



**HAL**  
open science

## Preuve formelle du théorème de Lax–Milgram

Sylvie Boldo, François Clément, Florian Faissole, Vincent Martin, Micaela Mayero

► **To cite this version:**

Sylvie Boldo, François Clément, Florian Faissole, Vincent Martin, Micaela Mayero. Preuve formelle du théorème de Lax–Milgram. 16èmes journées Approches Formelles dans l’Assistance au Développement de Logiciels, Jun 2017, Montpellier, France. hal-01581807

**HAL Id: hal-01581807**

**<https://hal.science/hal-01581807>**

Submitted on 5 Sep 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Preuve formelle du théorème de Lax–Milgram

Sylvie Boldo<sup>1</sup>      François Clément<sup>2</sup>      Florian Faissole<sup>1</sup>  
Vincent Martin<sup>3</sup>      Micaela Mayero<sup>4</sup>

## 1 Introduction

La méthode des éléments finis est fréquemment utilisée pour résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles qui interviennent par exemple en physique ou en biologie [4]. Pour augmenter la confiance dans les programmes qui l’implémentent, on doit commencer par la formalisation des notions mathématiques nécessaires à sa correction, à l’aide par exemple de preuves formelles. Le théorème de Lax–Milgram est l’un de ces résultats fondamentaux. Il permet, sous certaines hypothèses de coercivité et de complétude, de montrer l’existence et l’unicité de la solution de certains problèmes aux limites et de leur version discrète. Cet article présente une formalisation complète du théorème de Lax–Milgram dans l’assistant de preuves Coq, et utilise plus particulièrement la bibliothèque Coquelicot pour l’analyse réelle [2]. Des résultats mathématiques variés sont requis, provenant de l’algèbre linéaire, la géométrie et l’analyse fonctionnelle des espaces de Hilbert. Ce travail repose sur une preuve papier détaillée [3], est plus précisément décrit dans [1] et est disponible : <https://www.lri.fr/~sboldo/elfic/>.

## 2 Espaces de Hilbert

On étend, à l’aide du mécanisme de structures canoniques [5], la hiérarchie de la bibliothèque Coquelicot pour définir les espaces préhilbertiens et hilbertiens. Un espace préhilbertien est un module équipé d’un produit scalaire (avec les propriétés usuelles). On prouve qu’un espace préhilbertien est un module normé, dont la norme se dérive du produit scalaire. Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet. Dans ces espaces, on définit des notions géométriques comme le projeté orthogonal d’un vecteur sur un sous-espace ou le complémentaire orthogonal d’un sous-espace et on prouve formellement les résultats associés (lemmes d’existence ou de caractérisation).

On formalise les espaces d’applications linéaires, puis on vérifie l’équivalence entre plusieurs définitions de la continuité de telles fonctions. L’une d’elle est la finitude de la norme d’opérateur  $\|f\|$  d’une fonction  $f$  de  $E$  dans  $F$ , modules normés. On définit ainsi  $\text{c\_lm}(E, F)$  l’espace des applications linéaires continues et on prouve que la norme d’opérateur lui confère la structure de module normé (le cas  $F = \mathbb{R}$  est utilisé dans la preuve du théorème de Lax–Milgram et correspond au dual topologique  $E'$  de  $E$ ) :

```
Record c_lm := C_lm {
  m: > E -> F;          (* la fonction, avec une coercion pour usage direct *)
  Lf: is_linear_mapping m;  (* preuve de linéarité *)
  Cf: is_finite(operator_norm m)}. (* preuve de continuité *)
```

1. Inria, Université Paris-Saclay, F-91120 Palaiseau - LRI, CNRS & Univ. Paris-Sud, F-91405 Orsay
2. Inria, 2 rue Simone Iff, CS 42112, FR-75589 Paris cedex 12, France
3. LMAC, UTC, BP 20529, FR-60205 Compiègne, France
4. LIPN, Université Paris 13, CNRS UMR 703, Villetaneuse, F-93430, France

### 3 Preuves des théorèmes de Riesz–Fréchet et Lax–Milgram

Le théorème de Riesz–Fréchet est un résultat intermédiaire pour la preuve du théorème de Lax–Milgram. Il s’agit d’un résultat de représentation, qui identifie, à l’aide du produit scalaire, une fonction  $f$  de  $E'$  à un unique vecteur de l’espace hilbertien  $E$ . Ce théorème se démontre avec les lemmes de caractérisations du projeté orthogonal, le complémentaire orthogonal de  $\ker(f)$  et la complétude de  $E$ . Il est nécessaire de distinguer le cas où  $f$  est identiquement nulle, ce qui n’est pas décidable. Ainsi, on ajoute des hypothèses de décidabilité.

Le théorème de Lax–Milgram s’énonce comme suit :

**Théorème (Lax–Milgram).** *Soit  $E$  : Hilbert,  $f \in E'$ ,  $0 < \alpha$ ,  $\varphi : E \rightarrow Prop$  un sous-module complet. Soit  $a$  une forme bilinéaire sur  $E$ , bornée et  $\alpha$ -coercive.*

*On suppose  $\forall f \in E'$ ,  $\text{decidable}(\exists u \in E, u \in \ker(f) \wedge \neg\neg\varphi(u)) \wedge$   
 $(\forall u \in E, \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \text{decidable}(\exists w \in E, \varphi(w) \wedge \|u - w\| < \varepsilon))$ .*

*Alors :  $\exists! u \in E, \neg\neg\varphi(u) \wedge \forall v \in E, \neg\neg\varphi(v) \implies f(v) = a(u, v) \wedge \|u\|_E \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \|f\|_\varphi$ .*

Une simplification calculatoire et deux applications du théorème de Riesz–Fréchet permettent de se ramener à chercher l’unique point fixe d’une fonction contractante bien choisie. On applique alors un théorème de point fixe de Banach. On utilise les axiomes de *ProofIrrelevance* et de *FunctionalExtensionality* dans les preuves d’analyse fonctionnelle. Ceci étant, on ne fait pas appel à la logique classique et afin d’identifier certains points critiques, on préfère ajouter des hypothèses de décidabilité lorsque nécessaire ainsi que quelques doubles négations.

### 4 Conclusion

On obtient une preuve formelle complète du théorème de Lax–Milgram en Coq. Le développement Coq comporte environ 7 000 lignes de code, tout comme la preuve papier L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X d’environ 50 pages. L’usage de Coq et de Coquelicot pose des écueils non présents dans les preuves papier, comme la représentation des sous-espaces ou l’usage de filtres dans les raisonnements topologiques. Cette formalisation est la première étape d’un travail de certification autour de la méthode des éléments finis, qui vise à prouver des programmes l’implémentant.

### Références

- [1] S. Boldo, F. Clément, F. Faissole, V. Martin, and M. Mayero. A Coq Formal Proof of the Lax–Milgram theorem. In *6th Conference on Certified Programs and Proofs*, Paris, 2017.
- [2] S. Boldo, C. Lelay, and G. Melquiond. Coquelicot : A user-friendly library of real analysis for Coq. *Mathematics in Computer Science*, 9(1) :41–62, 2015.
- [3] F. Clément and V. Martin. The Lax–Milgram Theorem. A detailed proof to be formalized in Coq. Research Report RR-8934, Inria Paris, July 2016.
- [4] A. Ern and J-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [5] A. Mahboubi and E. Tassi. Canonical structures for the working coq user. In *Interactive Theorem Proving - 4th International Conference, ITP 2013, Rennes, France, July 22-26, 2013. Proceedings*, pages 19–34, 2013.