de toutes les trajectoires périodiques de f dans I_3 et son complémentaire U_f (unstable set) dont on distingue $U_f^\infty = \{x \in R_f : \limsup_{k\to\infty} f^{(k)}(x) = \infty\}$

Fleckinger et Abdoulkarim (2015, [39]) ont étudié une généralisation de la conjecture de Collatz dans $\mathbb{Q}_p$ extension p-adique de $\mathbb{Q}$. Pour $u \in \mathbb{Z}_p$:

$$g_{p,q}(u) = \begin{cases} u/p & \text{si } p|m \\ (qu + \epsilon_0(-qu))/p & \text{sinon} \end{cases}$$

21. C'est-à-dire tout inversible de $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ est une puissance de 2 $\pmod{p^2}$

Avec $\epsilon_0 : \mathbb{Z}_p \mapsto \{0, 1, \ldots, p-1\}$ donnée par $\epsilon_0(u) \equiv u \pmod{p}$. C'est-à-dire ϵ_0 donne le premier coefficient du développement de Hensel. Donc $qu + \epsilon_0(-qu))$ possède 0 comme premier coefficient et est donc divisible par p dans $\mathbb{Z}_p$.

Ils définissent également un « équivalent » de la fonction Q_∞.

$$\Phi_{p,q}(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_0(-qu_n)p^n$$

où $u_n = g_{p,q}^n(u)$. C'est une isométrie de $\mathbb{Z}_p$. Elle se prolonge à $\mathbb{Q}_p$ par :

$$\Phi_{p,q}(p^{-n}u) = p^{-n}\Phi_{p,q}(u)$$

avec $u \in \mathbb{Z}_p$ et $n \in \mathbb{N}$.

Les applications de Conway (Conway map)

Un cadre général et naturel de la généralisation du problème de Syracuse a été proposé par Conway en 1972. Ces applications de Conway, connues sous diverses appellations sont détaillées par Belaga & Mignotte (2006, [56], 2015, Belaga [26]).

Définition (Conway M_p, R_p-map) : Soient $p \geq 2 \in \mathbb{N}$ et deux ensembles de nombres entiers $M_p = \{m_0, m_1, \ldots, m_{p-1}\}$ et $R_p = \{r_0, m_1, \ldots, r_{p-1}\}$ tels que :

m_i naturel est premier avec p et $r_i \equiv im_i \pmod{p}$ pour $i = 1, \ldots, p$.

(1) La Conway (M_p, R_p)-map $T = T_{M_p,R_p} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ est donnée par :

$$T(m) = \frac{m_i m - r_i}{p} \text{ pour } m \equiv i \pmod{p}$$

(2) La Conway M_p-map multiplicative correspond à la Conway (M_p, R_p)-map où $r_i = 0$ pour tout i.

$\mu(T) = m_0 \times \ldots \times m_{p-1}$ est l'indice de contraction-expansion (conex-index) de T.

Exemple : $T_d = T_{M_2,R_2}$ avec $M_2 = \{1, 3\}$ et $R_2 = \{0, -d\}$.

Résumé des conjectures

Les conjectures foisonnent. En faire un recensement est le but premier de cet article. En plus de la conjecture de base, originale, avec des versions plus ou moins fortes ou faibles, on trouve de nombreuses variantes ou des formulations équivalentes dans divers domaines mathématiques.

Les variations peuvent concerner la relation de récurrence utilisée, le domaine de définition et la conclusion. Cette dernière peut affirmer l'existence d'un seul cycle trivial, ou alors de plusieurs cycles (en nombre fini ou non) ou encore l'existence ou non de suites divergentes. La formulation peut aussi varier en fonction de la version C, T ou N de

la relation utilisée. Les conjectures concernant l'existence de plusieurs cycles ou de non convergence peuvent être qualifiées de « anti-syracuse ».

Par ailleurs, on peut montrer que la conjecture est équivalente à des conjectures exprimées, reformulées, dans des domaines divers.

Les conjectures de base

Conjecture de Collatz : La suite obtenue par itération de C aboutit au cycle (1, 4, 2) quel que soit la valeur initiale.

Nontrivial cycles conjecture (forme faible de la conjecture de Collatz) : S'il existe m tel que $C^{(k)}(m) = m$ pour $k > 1$ alors $m = 1$, 2 ou 4.

Est équivalente à :

Collatz Cycle Conjecture[22] : La suite (1) est le seul cycle de N-Collatz avec des termes positifs.

Conjecture de (non) divergence ((no) divergent trajectories conjecture) : Toute les trajectoires $(C^{(k)}(m))_{k=0,\infty}$ sont bornées.

Cette conjecture implique que toutes les trajectoires aboutissent à un cycle.

Conjecture du temps d'arrêt fini : Toute trajectoire finit par repasser au-dessous de son origine.

Cette conjecture permet de démontrer la conjecture de Collatz par induction complète.

Conjecture en forme de semi-groupe affine : Soit S le semi-groupe affine engendré par $\{x \mapsto 2x; x \mapsto (2x-1)/3\}$. L'orbite $\langle S : \{4\}\rangle$ contient tous les nombres entiers positifs supérieurs à 2.

Coefficient stopping time conjecture : Pour tout $m \geq 2$, le « stopping time » $\sigma(m)$ est égal au « coefficient stopping time » $\omega(m)$.

Extensions à $\mathbb{Z}$

On trouve ici des conjectures qui étendent les valeurs à $\mathbb{Z}$.

Conjecture des cycles finis (Lagarias) : Il y a seulement un nombre fini de cycles distincts pour la fonction T itérée sur $\mathbb{Z}$.

Cette conjecture a été précisée :

Generalized Collatz Cycle Conjecture (Kaneda, 2014, [57]) : Les suites (1), (-1), (-5, -7), et (-17, -25, -37, -55, -41, -61, -91) sont les seuls cycles de N-Collatz.

Nous notons que :

$$T(-m) = \begin{cases} -m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (-qm+1)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

22. En prenant la formulation de Kaneda (2014, [57]) et en utilisant notre convention pour noter la suite de Collatz considérée.

et comme $(-qm+1)/2 = -(qm-1)/2$ chercher les cycles sur les nombres négatifs revient à chercher ceux sur $qx-1$ puis de prendre les nombres opposés [23].

Ainsi donc l'étude des cycles liés à $qx+1$ sur $\mathbb{Z}$ se ramène celle des cycles $qx \pm 1$ sur $\mathbb{N}$

Par ailleurs, on sait que les cycles de $qx+d$ sont les cycles de $qx+1$ amplifié par d. Le seul intérêt de l'étude de $qx+d$ est de mettre en évidence des cycles primitifs c'est-à-dire ne provenant pas de cycles de $qx+1$.

Généralisations de la formule de récurrence

Des études ont proposé des relations de récurrence plus générale.

Oliveira (2010, [46]) expose la généralisation de la fonction C suivante (vraisemblablement due à Kakutani) :

$$C_{K,D}(m) = \begin{cases} m/d_D(m) & \text{si } d_D(m) > 1 \\ Km+1 & \text{si } d_D(m) = 1 \end{cases}$$

Où $K \in \mathbb{N}, K > 1$, D est un ensemble de nombres entiers supérieurs à 1 et $d_D(m)$ vaut 1 si m n'est pas divisible par aucun des éléments de D et vaut le premier tel élément sinon.

$C_{3,\{2\}}$ est la fonction de Collatz.

Conjecture $5x+1$ ***de Kakutani*** : La suite générée par itération de $C_{5,\{2,3\}}$ à partir de toute valeur entière positive atteint 1.

Conjecture $7x+1$ ***de Kakutani*** : La suite générée par itération de $C_{7,\{2,3,5\}}$ à partir de toute valeur entière positive atteint 1.

A comparer avec l'anti-conjecture de Crandall citée par Delahaye concernant $5x+1$.

Allouche (1979, [58]) [24] étudie la généralisation du problème de Syracuse proposée par Hasse.

$$g(m) = \begin{cases} m/d & \text{si } m \equiv 0 \pmod d \\ (nm - nm\%d)/d & \text{sinon} \end{cases}$$

Avec $n \geq 1$, $d \geq 2$ premiers entre eux. $nm\%d$ indique le reste de la division de nm par d.

Conjecture : Si $n < d/(d-1)$ il existe un nombre fini de cycles F sous g tel que pour tout m la trajectoire de $\tau_g(m)$ est finalement un élément de F. En particulier $\{m : \exists k, g^{(k)}(m) \geq m\}$ est fini.

Conjecture de Matthews-Watts, 1985 : Soit T_{M_p,R_p} one application de Conway

(i) Si T satisfait la condition de contraction $\mu(T) < p^p$, alors toutes les trajectoires τ_T sont finalement cycliques. En particulier, il existe au moins un cycle.

(ii) Si T satisfait la condition d'expansion $\mu(T) > p^p$, alors presque toutes les trajectoires τ_T sont divergentes. En particulier, il y a au moins une trajectoire divergente.

23. (-7, -10, -5) est un cycle de $3x+1$ et l'opposés de (7, 10, 5), cycle de $3x-1$.
24. Avec une nouvelle allusion dans Allouche (2017, [59]).

(iii) Le nombre de cycles est fini.

(iv) Si la trajectoire $\tau_T(m)$ est divergente, alors les valeurs itérées sont uniformément distribuées $\pmod{p^q}$ pour tout $q \in \mathbb{N}$.

C'est la conjecture qui chapeaute largement toutes les généralisations classiques de la conjecture de Collatz.

Conjectures concernant $3x + d$

Il existe de multiples conjectures concernant les T_d-suites. Elles ne diffèrent parfois que par la formulation.

Pour la fonction T_d, il existe toujours le cycle « trivial » $(d, (3d + d)/2 = 2d)$ qui n'est pas primitif. La conjecture suivante affirme l'existence de cycles primitifs.

Primitive Cycles Existence Conjecture (Lagarias (1990, [1]) : Pour tout d nombre entier positif premier avec 6 il existe au moins un cycle primitif pour T_d.

La conjecture suivante limite toutefois le nombre de cycles primitifs.

Finite Primitive Cycles Conjecture (Lagarias (1990, [1]) : Pour tout d nombre entier positif premier avec 6 il existe un nombre fini de cycles primitifs pour T_d.

Conjecture P (Lagarias (1990, [1]) : Tout nombre positif $n_0 \equiv \pm 1 \pmod 6$ est dans un cycle primitif d'une infinité de T_d avec $d \equiv \pm 1 \pmod 6$.

Dhiraj ([2]) démontre un théorème concernant une condition suffisante pour l'existence d'un cycle primitif (voir aussi l'annexe 7).

Belaga & Mignotte (2006, [60]) calculent tous les cycles primitifs pour 6667 valeurs de d comprises entre 1 et 19999 et corroborent la conjecture de Lagarias. Ces calculs corroborent également des conjectures plus fines (Belaga & Mignotte (2000, [61]) énoncée en alourdissant l'appareillage symbolique. Notamment (avec D l'ensemble des nombres naturels premiers avec 6) :

Recurrence Threshold Conjecture : Pour tout $d \in D$, il existe un entier R tel que toute trajectoire passe dans l'intervalle $1 \leq m \leq R$ une infinité de fois. La valeur minimale de R est dénotée R_d et est appelée « T_d-recurrence threshold) » (seuil de récurrence pour T_d).

Collapse Threshold Conjecture : Pour tout $d \in D$, il existe un entier L tel que toute trajectoire se trouve finalement dans l'intervalle $1 \leq m \leq L$. La valeur minimale de L est dénotée L_d et est appelée « T_d-collapse threshold) » (seuil de collages pour T_d).

Termination Set, or Attractor Conjecture : Pour tout $d \in D$, il existe un ensemble fini U de nombres naturels tel que toute trajectoire se trouve finalement dans U. L'intersection de tels ensembles U est notée U_d et est appelée « T_d-termination set » ou « T_d-attractor ».

Des conjectures concernent également des valeurs pour le périgée d'un cycle (valeur minimale, forcément impair d'un cycle) sont aussi données. Certaines sont démontrées (Belaga, 2003, [62], 2007, [63]).

$3n \pm p$ ***conjecture (Vasantha et ali, 2017, [64]*** : Les suites basées sur $3n \pm p$ avec p nombre premier pour tout germe $n \in \mathbb{N}$ entrent dans un cycle et il n'y a qu'un nombre fini de tels cycles.

Ces conjectures sont émises dans un autre « club », sans références aux conjectures de Lagarias plus anciennes et qu'elles particularisent.

La conjecture sur les cycles finis de Lagarias est étendue aux valeur de d négatives et au problème étendu à $\mathbb{Z}$[25], sans inclure la clause de primitivité.

$(3x + d)$***-Cycle Conjecture (Kaneda, 2014, [57])*** : Pour tout $d \in \mathbb{Z}$ avec $d \equiv 1 \pmod 6$ ou $d \equiv -1 \pmod 6$, le nombre de $(3x + d)$-cycles est fini.

Conjectures concernant $qx + r$

Conjecture de Crandall (1978, [3]) à propos du $qx + r$ ***problème*** : Avec $(q, r) \neq (3, 1)$, q et r impair, il existe m impair tel que $N_{q,r}^{(k)}(m) = 1$ ne possède pas de solution.

Cette conjecture est trivialement prouvée pour $r > 1$ en prenant comme valeur d'origine $m \equiv 0 \pmod r$.

Pour $q = 5$ les origines $m = 13$ ou $m = 17$ conduisent à des cycles ne contenant pas 1 (par contre l'origine $m = 3$ conduit au cycle selon N : (3, 1)).

Si $q = 181$, $m = 27$ génère une suite sans la valeur 1. Et pour $q = 1093$ cela est vérifié pour $m \neq (2^{364p} - 1)/1093$.

La conjecture de Crandall est souvent citée en se limitant au cas $r = 1$.

Conjecture de Crandall simplifiée : Pour le problème $qx + 1$ avec $q > 3$ impair, il existe des valeurs initiales m dont les trajectoires ne contiennent pas 1.

Les conjectures de ce genre sont parfois qualifiées de conjecture anti-Syracuse.

Franco & Pomerance (1995, [65]) ont montré que cette conjecture est « presque vraie ».

L'adaptation de l'argument heuristique suggère d'ailleurs :

Conjecture des « vols infinis » (évoquée par Delahaye) : Pour la suite générée par la relation $qx + 1$ avec q supérieur à 3, il existe des vols infinis (c'est-à-dire une ou plusieurs valeurs initiales telles que la suite ne soit bas bornée).

Pour $5x + 1$ l'origine $m = 7$ semble conduire à un vol infini. Cette conjecture est à comparer à celle émise par Kakutani pour la suite $5x + 1$

Nous conjecturons qu'il en va de même avec $m = 11$.

Généralisations de la formule de récurrence à $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}_2$ ou $\mathbb{Q}_p$

Chamberland (1996, [29]) propose une interpolation f de T à $\mathbb{R}^+$. Avec les notation de la page 28 on a :

Conjecture : f n'admet aucun cycle attractif sur l'intervalle $[\mu_3, \infty[$. ($\mu_3 \approx 2.445$

25. A noter qu'un cycle ne peut contenir à la fois des nombres positifs et négatifs.

Conjecture (Chamberland, 1996, [29]) : $\mathbb{N} \cap R_f = \emptyset$

Equivalente à la conjecture principale.

Stable set conjecture (Chamberland, 1996, [29]) : $S_f = \emptyset$

Etant la conjecture nontrivial cycle conjecture

Divergent trajectories conjecture (Chamberland, 1996, [29]) : $\mathbb{N} \cap U_f^{\infty} = \emptyset$

Unstable set conjecture (Chamberland, 1996, [29]) : U_f est de mesure (Lebesgue) nulle.

Conjecture de Lygeros et Rozier (2014, [31]) affine le lien entre les conjectures concernant le système dynamique proposé par Chamberland et les conjectures de Syracuse (cycles non-triviaux et trajectoires divegentes).

Conjecture de Collatz généralisée (Fleckinger et Abdoulkarim, 2015, [39]) : $\Phi_{p,q}(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Autres conjectures

Conjecture : $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z}$ (de fait $Q_\infty(\mathbb{N}_0) \subset (1/3)\mathbb{Z} - \mathbb{Z}$)

Si la conjecture de Collatz est vrai, le développement $Q_\infty(m)$ pour tout m se termine par la répétition de 1 et 0. Cela correspond à l'expression au nombre 1/3.

Conjecture des Cycles finis : il existe un entier impair M tel que : $Q_\infty(\mathbb{Z}) \subset (1/M)\mathbb{Z}$

Random conjecture : Une suite aléatoire de Syracuse devient presque sûrement plus petite qu'une borne B fixée .

Cette conjecture est citée pour mémoire. Elle est « démontrée » par Slakmon et Macot (2003, [36], 2006, [52]) mais correspond de fait à l'heuristique développée précédemment page 16 (voir aussi la section Le monde de Syracuse page 34).

Conjecture du noyau d'une fonctionnelle : La conjecture de Collatz est vraie si et seulement si $K = \Delta_2$ avec K le noyau de deux fonctionnelles sur les fonctions holomorphes et Δ_2 l'ensemble généré par $\phi_0(z) = 1$ et $\phi_1(z) = z/(1-z)$

Cette conjecture semble déconnectée de la conjecture originale. Toutefois, dans la tentative d'expression de la fonctionnelle, les relations génératrices de la suite de Collatz réapparaissent.

Divisibility problem involving powers of 2 and 3 : Il n'existe pas de suite croissante $0 = a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ telle que $2^{a_{n+1}} - 3^n$ soit un diviseur propre de $3^{n-1}2^{a_1} + 3^{n-2}2^{a_2} + \ldots + 2^{a_n}$.

C'est une reformulation de la conjecture faible. Cette conjecture semble la seule totalement déconnectée de la conjecture faible originale.

« Le monde de Syracuse »

Après avoir passé en revue, du point de vue mathématique, diverses directions de travaux liées à la conjecture de Syracuse, cette section va porter un regard plus socio-cognitif sur la production de « résultats » tout venant concernant la suite de Syracuse.

On peut classifier les travaux consultés en quelques catégories crées à partir des trois critères : démonstration d'une propriété associée ou « démonstration » de la conjecture (auquel cas il s'agit d'une analyse d'erreur) ; production naïve ou savante ; avec erreur (ou maladresse) ou apparemment correcte.

Dans cette classification on distingue différents répertoires : celui des productions savantes, de mathématiciens respectant les usages et formes des textes mathématiques et celui des travaux d'un public plus élargi mais assez disparate qui comprend des mathématiciens débutants, de scientifiques ou d'ingénieurs moins rompus à l'écriture de textes mathématiques et d'amateurs plus ou moins éclairés.

Cela mettra en évidence les représentations naïves que peut revêtir une question mathématique [26].

Le niveau des amateurs peut être caractérisé par cette remarque de l'un d'eux « *les mathématiciens qui se réfèrent au problème comme le '3x+1 problem' n'ont pas eu le lavage de cerveau par FORTRAN (comme je l'ai été) qui fait croire que seul n, et pas x, représente un entier* » [27]

Productions naïves

Les travaux faisant partie de cette catégorie sont effectués par des personnes peu au courant des formes élémentaires du raisonnement mathématique et/ou de sa présentation. Le média Internet favorise certainement la communication dans un mode décomplexé, voire parfois arrogant. L'annexe 10 présente quelques exemples recueillis sur des forums. La tentative de Dianopoulos (2012, [17], 2013, [18]) déjà citée en constitue un autre exemple.

De nombreux sites personnels, tel que celui de O. Pirson ([67]) présentent des références (parmi d'autres) au problème de Syracuse, voire des éléments de calcul.

« Démonstration » de la conjecture

Il n'existe évidemment pas de démonstration correcte de la conjecture et cette section est finalement consacrée à une analyse d'erreurs, dont la pratique, en dehors du monde scolaire et de la recherche en didactique, est peu fréquente.

On peut imaginer que les articles « savants » présentant des erreurs sont rares ou alors vite retirés de la circulation.

Le travail de Opfer [14] en particulier part d'une équivalence originale et non triviale de la conjecture (établie par Berg & Meinardus) avec une propriété de fonctionnelles de

26. Une étude des productions plus ou moins naïves concernant la trisection de l'angle, la quadrature du cercle ou alors récemment du dernier théorème de Fermat mériterait d'être faite s'il elle ne l'a pas déjà été. Mais les traces laissées par de tels travaux dans l'ère pré-Internet sont ténues. Un des auteurs, comme assistant du président de la Société suisse des mathématiciens, a eu l'occasion de relire plusieurs de ces travaux proposés à la Société. Ils étaient rapidement jugés comme revêtant peu d'intérêt mathématique, ce qui n'est peut-être pas faux. Toutefois, leur apport du point de vue socio-cognitif, voire de l'éducation mathématique, mériterait d'être approfondi.

27. « Mathematicians who refer to the problem as the 3x+1 problem were never brainwashed by FORTRAN (as I was) into the belief that n, not x, stands for an integer » [66]

fonctions analytiques. Il recèle une erreur repérée par l'auteur. Le problème revient à démontrer que l'ensemble constitué à partir du noyau de deux fonctionnelles linéaires sur les fonctions holomorphes définies sur $\mathbb{C}$ est l'ensemble Δ_2 généré par $\phi_0(z) = 1$ et $\phi_1(z) = z/(1-z)$.

Cette conjecture semble déconnectée de la conjecture originale. Toutefois, dans la tentative d'expression de la fonctionnelle, les relations génératrices de la suite de Collatz réapparaissent.

Les autres travaux de cette catégorie pourraient être qualifiés de savamment naïfs dans la mesure où les auteurs ne semblent pas se méfier de la difficulté du problème. Les travaux respectent les formes mathématiques courantes mais ignorent en général la littérature consacrée au sujet.

Il n'est pas facile de repérer l'erreur fatale dans un article. Ainsi, nous nous sommes permis d'abandonner la relecture dès que nous avons repéré 3 ou 4 « naïvetés » ou micro-erreurs.

Le travail de Slakmon & Macot (ultérieur à 2003, [36], révisé en 2006 [52]) est déroutant. Par son titre *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences*, il semble décrire un résultat plus fort que celui obtenu par le théorème de Terras. Lagarias (2012, [22]) [28] précise, en suivant l'introduction de l'article, que celui-ci montre que la *"random Syracuse conjecture"* est vraie dans le sens qu'une suite de Syracuse aléatoire devient presque sûrement inférieure à une valeur $B \geq 1$ spécifiée à l'avance. Dans le texte lui-même il est mentionné qu'une hypothèse auxiliaire est faite, celle de l'équiprobabilité d'obtenir des valeurs paires et impaires à chaque pas. De plus, pour augmenter la confusion, le *presque toutes* disparaît de façon mystérieuse et un article de Z. Mazur du Carrefour des opinions du 27 mai 2010 [29] présente le problème comme résolu.

Notre conclusion est que ce résultat est finalement équivalent à l'heuristique présentée à la page 16.

Conrow prétend démontrer la conjecture à travers de longs développements disponibles sur le web ([66]) et un article de résumé (Conrow, 2007, [68]).

Il travaille sur la N-suite de Collatz des nombres impairs et utilise de façon intensive l'arbre des prédécesseurs. Il repère notamment les arêtes s (le prédécesseur est plus petit, par ex. 5 - 3), b (le prédécesseur plus grand, par ex. 7 - 9) et e où les nombres sont reliés par la relation $4n+1$ (par ex. 3 - 13 ou 9 - 37) entre les nombres ayant le même descendant.

Sous le titre *Has anyone read Ken Conrow's Collatz Conjecture website ?* le blogueur Mensanator [30] décortique le travail de Conrow. En résumé, Conrow décompose le graphe de Collatz en segment de "header" les nombres de la forme 5 (mod 8). En rassemblant ces "headers", il construit le graphe APT Abstract Predecessor Tree (APT) et montre que la densité de ce graphe est 1. Une erreur apparente provient de ce que le graphe n'est pas connexe. Le contre-exemple $3x + 7$ vient à l'appui de cette remarque.

28. L'article paraît aussi cité dans la bibliographie de Chamberland (2010), mais n'est pas référencé dans le corps du texte.

29. Un problème mathématique d'envergure mondiale enfin résolu ! `http://www.lecarrefourdesopinions.ca/?p=3035`

30. https ://www.physicsforums.com/threads/has-anyone-read-ken-conrows-collatz-conjecture-website.335859/

Ghosh[31] (2009, [69], [50]) démontre qu'il n'y a pas d'autres cycles que le cycle trivial. Il procède par induction sur la longueur du cycle. Il démontre astucieusement en utilisant la formule 3 de la page 10 que la valeur minimum du cycle est majorée par une constante $\kappa(m)$ qui dépend de la longueur m du cycle. Puis il procède par récurrence sur la longueur du cycle et utilise l'affirmation que cette valeur minimum est supérieur à $\kappa(m-1)$. C'est une sorte de réciproque certainement erronée qui invalide le reste de la démonstration.

Nous avons déjà cité le travail de Feinstein (2012, [15]) qui démontre la non-démontrabilité de la conjecture. Il montre que toute preuve de la conjecture doit avoir un nombre infini de lignes et que donc aucune preuve formelle n'est possible. Il se base de façon suspecte sur un raisonnement de Freeman Dyson[32] qui paraît lui-même suspect. L'argument suivant donné à propos d'un de ses exemples est notamment imparable « It cannot be proved because there is no deep mathematical reason why it has to be true ».

Conrow[33] analyse le travail de Feinstein et prétend que son propre travail sur la représentation des trajectoires montrent « naïvement » que la preuve de ce dernier n'est pas correcte[34]. Par contre, rappelons qu'il estime lui-même avoir démontré le théorème[35].

Schorer (2014, [42], [43]) associe à chaque suite de nombre naturel $A = (a_2, \ldots, a_i)$ ce qu'il appelle les tuple-set T_A. Un tuple est constitué des fragments de N-suite de Syracuse suivants :

- les singletons (x) tels que $\nu(3x+1) \neq a_2$
- les paires $(x, N(x))$ telles que $\nu(3x+1) = a_2$ et $\nu(3N(x)+1) \neq a_3$
- etc.
- les suites $(x, N(x), \ldots, N^{(i-1)}(x))$ telles que $\nu(3N^{(j-2)}(x)+1) = a_j$ pour $j < i$ et $\nu(3N^{(i-2)}(x)+1) \neq a_i$

Exemple : Avec $A = (1, 1, 2)$, les tuples (1), (3,5), (15,23,35) sont des éléments de T_A.

Ensuite l'auteur définit un indice lié uniquement à l'ensemble A, mais dont le vocabulaire et les énoncés (Lemme 1.0) font penser à une distance entre tuples. Schorer construit ensuite deux ensembles de tuples, l'un sous l'hypothèse de l'existence de contre-exemples à la conjecture et l'autre sous l'hypothèse de l'inexistence de contre-exemple. En se basant sur la fonction distance, il montre que les deux ensembles sont égaux. Admettons.

Il en déduit qu'aucun contre-exemple existe en décomposant l'ensemble des tuples entre non contre-exemples et contre-exemples (?). Dans ce raisonnement il apparaît que de « tuples sous l'hypothèse de ... » on a passé à aux exemples et contre-exemples. Ce qui revient à porter l'hypothèse au rang d'affirmation.

Haynberg (2009, [40]) apporte une critique à une première version (Schorer, 2009, [70]) qui n'est plus accessible. Cette critique reste valable pour les corrections apportées par Schorer dans les versions actuellement disponibles qui contiennent de plus des considérations de type logique, notamment une section intitulée « Common Misconceptions About the Nature of Comparison of Mutually-Exclusive Cases » pour justifier son raisonnement.

31. Elève de Feinstein.
32. `https://www.edge.org/q2005/q05_9.html`
33. `http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/cafeinst.html`
34. Il évoque également et analyse des références qu'il juge douteuses !
35. http ://www-personal.ksu.edu/ kconrow/cafproof.html

Toutefois, Schorer conscient des lacunes formelles de son travail est à la recherche d'aide pour formaliser son travail et partager l'honneur de la découverte.

Berkouk (2015, [71]) [36] commence par démontrer que l'élément minimum d'un cycle est impair et que le cycle trivial est le seul cycle de longueur 3. En utilisant l'inégalité 4 page 12 entre le nombre de termes pairs et le nombre de termes impairs, il déduit (en oubliant qu'il peut y avoir de nombreuses fractions rationnelles inférieures à $\log 2/\log 3$) qu'il n'existe aucun cycle de longueur supérieure à 3 et que celui-ci est le cycle trivial (cette dernière implication étant vraie).

En décomposant les nombres impairs sous diverses formes (par exemple : $2^p x - 1$, il montre ensuite en suivant plusieurs étapes que la suite décroit. Ce qui élimine les suites divergentes. Ce qui est vrai pour les nombres de la forme $4x+1$. Il montre que les suites d'origine un nombre de la forme $4x+3$ aboutissent à un nombre de la forme $4x+1$. Dans sa démonstration par récurrence, il utilise la formule sans tenir compte de la parité des résultats intermédiaires.

Farid Baleh (Baleh, 2017, [72]) démontre que le cycle trivial est unique. Partant de l'hypothèse de l'existence d'un cycle, l'auteur exprime de façon correcte les éléments de la suite en fonction de leur position dans le cycle. Puis il utilise de façon incomplète l'unicité d'une valeur limite (en oubliant qu'il faut évidemment que cette valeur existe) pour conclure que le cycle est le cycle trivial [37].

L'article de N. Karl-Augustt Alahassa (2017, [73]) expose également une prétendumment démonstration de la conjecture. Cet article est d'un abord ardu dans la mesure où plusieurs notions classiques sont redéfinies.

Dans une première partie l'auteur introduit la notion un peu ambigüe de "cantus" sans se référer à la décomposition d'un nombre en base deux qui lui sert de base. Par ailleurs, l'auteur semble enclin à démontrer de nombreuses trivialités ($3p+1$ pair ssi p est impair, il n'existe pas de n_0 tel que $g(n_0)(1) < 1$) où g est la fonction C-Collatz, etc.

Une formule « intéressante » est toutefois proposée : $C^{2n+1}(q2^n + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1) = 3^n q/2 + 3^{n-1} + \ldots + 1$ avec q pair qui se montre facilement par induction complète.

Cette première partie ne semble pas utile dans la suite où l'auteur utilise l'arbre (graphe) de Syracuse et « démontre » qu'il est égal à un arbre généré depuis 1 à l'aide des fonctions $2x$ et $(x-1)/3$. Implicitement (et plusieurs contacts avec l'auteur l'ont explicité) pour lui ce graphe contient tous les nombres naturels. Vraisemblablement la charge cognitive nécessaire à la démonstration de différents résultats (triviaux comme la connexité du graphe) lui a permis de se donner l'illusion que tous les nombres étaient atteints.

Après plusieurs échanges avec l'auteur [38], on peut conclure que sa démonstration vise à prouver que chaque trajectoire passe au-dessous de son origine. L'algorithme que l'auteur

36. http ://vixra.org/abs/1507.0200

37. L'auteur contacté nous écrit : « J'ai en fait commis une erreur grossière car la suite x_n/a_n est équivalente à u_{r_n} lorsque n tend vers l'infini, r_n étant compris entre 0 et $T-1$. J'ai donc fait une confusion avec l'unicité d'une limite quand elle existe...

Par conséquent, ma démonstration n'est pas valable, et je continue à travailler sur cette conjecture de Collatz, comme vous je suppose (pour ma part, je le fait en amateur, étant ingénieur dans le domaine de la R&D en télécoms). »

38. Malgré ces échanges nous n'avons pas pu le faire douter de son raisonnement.

donne pour trouver cette valeur ne fonctionne pas correctement et donne des valeurs non entières.

Démonstration de propriétés associées ; productions savantes ou naïves correctes

Les articles recensés par Lagarias ceux publiés dans des revues à comité de lecture relèvent de cette catégorie dans le répertoire savant. Mais il peut aussi y avoir des pages sur Internet relevant de cette catégorie dans le même répertoire, par exemple une des rubriques du blog de Tao.

Les autres productions ont été trouvées dans des archive ouvertes (Arxiv ou Hal), sur des blogs ou forums ou encore sur des sites personnels, par exemple celui de O. Rozier ([74]), mais parfois dans des revues.

C'est dans cette catégorie que l'on peut placer les démonstrations d'équivalence de la conjecture dont les références ont été données dans la section qui leur est consacrée.

Relevons encore les articles consacrés à des calculs de bornes (Belaga, 2003, [62] ; Belaga, 2007, [63]). Le problème de Syracuse devient ainsi une sorte de « terrain de jeu » offrant de multiples possibilités d'exercices plus ou moins virtuoses sans que l'apport à la démonstration ne soit clairement perçu ou mentionné.

Le travail de Simonetto (2016, [75]) : « Conjecture de Syracuse : avancées inédites »représente une forme naïve plus élaborée que celles mentionnées dans la sous-section des « Productions naïves ». Il propose un document de plus de 300 pages qui mêlent des éléments didactiques (qu'est-ce qu'une conjecture ?), épistémologiques (pourquoi chercher ?), allégoriques (Pommade magique , trou noir, bourse !) et calculatoires. Sur ce dernier aspect de multiples variantes sont présentées et diverses conjectures sont proposées pour les suites construites à partir des relations $u_n/2 \pm 1$, $(3u_n \pm 1)/2$ et $(3u_n \pm 3)/2$ (36 combinaisons possibles) et des suite « complémentaire »construites à partir de $3w_n/2$ et $(w_m \pm 1)/2$.

Outre les conjectures des questions émergent, par exemple : le calcul de probabilités peut-il renseigner notre problème ?

Il est à noter qu'aucune référence ou renvoi n'est fait à la riche bibliographie fournie. L'auteur [39] précise d'ailleurs que l'ouvrage a été rédigé (en une année) sans l'aide d'aucun autre auteur.

Lors de notre travail de lecture nous nous sommes parfois trouvés confrontés à des difficulté de compréhension face à des raccourcis et/ou maladresses parfois récupérables.

Un exemple repris de la version simplifiée du théorème de Terras publiée par Eric Roosendaal que nous avons déjà mentionnée est particulièrement intéressante. Il révèle une difficulté liée à la remarque que nous avons faite à propos de l'heuristique. Il s'agit du lemme :

Lemme 4 [40] : $T^{(k)}(n) \approx \lambda_k(n)n$ c'est-à-dire $\lim_{T^{(k)}(n)\to\infty} \frac{T^{(k)}(n)-\lambda_k(n)n}{T^{(k)}(n)} = 0$

39. Il précise n'être pas mathématicien, mais diplômé de grandes écoles d'ingénieurs et que ses fonctions en entreprise l'ont éloigné des sciences et de leurs « sens aigu de l'analyse et des méthodes ».

40. La démonstration utilise la relation 5 page 21 sous la forme :

Ce lemme, utilise sans hypothèse *ab absurde*, ni autre précaution, une limite lorsque la valeur de $T^{(k)}(n)$ tend vers l'infini alors que finalement la suite passera presque toujours au-dessous de sa valeur d'origine.

Conclusion

Le point de départ de notre travail était le constat de la prolifération des conjectures liées au problème de Syracuse.

Sans prétendre à l'exhaustivité, nous nous sommes intéressés à faire un état du microcosme « s'agitant » autour de la suite de Collatz. Notre méthode a été de consulter les moteurs de recherche et de suivre quelques références bibliographiques. Dans la bibliographie, on verra que la plupart des articles « historiques » ont été mis à disposition librement sur Internet.

La plupart des travaux plus récents ont été consultés sur des sites ou blogs personnels ou les archives ouvertes arXiv et Hal.

En cours de travail, nous avons trouvé plusieurs tentatives de démonstration de la conjecture et il nous a paru intéressant d'en garder trace. Nous avons étendu notre propos initial en examinant, bien que parfois superficiellement, tous les travaux se référant au problème de Syracuse ; ceux affirmant la démonstration de la conjecture (il va sans dire que nous tenons le problème comme non résolu), les tentatives avortées et encore les développements d'amateurs qui se placent en dehors des courants initiés par les mathématiciens confirmés.

Remarques concernant les publics

L'ensemble des articles donnent l'impression que chez les mathématiciens professionnels « confirmés » un espoir de démontrer la conjecture subsistait encore dans les années quatre-vingt-dix. Il restait encore des extensions et des généralisations d'où pouvait provenir la délivrance. Puis, chez le même public, la conjecture semble être devenue petit à petit une sorte de terrain de jeu. Des résultats d'une assez grande technicité apparaissent pour étendre le domaine de définition du processus, de la fonction de récurrence ou pour démontrer différentes propriétés annexes à la conjecture originale (estimation de maxima, par exemple). Ceci sans que l'apport de la majorité de ces travaux à la démonstration de la conjecture ne soit évident ni annoncé explicitement. C'est une occasion de faire des mathématiques sans forcément s'intéresser à la nature profonde du problème.

$$\frac{T^{(k)}(n) - \lambda_k(n)n}{T^{(k)}(n)} = \frac{\rho_k(n)}{T^{(k)}(n)} = \frac{\rho_k(n)}{\lambda_k(n)n + \rho_k(n)}$$

Il faut mentionner que les exemples sont toutefois assez convaincants.

- $n = 17$; $(17, 26, 13, 20, 10, 5)$; $T^{(5)}(17) = 5$; $v_5(17) = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$
- $\lambda_5(17) \times 17 = (3^2 \times 17)/2^5 = 4.78$; (erreur : 4,4%)
- $n = 123$; $(123, 185, 278, 139, 209, 314)$; $T^{(5)}(123) = 314$; $v_5(123) = (1, 1, 0, 1, 1, 0)$
- $\lambda_5(123) \times 123 = (3^4 \times 123)/2^5 = 311.34$; (erreur : 0,8%)

Parmi les auteurs qui persistent et proposent des démonstrations plusieurs proviennent étonnamment du monde universitaire, ce sont aussi bien des étudiants que des membres du corps enseignant. Il est intéressant de noter l'effort fait par certains pour analyser et décortiquer le travail d'autres, et cela même pour des travaux encore immatures et difficilement compréhensibles. Des collaborations s'instaurent à tous les niveaux de culture mathématique.

Nous avions pensé à énoncer une conjecture qui finalement est vraisemblablement à réfuter :

Conjecture : La croyance dans la possibilité de démontrer la conjecture de Syracuse est inversement proportionnel à la culture mathématique de l'auteur.

Quant à certains amateurs, ils aboutissent sans trop de mal à plusieurs formules butoirs classiques (par exemple la formule 3 page 10). C'est souvent en voulant forcer ce barrage que les erreurs sont commises. L'aspect « fractal » du processus de recherche des nombres qui vérifient la conjectures - ce qu'illustrent les graphes des prédécesseurs - incite également à imaginer une sorte de limite à l'infini embrassant tous les nombres.

On notera la différence de style entre les auteurs de culture francophone et ceux de culture anglo-saxonne. A la différence des seconds, les premiers introduisent de nombreuses notations et définitions (nombres de Collatz, couronne de Collatz, etc.). Ils recourent à un vocabulaire imagé : temps de vol (pour temps d'arrêt - stopping time), distance de vol, temps de vol en altitude, etc. Il n'est pas certain que cela permette de mieux traiter le problème.

Remarques concernant les erreurs à éviter

L'examen de la suite de Syracuse demande quelques précautions. On note quelque difficultés récurrentes, notamment, le « presque partout » est d'une utilisation délicate avec des risque de confusion entre l'ensemble de départ $\mathbb{N}$ et l'ensemble des points de la trajectoire, un germe étant donné.

Ensuite, il s'agit de bien distinguer les deux conjectures : celle concernant l'absence de suites divergentes et celle concernant l'impossibilité de cycles non-triviaux. Les raisonnements qui se basent sur des moyennes ou des limites liées à des suites infinies, et mêmes divergentes, peuvent parfois oublier l'existence possible de cycles non triviaux.

On note que plusieurs auteurs travaillant sur les prédécesseurs (et notamment l'arbre lié à cette relation), finissent par « démontrer » que l'ensemble des prédécesseurs de 1 est l'ensemble des naturels. Qu'est-ce qui rend cette erreur si commune ? Dans ce processus constructif, il apparaît que l'ensemble des nombres qui restent à tester s'éclaircit au fur et à mesure du travail. Cette perception induit certainement les erreurs commises par la suite.

Par ailleurs, on note qu'un réflexe simple est souvent oublié. Celui de se pas se lancer dans des développements qui ne permettent pas de distinguer le cas $3x + 1$ d'autres cas, par exemple $5x + 1$.

Remarques à propos des reformulations

La conjecture de Syracuse est à plusieurs reprises reformulée dans un autre domaine. Toutefois, la plupart du temps, il est difficile de déconnecter la nouvelle conjecture des propriétés de la suite de Syracuse originale. Chacun ramène le problème dans sa spécialité, puis en essayant de résoudre ce nouveau problème voit réapparaître le problème initial avec ses caractéristiques propres.

Comme le notait déjà Lagarias (1985, [4]) : quelles propriétés intéressantes possèdent la fonction Q_∞ ? Possède-t-elle une caractérisation autre que la définition récursive liée à la suite de Syracuse ?

Les deux cas relativement déconnectés de la conjecture originale rencontrés sont ceux de la formule 3 page pagerefform :x0 (qui reste une question ouverte) et l'utilisation de la théorie ergodique avec $\mathbb{Z}_2$ qui conduit à une impasse. De ce point de vue, le recours au noyau d'une fonctionnelle dans les fonctions analytiques constitue peut-être un autre exemple.

Dans quel recoin mathématique peuvent se cacher les contraintes fortes qui relient des nombres d'une suite de Syracuse ? Entre analyse, arithmétique et logique le cas semble encore assez loin d'être tranché.

En guise de postface : le deuxième problème de Collatz [41]

Soit la fonction g donnée par :

$$g(m) = \begin{cases} \frac{2}{3}m & \text{si } m \equiv 0 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}m - \frac{1}{3} & \text{si } m \equiv 1 \pmod 3 \\ \frac{4}{3}m + \frac{1}{3} & \text{si } m \equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

C'est une application de Conway avec $M_3 = \{2, 4, 4\}$ et $R_3 = \{0, 1, -1\}$

Cette fonction génère une permutation des P des nombres naturels :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9\ldots \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 7 & 4 & 9 & 11 & 6\ldots \end{pmatrix}$$

ou sous forme de cycles : $P = (2\ 3)(4\ 5\ 7\ 9\ 6)(8\ldots)$

Conjecture : le cycle de 8 est infini.

Références

[1] J. Lagarias, *The set of rational cycles for the $3x + 1$ problem. Acta Arithmetica*, 56 (1):33–53, 1990. aa5614.pdf.

41. Selon Bagarrais cité par Lagarias (1985, [4]) ce serait le problème original de Collatz datant de 1932.

[2] H. Dhiraj, *Results on the* $3x + 1$ *and* $3x + d$ *conjectures.* Dhiraj.pdf.

[3] R.E. Crandall, *On the* $3x + 1$ *Problem. Mathematics of Computation*, 144(32): octobre 1978, 1281–1292, octobre 1978. S0025-5718-1978-0480321-3.pdf ; utilise la fonction N.

[4] J. Lagarias, *The 3x+1 problem and its generalizations. American Mathematical Monthly*, 92(1):3 – 23, 1985. `http://www.cecm.sfu.ca/organics/papers/lagarias/`, Lagarias3-23.pdf.

[5] J. Lagarias, *The* $3x + 1$ *Problem : An Overview. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, chapitre Introduction, pages 3–30. Providence : American Mathematical Society, 2010. mbk-78-prev.pdf.

[6] J.-P. Delahaye, *La conjecture de Syracuse. Pour la Science*, 247:100–105, mai 1998. 053.pdf.

[7] G. Wirsching, *The Dynamical System Generated by the 3n + 1 Function.* Lecture Notes in Math. 1681. Springer-Verlag, 1998. MR1612686 (99g :11027).

[8] B.J. Green et T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions. Annals of Mathematics*, 167 (2008):481–547, 2008. arXiv :math.NT/0404188.

[9] J.-A. Calame et F. Jaquet, *Mathématique 8ème CS.* DIP, Neuchâtel, 1991. Atelier page 10.

[10] L.-O. Pochon, *La suite de Syracuse. Bulletin de la SENS*, 14, 1993.

[11] R.K. Guy, *Don't try to solve these problems. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 231–240. Providence : American Mathematical Society, 2010. reprinted early paper 1983.

[12] J.-P. Delahaye, *J'aimerais tant prouver Syracuse. Pour la Science*, dossier 74:98–103, janvier-mars 2012.

[13] J.-P. Delahaye et C. Lasou, *La conjecture de Syracuse.* Licence s.t-a., Université des Sciences et Technologies de Lille, 2007. syracuse.pdf.

[14] G. Opfer, *An Analytic approach to the Collatz 3N + 1 Problem*, 2011. hbam2011-09.pdf, consulté : septembre 2012.

[15] C. A. Feinstein, *The Collatz 3n+1 Conjecture is Unprovable.* arXiv :math/0312309v19, 2012.

[16] J. H. Conway, *Unpredictable iterations. In Proceedings of the Number Theory Conference*, page 49–52, 1972.

[17] C.T. Dianopoulos, *The Collatz Conjecture Proof*, 2012. collatz-libre.pdf.

[18] C.T. Dianopoulos et K. Kulkarni, *Collatz Conjecture Proof*, 2013. collatz_proof-libre.pdf.

[19] P. Andaloro, *On total stopping times under 3x+1 iteration.* Rapport technique, Kent State University, 1998. andaloro.pdf.

[20] J. Lagarias, *The 3x + 1 Problem : An Annotated Bibliography II (2000-2009).* arXiv :math/0608208v5, 2011.

[21] J. Lagarias, *The* $3x+1$ *Problem : An Annotated Bibliography (1963–1999) (Sorted by Author).* arXiv :math/0309224v13, 2011.

[22] J. Lagarias, *The $3x+1$ Problem : An Annotated Bibliography II (2000-2009).* arXiv :math/0608208v6, 2012.

[23] J. Lagarias, *Preface. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The $3x+1$ Problem*, chapitre Preface, pages ix–xiv3–30. Providence : American Mathematical Society, 2010. mbk-78-prev.pdf.

[24] M. Chamberland, *A $3x+1$ survey : Number theory and dynamical systems. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 189–207. Providence : American Mathematical Society, 2010.

[25] M. Chamberland, *Averaging Structure in the $3x+1$ Problem.* Rapport technique, Department of Mathematics and Statistics, Grinnell College, 2003. 3x_survey_eng.pdf.

[26] E. Belaga et M. Mignotte, *Walking Cautiously Into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number Theoretically, Randomly.* Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, report 2000-18, 2015. documentation/syracuse/dmAG0117-1.pdf.

[27] J. Arsac, *Algorithmes pour vérifier la conjecture de Syracuse. Informatique théorique et applications*, 21:3–9, 1987. `http://www.numdam.org/item?id=ITA\_1987\_\_21\_1\_3\_0`.

[28] S. Eliahou, *Le problème $3n+1$: y a-t-il des cycles non triviaux ? (III).* `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-y-a-t-il-des.html`, 2011.

[29] M. Chamberland, *A Continuous Extension of the $3x+1$ Problem to the Real Line.* Rapport technique, Dpt of Mathematics and Statistics, McMaster University, Ontario, Canada, 1996. 3x_1996.pdf.

[30] M. Chamberland, *A Continuous Extension of the $3x+1$ Problem to the Real Line. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems*, 2 (1996):495–509, 1996.

[31] N. Lygeros et O. Rozier, *Dynamique du problème $3x+1$ sur la droite réelle.* arXiv :1402.1979, 2014. 1402.1979.pdf.

[32] A.A. Kurtz et J. Simon, *The Undecidability of the Generalized Collatz Problem.* Rapport technique, Department of Computer Science The University of Chicago, 2006. 10.1.1.84.6811-pdf incomplet.

[33] J. Sinyor, *The 3x + 1 Problem as a String Rewriting System. International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2010(Article ID 458563), 2010. 458563.pdf.

[34] J. H. Conway, *FRACTRAN : A simple universal programming language for arithmetic. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 249–264. Providence : AMS, 2010. reprinted early paper 1987.

[35] K.G. Monks, *3x+1 Minus the +. Discrete Math. and Theorical Computer Science*, 5 (2002):47–54, 2002. dm050103.pdf, ken_0.pdf, (usage de FRACTRAN).

[36] A. Slakmon et L. Macot, *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences.* Rapport technique, Départements de mathématiques et de physique, Collège de Bois-de-Boulogne, Montréal, 2003. AlmostConvergenceSyracuseSeq.pdf.

[37] T. Carletti et D. Fanelli, *Quantifying the degree of average contraction of Collatz orbits.* Rapport technique, Department of Mathematics and Namur Center for Complex Systems, University of Namur ; Dipartimento di Fisica e Astronomia, University of Florence, 2016. arXiv :math/1612.07820.pdf).

[38] M. Chamberland, *An Update on the* $3x + 1$ *Problem.* Rapport technique, Department of Mathematics and Computer Science, Grinnell College, 2003. average_3x+1.pdf.

[39] F. Fleckinger et I. Abdoulkarim, *Sur la conjecture de Collatz.* Rapport technique, Université de Franche-Comté, 2015. arXiv :math/1607.02370.pdf.

[40] R. Haynberg, *State of the Collatz-Conjecture.* Rapport technique, Dept. of Mathematics University College Cork, 2009. collatzproof.pdf ; 10.1.1.622.8570.pdf.

[41] R. Haynberg, *State of the 3x+1 problem.* `http://rolf.haynberg.de/?p=429`, 2009.

[42] P. Schorer, *Are We Near a Solution to the 3x + 1 Problem ? A Discussion of Several Possible Strategies.* Rapport technique, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, 2014. schorer.pdf.

[43] P. Schorer, *A Solution to the 3x + 1 Problem.* Rapport technique, Hewlett-Packard Laboratories, Palo Alto, 2014. solutionsubmit2.pdf.

[44] J.P. Bendegem (van), *The Collatz conjecture. A Case Study in Mathematical Problem Solving. Logic and Logical Philosophy*, 14 (2005):7–23, 2005. jpvb.pdf.

[45] A. Billot, *La conjecture de Syracuse.* Gallimard, 2008.

[46] T. Oliveira e Silva, *Empirical verification verification of the 3x+1 problem and related conjectures. In* J. Lagarias, éditeur, *The Ultimate Challenge : The 3x+1 Problem*, pages 189–207. Providence : American Mathematical Society, 2010.

[47] E. Roosendaal, *On the 3x+1 Problem.* URL : `http://www.ericr.nl/wondrous/`.

[48] S. Eliahou, *Le problème* $3n+1$ *: élémentaire mais redoutable (I).* `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-elementaire-mais.htm`, 2011.

[49] S. Eliahou, *Le problème* $3n+1$ *: cycles de longueur 5 (II).* `http://images.math.cnrs.fr/Le-probleme-3n-1-cycles-de.html`, 2011.

[50] R. Ghosh, *New lower bounds for the size of a non-trivial loop in the Collatz 3x+1 and generalized px+q problem*, 2009. LoopCollatz_01.pdf.

[51] M.K. Sinisalo, *On the minimal cycle lengths of the Collatz sequences.* Preprint, june 2003, Department of Mathematical Sciences University of Oulu (Finland), 2003. Sinisalo_collatz.pdf).

[52] A. Slakmon et L. Macot, *On the Almost Sure Convergence of Syracuse Sequences. Statistics and Probability Letters*, 15 (2006):1625–1630, 2006.

[53] D. Applegate et J.C. Lagarias, *Density Bounds for the* $3x + 1$ *Problem II. Krasikov Inequalities. Math. Comp.*, 64 (1995):427–438, 1995.

[54] I. Krasikov et J.C. Lagarias, *Bounds for the* $3x + 1$ *Problem using Difference Inequalities.* arXiv :math.NT0205002v1, 2002.

[55] *The sufficiency of arithmetic progressions for the 3x+1 conjecture*, volume 134, 2006. S0002-9939-06-08567-4.pdf , SufficiencyRev4.pdf, ken_1.pdf.

[56] E. Belaga, *Walking Cautiously into the Collatz Wilderness : Algorithmically, Number Theoretically, Randomly.* a8_BelagaMathInfo06Presentation060920.ppt, 2006. September 18-22, 2006.

[57] M. Kaneda, *Two remarks on the Collatz cycle conjecture.* `https://arxiv.org/abs/1010.6206v3`. 1010.6206.pdf.

[58] J.-P. Allouche, *Sur la conjecture de Syracuse-Kakutani-Collatz. Séminaire de théorie des nombres de Bordeaux*, 1978-79, 1979. Exposé 9, résumé dans [21].

[59] J.-P. Allouche, *Two exercises of Comtet and two identities of Ruehr.* Rapport technique, CNRS, Inst. Math. Jussieu-PRG, UPMC, 2017. 1707.05751.pdf.

[60] E. Belaga et M. Mignotte, *The Collatz Problem and Its Generalizations : Experimental Data. Table 1. Primitive Cycles of* $(3n + d)$*-mappings.* Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, report 2000-18, 2006. documentation/syracuse/06015.pdf.

[61] E. Belaga et M. Mignotte, *Cyclic Structure of Dynamical Systems Associated with* $3x + d$ *Extensions of Collatz Problem.* Rapport technique, Université de Strasbourg, report 2000-18, 2000. documentation/syracuse/00018.pdf, (consulté : septembre 2012).

[62] E.G. Belaga, *Effective Polynomial Upper Bounds to Perigees and Numbers of* $(3x+d)$*-Cycles of a Given Oddlength. Acta Arithmetica*, 106.2:197–206, 2003. aa106-2-09.pdf.

[63] E. Belaga, *Effective Polynomial Upper Bounds to Perigees and Numbers of* $(3x + d)$*-Cycles of a Given Oddlength.* Rapport technique, Université Louis Pasteur 7, Strasbourg, 2007. documentation/syracuse/00028.pdf.

[64] W.B Vasantha Kandasamy, I. Kandasamy et F. Smarandache, *The* $3n + p$ *Conjecture : A Generalization of Collatz Conjecture. Journal of Ultra Scientist of Physical Sciences*, 29(2):83–88, 2017. Collatz Conjecture-paper774-170206140527.pdf.

[65] Z. Franco et C. Pomerance, *On a Conjecture of Crandall Concerning the* $qx+1$ *Problem. Mathematics of Computation*, 64(211):1333–1336, 1995. paper101.pdf.

[66] K. Conrow, *Collatz* $3n+1$ *problem.* `http://www-personal.ksu.edu/~kconrow/`.

[67] O. Pirson, *Démonstration de la suite de L. Collatz.* `http://www.opimedia.be/3nP1/`, consulté 2016.

[68] K. Conrow, *The Structure of the Collatz Trajectories with an Inductive/Constructive Proof of the conjecture.* Rapport technique, Kansas State University, 2007. colstruc.pdf.

[69] R. Ghosh, *Non-trivial loops do not exist in the Collatz problem.* 10.1.1.312.6615.pdf, 2009.

[70] P. Schorer, *A Solution to the 3x + 1 Problem.* `http://www.occampress.com/#3x+1`, 2009. papier retiré.

[71] M. Berkouk, *Démonstration de la suite de L. Collatz.* `http://vixra.org/abs/1507.0200`, 2015. 1507.0200v2.pdf.

[72] F. Baleh, *Collatz conjecture The trivial cycle is unique (because a Collatz sequence that becomes periodic converges).* `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01484740`, 2017. Collatz_Trivial_cycle uniqueness_V2.pdf.

[73] N. K.-A. Alahassa, *Arithmétique cantus, graphe de Syracuse, et preuve de la conjecture de Collatz.* Rapport technique, Département de Mathématiques et de Statistique, Université de Montréal, 2017. documentation/syracuse/syracuse2.pdf).

[74] O. Rozier, *Le problème de Syracuse étendu.* URL : `http://www.probleme-syracuse.fr`.

[75] R. Simonetto, *Conjecture de Syracuse : avancées inédites.* `https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01419948v1`, 2016.

[76] T. Tao, *The Collatz conjecture, Littlewood-Offord theory, and powers of 2 and 3.* `http://terrytao.wordpress.com/2011/08/25/the-collatz-conjecture-littlewood-offord-theory-and-powers-of-2-and-3/`, 2011. consulté : mars 2014 - blogTTao.pdf.

Annexes

Annexe 1 : A propos de la difficulté du problème

Guy (2010, [11]) et Tao (2011, [76]) montrent la difficulté du problème en le reliant à d'autres questions non résolues.

Mais une autre filière (Lagarias, 2015) montre pourquoi Erdös jugeait le problème difficile. Les travaux sur les carrés latins auto-orthogonaux SOLS [42] (c'est-à-dire dont la juxtaposition d'un carré et de sa transposée est un carré gréco-latin) avait montré l'intérêt de l'étude des orbites générées par des familles finies de fonctions affines (de plusieurs variables) R à coefficients entiers positifs. Cela revient aussi à étudier les semi-groupes (voire groupes) générées par de telles familles.

Klarner & Rado étudient la question suivante : étant donné un ensemble d'entiers $A = \{a_i\}$ quelles sont les caractéristiques du petit ensemble $T = \langle R : A\rangle \subset \mathbb{N}$ engendré à partir de A par itération des fonctions de R ?

Pour les fonctions à deux variables ou plus, ils notent que très souvent T contient une progression arithmétique et a donc une densité non nulle. Il apparaît qu'avec une seule variable c'est plus compliqué.

Etude de cas : $R = \{f_1 : x \mapsto 2x + 1; f_2 : x \mapsto 3x + 1\}$ engendre le semi-groupe de Klarner-Rado.

Question : l'orbite $\langle R : \{1\}\rangle = \{1, 3, 4, 7, 9, 10, 13, 15, 19, 21, 22, 27, 28, 31, 39, 40, 43...\}$ contient-elle une progression arithmétique infinie ?

Dès 1934, Rado et Erdös collaborent. Ils signeront ensemble dix-huit articles et publieront le théorème d'Erdös-Rado [43] généralisation du théorème de Ramsey et le théorème de Erdös-Ko-Rao [44]. Erdös répondra non à la question ci-dessus en montrant que l'orbite est de densité nulle.

Théorème (Erdös, 1972) [45] : Soient A ensemble non-vide d'entiers, $I \subset \mathbb{N}$, $m_i \in \mathbb{N} - \{0\}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in I$. Soit σ un nombre réel positif tel que $\alpha = \sum_{i\in I} 1/m_i^\sigma < 1$. Alors si $T = \langle\{m_i x + n_i\} : A\rangle$ on a pour tout $t \in \mathbb{N}$:

$$|T \cap [1, t]| <= \frac{1}{1-\alpha} \sum_{a\in[1,t]\cap A} (\frac{t}{a})^\sigma$$

Corollaire : Si de plus $\sigma < 1$ et l'ensemble A est soit fini soit la série $\sum_{a\in A} a^{-\sigma}$ est convergente, alors T est de densité nulle et il n'est ni une réunion finie de progressions arithmétiques infinies (per-set) ni presque per-set.

Cas particulier : $T = \langle\{2x + 1, 3x + 1\} : \{1\}\rangle$ est de densité 0 et ne contient donc pas de progression arithmétique infinie.

42. Théorème (Brayton, Coppersmith, Hoffman, 1974) : Il existe des SOLS de tout ordre sauf 2, 3 et 6.
43. https ://en.wikipedia.org/wiki/Erd%C5%91s%E2%80%93Rado_theorem
44. https ://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_d'Erd%C5%91s-Ko-Rado
45. Dans la version Théorème 8 dans Klarner & Rado (1974).

Annexe 2 : Calcul de $N(m)$ selon $m \pmod{16}$, m impair

$m \equiv 1 \pmod 4$

De façon globale : $m = 1 + 4n : N(m) = [3 + 12n + 1] = [1 + 3n]$

- $m \equiv 1, 9 \pmod{16} : m = 1 + 8n : N(m) = [3 + 24n + 1] = 1 + 6n$
- $m \equiv 5 \mod 16 : m = 5 + 16n : N(m) = [15 + 48n + 1] = [1 + 3n]$
- $m \equiv 13 \mod 16 : m = 13 + 16n : N(m) = [39 + 48n + 1] = 5 + 6n$

Après une itération, tous les valeurs se trouvent être inférieures à la valeur de départ.

$m \equiv 3 \pmod 4$

De façon globale : $m = 3 + 4n : N(m) = [9 + 12n + 1] = 5 + 6n$

- $m \equiv 3 \pmod{16} : m = 3 + 16n; N(m) = 5 + 24n; N(24n + 5) = 2 + 9n$
- $m \equiv 7 \pmod{16} : m = 7 + 16n; N(m) = 11 + 24n; N(24n + 11) = [11 + 19n]$
- $m \equiv 11 \pmod{16} : m = 11 + 16n; N(m) = 17 + 24n; N(24n + 17) = 13 + 18n$
- $m \equiv 15 \pmod{16} : m = 15 + 16n; N(m) = 23 + 24n; N(24n + 23) = 35 + 36n$

Avec deux itérations, seul le cas $3 + 16n$ se trouve forcément être inférieur à la valeur de départ.

Pour 7 classes sur 8 (7 valeurs de l'offset), la valeur de $N(m)$ peut être calculée précisément. Pour la valeur 5 de l'offset, la valeur de $N(m)$ dépend de la divisibilité de $1 + 3n$ par une puissance de 2.

Ces 8 classes peuvent se réunir en 4 classes :

- $m \equiv 3, 7, 11, 15 \pmod{16}$ ou $m \equiv 3 \pmod 4 : N(3+4n) = [3(3+4n)+1] = [10+12n] = 5 + 6n$
- $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ ou $m \equiv 1 \pmod 8 : N(1+8n) = [3(1+8n)+1] = [4+24n] = 1+6n$
- $m \equiv 13 \pmod{16} : N(13 + 16n) = [3(13 + 16n) + 1] = [40 + 48n] = 5 + 6n$
- $\equiv 5 \pmod{16} : N(5 + 16n) = [16 + 48n] = [1 + 3n]$

Sur les 3 premières classes N est une application linéaire représentée en respectivement rouge, bleu et vert sur le graphe de la figure 2 . Par contre, le comportement de N sur la 4e classe est plus « chaotique » (en noir sur la figure). Cette dernière classe peut être partitionnée pour obtenir des comportements « réguliers » de N et ceci à l'infini, processus que l'on rencontre fréquemment dans ce problème.

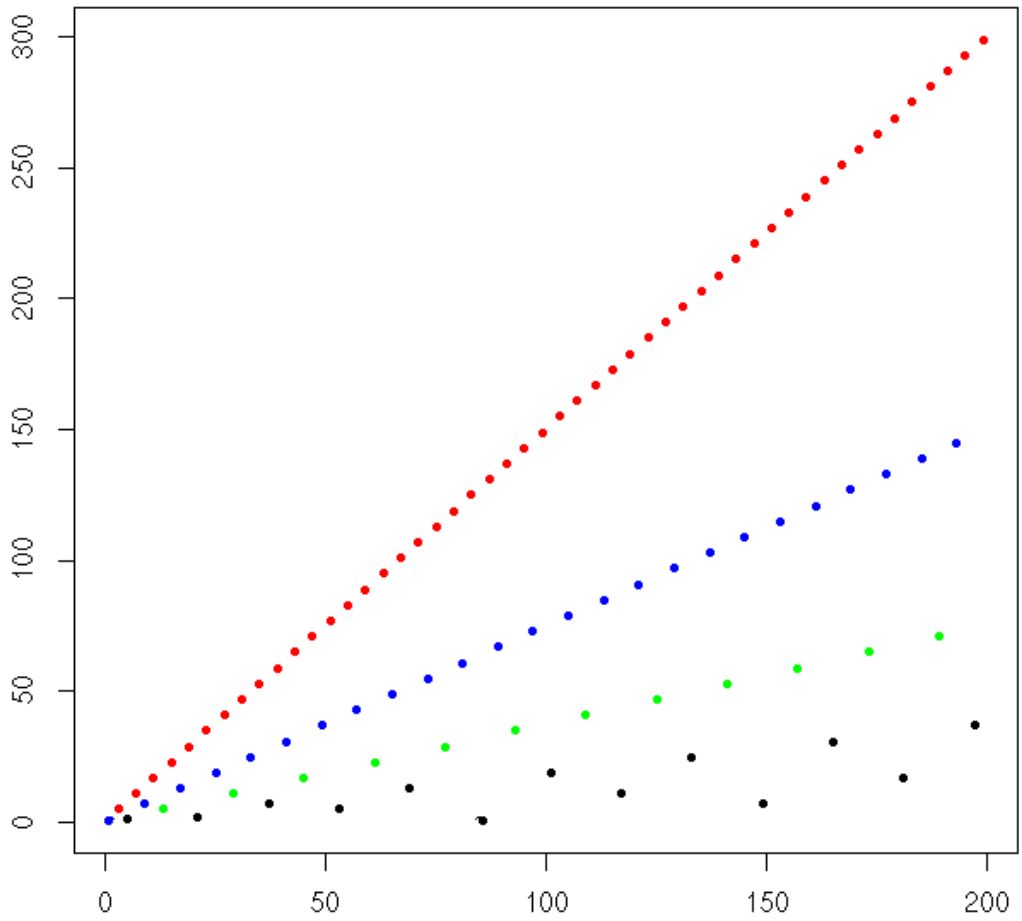

FIGURE 2 – Représentation graphique de N

On note que pour $m \equiv 1, 9 \pmod{16}$ on a : $N(m) = (3m + 1)/4$. Des expressions semblables apparaissent dans les autres cas.

Annexe 3 : Les ensembles F_s et la répartition des prédécesseurs directs

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		5		21		85		341		1365
3												
5	3		13		53		213		853		3413	
7		9		37		149		597		2389		9557
9												
11	7		29		117		469		1877		7509	
13		17		69		277		1109		4437		17749
15												
17	11		45		181		725		2901		11605	
19		25		101		405		1621		6485		25941
21												
23	15		61		245		981		3925		15701	
25		33		133		533		2133		8533		34133
27												
29	19		77		309		1237		4949		19797	
31		41		165		661		2645		10581		42325
33												
35	23		93		373		1493		5973		23893	
37		49		197		789		3157		12629		50517
39												

FIGURE 3 – Les prédécesseurs directs, selon N, des nombres impairs

Dans la figure 3 la colonne s contiennent les éléments de F_s. Par la fonction N les éléments d'une ligne sont les prédécesseurs directs du label tout à gauche.

En prenant les valeurs $\pmod 8$ on obtient une représentation graphique parlante (figure 4) d'un résultat déjà évoqué qui montre visuellement que la densité de F_1 (1e colonne) dans les nombres impairs est de $1/2$, celle de F_2 (2e colonne) est de $1/4$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		5		5		5		5		5
3												
5	3		5		5		5		5		5	
7		1		5		5		5		5		5
9												
11	7		5		5		5		5		5	
13		1		5		5		5		5		5
15												
17	3		5		5		5		5		5	
19		1		5		5		5		5		5
21												
23	7		5		5		5		5		5	
25		1		5		5		5		5		5
27												
29	3		5		5		5		5		5	
31		1		5		5		5		5		5
33												
35	7		5		5		5		5		5	
37		1		5		5		5		5		5
39												

FIGURE 4 – Les valeurs (mod 8) des ensembles F_s

Annexe 4 : Relation entre les partitions F_s et S_i

3	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		1		5		21		85		341		1365
3												
5	3		13		53		213		853		3413	
7		9		37		149		597		2389		9557
9												
11	7		29		117		469		1877		7509	
13		17		69		277		1109		4437		17749
15												
17	11		45		181		725		2901		11605	
19		25		101		405		1621		6485		25941
21												
23	15		61		245		981		3925		15701	
25		33		133		533		2133		8533		34133
27												
29	19		77		309		1237		4949		19797	
31		41		165		661		2645		10581		42325
33												
35	23		93		373		1493		5973		23893	
37		49		197		789		3157		12629		50517
39												

FIGURE 5 – Les valeurs réparties dans les ensemble S_i

Dans la figure 3 la colonne s contiennent les éléments de F_s. Par la fonction N les éléments d'une ligne ont pour image la valeur du label tout à gauche.

Les éléments des ensembles S_i sont représentés par des couleurs :

- $S_1 = \{2^{2n-1}(4k+1) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en bleu
- $S_2 = \{2^{2n}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en vert
- $S_3 = \{2^{2n-1}(4k+3) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en rouge
- $S_4 = \{2^{2n}(4k+1) - 1 : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\}$ en jaune

On voit sur la figure (ce qui se montre d'ailleurs aisément) que :

$F_2 \subset S_1$, $F_i \subset S_3$ pour $i > 2$, $F_1 \cap S_i \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2, 3, 4$

Par ailleurs :

- $F_1 \cap S_1 = \{2^{2n-1}(4k+1) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $S_2 \subset F_1$
- $F_1 \cap S_3 = \{2^{2n-1}(4k+3) - 1 \ : k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2\}$
- $S_4 \subset F_1$

Annexe 5 : Partition des nombres impairs $(2\mathbb{N}+1)$ selon N : les familles F_{ij}

F_s est l'ensemble m des nombres impairs tels que $N(m) = 2^s m'$ où m' est impair. On a :

s pair : $F_s = \{\frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N}\}$

Exemples :

- $s = 2$; $F_2 = \{1, 9, 17, 25, \ldots\}$
- $s = 4$; $F_4 = \{5, 37, 69, \ldots\}$
- $s = 6$; $F_6 = \{21, 149, \ldots\}$

$N(\frac{2^s-1}{3} + 2^{s+1}k) = 1 + 6k$

s impair : $F_s = \{2^s + \frac{2^{s+1}-1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N}\} = \{\frac{5\times 2^s-1}{3} + 2^{s+1}k, k \in \mathbb{N}\}$

Exemples :

- $s = 1$; $F_1 = \{3, 7, 11, 15, \ldots\}$
- $s = 3$; $F_3 = \{13, 29, 42, \ldots\}$
- $s = 5$; $F_5 = \{53, 117, 181, \ldots\}$

$N(\frac{5\times 2^s-1}{3} + 2^{s+1}k) = 5 + 6k$

Par définition $N(m) = (3m+1)/2^s$ pour $m \in F_s$.

Notation générale : $F_s = \{t_s + km_s, k \in \mathbb{N}\}$

Proposition :

1. $m_s = 2^{s+1}$
2. pour s impair $t_s = (5 \times 2^s - 1)/3$; pour s pair $t_s = (2^{s+1} - 1)/3$
3. pour s impair : $t_s = t_{s-1} + 3 \times 2^{s-1}$; pour s pair : $t_s = t_{s-1} - 2^{s-1}$
4. $t_{2s+1} = 10t_{2s} + 3$

Démonstration du point 4) :

$$10t_{2s} + 3 = 10\frac{2^{2s}-1}{3} + 3 = \frac{10 \times 2^{2s} - 10 + 9}{3} = \frac{5 \times 2^{2s+1} - 1}{3} = t_{2s+1}$$

QED

On peut continuer le procédé et chercher $F_{i,j}$ les éléments de F_i dont l'image par N est dans F_j. Par exemple : $F_{2,5}$: éléments m de F_2 dont $N(m)$ est dans F_5 .

Les éléments de F_2 sont de la forme $m = 1 + 8k$. $N(1 + 8k) = 1 + 6k$ doit appartenir à F_5 ; donc : $1 + 6k \equiv 53 \pmod{64}$. En développant :

$3k = 26 + 32k'; k' \equiv 2 \pmod 3; k' = 2 + 3k''; 3k = 26 + 32(2 + 3k''); k = 30 + 32k''$

Finalement : $m = 1 + 8k = 1 + 8(30 + 32k'') = 241 + 256k''$ et $F_{2,5} = \{m : m \equiv 241 \pmod{28}\}$

De manière générale : $F_{i,j} = \{m : m = t_{i,j} + km_{i,j}$ avec $k \in \mathbb{N}\}$

Avec : $m_{i,j} = 2^{i+j+1}$

Proposition (formules pour calculer les t_{ij}) :

Formules pour $t_{1,j}$ et $t_{2,j}$:

j pair :

$$t_{1,j} \equiv 3 + \frac{8}{9}(2^{j-2} - 2^{j+3} + 2^{2j-1} - 4) \pmod{2^{j+2}}$$

$j \equiv 0 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} + 2^{j} + 2^{j+1} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 2 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 4 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{16}{9}(2^{j-2} + 2^{j-1} + 2^{j} - 1) \pmod{2^{j+3}}$$

j impair :

$$t_{1,j} \equiv 3 + \frac{4}{9}(2^{j-1} + 2^{j+1} + 2^{j+2} + 2^{2j} - 8) \pmod{2^{j+2}}$$

$j \equiv 3 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j+1} + 2^{j-1} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 1 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j-1} + 2^{j} + 2^{j+2} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

$j \equiv 5 \pmod 6$

$$t_{2,j} \equiv 1 + \frac{8}{9}(2^{j-1} + 2^{j+3} - 2) \pmod{2^{j+3}}$$

Récurrence de ligne : $t_{i+2,j} = 4t_{i,j} + 1$

Démonstration : Le calcul suit la méthode utilisée pour le calcul de $F_{2,5}$. Exemple de calcul pour j pair et $j \equiv 2 \pmod 3$ ($j \equiv 2 \pmod 6$)

$t_{2,j} = 1 + 8k$; $N(t_{2,j}) = 1 + 6k \in F_j$; $1 + 6k = (2^s - 1)/3 + k'2^{s+1}$

$j \equiv 2 \pmod 3 \Rightarrow (2^s - 1)/3 \equiv 1 \pmod{()3}$ et donc

$1 \equiv 1 - k' \pmod 3$; $k' \equiv 0 \pmod 3$

$1 + 6k = (2^s - 1)/3 + 3k''2^{s+1}$

$6k = (2^s - 4)/3 + 3k''2^{s+1}$

$2k = (2^s - 4)/9 + k''2^{s+1}$

$t_{2,j} = 1 + (16/9)(2^{s-2} - 1) + k''2^{s+3}$

La formule de récurrence découle de la propriété d'invariance de N par $4m + 1$.
QED

	$F_{.1}$	$F_{.2}$	$F_{.3}$	$F_{.4}$	$F_{.5}$	$F_{.6}$	$F_{.7}$	$F_{.8}$	$F_{.9}$	$F_{.10}$	T
F_1	7	11	19	3	35	99	483	739	1251	227	3 (4)
F_2	9	1	17	49	241	369	625	113	1137	3185	1 (8)
F_3	29	45	77	13	141	397	1933	2957	5005	909	13 (16)
F_4	37	5	69	197	965	1477	2501	453	4549	12741	5 (32)
F_5	117	181	309	53	565	1589	7733	11829	20021	3637	53 (64)
F_6	149	21	277	789	3861	5909	10005	1813	18197	50965	21 (128)
F_7	469	725	1237	213	2261	6357	30933	47317	80085	14549	213
F_8	597	85	1109	3157	15445	23637	40021	7253	72789	203861	85
F_9	1877	2901	4949	853	9045	25429	123733	189269	320341	58197	853
F_{10}	2389	341	4437	12629	61781	94549	160085	29013	291157	815445	341
F_{11}	7509	11605	19797	3413	36181	101717	494933	757077	1281365	232789	3413
F_{12}	9557	1365	17749	50517	247125	378197	640341	116053	1164629	3261781	1365
F_{13}	30037	46421	79189	13653	144725	406869	1979733	3028309	5125461	931157	13653

TABLE 3 – Table des $t_{i,j}$ (offset)

Les ensembles F_s comme les ensembles $F_{i,j}$ fournissent une partition des nombres entiers impairs en progressions arithmétiques infinies de raison les puissances de 2.

Annexe 5a : Suites basées sur $x + d$ d impair et $3x + 3$

Suites basées sur la fonction de récurrence $x + d$ avec d impair

La fonction est définie de façon habituelle par :

$$S = S_d(m) = \begin{cases} m/2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ (m+d)/2 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition : (i) $S(d) = d$; (ii) $S(m) < d$ si $m < d$; (iii) $S(m) < m$ si $m > d$

Démonstration :

(i) $S(d) = (d + d)/2 = d$

(ii) $S(m) = (m + d)/2 < 2d/2 = d$ si $m < d$

(iii) $m > d \Rightarrow 2m > m + d \Rightarrow S(m) \leq (m + d)/2 < m$

QED

Conséquence : La suite $(S_d^{(k)}(m))$ est bornée par $\max(d, m)$. Toutes les trajectoires aboutissent donc sur un cycle.

Exemple : $x + 57$

La trajectoire de 1 est un cycle :

(1, 29, 43, 50, 25, 41, 49, 53, 55, 56, 28, 14, 7, 32, 16, 8, 4, 2, 1, ...)

La trajectoire de 3 se termine par le cycle sur 5 :

(3, 30, 15, 36, 18, 9, 33, 45, 46, 23, 40, 20, 10, 5, ...)

La trajectoire de 5 est un cycle :

(5 31 44 22 11 34 17 37 47 52 26 13 35 46 23 40 20 10 5)

Cet exemple montre aussi l'insuffisance de l'heuristique développée à la page 16.

Suites basées sur la fonction de récurrence $3x + 3$

$$N(m) = \frac{3m + 3}{2^{\nu(3m+3)}}$$

Cette suite est intéressante, proche de $3x+1$ (vraisemblablement convergente vers 3 pour toute valeur de départ) mais avec des paramètres (figure 6) plus aisément maîtrisables. Toutes les valeurs de la suite, à l'exception du germe, sont évidemment des multiples de 3 (le tableau des prédécesseurs équivalent à celui de l'annexe 3, n'a des lignes que face aux multiples de 3, seuls les multiples de 3 ont des prédécesseurs).

Le tableau de la figure 6 réparti l'ensemble des germes, d'une part en les ensembles $F_s = \{m : \nu(m) = s\}$ (les colonnes) et d'autre part en les ensembles S_i (à ne pas les confondre avec ceux de l'annexe 4). Tous les germe de S_m génèrent la même suite (représentée tout à droite du tableau).

Le tableau est engendré par $s_{0,0} = 1$ et les deux relations de récurrences :

n / m	0	1	2	3	4	5	...	m		
0	1	3	7	15	31	63	...	$s_{0,m}$	S_0	3, 3, ...
1	5	11	23	47	95	191	...	$s_{1,m}$	S_1	9, 15, ...
2	9	19	39	79	159	319	...	$s_{2,m}$	S_2	15, 3, ...
3	13	27	55	111	223	447	...	$s_{3,m}$	S_3	21, 33, ...
4	17	35	71	143	287	575	...	$s_{4,m}$	S_4	27, 21, ...
5	17+4	35+8	71+16	143+32	287+64	575+128	...	$s_{5,m}$	S_5	33, 51, ...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
n	4n+1	$+2(2n+1)$	$+2^2(2n+1)$	$+2^3(2n+1)$	$+2^4(2n+1)$	$+2^5(2n+1)$	...	$s_{n,m}$	S_n	[3(4n+2)]
	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	...	F_{m+1}		

FIGURE 6 – Découpages de $2\mathbb{N}+$ selon $3x+3$

- $s_{n,m} = s_{n-1,m} + 2^{m+2}$
- $s_{n,m} = s_{n,m-1} + 2^m(2n+1)$

Mais il est facile d'obtenir une expression simple pour $s_{n,m}$:

$$s_{n,m} = 4n+1+2(2n+1)+2^2(2n+1)+\ldots+2^m(2n+1) = 4n+1+2(2n+1)(2^m-1)$$

Finalement : $s_{n,m} = 2^{m+1}(2n+1)-1$

Par ailleurs,

$$N^{(q)}(x) = \frac{3^q x + 3^q + 3^{q-1}2^{k_1} + 3^{q-2}2^{k_1+k_2} + \ldots + 2^{k_1+\ldots+k_{q-1}}}{2^s}$$

avec $k_i = \nu(N^{(i-1)}(m)$ et $s = k_1 + \ldots + k_q$

Pour démontrer, par récurrence, la conjecture $3x+3$, il « suffirait » de montrer que pour tout n il existe q, $(k_i)_{i=1,\ldots,q}$, m et $n' < n$ tels que :

$$N^{(q)}(4n+1) = s_{n',m}$$

Exemple : La suite de $13 = 4 \cdot 3 + 1$ aboutit sur un élément $s_{n',m} \in S_{n'}$ avec $n' < 3$

Dans ce cas, $n = 3$, la solution est : $q = 4$, $n' = 2$, $m = 2$ et $(k_i) = (1,1,1,2)$ $(s = 5)$.

En effet : $T^{(4)}(13) = 39 = s_{2,2}$.

Annexe 6 : Illustration des prédécesseurs de 1

Cette figure provient de la page `http://www.jasondavies.com/collatz-graph/` où elle est produite de façon dynamique.

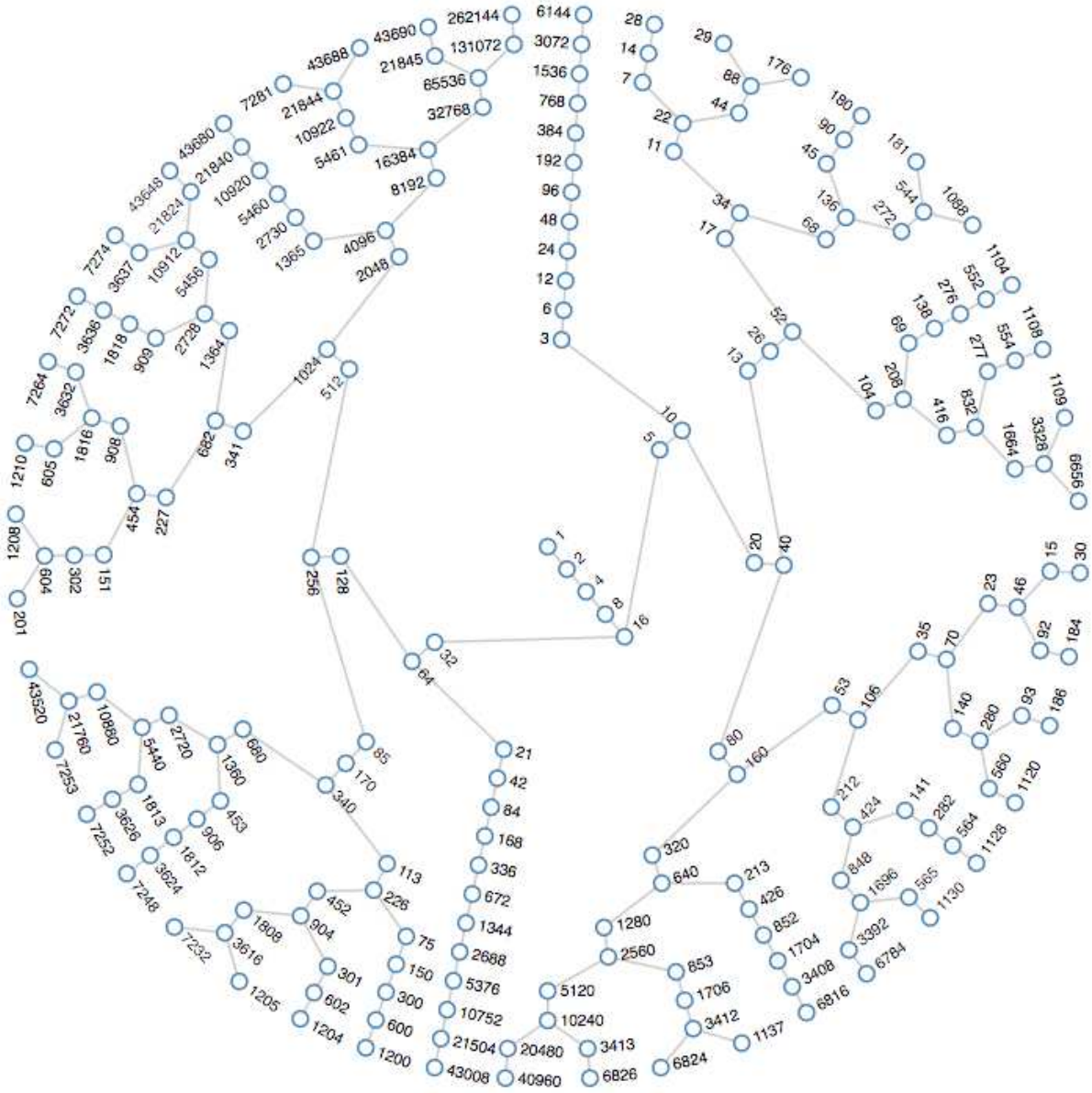

FIGURE 7 – Prédécesseurs de 1

Annexe 7 : Quelques cycles pour $3x + 13$

n	s	(k_i)	Cycle
5	8	1,1,1,1,4	211 323 491 743 1121 211
5	8	1,1,1,3,2	259 395 599 905 341 259
5	8	1,1,1,2,3	227 347 527 797 601 227
5	8	1,1,2,2,2	283 431 653 493 373 283
5	8	1,2,1,2,2	319 485 367 557 421 319

TABLE 4 – Quelques cycles entiers et primitifs pour $3x + 13$

Le théorème de Dhiraj ([2]) permet de trouver les 3 premiers. Les 4 autres sont trouvés facilement en utilisant la formule donnant un point de retour.

Si $n \leq s$ entiers tels que $2^s - a^n = b$ (ou diviseur de b) alors toutes les suites (k_i) de longueur n et de somme s donnent lieu à un cycle entier de $ax + b$. Deux suites de (k_i) différentes à une permutation circulaires près donnent des cycles différents. Ces cycles sont primitifs puisque 13 premier ne divise pas les éléments du cycle (si c'était le cas on aurait un cycle non trivial pour $3x + 1$.

Sinon le cycle est entier ou rationnel selon que $b \times num/(2^s - a^n)$ est entier ou non. num étant un nombre entier (somme de produit de puissances de 2 et de puissances de a).

Quelques outils en R ou Prolog [46] ont été créés pour générer des suites de Collatz ou de calculer quelques invariants.

Exemples :

Le commande R 'SyrNd(283,13,10)' calcule 10 valeurs successives de la suite N-Collatz générée par $3x + 13$ et les exposants (k_i) de la puissance de 2 utilisée comme dividende à chaque étape.

Résultat :

[[1]] [1] 283 431 653 493 373 283 431 653 493 373

[[2]] [1] 0 1 1 2 2 2 1 1 2 2

La commande R 'pt.retour(3,13,c(1,1,2,2,2))' donne comme résultat : 283 13, valeurs à partir desquelles un point de retour pour $3x + 13$ et (k_i) peut être calculé : $x_0 = 13 * 283/13 = 283$

En SWI-Prolog la commande 'syracuseQR(S,Q,R,N,Len)' calcule 'Len' termes de la suite $Qx + R$ de type 'S' d'origine 'N'.

46. disponibles chez les auteurs.

Annexe 8 : FRACTRAN

Principe

Un programme FRACTRAN peut être vu comme le fonctionnement d'une machine à registre dont les mémoires sont constituées des exposants des nombres premiers en lesquels se décomposent l'état courant n.

Cette technique reprend l'idée utilisée par Gödel où un nombre naturel n peut encoder un nombre arbitraire de nombres naturels variables. La valeur de chaque variable est l'exposant d'un nombre premier apparaissant dans la décomposition de n en facteurs premiers. Par exemple, l'entier $60 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1$ représente l'état de 3 variables $v2$, $v3$ et $v5$ valant respectivement 2, 1 et 1. Toutes les autres variables potentielles ($v7$, $v11$, etc.) ont 0 pour valeur.

Un programme FRACTRAN est une liste ordonnée de fractions irréductibles (on peut aussi utiliser un programme constitué de plusieurs lignes voir Conway, 1972 [34]). Chaque fraction représente une instruction de test et de modification des valeurs des variables. Appliquer un programme à une entrée n c'est recherche la première fraction de la liste telle que son dénominateur divise n. Le produit de n par la fraction constitue le nouveau nombre (entier) auquel on applique le même processus. Si aucune fraction ne convient, le programme s'arrête.

Par exemple $f_1 = \frac{21}{20} = \frac{3\times7}{2^2\times5^1}$ teste si $v2$ et $v5$ sont supérieures ou égales respectivement à 2 et 1 auquel cas la division est effectuée (ce qui revient à une soustraction au niveau des exposants, c'est-à-dire des valeurs des variables) puis il y a multiplication par 3 et 7 ce qui revient à ajouter 1 aux variables $v3$ et $v7$. Par exemple :

$$60 \times f_1 = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 \times \frac{3 \times 7}{2^2 \times 5^1} = 3^2 \times 7^1$$

Ainsi les seules instructions de FRACTRAN sont :
- les tests conjugués avec des décrémentations
- les incrémententations

Il n'y a pas de test indépendamment de décrémentations. Il n'est pas possible, par exemple, de tester directement si une variable est nulle ou pas.

Exemple

Exemple de programme : $(\frac{3}{10}, \frac{4}{3})$

Si on applique ce programme à 14, la procédure s'arrête immédiatement. Si on l'applique à 15 on obtient successivement 20, puis 6, puis 8 et la procédure s'arrête.

Le programme d'addition : $(\frac{2}{3})$ en partant de $2^a \times 3^b$ on obtient 2^{a+b} .

FRACTRAN et vector game

Un *vector game* est donné par par une liste finie de vecteurs entiers (le programme), tous de la même dimension. Le jeu part d'un vecteur x de composantes entières positives. On

additionne à x le premier vecteur de la liste qui préserve la « positivité »de toutes les composantes.

Le processus se répète autant de fois que possible.

Exemple : En partant de x = (a,b) le programme contentant une seule instruction (1,-1) on abouti à (a+b, 0).

On voit facilement en numérotant les composants des vecteurs par la suite des nombres premiers qu'on passe facilement d'un *vector game* à un programme FRACTRAN et vice-versa.

Annexe 9 : Les nombres p-adiques

Les nombres 2-adiques

Il y a plusieurs façons de définir les nombres 2-adiques. On peut par exemple considérer $\mathbb{Q}$ avec la distance donnée par la norme $|2^k(n/m)| = 2^{-k}$ où n et m sont deux entiers impairs. Exemple : $|8| = 1/8$, $|3/20| = 4$. Cette distance est ultramétrique.

Le corps des nombres 2-adiques $\mathbb{Q}_2$ est le complété de Cauchy de $\mathbb{Q}$ avec la norme 2-adique. $\mathbb{Z}_2$ est l'ensemble des nombres de norme inférieure à 1 (boule unité compact de $\mathbb{Q}_2$). Il n'est pas difficile de vérifier que tout élément de $\mathbb{Z}_2$ peut être représenté par une série (développement de Hensel) :

$\alpha = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots$ avec les a_i, 2-digits de α valant 0 ou 1. On peut écrire simplement $(a_0, a_1, \ldots)$.

Pour un élément de $\mathbb{Q}_2$, la série comprend un nombre fini de puissances négatives de 2.

L'addition et le multiplication de $\mathbb{Q}$ s'étendent aux nombres 2-adiques et s'exécutent en étendant de façon naturelle l'addition et les multiplication des sommes finies (qui correspondent à $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_2$) aux sommes infinies.

Exemples :

Développement de Hensel de 3 : $3 = 1 + 2$ ou $(1, 1, 0, 0, 0, \ldots)$

Développement de Hensel de -1 : $\sum_{i \geq 0} 2^i$ ou $(1, 1, 1, \ldots)$

Développement de Hensel de 1/3 : $1 + \sum_{i \geq 0} 2^{2i+1}$

Développement de Hensel de -1/3 : $\sum_{i \geq 0} 2^{2i+1}$

On peut vérifier que $3 \times 1/3 = 1$:

$(1, 1, 0, 0, 0, \ldots) \times (1, 1, 0, 1, \ldots) = (1, 1, 0, 1, \ldots) + (0, 1, 1, 0, 1, \ldots) = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ QED

Une base d'ouverts autour de α est donnée par les disques $B_k(\alpha) = \{\beta : |\beta - \alpha| <= 2^{-k}\} = \{\beta : \beta \equiv \alpha \pmod{2^k}\}$ ($\beta \equiv \alpha \pmod{2^k}$ signifie que les 2-digits de α et β sont égaux jusqu'au k-1 nième.

Une mesure de Haar (invariante pour l'addition) est définie par $\mu_2(B_k(\alpha)) = 2^{-k}$. En particulier $\mu_2(\mathbb{Z}_2) = 1$.

Les nombres p-adiques

Il se définissent de la même manière en utilisant p nombre premier.

Dans $\mathbb{Q}_p$: $-1 = \sum_{i=0}^{\infty} (p-1)p^i$.

L'ensemble des fractions de $\mathbb{Q}$ dont le dénominateur est premier avec p est contenu dans $\mathbb{Z}_p$.

Annexe 10 : Discussion sur le Net

On trouve dans plusieurs forums des discussions relatives à la suite de Syracuse. Ce sujet mériterait une étude spéciale liée aux représentations des mathématiques chez le *grand-public*. Voici quelques extraits assez significatifs.

Une annonce de « démonstration » [47]

Himlaya : Bonjour. J'écris sur ce forum parce que je pense, après bien du mal, avoir réussi à démontrer la conjecture de Syracuse (je possède une licence mathématiques). Cependant je ne peut pas m'empêcher de penser que je me suis peut-être trompé quelque part. Qui plus est je ne sais pas comment m'y prendre pour publier ma démonstration avec confiance. Quelqu'un pourrait-il me renseigner ?... Merci d'avance pour vos réponses. (31.01.09)

Modo Ferox : Point culminant de la chaîne de l'Himalaya...Il y a déjà eu Titus (à qui je n'ai toujours pas répondu) qui pensait avoir démontré cette conjecture : as-tu lu cette discussion : http ://www.bibmath.net/forums/viewtopic.php ?id=2232 ?

Qu'entends-tu par (..) publier ma démonstration avec confiance ? Que crains-tu ?

* Qu'on ne te prenne pas au sérieux ? Là, détrompe-toi, même si tu dois être bien conscient qu'a priori, on est dans le doute, lequel doute est salutaire en maths. As-tu déjà soumis ta démo à quelqu'un pour qu'il la lise avec un oeil différent de celui de Chimène ?

* Qu'on te vole ta découverte s'il s'avère que tu mérites la médaille FIELDS ? Dans ce cas, faire un double de ta démo, la déposer devant huissier chez un notaire qui cachètera l'enveloppe...

Sinon, vas-y lance-toi... A te lire (31.01.09)

(La démonstration a été publiée mais n'est plus disponible)

Une autre annonce de « démonstration » [48]

Alkat : Voici ma demonstration cfr. piece jointe et si vous avez quelque pour commenter mais poliment. Pour trouver ce fichier veuillez consulter hal.archives-ouvertes.fr

Deedee81 : Salut,

C'est particulièrement court. Ou ce sera vite démonté (*) ou alors c'est sacrément génial.

(*) je n'ai malheureusement plus le temps aujourd'hui et je parie une choucroute que ce sera fait par quelqu'un d'autre avant demain :)

EDIT en matière de politesse : bienvenue sur Futura, et n'oublie pas toi-même de dire bonjour ! ! ! ! (voir point 2 de la charte du Forum).

Pelkin : Bonjour,

47. http ://www.bibmath.net/forums/viewtopic.php ?id=2384
48. http ://forums.futura-sciences.com/mathematiques-superieur/682244-preuve-de-conjecture-de-syracuse.html

Tu parles, cela foire déjà à la deuxième ligne avant même que la démonstration ne démarre, déjà pas foutu d'écrire correctement la conjecture.

gg0 : Bonjour Alkat,

Une démonstration est faite pour convaincre. Donc elle doit être compréhensible par ceux auxquels elle s'adresse. A qui est adressée cette démonstration ? Autrement dit, qui sait de quoi tu parles au début avec tes droites "qui ne contiennent que des nombres premiers" ?

Car pour le commun des mortels, et même pour le mathématicien de base, une droite contient des points, pas des nombres. Même premiers.

Donc, pour que tu sois compris, il va falloir commencer par définir les objets dont tu parles. Employer des mots du vocabulaire mathématique n'est pas faire des mathématiques.

Dernière chose : "par généralisation ..." (fin de la "démonstration") est un moyen classique de ne rien prouver. Soit on sait généraliser, et on le prouve par un raisonnement et/ou un calcul, soit on n'a rien fait.

Mais comme ce qui précède est incompréhensible (pourquoi les triangles sont semblables ? Ce n'est pas vrai sur le dessin. Quel rapport avec la suite de Syracuse ? etc.), ce n'est même pas grave : Il n'y a aucune démonstration.

Désolé !

Mediat : Bonjour,

Tout a été dit, soit alkat publie une nouvelle version convaincante, prenant en compte les différentes remarques faites jusqu'ici, soit ce fil sera fermé et vite oublié.

Médiat, pour la modération.

Alkat : Merci pour la lucidite, la cathete du plus petit triangle est 1,5 et les coordonnees sont parties faisantes du cote du triangle, dans ma graduation 0 n'existe pas cfr dessin, #univers la cotes sont proportionnels avec pour incertitude k+ ou - epsilon avec epsilon etant dans l'intervalle ferme de 0 et 1 et les 3 proprietes restantes de la simulitude des triangles sont respectees

gg0 : Tu racontes n'importe quoi !

On a tous vu que tes axes commencent à 1. Les côtés de triangles semblables sont proportionnels, ce n'est pas le cas quand ces côtés mesurent 4-1 et 2-1 pour l'un et 26-1 et 17-1 pour l'autre. Tu peux baratiner tant que tu veux, ça ne prouve pas quoi que ce soit. Les preuves mathématiques sont vérifiables, on y exclut donc toute explication non mathématique. Toi, tu n'as encore donné aucune explication mathématique.

Ne t'étonnes pas si ce sujet est fermé : Tu n'as rien fait pour être pris au sérieux. Sur certains forums mathématiques, tu aurais été blessé depuis longtemps par les réactions des gens sérieux. Ta demande " commenter mais poliment" montre que tu crains les réactions des autres. Mais pas assez pour essayer d'être sérieux toi-même.

Médiat : Ite missa est !

Si alkat se conforme à ma demande du message #12, il peut m'envoyer un Message privé, si cela en vaut la peine je rouvrirai ce fil avec joie.

Médiat pour la modération

Devenez célèbre avec la conjecture de Syracuse ! [49]

Belane : La conjecture de Syracuse est un problème mathématique dont l'énoncé est enfantin. Pourtant, personne n'a jamais pu confirmer ou infirmer cet énoncé.

La résolution de la conjecture de Poincaré par Grégory Perelman lui avait valu la médaille Fields et les 10 000 euros qui vont avec, qu'il avait d'ailleurs refusés en bloc. Alors, on ne sait jamais : tentez votre chance avec la conjecture de Syracuse !

(suit l'énoncé de la conjecture de Syracuse)

Conjecture de Syracuse démontrée ? [50]

Voici un échange bon enfant entre deux internautes qui semblent se connaître (ne serait-ce que de façon virtuelle). Des messages intermédiaires ont été supprimés.

babsgueye : Salut.

Je donne ici les grandes lignes de ma démonstration de la conjecture de Syracuse.

La suite de Syracuse d'un entier positif est définie de la manière suivante : on part de cet entier plus grand que zéro, s'il est pair, on le divise par deux ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En répétant l'opération on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun dépend de son précédent.

La conjecture de Syracuse dit que quelque soit l'entier n, la suite de Syracuse de n atteint 1 à partir d'un certain rang et qu'après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1, 4, 2, 1, 4, 2,...) se répète indéfiniment en cycle de longueur 3, appelé cycle trivial.

En fait j'ai montré que de n'importe quelle suite de Syracuse, on peut extraire une sous-suite décroissante. Cette sous-suite de nombres positifs étant minorée par 1, va donc l'atteindre et par définition de Syracuse, décrit le cycle trivial.

Pour n pair : la suite extraite est (U3k+1)k.

Pour n impair : la suite extraite est (U3k+2)k.

Qu'en pensez-vous ?

GaBuZoMeu : Que c'est faux, bien sûr.

babsgueye : T'es trop @GBZM. C'est la réponse que j'attendais de toi. Mais vérifie un peu.

GaBuZoMeu : Ta première affirmation (pour n pair) entraîne la deuxième (pour n impair) : en effet, dans une "suite de Syracuse", tout nombre impair est immédiatement suivi par un nombre pair.

Pour montrer que tes affirmations sont fausses, il suffit de montrer que la deuxième est fausse.

Tu n'as pas précisé si tu numérotes la suite à partir de 0 ou de 1. Peu importe, je vais donner un contre-exemple qui marche pour les deux cas.

Tu affirmes que la sous-suite U2,U5,U8,U11,... est décroissante.

49. http ://www.yabiladi.com/forum/devenez-celebre-avec-conjecture-syracuse-1-4763161.html
50. http ://www.les-mathematiques.net/phorum/read.php ?43,1181897,1182461

Considérons la suite de Syracuse 15, 46, 23, 70, 35, 106, 53, 160, ...

Elle commence bien par un nombre impair.

Supposons que tu commences à numéroter à partir de 0 : U0=15 et U2=23<U5=106. Pas très décroissant.

Supposons que tu commences à numéroter à partir de 1 : U1=15 et U5=35<U8=160. Pas très décroissant.

J'ai donc prouvé ma première déclaration : "C'est faux, bien sûr".

babsgueye : Pour cette fois t'as effectivement raison @GBZM ! J'ai laissé tomber les dénominateurs dans mes calculs. Merci. ça me semblait quand même trop facile pour résister tout ce temps !

Je vais quand même te dire sur ce fil que j'ai démontré La Conjecture de Legendre avec la fameuse diophantienne 2kk' + k + k'..

GaBuZoMeu : N'importe quoi, comme d'habitude ...

babsgueye : ha ha... ! Je fais mon apprentissage à Latex..pour bien te le sortir. Tu trouvera) redire je m'y attend.

Dom : Heu, juste une question, puis-je raconter n'importe quoi dans ce fil de discussion ?

ev : Voila une de tes conjectures qui pourrait bien se vérifier.

e.v.

[Aucune conjecture n'ayant été montrée, je ferme ce fil. –JLT]