



HAL
open science

Décomposition complète de Hodge-Helmholtz en mécanique discrète

Jean-Paul Caltagirone

► **To cite this version:**

Jean-Paul Caltagirone. Décomposition complète de Hodge-Helmholtz en mécanique discrète. 2017.
hal-01583505

HAL Id: hal-01583505

<https://hal.science/hal-01583505>

Preprint submitted on 7 Sep 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Décomposition complète de Hodge-Helmholtz en mécanique discrète

Jean-Paul Caltagirone

Université de Bordeaux
Institut de Mécanique et d'Ingénierie
Département TREFLE, UMR CNRS n° 5295
16 Avenue Pey-Berland, 33607 Pessac Cedex
calta@ipb.fr

Résumé :

La forme discrète du terme d'inertie finalise la décomposition formelle de Hodge-Helmholtz de l'équation du mouvement en mécanique discrète. L'ensemble des effets physiques lié au mouvement sous forme de termes de rotation-cisaillement, de gravitation, de compression, de tension de surface, d'inertie se présentent comme des sommes d'une composante solénoïdale et d'une autre irrotationnelle. La décomposition de l'inertie sous cette forme lève l'un des paradoxes essentiels de la mécanique des milieux continus lié à l'enstrophie locale non nulle d'un mouvement de rotation rigide. Cette étape de la dérivation de l'équation du mouvement discrète montre les *artefact* introduits par la notion de milieu continu et celle de la dérivation en un point.

Mots clés :

Principe d'Equivalence faible, décomposition de Hodge-Helmholtz, mécanique discrète, vecteur de Lamb, équations de Navier-Stokes, méthodes de projection, dissipation dans les écoulements turbulents

Complete Hodge-Helmholtz Decomposition in Discrete Mechanics

Abstract :

The discrete form of the inertia term completes the formal decomposition of Hodge-Helmholtz of the equation of motion in discrete mechanics. The set of physical effects related to motion in terms of rotation-shear, gravitation, compression, surface tension, inertia are presented as sums of one solenoidal and one of the other irrotational components. The decomposition of inertia in this form raises one of the essential paradoxes of continuum mechanics linked with the non-zero enstrophy of a rigid rotational motion. This step of the derivation of the discrete motion equation shows the *artefact* introduced by the notion of continuum and that of the derivation at a point.

Keywords :

Weak Equivalence Principle, Hodge-Helmholtz Decomposition, Discrete Mechanics, Lamb vector, Navier-Stokes equations, Projection Methods, Dissipation in turbulent flows

1 Introduction

La notion d'inertie déjà précisée dans les écrits de G. Galilée a été formalisée par I. Newton dans ses *Principia* avec sa première loi : "Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état". Les versions modernes dues à E. Mach et à bien d'autres auteurs font référence à des hypothèses variées mais la notion de force ou de somme des forces agissant sur le corps persiste. En effet les théories basées sur les notions de force, de vitesse, de masse se heurtent aux mêmes difficultés qui supposent ces quantités comme des variables absolues mesurables.

Dans le sens commun l'inertie d'un corps dépend de sa masse, un véhicule d'une tonne prendra une accélération plus faible qu'un autre de masse plus faible avec un même moteur. En

mécanique l'inertie ne fait son apparition que lorsqu'on observe un phénomène de l'extérieur, en coordonnées lagrangiennes l'accélération s'identifie à la dérivée en temps. Cette advection doit être appliquée à tous les milieux y compris le vide. Imaginons une enveloppe sphérique vide de matière qui se déplace à la vitesse \mathbf{V} par exemple sous l'effet de la pesanteur terrestre ; on n'a pas d'autre choix que d'advecter le vide à cette même vitesse dans une modélisation globale du phénomène. Le Principe d'Equivalence au sens faible permet de faire abstraction de la masse ou de la masse volumique dans l'équation du mouvement et de raisonner en terme d'accélération plutôt qu'en terme quantité de mouvement.

Le problème posé ici est celui de la forme des termes d'inertie dans une description eulérienne du mouvement. Alors que les autres effets présents dans l'équation du mouvement ont pu être modélisés par deux composantes à divergence et à rotationnel nuls le terme d'inertie $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ résiste à cette décomposition de Hodge-Helmholtz. En extrayant une partie à rotationnel nul, $\nabla (|\mathbf{V}|^2/2)$, le terme restant $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ n'en est pas pour autant un rotationnel d'un potentiel vecteur. *A priori* cette décomposition n'est pas possible en milieu continu. L'hypothèse de milieu continu est en fait très restrictive, il faut que non seulement que toutes les variables s'expriment en un point mais aussi que les équations de la physique soient vérifiées ponctuellement. Elle nécessite de plus le recours à des référentiels inertiels pour décrire le mouvement local du milieu et obère toute possibilité d'une action indirecte même située dans un voisinage immédiat du phénomène décrit.

L'équation du mouvement discrète [11] intègre la notion d'action du voisinage au premier ordre, à la fois sur les effets de compression et sur le cisaillement-rotation ; l'information dans tout le domaine est propagée à l'aide d'opérateurs discrets qui lient toutes les quantités au sein de topologies primale et duale. L'objectif est donc d'utiliser ce cadre formel pour réécrire le terme d'inertie en deux composantes solénoïdale et irrotationnelle.

2 Equation du mouvement discrète

Le paradigme de milieu continu omniprésent en physique depuis des siècles est abandonné ainsi que la notion de dérivation en un point. En mécanique discrète la modélisation physique des différents effets permet de dériver une équation du mouvement sur le seul segment Γ d'une topologie discrète [11]. Cette dérivation diffère sensiblement de celle des milieux continus où l'ensemble des quantités, variables, propriétés, ... sont définies en un point. Les principales hypothèses adoptées dans le cadre de cette formulation sont rappelées brièvement :

- deux topologies, primale et duale, permettent de localiser toutes les quantités (variables, accumulateurs, propriétés physiques) de manière cohérente ;
- l'accélération est une quantité absolue définie par la loi fondamentale de la mécanique comme la somme vectorielle ou géométrique des accélérations qui lui sont appliquées ;
- le principe d'équivalence faible (WEP) adopté permet d'exclure la masse du système d'équations ; celle-ci ne réapparaît lorsqu'on exprime une pression à partir du potentiel scalaire ϕ ;
- le principe d'accumulation (CAP) correspondant à la mise à jour des potentiels (ϕ, ψ) et des variables (\mathbf{V}, \mathbf{U}) est réalisée à partir des seuls opérateurs $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\nabla \times \mathbf{V}$;
- l'accélération est la somme de deux composantes, l'une solénoïdale et l'autre irrotationnelle (HHD) ;
- la vitesse, la force ainsi que bien d'autres variables relatives sont considérées comme de simples accumulateurs.

Les hypothèses ou postulats sont abandonnés :

- l'hypothèse de milieu continu et la notion de dérivation en un point ;
- l'hypothèse de l'équilibre local qui suppose que les variables thermodynamiques sont liées par une loi d'état ;

- les notions de référentiel absolu et de référentiel inertiel ;
- la limitation de la vitesse à la célérité du milieu, en général.

La dérivation de l'équation du mouvement discrète a déjà été réalisée [11], nous exposerons ici une version plus abrégée basée sur des projections géométriques des différentes actions. Comme l'induit la loi de la dynamique l'accélération d'un élément ou d'une particule est égale à la somme vectorielle de toutes les accélérations qui lui sont appliquées.

2.1 Description topologique

Le point de vue discret développé ici ne réduit pas la portée de l'exposé, la topologie élémentaire définie plus loin peut être observée à toutes les échelles sans qu'elle ne puisse être réduite à un point. Par exemple un cercle dont le rayon r décroît indéfiniment restera un cercle qui ne peut jamais être réduit à un point. La notion de milieu continu introduit au contraire une réduction de l'information qui doit être compensée par l'existence de référentiels, par l'utilisation de tenseurs du second ordre, etc. L'existence de deux topologies, primale et duale, permet par exemple de définir deux rotationnel distincts. L'ensemble des opérateurs nécessaires s'expriment très simplement sur une base géométrique cohérente.

Considérons le schéma de principe du fonctionnement de la loi du mouvement représenté sur la figure (1).

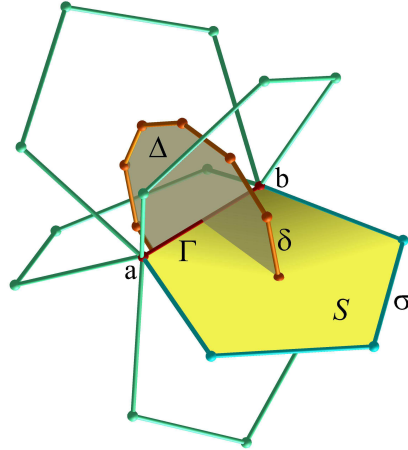


FIGURE 1. *Le moteur du mouvement : l'accélération du milieu le long du segment Γ est due à la différence du potentiel scalaire ϕ entre les extrémités du segment $[a, b]$ de vecteur unitaire \mathbf{t} , à l'action de la circulation du vecteur \mathbf{V} sur le contour des différentes facettes primales Σ induisant une accélération sur Γ et à la projection $\mathbf{g} \cdot \mathbf{t}$ des autres accélérations imposées.*

Ce qui est recherché c'est l'accélération γ affectée au segment Γ comme la dérivée matérielle de la vitesse \mathbf{W} . Ce dernier vecteur n'est pas connu explicitement mais ses composantes seront localisées sur chacun des segments σ de la topologie primale représentée par la facette \mathcal{S} . Le rotationnel du vecteur vitesse \mathbf{W} aura pour composante sur \mathcal{S} le rotationnel primal de ses composantes \mathbf{V} sur les différents segments σ de la facette \mathcal{S} . Ce rotationnel $\mathbf{\Omega} = \nabla \times \mathbf{V}$ sera calculé simplement comme la circulation des composantes et sera porté par la normale \mathbf{n} à la facette considérée. Il y aura autant de vecteurs $\mathbf{\Omega}$ que de facettes possédant le segment Γ en commun. Le rotationnel dual est quant à lui calculé comme la circulation des vecteurs $\mathbf{\Omega}$ le long des segments δ limitant la surface duale Δ . Cet opérateur projette ainsi l'action des composantes $\mathbf{\Omega}$ sur le segment Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} . Il est à noter que les vecteurs unitaires \mathbf{t} et \mathbf{n} sont orientés. L'accélération sera ainsi exprimée implicitement par les toutes les composantes \mathbf{V} du

stencil représenté sur la figure (1). L'action du terme inertiel, comme les autres actions sera projetée sur le segment orienté Γ .

Ainsi la loi du mouvement est assimilable à un moteur, l'accélération du milieu le long du segment Γ est définie principalement par deux actions. La première est due à la différence du potentiel entre les extrémités $[a, b]$ du segment, $\phi_b - \phi_a$; cette différence sur la longueur du segment d représente directement une accélération. La seconde action correspond au flux surfacique du vecteur $\mathbf{\Omega}$, c'est aussi une accélération. Comme on peut le voir l'aire de la surface duale Δ n'apparaît pas explicitement dans ces deux actions, seules les métriques de σ et δ sont utilisées pour calculer les circulations implicitement fonctions de \mathbf{V} . Le calcul de la divergence du vecteur \mathbf{W} est réalisé avec toutes ses composantes ayant l'extrémité a (ou b) en commun à partir du théorème de la divergence. Le potentiel ϕ et la divergence de la vitesse \mathbf{V} seront définis au même point, ce qui permettra une remontée naturelle du potentiel.

Même si la vitesse sur les segments \mathbf{V} est une variable secondaire relative elle permet de fédérer l'ensemble des actions de compression, de rotation et des effets extérieurs pour calculer l'accélération γ . D'ailleurs \mathbf{V} n'intervient qu'à travers les deux opérateurs $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\nabla \times \mathbf{V}$ qui ont une signification physique claire. L'abandon de la notion de vitesse en tant que variable fondamentale comme en mécanique classique ou en théorie de la relativité permet d'éviter les nombreuses difficultés liées à sa définition dans des espaces non euclidiens.

La topologie primale élémentaire représentée sur la figure (2) permet d'introduire les notations utilisées par la suite. Trois segments Γ de vecteurs unitaire notés \mathbf{t} forment une surface plane \mathcal{S} dont la normale est notée \mathbf{n} ; ces deux vecteurs sont nécessairement orthogonaux $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$, une condition strictement nécessaire pour établir les propriétés des opérateurs associées aux topologies primale et duale. Le segment principal Γ de longueur d sur lequel sera dérivée l'équation du

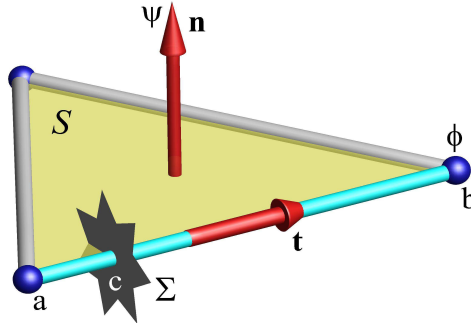


FIGURE 2. Topologie élémentaire de la mécanique des milieux discrets : trois segments rectilignes Γ délimités par des points définissent une face plane \mathcal{S} . Les vecteurs unitaires de la normale à la face \mathbf{n} et du vecteur porté par Γ sont orthogonaux, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$. Le segment Γ peut être intercepté par une discontinuité Δ située en c , entre les extrémités a et b sur celui-ci. Φ et Ψ sont respectivement les potentiel scalaire et vectoriel.

mouvement est compris entre les deux extrémités a et b . Tous les scalaires seront associés aux points comme le potentiel scalaire ϕ tandis que le potentiel vecteur sera orthogonal au plan \mathcal{S} . Le plan Σ interceptant Γ en c partage le segment $[a, b]$ en deux parties, par exemple deux milieux de propriétés physiques différentes ou de nature différente. L'interface Σ est une discontinuité, une onde de choc ou une surface de contact. Le vecteur vitesse sera aussi associé au segment Γ comme un scalaire constant de a à b .

La notion de milieu continu disparaît dans cette approche, les topologies, segment, surface, volume, ne peuvent en aucun cas se réduire à un point. La notion de dérivation est aussi abandonnée. Pour autant la mesure d de la longueur du segment Γ peut être aussi petite que nécessaire mais la réduction est homothétique et la transformation conserve les angles. Ainsi même si ce

n'est plus un milieu continu les échelles considérées peuvent être aussi petites que le permet la continuité de l'approche macroscopique. La limite de ce concept reste toujours l'échelle du libre parcours moyen des molécules.

2.2 Modélisation des effets gravitationnels

Comme les autres accélérations extérieures imposées la gravité \mathbf{g} est projetée sur le segment Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} . Dans le cas général cette quantité associée à la présence de masses est variable dans l'espace, seule sa projection doit être connue à tout instant. La gravité peut être formalisée par la loi $\mathbf{g} = -\mathcal{G} M/r^2$ où \mathcal{G} est la constante universelle de la gravitation, M la masse supposée ponctuelle de l'objet et r la distance au centre de celui-ci. Dans le cas de la Terre dont la masse est de $M = 5.9722 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, le rayon moyen $R = 6371 \cdot 10^3 \text{ m}$ avec $\mathcal{G} = 6.6738480 \cdot 10^{-11}$ on trouve $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$ au niveau de la surface de la mer.

L'accélération de la gravité \mathbf{g} peut être associée à un potentiel scalaire, le potentiel gravitaire $\phi_g = \mathcal{G} M/r$ dans certaines conditions. Dans le cas d'une faible gravité exercée par un corps pouvant être assimilé à une masse ponctuelle M on peut écrire la loi du mouvement sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\frac{\mathcal{G} M}{r^2} \mathbf{e}_r = \nabla \left(\frac{\mathcal{G} M}{r} \right) \quad (1)$$

Le mouvement d'une particule initialement immobile soumise à uniquement un champ de gravité sera bien décrit par cette équation (1), la trajectoire de celle-ci sera alors une droite dirigée vers le centre de l'objet. Pour de faibles déplacements on pourra considérer l'accélération \mathbf{g} constante.

Dans le cas général la gravité ne dérive pas forcément d'un potentiel scalaire unique, plusieurs masses en interaction engendrent la superposition de plusieurs potentiels scalaires. Il n'est pas exclu de rencontrer dans la nature des objets qui induisent des effets de rotation, c'est le cas par exemple en cosmologie où la coalescence de trous noirs engendrent des ondes gravitationnelles transversales. Reste à savoir si ce même potentiel gravitationnel engendre à la fois des actions longitudinales et transverses.

2.3 Modélisation de l'inertie

2.3.1 Modélisation de l'inertie en mécanique des milieux continus

En mécanique classique la dérivée particulaire ou matérielle s'écrit en coordonnées eulériennes sous la forme :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} + \nabla \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) \quad (2)$$

où le dernier terme du membre de droite est bien un gradient d'une fonction scalaire et où le terme précédent est un produit vectoriel qui n'est pas pour autant un rotationnel d'un potentiel vectoriel. Les deux formes du terme d'inertie (2) s'expriment en un point et possède exactement les mêmes propriétés.

Il est à noter que la forme classique du terme d'inertie en mécanique des milieux continus $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$ n'a pas de sens en milieu discret, pas plus qu'un tenseur du second ordre. La notion de milieu continu est la raison même des difficultés rencontrées dans la dérivation des équations de la mécanique, l'existence du terme I_2 [12] dans l'expression de la divergence de l'accélération en est l'une des illustrations. Le concept de milieu discret développé depuis 2013 notamment dans [11] correspond à une vision géométrique où l'accélération du milieu sur un segment de droite

Γ est égale à la somme des accélérations correspondant aux différentes actions projetées sur ce segment.

Intéressons-nous ici au seul terme d'inertie composant une partie de la dérivée particulière, $\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$. Cette forme du terme d'inertie n'est pas représentable en milieu discret comme tout tenseur du second ordre. L'équation du mouvement en milieu discret ne comporte que des opérateurs différentiels simples, gradient, divergence, rotationnel primal et dual.

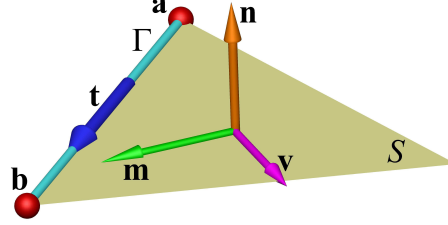


FIGURE 3. Représentation géométrique du terme d'inertie $\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ sur la topologie primale du milieu discret.

La dernière forme du terme inertiel (2) s'avère intéressante dans le contexte de la mécanique discrète, elle lui confère une vision physique immédiate. Le terme $\nabla (|\mathbf{V}|^2/2)$ s'écrit simplement à partir du théorème de la valeur moyenne intégrale comme une différence de $(|\mathbf{V}|^2/2)$ sur la distance du segment Γ . Considérons la quantité $\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ sur la figure (3) ; la vitesse \mathbf{V} est portée par le vecteur unitaire \mathbf{v} , le rotationnel $\nabla \times \mathbf{V}$ par le vecteur \mathbf{n} et le produit vectoriel est porté par \mathbf{m} formant ainsi un repère direct $(\mathbf{v}, \mathbf{n}, \mathbf{m})$. Le produit vectoriel $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ se projette sur le segment orienté Γ de vecteur unitaire \mathbf{t} dans le sens opposé à la projection de la vitesse ; cette composante de l'accélération inertielle se comporte comme un frein à l'accélération du milieu. En fait ce sont les contributions de toutes les facettes \mathcal{S} qui ont le segment commun \mathbf{t} qu'il faut examiner et intégrer. Le terme $\nabla (|\mathbf{V}|^2/2)$ est plus simple à appréhender, cette accélération conduit à une modification de la vitesse sur le segment. Si la vitesse est plus importante en b qu'en a (figure 3) ce terme est positif. Dans le cas général les deux termes sont indépendants mais peuvent quelquefois se compenser.

Malheureusement, quelle que soit la forme du terme d'inertie (2) adoptée, ce n'est pas la somme d'un gradient et d'un rotationnel dual ; la divergence du vecteur de Lamb $\mathcal{L} = -\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ n'est pas nulle. En mécanique des milieux continus il n'est donc pas possible de réaliser une décomposition formelle de Hodge-Helmholtz de l'inertie. Ce n'est pas rédhibitoire en soi mais d'un autre point de vue tout vecteur peut se décomposer en une somme d'une composante à divergence nulle et d'une autre à rotationnel nul. S'il était possible de trouver une telle décomposition explicite pour certaines équations de la physique en sauvegardant les propriétés des équations actuelles ce serait une réelle avancée. Le terme d'inertie de Lamb de l'équation du mouvement est le seul qui résiste à la décomposition ; c'est justement cette notion de milieu continu où toutes les quantités s'expriment en un point qui la rend impossible.

Un certain nombre de quantités s'expriment sur des points comme les grandeurs scalaires habituelles ; celles-ci peuvent être étendues à un volume autour du point considéré. D'autres comme le rotationnel s'expriment sur un plan et sont portés par la normale à celui-ci. Il est clair que des informations sont perdues dans la contraction induite par la notion de milieu continu. Même si le terme $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ est bien défini sur un plan quelle opération est nécessaire pour son extension à tous les plans associé au segment Γ ?

2.3.2 Modélisation de l'inertie en mécanique discrète

La vision discrète du mouvement permet de sortir de la formulation des quantités en un point dans un système de coordonnées. Les vecteurs de la physique, accélération, vitesse, sont associés à des segments orientés Γ et deviennent ainsi que des composantes de ces vecteurs. Comme ces segments sont orientés dans la topologie primale de manière quelconque un vecteur ne sera pas représenté par un nombre fixé de coordonnées liées à la dimension de l'espace. Cette multitude de composantes seront par contre liées par des opérateurs différentiels, divergence, rotationnels primal et dual, gradient. Les théorèmes de la divergence, de Stokes, de la moyenne intégrale permettront quant à eux de se passer de la connaissance du vecteur lui-même.

En mécanique discrète l'inertie n'est pas une force mais une accélération, elle ne dépend pas de la masse. Si la particule n'est pas accélérée par des actions extérieures l'inertie n'existe pas et celle-ci poursuivra son déplacement suivant une trajectoire rectiligne à vitesse constante. Si la somme des accélérations \mathbf{g} n'est pas nulle la loi du mouvement s'écrit $\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{g} = 0$: pour un observateur attaché à la particule l'inertie n'existe pas. Pour un observateur extérieur la particule semble être freinée par une action qui tend à réduire l'augmentation de la vitesse mais cette vision eulérienne est délicate à appréhender. L'observation des effets de cette accélération inertielle dans un repère galiléen montre qu'elle est en $\mathcal{O}(|\mathbf{V}|^2)$ par unité de longueur. Contrairement à certaines idées l'inertie n'est pas la raison de la limitation de la vitesse à celle de la célérité de la lumière. Lorsqu'on suit une particule au cours de son mouvement, en coordonnées lagrangiennes, la dérivée en temps se confond avec la dérivée particulaire mais l'accélération devient nulle pour des vitesses proches de la célérité du milieu. La question de l'origine de l'inertie est loin d'être d'avoir reçue une réponse définitive.

Dissocions le terme de dérivée en temps de la dérivée particulaire en introduisant une accélération inertielle telle que $d\mathbf{V}/dt = \partial\mathbf{V}/\partial t + \boldsymbol{\mathcal{I}}$. Il est possible d'écrire formellement $\boldsymbol{\mathcal{I}}$ comme la somme de deux termes $\boldsymbol{\mathcal{I}} = \nabla\phi_i + \nabla \times \boldsymbol{\psi}_i$ où ϕ_i et $\boldsymbol{\psi}_i$ sont les potentiels scalaire et vectoriel de l'inertie au moins en milieu continu. Le vecteur de Lamb $\boldsymbol{\mathcal{L}} = -\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ n'est pas la partie rotationnelle d'une telle décomposition, il n'est pas possible d'identifier formellement le potentiel vectoriel.

La gravitation se définit que par son potentiel gravitaire $\phi_g = \mathcal{G} M/r$; celui-ci modélise les accélérations d'attraction directes représentées par un gradient de ce potentiel $\nabla\phi_g$ mais aussi les accélérations transversales sous la forme d'ondes gravitationnelles polarisées. Ces dernières ne peuvent être modélisées que par une action orthogonale représentée par le rotationnel dual du potentiel gravitaire porté par la normale au plan considéré. Dans un univers relaxé la gravitation reste en effet la seule source du mouvement, elle génère toutes sortes de phénomènes, les trous noirs, les ondes gravitationnelles, l'effondrement des étoiles, les pulsars, etc.

A l'instar de la gravitation considérons qu'un seul et même potentiel puisse engendrer les effets longitudinaux et transversaux. Le choix qui s'impose naturellement est alors $\phi_i = |\mathbf{V}|^2/2$. Du point de vue physique il existerait un potentiel dans tout l'espace qui représenterait l'énergie cinétique disponible en tout point. Comme la vitesse n'est pas absolue pas plus que ϕ_i il est nécessaire que l'extraction de cette énergie soit réalisée par des opérateurs différentiels éliminant d'emblée une quelconque vitesse de référentiel. Comme ces opérateurs sont le gradient et le rotationnel dual la question du référentiel inertielle ne se pose plus. Ce potentiel est immatériel comme l'est la gravité, on constate ses effets sans en comprendre son origine profonde. On peut s'en faire une représentation triviale : imaginons un fluide dont la vitesse \mathbf{V}_0 est constante et un obstacle introduit au sein de ce fluide, on constate une augmentation de la pression au point d'arrêt. La valeur de la pression est égale à $\rho V_0^2/2$ en considérant que l'obstacle est à vitesse nulle mais sans la connaissance *a priori* de la loi de Bernoulli il est impossible de relier la cause à l'effet. Nous n'avons pas d'information sur l'histoire de l'écoulement et la pression n'est définie d'ailleurs qu'à une constante près liée à la vitesse de l'obstacle. Ce phénomène rejoint la dualité

de la lumière considérée tout à la fois comme une onde et une particule : tant qu'elle n'est pas arrêtée c'est une onde qui devient photon lorsqu'elle atteint la cible.

Le potentiel vectoriel de l'inertie sera donc construit sur la base de ϕ_i comme un vecteur ; l'opérateur qui agit sur celui-ci est le rotationnel dual ce qui conduit à utiliser la normale \mathbf{n} à chacune des facettes de la topologie primale. Ce vecteur sera donc $\psi_i = \phi_i \mathbf{n}$. Dans ce cas la valeur de $\phi_i = |\mathbf{V}|^2/2$ est évaluée sur la face \mathcal{S} . Finalement le terme d'inertie s'écrira $\nabla \times (|\mathbf{V}|^2/2 \mathbf{n}) + \nabla (|\mathbf{V}|^2/2)$. Cette forme est fondamentalement différente des formes classique en milieu continu.

2.4 Dérivation de l'équation du mouvement

Le système d'équations de la mécanique discrète a été dérivé en coordonnées lagrangiennes [11]. L'objectif étant de rechercher une formulation commune entre les différentes mécaniques (solides, fluides, ondes, ...) impose d'utiliser une variable unique, ce sera la vitesse ou plutôt les composantes de la vitesse \mathbf{V} . Toutefois celle-ci étant relative elle n'intervient dans les équations qu'au travers d'opérateurs différentiels. En effet tout vecteur peut être décomposé en trois composantes, l'une irrotationnelle issue d'un potentiel scalaire $\nabla\phi$, la seconde solénoïdale correspondant à un potentiel vecteur $\nabla \times \psi$ et une troisième notée \mathbf{h} harmonique qui est à la fois à rotationnel et à divergence nuls ; cette dernière représente en mécanique les mouvements rigides qui sont éliminés d'emblée de l'équation du mouvement. Considérons que deux vecteurs $\mathbf{V}_\phi = \nabla\phi$ et $\mathbf{V}_\psi = \nabla \times \psi$ soient égaux ; compte tenu des propriétés d'orthogonalité des opérateurs on a :

$$\nabla\phi_i = \nabla \times \psi \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \nabla\phi = 0 \\ \nabla \times \nabla\psi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

En l'absence du champ harmonique \mathbf{h} les vecteurs \mathbf{V}_ϕ et \mathbf{V}_ψ ne peuvent être égaux qu'à une constante. Symboliquement la conservation de l'accélération peut être écrite sous la forme d'une décomposition de Hodge-Helmholtz :

$$\gamma = -\nabla\phi + \nabla \times \psi + \mathbf{g} \quad (4)$$

mais les potentiels d'accumulation n'étant pas connus il est nécessaire d'explicitier ceux-ci en deux parties, les potentiels d'équilibre ϕ^o et ψ_o et leurs déviateurs respectifs, $-dt c_t^2 \nabla \cdot \mathbf{V}$ et $-dt c_t^2 \nabla \times \mathbf{V}$. Il est rappelé ici que dt est à la fois l'élément différentiel d'intégration de ces quantités au sens continu et le laps de temps entre deux observations de l'équilibre mécanique en mécanique discrète. L'équilibre mécanique est défini comme la satisfaction exacte de l'équation (4). Tous les effets ont été exprimés en terme de rotationnel dual et de gradient, sous la forme d'une décomposition de Hodge-Helmholtz. L'advection de toutes les quantités y compris de la vitesse elle-même peut être réalisée *a posteriori* par des techniques lagrangiennes appropriées. Le système d'équations obtenu s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla (\phi^o - dt c_t^2 \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \times (\psi^o - dt c_t^2 \nabla \times \mathbf{V}) \\ \phi = \phi^o - dt c_t^2 \nabla \cdot \mathbf{V} \\ \psi = \psi^o - dt c_t^2 \nabla \times \mathbf{V} \\ \mathbf{V} = \mathbf{V}^o + \gamma dt \\ \mathbf{U} = \mathbf{U}^o + \mathbf{V} dt \end{array} \right. \quad (5)$$

où \mathbf{V} est une vitesse lagrangienne et \mathbf{V}^o est la vitesse d'équilibre mécanique au temps t^o et de manière similaire pour le déplacement \mathbf{U} . Dans ce contexte la vitesse et le déplacement se

présentent sous la forme d'accumulateurs. L'avantage principal de la forme générique (5) réside dans l'implication de tous ses termes ; cette loi du mouvement est autonome. Sa résolution ne nécessite aucune autre loi de conservation, loi d'état ou de comportement ; seuls les célérités c_l et c_t doivent être connues par ailleurs. La détermination de l'accélération permet de calculer les opérateurs $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\nabla \times \mathbf{V}$ pour remonter les accumulateurs $(\phi, \psi, \mathbf{V}, \mathbf{U})$ explicitement.

La vitesse est considérée comme un accumulateur de l'accélération ; cette vision présente un avantage déterminant, si la vitesse \mathbf{V}^o est une quantité physiquement admissible elle le restera au cours de son évolution. Ainsi il n'est pas possible d'ajouter une vitesse constante quelconque (par exemple superluminique) au champ de vitesse instantané. C'est l'accélération, une quantité absolue, qui définit complètement l'évolution de la vitesse pour autant que \mathbf{V}^o ait un sens physique. Il sera nécessaire de se fixer la vitesse et la contrainte à un instant t^o correspondantes à un état d'équilibre mécanique.

Comme la masse volumique, la température, la pression ou la contrainte de cisaillement, la vitesse est un accumulateur. Si certaines quantités possèdent des limitations physiques, par exemple la positivité pour la masse volumique, le zéro absolu pour la température, la célérité de la lumière pour la vitesse, alors ce sont les déviateurs qui doivent s'annuler au voisinage des singularités, comme l'accélération lorsque la vitesse est proche de la célérité du milieu. L'équation vectorielle du système (5) ne fait pas apparaître directement la vitesse absolue, les opérateurs divergence et rotationnel se chargent de filtrer celle-ci ; $\nabla \cdot \mathbf{V}$ et $\nabla \times \mathbf{V}$ sont des quantités physiques de premier ordre au même titre que l'accélération.

La loi du mouvement discrète (5) est aussi valable dans le cas où la masse volumique ρ est variable, par exemple pour les mouvements de milieux composés de plusieurs phases de nature différente (plusieurs fluides, plusieurs solides, milieux fluides-solides, ...). Comme l'accélération d'un milieu soumis à des accélérations extérieures ne dépend pas de sa masse volumique, le système d'équations est toujours représentatif du mouvement. La masse volumique ré-intervient explicitement que s'il est nécessaire de calculer d'autres quantités, la force, la contrainte de pression p , la contrainte de cisaillement ω , etc. Considérons le cas d'un segment $[a, b]$ de la topologie primale coupé en c par une interface physique Σ entre deux milieux (2) de masse volumique différentes ρ_1 et ρ_2 ; on connaît le potentiel scalaire ϕ en a et b et on souhaite extraire la pression en b à partir d'une valeur arbitraire de celle-ci en a . En effet la pression n'est définie qu'à une constante additive près on peut fixer la valeur en un point de la topologie primale. La valeur de la pression en b peut alors être déduite de l'intégration de $\nabla \phi$ sur Γ :

$$p_b = p_a - \int_a^c \rho_1 \nabla \phi \cdot \mathbf{t} dl - \int_c^b \rho_2 \nabla \phi \cdot \mathbf{t} dl \quad (6)$$

Cette remontée explicite peut être formulée à partir d'une masse volumique moyenne pondérée notée ρ_v par le rapport de distances $[ac]/[ab]$.

Lorsque la masse volumique dépend d'autres variables comme la température ou la concentration dans un mélange multiconstituant il est nécessaire de considérer la loi de conservation de la masse en tant que telle pour décrire les évolutions de ρ . Pour cette dernière situation il faudra aussi tenir compte de la conservation de l'énergie et du flux de chaleur Φ .

Pour obtenir la vitesse dans un repère eulérien il convient de tenir compte des termes d'inertie correspondants dans l'expression de la dérivée particulaire. En reprenant la forme de ces termes :

$$\nabla \phi_i + \nabla \times \psi_i = \nabla \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) + \nabla \times \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \mathbf{n} \right) \quad (7)$$

on obtient l'équation du mouvement discrète en coordonnées eulériennes :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = -\nabla (\phi^o - dt c_t^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \phi_i - \phi_g) + \nabla \times (\psi^o - dt c_t^2 \nabla \times \mathbf{V} - \phi_i \mathbf{n} + \phi_g \mathbf{n}) \\ \phi = \phi^o - dt c_t^2 \nabla \cdot \mathbf{V} + \phi_i - \phi_g \\ \psi = \psi^o - dt c_t^2 \nabla \times \mathbf{V} - \phi_i \mathbf{n} + \phi_g \mathbf{n} \end{cases} \quad (8)$$

Il est évident que le potentiel ϕ_i doit être intégré en fonction de \mathbf{V} dans l'équation du mouvement pour obtenir une forme implicite. Il peut être linéarisé en considérant la discrétisation en temps de la forme $\phi_i = \mathbf{V}^{n+1} \cdot \mathbf{V}^n / 2$ pour un traitement numérique ultérieur. Le relèvement des potentiels avec ϕ_i et ψ_i devra être conforme au termes intégrés dans l'équation du mouvement. L'équation du mouvement du système (8) se présente elle-aussi sous la forme d'une décomposition de Hodge-Helmholtz mais ici pour la dérivée temporelle.

3 Conséquences de la formulation discrète du terme d'inertie

Les modifications apportées par le modèle discret sur les équations de la mécanique ne sont pas anodines : suppression de la masse volumique de l'équation du mouvement, introduction des potentiels scalaire et vectoriel, formulation des différents termes en opérateurs différentiels simples, décomposition de Hodge-Helmholtz de tous les termes de l'équation du mouvement, etc. Notamment l'écriture discrète de l'inertie en deux composantes sur la base d'un potentiel inertiel ϕ_i complète cette décomposition. Les conséquences du point de vue physique et mathématique seront importantes. Examinons ici le cas des mouvements incompressibles.

Deux modèles issus directement de la formulation discrète de l'équation du mouvement sont présentés ci-dessous. La première est une méthode de projection dite cinématique, scalaire ou vectorielle, de type prédiction-correction qui découple l'obtention de la pression de la contrainte d'incompressibilité. Le second modèle est l'extension directe de l'équation du mouvement à une célérité infinie qui caractérise le mouvement incompressible d'un milieu.

3.1 Méthodes de projection cinématiques

La résolution des équations de la mécanique des fluides incompressible nécessite d'assurer le couplage de l'équation du mouvement et de la contrainte d'incompressibilité. Ce couplage peut être implicite en incluant la contrainte dans le système linéaire comme pour la méthode du lagrangien augmenté [18]. Une autre classe de méthodes consiste à scinder la résolution de l'équation du mouvement de l'application de la contrainte d'incompressibilité [17]. Un aspect important est apparu d'emblée aux premiers auteurs qui ont développé des algorithmes numériques autour des méthodes de volumes finis, c'est la localisation spatiale des inconnues de vitesse et de pression. Pour des variables colocalisées des instabilités apparaissent et des lisseurs sont nécessaires pour atténuer et faire disparaître ces fluctuations de la vitesse et de la pression. Harlow et Welch en 1965 ont introduit la notion de variables décalées [22] initialement pour des écoulements diphasiques ; cette stratégie, (la méthode Marker And Cell) permet d'assurer le couplage, direct ou non, sans perturbation des champs de pression et de vitesse. Depuis, de nombreux auteurs ont développé des méthodes de type prédiction-correction dites de projection qui consiste à traiter la résolution de l'équation du mouvement et de sa contrainte d'incompressibilité de manière séquentielle. De nombreux algorithmes permettent d'obtenir des ordres de convergence en temps faibles, en $O(\Delta t^{1/2})$, ou des ordres plus élevées, en $O(\Delta t^2)$, qui dépendent aussi des conditions aux limites imposées. On trouvera quelques revues sur ces techniques dont celle de Guermond et al. [19] très complète. L'utilisation plus récente de ces techniques pour la simulation d'écoulements diphasiques conduisent à des systèmes linéaires mal conditionnés

surtout à forts contrastes de masse volumique. En effet la résolution d'une équation de Poisson à coefficients fortement variables s'avère très coûteuse en nombre d'itérations de solveurs itératifs comme le gradient conjugué. Les solveurs directs sont performants en deux dimensions d'espace mais restent inutilisables en 3D pour des simulations à grands nombres de degrés de liberté. Certains auteurs abordent le problème du point de vue algébrique par des pré-conditionnements spécifiques ou par la résolution de points selles [5, 6, 7, 10]. D'autres voies sont recherchées par exemple par Guermond et al. [20] en extrayant la masse volumique de l'équation de Poisson ; cette approche ne s'avère efficace que pour des petits rapports de masse volumique.

Une méthode originale de projection scalaire discrète (KSP) [15] présentée ici sous une nouvelle forme pour la simulation des écoulements incompressibles à masse volumique variable inverse l'algorithme de projection classique en calculant d'abord la composante irrotationnelle de la vitesse et ensuite la pression. La première phase de la projection est purement cinématique, le champ de vitesse prédit est soumis à une décomposition de Hodge-Helmholtz discrète. La seconde phase de remontée de la pression à partir de la masse volumique utilise le théorème de Stokes pour calculer explicitement la pression.

La vitesse prédite $\tilde{\mathbf{V}}$ sera obtenue en résolvant l'équation du mouvement avec un potentiel ϕ^n qui n'est connu qu'à l'état d'équilibre mécanique précédent. Le champ $\tilde{\mathbf{V}}$ ne sera donc pas à divergence nulle. La décomposition classique consiste à trouver le champ à divergence nulle comme la somme du champ prédit et d'une correction $\hat{\mathbf{V}}$ telle que $\mathbf{V} = \tilde{\mathbf{V}} + \hat{\mathbf{V}}$. La correction qui doit avoir une divergence opposée à celle du champ prédit est recherchée comme le gradient d'une correction du potentiel $\phi' = (\phi^{n+1} - \phi^n)$.

On part de l'équation du mouvement sous sa forme lagrangienne :

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{V}}{dt} = -\nabla\phi^n - \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{V}) \\ \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \end{cases} \quad (9)$$

L'étape de prédiction consiste à trouver le champ $\tilde{\mathbf{V}}$ à partir de l'équation du mouvement et de la vitesse au temps précédent \mathbf{V}^n qui est bien à divergence nulle.

Pour la seconde étape de correction on applique directement la divergence de la dérivée particulaire :

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 - 2 I_2 \quad (10)$$

mais, en mécanique discrète, comme on le verra plus loin, le second invariant I_2 du tenseur du second ordre $\nabla\mathbf{V}$ est nul et on obtient :

$$\nabla \cdot \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) + (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \quad (11)$$

Pour un mouvement incompressible la divergence de la dérivée particulaire se réduit à la dérivée temporelle. La divergence discrétisée en temps de l'équation du mouvement conduit ainsi à :

$$\frac{1}{\delta t} \left(\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} - \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} \right) = \nabla^2 \phi' \quad (12)$$

où δt est le pas de temps ; comme $\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1}$ est nul on obtient une équation de Poisson sur le potentiel :

$$\nabla^2 \phi' = -\frac{1}{\delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} \quad (13)$$

On peut montrer mathématiquement [19] que les conditions aux limites associées sont de type Neumann homogènes. La résolution de l'équation (13) permet de calculer la correction de vitesse $\widehat{\mathbf{V}}$ telle que $\widehat{\mathbf{V}} = \nabla\phi'$ pour trouver finalement $\nabla \cdot \mathbf{V}^{n+1} = 0$.

Cette étape est purement cinématique et ne résulte pas d'un quelconque splitting numérique. Elle ne fait pas apparaître non plus la masse volumique ce qui est parfaitement légitime ; l'écoulement peut être à masse volumique variable continûment voire diphasique il n'existe pas de raison physique ni d'argument mathématique qui conduise à associer la masse volumique au potentiel scalaire ϕ . La partie dynamique de l'étape de projection fait par contre apparaître la masse volumique pour obtenir la pression p . La résolution de l'équation du mouvement nécessite la connaissance de $\nabla\phi'$ pas nécessairement de la pression ni de son gradient ; cette dernière, comme la notion de force, ayant une existence dans l'univers de la mécanique classique elle pourra toujours être extraite du potentiel.

Les remontées des champs vitesse et de pression sont données donc fixées par les expressions :

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{n+1} = \widetilde{\mathbf{V}} - \nabla\phi' \\ \phi^{n+1} = \phi^n + \phi' \\ p_b^{n+1} = p_a^{n+1} - \int_{\Gamma} \frac{\rho}{\delta t} \nabla\phi' \cdot \mathbf{t} dl \end{cases} \quad (14)$$

où Γ représente chaque segment entre deux points de localisation des scalaires. Le chemin permettant de balayer tout le domaine, 2D ou 3D d'une topologie polyédrique quelconque est construit initialement et utilisé à chaque étape. A partir d'un point choisi arbitrairement la pression est ainsi calculée explicitement. La pression n'intervenant que par son gradient dans l'équation du mouvement, la valeur de la constante n'a pas d'influence sur la solution.

La solution d'une itération au temps t^{n+1} est composée de la pression et de la vitesse à divergence nulle mais celle-ci ne satisfaisant pas la condition tangentielle imposée physiquement comme d'ailleurs les autres méthodes de projection. Cette couche limite disparaît au cours des itérations en temps grâce à l'imposition des conditions aux limites dans les deux étapes de prédiction et correction. De nombreuses simulations d'écoulements diphasiques, permettent de valider cette approche où la masse volumique, absente de l'équation du mouvement en vertu du principe d'équivalence, l'est aussi pour maintenir la contrainte d'incompressibilité. Les méthodes de projection sont présentées comme des méthodologies purement numériques basées sur un splitting de l'équation de Navier-Stokes pour assurer la contrainte d'incompressibilité. La forme de la divergence de l'accélération (11) en mécanique discrète permet de leur attribuer un statut théorique plus clair.

Une version vectorielle de la projection cinématique est intitulée "Projection Pénalisation Cinématique Vectorielle" KVPP ; un certain nombre de travaux mathématiques et numériques ont été publiés sur ces sujets [13], [14], [16], [2], [3], [1], [4]. Elle consiste à obtenir directement la correction de vitesse $\widehat{\mathbf{V}}$ en résolvant l'équation vectorielle suivante :

$$\varepsilon \widehat{\mathbf{V}} - \nabla \left(\nabla \cdot \widehat{\mathbf{V}} \right) = \nabla \left(\nabla \cdot \widetilde{\mathbf{V}} \right) \quad (15)$$

où le vecteur $\widetilde{\mathbf{V}}$ est la vitesse à divergence non nulle obtenue lors d'une prédiction préalable. Le paramètre ε est d'ordre de grandeur de l'erreur sur la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{V}$, la précision machine par exemple. Le potentiel scalaire ou la pression peut alors être extrait de la correction $\widehat{\mathbf{V}}$ de manière explicite.

La résolution de cette équation vectorielle (15) s'avère extrêmement efficace du point de vue algébrique, la solution pouvant être obtenue en quelques itérations d'un solveur itératif de type gradient conjugués ; surtout le nombre d'itérations est indépendant de la taille du système

linéaire à résoudre. Les propriétés de l'opérateur $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V})$ appliqué aussi au terme source du second membre sont à l'origine de ce comportement exceptionnel.

La résolution de l'équation vectorielle (15) fournit exactement la même solution qu'une méthode de projection scalaire, elle est simplement plus efficace. Le défaut dû au splitting des opérateurs persiste : à l'issue des deux étapes, prédiction et correction, la solution (\mathbf{V}, p) ne correspond pas à un équilibre mécanique.

3.2 L'incompressibilité en mécanique discrète

La décomposition du terme d'inertie en une composante solénoïdale et une autre irrotationnelle éclaire la projection d'un champ physique sur un espace à divergence nulle d'un nouveau jour le développement présenté en 2016 [12]. Il s'agit de la divergence de l'opérateur de Lamb $\mathcal{L} = -\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$: celle-ci n'est pas nulle lorsque la vitesse est bien à divergence nulle. En mécanique des milieux continus ce vecteur n'est ni un gradient ni un rotationnel ce qui obère toute possibilité de compléter la décomposition de Hodge-Helmholtz de l'équation du mouvement en coordonnées eulérienne. La difficulté réside dans l'existence du terme I_2 , le second invariant du tenseur du second ordre $\nabla \mathbf{V}$. Pour certains auteurs ce terme devrait être nul [23], [11], [12] pour des raisons différentes.

La décomposition du terme d'inertie présentée plus haut vient éliminer les difficultés, la divergence d'un rotationnel dual est nulle en mécanique discrète. La décomposition de la vitesse en une partie prédite $\tilde{\mathbf{V}}$ et d'une correction $\hat{\mathbf{V}}$ permet l'application de l'opérateur divergence à l'équation (8) et conduit à :

$$\nabla \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi' \quad (16)$$

où ϕ' est la correction du potentiel.

La question de l'existence du terme I_2 ne se pose plus. Les méthodes de projection de toute nature présentées comme des méthodologies numériques de splitting qui cherche à contraindre la divergence de la vitesse à être nulle trouvent maintenant un cadre formel plus strict. Avec les notations utilisées précédemment il vient :

$$\nabla^2 \phi' = -\frac{1}{\delta t} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{V}} \quad (17)$$

La vitesse à divergence nulle $\mathbf{V}^{n+1} = \tilde{\mathbf{V}} + \nabla \phi'$ en est déduite ; la pression p est quant à elle déduite du potentiel $\phi^{n+1} = \phi^n + \phi'$.

Le découplage de l'équation du mouvement entre une prédiction de la vitesse à divergence non nulle et l'application séparée de la contrainte d'incompressibilité conduit à des incohérences sur la solution (\mathbf{V}, p) à l'issue du processus ; cette solution ne satisfait pas l'équilibre mécanique défini comme la satisfaction exacte de l'équation du mouvement. De plus les conditions aux limites ne sont pas satisfaites de manière instantanée. Dès lors la seule possibilité pour satisfaire les conditions suivantes :

- la solution correspond à un équilibre mécanique,
- les conditions aux limites imposées sont respectées,
- la condition d'incompressibilité du mouvement est satisfaite,

est de résoudre l'équation du mouvement directement :

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} - \nabla(r \nabla \cdot \mathbf{V}) + \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{V}) = 0 \quad (18)$$

où $r = dt c_l^2$ est un paramètre permettant d'assurer, pour dt fini, $\mathbf{V} = 0$ à $1/\mathcal{O}(c_l^2)$. L'approximation d'incompressibilité ne se conçoit en effet que pour des milieux dont la célérité tend vers

l'infini. Il sera toujours possible de remonter le potentiel ϕ explicitement si nécessaire. Les deux termes à rotationnel nul et à divergence nulle étant orthogonaux la satisfaction imposée fortement de la contrainte d'incompressibilité ne réduit en rien la précision obtenue sur les termes visqueux. Sous cette forme l'équation du mouvement possède des propriétés remarquables lorsque le paramètre r prend des valeurs importantes. Comme pour la projection vectorielle (KSPP) le conditionnement des systèmes algébriques s'en trouve sensiblement amélioré.

Le champ de vitesse \mathbf{V} satisfaisant les trois conditions données plus haut est la vitesse en coordonnées de lagrange. Pour obtenir le champ de vitesse en coordonnées eulériennes il conviendra d'advecter le champ lui-même au travers des termes d'inertie. Toutefois ce problème d'une autre nature peut être résolu avec des techniques spécifiques. L'intégration des termes d'inertie dans l'équation du mouvement est une autre possibilité qui rend le problème non linéaire et sa résolution semi-implicite. Toutefois l'équation générique (8) incluant tous les termes a l'avantage considérable de traiter tous les effets de manière la plus implicite possible.

4 Trois exemples d'écoulements inertiels

Parmi la multitude des solutions connues en mécanique des fluides les configurations les plus simples sont souvent des cas de compréhension précieux pour la modélisation des effets observés. Parmi celles-ci on peut citer les solutions analytiques d'intérêt physique, écoulement de Couette plan et polaire, l'écoulement de Poiseuille, etc. Il existe bien d'autres situations plus complexes où la solution est approchée par l'utilisation de méthodologies numériques appropriées. Celles-ci nécessitent une discrétisation spatiale (éléments finis, volumes finis, ...) de l'équation du mouvement. Ce n'est pas le cas pour la mécanique discrète, les opérateurs de l'équation du mouvement sont appliqués directement sur les topologies primale et duale. Les trois exemples permettent de mettre en évidence cet aspect mais surtout vérifier le bien-fondé de la décomposition de Hodge-Helmholtz du terme d'inertie.

4.1 L'écoulement de Couette plan

Pour l'écoulement de Couette plan le terme d'inertie est nul mais seulement par compensation. En effet, en mécanique des milieux continus, les termes $\nabla(|\mathbf{V}|^2)/2$ et $-\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$ sont opposés. Le cisaillement du fluide devrait engendrer une rotation de celui-ci mais le gradient de pression initié par ce phénomène s'oppose exactement à cette rotation et les lignes de courant du fluide sont rectilignes, parallèles aux parois.

Considérons le cas d'un écoulement incompressible de Couette dans un canal plan de hauteur h généré par le mouvement stationnaire de la paroi supérieure à la vitesse $V_0 = 1$ alors que la paroi inférieure est maintenue immobile. Les conditions latérales sont périodiques. La solution stationnaire de ce problème ne dépend pas de la viscosité μ , la vitesse est égale à $\mathbf{V} = y \mathbf{e}_x$ et le rotationnel de la vitesse est égal à $\nabla \times \mathbf{V} = -1$. On vérifie bien que $\nabla(|\mathbf{V}|^2)/2 = \mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V}$, cette égalité est vérifiée ponctuellement en mécanique des milieux continus en calculant les composantes de ces deux vecteurs.

En mécanique discrète la dérivation classique ne correspond pas à l'application d'opérateurs différentiels, par exemple le rotationnel primal et le rotationnel dual projettent le résultat sur des composantes différentes de la topologie discrète (figure 2). Pour l'écoulement incompressible et stationnaire, $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$ et $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$, il reste :

$$\nabla \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \right) - \nabla \times \left(\frac{|\mathbf{V}|^2}{2} \mathbf{n} \right) = -\nabla \phi^o + \nabla \times (\psi^o - \nu \nabla \times \mathbf{V}) \quad (19)$$

Compte tenu de (3) les termes en gradient se compensent et les termes en rotationnel se com-

pensent séparément ce qui conduit à la solution $\mathbf{V} = y \mathbf{e}_x$ compte tenu des conditions de bord.

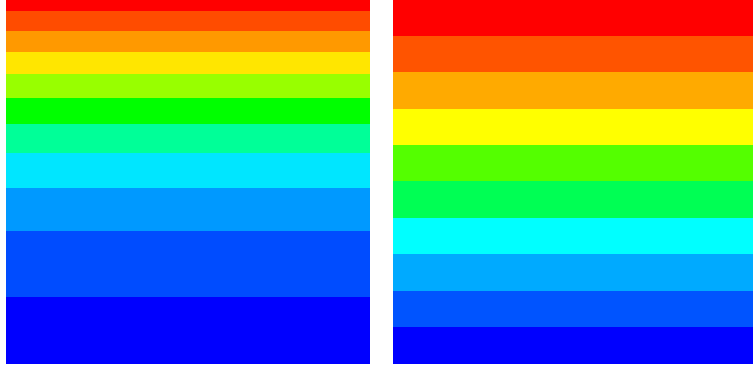


FIGURE 4. *Écoulement de couette plan : à gauche le potentiel de Bernoulli $\phi_B = \phi^o + (|\mathbf{V}|^2)/2$ et à droite les lignes de courant. La divergence est nulle ainsi que la composante verticale de la vitesse ; le rotationnel primal est exactement égal à $\nabla \times \mathbf{V} = -1$.*

La simulation de ce problème est réalisée en une seule itération à partir du modèle discret avec des conditions initiales nulles et la solution $u(y) = y$ est exacte à la précision machine tout comme le potentiel $\phi^o = y^2/2$. La figure (4) montre le potentiel $\phi^o = |\mathbf{V}|^2/2$ et les lignes de courant sont, comme attendu, parallèles aux parois horizontales du canal. Ces résultats sont strictement identiques pour des topologies cartésiennes ou non structurées à base de polygones. Elles sont aussi obtenues pour des topologies 3D à base de polyèdres.

La décomposition de Hodge-Helmholtz du terme d'inertie dans l'équation du mouvement permet de mettre clairement en évidence les contributions orthogonales de celui-ci et de retrouver dans l'exemple donné leur compensation exacte. Même si ces composantes sont apparemment indépendantes elles sont couplées fortement par la contrainte d'incompressibilité. Ces résultats sont dus aux propriétés discrètes $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ et $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$ démontrées par ailleurs [11].

4.2 Le mouvement de rotation rigide

Le mouvement de rotation rigide est l'un des cas emblématiques de la mécanique. Il est essentiel pour toute modélisation de retrouver le comportement physique attendu dans tous ses aspects. Ce n'est pas le cas de la mécanique des milieux continus ; en effet la divergence du vecteur de Lamb, $\nabla \cdot \mathcal{L}$ génère de l'énstrophie locale puisque $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V} \times \mathbf{V}) = \mathbf{V} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{V} - (\nabla \times \mathbf{V})^2$ où le premier terme est nommé la flexion et le second l'énstrophie [21]. Le mouvement de rotation étant à divergence nulle et à rotationnel non nul $\nabla \times \mathbf{V} = 2\Omega \mathbf{n}$ où Ω est la vitesse de rotation. Cette difficulté apparaît aussi lorsqu'on écrit la fonction de dissipation Φ_v où I_2 , le second invariant du tenseur du second ordre $\nabla \mathbf{V}$ apparaît comme un artefact [11], un terme supplémentaire dans la dissipation. Dans le mouvement rigide où la vitesse locale est $\mathbf{V}_\theta = \Omega r \mathbf{e}_\theta$ il ne peut y avoir de dissipation.

Pour ce cas il est aisé de calculer, dans le cadre de la mécanique des milieux continus, les composantes du vecteur de Lamb, celles du terme en gradient et le rotationnel de $\phi_i \mathbf{n}$ dans un système de coordonnées polaires :

$$\nabla \phi_i = \begin{bmatrix} \Omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad -\mathbf{V} \times \nabla \times \mathbf{V} = \begin{bmatrix} -2\Omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \nabla \times (\phi_i \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\Omega^2 r \\ 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

avec $\phi_i = |\mathbf{V}|^2/2$

Comme on peut le constater on peut obtenir un potentiel (pression) égal à $\phi^o = \Omega^2 r^2/2$ en sommant les deux premiers vecteurs ; le vecteur $\nabla \times (\phi_i \mathbf{n})$ n'est pas conforme et la somme du premier et du dernier vecteur ne redonne pas le résultat escompté. L'action de $\nabla \times (\phi_i \mathbf{n})$ porte sur la seconde composante \mathbf{e}_θ . En fait il est impossible de transformer le vecteur de Lamb en un rotationnel dans le cadre de la mécanique classique.

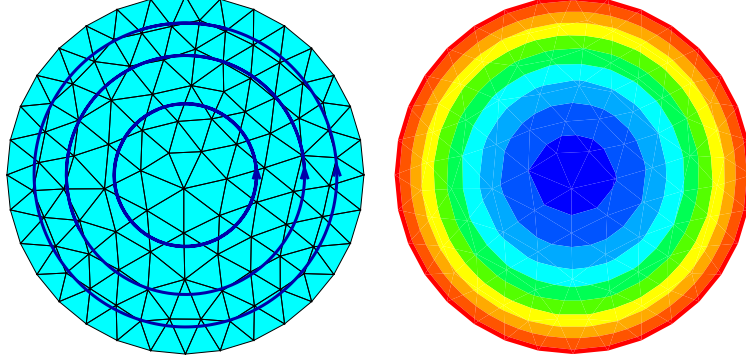


FIGURE 5. *Mouvement de rotation rigide : à gauche le maillage non structuré utilisé et les lignes de courant et à droite le champ de potentiel de Bernoulli $\phi_B = \phi^o + |\mathbf{V}|^2/2$.*

Alors est-ce que le terme d'inertie de la mécanique discrète $\nabla\phi_i + \nabla \times (\phi_i \mathbf{n})$ permet de retrouver la solution du mouvement rigide en vitesse et en pression ? Les équilibres mécaniques étant plus subtils à interpréter en mécanique discrète sans l'aide de référentiel et de composantes, une simulation directe est réalisée. Le cas traité ici correspond à un disque initialement immobile ($\mathbf{V} = 0$) mis en rotation par sa surface extérieure en maintenant une vitesse de rotation $\Omega = 1$; le potentiel initial ϕ^o (ou la pression) est nul aussi. Le système (8) est résolu avec le potentiel de Bernoulli. La figure (5) montre les lignes de courant pour un maillage non structuré à base de triangles et la pression de Bernoulli cumulant la pression d'équilibre p^o et le potentiel inertiel $\phi_i = |\mathbf{V}|^2/2$. Aux erreurs numériques près la solution donne le champ de vitesse $\mathbf{V}_\theta = \Omega r \mathbf{e}_\theta$, la pression $p = \rho \Omega^2 r^2/2$ à une constante additive près et la pression de Bernoulli $p = \rho \Omega^2 r^2$.

Pour quelles raisons la solution théorique est retrouvée avec un terme d'inertie de la forme $\nabla\phi_i + \nabla \times (\phi_i \mathbf{n})$? La raison principale est le fort couplage avec la contrainte $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, une action sur la composante sur θ agit instantanément sur l'ensemble des autres composantes de la topologie primale ; le potentiel ϕ est bien sûr indépendant de θ mais l'action du rotationnel dual sur cette composante engendre une augmentation du potentiel dans la direction \mathbf{e}_r . La mécanique des milieux continus et la notion même de milieu continu apparaît comme restrictive, elle impose d'établir l'équilibre en un point et de ce fait obère toute possibilité d'opérations visant à favoriser un couplage implicite des variables.

4.3 La cavité entraînée

Les deux exemples précédents sont édifiants et les conclusions tirées semblent incontestables. Dans le cas général les termes solénoïdal et irrotationnel de l'inertie ne sont pas simples à exprimer et il est opportun de présenter un résultat tangible pour les numériciens attachés à l'incourable équation de Navier-Stokes. Celle-ci a fait ses preuves dans l'immensité des cas traités avec elle depuis des siècles. Il ne s'agit pas ici de trouver une quelconque différence entre cette équation et l'équation du mouvement discrète mais de vérifier si les solutions sont les mêmes au traitement

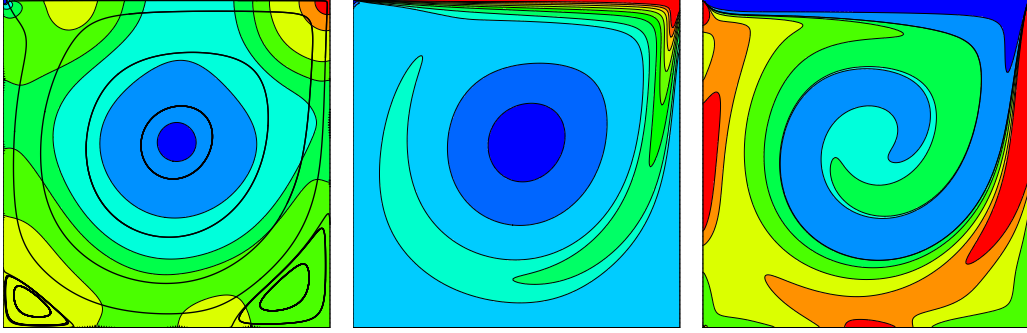


FIGURE 6. Cavité entrain e à $Re = 1000$, à gauche la pression et les lignes de courant, au centre la pression de Bernoulli et à droite le rotationnel de la vitesse ; la divergence est nulle à la précision machine. Le maillage cartésien est composé de 256^2 mailles.

numérique près.

Le cas de référence présenté succinctement ici est la cavité entrain e : un fluide visqueux dans une cavité carrée est mis en mouvement à vitesse constante par l'une des parois. Des publications sur ce sujet existent notamment celle de O. Botella et al. [8] qui fait référence pour le nombre de Reynolds de 1000. La contribution de C.H. Bruneau et al. [9] sera utilisée pour comparer les résultats sur un cas où les termes d'inertie sont plus importants à $Re = 5000$ et plus.

L'exemple de la cavité entrain e à $Re = 1000$ est l'occasion de montrer sur la figure (6) le champ de pression p^o (ou le potentiel ϕ^o car la masse volumique est fixée à $\rho = 1$), la pression de Bernoulli $p_B = p^o + \nabla(|\mathbf{V}|^2)/2$ et les lignes de courant au sein de la cavité.

La solution stationnaire du problème obtenue pour un maillage régulier de $N = 256^2$ mailles. On constate un excellent accord avec les résultats de la référence [8]. Une étude de convergence sur cette configuration montre un taux de convergence spatial de 2 pour la vitesse et pour la pression. La pression de Bernoulli a été utilisée pour mener les évolutions en temps et la pression elle-même a été ensuite extraite à partir de celle-ci.

Le cas plus inertiel à $Re = 5000$ a fait l'objet de nombreux travaux dont ceux de C.H. Bruneau [9] qui servent souvent de référence. Le tableau (1) compare quantitativement les résultats sur l'amplitude et la position des tourbillons engendrés par le décollement de l'écoulement sur les parois de la cavité.

| Ref. | ψ_{max} | x_{max} | y_{max} | ψ_{min} | x_{min} | x_{min} |
|------------------------|--------------|-----------|-----------|------------------------|-----------|-----------|
| Present 256^2 | 0.1211 | 0.5152 | 0.5353 | $3.138 \cdot 10^{-3}$ | 0.8024 | 0.07180 |
| Bruneau & al. 2048^2 | 0.12197 | 0.515465 | 0.53516 | $3.0706 \cdot 10^{-3}$ | 0.80566 | 0.073242 |

TABLE 1. Cavité entrain e à un nombre de Reynolds de $Re = 5000$; comparaison des résultats du modèle discret avec ceux de C.H. Bruneau [9] sur le vortex principal et sur le vortex situé en bas à gauche.

La figure (7) montre les lignes de courant à convergence. Malgré le modèle physique diff rent, l'équation de la mécanique discrète à la place de Navier-Stokes, le traitement de la pression transformée en pression de Bernoulli et l'écriture en $\nabla \times (\phi_i \mathbf{n}) + \nabla(\phi_i)$ du terme d'inertie, la solution est très proche des résultats obtenus antérieurement pour ce nombre de Reynolds.

La mécanique discrète ne remet pas en cause les résultats obtenus avec l'équation de Navier-Stokes ; comme on peut le constater, on obtient les mêmes au moins à une précision compatibles avec les inévitables erreurs numériques. Pour autant de nombreux points différencient les modèles continus et discrets. L'une de ces différences est l'utilisation de la conservation de la masse tou-

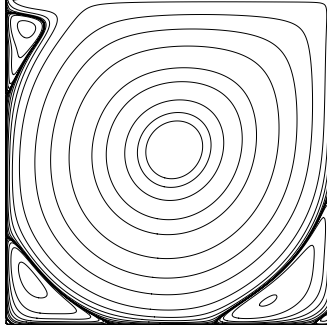


FIGURE 7. Cavité entraînée à $Re = 5000$: lignes de courant obtenus par une simulation sur un maillage cartésien de 256^2 mailles. Les amplitudes des tourbillons et leur positions sont $\psi_{max} = 0.1211$ à $x_{max} = 0.5152$ et $y_{max} = 0.5353$ ainsi que $\psi_{min} = -0.003138$ à $x_{min} = 0.8024$ et $y_{min} = 0.07180$.

jours associée à l'équation de Navier-Stokes. L'équation discrète ne l'utilise pas mais la masse est toujours strictement conservée pour les mouvements compressibles ou incompressibles, c'est une équation autonome qui ne nécessite aucune loi de comportement ou de loi d'état supplémentaire.

5 Conclusions

La décomposition de Hodge-Helmholtz, bien qu'établie théoriquement depuis bien longtemps, n'est qu'utilisée que dans certaines situations, méthodes de projection sur un espace à divergence nulle, le traitement numérique des images, la reconnaissance des empreintes digitales, etc. Les lois de la physique échappent à cette règle qui permet à tout vecteur d'être décomposé en un terme solénoïdal et un autre irrotationnel. La mécanique discrète montre que l'équation du mouvement peut être formellement écrite en ces termes. Ainsi l'accélération γ dérive d'un potentiel scalaire ϕ et d'un potentiel vectoriel ψ . Les conséquences d'une telle décomposition seraient très importantes dans tous les domaines de la physique si les autres lois (ou les lois unifiées) pouvaient être écrites sous cette forme. En mécanique discrète elle est érigée en principe, l'équation du mouvement obtenue dans ce contexte permet cependant de retrouver les résultats de la mécanique des fluides, de celle des solides et de la propagation des ondes.

L'écriture du terme d'inertie en deux composantes du même potentiel inertiel finalise la dérivation de l'équation du mouvement discrète. L'équilibre mécanique représenté par cette équation apparaît beaucoup plus complexe à décrire car il ne s'écrit pas en un point au sein d'un référentiel. Les interactions, les couplages, sont réalisés à travers des opérateurs différentiels satisfaisant $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{V}) = 0$ et $\nabla \times \nabla \phi = 0$ exactement quelles que soient les topologies. L'information est transmise à travers les éléments de ces topologies (points, arêtes, surfaces, volumes) jusqu'aux bords du domaine considéré à des vitesses correspondant aux célérités des ondes longitudinale et transversale.

L'équation de Navier-Stokes introduit un certain nombre d'*artefact* notamment la présence d'une enstrophie locale non nulle dans la divergence du vecteur de Lamb pour le mouvement de rotation rigide et la nécessité de satisfaire une condition supplémentaire de compatibilité, $I_2 = 0$ [12], pour atteindre l'incompressibilité locale. La mécanique discrète est une décomposition formelle de Hodge-Helmholtz y compris avec les termes de l'inertie; de ce fait elle présente des propriétés remarquables tant du point de vue théorique que pour sa résolution numérique. Le modèle discret correspond à une vision différente de celle de milieu continu. Le développement d'un cadre mathématique *had-hoc* devrait nous en apprendre plus sur son éventuelle pertinence.

Références

- [1] P. Angot, J.-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A fast vector penalty-projection method for incompressible non-homogeneous or multiphase Navier-Stokes problems. *Applied Mathematics Letters*, 25 :1681–1688, 2012.
- [2] Ph. Angot, J.-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A fast vector penalty-projection method for incompressible non-homogeneous or multiphase Navier-Stokes problems. *Applied Mathematics Letters*, 25 :1681–1688, 2012.
- [3] Ph. Angot, J.-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A new fast method to compute saddle-points in constrained optimization and applications. *Applied Mathematics Letters*, 25 :245–251, 2012.
- [4] Ph. Angot, J.-P. Caltagirone, and P. Fabrie. A kinematic vector penalty-projection method for incompressible flow with variable density. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris, Elsevier Masson, Ser. I*, pages 1124–1131, 2016.
- [5] J.B. Bell, P. Colella, and H.M. Glaz. A second order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, 85 :257–283, 1989.
- [6] M. Benzi. Preconditioning techniques for large linear systems : a survey. *J. Comput. Phys.*, 182 :418–477, 2002.
- [7] M. Benzi, G.H. Golub, and J. Liesen. Numerical solution of saddle point problems. *Acta numerica*, 14 :1–137, 2005.
- [8] O. Botella and R. Peyret. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers & Fluids*, 27(4) :421–433, 1998.
- [9] C.H. Bruneau and M. Saad. The lid-driven cavity problem revisited. *Computers & Fluids*, 35 :326–348, 2006.
- [10] M. Cai, Y. Nokaka, J.B. Bell, B.E. Griffith, and A. Donev. Efficient variable-coefficient finite-volume Stokes solvers. *arXiv :1308.460v2, math.NA*, 6 jan 2014.
- [11] J.-P. Caltagirone. *Discrete Mechanics*. ISTE, John Wiley & Sons, London, 2015.
- [12] J.-P. Caltagirone. Des conditions de compatibilité pour l'équation de Navier-Stokes. *Hal*, <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01527818>, 2017.
- [13] J.-P. Caltagirone and J. Breil. A vector projection method for solving the Navier-Stokes equations. *C.R. Acad. Sciences IIB*, 327 :1179–1184, 1999.
- [14] J.-P. Caltagirone and S. Vincent. Sur une méthode de pénalisation tensorielle pour la résolution des équations de Navier-Stokes. *C.R. Acad. Sciences IIB*, 329 :607–613, 2001.
- [15] J.-P. Caltagirone and S. Vincent. A Kinematics Scalar Projection Method (KSP) for Incompressible Flows with Variable Density. *Open Journal of Fluid Dynamics*, doi : 10.4236/ojfd.2015.52019, 5 :171–182, 2015.
- [16] J.-P. Caltagirone, S. Vincent, and C. Caruyer. A multiphase compressible model for the simulation of multiphase flows. *Computers & fluids*, 50 :24–34, 2006.
- [17] A.J. Chorin. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Math. Comput.*, 22 :745–762, 1968.
- [18] M. Fortin and R. Glowinski. *Méthodes de lagrangien augmenté, Application à la résolution numérique de problèmes aux limites*. Dunod, Paris, 1982.
- [19] J.L. Guermond, P. Mineev, and Jie Shen. An overview of projection methods for incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 195 :6011–6045, 2006.
- [20] J.L. Guermond and A. Salgado. A splitting method for incompressible flows with variable density based on a pressure Poisson equation. *J. Comput. Phys.*, 228 :2834–2846, 2009.

- [21] C.W. Hamman, J.C. Klewick, and Kirby R.M. On the Lamb vector divergence in Navier-Stokes flows. *J. Fluid Mech.*, 610 :261–284, 2008.
- [22] F.H. Harlow and J.E. Welch. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. *Physics of Fluids*, 8 :2182–2189, 1965.
- [23] A. Kozachok. Navier-Stokes first exact transformation. *Universal Journal of Applied Mathematics*, DOI : 10.13189/ujam.2013.010301, 1 :157–159, 2013.