



**HAL**  
open science

# Un schéma volumes finis pour la simulation d'écoulements diphasiques gaz particules à deux phases incompressibles sur maillage triangulaire

Sylvain Boivin, Florent Cayré, Jean-Marc Hérard

► **To cite this version:**

Sylvain Boivin, Florent Cayré, Jean-Marc Hérard. Un schéma volumes finis pour la simulation d'écoulements diphasiques gaz particules à deux phases incompressibles sur maillage triangulaire. *Revue Européenne des Éléments Finis*, 2001, 10 (5), pp.539-574. hal-01580056

**HAL Id: hal-01580056**

**<https://hal.science/hal-01580056v1>**

Submitted on 23 Dec 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un schéma volumes finis pour la simulation d'écoulements diphasiques gaz-particules à deux phases incompressibles sur maillage triangulaire

SYLVAIN BOIVIN\*- FLORENT CAYRÉ\*,\*\*,\*\*\*- JEAN-MARC HÉRARD\*\*\*,\*\*\*\*

\* Département d'Informatique et de Mathématique. Université du Québec à Chicoutimi. 555, boulevard de l'Université. Chicoutimi. Québec. Canada G7H 2B1.

\*\*Groupe Interdisciplinaire de Recherche en Eléments Finis. Université Laval à Québec. Pavillon Adrien Pouliot. Québec. Canada G1K 7P4.

\*\*\*Département MFTT. Division Recherche et Développement. Electricité de France. 6 quai Watier. 78400 Chatou. France.

\*\*\*\*Centre de Mathématique et d'Informatique. Université de Provence. 39 rue Joliot Curie. 13453 Marseille cedex 13. France.

RESUME - On présente dans cette note une méthode de discrétisation Volumes Finis sur maillage triangulaire pour la résolution de systèmes diphasiques comportant deux phases incompressibles. Le système d'équations considéré pour décrire le milieu diphasique comporte une contrainte stationnaire représentant un bilan de masse volumique. Dans ce système, la pression moyenne associée n'a pas de sens thermodynamique. Le système à quatre équations considéré permet de représenter des écoulements de gaz comportant des particules, en régime dilué ou dense, lorsque les effets de turbulence peuvent être négligés. Il importe de noter que les effets de pression granulaire doivent être pris en compte si l'on souhaite préserver le principe du maximum sur la variable taux de présence.

ABSTRACT - A Finite Volume scheme is presented herein, which enables computing two phase flows with constant densities on triangular meshes. The governing set of equations used to account for the two phase flow pattern contains a stationary constraint associated to some divergence free velocity field. The mean pressure has no thermodynamical meaning. The four equation system describes a gas medium loaded with particules in a diluted or dense regime, by neglecting turbulent effects and accounting for granular pressure. It is emphasised that granular pressure effects are compulsory to ensure the maximum principle for the void fraction.

MOTS CLES: Volumes Finis, écoulements diphasiques, maillages triangulaires

KEY WORDS: Finite-Volume, two-phase flows, triangular meshes

## 1. Introduction

Il apparaît dans la classe des modèles à deux fluides une classe particulière correspondant au cas où les densités des deux fluides sont constantes. Ce cadre correspond bien aux écoulements de gaz-particules pour des faibles vitesses dans la phase fluide, et donc lorsque les effets de compressibilité du gaz sont faibles, ce qui est un cadre d'approximation classique pour des applications au calcul de lits fluidisés denses ou circulants. Dans ce cas, le système des deux équations d'évolution de bilan de masse de phase est équivalent au système formé par une contrainte stationnaire et l'équation d'évolution du taux de présence volumique de la phase particulaire. La contrainte stationnaire montre que le champ de vitesse  $\alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2$  est solénoïdal. Comme dans le cas des équations de Navier-Stokes en situation isovolume, il est clair que l'algorithme de résolution global doit prendre en compte cette particularité, sous peine de graves déboires. C'est précisément l'objet du présent travail. Celui-ci synthétise en quelque sorte les travaux de [BOI 99] et de [COM 99]. Deux difficultés essentielles vont apparaître ici. La première correspond en fait à la simulation des écoulements monophasiques incompressibles sur maillage non structuré avec colocalisation des variables, point examiné dans la première référence. La seconde correspond à la prise en compte des effets de pression granulaire, qui permet alors à la variable taux de présence volumique de satisfaire au principe du maximum. La modélisation s'appuie sur ce point sur les travaux issus notamment de [BOE 97], [BAL 95], [GOL 96], [JEN 83]. Une version de ces modèles est fréquemment utilisée dans les codes diphasiques pour augmenter l'étendue du domaine d'hyperbolicité, pour des simulations d'écoulements dilués. Elle est par contre cruciale dans le cas dense, lorsque le taux de compactage maximal est strictement inférieur à l'unité. Il paraît important de signaler que la méthode ne concerne que les écoulements diphasiques à deux phases incompressibles. D'autre part, la mise en œuvre numérique ne peut être effectuée que sur maillage triangulaire, si l'on souhaite bénéficier des résultats théoriques de convergence des schémas de diffusion, mais également de la technique particulière de reconstruction du champ de vitesse à l'issue de l'étape de projection (vitesse constante par maille telle que la vitesse normale d'interface soit continue). On peut cependant éventuellement envisager une mise en œuvre sur maillage rectangulaire en bénéficiant des mêmes propriétés.

Dans un premier temps, on donne le système d'équations considéré qui permet de représenter les écoulements à deux phases incompressibles lorsque l'on retient le modèle à deux fluides. Les fermetures sont données, et la forme de pression granulaire retenue est précisée. Le schéma en temps est ensuite décrit, et les schémas en espace considérés sont précisés. La mise en œuvre est réalisée sur maillage non structuré de type triangulaire, les schémas de diffusion associés étant issus des propositions formulées dans [EYM 00], et par ailleurs testés dans [CAY 97] et [BOI 99]. L'algorithme global est en fait basé sur une méthode de résolution de type prédicteur-correcteur. Dans la première phase,

le prédicteur permet de faire évoluer en temps les composantes taux de présence volumique de phase particulière et quantité de mouvement pour chaque phase, les effets de gradient de pression étant assimilés à ceux de termes sources tout comme les effets de pesanteur. Les effets de traînée statique sont stabilisés dans cette étape par implicitation linéaire, tandis que les flux convectifs sont décentrés en espace. Il est ensuite nécessaire d'effectuer une étape de projection dans l'algorithme à l'issue de la phase de prédiction. Cette opération est réalisée en se basant sur l'approche dite "RT0", conformément à l'algorithme de résolution des équations de Navier-Stokes en situation incompressible monophasique décrit dans un travail précédent. On montre que l'algorithme permet de reproduire des écoulements dilués à denses, en considérant des cas tests élémentaires. Dans un premier temps une validation élémentaire du schéma de convection permet de confirmer le bon comportement du schéma de Rusanov, sur la base de simulations de problèmes de Riemann comportant une structure de type détente-choc, choc-choc, détente-détente au sein de la phase granulaire isolée. Un cas test particulièrement délicat de simulation bidimensionnelle d'effets de compactage permet ensuite d'évaluer la robustesse de l'algorithme, qui prend en compte l'ensemble des phénomènes physiques, incluant ainsi les effets de pesanteur, de traînée statique, de pression moyenne dans la phase gazeuse et de pression granulaire, et les effets convectifs. Tous les développements ont été réalisés en langage *C++*.

## 2. Système d'équations

On écrit tout d'abord les équations eulériennes de bilan valables à l'intérieur de chaque région purement monophasique, puis par des processus de moyennes, on étend les équations à tout le domaine :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) + \Gamma_k = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k \otimes \underline{U}_k) + \nabla \cdot (\alpha_k \rho_k \langle \underline{u}'_k \otimes \underline{u}'_k \rangle_k) \\ + \alpha_k \nabla P_k - \nabla \cdot (\alpha_k \underline{\tau}_k) + \underline{L}_k = \alpha_k \rho_k \underline{F} \end{aligned}$$

où :

$\alpha_k$	désigne la fraction volumique de la phase $k$ ,
$\underline{U}_k$	la vitesse moyenne de la phase $k$ ,
$\underline{u}'_k$	la fluctuation de vitesse de la phase $k$ ,
$\Gamma_k$	la densité volumique des apports de masse à la phase $k$ , résultant des échanges aux interfaces,

$P_k$	la pression phasique de la phase $k$ ,
$\underline{\underline{\tau}}_k$	le tenseur des contraintes visqueuses de la phase $k$ ,
$\underline{\underline{I}}_k$	le terme de transfert de quantité de mouvement interfacial de la phase $k$ .

On modélise ensuite les transferts qui ont lieu aux interfaces de chaque phase par des lois de fermeture spécifiques aux écoulements gaz-particules. Dans toute la suite, on désigne la phase gazeuse par l'indice  $k = 1$  et la phase solide par  $k = 2$ . Naturellement, on a par définition:  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . On suppose de plus que les deux phases sont incompressibles:  $\rho_1$  et  $\rho_2$  sont deux constantes.

Les lois de fermeture pour les écoulements de type gaz-particules utilisées ici sont :

- Terme d'échange de masse nul :

$$\Gamma_k = 0$$

- Pas de déséquilibre de pression entre les phases :

$$P_1 = P_2 = P$$

- Tenseur turbulent de la phase gazeuse négligé :

$$\langle \underline{\underline{u}}'_1 \otimes \underline{\underline{u}}'_1 \rangle_1 = 0$$

- Tenseur des contraintes visqueuses pour la phase gazeuse :

$$\underline{\underline{\tau}}_1 = \mu_1 (\nabla \underline{\underline{u}}_1 + {}^T \nabla \underline{\underline{u}}_1 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{\underline{u}}_1) \underline{\underline{Id}})$$

- Pour la phase solide dispersée :

$$\rho_2 \langle \underline{\underline{u}}'_2 \otimes \underline{\underline{u}}'_2 \rangle_2 - \underline{\underline{\tau}}_2 = \rho_2 \Theta(\alpha_2) \underline{\underline{Id}} - \mu_2 (\nabla \underline{\underline{u}}_2 + {}^T \nabla \underline{\underline{u}}_2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{\underline{u}}_2) \underline{\underline{Id}})$$

$$\text{où: } \alpha_2 \Theta(\alpha_2) = \langle q_2^2 \rangle_0 \left( \alpha_2 + 2 (\alpha_2)_{max} \ln \left( \frac{\alpha_2_{max} - \alpha_2}{\alpha_2_{max}} \right) - \frac{\alpha_2 \alpha_2_{max}}{\alpha_2 - \alpha_2_{max}} \right).$$

La forme de la pression inter-granulaire  $\Theta(\alpha_2)$  choisie permet de prendre en compte les écoulements dilués comme les écoulements denses en particules (car  $\Theta(\alpha_2)$  tend vers l'infini quand  $\alpha_2$  tend vers  $\alpha_2_{max}$ ). Le carré de la célérité associée à cette pression est :

$$c_2^2 = (\alpha_2 \Theta(\alpha_2))' = \langle q_2^2 \rangle_0 \left( \frac{\alpha_2}{\alpha_2_{max} - \alpha_2} \right)^2$$

- Terme de quantité de mouvement interfacial :

$$\underline{\underline{I}}_1 = -\underline{\underline{I}}_2 = \underline{\underline{I}} = -\alpha_1 \alpha_2 K_T \underline{\underline{U}}_r$$

$$\text{où } K_T = \begin{cases} \frac{3}{4} \frac{C_d}{d_2} \rho_1 \alpha_1^{-2,7} \|\underline{U}_r\| & \text{si } \alpha_2 < 0,2 \\ \frac{\rho_1}{\alpha_1 d_2} (\alpha_2 \frac{150}{Re} + 1,75 \|\underline{U}_r\|) & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{avec } Re = \alpha_1 \frac{d_2}{\nu_1} \|\underline{U}_r\|$$

$$\text{et } C_d = \begin{cases} \frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,7}) & \text{si } Re < 1000 \\ 0,44 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le vecteur  $\underline{U}_r = \underline{U}_2 - \underline{U}_1$  désigne la vitesse relative entre les deux phases, et  $C_d$  un coefficient de traînée. L'expression de  $K_T$  provient de la modélisation de la traînée d'une sphère isolée pour les écoulements dilués (si  $\alpha < 0,2$ ), de la loi d'Ergun pour les écoulements denses. Elle s'écrit en fonction du nombre de Reynolds moyen  $Re$  associé aux particules, de même diamètre  $d_2$ .

Finalement, le système à résoudre est le suivant :

$$\nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1) = 0 \quad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0 \quad [2]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_1} \nabla P + \frac{\underline{I}}{\rho_1} \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_1 \mu_1}{\rho_1} (\nabla \underline{U}_1 + {}^T \nabla \underline{U}_1 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_1) \underline{Id}) \right) = -\alpha_1 \underline{g} \end{aligned} \quad [3]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P - \frac{\underline{I}}{\rho_2} + \nabla (\alpha_2 \Theta (\alpha_2)) \\ - \nabla \cdot \left( \frac{\alpha_2 \mu_2}{\rho_2} (\nabla \underline{U}_2 + {}^T \nabla \underline{U}_2 - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{U}_2) \underline{Id}) \right) = -\alpha_2 \underline{g} \end{aligned} \quad [4]$$

auquel on adjoint la relation :  $\alpha_1 = 1 - \alpha_2$ . On se référera à [BAL 95], [BOE 97], [CHR 98], [COM 97], [COM 99], [GID 94], [GOL 96], [JEN 83], [ROG 98a], [ROG 98b] pour plus de détails concernant la modélisation des effets de compactage par la pression granulaire.

Le modèle global fermé ainsi proposé est assez classique, à l'exception peut-être des termes de pression granulaire. Il contient des termes sources liés aux effets de pesanteur et de transfert de quantité de mouvement interfacial ou seuls ont été considérés les termes de traînée statique, les effets de masse ajoutée ayant été omis. Ceci constitue une hypothèse concensuelle dans le cadre

de la modélisation des écoulements de type gaz-particules. Il contient également des termes diffusifs dans chaque phase, et des termes faisant intervenir des dérivées spatiales du premier ordre, qui se présentent sous forme conservative hormis les termes proportionnels au gradient de pression moyenne. La somme des équations de bilan de quantité de mouvement retrouve néanmoins une forme naturellement conservative, puisque :  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ . Il faut noter que le champ de vitesse des particules voit l'effet du gradient de pression moyen, même dans le cadre dilué (faible taux de présence  $\alpha_2$ ). Les effets de pression granulaire ont un effet négligeable sur la distribution de vitesses de particules dans le contexte dilué, et jouent un rôle prépondérant dans le cadre dense (fort taux de présence  $\alpha_2$ , la borne supérieure physiquement admissible étant alors strictement inférieure à un, et appelée taux de compactage maximal). Si l'on considère en effet un milieu constitué de particules dans un vide de gaz, le sous-système constitué des deux équations de bilan masse et de dynamique des particules est de type Euler isentropique muni de cette loi de pression granulaire. Dans ce cas, et pour une configuration de conditions initiales pour un problème de Riemann unidimensionnel admettant une solution en double choc, cette forme de pression granulaire permet de transformer l'énergie cinétique incidente en énergie de pression sans violation de la borne supérieure pour le taux de présence  $\alpha_2$ . Les effets de turbulence dans la phase gazeuse ont été négligés, ainsi que les effets de compressibilité du gaz, ce qui est un cadre d'approximation classique pour des applications au calcul de lits fluidisés denses ou circulants.

On notera enfin que l'on dispose d'une équation d'énergie totale pour le système. En introduisant en effet les grandeurs suivantes :

$$E = \sum_{k=1,2} \frac{\alpha_k \rho_k \underline{U}_k \underline{U}_k}{2} + \rho_2 \eta(\alpha_2)$$

$$\underline{F} = \sum_{k=1,2} \left\{ \frac{\alpha_k \rho_k \underline{U}_k \underline{U}_k}{2} \right\} \underline{U}_k + P \left( \sum_{k=1,2} \alpha_k \underline{U}_k \right) + \rho_2 \mu(\alpha_2) \underline{U}_2$$

où les fonctions vérifient :

$$\mu(\alpha_2) = \eta(\alpha_2) + \alpha_2 \Theta(\alpha_2)$$

$$\eta'(\alpha_2) = \int_0^{\alpha_2} \frac{(\alpha_2 \Theta(\alpha_2))'}{\alpha_2} d\alpha_2$$

on peut obtenir l'identité :

$$\frac{\partial}{\partial t} (E) + \nabla \cdot (\underline{F}) - \nabla \cdot \left( \sum_{k=1,2} \underline{\Sigma}_k \underline{U}_k \right) = S$$

en posant :

$$S = - \left( \sum_{k=1,2} \alpha_k \rho_k \underline{U}_k \right) \underline{g} - \underline{I} \cdot \{ \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \} - \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left( \underline{\Sigma}_k : \nabla^s \underline{U}_k \right)$$

Dès lors, pour un système fermé présentant des conditions d'attachement sur le bord complet du domaine d'intégration  $\Omega$ , on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \int_{\Omega} E \, d\Omega \right) \leq - \int_{\Omega} \left( \sum_{k=1,2} (\alpha_k \rho_k \underline{U}_k) \cdot \underline{g} \right) d\Omega$$

étant donné la forme du terme de transfert interfacial de quantité de mouvement  $\underline{I}$ , et celle de :

$$\underline{\underline{\Sigma}}_k = \alpha_k \mu_k \left( \nabla \underline{u}_k + {}^T \nabla \underline{u}_k - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{u}_k) \underline{\underline{Id}} \right)$$

Il est intéressant de comparer cette inégalité à l'inégalité d'entropie décrite dans [COM 99]. Dans ce cadre en effet, l'inégalité d'entropie permettait de sélectionner les solutions faibles admissibles (y compris les chocs). Dans le cadre non visqueux, elle ne peut par contre pas servir de relation de 'fermeture' pour les chocs.

### 3. Schéma global

Les forces effectivement prises en compte dans les développements sont la convection, le gradient de pression, la traînée et les effets de pesanteur. Les effets visqueux ont été volontairement omis, car on cherche en effet dans un premier temps à s'assurer de la stabilité numérique du schéma global en l'absence de ces effets physiques stabilisants. La prise en compte des effets de diffusion doit *a priori* s'effectuer à l'aide d'un schéma tel que celui proposé dans [HER 95] et [EYM 00] si l'on désire bénéficier de bonnes propriétés de convergence, pour une simplicité et un coût de fonctionnement informatique minimal.

Le schéma global est scindé en deux parties :

- un prédicteur qui intègre les contributions de la convection (y compris la pression inter-granulaire), de la traînée, le gradient de pression et les termes-sources volumiques;
- un correcteur de pression (sans sens thermodynamique) prenant notamment en compte la contrainte stationnaire  $\nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2) = 0$ , qui doit être traitée séparément.

Dans toute la suite, on utilise le vecteur d'état dans  $\mathfrak{R}^5$  suivant :

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \alpha_2 U_{2_x} \\ \alpha_2 U_{2_y} \\ \alpha_1 U_{1_x} \\ \alpha_1 U_{1_y} \end{bmatrix}$$



Le schéma de diffusion retenu est utilisé dans le calcul des effets de viscosité et dans le correcteur de pression. Il contraint à considérer comme valeur de maille à la fois pour les champs de vitesse et de pression, la valeur à l'*Intersection Des Bissecteurs Orthogonaux (I.D.B.O)*. Ce choix du point de co-localisation remplace celui, plus classique, du centre de gravité, et permet notamment d'obtenir une approximation précise et simple des gradients normaux aux interfaces des cellules (voir [GAL 92], [EYM 00], [HER 95], [BOI 99], [BAR 96]). L'*I.D.B.O* est défini dans le cas des maillages triangulaires comme l'intersection des médiatrices des côtés des cellules (voir figure 1), mais est aussi défini dans le cas des tétraèdres (comme le point de concourance des plans médiateurs des arêtes d'une cellule).

La prise en compte des effets de diffusion sur les composantes de vitesse contraint à prendre comme valeur de référence la valeur de maille à l'*Intersection Des Bissecteurs Orthogonaux* (voir [GAL 92], [EYM 00], [HER 95], [BOI 99], [BAR 96]). Il est ainsi utile de distinguer trois types de maillages (de type  $M_1, M_2, M_3$  au sens de [CAY 97] : voir figure 2). La première correspond à des angles au sommet inférieurs à 90 degrés. La seconde catégorie contient les maillages tels que la somme des deux angles aux sommets opposés à une face commune à deux triangles ne dépasse pas 180 degrés. Dans la troisième catégorie deux *I.D.B.O* associés à deux éléments adjacents peuvent commuter. De surcroît, le correcteur de pression impose de considérer la valeur de pression en ce même lieu géométrique. On verra que l'élimination de la variable vitesse permettant de transformer le système couplé vitesse-pression dans l'étape de projection en un problème portant seulement sur la variable pression nécessite de définir des vitesses normales d'interface qui imposent une estimation des dérivées normales d'interface entre deux triangles. L'utilisation d'une approximation de variable pression au centre de gravité des éléments pour la reconstruction des dérivées normales d'interface engendrerait un fort surcoût qui est d'autant moins justifié que l'on ne dispose pas de preuve de convergence des schémas proposés dans la littérature à cet effet.

En ce qui concerne l'approximation des flux convectifs, on se base dans cette première approche sur le flux de Rusanov ([RUS 61]), qui, pour les systèmes sous-jacents considérés ici, qui sont de la classe Euler ou Euler isentropique, possède des propriétés structurelles de préservation de la positivité de maille pour la variable densité (ou ici le taux de présence volumique) intéressantes dans le cas explicite pur ou implicite pur (voir annexe A). Une alternative possible et naturelle à ce schéma est le schéma de Godunov([GOD 59]), ou encore le schéma VFroe ([BUF 00]) utilisant les variables non conservatives adaptées au cadre des équations de type Euler isentropique pour la phase particulière ([BUF 98]).

### 3.1. Prédicteur

Pour cette étape, les équations continues sont les suivantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla P - \frac{\underline{I}}{\rho_2} + \nabla (\alpha_2 \Theta (\alpha_2)) = -\alpha_2 \underline{g}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_1} \nabla P + \frac{\underline{I}}{\rho_1} = -\alpha_1 \underline{g}$$

La solution  $\underline{W}^*$  obtenue sera alors la condition initiale de l'étape de correction. Cette approche a l'intérêt de garantir un principe du maximum continu sur le variable taux de présence volumique lié au couplage entre l'équation de bilan de masse de phase particulaire et l'équation de bilan de quantité de mouvement des particules, cette dernière comportant un terme de pression granulaire présentant une singularité au voisinage du taux de compactage maximal ([COM 99]).

#### 3.1.1. Discrétisation en temps

Dans le prédicteur, on choisit *a priori* de stabiliser la traînée en implicitant le coefficient  $\alpha_1 \alpha_2 K_T$ . La discrétisation en temps est donc la suivante :

$$\begin{aligned} \underline{W}^* + \Delta t (\alpha_1 \alpha_2 K_T)^n \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\rho_2} \\ -\frac{\underline{U}_2 - \underline{U}_1}{\rho_1} \end{pmatrix}^* &= \underline{W}^n \\ -\Delta t \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) \\ \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2 + \alpha_2 \Theta_2 (\alpha_2) \underline{Id}) \\ \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) \end{pmatrix}^n}_{convection} \right] & \\ -\Delta t \left[ \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\alpha_2}{\rho_2} (\nabla P) \\ \frac{\alpha_1}{\rho_1} (\nabla P) \end{pmatrix}^n + \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha_2 \underline{g} \\ \alpha_1 \underline{g} \end{pmatrix}^n}_{sources} \right] & \end{aligned} \quad [5]$$

### 3.1.2. Discrétisation des flux convectifs par le schéma de Rusanov

Dans toute la suite, on utilise pour la convection les valeurs de maille. Afin d'augmenter la précision en espace et de conserver le respect du principe du maximum sur tous les types de maillages (voir [CAY 97]), ces valeurs peuvent être reconstruites à partir des valeurs des variables aux points de co-localisation, les *I.D.B.O.*, grâce à une méthode du type de celle présentée dans [BOI 99]. Ceci n'a cependant pas été implémenté ici et les tests ont tous été effectués sur des maillages suffisamment réguliers (de type  $M_2$  au sens de [CAY 97]: voir figure 2). Ainsi, la valeur de maille est approximée (à l'ordre un) par la valeur à l'*I.D.B.O.* Avant de décrire l'application du schéma de Rusanov au cadre de notre système, nous allons rappeler la forme générique de ce schéma pour un système hyperbolique conservatif quelconque, en dimension un et deux en espace.

**Schéma de Rusanov unidimensionnel.** On traite donc tout d'abord le problème unidimensionnel hyperbolique et conservatif suivant :

$$\underline{W}_t + (\underline{F}(\underline{W}))'_x = \underline{0}$$

On le discrétise en temps avec un simple schéma d'Euler explicite, et en espace avec le schéma de Rusanov :

$$\underline{W}^{n+1} = \underline{W}^n - \Delta t \nabla_x \underline{F}^{Rus}(\underline{W}^n)$$

Par hypothèse, la jacobienne des flux  $\underline{F}'_{\underline{W}}(\underline{W})$  est diagonalisable dans  $\mathbb{R}^N$ . Ses valeurs propres classées par ordre croissant sont notées :  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ .

Le flux de Rusanov à l'interface des éléments  $i$  et  $i + 1$  est alors :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_{i+1}) = \frac{1}{2} (\underline{F}(\underline{W}_i) + \underline{F}(\underline{W}_{i+1})) - \frac{1}{2} \rho_{Rus} (\underline{W}_{i+1} - \underline{W}_i)$$

où :

$$\rho_{Rus} = \max_{k \in \{i, i+1\}} \{ |\lambda_1^k|, |\lambda_2^k|, \dots, |\lambda_N^k| \}$$

**Extension au cadre bidimensionnel.** Le problème est le suivant :

$$\underline{W}_t + (\underline{F}(\underline{W}))'_x + (\underline{G}(\underline{W}))'_y = \underline{0}$$

On définit pour un vecteur normal  $\underline{n}(n_x, n_y)$  quelconque :

$$\mathcal{F}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}(\underline{W}) + n_y \underline{G}(\underline{W}) \quad \text{et} \quad \mathcal{F}'_{\underline{W}}(\underline{W}, \underline{n}) = n_x \underline{F}'_{\underline{W}}(\underline{W}) + n_y \underline{G}'_{\underline{W}}(\underline{W})$$

On suppose que  $\mathcal{F}'_{\underline{W}}$  est diagonalisable. On note alors :

$$\rho_{Rus}(\underline{W}_i, \underline{n}) = \max\{|\lambda_1^i|, |\lambda_2^i|, \dots, |\lambda_N^i|\}$$

où les  $\lambda_l^i$ ,  $l \in \{1, 2, \dots, N\}$  sont les valeurs propres de  $\mathcal{F}'_{\underline{W}}(\underline{W}_i, \underline{n})$ .

Le flux de Rusanov vaut alors :

$$\begin{aligned} \underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} \{ \mathcal{F}(\underline{W}_i, \underline{n}_{ij}) + \mathcal{F}(\underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) \} \\ &\quad - \frac{1}{2} \max_{k \in \{i, j\}} \{ \rho_{Rus}(\underline{W}_k, \underline{n}_{ij}) \} (\underline{W}_j - \underline{W}_i) \end{aligned}$$

**Application au prédicteur du système diphasique (1-4).** On note  $V(i)$  l'ensemble des voisins de l'élément  $i$ . Soit  $i$  un élément de volume  $\Omega_i$  du domaine de calcul  $\Omega$  qui n'est pas en contact avec le bord  $\partial\Omega$  (le schéma d'intégration pour les éléments touchant le bord est formellement identique, si ce n'est que le flux sur l'arête de bord est traité à l'aide d'un état  $j$  extérieur au domaine  $\Omega$  - voir paragraphe 3.1.3.). L'intégration de l'équation (5) sur l'élément  $i$  donne alors :

$$\begin{aligned} \underline{W}_i^* + \Delta t (\alpha_1 \alpha_2 K_T)_i^n \left( \begin{array}{c} 0 \\ \underline{u}_2 - \underline{u}_1 \\ -\frac{\underline{u}_2^{\rho_2} - \underline{u}_1}{\rho_1} \end{array} \right)_i^* &= \underline{W}_i^n \\ - \frac{\Delta t}{\Omega_i} \sum_{j \in V(i)} l_{ij} \left[ \underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) + \left( \begin{array}{c} 0 \\ \frac{\alpha_{2,i}}{d_{1,i}} P_{ij} \underline{n}_{ij} \\ \frac{d_{1,i}^2}{\rho_1} P_{ij} \underline{n}_{ij} \end{array} \right)^n \right] \\ - \Delta t \left( \begin{array}{c} 0 \\ \alpha_{2,i} \underline{g} \\ \alpha_{1,i} \underline{g} \end{array} \right)^n & \end{aligned}$$

avec :

- comme expression du flux de Rusanov :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) = \frac{1}{2} \begin{cases} \alpha_{2_i}^n \underline{U}_{2_i}^n \cdot \underline{n}_{ij} + \alpha_{2_j}^n \underline{U}_{2_j}^n \cdot \underline{n}_{ij} - (\rho_{Rus})_{ij}^n (\alpha_{2_j}^n - \alpha_{2_i}^n) \\ (\alpha_{2_i}^n \underline{U}_{2_i}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{2_i}^n + (\alpha_{2_j}^n \underline{U}_{2_j}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{2_j}^n \\ + (\alpha_{2_i}^n \Theta(\alpha_{2_i}^n) + \alpha_{2_j}^n \Theta(\alpha_{2_j}^n)) \underline{n}_{ij} \\ - (\rho_{Rus})_{ij}^n (\alpha_{2_j}^n \underline{U}_{2_j}^n - \alpha_{2_i}^n \underline{U}_{2_i}^n) \\ (\alpha_{1_i}^n \underline{U}_{1_i}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{1_i}^n + (\alpha_{1_j}^n \underline{U}_{1_j}^n \cdot \underline{n}_{ij}) \underline{U}_{1_j}^n \\ - (\rho_{Rus})_{ij}^n (\alpha_{1_j}^n \underline{U}_{1_j}^n - \alpha_{1_i}^n \underline{U}_{1_i}^n) \end{cases}$$

où le rayon spectral  $(\rho_{Rus})_{ij}^n$  vaut :

$$(\rho_{Rus})_{ij}^n = \max_{k=i,j} \{ |\underline{U}_{2_k}^n \cdot \underline{n}_{ij}| + c_{2_k}^n, 2 |\underline{U}_{1_k}^n \cdot \underline{n}_{ij}| \}$$

– comme pression à l'interface :

$$P_{ij}^n = t_{ij} P_i^n + (1 - t_{ij}) P_j^n$$

où  $t_{ij} = \frac{(x_j - x_{ij}) \cdot (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2}$ , avec  $x_i$  l'I.D.B.O. de la maille  $i$ ,  $x_j$  celui de la maille  $j$ , et  $x_{ij}$  le milieu de l'arête.

Le nombre de CFL considéré dans les applications est basé sur la définition suivante :

$$CFL = \frac{\Delta t \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij}}{2\Omega_i}$$

Cette définition est basée sur le respect de la positivité de la variable  $\alpha_2$  dans le schéma de Rusanov (voir annexe A).

### 3.1.3. Les conditions aux limites pour la phase de prédiction

**Conditions de paroi.** Les conditions aux limites de paroi ont été traitées de façon simple grâce à l'introduction d'un état miroir (comme dans [COM 97]). On calcule alors le flux convectif à l'interface de la même façon qu'à l'intérieur du domaine.

Soit  $\sigma_i$  une arête de bord, connectée à la maille  $i$  de vecteur d'état associé  $\underline{W}_i$ . On note  $\underline{n}_{i\hat{\gamma}}$  le vecteur unitaire normal à la paroi dirigé vers l'extérieur du domaine, et  $\underline{t}_{i\hat{\gamma}}$  un vecteur unitaire tangent à la paroi. Alors l'état miroir  $\underline{W}_{\hat{\gamma}}$  est lié à  $\underline{W}_i$  par les relations :

$$\underline{W}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{2_i} \\ \underline{U}_{2_i} = (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{\gamma}}) \underline{t}_{i\hat{\gamma}} + (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \\ \underline{U}_{1_i} = (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{\gamma}}) \underline{t}_{i\hat{\gamma}} + (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{W}_{\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix} \alpha_{2_{\hat{\gamma}}} = \alpha_{2_i} \\ \underline{U}_{2_{\hat{\gamma}}} = (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{\gamma}}) \underline{t}_{i\hat{\gamma}} - (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \\ \underline{U}_{1_{\hat{\gamma}}} = (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{t}_{i\hat{\gamma}}) \underline{t}_{i\hat{\gamma}} - (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \end{bmatrix}$$

Le flux de Rusanov vaut alors :

$$\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_{\hat{\gamma}}, \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \{\alpha_{2_i} \Theta(\alpha_{2_i}) + (\alpha_{2_i} \underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}} + \rho_{Rus_{i\hat{\gamma}}})\} \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \\ (\alpha_{1_i} \underline{U}_{1_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) (\underline{U}_{1_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}} + \rho_{Rus_{i\hat{\gamma}}}) \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \end{bmatrix}$$

en notant  $(\rho_{Rus})_{i\hat{\gamma}} = \max\{\rho_{Rus}(\underline{W}_i, \underline{n}_{i\hat{\gamma}}), \rho_{Rus}(\underline{W}_{\hat{\gamma}}, \underline{n}_{i\hat{\gamma}})\} = \rho_{Rus}(\underline{W}_i, \underline{n}_{i\hat{\gamma}})$ .

La forme du flux de Rusanov est intéressante puisque l'approximation de pression de paroi est conforme à celle issue de l'analyse du problème de Riemann adjoint. En effet, la pression particulière en paroi est approximée par :

$$\alpha_{2_{paroi}} \Theta(\alpha_{2_{paroi}}) = \{\alpha_{2_i} \Theta(\alpha_{2_i}) + (\alpha_{2_i} \underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}}) (\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}} + \rho_{Rus_{i\hat{\gamma}}})\}$$

Puisque :

$$\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}} + \rho_{Rus_{i\hat{\gamma}}} \geq 0$$

l'approximation de pression en paroi est plus grande que la pression de maille adjacente dans le cas d'une configuration de double choc, où :

$$\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \geq 0$$

et plus faible dans le cas d'une double détente ( $\underline{U}_{2_i} \cdot \underline{n}_{i\hat{\gamma}} \leq 0$ ). La réponse du schéma est donc sensiblement la même que celle du schéma de Godunov [COM 99], et plus physique que celle issue de l'approximation du schéma de Roe ([ROE 81]), qui produit une réponse numérique physiquement non admissible lorsque le nombre de Mach au sein de la phase est supérieur à un ([BUF 00]).

**Conditions d'entrée-sortie.** La méthode utilisée est celle de l'état réservoir. On fournit un état de référence  $\underline{W}_{\hat{\gamma}}$  à l'extérieur du domaine, qui sert directement pour le calcul du flux convectif  $\underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_{\hat{\gamma}}, \underline{n}_{i\hat{\gamma}})$  au travers de l'arête de bord.

**Condition mixte paroi-fluide.** Ce type de condition aux limites se rencontre notamment dans le calcul des lits fluidisés denses : en bas du lit, où le fluide rentre, se trouve une grille qui empêche les particules de sortir. Numériquement, on simule cet effet en calculant le flux de Rusanov entre l'état  $\underline{W}_i$  de la maille interne  $i$  et l'état  $\underline{W}_{\hat{\gamma}}$  suivant, obtenu en mixant l'état miroir  $\underline{W}_{\hat{\gamma}}$  pour la partie solide et un état réservoir  $\underline{W}_{\hat{\gamma}}$  fourni pour la partie fluide :

$$\underline{W}_{\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix} \alpha_{2_{\hat{\gamma}}} = \alpha_{2_{\hat{\gamma}}} = \alpha_{2_i} \\ \underline{U}_{2_{\hat{\gamma}}} = \underline{U}_{2_{\hat{\gamma}}} \\ \underline{U}_{1_{\hat{\gamma}}} = \underline{U}_{1_{\hat{\gamma}}} \end{bmatrix}$$

La condition sera donc prescrite pour le champ fluide et on ne prendra donc pas en compte la perte de charge associée à la grille, ce qui peut être approximatif. En outre, d'une certaine manière, le champ fluide ne voit pas explicitement les particules au-dessus de la grille autrement que par le terme de relaxation de vitesse local lié à la trainée statique, ce qui est également critiquable.

**Cas de la pression.** Il faut calculer une valeur de la pression au milieu de l'arête de bord. Celle-ci peut être obtenue par une extrapolation locale grâce aux *I.D.B.O.* des mailles voisines (voir [BOI 99]). Par souci de simplicité, la valeur retenue est simplement la valeur à l'*I.D.B.O.* de la maille connectée à l'arête de bord (rappelons que dans nos applications, les maillages utilisés sont tous de type  $M_2$  au sens de [CAY 97]).

### 3.2. Correcteur

On utilise ici une formulation analogue à celle proposée dans [BOI 96] et [BOI 99], et adaptée au cadre diphasique. La solution  $\underline{W}^*$  de l'étape précédente

est la condition initiale du correcteur. Les équations continues retenues pour cette étape sont les suivantes :

$$\nabla \cdot \underline{V} = 0 \quad [6]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \frac{\alpha_1}{\rho_1} \nabla \phi = \underline{0} \quad [7]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \nabla \phi = \underline{0} \quad [8]$$

$$\frac{\partial \alpha_2}{\partial t} = 0 \quad [9]$$

en notant  $\underline{V} = \alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2$  et  $\phi$  l'incrément de pression.

Les équations (7), (8) et (9) peuvent être combinées pour obtenir :

$$\frac{\partial \underline{V}}{\partial t} + K \nabla \phi = 0 \quad [10]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \underline{U}_1 - \rho_2 \underline{U}_2) = \underline{0} \quad [11]$$

avec  $K = \left( \frac{\alpha_1}{\rho_1} + \frac{\alpha_2}{\rho_2} \right)$ .

### 3.2.1. *Discrétisation en temps*

Pour cette étape, la discrétisation en temps est la suivante :

$$\nabla \cdot \underline{V}^{n+1} = 0 \quad [12]$$

$$\underline{V}^{n+1} - \underline{V}^* + K^* \Delta t \nabla \phi^{n+1} = 0 \quad [13]$$

$$\rho_1 \underline{U}_1^{n+1} - \rho_2 \underline{U}_2^{n+1} = \rho_1 \underline{U}_1^* - \rho_2 \underline{U}_2^* \quad [14]$$

où  $\phi^{n+1} = P^{n+1} - P^n$ .



### 3.2.2. Correction de la pression

En appliquant un opérateur de divergence sur l'équation (13) et en utilisant la condition stationnaire (12), on obtient une équation elliptique qui permet de corriger la pression et la vitesse :

$$\nabla \cdot \underline{V}^{n+1} = -\nabla \cdot \underline{V}^* + K^* \Delta t \Delta \phi^{n+1} = 0$$

Après intégration sur une maille interne  $i$ , on obtient en effet :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} &= - \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij} \\ &\quad + \Delta t \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (K^* \nabla \phi^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} \quad [15] \\ &= 0 \end{aligned}$$

On utilise le schéma introduit dans [EYM 00] pour résoudre cette équation, avec :

$$l_{ij} (K^* \nabla \phi^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} = \frac{K_i^* K_j^* \mu_{ij}}{t_{ij} K_i^* + (1 - t_{ij}) K_j^*} (\phi_j - \phi_i)$$

où  $\mu_{ij} = \frac{l_{ij}}{(x_j - x_i) \cdot \underline{n}_{ij}}$  désigne la transmittivité de l'arête  $ij$ ,  $t_{ij} = \frac{(x_j - x_{ij}) \cdot (x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2}$  ( $x_k$  est l'I.D.B.O. de la maille  $k$ ,  $x_{ij}$  le milieu de l'arête  $ij$ , et  $\underline{n}_{ij}$  la normale à l'arête  $ij$  dirigée vers l'extérieur de la maille  $i$ ). Le problème ainsi formé demande la résolution d'un système elliptique portant sur la variable  $\phi$ . Ce système est symétrique ; il est également défini et positif dès lors que le maillage est de type  $M_1$  ou  $M_2$ . Le système est alors résolu en utilisant un solveur de gradient conjugué éventuellement préconditionné par une matrice de type Choleski incomplet. On dispose pour ces deux types de maillage d'un principe du maximum discret.

Les valeurs d'interface  $(\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij}$  sont obtenues grâce à un opérateur d'extension du type de celui utilisé dans [BOI 96] et [BOI 99] :

$$(\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij} = t_{ij} \underline{V}_i^* \cdot \underline{n}_{ij} + (1 - t_{ij}) \underline{V}_j^* \cdot \underline{n}_{ij}$$

### 3.2.3. Reconstruction des vitesses

On calcule les valeurs de  $\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n}$  sur chaque interface grâce à l'équation (13) projetée sur les normales aux arêtes :

$$(\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} = (\underline{V}^* \cdot \underline{n})_{ij} - \Delta t (K^* \nabla \phi^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij}$$

La valeur de  $\underline{V}_i^{n+1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  peut alors être reconstruite sur chaque maille en résolvant pour  $a$  et  $b$  le système de trois équations à deux inconnues suivant :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \underline{n}_{ij} = (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij}, \quad \forall j \in V(i)$$

Ce système admet une solution unique puisque les trois équations sont liées par la combinaison linéaire triviale suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{j \in V(i)} l_{ij} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \underline{n}_{ij} &= \sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\sum_{j \in V(i)} l_{ij} \underline{n}_{ij}}_0 &= \underbrace{\sum_{j \in V(i)} l_{ij} (\underline{V}^{n+1} \cdot \underline{n})_{ij}}_0 \end{aligned}$$

Les variables  $(\alpha_1 \underline{U}_1)_i^{n+1}$  et  $(\alpha_2 \underline{U}_2)_i^{n+1}$  sont obtenues au final par inversion du système d'équations issu de la définition de  $\underline{V}$  et de l'équation (14) :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{1i}^{n+1} & \alpha_{2i}^{n+1} \\ \rho_1 & -\rho_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{U}_{1i}^{n+1} \\ \underline{U}_{2i}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{V}_i^{n+1} \\ \rho_1 \underline{U}_{1i}^* - \rho_2 \underline{U}_{2i}^* \end{pmatrix}$$

Les vitesses constantes par maille sont donc déduites des vitesses normales (continues) d'interface associées et liées par la contrainte de divergence nulle discrète sur chaque élément.

### 3.2.4. Conditions aux limites

L'objet principal de l'étape de correction consiste à reconstruire un champ  $\underline{V} = \alpha_1 \underline{U}_1 + \alpha_2 \underline{U}_2$  à divergence nulle. Il faut donc connaître les vitesses normales au bord du domaine. En paroi et en entrée, ces variables sont le plus souvent connues et on peut utiliser directement les valeurs fournies. Dans le système en pression, ces conditions aux limites sont alors assimilables à des conditions de Neumann sur l'incrément de pression  $\phi$ .

En sortie de domaine, les vitesses normales sont rarement connues à l'instant  $(n+1)$ , et on donne alors une valeur (typiquement 0) à la dérivée normale de l'incrément de pression  $\phi$ , ainsi qu'à la vitesse normale d'interface  $\underline{V}^* \cdot \underline{n}$  par extension. Cette dernière extension peut être effectuée soit par simple projection de la valeur de maille sur la normale de bord, soit par extrapolation linéaire basée sur les valeurs de maille adjacentes. Il faut donc veiller à fournir une condition de Dirichlet sur la pression au bord afin d'éliminer le mode constant du système elliptique en pression (la pression étant définie à une constante près ne dépendant que du temps). La prise en compte de ces conditions de Dirichlet est identique à celle utilisée dans [CAY 97]. Il est clair que ce problème disparaît si les conditions de sortie sont données par affectation du champ de pression au bord de sortie.

#### 4. Validations élémentaires

Les cas-tests qui suivent ont pour but de valider le calcul des flux convectifs du prédicteur, et de tester le comportement du schéma de Rusanov sur un système similaire à celui décrivant les écoulements d'Euler isentropiques. Voici donc le système d'équations continu considéré ici :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_2 \underline{U}_2) + \nabla \cdot (\alpha_2 \underline{U}_2 \otimes \underline{U}_2) + \nabla (\alpha_2 \Theta (\alpha_2)) - \frac{I}{\rho_2} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_1 \underline{U}_1) + \nabla \cdot (\alpha_1 \underline{U}_1 \otimes \underline{U}_1) + \frac{I}{\rho_1} = 0$$

On examine en fait ainsi le comportement du prédicteur dans un contexte où le champ de pression  $P$  est uniforme, et en l'absence d'effets de pesanteur. Tous les calculs ont été effectués sur un maillage régulier de 4 000 triangles ( $4 * 500$  rectangles coupés en deux). Les valeurs retenues pour les densités sont pour tous les calculs :  $\rho_1 = 1$ ,  $\rho_2 = 2500$ . Le coefficient de compactage retenu est :  $\alpha_{2max} = 0,64$ . La constante  $\langle q_2^2 \rangle_0$  est prise égale à un.

Rappelons que le système d'équations sur lequel on travaille n'inclut pas le traitement de la pression, qui n'a ici aucun sens thermodynamique. Les cas-tests qui suivent n'ont donc pas de signification physique, mais sont effectués uniquement pour valider le calcul des flux convectifs avec le schéma de Rusanov.

Dans un premier temps, on se place dans les conditions des écoulements d'Euler isentropiques en ne prenant en compte aucune trainée ( $K_T = 0$ ) et en initialisant :  $\underline{U}_1 = \underline{0}$ . Les trois premières figures (figures 3, 4, 5) représentent des cas-tests "rupture de barrage" puis de problèmes de Riemann unidimensionnels de difficulté croissante, le dernier conduisant à des vitesses supersoniques. Ces cas-tests sont essentiels pour qualifier la méthode numérique. Le premier permet de simuler le comportement d'un nuage très dense en particules se propageant sur une zone très pauvre en particules. La solution est constituée d'une 1-onde comportant un point sonique, puis d'un choc se propageant sur la zone pauvre, choc dont l'intensité est d'autant plus faible que la fraction volumique initiale à droite est faible. Ce problème nécessite un schéma suffisamment robuste si l'on ne souhaite pas voir apparaître de valeurs négatives de fraction volumique ou de vitesses démesurées au voisinage de la transition entre la fin de 1-détente et le 2-choc. On vérifie en outre simplement que le point sonique stationnaire dans la 1-détente ne comporte pas de choc non entropique, ce qui est courant lorsque l'on utilise un solveur de Riemann approché. Les deux figures qui suivent sont des cas-tests de double choc et de double détente (figures 6 et 7 respectivement). Ces cas sont tout à fait représentatifs du comportement en paroi du schéma de convection mis en œuvre, lorsque l'on utilise la technique classique et éprouvée de l'état "miroir". Dans le cas d'un appauvrissement en particules (de type arrière corps), l'effet de dépressurisation conduit couramment à des valeurs négatives de fraction volumique sur le plan discret, même si les conditions initiales sont telles que le problème de Riemann unidimensionnel associé admet une solution sans apparition du vide. Le cas-test de double choc symétrique correspond, lui, à un effet de jet de particules impactant une paroi, ce qui a pour effet immédiat de faire augmenter la pression granulaire. Le profil de choc associé est parfois instable avec des solveurs de Riemann approchés, ce qui n'est absolument pas le cas ici. La double détente présentée ici a en outre la particularité de conduire pour les conditions initiales retenues à l'apparition théorique du vide, ce que très peu de schémas peuvent simuler ([BUF 98]). En dimension un en espace, le schéma de Godunov permet alors de préserver la positivité de la masse, tout au moins lorsque l'on utilise la version avec projection. Ce résultat n'est pas valable en dimension deux d'espace, et n'est également pas valable pour un schéma de Roe. D'un point de vue physique, la célérité des ondes dans la phase particulaire tend vers zéro dans la zone vide en particules, et la vitesse des particules (qui est toujours le rapport entre le débit masse et la masse, qui restent définis (nuls)) n'est plus définie. Ces derniers cas-tests confirment la robustesse du schéma de Rusanov, qui ne nécessite pas de correction entropique aux points de détente sonique, préserve la positivité du taux de présence volumique, même dans le cas de l'apparition du vide. Si l'on n'impose pas une contrainte supplémentaire sur le pas de temps, on rappelle néanmoins qu'il n'assure pas le non-dépassement de la borne supérieure  $\alpha_{2max}$ , sans avoir recours à un artifice (licite !) supplémentaire sur le pas de temps.

Dans un second temps, on inclut les effets de traînée ( $K_T \neq 0$ ), qui créent un couplage entre la partie solide et la partie fluide, mettant en mouvement la phase fluide (figure 8). Le diamètre des particules est fixé à  $d_2 = 5 \text{ mm}$ , et la viscosité de l'air considérée pour cette simulation est :  $\nu_1 = 10^{-5}$ . On note que l'effet d'entraînement des particules est assez faible, le diamètre de celles-ci étant élevé.

## 5. Validation globale: cas-test de compactage

On simule ici un lâcher de particules pesantes dans un fluide. Le système global est considéré pour effectuer cette simulation et inclut les effets de pesanteur ainsi que de traînée et de gradient de pression. La géométrie du problème est celle d'une enceinte rectangulaire ouverte en haut. Les conditions aux limites sont donc des parois en bas et sur les côtés, et une condition d'entrée-sortie avec état réservoir en haut. L'état réservoir est défini par :

$$\underline{W}_{haut} = \begin{pmatrix} \alpha_{2_{haut}} = 10^{-6} \\ \underline{U}_{2_{haut}} = \underline{0} \\ \underline{U}_{1_{haut}} = \underline{0} \end{pmatrix}$$

Le diamètre des particules est  $d_2 = 5 \text{ mm}$ . Les conditions initiales du calcul sont les suivantes :

	$y \leq 1$	$y > 1$
$\alpha_2$	0,3	$10^{-6}$
$\underline{U}_2$	$\underline{0}$	$\underline{0}$
$\underline{U}_1$	$\underline{0}$	$\underline{0}$

Le nombre CFL tel que défini plus haut vaut 0,8 tout au long du calcul. Le maillage utilisé est non structuré, de taille de maille assez uniforme, de type  $M_2$  au sens de [CAY 97], et possède 4 004 éléments (voir figure 9). Notons que ce type de calcul assez particulier a déjà fait l'objet de simulations sur maillage dual de type INRIA (voir [COM 97]). Sur l'état intermédiaire obtenu à la fin du calcul présenté sur les figures 10 et 11, on distingue nettement sur les graphes de toutes les variables l'interface entre une partie compacte homogène dans la partie basse du foyer, et une partie diluée en particules dans la partie supérieure. La vitesse limite de chute libre des particules au-dessus du lit dense n'est pas encore atteinte à ce stade du calcul. La courbe d'isovaleur un du nombre de Mach, au sens de la phase particulaire dans un vide d'air, est bien localisée à l'interface séparant la zone très dense de la zone plus diluée. La pression mécanique est presque uniforme dans le lit dense, et

décroit jusqu'à la valeur de référence de zéro fixée sur le bord supérieur du domaine de calcul. Le niveau de compactage obtenu à ce stade du calcul, voisin de 0.57, est relativement éloigné de 0.64 car la constante associée à la pression granulaire est physiquement assez élevée dans ce calcul. L'interface diphasique est assez épaisse, ce qui était prévisible étant donné que le nombre de points moyen selon l'axe vertical est relativement faible, et surtout que le schéma de Rusanov diffuse beaucoup les discontinuités stationnaires, qu'il s'agisse de chocs ou de contacts ([FAU 00]). Ce calcul effectué sur un processeur a nécessité environ 16 heures de calcul pour 300 itérations temporelles sur Sun Entreprise 3000 muni de six processeurs Ultra 1 a 250 MHz. Notons enfin que pour toutes les figures, les unités sont S.I. Pour les figures 3 à 8, l'abscisse  $x$  est en mètres. Il en est de même pour les abscisses et ordonnées des figures 9 à 11.

## 6. Conclusion

On a présenté ici un prototype de résolution par la méthode des Volumes Finis d'un système diphasique de type gaz-solide comportant deux phases incompressibles. La mise en œuvre a été effectuée sur maillage non structuré de type triangulaire, dans un cadre de développement utilisant le langage C++ ([CAY 99]).

Le système à quatre équations considéré, qui tient compte des bilans de masse et de quantité de mouvement dans chaque phase, permet de modéliser les effets de compactage maximal. La méthode numérique fait appel à une phase de prédiction qui permet de préserver continuellement le principe du maximum pour la variable taux de présence volumique si l'on considère une loi de pression granulaire adaptée. Cette phase est suivie d'une phase de correction implicite du champ de pression et du champ de débit dans chaque phase, qui s'identifie à l'étape de projection classique dans les algorithmes de simulation des équations de Navier Stokes en régime incompressible. L'étape de projection est effectuée à l'aide d'une reconstruction RT0 du champ de vitesse volumique ([BRE 91]). Les cas-test retenus ont pour but d'évaluer la stabilité d'ensemble du schéma. Le choix du schéma de Rusanov au sein de la phase de prédiction est motivé par les propriétés de positivité discrète de maille associées à ce schéma (voir annexes), dans le cas explicite ou implicite, sur maillage non structuré quelconque, pour la variable taux de présence volumique. Le bilan algorithmique est satisfaisant à ce stade, et permet d'envisager un cadre d'applications complémentaire à celui décrit dans un travail précédent, où les effets de compressibilité de la phase gazeuse étaient très importants ([COM 99]). Les études numériques ([CAY 97], [BOI 99]) de convergence réelle des schémas de diffusion proposés récemment ([EYM 00], [HER 95]) permettent d'assurer une bonne approximation de l'étape de projection d'une part, mais également des effets de diffusion qui ont été négligés volontairement dans ce travail. D'autre part, des formes plus complexes de prise en compte des effets de compactage peuvent être envisagées, sans perte des propriétés précédentes. A très court

terme, on s'intéresse à une comparaison de cette approche avec celle issue d'un modèle à sept équations ([SAU 99]). En effet, même si le bilan est globalement satisfaisant, ce dernier modèle a l'intérêt de garantir le principe du maximum pour la variable taux de présence volumique, et d'apporter une hyperbolicité inconditionnelle, ce qui n'est pas le cas pour les systèmes bi-fluides à une pression plus classiques.

Remerciements :

L'ensemble du travail a été réalisé à l'Université Laval à Québec, au sein du Groupe de Recherche Interdisciplinaire en Éléments Finis, dans le cadre du contrat EDF-DRD AEE B02501/A256. Les moyens informatiques ont été fournis par l'Université Laval à Québec. Les auteurs remercient Jean-Paul Chabard et Sylvie Courtier-Arnoux qui ont permis d'initier ces développements. Ils remercient également Michel Fortin et Carl Robitaille du G.I.R.E.F., et également Thierry Gallouet du Centre de Mathématique et d'Informatique de l'Université de Provence. Enfin, ils remercient les rapporteurs qui ont permis par leurs remarques d'améliorer le document initial.

## 7. Bibliographie

- [BAL 95] BALZER G., BOELLE A., SIMONIN O., «Eulerian gas solid flow modelling of dense fluidized beds», *Proceedings of Fluidization VIII*, Tours, France, 1995.
- [BAR 96] BARANGER J., MAÎTRE J.F., OUDIN F., «Connection between finite volume and mixed finite element methods», *Math. Mod. & Num. Anal.*, Vol. 30, nr 4, p. 445-465, 1996.
- [BOE 97] BOELLE A., Validation d'un modèle à deux fluides appliqué à la simulation des lits fluidisés denses, Thèse de doctorat, Université Paris VI, Paris, France, 1997.
- [BOI 96] BOIVIN S., HÉRARD J.M., «Résolution des équations de NAVIER-STOKES par la méthode des volumes finis sur maillage non structuré», *Revue Européenne des Éléments Finis*, Vol. 5, nr 4, p. 461-490, 1996.
- [BOI 99] BOIVIN S., CAYRÉ F., HÉRARD J.M., «A finite volume method to solve the NAVIER-STOKES equations for incompressible flows on unstructured meshes», *Int. J. of Thermal Sciences*, Vol. 39, nr 8, p. 806-825, 2000.
- [BRE 91] BREZZI F., FORTIN M., *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer-Verlag, 1991.
- [BUF 98] BUFFARD T., GALLOUET T., HÉRARD J.M., «A naive scheme to solve shallow water equations», *C.R.A.S. Paris*, I-326, pp.385-390, 1998.
- [BUF 00] BUFFARD T., GALLOUET T., HÉRARD J.M., «A sequel to a rough Godunov scheme : application to real gases», *Computers and Fluids*, Vol. 29, nr 7, p. 813-847, 2000.

- [CAY 97] CAYRÉ F., Schémas volumes finis pour un problème elliptique sur maillage triangulaire - Etude numérique de convergence, *Rapport EDF HE-41/97/057/A*, 1997.
- [CAY 99] CAYRÉ F., Les outils de programmation modernes et la programmation orientée objet dans le cadre des codes de volumes finis et d'éléments finis, *Rapport EDF HE-41/99/036/A*, 1999.
- [CHO 68] CHORIN A. J., «Numerical solution of the NAVIER-STOKES equations», *Math. Comput.*, Vol. 22, 1968.
- [CHR 98] CHRISTIE I., GANZER G.H., WILDER J.W., «Numerical solution of a two-dimensional fluidized bed model», *Int. J. Numer. Methods Fluids*, Vol. 28, p. 381-394, 1998.
- [COM 97] COMBE L., Simulation numérique d'écoulements gaz-particules sur maillage non structuré, Thèse de doctorat de l'Institut National Polytechnique de Toulouse, France, 1997.
- [COM 99] COMBE L., HÉRARD J.M., «Finite Volume algorithm to compute dense compressible gas-solid flows», *AIAA Journal*, Vol. 37, p. 335-342, 1999.
- [EYM 00] EYMARD R., GALLOUËT T., HERBIN R., Finite Volume Methods, Handbook of Numerical Analysis, volume VII, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds, North-Holland, 2000.
- [FAU 00] FAUCHER E., Simulation numérique des écoulements unidimensionnels instationnaires avec auto-vaporisation, Thèse de doctorat de l'IUT de Melun-Senart, France, 2000.
- [GAL 92] GALLOUËT T., An introduction to finite volume methods, Problèmes non linéaires appliqués: Méthodes de volumes finis, Écoles CEA-EDF-INRIA, 1992.
- [GID 94] D. GIDASPOW, Multiphase flow and fluidization, Academic Press, 1994.
- [GOD 59] GODUNOV S.K., «A difference method for numerical calculation of discontinuous equations of hydrodynamics», *Math. Sb.*, Vol. 47, p. 217-300, 1959.
- [GOL 96] GOLDSTEIN A., SHAPIRO M., GUTFINGER C., «Mechanics of collisional motion of granular material. Part III: self similar shock wave propagation», *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 316, p. 29-51, 1996.
- [JEN 83] JENKINS J.T., SAVAGE S.B., «A theory for the rapid flow of identical smooth nearly elastic particles», *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 130, p. 187-202, 1983.
- [HER 95] HERBIN R., «An Error Estimate for a Finite Volume Scheme for a Diffusion-Convection Problem on a Triangular Mesh», *Num. Meth. Part. Diff. Eq.*, Vol. 11, p. 165-173, 1995.
- [ROE 81] ROE P.L., «Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes», *J. Comput. Phys.*, Vol. 43, 1981.
- [ROG 98a] ROGUE X., Expériences et simulation numérique d'écoulements diphasiques en tube à choc, Thèse de doctorat, Marseille, France, 1998.



- [ROG 98b] ROGUE X., RODRIGUEZ G., HAAS J.F., SAUREL R., «Experimental and numerical investigation of the shock induced fluidization of a particle bed», *Shock waves*, Vol. 8, p. 29-45, 1998.
- [RUS 61] RUSANOV V.V., «The calculation of the interaction of non stationary shock waves and obstacles», *J. of Comp. Math. Phys.*, Vol. 1, p. 267-279, 1961.
- [SAU 99] SAUREL R., ABGRALL R., «A multiphase Godunov method for compressible multifluid and multiphase flows», *J. of Comp. Phys.*, Vol. 150, p. 425-467, 1999.

## A Annexe : propriétés du schéma de Rusanov

### 1.1. Le système d'équations

$$\begin{cases} \rho_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) & = 0 \\ (\rho \underline{u})_t + \nabla \cdot (\rho \underline{u} \otimes \underline{u}) + \nabla P & = 0 \end{cases}$$

Par hypothèse, la pression  $P$  ne dépend que de la masse volumique  $\rho$ , et  $P'(\rho)$  est positif pour les valeurs de  $\rho$  admissibles. On note :  $P'(\rho) = c^2$ .

Dans ce cas,  $\mathcal{F}_{\underline{W}}(\underline{W}, \underline{n})$  a pour valeurs propres :  $\underline{u} \cdot \underline{n} \pm c$  et  $\underline{u} \cdot \underline{n}$ , et le flux de Rusanov s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{F}^{Rus}(\underline{W}_i, \underline{W}_j, \underline{n}_{ij}) &= \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \rho_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{ij} + \rho_j \underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij} \\ (\rho_i \underline{u}_i) \cdot \underline{n}_{ij} \underline{u}_i + (\rho_j \underline{u}_j) \cdot \underline{n}_{ij} \underline{u}_j + P_i \underline{n}_{ij} + P_j \underline{n}_{ij} \end{array} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \max_{k \in \{i, j\}} \{ |\underline{u}_k \cdot \underline{n}_{ij}| + c_k \} \begin{cases} \rho_j - \rho_i \\ \rho_j \underline{u}_j - \rho_i \underline{u}_i \end{cases} \end{aligned}$$

### 1.2. Schéma en temps explicite (schéma d'Euler)

On adopte ici une discrétisation en temps de type Euler explicite :

$$\Omega_i (\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) + \Delta t \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \underline{F}(\underline{W}_i^n, \underline{W}_j^n, \underline{n}_{ij}) l_{ij} = \underline{0}$$

L'équation correspondant à la masse volumique  $\rho$  est :

$$\begin{aligned} \Omega_i (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} (\rho_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{ij} + \rho_j \underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^n l_{ij} \\ - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n (\rho_j - \rho_i)^n l_{ij} = 0 \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que  $\sum_{j \in V(i)} \underline{n}_{ij} l_{ij} = \underline{0}$ , cette équation peut se mettre sous la forme :

$$\begin{aligned} \Omega_i \rho_i^{n+1} & - \left\{ \Omega_i - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij} \right\} \rho_i^n \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} \rho_j^n \left( (\rho_{Rus})_{ij}^n - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^n \right) l_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Comme  $(\rho_{Rus})_{ij}^n > (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^n$ ,  $\forall j \in V(i)$ , on est assuré de la positivité de la variable  $\rho$  pour tout type d'écoulement si et seulement si la condition C.F.L. suivante est remplie :

$$\Delta t \leq \frac{2\Omega_i}{\sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^n l_{ij}}$$

### 1.3. Schéma en temps implicite total

On adopte dans ce paragraphe une discrétisation en temps totalement implicite :

$$\Omega_i (\underline{W}_i^{n+1} - \underline{W}_i^n) + \Delta t \sum_{j \in V(i)} F(\underline{W}_i^{n+1}, \underline{W}_j^{n+1}, \underline{n}_{ij}) l_{ij} = \underline{0}$$

Dans ce cas, l'équation correspondant à la masse volumique s'écrit :

$$\begin{aligned} \Omega_i (\rho_i^{n+1} - \rho_i^n) & + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_i \underline{u}_i \cdot \underline{n}_{ij} + \rho_j \underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1} l_{ij} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} (\rho_j - \rho_i)^{n+1} l_{ij} = 0 \end{aligned}$$

soit :

$$\begin{aligned} & \left\{ \Omega_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} l_{ij} \right\} \rho_i^{n+1} \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} \rho_j^{n+1} \left( (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1} \right) l_{ij} = \Omega_i \rho_i^n \end{aligned}$$

et sous forme matricielle :

$$\underline{\underline{A}} \underline{\underline{\rho}}^{n+1} = \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\rho}}^n$$

avec les notations :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2, \underline{\underline{D}}_{ij} = \Omega_i \delta_{ij}$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \forall j \in V(i), \begin{cases} \underline{\underline{A}}_{ii} = \Omega_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in V(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} l_{ij} \\ \underline{\underline{A}}_{ij} = -\frac{\Delta t}{2} \left( (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} - (\underline{u}_j \cdot \underline{n}_{ij})^{n+1} \right) l_{ij} \end{cases}$$

La matrice  $\underline{\underline{A}}$  possède deux propriétés immédiates :

$$\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, N\}^2, j \neq i, \begin{cases} \underline{\underline{A}}_{ii} \geq 0 \\ \underline{\underline{A}}_{ij} \leq 0 \end{cases}$$

Une condition suffisante pour que la positivité de la masse volumique soit assurée est que la matrice  $\underline{\underline{A}}$  soit une M-matrice à diagonale dominante, c'est-à-dire :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, N\}, \left| \underline{\underline{A}}_{ii} \right| \geq \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} \left| \underline{\underline{A}}_{ij} \right|$$

Cette condition équivaut à :

$$\Omega_i + \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} (\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} l_{ij} \geq \frac{\Delta t}{2} \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} ((\rho_{Rus})_{ij}^{n+1} - (\underline{\underline{u}}_j \cdot \underline{\underline{n}}_{ij})^{n+1}) l_{ij}$$

soit plus simplement :

$$2\Omega_i \geq -\Delta t \sum_{j \in \mathcal{V}(i)} (\underline{\underline{u}}_j \cdot \underline{\underline{n}}_{ij})^{n+1} l_{ij} \quad [16]$$

Finalement, pour que la masse volumique reste positive, il suffit que la condition (16) soit remplie. On voit que cette condition est contraignante uniquement lorsque la divergence de la vitesse sur l'élément  $i$  est fortement négative, soit typiquement dans le cas d'un violent double choc.

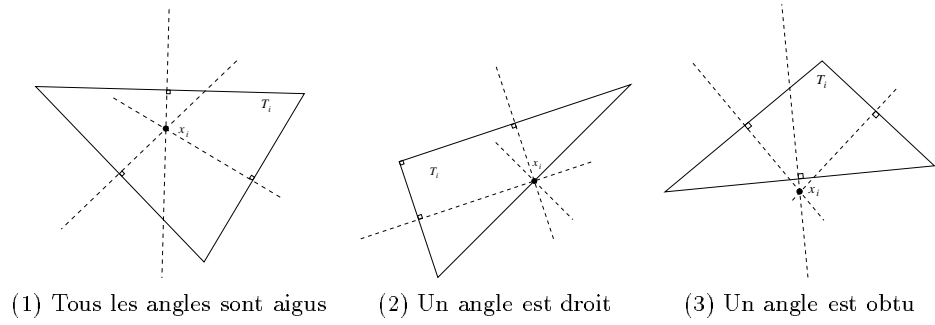


FIG. 1 – Intersection des bisecteurs orthogonaux d'un triangle

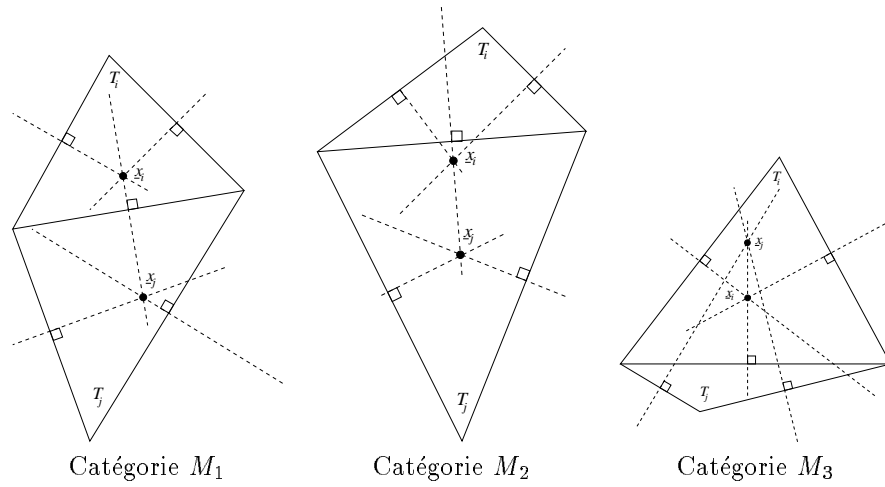


FIG. 2 – Différentes catégories de maillages

*Remarque* : ces catégories correspondent à des maillages de régularité décroissante ; si on oriente la droite  $(\underline{x}_i, \underline{x}_j)$  de  $T_i$  vers  $T_j$ , dans le cas  $M_3$  le vecteur  $\underline{x}_i \underline{x}_j$  est orienté dans le sens contraire (ce qui distingue cette catégorie de  $M_2$ ).

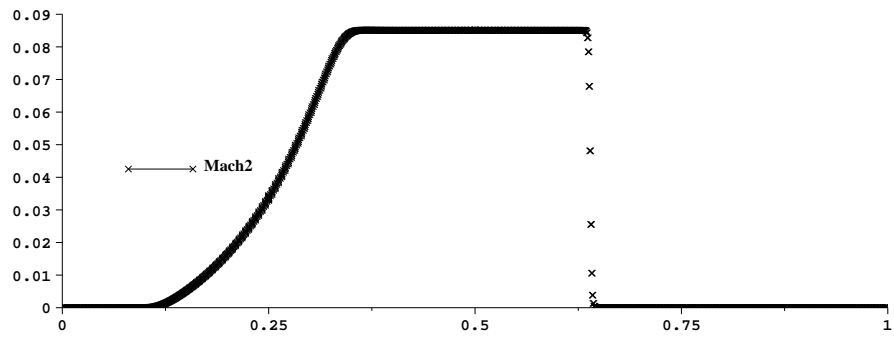
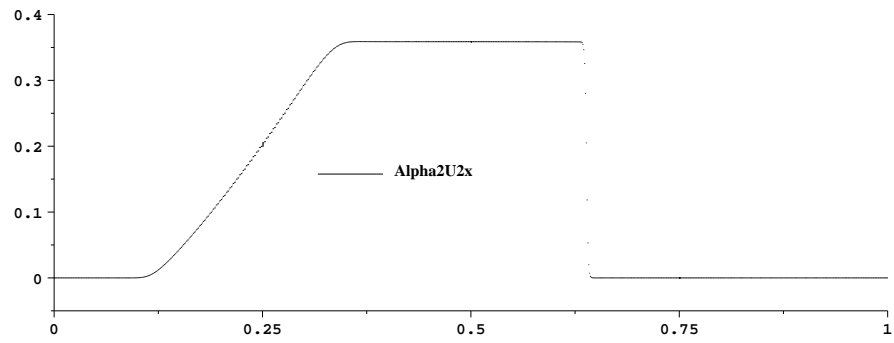
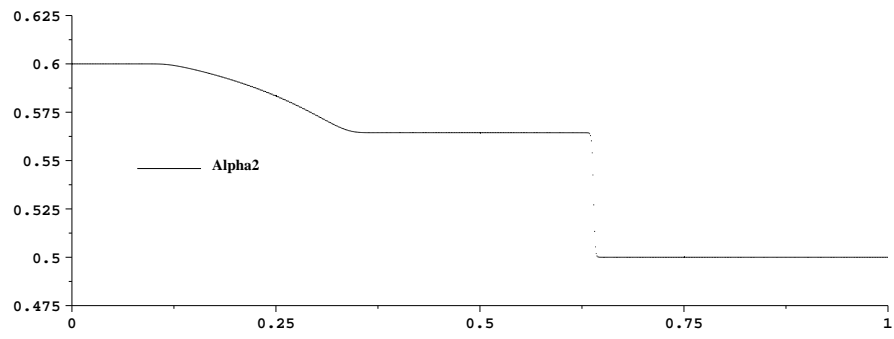


FIG. 3 – Cas-test de type “rupture de barrage”

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,5
$U_{2x}$	0	0

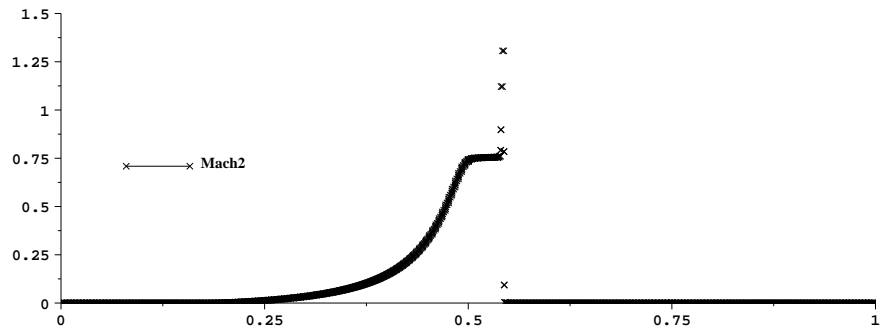
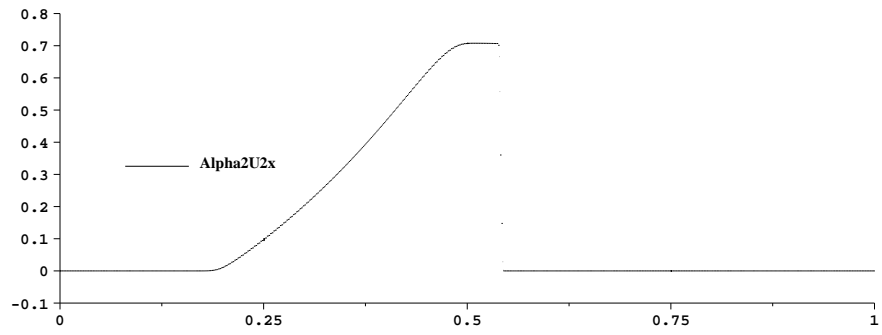
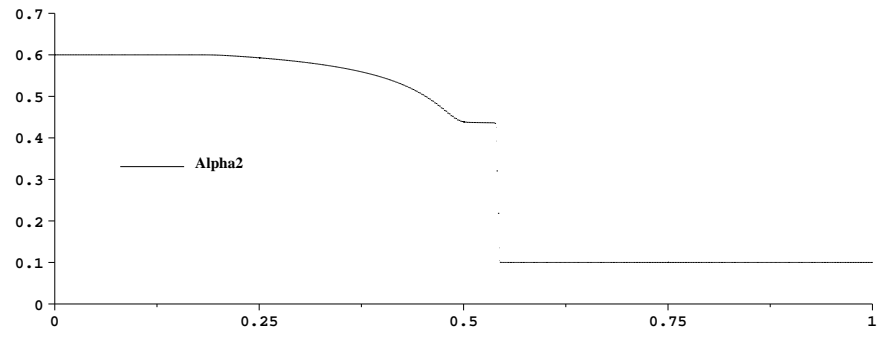


FIG. 4 – Cas-test de type “rupture de barrage”

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,1
$U_{2x}$	0	0

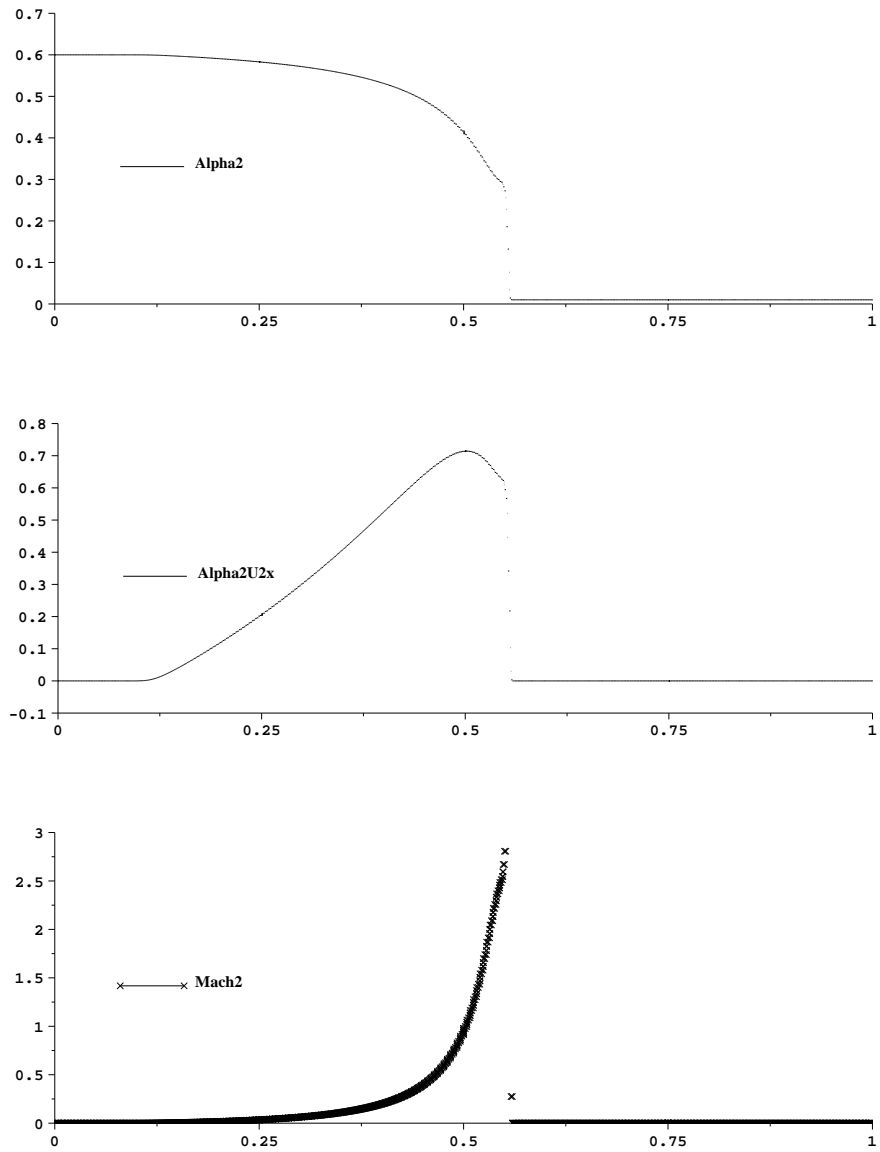


FIG. 5 – Cas-test de type “rupture de barrage”

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,01
$U_{2x}$	0	0

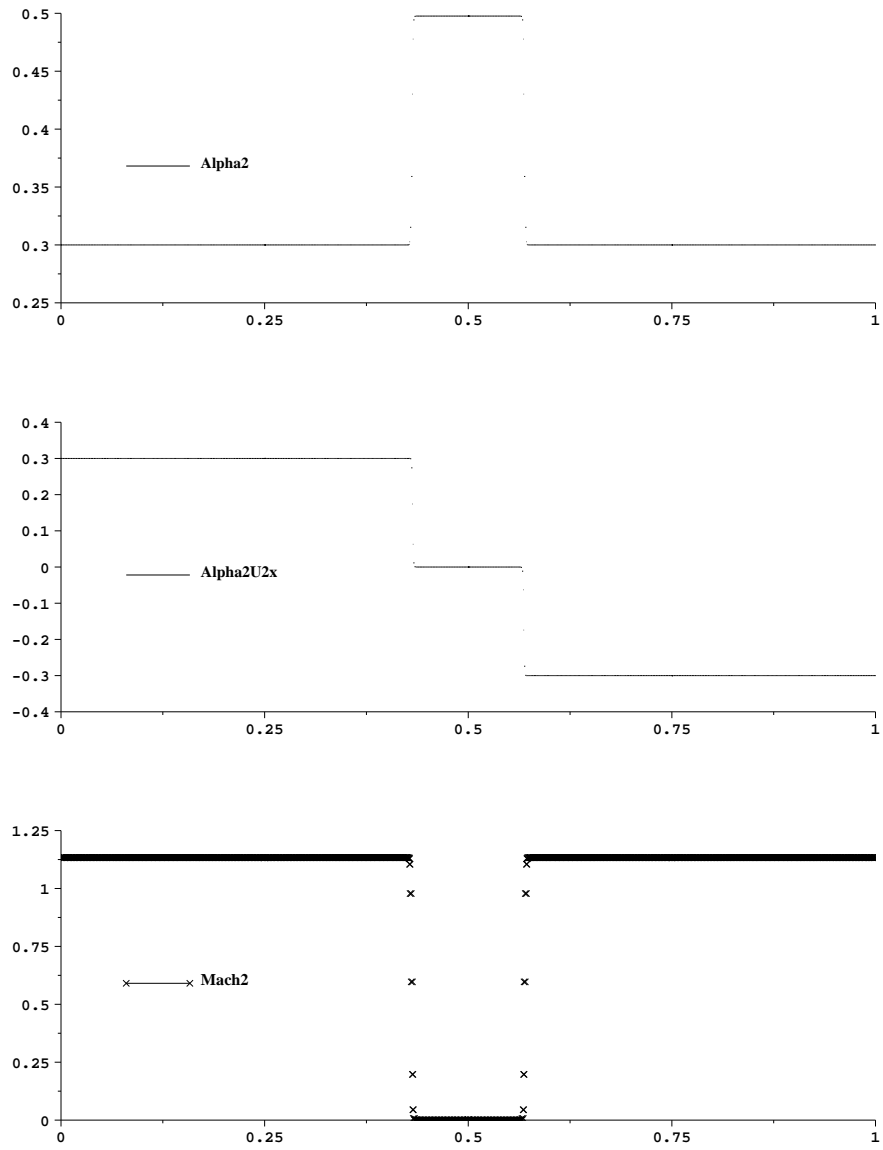


FIG. 6 – *Cas-test de double choc*

CFL = 0,8 - Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,3	0,3
$U_{2x}$	1	-1



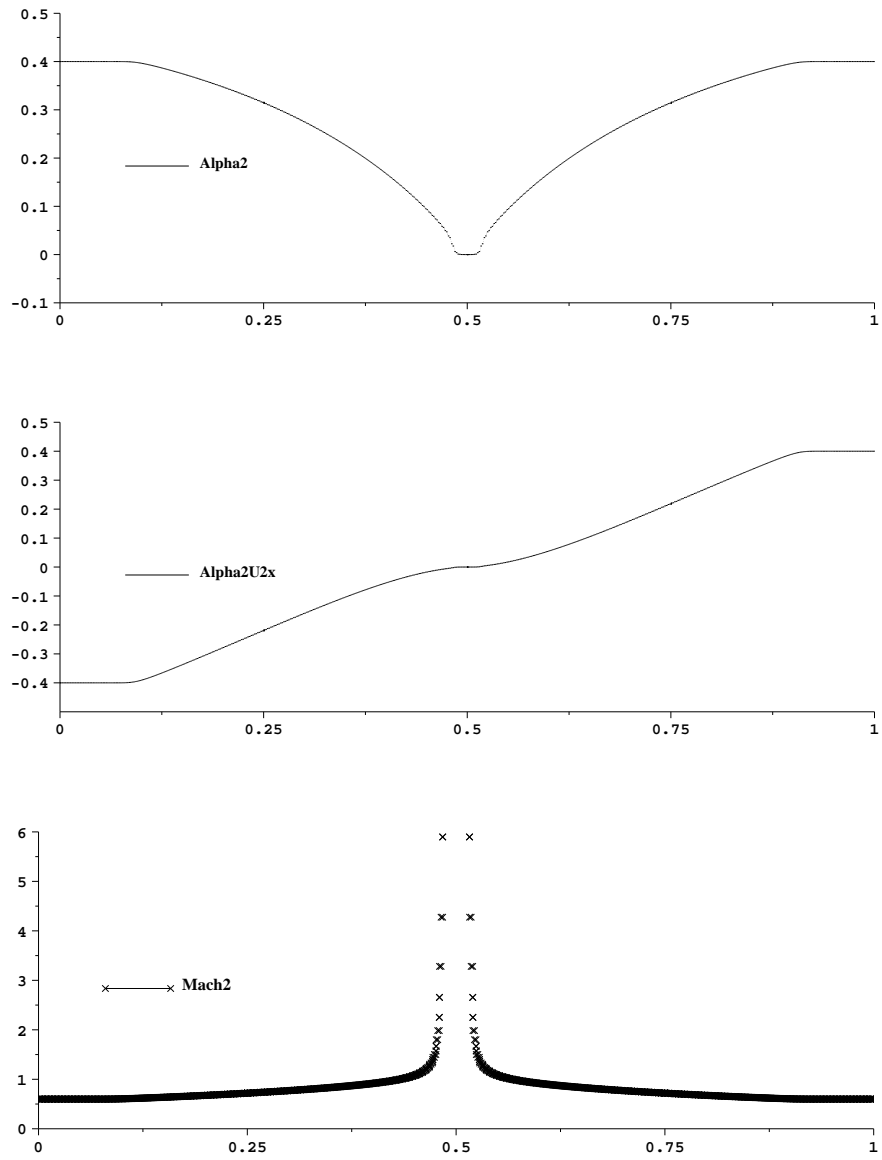


FIG. 7 - Cas-test de double détente

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,4	0,4
$U_{2x}$	-1	1

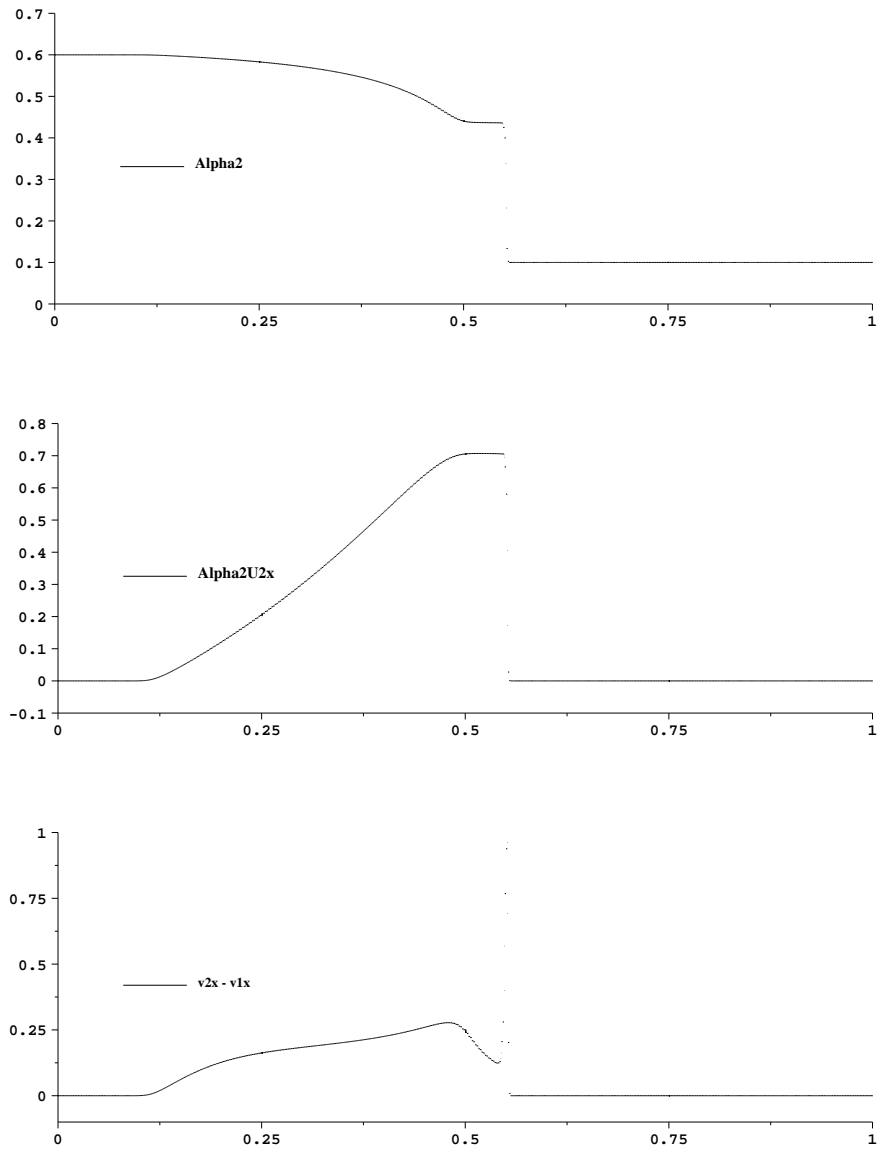


FIG. 8 – Cas-test de type “rupture de barrage” avec traînée

Conditions initiales :

	Gauche	Droite
$\alpha_2$	0,6	0,1
$U_{2x}$	0	0
$U_{1x}$	0	0

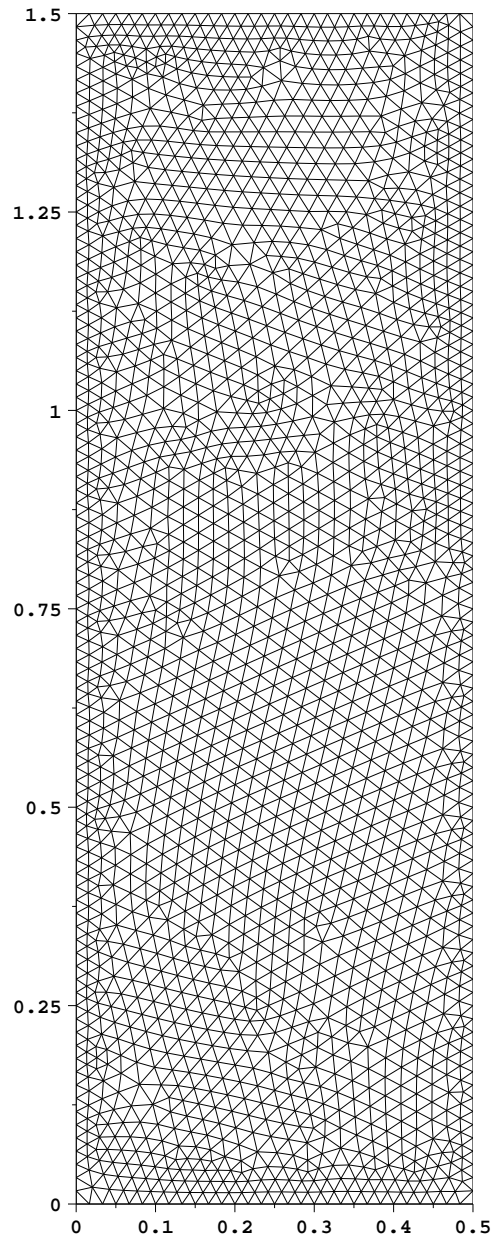


FIG. 9 – *Maillage utilisé pour le cas-test de compactage*

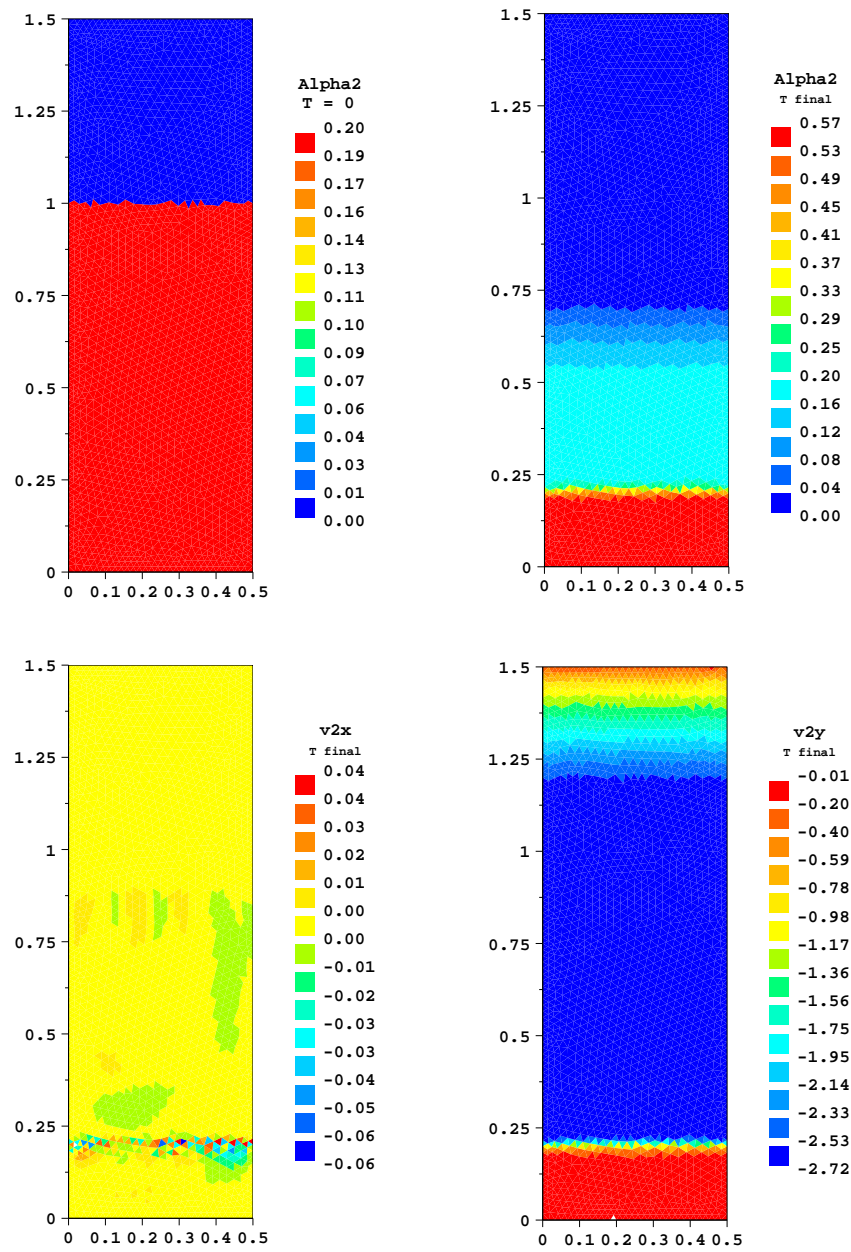


FIG. 10 – *Cas-test de compactage : taux de présence et vitesse de la phase solide*

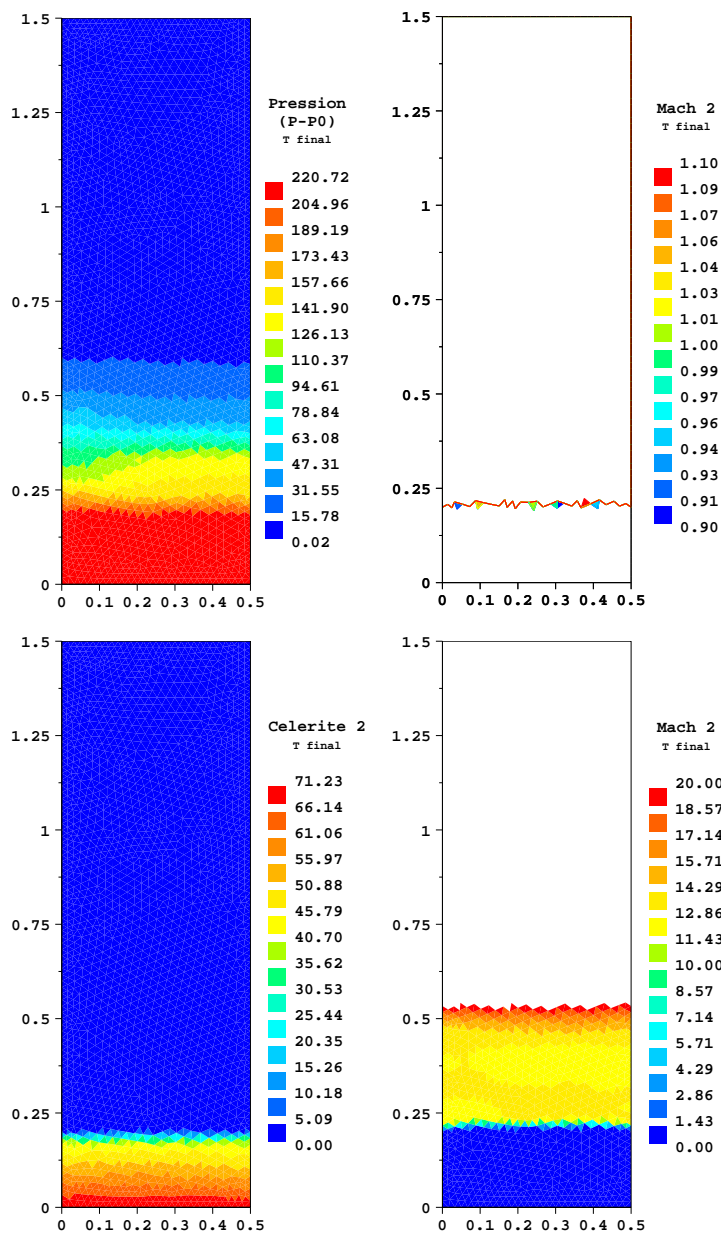


FIG. 11 – Cas-test de compactage : pression mécanique  $P$ , nombre de mach et célérité associés à la pression inter-granulaire  $\alpha_2\Theta(\alpha_2)$ .