

Approche alternative à l'homogénéisation pour la modélisation des empilements de tôles–le cas harmonique linéaire

Laurent Krähenbühl, Riccardo Scorretti, Ronan Perrussel, Patrick Dular

▶ **To cite this version:**

Laurent Krähenbühl, Riccardo Scorretti, Ronan Perrussel, Patrick Dular. Approche alternative à l'homogénéisation pour la modélisation des empilements de tôles–le cas harmonique linéaire. Numélec 2017, Nov 2017, Paris, France. hal-01580380

HAL Id: hal-01580380
https://hal.science/hal-01580380

Submitted on 2 Apr 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approche alternative à l'homogénéisation pour la modélisation des empilements de tôles – *le cas harmonique linéaire.*

L. Krähenbühl[1], R. Scorretti[1], R. Perrussel[2], P. Dular[3]

[1]Université de Lyon, Ampère (CNRS UMR5005), Ecole Centrale de Lyon – laurent.krahenbuhl@ec-lyon.fr
[2]Laplace, CNRS UMR5213, INPT & UPS, Université de Toulouse, F-31071 Toulouse, France
[3]Université de Liège, ACE, Liège 4000, Belgique

Résumé **— Nous présentons une nouvelle approche pour la modélisation efficace d'un empilement de tôles, dans le cas harmonique linéaire : dans la situation *1D* où la forme de la solution est connue analytiquement suivant l'épaisseur de chaque tôle, la solution exacte en formulation (A, V) peut être représentée avec seulement un degré de liberté A_i par inter-tôle (plus une inconnue ∇V par tôle). En utilisant un élément d'ordre un par tôle, et en modifiant la perméabilité complexe utilisée, nous construisons une matrice d'éléments finis représentant exactement la solution *1D* pour la direction normale aux tôles. Nous montrons qu'il est possible, sans réelle perte de précision, de mailler moins fin le cœur du paquet de tôles, via un couplage avec l'homogénéisation classique. Des premiers résultats pour une extension *2D* sont également présentés. Cette technique pourrait aussi s'appliquer aux milieux conducteurs massifs, rendant possible la résolution sur un même maillage, aussi grand ou petit que soit le rapport entre δ et l'épaisseur des mailles de surface.**

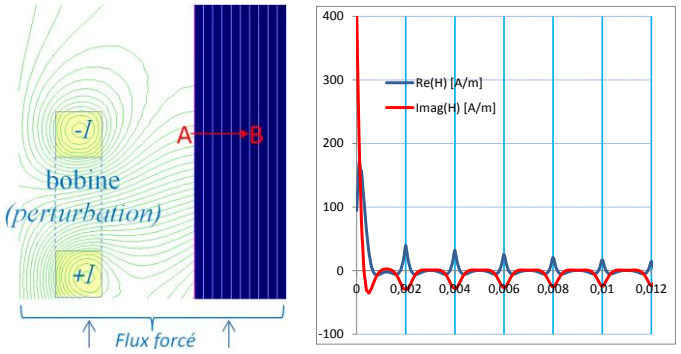
I. LE PROBLEME QUI SE POSE

Lorsqu'on force un flux harmonique à travers un noyau magnétique massif conducteur, l'effet de peau repousse les champs vers les surfaces de ce noyau. L'intérêt de l'empilement de tôles isolées électriquement les unes des autres est de limiter cet effet : aussi petit que soit le rapport entre la profondeur de pénétration et l'épaisseur des tôles, le flux principal imposé au noyau magnétique se répartit naturellement entre les tôles, ce qui améliore le comportement magnétique et diminue les pertes dues aux courants induits. Dans ce cas, l'induction moyenne à travers l'épaisseur de chaque tôle varie peu d'une tôle à l'autre (par rapport aux variations constatées pour un conducteur massif) ; les méthodes numériques d'homogénéisation permettent de calculer efficacement cette grandeur homogénéisée, en utilisant un maillage qui peut de ce fait être moins fin que l'épaisseur des tôles [1].

La situation peut néanmoins être, localement, très différente : par exemple, un champ de fuite à travers les tôles de la surface de l'empilement est source d'un effet de peau « classique », pouvant conduire à des variations locales très rapides de l'induction moyenne par tôle, avec circulation de courants nets non nuls dans la (ou les) première tôle (*Fig. 1*).

Ce travail a été partiellement financé par le GDR SEEDS 2994 du CNRS. Les auteurs remercient également les collègues suivants pour les utiles discussions et/ou travaux communs sur ce thème depuis de nombreuses années : F. Buret (Ampère), C. Poignard (INRIA Bordeaux), V. Péron (INRIA Pau) ; en Belgique : C. Geuzaine (ULg), R. Sabariego (KUL), J. Gyselinck (ULB) ; au Brésil : P. Kuo Peng, J.A. Bastos (UFSC), et C. Sartori (USP).

Il paraît à première vue impossible de prendre en compte simultanément ces deux phénomènes au travers d'une grandeur homogénéisée. Nous montrons néanmoins ci-dessous qu'il est possible de modéliser simultanément ces deux phénomènes via une formulation en potentiel vecteur d'ordre 1, à condition de modifier la perméabilité complexe habituelle du modèle homogénéisé et d'adapter le maillage des premières tôles à l'épaisseur de ces tôles.



(a) *Structure considérée (détail)* *(b)* *H vertical sur la ligne A-B*

Fig. 1 : Superposition dans un empilement de tôles d'un flux global et d'une perturbation latérale : apparition d'un effet de peau local.

Cette formulation est valable, avec le même maillage, pour toutes les fréquences, du statique jusqu'à la limite asymptotique haute fréquence des impédances de surface.

II. EXPLICATIONS SUR LE CAS 1D

A. Solution 1D exacte (A, V) dans l'empilement de tôles

Dans une tôle i d'épaisseur d centrée en x_i (intertôle i à gauche et $i+1$ à droite), on peut écrire le potentiel vecteur $a(\xi = x - x_i)$ de la manière suivante :

$$a(\xi) = A_{0,i}\,\alpha_0(\xi) + A_i\,\alpha_1(\xi) + A_{i+1}\,\alpha_2(\xi) \qquad (1)$$

avec les fonctions de forme suivantes (δ est l'épaisseur de peau) :

$$\alpha_0 = 1 - p;\ \alpha_1 = \frac{p-q}{2};\ \alpha_2 = \frac{p+q}{2}. \qquad (2)$$

$$p(\xi) = \frac{ch(k\xi)}{ch\left(\frac{kd}{2}\right)}; q(\xi) = \frac{sh(k\xi)}{sh\left(\frac{kd}{2}\right)}; k = \frac{1+j}{\delta}; -\frac{d}{2} \le \xi \le \frac{d}{2} \qquad (3)$$

Avec ce type de variation dans chaque tôle pour $a(x)$, l'équation magnétodynamique est *exactement* vérifiée pour tout x (x est la direction normale aux surfaces des tôles) :

$$\partial_x\left[\frac{1}{\mu}\partial_x a(x)\right] - j\omega\sigma\left[a(x) - A_{0,k}\right] = 0, \qquad (4)$$

sauf aux intertôles. La continuité de *a(x)* résulte des écritures précédentes, mais pas celle de sa dérivée $\frac{1}{\mu}\partial_x a = H_{tg}$.

De ce fait, la forme faible de (4) pour toute fonction test β_i valant δ_{ij} à l'intertôle j exprime la continuité de H_{tg} à l'intertôle i :

$$\frac{1}{\mu_i}\partial_\xi a_i(\xi)\Big|_{\xi=+\frac{d}{2}} = \frac{1}{\mu_{i+1}}\partial_\xi a_{i+1}(\xi)\Big|_{\xi=-\frac{d}{2}} \quad (5)$$

ce qui donne pour la i-ième ligne de la matrice l'expression (où $\underline{\sigma}$ et $\underline{\mu}$ sont les propriétés homogénéisées classiques [1]) :

$$\begin{aligned} 0 = I^i &= \frac{-1}{\underline{\mu} d}(A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}) \\ &+ j\omega\underline{\sigma} d\left(\frac{A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1}}{4} - \frac{A_{0,i} + A_{0,i+1}}{2}\right) \end{aligned} \quad (6)$$

B. *Ecriture standard à l'ordre 1 sur le même maillage*

Par ailleurs, la même équation (4) sous forme faible sur le même maillage, mais avec les fonctions de forme standards d'ordre un, donne l'équation suivante (écrite pour les propriétés modifiées σ^* et μ^*) :

$$\begin{aligned} 0 = J^i &= \frac{-1}{\mu^* d}(A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}) \\ &+ j\omega\sigma^* d\left(\frac{A_{i-1} + 4A_i + A_{i+1}}{6} - \frac{A_{0,i} + A_{0,i+1}}{2}\right) \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\frac{1}{\mu^* d} + \frac{j\omega\sigma^* d}{12}\right)(A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}) \\ &+ j\omega\sigma^* d\left(\frac{A_{i-1} + 2A_i + A_{i+1}}{4} - \frac{A_{0,i} + A_{0,i+1}}{2}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

Comparant (6) et (8), on obtient après quelques calculs que $J^{i+1} = I^{i+1}$ si $\sigma^* = \underline{\sigma}$ et si :

$$\frac{1}{\underline{\mu} d} = \frac{1}{\mu^* d} + \frac{j\omega\sigma^* d}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{\mu^*} = \frac{1}{\underline{\mu}}\left[1 - \frac{1}{3}th^2\frac{(1+j)d}{2\delta}\right] \quad (9)$$

Autrement dit, la matrice exacte I pour le problème *1D* peut être obtenue en assemblant J de manière standard, avec ce maillage spécifique, la conductivité homogénéisée habituelle et une perméabilité modifiée suivant (9) pour les petits rapports δ/d.

III. TESTS

Nous avons réalisé de nombreux tests [2], qu'il est difficile de présenter exhaustivement dans ce court résumé. Pour le *1D*, la *Fig. 2* illustre l'amélioration apportée ici par rapport à l'homogénéisation classique avec le même maillage minimal. L'écart semble faible sur le potentiel vecteur, mais on voit à droite que la conséquence sur la précision de calcul du champ est importante. L'erreur de la formulation classique sur les grandeurs énergétiques peut être évaluée, elle est sur cet exemple de l'ordre de 15%, mais elle peut dépasser 20% sur la première tôle, et même davantage si la grandeur imposée est le champ et non le flux.

Nous avons testé en *1D* la possibilité de ne traiter que les tôles de surface avec la nouvelle formulation, de manière à pouvoir élargir les mailles dans le cœur du noyau magnétique. La *Fig. 3* présente ainsi l'amélioration obtenue en utilisant la nouvelle formulation pour les 0, 1 ou 2 premières tôles de l'empilement (même δ/d qu'en *Fig. 2*).

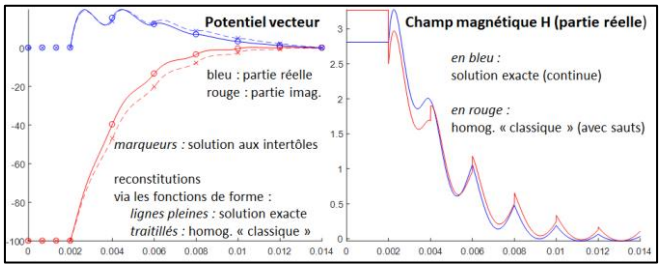


Fig. 2 : Exemple de comparaison de la solution exacte proposée avec l'homogénéisation « classique », pour le potentiel vecteur (à gauche) et H (à droite) avec le même maillage minimal. 2mm d'air et 6 tôles (μ_r=1000) de 2mm, δ=0.71mm, flux imposé.

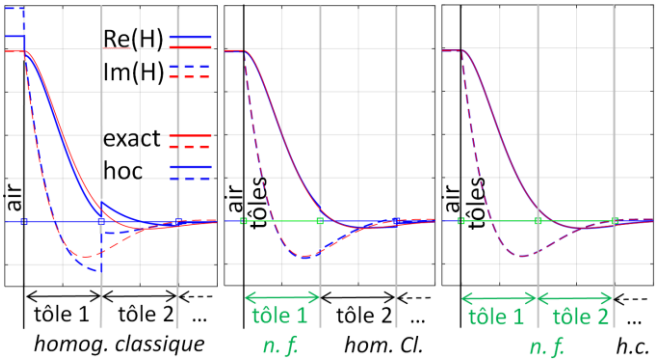


Fig. 3 : Mélange de formulation : 2 tôles en « nouvelle formulation » suffisent pour converger vers la solution exacte (toutes les tôles en « nouvelle formulation »). Système à 40 tôles, maillage élargi à partir de la tôle 7.

Des tests en *2D* ont également été initiés. Il existe plusieurs techniques pour étendre la formulation, qui seront discutées à la conférence. La configuration test est celle de la *Fig. 1*, le noyau n'étant excité que par la bobine. La méthode a été implémentée sous *Matlab*, et des comparaisons ont été faites par rapport aux résultats donnés par *Flux2D* et *Getdp* avec des maillages très fins adaptés. Les différences de résultats obtenus, invisibles sur les tracés, sont de l'ordre du bruit numérique, dans les conditions très variées qui ont été testées (1Hz à 10kHz, perméabilité relative entre 1 et 1000, δ/d entre 25% et 200%). On peut aussi formellement vérifier que (8) a pour limites la condition d'impédance classique et la solution statique, respectivement pour les petits et les grands δ/d.

Nous espérons pouvoir présenter à la conférence des résultats *2D* et *3D* sur des structures réalistes, ainsi qu'une discussion sur l'utilisation de la même idée pour traiter les premières couches des maillages des conducteurs massifs, sans qu'il ne soit plus nécessaire d'adapter leur épaisseur à la profondeur de pénétration.

REFERENCES

[1] L. Krähenbühl, P. Dular, T. Zeidan and F. Buret, *Homogenization of Lamination Stacks in Linear Magnetodynamics, IEEE T-Mag* 40-2, pp. 912-915, 2004.

[2] L. Krähenbühl, R. Scorretti, R. Perrussel, P. Dular, Rapport interne sur *une approche alternative à l'homogénéisation pour la modélisation des empilements de tôles*, Laboratoire Ampère, 2017. *Disponible sur* https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01516189.