



**HAL**  
open science

## Décision de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives combinés

Quentin Cohen-Solal, Maroua Bouzid, Alexandre Niveau

► **To cite this version:**

Quentin Cohen-Solal, Maroua Bouzid, Alexandre Niveau. Décision de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives combinés. *Revue des Sciences et Technologies de l'Information - Série RIA : Revue d'Intelligence Artificielle*, 2017, 31, pp.41 - 70. 10.3166/ria.31.41-70 . hal-01579052v2

**HAL Id: hal-01579052**

**<https://hal.science/hal-01579052v2>**

Submitted on 26 Mar 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Décision de la cohérence des réseaux de contraintes qualitatives combinés<sup>\*</sup>

Quentin Cohen-Solal, Maroua Bouzid, Alexandre Niveau

GREYC-CNRS, Université de Caen, France

{quentin.cohen-solal,maroua.bouzid-mouaddib,alexandre.niveau}@unicaen.fr

---

*RÉSUMÉ.* Nous étudions le problème de la décision de la cohérence de réseaux de contraintes dans le cadre de combinaisons de formalismes qualitatifs. Nous proposons un cadre formel qui englobe les intégrations lâches, le raisonnement multiéchelle et une forme de raisonnement spatio-temporel. En particulier, nous identifions des conditions suffisantes assurant la polynomialité de la décision de la cohérence, et nous appliquons ces résultats pour trouver des sous-classes traitables.

*ABSTRACT.* We study the problem of consistency checking for constraint networks over combined qualitative formalisms. We propose a framework which encompasses loose integrations, multi-scale reasoning and a form of spatio-temporal reasoning. In particular, we identify sufficient conditions ensuring the polynomiality of consistency checking, and we use them to find tractable subclasses.

*MOTS-CLÉS :* réseaux de contraintes qualitatives, décision de la cohérence, raisonnement multi-échelle, intégration lâche, sous-classe traitable, raisonnement sur le temps.

*KEYWORDS:* qualitative constraint networks, consistency checking, multi-scale reasoning, loose integration, tractable subclass, temporal reasoning.

---

---

<sup>\*</sup>. Une version abrégée de cet article a été publiée en anglais dans les actes de AAAI 2017 (Cohen-Solal et al., 2017).

## 1. Introduction

Le raisonnement sur le temps et l'espace est omniprésent dans la vie quotidienne. Les ordinateurs peuvent être dotés de ce raisonnement grâce à des approches quantitatives ; cependant, dans le contexte des interactions homme-machine, les informations quantitatives sont souvent indisponibles ou inexploitable. C'est pourquoi de nombreux travaux portent sur les approches *qualitatives* du raisonnement sur le temps et l'espace, comme l'algèbre des intervalles d'Allen (1983), dans le contexte de l'intelligence artificielle mais également dans ceux des systèmes d'informations géographiques, des bases de données et du multimédia (Chittaro, Montanari, 2000 ; Ligozat, 2011 ; Chen *et al.*, 2015). Plusieurs études récentes se concentrent sur la combinaison d'approches qualitatives, dans le but d'augmenter leur expressivité et ainsi le nombre de leurs applications. Une des combinaisons les plus étudiées est *l'intégration lâche* (Ligozat, 2011, ch. 15). Les formalismes spatio-temporels sont un autre type de combinaisons (Ligozat, 2011), incluant le traitement des séquences temporelles d'informations spatiales (Westphal *et al.*, 2013). Le *raisonnement multiéchelle*, la capacité à raisonner à différents niveaux de détail, est aussi une forme de combinaison (Hobbs, 1985 ; Euzenat, Montanari, 2005 ; Li, Nebel, 2007 ; Cohen-Solal *et al.*, 2015a ; 2015b).

Cet article introduit un cadre formel basé sur la structure commune des intégrations lâches, des représentations multiéchelles et des séquences temporelles d'informations spatiales. En effet, chacune de ces descriptions peut être vue comme un  $m$ -uplet de *réseaux de contraintes* possédant des interdépendances. Dans le cadre des intégrations lâches, chaque réseau est basé sur un formalisme différent, alors que dans celui des représentations multiéchelles et spatio-temporelles, tous les réseaux sont basés sur le même formalisme mais sont respectivement décrits à des échelles différentes et à des périodes différentes. De plus, dans chaque cas, les contraintes entre certaines variables de l'un des réseaux du  $m$ -uplet peuvent induire des contraintes entre ces mêmes variables dans les autres réseaux. Chaque contrainte induite correspond à une transformation, due par exemple à un changement de formalisme, un changement d'échelle, ou une évolution temporelle, respectivement.

Nous étudions en particulier la *décision de la cohérence* dans notre cadre formel. Nous nous focalisons sur des résultats généraux, communs aux trois types de combinaisons, en illustrant nos résultats sur un exemple bien connu d'intégration lâche. Plus précisément, nous identifions des conditions sur les sous-classes permettant d'utiliser la *clôture algébrique* généralisée pour décider de la cohérence de leurs réseaux – ces conditions sont donc suffisantes pour que la sous-classe soit *traitable*. Pour résumer, notre cadre formel permet de représenter et de raisonner, ainsi que d'identifier des fragments traitables, d'une façon unifiée pour les trois types de combinaisons.

Une question qui se pose est celle des limites de notre cadre formel : s'applique-t-il à tous les formalismes qualitatifs ? Avant d'y répondre, il faut remarquer que de nombreux formalismes qualitatifs, notamment certains utilisés comme « briques de base » des combinaisons, ne sont couverts par aucune des définitions proposées dans la littérature de ce qui constitue formellement un formalisme qualitatif. Nous proposons

donc une définition permettant d'inclure ces formalismes. Bien que notre définition ne soit pas suffisante pour inclure tous les formalismes, elle englobe tous ceux concernés par notre cadre formel, et lui donne une limite d'application bien précise.

Nous commençons par rappeler les concepts et formalismes fondamentaux du raisonnement sur le temps et l'espace. Puis nous présentons différentes combinaisons, notamment l'intégration lâche, le raisonnement multiéchelle et les séquences spatio-temporelles. Ensuite, nous exposons dans la section 3 la définition de formalisme qualitatif sur laquelle nous basons notre cadre formel. La section 4 introduit ledit cadre formel et la section 5 expose nos résultats de traitabilité. Pour finir, dans la section 6, nous illustrons nos résultats sur l'exemple de la combinaison « taille-topologie ».

## 2. Contexte et travaux connexes

### 2.1. Formalismes qualitatifs sur le temps et l'espace

#### 2.1.1. Relations et algèbres

Dans le cadre du raisonnement qualitatif sur le temps et l'espace, la problématique principale est la décision de la cohérence de descriptions temporelles et spatiales, prenant la forme d'ensembles de *relations* entre des *entités* temporelles ou spatiales. Ces entités appartiennent à un ensemble particulier, noté  $U$  et appelé *domaine* : dans le cadre temporel, le domaine peut être par exemple l'ensemble des intervalles de la droite réelle, et dans le cadre spatial, il peut être l'ensemble des régions du plan, ou l'ensemble des régions connexes du plan. On se donne ensuite un ensemble de *relations basiques* comme « vocabulaire » afin de décrire les liens entre les entités, comme  $<$ ,  $=$  et  $>$  pour des points sur la droite réelle. La relation entre deux entités est alors décrite par un ensemble de relations basiques, ce qui permet d'exprimer l'incertitude sur la véritable relation basique – par exemple, «  $x \{<, =\} y$  » veut dire «  $x < y$  ou  $x = y$  ». L'ensemble de toutes les relations basiques sur lequel se base le formalisme est noté  $\mathcal{B}$  (par commodité, l'ensemble  $\{\{b\} \mid b \in \mathcal{B}\}$  sera également désigné par  $\mathcal{B}$ ).

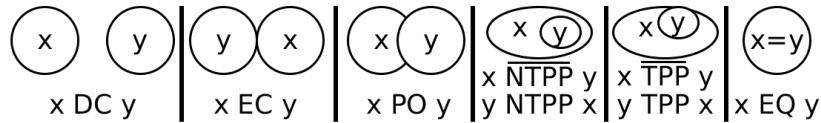


Figure 1. Les 8 relations basiques de RCC8 dans le plan

L'ensemble de toutes les relations a en fait une structure particulière : lorsque les relations sont binaires (ce qui sera toujours le cas dans cet article), il forme une algèbre non associative  $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{B}}$  (Ligozat, 2011, ch. 11). Parmi les algèbres qualitatives les plus connues, on trouve l'algèbre des intervalles d'Allen (1983), mais également l'algèbre des points PA (Beek, Cohen, 1989), dont les relations basiques sont  $\mathcal{B}_{PA} = \{<, =, >\}$ , et l'algèbre RCC8 des *relations topologiques* (Randell *et al.*, 1992). Les relations basiques de  $\mathcal{B}_{RCC8}$ , illustrées sur la figure 1 dans le cas du plan, sont *déconnexion*, notée DC, *connexion extérieure*, notée EC, *chevauchement partiel*,

notée PO, *partie propre tangentielle*, notée TPP, *partie propre non tangentielle*, notée NTPP, et les relations inverses des deux dernières, respectivement notées  $\overline{\text{TPP}}$  et  $\overline{\text{NTPP}}$ . Chaque relation basique admet en effet une relation basique inverse, décrivant la situation inverse correspondante. Par exemple, l'inverse de la relation *avant* « < » est la relation *après* « > » et l'inverse de la relation *égale* « = » est elle-même. Il y a plusieurs opérateurs sur les relations d'une algèbre  $\mathcal{A}$  : l'*inverse* d'une relation  $r$  (non nécessairement basique), notée  $\bar{r}$ , l'*intersection* de deux relations  $r_1$  et  $r_2$ , notée  $r_1 \cap r_2$ , et la *composition (abstraite)* de  $r_1$  et  $r_2$  (Renz, Ligozat, 2005), notée  $r_1 \diamond r_2$ . Ces opérateurs permettent de raisonner, en réduisant l'incertitude à propos des relations basiques entre les entités :  $x r y \iff y \bar{r} x$ ;  $x r_1 y \wedge x r_2 y \iff x (r_1 \cap r_2) y$ ; et  $x r_1 y \wedge y r_2 z \implies x (r_1 \diamond r_2) z$ . Par exemple, si on sait que  $x \{\text{EC}\} y$  et  $y \{\text{NTPP}\} z$ , on peut déduire que  $x \{\text{PO, NTPP, TPP}\} z$ . De plus, si on sait que  $x \{<, =\} y$  alors on déduit que  $y \{<, =\} x$ , c'est-à-dire  $y \{\overline{<}, \equiv\} x$ , soit  $y \{>, =\} x$ . Les opérations de composition et d'inversion sur des relations non basiques  $r$  et  $r'$  reviennent en fait aux opérations sur leurs relations basiques par les formules suivantes :

$$\bar{r} = \bigcup_{b \in r} \{\bar{b}\} \quad \text{et} \quad r \diamond r' = \bigcup_{b \in r} \bigcup_{b' \in r'} \{b\} \diamond \{b'\}.$$

### 2.1.2. Les représentations et leur cohérence

Une description temporelle ou spatiale peut être modélisée par un *réseau de contraintes qualitatives* – un graphe dont les nœuds sont des *variables d'entité* et dont chaque arc est étiqueté avec une relation de  $\mathcal{A}$ . Plus formellement, un réseau de contraintes qualitatives  $N$  sur un ensemble de relations  $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{B}}$  est un couple  $N = (E, C)$  où  $E$  est un ensemble fini de variables d'entité et  $C$  est un ensemble de *contraintes sur*  $\mathcal{S}$ , chacune étant un triplet  $(x, r, y)$ , avec  $x, y \in E$ ,  $x \neq y$  et  $r \in \mathcal{S}$ . Un exemple de réseau sur RCC8 est  $N = (\{x, y, z\}, \{(x, \{\text{EC}\}, y), (y, \{\text{NTPP}\}, z)\})$ . Comme tous les réseaux de cet article, il est « sous forme simplifiée » : il y a au plus une contrainte sur chaque paire de variables  $\{x, y\}$ , dont la relation est notée  $N^{xy}$  (implicitement,  $N^{yx} = \overline{N^{xy}}$ ). S'il n'y a aucune contrainte entre deux entités, la relation implicite correspondante est l'ensemble  $\mathcal{B}$  tout entiers (c'est donc le cas de  $N^{xz}$ ). On dit qu'un réseau  $N$  *affine* un autre réseau  $N'$  si on a la propriété  $\forall x, y \in E: N^{xy} \subseteq (N')^{xy}$ , que l'on note  $N \subseteq N'$ .

La notion de *solution* d'un réseau de contraintes dépend d'une sémantique, c'est-à-dire d'une *fonction d'interprétation*  $\varphi$  associant à chaque relation  $r$  de l'algèbre l'ensemble de tous les couples d'entités du domaine  $U$  considéré qui *satisfont*  $r$ . Lorsque  $\varphi$  vérifie certaines propriétés, sur lesquelles nous nous pencherons dans la section 3, le triplet  $(\mathcal{A}, U, \varphi)$  constitue un *formalisme qualitatif* (Ligozat, 2011, ch. 11). Ainsi, une solution d'un réseau de contraintes  $N$  est un ensemble  $\{u_x\}_{x \in E} \subseteq U$  tel que  $\forall x, y \in E: (u_x, u_y) \in \varphi(N^{xy})$ . Un problème fondamental est de déterminer si un réseau de contraintes possède au moins une solution, auquel cas il est dit *cohérent*. À chaque solution d'un réseau  $N$  correspond un unique *scénario* de  $N$  – un réseau  $S \subseteq N$  vérifiant  $\forall x, y \in E: S^{xy} \in \mathcal{B}$ . Ainsi, notre précédent exemple de réseau sur RCC8 n'est pas un scénario (car  $N^{xz}$  n'est pas basique). Chercher une solution d'un réseau  $N$  revient à chercher un scénario cohérent  $S$  de  $N$ , puisque toute solution de  $S$  est une solution de

$N$ . Décider de la cohérence d'un réseau est un problème NP-complet pour un grand nombre de formalismes (Ligozat, 2011, ch. 4). De ce fait, de nombreux travaux se focalisent sur l'identification de *sous-classes traitables*, c'est-à-dire d'ensembles  $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{B}}$  clos par composition, intersection et inversion, tels qu'il est polynomial de décider de la cohérence de tout réseau dont les relations appartiennent à  $\mathcal{S}$  (Ligozat, 2011, ch. 4).

Un réseau de contraintes est *algébriquement clos* – concept clef pour trouver des scénarios cohérents d'une façon purement algébrique – si pour tous  $x, y, z \in E$ , on a  $N^{xz} \subseteq N^{xy} \diamond N^{yz}$ . On peut transformer tout réseau  $N$  en un réseau algébriquement clos ayant les mêmes solutions en calculant sa *clôture algébrique*. Cela peut être fait en temps polynomial, en remplaçant itérativement chaque  $N^{xz}$  par  $(N^{xy} \diamond N^{yz}) \cap N^{xz}$  jusqu'à atteindre un point fixe. Si le réseau résultant n'est pas *trivialement incohérent* (c'est-à-dire, s'il ne contient aucune contrainte vide), il est dit *chemin-cohérent*. Pour un scénario, être algébriquement clos est équivalent à être chemin-cohérent (un scénario ne contient pas de contrainte vide par définition). Il est important de noter que dans le cas général, la chemin-cohérence n'implique pas la cohérence – même pour les scénarios : il existe des formalismes qualitatifs dont certains scénarios algébriquement clos ne sont pas cohérents (Renz, Ligozat, 2005). Mais lorsque tous les scénarios algébriquement clos d'un formalisme sont cohérents, la cohérence d'un réseau peut être décidée en cherchant un scénario algébriquement clos, via des méthodes de *backtrack* basées sur la clôture algébrique (Ligozat, 2011, ch. 2). Pour certaines sous-classes, tout réseau chemin-cohérent est cohérent, il n'y a donc pas besoin de *backtrack* : ces sous-classes sont ainsi traitables.

## 2.2. Combinaisons de formalismes qualitatifs

De nombreux travaux récents ont étudié différentes combinaisons de formalismes qualitatifs. L'objectif de telles combinaisons est d'augmenter l'expressivité de ces formalismes et ainsi le nombre de leurs applications. En effet, les formalismes qualitatifs de la littérature ne permettent actuellement que de manipuler un petit nombre de concepts à propos du temps ou de l'espace, comme la taille relative des entités, leur liens topologiques, leur connexité, leur position relative, etc., alors que raisonner sur des problèmes réels nécessite de prendre en compte un grand nombre de ces concepts.

Il y a plusieurs façons de combiner les formalismes qualitatifs et leurs concepts. L'une d'elles, que notre cadre formel englobe, est l'*intégration lâche* de deux formalismes, qui permet de manipuler des *biréseaux de contraintes* – des couples de réseaux ayant des interdépendances (Gerevini, Renz, 2002; Westphal, Woelfl, 2008). Un biréseau est cohérent s'il existe une même solution aux deux réseaux.

EXEMPLE 1. — L'intégration lâche des relations qualitatives de taille et des relations topologiques (Gerevini, Renz, 2002), que nous appellerons QST, permet de décrire la relation entre deux régions à la fois en termes de topologie (avec RCC8) et de taille relative (avec l'algèbre des points). Elle permet ainsi d'exprimer des relations telles que «  $x$  et  $y$  sont déconnectées et la taille de  $x$  est plus petite que celle de  $y$  ».  $\square$

Pour raisonner sur QST, Gerevini et Renz généralisent la chemin-cohérence en *bichemin-cohérence*, qui s'obtient en appliquant la clôture algébrique sur les deux réseaux tout en propageant leurs interdépendances. Des sous-classes pour lesquelles la bichemin-cohérence implique la cohérence ont été trouvées pour plusieurs combinaisons de formalismes (Gerevini, Renz, 2002 ; Li, Cohn, 2012 ; Cohn *et al.*, 2014).

Le cadre formel que nous proposons englobe les intégrations lâches (généralisées à  $m$  formalismes), mais il n'inclut pas tous les types de combinaison. Il ne s'applique notamment pas aux *intégrations étroites* (Ligozat, 2011, ch. 15), qui sont plus expressives que les intégrations lâches, au prix d'une augmentation drastique du nombre de relations. Une autre combinaison non couverte par notre cadre est celle de Meiri (1996), qui permet de raisonner à la fois sur des points et des intervalles. Les relations correspondantes sont entre un point et un intervalle, deux intervalles, et deux points, respectivement. Dans cette combinaison, dont la complexité a été étudiée en profondeur par Jonsson et Krokhin (2004), il n'y a qu'une relation par paire d'entités. Bien au contraire, le principe de l'intégration lâche est d'avoir plusieurs relations (provenant de formalismes différents) entre les mêmes entités, ce qui augmente l'expressivité en permettant l'utilisation de relations complémentaires. Cette complémentarité est l'intérêt principal de l'intégration lâche. Notons que cette combinaison a récemment été étendue par l'ajout d'incertitude sur le type des entités temporelles, c'est-à-dire « point » ou « intervalle » (Cohen-Solal *et al.*, 2015a ; 2015b).

La notion de combinaison de formalismes qualitatifs est étroitement liée à celles d'*affinement* et d'*abstraction* de formalismes, qui ont été étudiées dans le contexte de la fusion d'informations qualitatives (Condotta *et al.*, 2009). Un formalisme est plus abstrait (resp. moins fin) qu'un autre si chacune de ses relations basiques correspond à un ensemble de relations basiques de l'autre – ainsi, RCC5 (Long, Li, 2015) est une abstraction de RCC8. Pour finir, il existe aussi des combinaisons hybrides, regroupant des formalismes qualitatifs et non qualitatifs (Ligozat, 2011, ch. 6).

### 2.3. Formalismes combinant l'espace et le temps

Les formalismes spatio-temporels sont des combinaisons qui intègrent les informations spatiales et temporelles d'une façon particulière. Pour nombre de ces formalismes, le raisonnement porte sur des entités spatiales qui évoluent au cours du temps.

Westphal *et al.* (2013) proposent une méthode pour raisonner à propos de séquences temporelles d'informations spatiales. Il s'avère que ces descriptions partagent la même structure que l'intégration lâche et sont ainsi couvertes par notre cadre formel. Westphal *et al.* modélisent de telles séquences par des  $m$ -uplets de réseaux de contraintes, où chaque réseau correspond à un instant particulier. Ils introduisent deux types de solutions, en fonction de la dynamique désirée des entités au cours du temps. Dans les deux cas, les entités doivent se déplacer continûment. Notre cadre formel couvre les «  $T_2$ -solutions », qui garantissent qu'il n'y a aucune relation intermédiaire entre des instants-clefs successifs, c'est-à-dire que seuls les changements qualitatifs spécifiés peuvent se produire pour chaque paire d'entités.

EXEMPLE 2. — La description suivante est une séquence temporelle de 3 réseaux représentant des points spatiaux se déplaçant le long d’une ligne :  $x \leq y < z$  au premier instant,  $x = y = z$  au deuxième instant, puis  $x > y > z$  au troisième instant. Cette description possède des solutions temporellement continues sans relation intermédiaire entre les instants-clefs, comme celle de la figure 2a.  $\square$

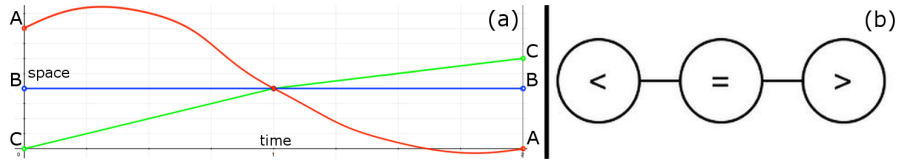


Figure 2. (a) Une évolution de points spatiaux sur  $\mathbb{R}$ ; (b) Le graphe de voisinage de l’algèbre des points

En fait, la condition  $T_2$  force les relations des instants-clefs successifs à être « voisins » selon le *graphe de voisinage* de l’algèbre des points (Freksa, 1991), montré dans la figure 2b. Par exemple, selon ce graphe, la seule relation voisine de «  $<$  » est «  $=$  ». La condition  $T_2$  assure ainsi que si  $x < y$  à un instant-clef, alors à l’instant-clef suivant (ainsi qu’au précédent) on a soit  $x < y$  soit  $x = y$ .

Le formalisme spatio-temporel de Gerevini et Nebel (2002) combine les relations de RCC8 et les relations de l’algèbre des intervalles d’Allen de façon à ce que chaque réseau sur RCC8 soit associé à un intervalle temporel. Ce formalisme est similaire à celui de Westphal *et al.* (2013), à la différence que l’ordre des instants-clefs est incertain. Cette combinaison n’est donc pas englobée par notre cadre formel, car les interdépendances dépendent des relations entre les intervalles, qui elles-mêmes dépendent des relations spatiales : des relations disjointes de RCC8 (sur le même couple de régions) imposent ainsi à leurs intervalles respectifs d’être disjointes. Ce type de combinaison est plus général que ne le permet la structure de l’intégration lâche.

#### 2.4. Raisonnement qualitatif multiéchelle

Le raisonnement qualitatif multiéchelle permet de raisonner en présence d’informations de précisions différentes (c’est-à-dire de niveaux de détail différents). Il s’avère qu’on peut l’envisager comme une combinaison, et que celle-ci est couverte par notre cadre formel, comme nous le verrons dans la section 4. Dans le cadre du raisonnement temporel multiéchelle, on considère plusieurs discrétisations du temps, de résolutions différentes, appelées *granularités* ou *échelles temporelles* (Euzenat, Montanari, 2005). Ces échelles sont le plus souvent des partitions de la droite réelle. Elles sont formalisées comme des fonctions  $g$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{N}$  préservant l’ordre. Une échelle  $g$  associe à un point  $x$  son *représentant*  $g(x)$  à cette échelle.

EXEMPLE 3. — Le calendrier grégorien est un exemple d’ensemble d’échelles. À l’échelle des jours, l’unité de base est le jour : le représentant d’un instant à cette échelle est le jour auquel il appartient. En conséquence, à cette échelle, tous les évé-



nements ayant lieu dans la même journée sont considérés comme ayant lieu au même moment, puisqu'ils ont le même représentant.  $\square$

Une échelle est dite *plus fine* qu'une autre si elle a une « meilleure résolution » : par exemple, dans le calendrier grégorien, l'échelle des mois est plus fine que celle des années – mais celle des semaines n'est *pas* plus fine que celle des mois (et réciproquement), car toute période de temps exprimée en mois ne peut s'exprimer exactement comme un ensemble de semaines, certaines semaines étant en effet à cheval sur deux mois. L'ensemble des échelles forme donc un ordre *partiel* par rapport à la relation « être plus fin que ».

À partir de cette modélisation du temps, on peut représenter des informations définies à différentes échelles : deux entités vérifient une contrainte *définie à une échelle* si les représentants des deux entités vérifient la contrainte « classique » correspondante. Par exemple, avoir  $x < y$  à l'échelle des minutes veut dire que la minute à laquelle  $x$  a lieu est avant la minute à laquelle  $y$  a lieu.

Des opérateurs de conversion ont été introduits pour raisonner sur plusieurs échelles afin de convertir une information d'une échelle à une autre (Euzenat, Montanari, 2005). Dans le cadre qualitatif, la *conversion descendante*  $\downarrow$  permet de propager les relations vers une échelle plus fine et la *conversion ascendante*  $\uparrow$  permet de propager les relations vers une échelle plus *grossière*, c'est-à-dire moins fine. Le tableau 1 décrit ainsi les conversions de l'algèbre des points. Par exemple, puisqu'un instant peut être avant un autre à l'échelle des secondes tout en ayant lieu durant la même minute, la conversion ascendante vérifie  $\{=\} \in \uparrow\{<\}$ . Dans un précédent article (Cohen-Solal *et al.*, 2015a ; 2015b), nous avons proposé une formalisation du raisonnement temporel multiéchelle qualitatif dans le contexte de la décision de la cohérence, formalisation qui permet notamment de prendre en compte le fait qu'un intervalle puisse devenir un instant à une échelle plus grossière et qu'un instant puisse devenir un intervalle à une échelle plus fine.

Tableau 1. Conversions ascendante et descendante de l'algèbre des points

$b$	$<$	$=$	$>$
$\uparrow b$	$\leq$	$=$	$\geq$
$\downarrow b$	$<$	$\mathcal{B}_{PA}$	$>$

Notons qu'il existe également des travaux concernant le raisonnement multiéchelle dans le cadre spatial (Euzenat, 2001 ; Li, Nebel, 2007).

### 3. Définition formelle d'un formalisme qualitatif

Un grand nombre de formalismes qualitatifs ont été introduits dans la littérature. Cependant, une partie de ces formalismes ne correspond pas à la définition de Ligozat et Renz (2004) de ce qui constitue formellement un formalisme qualitatif. En conséquence, Dylla *et al.* (2013) ont proposé une définition plus générale, mais elle ne

couvre pas non plus toute une catégorie de formalismes que nous avons besoin de manipuler comme tels dans notre cadre formel. Nous proposons donc une nouvelle définition qui, bien que ne comprenant pas non plus absolument tous les formalismes existants, inclut tous ceux concernés par les résultats du cadre formel que nous proposons. Notons tout d'abord que notre cadre formel ne concerne que les formalismes à base de relations binaires, à l'instar des deux définitions précédemment mentionnées ; nous excluons ainsi d'office tous les formalismes d'arité supérieure (voir par exemple Ligozat, 2011 ; Chen *et al.*, 2015) de notre discussion.

La définition de Ligozat et Renz d'un formalisme qualitatif consiste en une partie *syntactique*, constituée d'un ensemble de relations abstraites formant une algèbre non associative, et d'une partie *sémantique*, permettant d'interpréter ces relations abstraites comme de vraies relations sur un domaine  $U$ . Nous optons pour la même approche, et basons notamment notre définition sur la même structure algébrique : une algèbre non-associative  $\mathcal{A}$  est un ensemble de relations abstraites  $A$ , doté d'opérations appelées *union*  $\cup$ , *complémentaire*  $\bar{\cdot}^c$ , *composition*  $\diamond$ , et *inversion*  $\bar{\cdot}$ , contenant des relations particulières appelées *relation vide*  $\emptyset$ , *relation universelle*  $\mathcal{B}$  et *égalité*  $e$ , et vérifiant les axiomes d'une algèbre de relations binaires sauf l'associativité.

DÉFINITION 4. — Une algèbre non associative  $\mathcal{A}$  est un octuplet  $\mathcal{A} = (A, \cup, \bar{\cdot}^c, \emptyset, \mathcal{B}, \diamond, \bar{\cdot}, e)$  tel que  $(A, \cup, \bar{\cdot}^c, \emptyset, \mathcal{B})$  est une algèbre booléenne et que les propriétés suivantes sont vérifiées pour tous  $x, y, z \in A$ , avec  $x \cap y = (x^c \cup y^c)^c$  :

$$\begin{array}{ll} \bar{\bar{x}} = x & e \diamond x = x \diamond e = x \\ \overline{(x \cup y)} = \bar{x} \cup \bar{y} & x \diamond (y \cup z) = x \diamond y \cup x \diamond z \\ \overline{x \diamond y} = \bar{y} \diamond \bar{x} & (x \diamond y) \cap \bar{z} = \emptyset \iff (y \diamond z) \cap \bar{x} = \emptyset \end{array}$$

C'est la partie sémantique de leur définition que nous généralisons afin d'inclure un plus grand nombre de formalismes de la littérature. Il est toujours question d'interpréter les relations abstraites de l'algèbre comme des relations sur  $U$  grâce à une fonction d'interprétation  $\varphi$ , mais nos conditions sur  $\varphi$  sont moins restrictives.

DÉFINITION 5. — Un formalisme qualitatif symétrique est un triplet  $(\mathcal{A}, U, \varphi)$ , où  $\mathcal{A}$  est une algèbre non associative finie,  $U$  est un domaine d'entités non vide et  $\varphi: \mathcal{A} \rightarrow 2^{U \times U}$  est une fonction d'interprétation vérifiant, pour tous  $r, r' \in \mathcal{A}$  :

$$\begin{array}{ll} \varphi(\emptyset) = \emptyset & \varphi(r \cap r') = \varphi(r) \cap \varphi(r') \\ \varphi(\bar{r}) = \overline{\varphi(r)} & \varphi(r \cup r') = \varphi(r) \cup \varphi(r') \\ & \varphi(r \diamond r') \supseteq (\varphi(r) \circ \varphi(r')) \cap \varphi(\mathcal{B}) \end{array}$$

Les conditions sur  $\varphi$  garantissent simplement qu'il y a une correspondance correcte entre les relations abstraites et les relations sur  $U$ . En particulier, elles assurent que les opérateurs de l'algèbre sont *sains* – c'est-à-dire que ces opérateurs abstraits ne font pas de déductions invalides.

Contrairement à notre définition, celle de Ligozat et Renz impose en plus que la relation d'égalité  $e$  de l'algèbre soit interprétée comme l'égalité sur  $U$  (plus formellement, ils imposent que  $\varphi(e) = \{(x, y) \in U \times U \mid x = y\}$ ). Malheureusement, certains formalismes ne permettent pas d'exprimer la relation d'égalité sur  $U$  ; ils ne sont donc pas des formalismes qualitatifs au sens de Ligozat et Renz. C'est notamment le cas du formalisme des relations de taille relative entre régions, mentionné dans l'exemple 1.

EXEMPLE 6. — La partie syntaxique du formalisme sur les tailles est l'algèbre des points.  $U$  est un ensemble des régions mesurables, de  $\mathbb{R}^2$  par exemple, défini pour une mesure  $\mu$  (comme la mesure de Jordan). La fonction d'interprétation est simplement définie par  $\varphi(<) = \{(x, y) \in U \times U \mid \mu(x) < \mu(y)\}$  et  $\varphi(=) = \{(x, y) \in U \times U \mid \mu(x) = \mu(y)\}$ . Ce formalisme comporte donc une égalité sur les tailles des régions, mais il ne comporte pas d'égalité entre les régions. Il s'agit d'une « égalité faible », qui porte sur un attribut des entités et non sur les entités elles-mêmes.  $\square$

L'absence d'égalité sur  $U$  apparaît aussi dans le cadre du raisonnement multi-échelle : l'égalité à une certaine échelle est une approximation de celle sur  $U$  (voir la section 2.3). Notons que dans ces cas de figure, il y a cependant toujours une *égalité syntaxique* dans la structure algébrique (l'élément neutre de la composition abstraite).

Une autre famille de formalismes qualitatifs non incluse dans la définition de Ligozat et Renz est celle des formalismes dont les relations basiques ne sont pas conjointement exhaustives sur  $U$ , c'est-à-dire ne forment pas une partition de  $U \times U$ , mais seulement une *sous-partition*. Autrement dit, certains couples d'entités ne correspondent à aucune relation basique. En conséquence, les relations basiques de tels formalismes ne permettent pas de représenter toutes les configurations possibles d'entités de  $U$ . Un exemple simple est RCC7 (Gerevini, Renz, 2002), qui correspond à RCC8 sans la relation de chevauchement. Cette algèbre ne permet évidemment pas de représenter toutes les configurations possibles de disques dans le plan, par exemple : deux disques qui se chevauchent ne vérifient même pas la relation universelle de RCC7. L'opérateur de composition est également plus restrictif : si on a  $x \{EC\} y$  et  $y \{NTPP\} z$ , le raisonnement dans RCC7 déduit que  $x \{NTPP, TPP\} z$ , ce qui n'est pas vrai pour des régions  $x, y, z$  quelconques. Tout cela ne pose cependant aucun problème si on sait que les régions que l'on considère ne peuvent pas se chevaucher : RCC7 est très utile dans le cadre d'applications en géographie (les pays ne se chevauchent pas) ou dans celui du raisonnement sur des objets physiques. Dans ces cas, l'algèbre permet bien de représenter toutes les configurations possibles, et le raisonnement est sain. Les formalismes basés sur des sous-partitions permettent donc de raisonner dans des cas particuliers intéressants, où des connaissances sur le monde permettent d'écarter certaines relations basiques. Notons que ces connaissances portant sur les *couples* d'entités autorisées, on ne peut les imposer en restreignant simplement le domaine  $U$  pour se ramener à un formalisme basé sur une partition.

EXEMPLE 7. — Les relations basiques du formalisme  $\mathcal{DR}A_{24}$  (Moratz *et al.*, 2000), qui porte sur des segments orientés, ne forment pas une partition : elles ne permettent pas de représenter les cas où au moins trois points des segments sont alignés (comme le cas de deux segments colinéaires). Cela couvre toutes les situations possibles si on

sait que pour tout couple de segments, au plus deux points de ces segments sont sur la même ligne. Cette condition ne peut cependant pas être imposée sur le domaine  $U$ , qui doit rester l'ensemble de tous les segments orientés. Par conséquent,  $\mathcal{DR}\mathcal{A}_{24}$  n'est pas un formalisme au sens de Ligozat et Renz (mais il l'est pour notre définition).  $\square$

Pour inclure ces formalismes basés sur des sous-partitions, nous avons relâché deux conditions de la définition de Ligozat et Renz. Tout d'abord, nous n'imposons plus que l'interprétation de la relation universelle  $\mathcal{B}$  soit nécessairement  $U \times U$ . L'autre condition posant problème dans la définition originale est  $\varphi(r) \circ \varphi(r') \subseteq \varphi(r \diamond r')$ , qui garantit que la composition abstraite que donne l'algèbre est une approximation saine de la véritable composition des relations sur  $U$ . Puisque les formalismes basés sur une sous-partition, comme RCC7, ne vérifient pas cette condition, nous l'avons remplacée par  $(\varphi(r) \circ \varphi(r')) \cap \varphi(\mathcal{B}) \subseteq \varphi(r \diamond r')$ . La composition abstraite peut ainsi retirer des couples d'entités, potentiellement valides, de  $U \times U$ , tant qu'elle ne retire pas des couples d'entités de  $\varphi(\mathcal{B})$ , c'est-à-dire de la sous-partition. En supposant que la relation universelle  $\mathcal{B}$  est vérifiée par toutes les couples d'entités considérées, ce qui est généralement le cas quand on utilise un formalisme basé sur une sous-partition, alors la composition est bien saine : il n'y a pas d'inférence incorrecte par composition.

Notons que Dylla *et al.* (2013) ont eux aussi proposé une généralisation de la définition de formalisme qualitatif de Ligozat et Renz. Elle inclut les formalismes n'ayant pas l'égalité, mais également ceux dotés d'un inverse dit *faible*, c'est-à-dire que l'inverse de certaines relations basiques n'est pas une relation basique (Goyal, Egenhofer, 2000 ; Navarrete *et al.*, 2013). Ces formalismes enfreignent donc la plupart des axiomes des algèbres non associatives, ainsi qu'une condition sur  $\varphi$ . En particulier, la condition  $\varphi(\bar{r}) = \overline{\varphi(r)}$  de Ligozat et Renz doit être remplacée par  $\varphi(\bar{r}) \supseteq \overline{\varphi(r)}$ .

Les formalismes qualitatifs de notre définition ne peuvent pas avoir un inverse faible – c'est pourquoi nous les qualifions de *symétriques*. Cependant, contrairement à notre définition, celle de Dylla *et al.* n'inclut pas les formalismes basés sur des sous-partitions. Aucune de ces deux définitions n'est donc plus générale que l'autre. Il serait possible de généraliser les deux à la fois, en autorisant les inverses faibles, les sous-partitions et l'absence d'égalité. Cependant, cette généralité alourdirait beaucoup notre cadre formel pour la combinaison de formalismes, contrairement à nos modifications de la définition de Ligozat et Renz, qui seront transparentes dans la suite de l'article. De plus, rendre notre cadre formel plus général n'a que peu d'intérêt actuellement, car il n'y a à notre connaissance que deux formalismes avec un inverse faible dans la littérature : celui de Goyal et Egenhofer (2000), dont aucune sous-classe traitable n'a pour le moment été identifiée, et celui de Navarrete *et al.* (2013), qui est intégralement exprimable dans l'algèbre des rectangles – formalisme couvert par notre définition.

Pour résumer, les formalismes qualitatifs que nous considérons dans cet article sont basés sur un ensemble fini de relations basiques sur  $U$  non nécessairement conjointement exhaustives, et sont dotés d'un inverse *fort* et d'une égalité syntaxique qui n'est pas nécessairement interprétée comme l'égalité sur  $U$ . Étant donné que la propriété à relâcher pour inclure les formalismes manquants de la littérature est celle d'inverse fort, nous qualifions ces formalismes de *symétriques*.

#### 4. Raisonnement dans le contexte des combinaisons de formalismes : le cadre formel des multialgèbres

Cette section introduit le cœur de notre cadre formel, basé sur les *multialgèbres*. Nous commençons par introduire ces objets, qui constituent la structure sous-jacente des intégrations lâches, des séquences spatio-temporelles et des descriptions multi-échelles. Puis, nous montrons comment on peut raisonner avec des relations de multialgèbres et leur donnons une sémantique formelle. Nous généralisons ensuite les réseaux de contraintes et leur clôture algébrique à ce cadre plus large.

##### 4.1. Projections et multialgèbres

Nous introduisons les blocs de base de notre cadre formel en commençant par les *projections*, dont le but est de représenter les interdépendances entre des relations provenant de formalismes différents. Une projection associe simplement à chaque relation d'un formalisme la relation qui lui correspond dans un autre formalisme.

DÉFINITION 8. — Soit  $\mathcal{A} = 2^{\mathcal{B}}$  et  $\mathcal{A}' = 2^{\mathcal{B}'}$  deux algèbres. Un opérateur de projection est une fonction  $\uparrow : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}'$  qui satisfait les conditions suivantes :

$$\forall b \in \mathcal{B} : \uparrow \{\bar{b}\} = \overline{\uparrow \{b\}} \quad \text{et} \quad \forall r \in \mathcal{A} : \uparrow r = \bigcup_{b \in r} \uparrow \{b\}.$$

Nous pouvons maintenant définir les *multialgèbres*, qui sont des produits cartésiens d'algèbres – chacune d'elles correspondant à un des formalismes combinés, à un des instants de la séquence spatiale ou à une des échelles – dotés d'opérateurs de projection représentant les interdépendances de leurs relations.

DÉFINITION 9. — Une multialgèbre  $\mathcal{A}$  est le produit cartésien de  $m$  algèbres  $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_m$  (avec  $m \in \mathbb{N}^*$ ), doté de  $m(m-1)$  opérateurs de projection  $\uparrow_i^j : \mathcal{A}_i \rightarrow \mathcal{A}_j$  (pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  distincts).

Nous qualifions de relations les éléments  $R$  de  $\mathcal{A}$ , bien qu'ils soient en fait des  $m$ -uplets de relations ;  $R_i$  désigne la relation (classique) associée à  $\mathcal{A}_i$  dans  $R$ . On dit que  $R$  est basique lorsque tous les  $R_i$  sont basiques ( $R \in \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$ ).

Remarquons qu'une multialgèbre avec  $m = 1$  (une « monoalgèbre ») est exactement une algèbre classique, puisqu'elle n'a aucun opérateur de projection.

EXEMPLE 10. — La multialgèbre correspondant à QST (voir l'exemple 1) est le produit cartésien  $\text{RCC8} \times \text{PA}$  de l'algèbre  $\text{RCC8}$  (voir la figure 1) et de l'algèbre des points  $\text{PA}$  (décrivant les tailles relatives des régions), avec les opérateurs de projection correspondant aux interdépendances définies par Gerevini et Renz (2002) (voir les tableaux 2 et 3). Une de ses relations est  $(\{\text{TPP}\}, \{<, =\})$  et la projection de  $\{\text{TPP}\}$  vers  $\text{PA}$  est  $\uparrow_{\text{RCC8}}^{\text{PA}} \{\text{TPP}\} = \{<\}$ , puisque  $\text{TPP}$  est la relation *partie propre tangentielle* et qu'une région strictement incluse dans une autre est nécessairement plus petite.  $\square$

Tableau 2. Projection de PA vers RCC8 dans QST

$b$	$<$	$=$	$>$
$\uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCC8}}\{b\}$	DC, EC, PO, TPP, NTPP	DC, EC, PO, EQ	DC, EC, PO, $\overline{\text{TPP}}$ , $\overline{\text{NTPP}}$

Tableau 3. Projection de RCC8 vers PA dans QST

$b$	DC	EC	PO	EQ	TPP	NTPP	$\overline{\text{TPP}}$	$\overline{\text{NTPP}}$
$\uparrow_{\text{RCC8}}^{\text{PA}}\{b\}$	$\mathcal{B}_{\text{PA}}$	$\mathcal{B}_{\text{PA}}$	$\mathcal{B}_{\text{PA}}$	$=$	$<$	$<$	$>$	$>$

EXEMPLE 11. — Le produit cartésien  $\text{PA}^m$  peut être utilisé pour représenter des séquences de relations binaires entre des points sur une ligne, comme dans l'exemple 2. En effet, on peut utiliser le  $i$ -ème PA pour le  $i$ -ème instant ;  $R_i$  est ainsi la relation à l'instant  $i$ . On dote alors  $\text{PA}^m$  des projections suivantes, imposant le respect du graphe de voisinage de la figure 2 :  $\uparrow_i^j\{<\} = \{<, =\}$ ,  $\uparrow_i^j\{>\} = \{>, =\}$ , et  $\uparrow_i^j\{=\} = \mathcal{B}$ , si les instants  $i$  et  $j$  sont voisins (c'est-à-dire si  $|i - j| = 1$ ), et  $\forall b \in \mathcal{B}$  :  $\uparrow_i^j\{b\} = \mathcal{B}$  (c'est-à-dire aucune contrainte), s'ils ne le sont pas. Par exemple,  $\text{PA} \times \text{PA} \times \text{PA}$  est la multialgèbre correspondant à trois instants. La relation  $(\{<, =\}, \{=\}, \{>\})$  de cette multialgèbre représente une séquence possible de relations pour les trois instants.  $\square$

EXEMPLE 12. — En la dotant de projections différentes, la multialgèbre  $\text{PA}^m$  peut aussi être utilisée pour représenter des descriptions temporelles multiéchelles. Cette fois, le  $i$ -ème PA correspond à la  $i$ -ème échelle, ainsi  $R_i$  est la relation à l'échelle  $i$ . Par exemple, la relation  $(\{<\}, \{<, =\}, \{<, =\}, \{=\})$  de  $\text{PA}^4$  décrit une relation temporelle possible entre deux événements à quatre échelles différentes (secondes, minutes, heures, jours). Les projections de cette multialgèbre correspondent aux conversions ascendante  $\uparrow$  et descendante  $\downarrow$  introduites dans la section 2.3. Plus précisément, pour tout  $b \in \mathcal{B}$ , on a  $\uparrow_i^j\{b\} = \uparrow b$  et  $\uparrow_j^i\{b\} = \downarrow b$  si l'échelle  $i$  est plus fine que l'échelle  $j$ , et  $\uparrow_i^j\{b\} = \mathcal{B}$  si aucune des deux n'est plus fine que l'autre.  $\square$

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, nous utilisons une notation allégée pour les relations. Par exemple, nous écrivons  $(\text{TPP EQ}, <)$  à la place de  $(\{\text{TPP}, \text{EQ}\}, \{<\})$ , et  $(\leq, =, \neq)$  à la place de  $(\{<, =\}, \{=\}, \{<, >\})$ .

#### 4.2. Raisonner à propos des relations d'une multialgèbre

On peut raisonner sur les relations d'une multialgèbre en appliquant les règles classiques composante par composante. Par exemple, dans QST (voir l'exemple 10), si  $x (\text{TPP}, \leq) y$  et  $y (\text{DC}, =) z$ , alors  $x (\text{DC}, \leq) z$  (puisque  $\text{TPP} \diamond \text{DC}$  est DC et  $\leq \diamond =$  est  $\leq$ ). Il est ainsi naturel d'introduire des opérateurs de composition  $\diamond$ , d'intersection  $\cap$  et d'inversion  $\bar{\phantom{x}}$  sur les relations des multialgèbres, qui se basent sur les opérateurs correspondants des algèbres combinées et fonctionnent simplement composante par composante – par exemple,  $\forall R, R' \in \mathcal{A}$  :  $\forall i : (R \diamond R')_i = R_i \diamond R'_i$ . De la même façon, nous notons également  $R \subseteq R'$  le fait que  $R_i \subseteq R'_i$  pour chaque  $i$ . Les opérateurs com-

binés sont utiles pour appliquer les concepts classiques à notre cadre généralisé ; il ne suffisent cependant pas pour le raisonnement, qui nécessite additionally de propager les interdépendances au sein de chaque relation. La définition suivante introduit dans ce but la *clôture par projection* d'une relation de multialgèbre.

DÉFINITION 13. — La clôture par projection de  $R \in \mathcal{A}$ , notée  $\bar{\cdot}(R)$ , est obtenue à partir de  $R$  en remplaçant itérativement chaque  $R_j$  par  $R_j \cap (\bar{\cdot}^j R_i)$  pour tous  $i, j$  distincts jusqu'à atteindre un point fixe.

EXEMPLE 14. — Reprenons la multialgèbre de QST introduite dans l'exemple 10. Puisque nous avons  $\bar{\cdot}_{\text{RCC8}}^{\text{PA}}\{\text{TPP}\} = \{<\}$ , la clôture par projection de  $(\text{TPP}, \leq)$  est  $\bar{\cdot}(\text{TPP}, \leq) = (\text{TPP}, <)$ . Pour la même raison, celle de  $(\text{TPP}, >)$  est  $\bar{\cdot}(\text{TPP}, >) = (\emptyset, \emptyset)$ , ce qui prouve que cette relation n'est pas réalisable. En effet, une région ne peut être à l'intérieur d'une autre alors qu'elle a une plus grande taille. Pour  $\text{PA}^3$ , dans le contexte de l'exemple 11, la clôture par projection de  $(<, \neq, >)$  est  $(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$ , ce qui prouve que cette séquence de relations entre points à 3 instants successifs n'est pas réalisable : en effet, deux points sur une droite ne peuvent inverser leur position relative sans qu'il n'existe d'instant où ils soient égaux. Notons cependant que les relations  $(<, \neq)$  et  $(\neq, >)$  de  $\text{PA}^2$  sont chacune indépendamment réalisables.  $\square$

En résumé et plus formellement, pour deux relations  $R$  et  $R'$  d'une multialgèbre, nous avons les règles suivantes de raisonnement (supposant  $x (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m) z$ ) :

$$\begin{array}{ll} x R y \iff y \bar{R} x & x R y \wedge x R' y \iff x (R \cap R') y \\ x R y \iff x (\bar{\cdot} R) y & x R y \wedge y R' z \iff x (R \diamond R') z \end{array}$$

### 4.3. Sémantique et cohérence des relations

Grâce à ces opérateurs, nous pouvons maintenant donner aux relations des multialgèbres une sémantique propre, en adoptant une approche similaire au cadre classique et en posant  $B \in R \iff B \subseteq R \wedge B \in \mathcal{B}_1 \times \dots \times \mathcal{B}_m$  ( $B$  est une relation basique de  $R$ ).

DÉFINITION 15. — Un formalisme qualitatif (lâchement<sup>1</sup>) combiné est un triplet  $(\mathcal{A}, U, \varphi)$ , où  $\mathcal{A}$  est une multialgèbre,  $U$  est un domaine d'entités et  $\varphi$  est une fonction d'interprétation  $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow 2^{U \times U}$  vérifiant :

$$\begin{array}{ll} \varphi(\bar{\cdot} R) = \varphi(R) & \varphi(R \diamond R') \supseteq (\varphi(R) \circ \varphi(R')) \cap \varphi((\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)) \\ \varphi(\bar{R}) = \overline{\varphi(R)} & \varphi(R \cap R') = \varphi(R) \cap \varphi(R') \\ \varphi((\emptyset, \dots, \emptyset)) = \emptyset & \varphi(R) = \bigcup_{B \in R} \varphi(B) \end{array}$$

avec  $R, R' \in \mathcal{A}$  et  $\circ$  la composition des relations sur  $U$ .

1. Nous qualifions ces formalismes de « lâchement combinés » car ils ont la structure de l'intégration lâche.

Cette définition est une généralisation naturelle de la notion de formalisme qualitatif symétrique que nous avons proposée dans la section 3, à la nuance que l'interprétation ne distribue plus sur l'union. Elle est adaptée aux  $m$ -uplets de relations, et la condition sur  $\varphi(\uparrow R)$  a été ajoutée pour garantir que la projection soit saine (c'est-à-dire qu'elle ne retire pas de couples d'entités valides).

EXEMPLE 16. — Nous appelons *calcul des points granulaire* (GPC) le formalisme combiné permettant de représenter les descriptions temporelles multiéchelles basées sur l'algèbre des points. Pour  $m$  échelles, la multialgèbre de GPC est simplement  $\text{PA}^m$  avec pour projections les conversions d'échelle, comme décrit dans l'exemple 12. L'univers  $U$  de GPC est l'univers du calcul des points PC, c'est-à-dire  $U = \mathbb{R}$ . La fonction d'interprétation de GPC est définie par  $\varphi(R) = \bigcap_{i \in \{1, \dots, m\}} \varphi_i(R_i)$  avec  $\varphi_i$  la fonction d'interprétation de l'échelle  $i$  qui associe à chaque relation  $r$  les couples de points dont les représentants à cette échelle vérifient  $r$ . Plus formellement,  $\varphi_i(r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (g_i(x), g_i(y)) \in \varphi_{\text{PA}}(r)\}$ , où  $g_i$  est la fonction associant à  $x$  son représentant à l'échelle  $i$  (voir la section 2.3).  $\square$

EXEMPLE 17. — Nous appelons *calcul des points temporalisé* (TPC) le formalisme combiné de l'exemple 2, représentant des séquences temporelles sur l'algèbre des points interprétée spatialement. La multialgèbre de TPC est simplement celle décrite dans l'exemple 11 (c'est-à-dire  $\text{PA}^m$  pour des séquences de longueur  $m$ ); sa sémantique nécessite de choisir la valeur  $\tau_i \in \mathbb{R}$  de chaque instant  $i$  de la séquence. Le domaine  $U$  est alors l'ensemble des évolutions de points sur la droite réelle durant la séquence, c'est-à-dire l'ensemble  $\mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_m])$  des fonctions continues de  $[\tau_0, \tau_m]$  dans  $\mathbb{R}$ . L'interprétation d'une relation de TPC est l'ensemble des couples de points évoluant continûment sur  $\mathbb{R}$  au cours du temps de la séquence, satisfaisant à chaque instant-clef la relation correspondante et ne satisfaisant aucune autre relation entre ces instants. Plus formellement, en notant  $\varphi_{\text{PA}}$  la fonction d'interprétation classique de l'algèbre des points sur la droite réelle, et  $\text{B}(p, p')$  la relation basique de PA vérifiée par deux points  $p$  et  $p'$  de  $\mathbb{R}$ , l'interprétation d'une relation  $R$  par  $\varphi$  est l'ensemble des couples  $(x, y)$  de fonctions de  $\mathcal{C}^0([\tau_0, \tau_m])$  qui remplissent les conditions suivantes.

(i) Les relations aux instants-clefs sont satisfaites :

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} : (x(\tau_i), y(\tau_i)) \in \varphi_{\text{PA}}(R_i).$$

(ii) Entre deux instants-clefs successifs  $\tau_i, \tau_{i+1}$ , il existe un instant de transition  $\tau$  tel qu'avant  $\tau$  la relation est celle de l'instant-clef précédent, et après  $\tau$  celle de l'instant-clef suivant :

$$\forall i \in \{1, \dots, m-1\} : \exists \tau \in [\tau_i, \tau_{i+1}] : \bigwedge \begin{cases} \forall t \in [\tau_i, \tau] : \text{B}(x(t), y(t)) = \text{B}(x(\tau_i), y(\tau_i)) \\ \forall t \in ]\tau, \tau_{i+1}] : \text{B}(x(t), y(t)) = \text{B}(x(\tau_{i+1}), y(\tau_{i+1})) \\ \text{B}(x(\tau), y(\tau)) \in \{\text{B}(x(\tau_i), y(\tau_i)), \text{B}(x(\tau_{i+1}), y(\tau_{i+1}))\}. \end{cases}$$



Notons que TPC est basé sur une sous-partition (voir section 3) : en effet, la relation entre deux fonctions continues quelconques n'est pas forcément exprimable dans TPC pour un choix fixé des  $\tau_i$ .  $\square$

L'intégration lâche (généralisée à  $m$  formalismes) est un cas particulier de formalisme lâchement combiné, construit à partir de formalismes existants, dans lequel les projections et la fonction d'interprétation ont une certaine forme. On peut vérifier que toutes les conditions exigées par la définition 15 sont satisfaites.

**DÉFINITION 18.** — *L'intégration lâche de  $m$  formalismes qualitatifs symétriques  $(\mathcal{A}_1, U, \varphi_1), \dots, (\mathcal{A}_m, U, \varphi_m)$  sur le même domaine  $U$  est le formalisme combiné  $(\mathcal{A}, U, \varphi)$ , où  $\mathcal{A}$  est la multialgèbre  $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$  dont les projections  $\mathfrak{r}_i^j$  satisfont  $\forall b \in \mathcal{B}_i: \mathfrak{r}_i^j\{b\} = \{b' \in \mathcal{B}_j \mid \varphi_i(b) \cap \varphi_j(b') \neq \emptyset\}$ , et  $\varphi: (r_1, \dots, r_m) \mapsto \varphi_1(r_1) \cap \dots \cap \varphi_m(r_m)$ .*

**EXEMPLE 19.** — QST est l'intégration lâche du formalisme RCC8 et du formalisme interprétant l'algèbre des points PA en termes de tailles de régions (voir exemple 6). Nous retrouvons la multialgèbre de l'exemple 10, et en particulier ses projections.  $\square$

**CONTRE-EXEMPLE 20.** — *En revanche, on peut montrer que TPC (Ex. 17) n'est pas une intégration lâche. En effet, les fonctions d'interprétation à chaque instant-clef ne peuvent être définies indépendamment les unes des autres : il serait alors impossible d'imposer l'unicité de l'instant de transition  $\tau$  entre deux instants-clefs.*

#### 4.4. Cohérence des relations

La sémantique des relations induit une notion de cohérence :

**DÉFINITION 21.** — *Une relation d'une multialgèbre  $\mathcal{A}$  est dite cohérente pour un formalisme combiné  $(\mathcal{A}, U, \varphi)$  si  $\varphi(R) \neq \emptyset$ .*

Contrairement aux formalismes classiques (monoalgèbres), où toute relation non vide est cohérente, les relations – même basiques – des multialgèbres peuvent être incohérentes, à cause des interdépendances. La définition d'un formalisme combiné (définition 15) permet néanmoins de conserver la propriété élémentaire suivante :

**PROPOSITION 22.** — *Une relation  $R$  d'une multialgèbre  $\mathcal{A}$  est cohérente si et seulement si elle contient une relation basique cohérente :*

$$\varphi(R) \neq \emptyset \iff \exists B \in \mathcal{B}: B \subseteq R \wedge \varphi(B) \neq \emptyset.$$

L'exemple 14 avait déjà illustré le fait que certaines relations étaient incohérentes à cause des interdépendances, en exhibant des relations basiques et non basiques dont la clôture par projection est vide. Clore une relation par projection peut ainsi aider à détecter son incohérence : si  $\mathfrak{r} R$  est vide, on peut conclure que  $R$  est incohérente. Autrement,  $\mathfrak{r} R$  est dite  $\mathfrak{r}$ -cohérente.

**DÉFINITION 23.** — *Une relation  $R$  d'une multialgèbre est  $\mathfrak{r}$ -cohérente si elle est close par projection ( $R = \mathfrak{r}(R)$ ) et non trivialement incohérente ( $\forall i: Ri \neq \emptyset$ ).*

Cependant, bien que les opérateurs de projection puissent retirer des incohérences *paire à paire*, la cohérence dépend en définitive de la fonction d'interprétation. Par exemple, dans une intégration lâche, on peut avoir  $\varphi_i(r_i) \cap \varphi_j(r_j) \neq \emptyset$  pour tous  $i, j$ , et avoir pourtant  $\bigcap_i \varphi_i(r_i) = \emptyset$ ; les projections étant saines,  $\overset{\rceil}{\rceil}(r_1, \dots, r_n)$  ne sera pas trivialement incohérente, et pourtant  $\varphi(r_1, \dots, r_n) = \emptyset$ . La  $\overset{\rceil}{\rceil}$ -cohérence n'implique donc pas nécessairement la cohérence, ce qui est ennuyeux car on voudrait pouvoir raisonner de manière purement algébrique – pour cela il faut que les opérateurs de la multialgèbre suffisent à décider de la cohérence.

Nous nous intéressons donc, dans la suite de cette section, à des conditions qui assurent que les relations  $\overset{\rceil}{\rceil}$ -cohérentes soient cohérentes. Pour commencer, une condition nécessaire évidente est que les relations basiques closes par projection soient cohérentes; cette condition n'est cependant pas suffisante. Intuitivement, ce qui peut compromettre la cohérence est le fait que les interdépendances entre les formalismes de la combinaison soient « trop fortes ». Par exemple, les interdépendances de TPC ne sont pas fortes, au sens où elles n'imposent de restriction qu'entre instants voisins – le passé ne contraint pas le futur lointain. Pour définir formellement cette idée, nous commençons par introduire l'opérateur réciproque d'une projection, qui décrit les interdépendances de cette projection dans le sens inverse.

DÉFINITION 24. — *Soit un opérateur de projection  $\overset{\rceil}{\rceil}_i^j$  d'une algèbre  $\mathcal{A}_i$  vers une algèbre  $\mathcal{A}_j$ . L'opérateur de projection réciproque  $\underset{\rceil}{\rceil}_i^j$  de l'opérateur  $\overset{\rceil}{\rceil}_i^j$  est l'opérateur de projection de  $\mathcal{A}_j$  vers  $\mathcal{A}_i$  défini par  $\forall b \in \mathcal{B}_j: \forall b' \in \mathcal{B}_i: b \in \underset{\rceil}{\rceil}_i^j\{b'\} \iff b' \in \overset{\rceil}{\rceil}_i^j\{b\}$ .*

Par exemple, pour GPC (exemple 12), la projection réciproque de  $\overset{\rceil}{\rceil}_i^j$  est simplement l'opérateur de projection  $\overset{\rceil}{\rceil}_j^i$ . Notons cependant que la propriété  $\overset{\rceil}{\rceil}_i^j b = \underset{\rceil}{\rceil}_j^i b$  n'est pas forcément vérifiée par les projections d'une multialgèbre quelconque.

Nous allons pouvoir maintenant formaliser le fait que les interdépendances d'une multialgèbre ne soient pas « fortes » en imposant qu'elles possèdent une structure arborescente. Rappelons tout d'abord qu'une *anti-arborescence* est un graphe orienté possédant un nœud particulier, appelé racine, tel qu'il existe un unique chemin vers la racine depuis tout nœud. On note  $i \rightarrow j$  s'il y a un arc du nœud  $i$  vers le nœud  $j$ .

DÉFINITION 25. — *Une multialgèbre de dimension  $m$  est dite arborescente s'il existe une anti-arborescence sur  $\{1, \dots, m\}$  telle que pour chaque paire  $\{i, j\}$ , avec  $i = k_0 \rightarrow \dots \rightarrow k_s \leftarrow \dots \leftarrow k_{s+t+1} = j$  la plus courte chaîne orientée de  $i$  à  $j$ , la propriété suivante soit vérifiée :*

$$\forall b \in \mathcal{B}_i: \overset{\rceil}{\rceil}_i^j\{b\} \supseteq \left( \underset{\rceil}{\rceil}_j^{k_{s+t}} \circ \dots \circ \underset{\rceil}{\rceil}_{k_{s+1}}^{k_s} \right) \circ \left( \overset{\rceil}{\rceil}_{k_{s-1}}^{k_s} \circ \dots \circ \overset{\rceil}{\rceil}_i^{k_1} \right) \{b\}$$

La multialgèbre de TPC est bien arborescente, en prenant simplement pour anti-arborescence l'ordre temporel des instants : en effet, la projection vers un instant voisin est identique qu'il soit futur ou passé, et les projections vers tous les autres instants donnent  $\mathcal{B}$ , ce qui signifie qu'il n'y a aucune interdépendance directe. L'inclusion de cette définition est donc vérifiée. Autrement dit, dans cet exemple, les interdépendances ne sont pas fortes car la projection entre des instants éloignés n'est contrainte

que par la composition des projections des instants voisins intermédiaires. Remarquons également que les multialgèbres des intégrations lâches de deux formalismes, telles que QST (exemple 19), sont toutes arborescentes, car  $\overset{r}{\Gamma}_i^j b = \downarrow_j^i b$  pour tout  $b$ .

Ajoutée à la condition nécessaire sur les relations basiques, la condition d'arborescence permet de garantir la cohérence des relations  $\overset{r}{\Gamma}$ -cohérentes.

**PROPOSITION 26.** — *Soit une multialgèbre arborescente dont les relations basiques closes par projection sont cohérentes ; ses relations  $\overset{r}{\Gamma}$ -cohérentes sont cohérentes.*

**PREUVE.** — Soit  $R$  une relation  $\overset{r}{\Gamma}$ -cohérente et soit  $A$  l'anti-arborescence de la multialgèbre, dont la racine est notée  $r$ . Nous allons construire une relation basique  $B \subseteq R$  particulière. Soit  $j$  tel que  $j \rightarrow r$  (c'est-à-dire que  $(j, r) \in A$ ) ; comme  $R_r \subseteq \overset{r}{\Gamma}_j^r R_j$ , pour tout  $b_r \in R_r$ , il existe  $b_j \in R_j$  tel que  $b_r \in \overset{r}{\Gamma}_j^r \{b_j\}$ . Si on choisit un des  $b_r$ , on peut donc choisir un  $b_j$  correspondant, et ce pour tous les  $j$  tels que  $j \rightarrow r$ . Pour un de ces  $j$ , considérons maintenant un  $i$  tel que  $i \rightarrow j$  : de la même manière, pour tout  $b_j \in R_j$  il existe  $b_i \in R_i$  tel que  $b_j \in \overset{j}{\Gamma}_i^j \{b_i\}$ . Ainsi on peut choisir, pour tous les  $i$  tels que  $i \rightarrow j$ , un  $b_i$  correspondant au  $b_j$  choisi précédemment – et ce pour tous les  $j$  considérés précédemment. On peut répéter ce processus en parcourant toute l'anti-arborescence afin d'obtenir une relation basique  $B = (b_1, \dots, b_m)$  vérifiant la propriété suivante, qu'on appellera  $\mathcal{P}$  : pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , si  $i \rightarrow j$  alors  $b_j \in \overset{j}{\Gamma}_i^j \{b_i\}$ .

Nous allons maintenant montrer que  $B$  est close par projection. Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  ; on doit prouver que  $b_j \in \overset{j}{\Gamma}_i^j \{b_i\}$ . Soit  $i = k_0 \rightarrow \dots \rightarrow k_s \leftarrow \dots \leftarrow k_{s+t+1} = j$  la plus courte chaîne de  $i$  à  $j$  dans l'anti-arborescence. Comme  $i = k_0 \rightarrow k_1$ , la propriété  $\mathcal{P}$  implique que  $b_{k_1} \in \overset{k_1}{\Gamma}_i^{k_1} \{b_i\}$ . De manière similaire,  $b_{k_2} \in \overset{k_2}{\Gamma}_{k_1}^{k_2} \{b_{k_1}\}$ , et donc  $b_{k_2} \in \overset{k_2}{\Gamma}_{k_1}^{k_2} (\overset{k_1}{\Gamma}_i^{k_1} \{b_i\})$ , puisque les opérateurs de projection sont monotones (grâce à la deuxième condition de la définition 8). On réitère jusqu'à arriver à  $b_{k_s} \in (\overset{k_s}{\Gamma}_{k_{s-1}}^{k_s} \circ \dots \circ \overset{k_1}{\Gamma}_i^{k_1}) \{b_i\}$ . Maintenant, comme  $r_s \leftarrow r_{s+1}$ , la propriété  $\mathcal{P}$  implique que  $b_{k_s} \in \overset{k_s}{\Gamma}_{k_{s+1}}^{k_s} \{b_{k_{s+1}}\}$ , et donc que  $b_{k_{s+1}} \in \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} \{b_{k_s}\}$  (par la définition 24). Une nouvelle fois, on en déduit par monotonie que  $b_{k_{s+1}} \in \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s} ((\overset{k_s}{\Gamma}_{k_{s-1}}^{k_s} \circ \dots \circ \overset{k_1}{\Gamma}_i^{k_1}) \{b_i\})$ , et en réitérant on arrive à  $b_j \in (\downarrow_{k_j}^{k_{s+t}} \circ \dots \circ \downarrow_{k_{s+1}}^{k_s}) \circ (\overset{k_s}{\Gamma}_{k_{s-1}}^{k_s} \circ \dots \circ \overset{k_1}{\Gamma}_i^{k_1}) \{b_i\}$ . Comme la multialgèbre est arborescente, on sait par définition que le membre de droite est inclus dans  $\overset{j}{\Gamma}_i^j \{b_i\}$ , et donc *a fortiori* que  $b_j \in \overset{j}{\Gamma}_i^j \{b_i\}$ . Ceci étant vrai pour tous  $i, j$ , on en déduit que  $B$  est close par projection. Comme elle est basique, elle est cohérente par hypothèse. Ainsi, puisque  $B \subseteq R$ , on conclut que  $R$  est cohérente (proposition 22). ■

Ainsi, les relations  $\overset{r}{\Gamma}$ -cohérentes de TPC et QST sont cohérentes, puisque l'on a vu que leurs multialgèbres sont arborescentes ; pour ces formalismes, clore une relation par projection suffit à décider de sa cohérence. Pour GPC (voir l'exemple 16), cela dépend des relations entre les échelles : la multialgèbre est arborescente lorsque les échelles forment un ordre partiel arborescent pour la relation « être plus fin » – c'est-à-dire que pour tout couple d'échelles  $(g, g')$  tel que  $g$  n'est pas plus fine que  $g'$  et  $g'$  pas plus fine que  $g$ , il n'existe aucune échelle  $g''$  qui soit plus grossière que ces deux échelles à la fois. C'est notamment le cas du calendrier grégorien.

#### 4.5. Réseaux sur des multialgèbres et clôture algébrique

Nous modélisons les descriptions sur les formalismes combinés comme des *réseaux de contraintes qualitatives sur des multialgèbres*, qui fonctionnent exactement comme les réseaux de contraintes du cadre classique, à la différence que les contraintes entre les entités sont des  $m$ -uplets de relations. Par exemple, le réseau  $N$  à gauche de la figure 3 correspond à la séquence temporelle de 3 réseaux sur l'algèbre des points décrite dans l'exemple 2; la relation  $N^{xy}$  correspond donc à la séquence des relations entre  $x$  et  $y$ . Il est important de remarquer qu'un réseau  $N$  sur une multialgèbre  $\mathcal{A}$  peut être vu de manière équivalente comme un  $m$ -uplet de réseaux classiques  $N_i$  sur l'algèbre  $\mathcal{A}_i$ , comme le montre la figure 3, dans laquelle  $N_i$  correspond à l'état du réseau à l'instant  $i$ . Ceci est formalisé par la définition suivante.

**DÉFINITION 27.** — Soit  $N = (E, C)$  un réseau sur une multialgèbre  $\mathcal{A}$ . La  $i$ -ème tranche de  $N$ , notée  $N_i$ , est le réseau  $(E, C_i)$  sur  $\mathcal{A}_i$ , où  $C_i = \{(x, R_i, y) \mid (x, R, y) \in C\}$ .

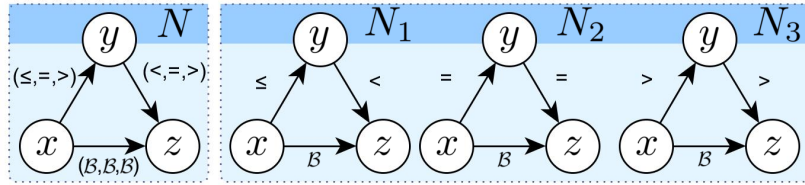


Figure 3. Un réseau  $N$  sur  $PA^3$  et ses trois tranches

Nous adaptons directement aux réseaux sur des multialgèbres certaines notions classiques (voir la section 2.1), à savoir celle de *scénario* ainsi que celles de *solution* et *cohérence*, qui sont maintenant relatives à un formalisme combiné (nous omettons cette précision lorsque ça n'introduit pas d'ambiguïté). Par exemple, une solution du réseau de la figure 3 (pour TPC) est l'évolution représentée dans la figure 2a. Les autres notions doivent cependant être généralisées :

**DÉFINITION 28.** — Un réseau  $N$  sur une multialgèbre  $\mathcal{A}_1 \times \dots \times \mathcal{A}_m$  est trivialement incohérent si  $\exists i \in \{1, \dots, m\} : \exists x, y \in E : N_i^{xy} = \emptyset$ .

Il est algébriquement clos si  $N^{xz} \subseteq N^{xy} \diamond N^{yz}$  et  $N^{xy} = \dagger N^{xy}$  pour tous  $x, y, z \in E$ .

Il est algébriquement cohérent s'il est algébriquement clos et non trivialement incohérent.

Pour un réseau sur une multialgèbre, être « algébriquement clos » consiste à être clos à la fois par composition et par projection. Cela généralise proprement le cadre classique, puisque toute relation d'une monoalgèbre est close par projection (par vacuité). De plus, la notion de « cohérence algébrique » généralise la bichemin-cohérence à  $m$  dimensions, et fonctionne de la même façon – c'est une condition nécessaire pour la cohérence qui peut être utilisée pour filtrer des réseaux incohérents. On peut l'imposer en closant alternativement chaque relation  $N^{xy}$  par projection et chaque tranche  $N_i$  par composition jusqu'à atteindre un point fixe.

EXEMPLE 29. — Le réseau  $N$  sur QST de la figure 4a est algébriquement cohérent. Cependant, si on retire « = » de  $N_{PA}^{xy}$ , le réseau n'est plus algébriquement clos car il n'est plus clos par projection, puisque  $\{\overline{NTPP}, EQ\} \notin \overline{r_{PA}^{RCC8}}\{>\}$  (tableau 2). En outre, même si  $N$  est algébriquement cohérent et bien que  $N_{PA}$  et  $N_{RCC8}$  soient cohérents,  $N$  est en fait incohérent. En effet, d'une part « = » de  $N_{PA}^{xy}$  n'appartient à aucun scénario cohérent de  $N_{PA}$  (Beek, Cohen, 1989, p. 13). D'autre part,  $\overline{NTPP}$  de  $N^{xy}$  n'est pas non plus réalisable, car elle n'appartient à aucun scénario cohérent de  $N_{RCC8}$ . La seule relation basique restante,  $x (EQ, >) y$ , est incohérente, puisque sa clôture par projection est la relation vide  $(\emptyset, \emptyset)$ . Cependant, en ajoutant DC à  $N_{RCC8}^{yz}$ , le réseau reste algébriquement cohérent, mais devient cette fois cohérent : la figure 4b montre un de ses scénarios cohérents.  $\square$

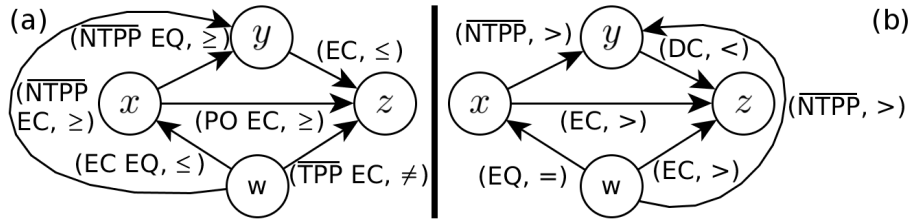


Figure 4. (a) Un réseau sur QST algébriquement cohérent, mais néanmoins incohérent; (b) un scénario cohérent sur QST

Remarquons, pour finir, que la définition 15 de formalisme combiné induit la propriété élémentaire suivante :

PROPOSITION 30. — *Un réseau  $N$  sur une multialgèbre  $\mathcal{A}$  est cohérent si et seulement s'il contient un scénario  $S$  cohérent.*

Il est donc possible de décider de la cohérence d'un réseau en cherchant simplement un scénario cohérent, par exemple via une procédure avec *backtrack*.

## 5. Résultats de traitabilité

Nous étudions maintenant le problème de la décision de la cohérence de réseaux sur des multialgèbres. Le problème étant NP-complet pour de nombreux formalismes, nous procédons comme dans le cadre classique : nous nous concentrons sur des sous-ensembles de multialgèbres, et en particulier sur des *sous-classes*. Nous présentons deux théorèmes fournissant des conditions sur une sous-classe qui suffisent à garantir la cohérence de ses réseaux algébriquement cohérents. Les sous-classes vérifiant ces conditions sont en particulier *traitables*. Pour conclure cette section, nous nous intéressons à des conditions plus fortes qui permettent de vérifier aisément les hypothèses des théorèmes.

### 5.1. Sous-classes algébriquement traitables

Nous commençons par introduire deux types de sous-ensembles de multialgèbres, adaptés du cas classique, à savoir les *sous-classes* et les *sous-algèbres* (qui sont des sous-classes particulières).

DÉFINITION 31. — Une sous-classe d'une multialgèbre  $\mathcal{A}$  est un ensemble de relations  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A}$  qui est clos par composition, intersection et inversion. Si  $\mathcal{S}$  contient toutes les relations basiques (c'est-à-dire que  $\mathcal{B}_1 \times \cdots \times \mathcal{B}_m \subseteq \mathcal{S}$ ), elle est qualifiée de sous-algèbre.

Par exemple,  $H_8 \times PA$  – où  $H_8$  est une sous-algèbre bien connue de RCC8 (Gerevini, Renz, 2002) – est une sous-algèbre de la multialgèbre  $RCC8 \times PA$ . Les sous-algèbres sont des sous-classes particulièrement intéressantes puisque tous les scénarios de la multialgèbre sont des scénarios de ces sous-classes. De plus, les sous-classes les plus étudiées sont des sous-algèbres (Ligozat, 2011 ; Long, Li, 2015).

La notion suivante de *tranche* d'un sous-ensemble d'une multialgèbre est en quelque sorte une réciproque du produit cartésien. Elle va nous permettre d'hériter certains résultats de traitabilité du cadre classique vers celui des multialgèbres.

DÉFINITION 32. — La  $i$ -ème tranche d'un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre  $\mathcal{A}$ , notée  $\mathcal{S}_i$ , est le sous-ensemble de  $\mathcal{A}_i$  défini par  $\mathcal{S}_i = \{R_i \mid R \in \mathcal{S}\}$ .

Remarquons que  $\mathcal{S}$  est toujours un sous-ensemble de  $\mathcal{S}_1 \times \cdots \times \mathcal{S}_m$ , le produit cartésien de ses tranches. De plus, lorsque  $\mathcal{S}$  est une sous-classe (resp. sous-algèbre) de  $\mathcal{A}$ , chaque tranche  $\mathcal{S}_i$  est une sous-classe (resp. sous-algèbre) de  $\mathcal{A}_i$ , et dans ce cas le produit cartésien des  $\mathcal{S}_i$  est aussi une sous-classe (resp. sous-algèbre) de  $\mathcal{A}$ .

Rappelons que, comme dans le cadre classique, on peut utiliser la clôture algébrique pour détecter des réseaux incohérents : elle fournit une procédure de décision de la cohérence qui est polynomiale et saine (puisque les opérateurs sont sains, grâce à la définition 15), mais incomplète. Notre objectif dans cette section est d'identifier des sous-classes pour lesquelles la procédure est complète :

DÉFINITION 33. — Une sous-classe  $\mathcal{S}$  est dite algébriquement traitable lorsque, pour tout réseau  $N$  sur  $\mathcal{S}$ , si la clôture algébrique de  $N$  n'est pas trivialement incohérente alors  $N$  est cohérent.

Pour qu'une sous-classe soit algébriquement traitable, une condition nécessaire fondamentale est que ses scénarios algébriquement clos soient cohérents ; c'est le cas de base, qui dépend de la fonction d'interprétation du formalisme combiné.

On pourrait penser que si tous les réseaux algébriquement cohérents sur une sous-classe  $\mathcal{S}$  sont cohérents, alors  $\mathcal{S}$  est algébriquement traitable ; mais ce n'est pas suffisant car, contrairement au cadre classique, la clôture algébrique d'un réseau  $N$  sur une sous-classe  $\mathcal{S}$  n'est pas nécessairement sur  $\mathcal{S}$ , et la condition n'impose donc rien sur la cohérence de  $N$ . Cette condition est en revanche suffisante dans les cas où la clôture par projection de n'importe quelle relation de  $\mathcal{S}$  reste dans  $\mathcal{S}$ . Plus formellement :

DÉFINITION 34. — Une sous-classe  $\mathcal{S}$  est dite  $\uparrow$ -close si  $\forall R \in \mathcal{S} : \uparrow R \in \mathcal{S}$ .

PROPOSITION 35. — Une sous-classe  $\uparrow$ -close sur laquelle les réseaux algébriquement cohérents sont cohérents est algébriquement traitable.

Maintenant, étant donnée une sous-classe  $\uparrow$ -close, sous quelles conditions a-t-on la garantie que les réseaux algébriquement cohérents de cette sous-classe soient cohérents ? Dans la suite, nous proposons deux théorèmes complémentaires fournissant de telles conditions. Ainsi, avec le premier théorème, une sous-algèbre hérite de la traitabilité de ses tranches, alors qu'avec le deuxième théorème, la traitabilité est héritée d'un de ses sous-ensembles de relations par affinement.

## 5.2. Héritage de la traitabilité par découpage

Dans cette section, nous nous intéressons à des conditions assurant qu'une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  soit traitable en nous appuyant sur la traitabilité de ses tranches  $\mathcal{S}_i$ . Une de ces conditions est que chaque tranche doit être « scénarisable par un affinement » : un affinement d'un sous-ensemble d'une multialgèbre est, comme dans le cadre classique, une fonction  $h : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{A}$  telle que  $h(R) \subseteq R$  pour tout  $R \in \mathcal{S}$ . La scénarisabilité par  $h$ , définie ci-dessous dans le contexte du cadre classique, assure que l'on peut utiliser un affinement pour construire un scénario algébriquement clos à partir de tout réseau chemin-cohérent d'une sous-classe.

DÉFINITION 36. — Une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  d'une monoalgèbre est scénarisable par un affinement  $h$  si pour tout réseau chemin-cohérent  $N$  sur  $\mathcal{S}$  et pour tous  $x, y \in E$ , les conditions suivantes sont remplies : (i)  $h(N^{xy}) \neq \emptyset$ , et (ii) pour tout  $b \in h(N^{xy})$  il existe un scénario  $S \subseteq N$  algébriquement clos tel que  $S^{xy} = b$ .

Lorsque les scénarios algébriquement clos sont cohérents (voir la remarque après la définition 33), la scénarisabilité par un affinement assure la traitabilité algébrique de  $\mathcal{S}$ . En effet, à partir de n'importe quel réseau chemin-cohérent sur  $\mathcal{S}$ , on peut obtenir un scénario cohérent, en répétant autant de fois que nécessaire les trois étapes suivantes : (i) choisir une paire de variables, (ii) remplacer leur relation par une relation basique de l'affinement, et (iii) calculer la clôture algébrique. Trouver un affinement par lequel une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  est scénarisable est une méthode classique pour prouver que  $\mathcal{S}$  est traitable (Ligozat, 2011, ch. 2). Par exemple, l'algèbre des points PA et la sous-classe des relations pré-convexes de l'algèbre des intervalles d'Allen sont scénarisables par  $h_{\max}$ , l'affinement par les relations basiques de « dimension maximale » (Ligozat, 2011, ch. 2) :  $h_{\max}(r) = \{b \in r \mid \dim(b) = \dim(r)\}$ .

Revenons à présent au cadre des multialgèbres, et considérons une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  dont chaque tranche  $\mathcal{S}_i$  est scénarisable par un  $h_i$ . Une idée naturelle est d'appliquer la technique classique en combinant les  $h_1, \dots, h_m$  en un affinement sur la multialgèbre. Nous appelons « multiaffinement » les affinements ayant cette forme spécifique :

DÉFINITION 37. — *Un affinement  $H$  d'un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre est un multiaffinement s'il a la forme  $H: R \mapsto (h_1(R_1), \dots, h_m(R_m))$ , où chaque  $h_i$  est un affinement de  $\mathcal{S}_i$ . On note alors  $H = (h_1, \dots, h_m)$ .*

Cependant, même si chaque  $\mathcal{S}_i$  est scénarisable par  $h_i$ , il n'y a en fait aucune garantie que le multiaffinement  $H = (h_1, \dots, h_m)$  puisse être utilisé pour trouver un scénario cohérent en appliquant une adaptation de la méthode de « scénarisabilité par  $h$  ». Des conditions supplémentaires sont requises pour assurer que les affinement individuels fonctionnent bien ensemble par rapport aux projections. Premièrement, l'affinement par  $H$  des relations  $\uparrow$ -cohérentes (définition 23) doit être cohérent ; c'est une sorte de scénarisabilité par  $H$  pour les relations. Deuxièmement, la compatibilité entre l'hypothèse précédente et la scénarisabilité des tranches  $\mathcal{S}_i$  requiert la propriété suivante :

DÉFINITION 38. — *Un réseau est dit simple lorsque le clure par projection puis par composition le rend soit algébriquement cohérent, soit trivialement incohérent.*

*Une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  est dite simple lorsque tout réseau sur  $\mathcal{S}$  est simple.*

Nous verrons dans la section 5.4 que la simplicité d'une sous-classe est facile à établir, notamment grâce aux propriétés de la composition et de la projection. En utilisant les propriétés précédentes, nous formulons notre premier théorème :

THÉORÈME 39 (théorème de découpage). — *Soit  $\mathcal{S}$  une sous-algèbre dont les scénarios algébriquement clos sont cohérents, et soit  $H = (h_1, \dots, h_m)$  un multiaffinement. Si les conditions suivantes sont remplies :*

- (C1) *chaque tranche  $\mathcal{S}_i$  est scénarisable par  $h_i$  ;*
- (C2)  *$\mathcal{S}$  est simple ;*
- (C3) *pour toute relation  $\uparrow$ -cohérente  $R$  de  $\mathcal{S}$ , a relation  $H(R)$  est cohérente ;*

*alors les réseaux algébriquement cohérents sur  $\mathcal{S}$  sont cohérents.*

*Si, en plus,  $\mathcal{S}$  est  $\uparrow$ -close, alors  $\mathcal{S}$  est algébriquement traitable.*

PREUVE. — Soit  $N$  un réseau algébriquement cohérent sur  $\mathcal{S}$ , et soient  $x$  et  $y$  des variables telles que  $N^{xy}$  n'est pas basique. On sait que  $H(N^{xy})$  est cohérente (C3), elle contient donc au moins une relation basique cohérente  $B = (b_1, \dots, b_m)$  (proposition 22). On affine alors  $N^{xy}$  par  $B$ . De manière évidente, le réseau  $N$  modifié, que l'on note  $N'$ , est encore clos par projection, et il est toujours sur  $\mathcal{S}$  (comme  $\mathcal{S}$  est une sous-algèbre).

D'autre part, puisque chaque tranche  $N_i$  du réseau initial est chemin-cohérente, il existe un scénario algébriquement clos  $S \subseteq N'_i$  tel que  $S^{xy} = b_i$  (C1). Ainsi, la clôture de  $N'$  par composition n'est pas trivialement incohérente ; elle est donc algébriquement cohérente, puisque  $\mathcal{S}$  est simple (C2) et que  $N'$  était déjà clos par projection.

Le résultat est un réseau algébriquement cohérent sur  $\mathcal{S}$ . Nous pouvons donc appliquer à nouveau la procédure depuis le début, rendant ainsi itérativement basiques et cohérentes toutes les relations du réseau initial. La procédure finit donc nécessairement avec un scénario algébriquement clos  $S$ , qui est cohérent par hypothèse. Puisque



$S \subseteq N$ , la proposition 30 permet de conclure que  $N$  est cohérent. Le deuxième résultat est un corollaire direct du premier (par la proposition 35). ■

Ce théorème peut être utilisé pour *prouver* la traitabilité d'une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  construite à partir de sous-algèbres traitables connues. Il offre aussi une façon très efficace de *décider* de la cohérence d'un réseau sur  $\mathcal{S}$ , qui ne nécessite qu'une clôture par projection suivie d'une clôture par composition. Enfin, la preuve décrit un algorithme efficace pour *exhiber* un scénario cohérent d'un réseau sur  $\mathcal{S}$ .

### 5.3. Héritage de la traitabilité par affinement vers un sous-ensemble

Cette section présente des conditions alternatives assurant la traitabilité d'une sous-classe  $\uparrow$ -close  $\mathcal{S}$ . L'idée, qui s'inspire de la technique classique de « réduction par affinement » (Renz, 1999), est de chercher un sous-ensemble  $\mathcal{S}'$  dont les réseaux algébriquement cohérents sont cohérents, ainsi qu'un affinement de  $\mathcal{S}$  vers  $\mathcal{S}'$  qui préserve la cohérence algébrique des réseaux. Nous appelons *stabilité algébrique par affinement* cette condition de préservation de la cohérence algébrique :

DÉFINITION 40. — *Un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre est algébriquement stable par un affinement  $H$  si, pour tout réseau algébriquement cohérent  $N$  sur  $\mathcal{S}$ , le réseau affiné  $H(N)$  (obtenu depuis  $N$  en remplaçant simultanément chaque relation  $N^{xy}$  par  $H(N^{xy})$ ) est toujours algébriquement cohérent.*

Par exemple,  $H_8 \times \text{PA}$  est algébriquement stable par  $H = (h_{H_8}, h_{\max})$ , avec  $h_{H_8}$  l'affinement pour  $H_8$  de Renz (1999). Cette propriété peut être aisément prouvée : comme pour la simplicité (définition 38), nous montrerons dans la section 5.4 que la stabilité peut être vérifiée facilement par énumération. Notre second théorème formalise le mécanisme de réduction, qui s'applique à des sous-ensembles quelconques d'une multialgèbre, et pas seulement aux sous-classes.

THÉORÈME 41 (théorème d'affinement). — *Soit  $H$  un affinement d'un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre vers un autre sous-ensemble  $\mathcal{S}'$ . Si les conditions suivantes sont remplies :*

(C1)  *$\mathcal{S}$  est algébriquement stable par  $H$  ;*

(C2) *les réseaux algébriquement cohérents sur  $\mathcal{S}'$  sont cohérents ;*

*alors les réseaux algébriquement cohérents sur  $\mathcal{S}$  sont également cohérents.*

*Si, en plus,  $\mathcal{S}$  est une sous-classe  $\uparrow$ -close, alors  $\mathcal{S}$  est algébriquement traitable.*

PREUVE. — Soit  $N$  un réseau algébriquement cohérent sur  $\mathcal{S}$ . Par C1, le réseau  $H(N)$  est algébriquement cohérent. Il est ainsi cohérent, par C2, comme il est sur  $\mathcal{S}'$ . On en déduit que  $N$  est également cohérent, puisque  $H(N) \subseteq N$  (par la proposition 30). Le deuxième résultat est un corollaire direct du premier (par la proposition 35). ■

#### 5.4. Conditions plus fortes pour la cohérence et propriétés remarquables

Nous nous intéressons maintenant aux moyens de prouver que les hypothèses des théorèmes sont vérifiées pour établir la traitabilité de sous-classes. Nous allons voir que ces hypothèses sont en fait aisément vérifiables par énumération, grâce aux propriétés des opérateurs.

En particulier, nous allons nous intéresser aux restrictions  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  de sous-classes  $\mathcal{S}$  afin d'obtenir des résultats sur  $\mathcal{S}$  à partir de résultats sur  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ . Dans ce contexte, nous allons utiliser l'abus de notation suivant : étant donnée une sous-classe  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre  $\mathcal{A}$ , la notation  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  désigne une sous-classe de la multialgèbre implicite  $\mathcal{A}_i \times \mathcal{A}_j$  qui n'a pour projections que  $\mathcal{P}_i^j$  et  $\mathcal{P}_j^i$ . En particulier, la  $\mathcal{P}$ -cohérence d'une relation de  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  ne dépend que des projections de sa multialgèbre implicite.

##### 5.4.1. Simplicité et distributivité

Nous commençons par la vérification de la simplicité (définition 38), pour pouvoir appliquer le théorème de découpage. En remarquant qu'être clos est une propriété locale, on peut voir qu'il suffit d'énumérer tous les biréseaux à trois variables sur chaque  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  pour vérifier qu'une sous-algèbre  $\mathcal{S}$  est simple :

PROPOSITION 42. — *Soit  $\mathcal{S}$  une sous-algèbre  $\mathcal{P}$ -close. Si, pour chaque couple de tranches  $(\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j)$ , tous les réseaux sur  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  avec uniquement trois variables sont simples, alors  $\mathcal{S}$  est simple.*

PREUVE. — La preuve de ce résultat vient directement de la définition de la clôture par projection et de la clôture par composition. Rappelons qu'être totalement clos par projection, c'est être clos par projection pour chaque paire  $\{i, j\}$ , et qu'être totalement clos par composition, c'est être clos par composition pour chaque triplet de variables.

Supposons que les hypothèses soient vérifiées, et considérons un réseau  $N$  sur  $\mathcal{S}$ . On veut montrer que clore  $N$  par projection puis par composition le rend soit trivialement incohérent, soit algébriquement cohérent. Supposons que la clôture de  $N$  par projection puis composition ne soit pas trivialement incohérente, et montrons qu'elle est algébriquement cohérente.

On clôt  $N$  par projection. Si ensuite on clôt  $N$  localement par composition pour trois variables, chaque  $(N_i, N_j)$  reste clos par projection : en effet,  $(N_i, N_j)$  restreint à trois variables est simple, et par hypothèse il ne peut pas être trivialement incohérent après composition. Puisque chaque  $(N_i, N_j)$  reste clos par projection, c'est le cas de  $N$  tout entier. On peut donc effectuer d'autres clôtures par composition locales jusqu'à obtenir un réseau entièrement clos par composition ; il restera clos par projection après chaque étape et le sera donc encore à la fin. En conclusion, si la clôture de  $N$  par projection puis par composition n'est pas trivialement incohérente, elle est algébriquement cohérente :  $N$  est simple. Puisque ce résultat s'applique à tout réseau de  $\mathcal{S}$ , cela prouve que  $\mathcal{S}$  est simple. ■

Cependant, dans le cadre de sous-classes ayant un grand nombre de relations, cette vérification peut ne pas être faisable en temps raisonnable. Nous proposons alors une propriété plus forte, c'est-à-dire impliquant la simplicité, dont la vérification n'est plus que quadratique en fonction du nombre de relations. Cette propriété est particulièrement remarquable, car il s'agit de la sur-distributivité des opérateurs de projection sur la composition et sur l'intersection. Nous qualifions de «  $\mathring{\Gamma}$ -distributives » les sous-classes la vérifiant.

**DÉFINITION 43.** — *On dit qu'un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre est  $\mathring{\Gamma}$ -distributif s'il vérifie les conditions suivantes pour tous  $i, j$  distincts de  $\{1, \dots, m\}$  :*

- (i)  $\mathring{\Gamma}_i^j$  est sur-distributif par rapport à  $\diamond$  sur  $\mathcal{S}_i$ , c'est-à-dire que pour toutes  $r_1, r_2 \in \mathcal{S}_i$  telles que  $r_1 \diamond r_2 \neq \emptyset$ , on a la propriété  $(\mathring{\Gamma}_i^j r_1) \diamond (\mathring{\Gamma}_i^j r_2) \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j(r_1 \diamond r_2)$ ;
- (ii)  $\mathring{\Gamma}_i^j$  est sur-distributif par rapport à  $\cap$  sur  $\mathcal{S}_i$ , c'est-à-dire que pour toutes  $r_1, r_2 \in \mathcal{S}_i$  telles que  $r_1 \cap r_2 \neq \emptyset$ , on a la propriété  $(\mathring{\Gamma}_i^j r_1) \cap (\mathring{\Gamma}_i^j r_2) \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j(r_1 \cap r_2)$ .

Remarquons qu'une propriété similaire, la distributivité de la composition sur l'intersection, a déjà été identifiée comme impliquant la traitabilité de sous-algèbres de formalismes classiques (Long, Li, 2015).

En fait, la sur-distributivité de  $\mathring{\Gamma}_i^j$  par rapport à  $\cap$  et  $\diamond$  implique que n'importe quelle propagation de la composition préserve la clôture par projection sur les réseaux cohérents, et donc que la simplicité est vérifiée.

**PROPOSITION 44.** — *Toute sous-algèbre  $\mathring{\Gamma}$ -close et  $\mathring{\Gamma}$ -distributive est simple.*

**PREUVE.** — Par la proposition 42, il suffit de prouver cette propriété pour chaque sous-classe  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ . Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et soit  $N'$  un réseau sur  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ ; nous allons montrer que  $N'$  est simple grâce à la sur-distributivité. Soit  $N$  la clôture de  $N'$  par projection. Supposons que la clôture par composition de  $N$  n'est pas trivialement incohérente (dans le cas contraire,  $N'$  serait simple par définition), et montrons qu'effectuer une propagation de la composition laisse  $N$  clos par projection. Par symétrie (par rapport à  $\mathring{\Gamma}_i^j$ ), nous avons juste besoin de prouver qu'après une composition, le réseau est encore clos par l'opérateur de projection  $\mathring{\Gamma}_i^j$ , c'est-à-dire que

$$\forall x, y, z \in \mathbf{E}: N_j^{xz} \cap (N_j^{xy} \diamond N_j^{yz}) \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j(N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \diamond N_i^{yz})).$$

Soient  $x, y$  et  $z$  des variables de  $N$ . Puisque l'on suppose que la clôture par composition de  $N$  ne peut être trivialement incohérente,  $N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \diamond N_i^{yz}) \neq \emptyset$ , et en particulier  $N_i^{xy} \diamond N_i^{yz} \neq \emptyset$ . Puisque  $N$  est clos par projection,  $N_j^{XY} \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j N_i^{XY}$  pour tous  $X, Y \in \{x, y, z\}$  distincts. Par monotonie de  $\diamond$  (car  $r_1 \diamond r_2 = \bigcup_{b_1 \in r_1, b_2 \in r_2} b_1 \diamond b_2$ ), nous obtenons  $N_j^{xy} \diamond N_j^{yz} \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j N_i^{xy} \diamond \mathring{\Gamma}_i^j N_i^{yz}$ . Par sur-distributivité de  $\mathring{\Gamma}_i^j$  par rapport à  $\diamond$ , nous déduisons  $N_j^{xy} \diamond N_j^{yz} \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j(N_i^{xy} \diamond N_i^{yz})$ . Puisque  $N_j^{xz} \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j N_i^{xz}$ , on a  $N_j^{xz} \cap (N_j^{xy} \diamond N_j^{yz}) \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j(N_i^{xz}) \cap \mathring{\Gamma}_i^j(N_i^{xy} \diamond N_i^{yz})$ . Par sur-distributivité de  $\mathring{\Gamma}_i^j$  par rapport à  $\cap$ , la propriété  $N_j^{xz} \cap (N_j^{xy} \diamond N_j^{yz}) \subseteq \mathring{\Gamma}_i^j(N_i^{xz} \cap (N_i^{xy} \diamond N_i^{yz}))$  est donc satisfaite. Ainsi, clore  $N'$  par projection puis par composition donne un réseau algébriquement cohérent s'il n'est pas trivialement incohérent :  $N'$  est donc simple.

Puisque pour chaque  $(i, j)$  tous les réseaux sur  $\mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$  sont simples, la proposition 42 implique que  $\mathcal{S}$  est simple. ■

#### 5.4.2. Stabilités

Nous nous intéressons à présent à la vérification de la stabilité algébrique (définition 40), pour pouvoir appliquer le théorème d'affinement. Nous remarquons d'abord qu'un sous-ensemble est algébriquement stable s'il est à la fois *stable pour la composition* et *stable pour la projection*.

**DÉFINITION 45.** — *Un sous-ensemble  $\mathcal{S}$  d'une multialgèbre est dit stable par un affinement  $H$  pour la composition si pour tout réseau  $N$  sur  $\mathcal{S}$ , si  $N$  est chemin-cohérent alors  $H(N)$  est aussi chemin-cohérent.*

*De plus,  $\mathcal{S}$  est dit stable par un affinement  $H$  pour la projection si pour toute relation  $R \in \mathcal{S}$ , si  $R$  est  $\uparrow$ -cohérente alors  $H(R)$  est aussi  $\uparrow$ -cohérente.*

**LEMME 46.** — *Un sous-ensemble d'une multialgèbre qui est stable par un affinement  $H$  pour la projection et pour la composition est algébriquement stable par  $H$ .*

On a ainsi simplement besoin de vérifier indépendamment la stabilité pour la composition et pour la projection. À nouveau, on peut vérifier ces propriétés par énumération : pour la composition, il suffit d'énumérer les réseaux à trois variables de toutes les tranches  $\mathcal{S}_i$  ; pour la projection, il suffit d'énumérer les relations de toutes les paires de tranches. Plus précisément :

**PROPOSITION 47.** — *Soit  $\mathcal{S}$  un sous-ensemble d'une multialgèbre et  $H = (h_1, \dots, h_m)$  un multiaffinement de  $\mathcal{S}$ .*

1. *Si, pour toute tranche  $\mathcal{S}_i$  et tout réseau  $N$  à 3 variables chemin-cohérent sur  $\mathcal{S}_i$ ,  $h_i(N)$  est encore chemin-cohérent, alors  $\mathcal{S}$  est stable pour la composition par  $H$ .*

2. *Si, pour toute paire de tranches  $\{\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j\}$  et toute relation  $\uparrow$ -cohérente  $R \in \mathcal{S}_i \times \mathcal{S}_j$ ,  $(h_i, h_j)(R)$  est encore  $\uparrow$ -cohérente, alors  $\mathcal{S}$  est stable pour la projection par  $H$ .*

**PREUVE.** — (1) Soit  $N$  un réseau chemin-cohérent sur  $\mathcal{S}$  ; on montre que  $H(N)$  est chemin-cohérent. On sait par hypothèse que si on affine par  $h_i$  un réseau à 3 variables chemin-cohérent sur  $\mathcal{S}_i$ , alors il reste chemin-cohérent. D'une part, on en déduit que  $H(N)$  n'est pas trivialement incohérent. D'autre part, la clôture par composition étant locale à chaque triplet de variables et à chaque tranche,  $H(N)$  est nécessairement clos par composition. Plus précisément, pour des variables  $x, y, z$  de  $N$ , on a  $N_i^{xz} \subseteq N_i^{xy} \diamond N_i^{yz}$  pour tout  $i$ , et on sait qu'après l'affinement, on a  $h_i(N_i^{xz}) \subseteq h_i(N_i^{xy}) \diamond h_i(N_i^{yz})$  pour tout  $i$ , ce qui est exactement la définition de la clôture par composition pour  $H(N)$ .

(2) Soit  $R$  une relation  $\uparrow$ -cohérente de  $\mathcal{S}$ . Le fait que  $H(R)$  soit  $\uparrow$ -cohérente se déduit directement de l'hypothèse : pour tous  $(i, j)$ , la relation  $(h_i, h_j)(R_i, R_j) = (h_i(R_i), h_j(R_j))$  est  $\uparrow$ -cohérente, donc  $h_j(R_j) \subseteq \uparrow_i^j h_i(R_i)$  et  $h_i(R_i) \subseteq \uparrow_j^i h_j(R_j)$ . ■

Notons que la stabilité pour la composition est souvent déjà établie, car c'est un moyen classique de prouver la traitabilité d'une sous-classe classique. Ainsi, l'algèbre des points et la classe des relations pré-convexes de l'algèbre des intervalles

sont stables par  $h_{\max}$  pour la composition (Renz, 1999). Les sous-algèbres maximales pour la traitabilité de RCC8 sont elles aussi stables pour la composition par leurs affinements classiques (Renz, 1999). Ajoutons que, bien que la stabilité algébrique soit une hypothèse du théorème d’affinement, pour les multialgèbres arborescentes (définition 25) la stabilité pour la projection implique l’hypothèse C3 du théorème de découpage (par la proposition 26).

## 6. Illustration de l’application des résultats de traitabilité

Nous appliquons dans cette section notre cadre formel pour retrouver les résultats de traitabilité de QST (formalisme présenté notamment dans les exemples 1 et 19). Il s’agit uniquement d’une simple illustration de nos résultats ; évidemment, l’intérêt principal de notre travail est qu’il s’applique aussi aux réseaux sur des multialgèbres de grande dimension, comme les séquences spatio-temporelles, et pas seulement aux biréseaux. Nous commençons avec la combinaison de  $\text{PA}_{\max} = \{<, =, >, \neq, \mathcal{B}\}$ , qui est la plus grande sous-algèbre distributive de PA contenant “ $\neq$ ”, et  $\text{RCC8}_{\max}$ , la plus grande sous-algèbre distributive et non convexe de RCC8 (Long, Li, 2015).

**COROLLAIRE 48.** —  $\text{RCC8}_{\max} \times \text{PA}_{\max}$  est algébriquement traitable pour QST.

**PREUVE.** — Pour prouver ce résultat, nous affaiblissons la projection de PA vers RCC8 : nous considérons que  $\uparrow_{\text{PA}}^{\text{RCC8}} b = \mathcal{B}_{\text{RCC8}}$  pour tout  $b \in \mathcal{B}_{\text{PA}}$ . Nous prouvons dans la suite que la sous-classe est algébriquement traitable pour la multialgèbre affaiblie, ce qui implique directement qu’elle l’est également pour la multialgèbre d’origine.

Nous appliquons le théorème de découpage, en utilisant la fonction identité comme affinement sur les deux tranches ( $\forall r \in \mathcal{S}_i : h_i(r) = r$ ). On a la scénarisabilité par  $h_i$  (C1) puisque les réseaux chemin-cohérents sont minimaux pour  $\text{RCC8}_{\max}$  et pour  $\text{PA}_{\max}$  (Long, Li, 2015) ; on a la simplicité (C2) car la sous-algèbre est  $\uparrow$ -distributive (proposition 44) ; les relations  $\uparrow$ -cohérentes sont cohérentes (C3) par la proposition 26, puisque la multialgèbre affaiblie est arborescente ; enfin, les scénarios algébriquement clos sont cohérents, parce qu’un scénario algébriquement clos pour cette multialgèbre affaiblie est clos pour la multialgèbre d’origine, et que les scénarios algébriquement clos de la multialgèbre d’origine sont cohérents (Gerevini, Renz, 2002). Nous concluons car la sous-algèbre est  $\uparrow$ -close. ■

Considérons maintenant  $\text{H}_8$ ,  $\text{C}_8$  et  $\text{Q}_8$ , les trois sous-algèbres de RCC8 maximales pour la traitabilité. Cette fois, on ne peut appliquer le théorème de découpage, car clore par projection puis par composition ne suffit pas à obtenir la clôture algébrique (la simplicité n’est pas satisfaite). On peut cependant appliquer le théorème d’affinement :

**COROLLAIRE 49.** — Si  $\mathcal{S}$  est une des sous-algèbres  $\text{H}_8$ ,  $\text{C}_8$  ou  $\text{Q}_8$ , la sous-algèbre  $\mathcal{S} \times \text{PA}$  est algébriquement traitable pour QST.

**PREUVE.** — Nous appliquons le théorème d’affinement, en utilisant pour chaque  $\mathcal{S}$  son affinement classique vers les relations basiques (Gerevini, Renz, 2002), noté  $h_{\mathcal{S}}$ , et pour PA l’affinement  $h_{\max}$  ;  $H = (h_{\mathcal{S}}, h_{\max})$  envoie les relations vers  $\text{RCC8}_{\max} \times \text{PA}_{\max}$ .

Chaque sous-classe  $\mathcal{S} \times \text{PA}$  est algébriquement stable par  $H$  (C1), puisque la clôture par composition et celle par projection sont conservées par affinement (vérifié par énumération grâce à la proposition 47; voir aussi Renz (1999)). Les réseaux algébriquement cohérents sur  $\text{RCC}_{8_{\max}} \times \text{PA}_{\max}$  sont cohérents (C2) par le corollaire 48. Nous concluons car les sous-algèbres sont  $\Gamma$ -closes. ■

Ces deux corollaires impliquent que le raisonnement à propos de descriptions sur ces sous-classes peut être effectué efficacement grâce à la clôture algébrique. Notons que, comme dans le cadre classique, la clôture algébrique peut en fait aider au raisonnement même pour les sous-classes intraitables, en améliorant l'élagage lors d'une procédure de recherche avec *backtrack* (voir la section 2.1).

## 7. Conclusion

Nous avons proposé un cadre formel général pour les réseaux de contraintes qualitatives sur des combinaisons de formalismes. Il permet d'étudier de manière unifiée les intégrations lâches, les descriptions multiéchelles et les séquences temporelles d'informations spatiales, et également de raisonner dans le contexte de ces combinaisons. Nous avons en particulier prouvé deux théorèmes complémentaires assurant la traitabilité de la décision de la cohérence, et nous les avons appliqués pour retrouver les résultats de traitabilité de la combinaison « taille-topologie ». Ces théorèmes nous ont permis d'obtenir plusieurs résultats nouveaux, comme la traitabilité de la sous-classe des relations préconvexes de l'algèbre des intervalles d'Allen dans le contexte du raisonnement multiéchelle, que nous développerons dans de futurs travaux.

## Bibliographie

- Allen J. F. (1983). Maintaining knowledge about temporal intervals. *Commun. ACM*, vol. 26, n° 11, p. 832-843.
- Beek P. van, Cohen R. (1989). *Approximation algorithms for temporal reasoning*. University of Waterloo. Department of Computer Science.
- Chen J., Cohn A. G., Liu D., Wang S., Ouyang J., Yu Q. (2015). A survey of qualitative spatial representations. *The Knowledge Engineering Review*, vol. 30, n° 01, p. 106-136.
- Chittaro L., Montanari A. (2000). Temporal representation and reasoning in artificial intelligence: Issues and approaches. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 28, n° 1-4, p. 47-106.
- Cohen-Solal Q., Bouzid M., Niveau A. (2015a). An algebra of granular temporal relations for qualitative reasoning. In *Proc. of IJCAI*, p. 2869-2875.
- Cohen-Solal Q., Bouzid M., Niveau A. (2015b). Une algèbre des relations temporelles granulaires pour le raisonnement qualitatif. In *Actes des neuvièmes journées de l'intelligence artificielle fondamentale*.
- Cohen-Solal Q., Bouzid M., Niveau A. (2017). Checking the consistency of combined qualitative constraint networks. In *Proc. of AAI*.

- Cohn A. G., Li S., Liu W., Renz J. (2014). Reasoning about topological and cardinal direction relations between 2-dimensional spatial objects. *Journal of Artificial Intelligence Research*, vol. 51, p. 493-532.
- Condotta J.-F., Kaci S., Marquis P., Schwind N. (2009). Merging qualitative constraint networks defined on different qualitative formalisms. In *Proc. of the international conference on spatial information theory*, p. 106-123.
- Dylla F., Mossakowski T., Schneider T., Wolter D. (2013). Algebraic properties of qualitative spatio-temporal calculi. In *Proc. of the international conference on spatial information theory*, p. 516-536.
- Euzenat J. (2001). Granularity in relational formalisms with application to time and space representation. *Computational intelligence*, vol. 17, n° 4, p. 703-737.
- Euzenat J., Montanari A. (2005). Time granularity. *Foundations of Artificial Intelligence*, vol. 1, p. 59-118.
- Freksa C. (1991). Conceptual neighborhood and its role in temporal and spatial reasoning. In *Proc. of the IMACS workshop on decision support systems and qualitative reasoning*, p. 181-187.
- Gerevini A., Nebel B. (2002). Qualitative spatio-temporal reasoning with RCC-8 and Allen's interval calculus: Computational complexity. In *Proc. of ECAI*, p. 312-316.
- Gerevini A., Renz J. (2002). Combining topological and size information for spatial reasoning. *Artificial Intelligence*, vol. 137, n° 1, p. 1-42.
- Goyal R., Egenhofer M. J. (2000). Cardinal directions between extended spatial objects. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, p. 291-301.
- Hobbs J. R. (1985). Granularity. In *Proc. of IJCAI*, p. 432-435.
- Jonsson P., Krokhn A. (2004). Complexity classification in qualitative temporal constraint reasoning. *Artificial Intelligence*, vol. 160, n° 1, p. 35-51.
- Li S., Cohn A. G. (2012). Reasoning with topological and directional spatial information. *Computational Intelligence*, vol. 28, n° 4, p. 579-616.
- Li S., Nebel B. (2007). Qualitative spatial representation and reasoning: A hierarchical approach. *The Computer Journal*, vol. 50, n° 4, p. 391-402.
- Ligozat G. (2011). *Raisonnement qualitatif sur le temps et l'espace*. Lavoisier.
- Ligozat G., Renz J. (2004). What is a qualitative calculus? A general framework. In *Proc. of the Pacific Rim international conference on artificial intelligence*, p. 53-64.
- Long Z., Li S. (2015). On distributive subalgebras of qualitative spatial and temporal calculi. In *Spatial information theory*, p. 354-374. Springer.
- Meiri I. (1996, novembre). Combining qualitative and quantitative constraints in temporal reasoning. *Artificial Intelligence*, vol. 87, n° 1-2, p. 343-385.
- Moratz R., Renz J., Wolter D. (2000). Qualitative spatial reasoning about line segments. In *Proc. of ECAI*, p. 234-238.
- Navarrete I., Morales A., Sciavicco G., Cardenas-Viedma M. A. (2013). Spatial reasoning with rectangular cardinal relations. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, vol. 67, n° 1, p. 31-70.

- Randell D. A., Cui Z., Cohn A. G. (1992). A spatial logic based on regions and connection. In *Proc. of KR*, p. 165-176.
- Renz J. (1999). Maximal tractable fragments of the region connection calculus: A complete analysis. In *Proc. of IJCAI*, p. 448-455.
- Renz J., Ligozat G. (2005). Weak composition for qualitative spatial and temporal reasoning. In *Proc. of CP*, p. 534-548. Springer.
- Westphal M., Hué J., Wöfl S., Nebel B. (2013). Transition constraints: A study on the computational complexity of qualitative change. In *Proc. of IJCAI*, p. 1169-1175.
- Westphal M., Woelfl S. (2008). Bipath consistency revisited. In *Proc. of the ECAI workshop on spatial and temporal reasoning*, p. 36-40.